

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Вища математика

Диференціальні рівняння

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за спеціальностями 161 «Хімічні технології та інженерія»,
162 «Біотехнології та біоінженерія»

Укладачі: О. О. Коваль, О. Б. Поліщук, В. І. Стогній

Електронне мережне навчальне видання

Київ

КПІ ім. Ігоря Сікорського

2022

Рецензент

Спічак С. В., канд. фіз.-мат. наук,
с. н. с. відділу математичної фізики
Інституту математики НАН України

Відповідальний

редактор

Горбачук В. М., д-р фіз.-мат. наук, проф.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 5 від 26.05.2022 р.) за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету (протокол № 02 від 24.02.2022 р.)

У навчальному посібнику подано матеріал з теорії звичайних диференціальних рівнянь згідно із силябусом кредитного модуля «Інтегральне числення та диференціальні рівняння». Посібник складається з трьох розділів, містить теоретичні питання, питання для самоперевірки, приклади розв'язування типових задач із детальним поясненням та варіанти індивідуальних завдань для кожного студента групи.

Для студентів заочної форми навчання хіміко-технологічного факультету та факультету біотехнології і біотехніки, також може бути використаний для аудиторної та самостійної роботи зі студентами денної форми навчання.

Реєстр. № НП 21/22-426. Обсяг 4,05 авт. арк.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
Теоретичні питання до теми «Диференціальні рівняння» кредитного модуля «Інтегральне числення та диференціальні рівняння».....	5
РОЗДІЛ 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ.....	7
1.1. Загальні поняття та означення. Задача Коші.....	7
1.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.....	9
1.3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку і рівняння, які зводяться до однорідних.....	13
1.4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.....	21
1.5. Диференціальне рівняння Бернуллі.....	26
Запитання для самоперевірки.....	31
РОЗДІЛ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ.....	32
2.1. Загальні поняття та означення. Задача Коші.....	32
2.2. Деякі типи рівнянь, що допускають зниження порядку.....	34
Запитання для самоперевірки.....	41
РОЗДІЛ 3. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ.....	42
3.1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.....	42
3.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод варіації довільних сталих.....	49
3.3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду.....	52
Запитання для самоперевірки.....	61
ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ.....	63
ДОДАТОК. Правила оформлення титульної сторінки.....	88
Список рекомендованої літератури.....	89

ВСТУП

Самостійна робота студентів є визначальною для засвоєння апарату вищої математики. Одним з елементів самостійної роботи є виконання контрольних робіт, основна мета яких – навчити студентів застосовувати набуті знання для самостійного розв’язування запропонованих задач і вміти користуватися додатковою літературою.

Вивчення студентами першого курсу заочної форми навчання хіміко-технологічного факультету та факультету біотехнології і біотехніки третього розділу кредитного модуля «Інтегральне числення та диференціальні рівняння» передбачає виконанням модульної контрольної роботи «Диференціальні рівняння».

Пропонований навчальний посібник написано на основі лекцій, що читалися авторами студентам різних спеціальностей і різних форм навчання.

Посібник складається з трьох розділів, містить теоретичні питання, які складені у відповідності до силабусу кредитного модуля «Інтегральне числення та диференціальні рівняння», запитання для самоперевірки до всіх розділів, приклади розв’язування типових задач із детальним поясненням та варіанти індивідуальних завдань для кожного студента групи. Задачі подані у вигляді 25 варіантів (номер варіанта відповідає номеру прізвища студента у списку групи), що дає змогу контролювати самостійну роботу студентів.

Виконання запропонованих навчальних завдань має сприяти опануванню методами розв’язування диференціальних рівнянь. Посібник може бути використаний для аудиторної та самостійної роботи зі студентами денної форми навчання.

Теоретичні питання до теми
«ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ»
кредитного модуля
«ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ»

1. Диференціальні рівняння першого порядку. Загальні поняття та означення. Задача Коші.
2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Метод розв'язування.
3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку. Метод розв'язування.
4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа).
5. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Метод Бернуллі.
6. Диференціальне рівняння Бернуллі. Метод розв'язування.
7. Диференціальні рівняння n -го порядку. Загальні поняття та означення. Задача Коші. Рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$. Метод розв'язування.
8. Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку (випадок $F(x, y', y'') = 0$). Метод розв'язування.
9. Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку (випадок $F(y, y', y'') = 0$). Метод розв'язування.
10. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку та основні властивості їх розв'язків.
11. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку. Теорема про структуру загального розв'язку.
12. Поняття лінійної залежності та лінійної незалежності системи функцій. Визначник Вронського (вронскіан).
13. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку. Теорема про структуру загального розв'язку.
14. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа).
15. Теорема про накладання частинних розв'язків лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку.

16. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Знаходження загального розв'язку у випадку дійсних різних коренів характеристичного рівняння.
17. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Знаходження загального розв'язку у випадку дійсних кратних коренів характеристичного рівняння.
18. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Знаходження загального розв'язку у випадку комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння.
19. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод знаходження частинного розв'язку у випадку правої частини спеціального вигляду.

РОЗДІЛ 1. Диференціальні рівняння першого порядку

1.1. Загальні поняття та означення. Задача Коші

Означення. Диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння вигляду

$$F(x, y, y') = 0, \quad (1.1)$$

яке пов'язує незалежну змінну x , невідому функцію $y(x)$ та її похідну y' .

Рівняння (1.1) може не містити в явному вигляді x та y , але обов'язково містить y' . Якщо можливо розв'язати рівняння (1.1) відносно похідної y' , то дістанемо

$$y' = f(x, y), \quad (1.2)$$

що називають диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної.

Рівняння (1.2) можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{або} \quad f(x, y)dx - dy = 0. \quad (1.3)$$

Рівняння (1.3) є частинним випадком рівняння

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (1.4)$$

де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – відомі функції. Рівняння (1.4) так само називають диференціальним рівнянням першого порядку.

Означення. Розв'язком диференціальних рівнянь (1.1) та (1.2) називають функцію $y = \varphi(x)$, яка на інтервалі (a, b) має неперервну похідну і у разі підстановки в початкове рівняння перетворює його в тотожність:

$$\forall x \in (a, b): \quad F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0, \quad \varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)).$$

Криву, яка є графіком деякого розв'язку рівняння (1.1) або (1.2) у системі координат Oxy , називають інтегральною кривою. Знаходження розв'язку диференціального рівняння називають його інтегруванням.

Наприклад, функція $y = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, є розв'язком рівняння $y' = y$.

Справді, підставляючи цю функцію та її похідну

$$y' = e^x$$

в дане рівняння, дістанемо тотожність

$$e^x \equiv e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Неважко переконатися, що розв'язком рівняння є також функція

$$y = Ce^x,$$

де C – довільна стала. Надаючи C довільного дійсного значення, щоразу дістаємо розв'язок даного рівняння, тобто маємо нескінченну множину розв'язків.

Умову, згідно з якою розв'язок $y = \varphi(x)$ набуває наперед заданого значення y_0 у заданій точці x_0 , називають *початковою умовою* розв'язку і записують:

$$y(x_0) = y_0. \quad (1.5)$$

Означення. Загальним розв'язком рівняння (1.2) у деякій області D називають функцію

$$y = \varphi(x, C), \quad (1.6)$$

яка

- 1) містить довільну сталу C ;
- 2) задовольняє рівняння (1.2) за будь-якого значення сталої C ;
- 3) для довільної початкової умови (1.5) існує єдине значення C_0 таке, що розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє задану початкову умову.

Частинним розв'язком рівняння (1.2) називають функцію $y = \varphi(x, C_0)$, яка утворюється із загального розв'язку (1.6) за певного значення сталої $C = C_0$.

Задача знаходження розв'язку рівняння (1.2), що задовольняє початкову умову (1.5), називають *задачею Коші* і записують $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

З погляду геометрії розв'язати задачу Коші означає виділити із множини інтегральних кривих ту, яка проходить через задану точку (x_0, y_0) .

Умову, за якої задача Коші має єдиний розв'язок, визначають такою теоремою.

Теорема Коші (про існування і єдиність розв'язку задачі Коші).

Якщо права частина f рівняння (1.2) та її частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ визначені й неперервні в деякій області D змінних x і y , то для довільної точки (x_0, y_0) цієї області задане рівняння має єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$, який задовольняє умову $\varphi(x_0) = y_0$.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді $\Phi(x, y, C) = 0$, то такий розв'язок називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння. Рівність $\Phi(x, y, C_0) = 0$ у цьому випадку називають *частинним інтегралом* рівняння.

Трапляються диференціальні рівняння, розв'язки яких неможливо отримати із загального розв'язку за жодного значення C . Такі розв'язки називають особливими. Наприклад, функція $y = (x + C)^2$ є загальним розв'язком рівняння $(y')^2 = 4y$. Проте це рівняння має ще й *особливий розв'язок* $y = 0$, який неможливо отримати із загального розв'язку при жодному значенні C .

1.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Означення. Рівняння вигляду

$$y' = f(x)g(y) \tag{1.7}$$

називають диференціальним рівнянням 1-го порядку з *відокремлюваними змінними*.

Для розв'язування рівняння (1.7) необхідно відокремити змінні, а саме записати $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

помножити обидві частини рівняння на dx і поділити на $g(y)$:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx. \quad (1.8)$$

Зінтегрувавши рівність (1.8), отримаємо загальний інтеграл рівняння:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C. \quad (1.9)$$

Зауваження 1. Треба окремо розглянути випадок $g(y) = 0$ для того, щоб не втратити деякі розв'язки рівняння (1.7).

Зауваження 2. Якщо під час розв'язання рівняння (1.7) один з інтегралів (1.9) є логарифмом, то довільну сталу доцільно записувати у вигляді $\ln|C|$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$y' = \frac{y \ln y}{x}.$$

Розв'язування. Запишемо в рівнянні $y' = \frac{dy}{dx}$, тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{x}$$

і відокремимо змінні

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{x}, \quad (1.10)$$

де $y > 0$, $y \neq 1$, $x \neq 0$.

Зінтегруємо рівняння (1.10)

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{d(\ln y)}{\ln y} = \int \frac{dx}{x}; \quad \ln|\ln y| = \ln|x| + \ln|C_1|$$

і зробивши деякі перетворення, дістанемо його загальний розв'язок:

$$\ln|\ln y| = \ln|C_1 x|; \quad \ln y = \pm C_1 x, \quad C_1 \neq 0.$$

Позначивши $C = \pm C_1$, матимемо

$$y = e^{Cx}, \quad C \neq 0. \quad (1.11)$$

Якщо взяти до уваги, що при діленні на $y \ln y$ втрачається розв'язок $y = 1$, то можна вважати, що у формулі (1.11), стала C набуває і значення нуль, при якому можна одержати втрачений розв'язок $y = 1$. Отже, загальний розв'язок рівняння $y = e^{Cx}$, $C \in \mathbb{R}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\frac{y'}{y^2 + 1} = e^x$.

Розв'язування. Запишемо $y' = \frac{dy}{dx}$, тоді

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = e^x dx; \quad \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int e^x dx; \quad \operatorname{arctg} y = e^x + C.$$

Зауваження 3. Якщо отримаємо загальний інтеграл (1.9) у вигляді $\operatorname{arctg} y = f(x, C)$; $\operatorname{arcctg} y = f(x, C)$; $\arccos y = f(x, C)$ і $\arcsin y = f(x, C)$, то, використовуючи формули $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \alpha) = \alpha$; $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} \alpha) = \alpha$; $\cos(\arccos \alpha) = \alpha$; $\sin(\arcsin \alpha) = \alpha$, зможемо знайти $y = \operatorname{tg}(f(x, C))$; $y = \operatorname{ctg}(f(x, C))$; $y = \cos(f(x, C))$; $y = \sin(f(x, C))$.

Згідно з зауваженням розв'яжемо рівність $\operatorname{arctg} y = e^x + C$ відносно функції y , матимемо

$$y = \operatorname{tg}(e^x + C),$$

що і є загальним розв'язком.

Приклад 3. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y(1+x^2)dy + x(1+y^2)dx = 0.$$

Розв'язування. Запишемо це рівняння у вигляді

$$y(1+x^2)dy = -x(1+y^2)dx.$$

Поділимо обидві частини рівності на $(1+x^2)(1+y^2)$:

$$\frac{y}{1+y^2}dy = -\frac{x}{1+x^2}dx;$$

зінтегруємо це рівняння, отримаємо

$$\int \frac{y}{1+y^2}dy = -\int \frac{x}{1+x^2}dx; \quad \frac{1}{2} \int \frac{d(y^2+1)}{1+y^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2};$$

$$\frac{1}{2} \ln|1+y^2| = -\frac{1}{2} \ln|1+x^2| + \frac{1}{2} \ln|C|, \quad C \neq 0.$$

Звідси загальний інтеграл диференціального рівняння набуває вигляду

$$1+y^2 = \frac{C}{1+x^2}, \quad C > 0.$$

Рівняння

$$1+x^2 = 0, \quad 1+y^2 = 0$$

не мають дійсних розв'язків, тому під час відокремлення змінних немає втрачених розв'язків. Усі розв'язки цього диференціального рівняння є в загальному інтегралі.

Приклад 4. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$(1+x^2)dy + ydx = 0,$$

який задовольняє початкову умову $y(0) = 3$ (задача Коші).

Розв'язування. Відокремимо змінні та зінтегруємо це рівняння:

$$(1+x^2)dy = -ydx; \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2}; \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{1+x^2};$$

$$\ln|y| = -\operatorname{arctg}x + C_1; \quad y = \pm e^{C_1 - \operatorname{arctg}x}; \quad y = \pm e^{C_1} e^{-\operatorname{arctg}x}.$$

Позначивши $C = \pm e^{C_1}$, матимемо

$$y = Ce^{-\operatorname{arctg}x}, \quad C \neq 0.$$

Якщо взяти до уваги, що при діленні на y втрачається розв'язок $y = 0$, то можна вважати, що стала C набуває і значення нуль, при якому можна отримати втрачений розв'язок. Отже, загальний розв'язок рівняння

$$y = Ce^{-\operatorname{arctg}x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Використовуючи початкову умову, знайдемо сталу C :

$$3 = Ce^{-\operatorname{arctg}0},$$

звідки $C = 3$. Підставивши знайдену сталу в загальний розв'язок, дістанемо шуканий частинний розв'язок рівняння:

$$y = 3e^{-\operatorname{arctg}x}.$$

1.3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку і рівняння, які зводяться до однорідних

Означення. Рівняння

$$y' = f(x, y) \tag{1.12}$$

називають однорідним, якщо f є однорідною функцією своїх аргументів нульового виміру, тобто якщо правильною є тотожність

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y) = f(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Зауваження. У загальному вигляді функцію $f(x, y)$ називають однорідною n -го виміру, якщо виконується тотожність

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Якщо взяти $\lambda = \frac{1}{x}$ і підставити в однорідну функцію нульового виміру, то дістанемо $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ і рівняння (1.12) зводиться до рівняння

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (1.13)$$

Рівняння (1.13) за допомогою підстановки $u = \frac{y}{x}$ завжди зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Справді, $y = u(x) \cdot x$, де u – невідома функція, тоді $y' = u'(x) \cdot x + u(x)$, а тому рівняння (1.13) набуде вигляду

$$u'x + u = \varphi(u)$$

або

$$\frac{du}{dx} x + u = \varphi(u),$$

звідси

$$x du = (\varphi(u) - u) dx. \quad (1.14)$$

Рівняння (1.14) є рівнянням з відокремлюваними змінними, його можна звести до рівняння вигляду

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}, \quad (1.15)$$

якщо $\varphi(u) - u \neq 0$.

Зінтегрувавши рівняння (1.15), отримаємо

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C,$$

і підставивши замість u вираз $\frac{y}{x}$, отримаємо загальний інтеграл однорідного рівняння (1.12).

Окремо розглянемо випадок $\varphi(u) - u = 0$. Тоді рівняння (1.14) запишемо у вигляді $xdu = 0$, розв'язками якого є функції $u = C$.

Отже, рівняння (1.12) може мати ще й розв'язки $u = Cx$.

Приклад 5. Розв'язати диференціальне рівняння

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$$

Розв'язування. Запишемо рівняння у вигляді

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}. \quad (1.16)$$

Функція $f(x, y)$ однорідна відносно своїх аргументів. Справді,

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \frac{\sqrt{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2} + \lambda y}{\lambda x} = \\ &= \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x} = f(x, y). \end{aligned}$$

Отже, рівняння (1.16) – однорідне, зведемо його до вигляду, зручного для підстановки $u = \frac{y}{x}$:

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}. \quad (1.17)$$

Замість $\frac{y}{x}$ підставивши u , а замість y' – вираз $u' \cdot x + u$, рівняння (1.17) зведеться до вигляду

$$x \frac{du}{dx} = \sqrt{1 - u^2}. \quad (1.18)$$

Відокремимо змінні

$$\frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dx}{x}$$

і результат зінтегруємо

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{dx}{x}; \quad \arcsin u = \ln|x| + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0;$$

$$\arcsin u = \ln(\pm C_1 x); \quad \arcsin u = \ln Cx,$$

де $C = \pm C_1$.

Замінімо $u = \frac{y}{x}$, одержимо загальний інтеграл початкового диференціального рівняння $\arcsin \frac{y}{x} = \ln Cx$ або після перетворень – загальний розв’язок $y = x \sin(\ln Cx)$.

Під час відокремлення змінних обидві частини рівняння ділять на $\sqrt{1-u^2} \neq 0$. Нехай $\sqrt{1-u^2} = 0$. Тоді маємо $1 - \frac{y^2}{x^2} = 0$, звідки $y = \pm x$. Підставимо $y = \pm x$ у початкове рівняння, отримаємо, що вони є його розв’язками. Отже, маємо розв’язки рівняння

$$y = x \sin(\ln Cx), \quad C \neq 0, \quad \text{і} \quad y = \pm x.$$

Означення. Диференціальне рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

є однорідним, якщо $M(x, y)$ і $N(x, y)$ – однорідні функції одного й того ж виміру.

Приклад 6. Розв’язати рівняння

$$(x + 2y)dx - xdy = 0. \quad (1.19)$$

Розв’язування. Функції $(x + 2y)$ та x – однорідні першого виміру. Здійснивши заміну $y = ux$, $dy = xdu + udx$, рівняння (1.19) набуде вигляду

$$(x + 2ux)dx - x(xdu + udx) = 0$$

або

$$xdu = (u + 1)dx.$$

Розв'яжемо здобуте рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{du}{u+1} = \frac{dx}{x}, \quad (u+1) \neq 0; \quad \int \frac{du}{u+1} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|u+1| = \ln|x| + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

або

$$u = Cx - 1, \quad C = \pm C_1.$$

Повертаючись до невідомої функції y , дістанемо

$$y = (Cx - 1)x, \quad C \neq 0.$$

Крім того, розв'язком буде $u = -1$, який було загублено при діленні на $u + 1$. Отже, є ще й розв'язок $y = -x$. Тоді загальний розв'язок має вигляд:

$$y = (Cx - 1)x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Приклад 7. Розв'язати задачу Коші:

$$y' = \frac{y}{x} - 1, \quad y(1) = 0.$$

Розв'язування. Права частина рівняння є однорідною функцією нульового виміру, отже, це рівняння є однорідним.

Нехай $y = u(x)x$, тоді $y' = u'x + u$. Підставивши ці вирази у вихідне рівняння, матимемо

$$u'x + u = u - 1; \quad u'x = -1; \quad x \frac{du}{dx} = -1; \quad du = -\frac{dx}{x}; \quad \int du = -\int \frac{dx}{x};$$

$$u = -\ln|x| + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0; \quad u = \ln\left|\frac{C_1}{x}\right|; \quad y = x \ln\left|\frac{C_1}{x}\right|; \quad y = x \ln\left(\pm \frac{C_1}{x}\right);$$

$$y = x \ln\left(\frac{C}{x}\right), \quad \text{де } C = \pm C_1.$$

Знайдемо значення сталої C , скориставшись початковою умовою $y(1) = 0$:

$$0 = 1 \cdot \ln\left(\frac{C}{1}\right).$$

Отже, $C = 1$, і тому розв'язком задачі Коші є функція $y = -x \ln x$.

Диференціальні рівняння, які можна звести до однорідних

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad (1.20)$$

де $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ – сталі; $f(u)$ – неперервна функція на деякому проміжку. Якщо $c_1 = c_2 = 0$, то отримаємо однорідне рівняння (1.12).

Нехай $c_1 \neq 0$ або $c_2 \neq 0$. Розглянемо два випадки:

1) якщо $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то рівняння (1.20) підстановкою $x = t + x_0$,

$y = z + y_0$ зводиться до однорідного, числа x_0 і y_0 знаходять із системи

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0, \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0; \end{cases}$$

2) якщо $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то рівняння (1.20) підстановкою $a_1x + b_1y = z$

зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Розглянемо ці випадки на прикладах.

Приклад 8. Розв'язати рівняння:

$$y' = \frac{3x - 2y + 7}{2x - y + 4}. \quad (1.21)$$

Розв'язування. Складемо і обчислимо детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

якщо $\Delta \neq 0$, то замінимо змінні x і y :

$$x = t + x_0, \quad y = z + y_0,$$

де x_0, y_0 – сталі величини.

Унаслідок заміни

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt},$$

а рівняння (1.21) зводиться до рівняння

$$\frac{dz}{dt} = \frac{3t - 2z + (3x_0 - 2y_0 + 7)}{2t - z + (2x_0 - y_0 + 4)}. \quad (1.22)$$

Обираємо x_0 і y_0 так, щоб

$$\begin{cases} 3x_0 - 2y_0 + 7 = 0, \\ 2x_0 - y_0 + 4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему лінійних рівнянь, одержимо $x_0 = -1$ і $y_0 = 2$, за яких рівняння (1.22) набуде вигляду

$$\frac{dz}{dt} = \frac{3t - 2z}{2t - z} \quad \text{або} \quad z' = \frac{3 - 2\frac{z}{t}}{2 - \frac{z}{t}}.$$

Щоб знайти розв'язок одержаного рівняння, виконаємо заміну:

$$\frac{z}{t} = u, \quad z = ut, \quad z' = u' \cdot t + u,$$

тоді

$$u't + u = \frac{3 - 2u}{2 - u} \quad \text{або} \quad u't = \frac{3 - 4u + u^2}{2 - u},$$

звідки

$$\begin{aligned} \frac{(2-u)du}{u^2 - 4u + 3} &= \frac{dt}{t}, \quad \int \frac{2-u}{u^2 - 4u + 3} = \int \frac{dt}{t}, \\ &- \frac{1}{2} \ln |u^2 - 4u + 3| = \ln |t| - \ln |C_1|. \end{aligned}$$

Виконавши перетворення, отримуємо загальний інтеграл

$$t = \frac{C}{\sqrt{u^2 - 4u + 3}}, \quad C = \pm C_1, \quad \text{або} \quad t = \frac{Ct}{\sqrt{z^2 - 4tz + 3t^2}};$$

$$(y - 2)^2 - 4(y - 2)(x + 1) + 3(x + 1)^2 = C.$$

Приклад 9. Розв'язати рівняння

$$y' = \frac{6x - 2y + 3}{-3x + y - 1}.$$

Розв'язування. Складемо і обчислимо детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Зробимо заміну

$$-3x + y = z, \quad y = z + 3x, \quad y' = z' + 3,$$

тоді рівняння набуде вигляду

$$z' + 3 = \frac{-2z + 3}{z - 1}$$

або

$$z' = \frac{-5z + 6}{z - 1}. \quad (1.23)$$

Відокремимо змінні та зінтегруємо рівняння (1.23):

$$\frac{z - 1}{-5z + 6} dz = dx;$$

$$\int \frac{z - 1}{-5z + 6} dz = \int dx;$$

$$-\frac{1}{5}z - \frac{1}{25} \ln|6 - 5z| = x + C.$$

Виконавши перетворення, одержуємо загальний інтеграл

$$\frac{1}{5}(y - 3x) + \frac{1}{25} \ln|6 + 15x - 5y| + x + C = 0.$$

1.4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Означення. Рівняння

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (1.24)$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – визначені й неперервні на деякому проміжку функції, називають *лінійним* диференціальним рівнянням першого порядку.

Якщо $Q(x) \neq 0$, то рівняння (1.24) називають *лінійним неоднорідним*, якщо $Q(x) \equiv 0$, то диференціальне рівняння

$$y' + P(x)y = 0 \quad (1.25)$$

називають *лінійним однорідним* диференціальним рівнянням, що відповідає рівнянню (1.24). Слід зауважити, що диференціальне рівняння (1.25) є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Для розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь застосовують *метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)* або *метод Бернуллі*.

Метод варіації довільної сталої

Метод варіації довільної сталої полягає в тому, що загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді розв'язку однорідного рівняння, де сталу вважають функцією.

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння (1.25). Це рівняння розв'язують за допомогою відокремлення змінних і одноразового інтегрування:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx, \quad \ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

або

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}, \quad C = \pm C_1. \quad (1.26)$$

Під час ділення на y було втрачено розв'язок $y = 0$, але його можна включити у вираз (1.26) при $C = 0$. Отже, формула (1.26) задає загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (1.25), що має вигляд

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (1.27)$$

Згідно з методом варіації довільної сталої загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1.24) шукатимемо у вигляді (1.27), вважаючи довільну сталу деякою диференційовною функцією $C(x)$:

$$y(x) = C(x)e^{-\int P(x)dx}. \quad (1.28)$$

Знайшовши похідну

$$y'(x) = C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx}(-P(x)), \quad (1.29)$$

та підставивши вирази (1.28) і (1.29) у рівняння (1.24), одержимо

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

звідки, відокремлюючи змінні і зінтегрувавши, знаходимо

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \quad (1.30)$$

Після підстановки виразу (1.30) у (1.28) дістанемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (1.24):

$$y(x) = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_1 \right) e^{-\int P(x)dx}. \quad (1.31)$$

Метод Бернуллі

Метод Бернуллі полягає в тому, що розв'язок рівняння (1.24) шукають у вигляді добутку

$$y = uv, \quad (1.32)$$

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ – невідомі функції, причому одна з цих функцій довільна.

Знаходячи похідну $y' = u'v + uv'$ й підставляючи значення y і y' в рівняння (1.24), дістанемо

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x).$$

Користуючись довільністю у виборі функції $v = v(x)$, підберемо її так, щоб

$$v' + P(x)v = 0, \quad (1.33)$$

тоді рівняння (1.24) буде рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0, \\ u'v = Q(x). \end{cases} \quad (1.34)$$

Щоб розв'язати систему (1.34), відокремимо змінні в рівнянні (1.33) та зінтегрувавши його, знайдемо загальний розв'язок:

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v, \quad \frac{dv}{v} = -P(x)dx, \quad \ln|v| = -\int P(x)dx + \ln|C_1|;$$

$$v = \pm C_1 e^{-\int P(x)dx}, \quad C_1 \neq 0.$$

Оскільки, згідно з методом Бернуллі, вибір однієї з функцій довільний, візьмемо за v який-небудь частинний розв'язок, наприклад,

$$v = e^{-\int P(x)dx}. \quad (1.35)$$

Знаючи функцію v , з другого рівняння системи (1.34) знайдемо функцію u :

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x); \quad du = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx;$$

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C. \quad (1.36)$$

Підставимо знайдені функції (1.35) і (1.36) у формулу (1.32) й остаточно знайдемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (1.24):

$$y(x) = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right) e^{-\int P(x)dx},$$

який повністю збігається з розв'язком, одержаним методом варіації довільної сталої.

Приклад 10. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' - \frac{y}{x} = x^4.$$

Розв'язування. Застосуємо метод варіації довільної сталої. Розглянемо спочатку відповідне однорідне рівняння

$$y' - \frac{y}{x} = 0.$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, одержуємо

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0; \quad y = \pm C_1 x$$

або $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$, врахувавши втрачений розв'язок $y = 0$.

Розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y = C(x)x,$$

звідки

$$y'(x) = C'(x)x + C(x).$$

Підставимо вирази y і y' у задане рівняння:

$$C'(x)x + C(x) - C(x) = x^4$$

або

$$C'(x) = x^3.$$

Звідси випливає, що

$$C(x) = \frac{x^4}{4} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

тому загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = \left(\frac{x^4}{4} + C_1 \right) x$$

або

$$y = \frac{x^5}{4} + C_1 x.$$

Приклад 11. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' + y = \frac{e^{-x}}{1-x}, \quad x \neq 1,$$

і виділити з нього частинний розв'язок, який задовольняє початкову умову $y(0) = 1$.

Розв'язування. Застосуємо метод Бернуллі. Підставимо

$$y = uv,$$
$$y' = u'v + uv'$$

у задане рівняння, маємо

$$u'v + uv' + uv = \frac{e^{-x}}{1-x},$$
$$u'v + u(v' + v) = \frac{e^{-x}}{1-x}, \quad (1.37)$$

тоді рівняння (1.37) буде рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} v' + v = 0, \\ u'v = \frac{e^{-x}}{1-x}. \end{cases}$$

Знайдемо функцію $v(x)$ з рівняння

$$v' + v = 0,$$
$$\frac{dv}{dx} = -v; \quad \int \frac{dv}{v} = -\int dx; \quad \ln|v| = -x + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0;$$
$$v = \pm C_1 e^{-x}, \quad C_1 \neq 0,$$

або $v = Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$, врахувавши втрачений розв'язок $v = 0$.

Поклавши $C = 1$, маємо

$$v = e^{-x}.$$

Тоді для функції $u(x)$ із (1.37) отримуємо диференціальне рівняння

$$u'e^{-x} = \frac{e^{-x}}{1-x},$$

звідки

$$u' = \frac{1}{1-x},$$

а функція $u(x)$ набуває вигляду

$$u = -\ln|1-x| + \ln C_1, \quad C_1 > 0,$$

або

$$u = \ln \frac{C_1}{|1-x|}.$$

Отже, загальний розв'язок запишемо таким чином:

$$y = uv = e^{-x} \ln \frac{C_1}{|1-x|}.$$

Знайдемо значення сталої C_1 , скориставшись початковою умовою $y(0) = 1$:

$$1 = \ln \frac{C_1}{|1-0|}.$$

Отже ,

$$C_1 = e$$

і тому розв'язком задачі Коші є функція

$$y = e^{-x} \ln \frac{e}{|1-x|}.$$

1.5. Диференціальне рівняння Бернуллі

Означення. Рівнянням Бернуллі називають рівняння вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0; 1, \quad (1.38)$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – неперервні функції на деякому проміжку.

Якщо $\alpha = 0$, то рівняння (1.38) є лінійним неоднорідним рівнянням, якщо $\alpha = 1$, то рівняння (1.38) є лінійним однорідним рівнянням. Для інших дійсних значень показника α рівняння Бернуллі можна звести до лінійного диференціального рівняння.

Якщо $y \neq 0$, то, поділивши обидві частини цього рівняння на y^α й увівши нову невідому функцію $z = y^{1-\alpha}$, дістанемо лінійне рівняння відносно функції z

$$z' + (1 - \alpha)P(x)z = (1 - \alpha)Q(x).$$

Після знаходження загального розв'язку цього лінійного рівняння загальний розв'язок рівняння Бернуллі отримаємо у вигляді

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Зауважимо, що $y = 0$ – розв'язок рівняння Бернуллі, якщо $\alpha > 0$.

Зауваження. Розв'язок рівняння Бернуллі можна шукати безпосередньо методом Бернуллі у вигляді $y = uv$, не зводячи його попередньо до лінійного рівняння.

Приклад 12. Розв'язати рівняння

$$(x^2 - 1)y' + xy - y^2 = 0. \quad (1.39)$$

Розв'язування. Перетворимо рівняння (1.39) у рівняння Бернуллі (1.38):

$$y' + \frac{xy}{x^2 - 1} = \frac{y^2}{x^2 - 1}. \quad (1.40)$$

Розділимо рівняння (1.40) на y^2 :

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{x}{y(x^2 - 1)} = \frac{1}{x^2 - 1}. \quad (1.41)$$

Позначимо через $z = \frac{1}{y}$, звідки $z' = -\frac{y'}{y^2}$. З цими замінами рівняння (1.41) набуде вигляду

$$-z' + \frac{x}{x^2 - 1}z = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Отже, початкове рівняння, зведене до лінійного, набуває вигляду

$$z' - \frac{x}{x^2 - 1}z = -\frac{1}{x^2 - 1}.$$

Для розв'язування лінійного рівняння використовуємо підстановку $z = uv$, $z' = u'v + v'u$ й отримуємо

$$u'v + uv' - \frac{x}{x^2 - 1} uv = -\frac{1}{x^2 - 1}$$

або

$$u'v + u\left(v' - \frac{x}{x^2 - 1} v\right) = -\frac{1}{x^2 - 1}.$$

Функцію $v(x)$ знаходимо з рівняння $v' - \frac{x}{x^2 - 1} v = 0$;

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x}{x^2 - 1} v; \quad \frac{dv}{v} = \frac{x dx}{x^2 - 1}; \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{x dx}{x^2 - 1};$$

$$\ln|v| = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + \ln|C_1|; \quad v = \pm C_1 \sqrt{x^2 - 1}; \quad v = C \sqrt{x^2 - 1}, \quad C = \pm C_1.$$

Поклавши $C = 1$, маємо $v = \sqrt{x^2 - 1}$, тоді функцію $u(x)$ знаходимо з рівняння

$$u' \sqrt{x^2 - 1} = -\frac{1}{x^2 - 1}; \quad \frac{du}{dx} \sqrt{x^2 - 1} = -\frac{1}{x^2 - 1};$$

$$du = -\frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}, \quad u = -\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} + C.$$

Обчислимо останній інтеграл за допомогою заміни $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$. Маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} &= -\int \frac{dt}{\frac{t^2(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{t^3}} = -\int \frac{t dt}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1-t^2)}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + C = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + C. \end{aligned}$$

Отже,

$$u = \frac{x + C\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

тоді

$$z = uv = \frac{x + C\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x^2 - 1} = x + C\sqrt{x^2 - 1}.$$

Звідси, врахувавши, що $y = \frac{1}{z}$, отримаємо загальний розв'язок рівняння Бернуллі

$$y(x) = \frac{1}{x + C\sqrt{x^2 - 1}}. \quad (1.42)$$

Розв'язати рівняння Бернуллі можна, не зводячи його до лінійного рівняння, безпосередньо методом Бернуллі, використовуючи підстановку $y = uv$.

Знайдемо розв'язок рівняння (1.40) методом Бернуллі.

Розв'язування. Підстановка $y(x) = uv$, u , v – невідомі функції, зводить рівняння (1.40) до вигляду

$$u'v + uv' + \frac{xuv}{x^2 - 1} = \frac{u^2v^2}{x^2 - 1}$$

або

$$u'v + u\left(v' + \frac{xv}{x^2 - 1}\right) = \frac{u^2v^2}{x^2 - 1}. \quad (1.43)$$

Знайдемо $v(x)$ таким чином, щоб $v' + \frac{xv}{x^2 - 1} = 0$, тобто $\frac{dv}{v} = -\frac{xdx}{x^2 - 1}$;

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{xdx}{x^2 - 1}; \quad \ln|v| = -\frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| + \ln|C_1|;$$

$$v(x) = \frac{\pm C_1}{\sqrt{x^2 - 1}}; v(x) = \frac{C}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad C = \pm C_1.$$

Поклавши $C = 1$, маємо $v(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

У разі такого вибору $v(x)$ рівняння (1.43) набуває вигляду

$$u' \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = u^2 \frac{1}{(x^2 - 1)^2}; \quad \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}; \quad -\frac{1}{u} = \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Використовуючи результати попереднього інтегрування, отримаємо

$$u(x) = \frac{1}{C + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + C\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Тоді

$$y(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + C\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x + C\sqrt{x^2 - 1}},$$

що збігається з розв'язком (1.42).

Запитання для самоперевірки

1. Які рівняння називають диференціальними?
2. Що називають порядком диференціального рівняння?
3. Що називають розв'язком диференціального рівняння?
4. Що називають загальним, частинним та особливим розв'язком диференціального рівняння першого порядку?
5. Що називають загальним і частинним інтегралом диференціального рівняння першого порядку?
6. Сформулювати задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної.
7. Сформулювати теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку.
8. Які диференціальні рівняння називаються рівняннями з відокремлюваними змінними і як вони інтегруються?
9. Які диференціальні рівняння називають однорідними і як вони інтегруються?
10. Які диференціальні рівняння зводять до однорідних? Вказати метод їхнього розв'язування.
11. Які диференціальні рівняння першого порядку називають лінійними (однорідними, неоднорідними)?
12. У чому полягає суть методу варіації довільної сталої для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь першого порядку?
13. Описати метод Бернуллі розв'язування лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.
14. Яке диференціальне рівняння називають рівнянням Бернуллі, як воно інтегрується?

РОЗДІЛ 2. Диференціальні рівняння вищих порядків

2.1. Загальні поняття та означення. Задача Коші

Означення. Диференціальним рівнянням n -го порядку називають рівняння вигляду

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.1)$$

де x – незалежна змінна, $y = y(x)$ – невідома функція, а $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ – визначена й неперервна функція в деякій області D .

Диференціальне рівняння n -го порядку (2.1), розв'язане відносно старшої похідної, набуває вигляду

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (2.2)$$

Означення. Розв'язком диференціального рівняння (2.2) на деякому інтервалі (a, b) називають функцію $\varphi(x)$, яка n разів неперервно диференційовна на цьому інтервалі й у разі підстановки в рівняння (2.2) перетворює його в тотожність за $x \in (a, b)$:

$$\varphi^{(n)}(x) \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)).$$

Криву, яка є графіком деякого розв'язку рівняння (2.2) у системі координат Oxy , називають інтегральною кривою.

Для диференціальних рівнянь вищих порядків, як і для рівнянь першого порядку, розглядається задача Коші.

Задачею Коші для рівняння (2.2) називають задачу про знаходження розв'язку $y = y(x)$ рівняння (2.2), що задовольняє умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (2.3)$$

де $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – задані числа.

Умови (2.3) називають початковими умовами рівняння (2.2), зокрема для рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y')$$

початкові умови набувають вигляду

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0.$$

Геометричний зміст задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку полягає в тому, що з множини інтегральних кривих, які проходять через точку $M_0(x_0, y_0)$, треба вибрати криву, що має заданий кутовий коефіцієнт дотичної в точці M_0 , рівний y'_0 .

Існування і єдиність розв'язку задачі Коші визначаються такою теоремою.

Теорема Коші (про існування і єдиність розв'язку задачі Коші).

Якщо в задачі Коші для диференціального рівняння (2.2) з початковими умовами (2.3) функція $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ та її частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ неперервні в деякій області D , то для будь-якої точки $M_0(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$ існує єдиний розв'язок задачі Коші.

Розглянемо поняття загального та частинного розв'язку рівняння (2.2). Загальний розв'язок рівняння першого порядку містить одну довільну сталу і його знаходять за допомогою операції інтегрування. У загальному випадку розв'язок диференціального рівняння n -го порядку знаходять у результаті n послідовних інтегрувань, тому він має містити n довільних сталих.

Означення. Функцію

$$y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (2.4)$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні сталі, називають загальним розв'язком диференціального рівняння (2.2), якщо:

1) функція (2.4) є розв'язком цього рівняння для будь-яких значень сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$;

2) для будь-яких початкових умов (2.3) існує єдиний набір значень $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$ такий, що функція $y = y(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$ задовольняє ці початкові умови.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знаходять у неявній формі

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad (2.5)$$

то його називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння (2.2).

Частинний розв'язок або *частинний інтеграл* знаходять із співвідношень (2.4) або (2.5), якщо кожній довільній сталій $C_1, C_2, \dots, C_n$ надати конкретного числового значення.

2.2. Деякі типи рівнянь, що допускають зниження порядку

Розв'язування деяких диференціальних рівнянь, порядок яких вищий за перший, можна звести до розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку. Такі рівняння називають диференціальними рівняннями вищих порядків, в яких можливе зниження порядку. Розглянемо деякі типи таких рівнянь.

Диференціальні рівняння n -го порядку, які розв'язують послідовним n -кратним інтегруванням

Розглянемо рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f(x), \quad (2.6)$$

де $f(x)$ – відома неперервна функція.

Знайдемо загальний розв'язок рівняння (2.6), послідовно знижуючи його порядок на одиницю.

Справді, записавши це рівняння у вигляді

$$\frac{d}{dx}(y^{(n-1)}) = f(x) \quad \text{або} \quad d(y^{(n-1)}) = f(x)dx,$$

та зінтегрувавши

$$\int d(y^{(n-1)}) = \int f(x)dx,$$

дістанемо

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

де C_1 – стала інтегрування.

Аналогічно знайдемо

$$d(y^{(n-2)}) = (\int f(x)dx + C_1)dx,$$

звідки

$$y^{(n-2)} = \int (\int f(x)dx)dx + C_1x + C_2;$$

$$d(y^{(n-3)}) = (\int (\int f(x)dx)dx + C_1x + C_2)dx;$$

$$y^{(n-3)} = \int (\int (\int f(x)dx)dx)dx + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3,$$

де C_1, C_2, C_3 – сталі інтегрування. Продовжуючи розрахунки, після n інтегрувань отримаємо загальний розв'язок рівняння (2.6):

$$y = \int (\dots \int (\int f(x)dx)dx) \dots dx + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \dots + C_{n-1}x + C_n.$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$y^{(4)} = \cos 3x.$$

Розв'язування. Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy'''}{dx} = \cos 3x$$

і, застосувавши метод розв'язування рівнянь з відокремлюваними змінними, знайдемо

$$dy''' = \cos 3x dx; \quad \int dy''' = \int \cos 3x dx; \quad y''' = \frac{1}{3} \sin 3x + C_1.$$

Аналогічно знаходимо y'' , y' , y :

$$y'' = -\frac{1}{9} \cos 3x + C_1x + C_2;$$

$$y' = -\frac{1}{27} \sin 3x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3;$$

$$y = \frac{1}{81} \cos 3x + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4.$$

Позначивши

$$C_1^* = \frac{C_1}{6}; \quad C_2^* = \frac{C_2}{2}; \quad C_3^* = C_3; \quad C_4^* = C_4,$$

отримуємо загальний розв'язок цього диференціального рівняння у вигляді

$$y = \frac{1}{81} \cos 3x + C_1^* x^3 + C_2^* x^2 + C_3^* x + C_4^*.$$

Диференціальні рівняння другого порядку, які не містять явно шуканої функції

Розглянемо рівняння

$$F(x, y', y'') = 0, \quad (2.7)$$

що не містить явно шуканої функції $y(x)$. Порядок такого рівняння можна знизити, якщо зробити заміну $y' = z(x)$, тоді $y'' = z'(x)$, тому дістаємо рівняння

$$F(x, z, z') = 0. \quad (2.8)$$

Знайшовши для рівняння (2.8) загальний розв'язок $z = \varphi(x, C_1)$ і підставивши замість z вираз y' , отримуємо рівняння $y' = \varphi(x, C_1)$ вигляду (2.6), яке інтегрується, і дає загальний розв'язок рівняння (2.7)

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$y'' + \frac{2}{x} y' = x. \quad (2.9)$$

Розв'язування. Рівняння (2.9) не містить у явному вигляді невідомої функції $y(x)$. Позначимо $y' = z(x)$, тоді $y'' = z'(x)$ і рівняння (2.9) набуває вигляду

$$z' + \frac{2}{x} z = x,$$

яке є лінійним неоднорідним рівнянням першого порядку відносно z . Розв'язавши його, наприклад методом Бернуллі, отримаємо

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{C_1}{x^2}.$$

Повертаючись до змінної y , дістанемо, що

$$y' = \frac{x^2}{4} + \frac{C_1}{x^2}.$$

Зінтегрувавши його, знайдемо загальний розв'язок

$$y = \frac{x^3}{12} - \frac{C_1}{x} + C_2.$$

Рівняння, яке явно не містить шуканої функції і кількох послідовних похідних

Розглянемо рівняння

$$F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \quad (2.10)$$

За допомогою підстановки $y^{(n-1)} = z(x)$, $y^{(n)} = z'(x)$ рівняння (2.10) зводиться до рівняння першого порядку вигляду

$$F(x, z, z') = 0.$$

Якщо для цього рівняння вдається знайти загальний розв'язок $z = \varphi(x, C_1)$, то приходимо до рівняння $y^{(n-1)} = \varphi(x, C_1)$ вигляду (2.6), після інтегрування якого отримуємо загальний розв'язок рівняння (2.10).

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$xy^{(4)} = y''.$$

Розв'язування. Рівняння не містить шуканої функції і її похідних до другого порядку включно. Позначимо $y''' = z(x)$, тоді $y^{(4)} = z'(x)$ і одержимо рівняння

$$xz' = z.$$

Розв'язуючи здобуте диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними, знаходимо

$$z = C_1 x.$$

Повертаючись до змінної y , маємо рівняння

$$y''' = C_1 x,$$

яке має вигляд (2.6).

Унаслідок трьох послідовних інтегрувань отримаємо загальний розв'язок

$$y'' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2,$$

$$y' = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3,$$

$$y = C_1 \frac{x^4}{24} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4,$$

або

$$y = C_1^* x^4 + C_2^* x^2 + C_3 x + C_4,$$

$$\text{де } C_1^* = \frac{C_1}{24}, \quad C_2^* = \frac{C_2}{2}.$$

Рівняння, яке явно не містить незалежної змінної

Розглянемо рівняння вигляду

$$F(y, y', y'') = 0, \quad (2.11)$$

яке не містить явно незалежної змінної x .

За допомогою заміни

$$y' = z(y), \quad (2.12)$$

де $z(y)$ – нова шукана функція, порядок рівняння (2.11) можна знизити на одиницю, оскільки

$$y''(x) = (z(y))' = z'(y) \cdot y'(x) = z'(y)z(y) = z \frac{dz}{dy}. \quad (2.13)$$

Підставляючи (2.12), (2.13) у (2.11), дістанемо рівняння першого порядку відносно нової шуканої функції z

$$F(y, z, z' \cdot z) = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння буде мати вигляд $z = \varphi(y, C_1)$, тоді з рівняння $y' = \varphi(y, C_1)$ знайдемо загальний інтеграл рівняння (2.11)

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші

$$y'' = 2y^3; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Розв'язування. Це рівняння не містить в явному вигляді незалежну змінну.

Вважатимемо, що $y' = z(y)$, тоді $y'' = z \frac{dz}{dy}$ і рівняння набуває вигляду

$$z \frac{dz}{dy} = 2y^3,$$

звідки

$$zdz = 2y^3 dy; \quad \int zdz = \int 2y^3 dy; \quad \frac{z^2}{2} = \frac{y^4}{2} + C; \quad z^2 = y^4 + C_1,$$

де $C_1 = 2C$.

Повертаючись до змінної y , маємо

$$y' = \pm \sqrt{y^4 + C_1}.$$

Зауважимо, що оскільки $y'(0) > 0$, то перед радикалом потрібно брати знак «+». Враховуючи це, маємо таке рівняння з відокремленими змінними

$$y' = \sqrt{y^4 + C_1}, \tag{2.14}$$

звідки

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^4 + C_1}; \quad \frac{dy}{\sqrt{y^4 + C_1}} = dx; \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y^4 + C_1}} = \int dx.$$

У лівій частині останньої рівності маємо інтеграл від диференціального бінома $x^m(a + bx^n)^p dx$, де $m = 0$, $n = 4$, $p = -\frac{1}{2}$, який за теоремою Чебишова через елементарні функції не виражається. Але, якщо використати початкові умови $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, то з рівняння (2.14) отримаємо $1 = \sqrt{1 + C_1}$, звідки $C_1 = 0$ і (2.14) набуває вигляду

$$y' = y^2. \quad (2.15)$$

Розв'язавши диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними (2.15), знаходимо загальний розв'язок

$$y = -\frac{1}{x + C}. \quad (2.16)$$

Для знаходження частинного розв'язку необхідно використати початкову умову $y(0) = 1$, тоді з (2.16) отримаємо розв'язок задачі Коші

$$y = \frac{1}{1 - x}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Які рівняння називають диференціальними рівняннями n -го порядку?
2. Що називають розв'язком диференціального рівняння n -го порядку?
3. Який розв'язок диференціального рівняння n -го порядку називають загальним, частинним?
4. Що називають загальним і частинним інтегралом диференціального рівняння n -го порядку?
5. Сформулюйте постановку задачі Коші для диференціального рівняння n -го порядку.
6. Сформулюйте теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння n -го порядку.
7. Опишіть метод розв'язування рівнянь вигляду $y^{(n)} = f(x)$.
8. Опишіть метод розв'язування диференціальних рівнянь вигляду $F(x, y', y'') = 0$.
9. Опишіть метод розв'язування диференціальних рівнянь вигляду $F(y, y', y'') = 0$.

РОЗДІЛ 3. Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

1.1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad (3.1)$$

де a_0, a_1, a_2 – дійсні числа, причому $a_0 \neq 0$.

Покажемо, що в цьому випадку розв'язування рівняння (3.1) завжди можливе в елементарних функціях без інтегрування за допомогою алгебраїчних операцій.

Із загальної теорії лінійних диференціальних рівнянь [2] випливає, що для знаходження загального розв'язку рівняння (3.1) досить знайти два частинних лінійно незалежних розв'язки цього рівняння.

Шукатимемо частинні розв'язки рівняння (3.1) у вигляді

$$y = e^{\lambda x}, \quad (3.2)$$

де λ – стала (дійсна чи комплексна), яку треба знайти. Диференціюючи за x вираз (3.2), отримаємо рівності

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}. \quad (3.3)$$

Підставляючи вирази (3.2) і (3.3) у ліву частину рівняння (3.1), дістанемо

$$(a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) e^{\lambda x} = 0. \quad (3.4)$$

Оскільки $e^{\lambda x} \neq 0$, то

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0. \quad (3.5)$$

Отже, якщо λ буде коренем рівняння (3.5), то функція (3.2) буде розв'язком рівняння (3.1).

Квадратне рівняння (3.5) називають *характеристичним рівнянням* диференціального рівняння (3.1).

Відомо, що рівняння (3.5) має два корені. Можливі такі випадки: 1) корені рівняння (3.5) дійсні різні (прості); 2) корені рівняння дійсні рівні (кратні); 3) корені рівняння комплексні.

Позначимо корені характеристичного рівняння (3.5) через λ_1 і λ_2 й розглянемо кожен випадок окремо.

1. Корені характеристичного рівняння дійсні різні.

Кожному з коренів λ_1 і λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) відповідає частинний розв'язок рівняння (3.1):

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}; \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

Зауважимо, що на підставі виконання умови

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq \text{const},$$

розв'язки є лінійно незалежними на довільному проміжку числової осі.

Згідно з теоремою про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (див., наприклад, [1]) загальним розв'язком рівняння (3.1) є функція

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad (3.6)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

2. Корені характеристичного рівняння дійсні рівні.

Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{a_1}{2a_0}$, тоді за формулою (3.2) дістанемо один із розв'язків

$$y = e^{\lambda x}.$$

Другий розв'язок шукатимемо у вигляді $y_2 = u(x)e^{\lambda x}$, де $u(x)$ – невідома функція від x . Знайшовши y_2' і y_2'' та підставивши їх у рівняння (3.1), дістанемо

$$(a_0 u'' + 2a_0 \lambda u' + a_0 \lambda^2 u)e^{\lambda x} + (a_1 u' + a_1 \lambda u)e^{\lambda x} + a_2 u e^{\lambda x} = 0$$

або

$$a_0 u'' + (2a_0 \lambda + a_1) u' + (a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) u = 0.$$

Оскільки λ – корінь рівняння (3.5), то $a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$ і $2a_0 \lambda + a_1 = 0$, тому $u'' = 0$, звідки $u = C_1 x + C_2$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Поклавши $C_1 = 1, C_2 = 0$ знайдемо частинний розв’язок рівняння (3.1):

$$y_2 = x e^{\lambda x}.$$

Розв’язки y_1 та y_2 – лінійно незалежні, оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{x} \neq \text{const},$$

тому загальний розв’язок рівняння (3.1), згідно з теоремою про загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння [1], має вигляд

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}, \quad (3.7)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

3. Корені характеристичного рівняння комплексні.

Оскільки коефіцієнти рівняння (3.5) є дійсними, то комплексні корені характеристичного рівняння можуть входити лише парами, тобто комплексному кореню $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ відповідає спряжений корінь $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, де $i = \sqrt{-1}$.

Підставивши значення λ_1 та λ_2 у формулу (3.2), знайдемо розв’язки

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}. \quad (3.8)$$

Вираз (3.8) є, взагалі кажучи, комплексним числом при кожному значенні x , а це означає, що ми маємо справу з комплексною функцією дійсної змінної.

Будь-яку комплексну функцію $z(x)$ дійсної змінної x можна подати у вигляді

$$z(x) = u(x) + i v(x), \quad (3.9)$$

де $u(x)$ і $v(x)$ – відповідно дійсна та уявна частини.

Зауважимо, що коли функція (3.9) є розв'язком рівняння (3.1), то розв'язками будуть також функції $u(x)$ і $v(x)$.

Справді, підставивши функцію $z(x)$ у рівняння (3.1), дістанемо

$$a_0(u'' + iv'') + a_1(u' + iv') + a_2(u + iv) = 0$$

або

$$(a_0u'' + a_1u' + a_2u) + i(a_0v'' + a_1v' + a_2v) = 0.$$

Остання тотожність можлива, коли вирази в дужках одночасно дорівнюють нулю. Це означає, що функції $u(x)$ та $v(x)$ – розв'язки рівняння (3.1). Скористаємось цим твердженням для перетворення розв'язків (3.8). Відокремивши в них дійсну частину від уявної і скориставшись формулою Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

дістанемо

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x;$$

$$e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Звідси випливає, що парі комплексно-спряжених коренів $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ відповідає два дійсних розв'язки рівняння (3.1)

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x; \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні, оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = \operatorname{ctg} \beta x \neq \operatorname{const},$$

тому загальний розв'язок рівняння (3.1), згідно з теоремою про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння [2], запишемо у вигляді

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \tag{3.10}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Розглянутий метод побудови загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами можна поширити і на рівняння n -го порядку. Не розглядаючи детально теорію (див. [3]), сформулюємо необхідні твердження.

Нехай маємо рівняння n -го порядку

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad (3.11)$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n$ – дійсні числа.

Характеристичним рівнянням для рівняння (3.11) називають алгебраїчне рівняння n -го степеня вигляду

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (3.12)$$

Як відомо [2], рівняння (3.12) має n коренів. Позначимо ці корені через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Залежно від коренів цього характеристичного рівняння отримаємо різні частинні розв'язки рівняння (3.12):

- 1) кожному простому кореню λ рівняння (3.12) відповідає частинний розв'язок $e^{\lambda x}$ рівняння (3.11);
- 2) кожному кореню λ кратності $m > 1$ відповідає m частинних розв'язків вигляду $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda x}$;
- 3) кожній парі $\alpha \pm i\beta$ простих комплексно-спряжених коренів рівняння (3.12) відповідає два частинних розв'язки рівняння (3.11):

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad e^{\alpha x} \sin \beta x;$$

- 4) кожній парі $\alpha \pm i\beta$ комплексно-спряжених коренів кратності $m > 1$ відповідає $2m$ частинних розв'язків вигляду

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x;$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Загальна сума кратності всіх коренів рівняння (3.12) дорівнює n , тому кількість частинних розв'язків рівняння (3.11) дорівнює n , тобто збігається з порядком рівняння (3.11).

Позначимо ці частинні розв'язки через $y_1, y_2, \dots, y_n$. Можна довести, що знайдені частинні розв'язки є лінійно незалежними і загальний розв'язок рівняння (3.11) знаходимо за формулою [1]

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (3.13)$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні сталі.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Розв'язування. Складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Підбираємо один із коренів цього рівняння, враховуючи, що він міститься серед дільників вільного члена, маємо $\lambda_1 = 1$. Згідно з наслідком теореми Безу многочлен $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6$ ділиться на $\lambda - 1$ без залишку:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 6) = 0,$$

звідки остаточно $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -2$; $\lambda_3 = 3$. Отже, згідно з формулою (3.13) загальний розв'язок цього диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x}.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

Розв'язування. Складаємо характеристичне рівняння цього диференціального рівняння

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

і знаходимо його корені:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0,$$

звідки $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Отже, згідно з формулою (3.13) загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x.$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - 8y = 0.$$

Розв'язування. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^3 - 8 = 0,$$

звідки

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0,$$

і його коренями є

$$\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}i.$$

Тоді, згідно з формулою (3.13), загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{2x} + e^{-x} (C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x).$$

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

Розв'язування. Знаходимо спочатку загальний розв'язок диференціального рівняння. Запишемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 4 = 0,$$

звідки його коренями є $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Згідно з формулою (3.13) загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Скористаємось початковими умовами. Оскільки

$$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x,$$

то

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 1; \\ -2C_1 \cdot 0 + 2C_2 = 4. \end{cases}$$

Звідси $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, оже шуканий розв'язок має вигляд

$$y = \cos 2x + 2\sin 2x.$$

3.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод варіації довільних сталих

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \quad (3.14)$$

де a_0, a_1, a_2 – задані дійсні числа, $f(x)$ – задана функція, неперервна на деякому проміжку $(a; b)$, $f(x) \neq 0$.

Оскільки рівняння (3.14) є лінійним рівнянням, то згідно з теоремою про загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння [2] загальний розв'язок $y_{\text{зн}}(x)$ рівняння (3.14) являє собою суму загального розв'язку $y_{\text{зо}}(x)$ відповідного однорідного рівняння

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad (3.15)$$

і частинного розв'язку $y_{\text{чн}}(x)$ рівняння (3.14), тобто

$$y_{\text{зн}}(x) = y_{\text{зо}}(x) + y_{\text{чн}}(x).$$

Розглянемо питання про знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння (3.14).

Насамперед зазначимо, що оскільки рівняння (3.14) лінійне, то частинний розв'язок можна побудувати методом варіації довільних сталих [2].

Нехай $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – лінійно незалежні розв'язки однорідного диференціального рівняння (3.15), тоді згідно з формулою (3.13) загальним розв'язком є

$$y_{\text{зо}}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (3.16)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Замінімо у формулі (3.16) сталі C_1, C_2 невідомими функціями $C_1(x), C_2(x)$ і підберемо ці функції так, щоб функція

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \quad (3.17)$$

була розв'язком рівняння (3.14).

Функція (3.17) буде частинним розв'язком $y_{\text{чн}}(x)$, коли функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ задовольнятимуть систему [1]

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \quad (3.18)$$

Система рівнянь (3.18) є неоднорідною лінійною системою відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$. Ця система є сумісною, бо її визначник відмінний від нуля [1]. Знайшовши із системи $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$, знаходимо й функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$.

Зауваження. При знаходженні функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ отримаємо дві довільні сталі, які можна вважати рівними нулю.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - y' = \frac{1}{1 + e^x}.$$

Розв'язування. Складаємо характеристичне рівняння відповідного однорідного лінійного диференціального рівняння

$$\lambda^2 - \lambda = 0.$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ і загальний розв'язок згідно з формулою (3.6) має вигляд

$$y_{\text{зо}}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 + C_2 e^x,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{\text{чн}}(x) = C_1(x) + C_2(x)e^x, \quad (3.19)$$

де $C_1(x)$ і $C_2(x)$ – невідомі функції. Щоб знайти функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$, складаємо систему (3.18), в якій $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = e^x$:

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)e^x = 0, \\ C_2'(x)e^x = \frac{1}{e^x + 1}, \end{cases}$$

розв'язавши яку, матимемо

$$C_2'(x) = \frac{1}{e^x(e^x + 1)}, \quad C_1'(x) = -\frac{1}{1 + e^x},$$

звідки

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int \frac{dx}{1 + e^x} = -\int \frac{dx}{e^x(e^{-x} + 1)} = -\int \frac{e^{-x} dx}{e^{-x} + 1} = \int \frac{d(e^{-x} + 1)}{e^{-x} + 1} = \\ &= \ln|e^{-x} + 1| + C_1 = \ln\left|\frac{1 + e^x}{e^x}\right| + C_1 = \ln|e^x + 1| - x + C_1; \\ C_2(x) &= \int \frac{dx}{e^x(1 + e^x)} = \int \frac{dx}{e^{2x}(e^{-x} + 1)} = \int \frac{e^{-2x} dx}{e^{-x} + 1} = \int \frac{e^{-2x} - 1 + 1}{e^{-x} + 1} dx = \\ &= \int (e^{-x} - 1 + \frac{e^x}{e^x + 1}) dx = -e^{-x} - x + \ln|e^x + 1| + C_2, \end{aligned}$$

де C_1 , C_2 – довільні сталі.

Покладемо $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, тоді

$$C_1(x) = \ln|e^x + 1| - x; \quad C_2(x) = -e^{-x} - x + \ln|e^x + 1|.$$

Запишемо частинний розв'язок (3.19) даного рівняння

$$y_{\text{чн}}(x) = \ln|e^x + 1| - x + (-e^{-x} - x + \ln|e^x + 1|)e^x = (1 + e^x)(\ln(e^x + 1) - x) - 1.$$

Отже, загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{зн}}(x) = C_1 + C_2 e^x + (e^x + 1)(\ln(e^x + 1) - x) - 1.$$

Позначивши $C^* = C_1 - 1$ отримуємо

$$y_{\text{зн}}(x) = C^* + C_2 e^x + (e^x + 1)(\ln(e^x + 1) - x).$$

3.3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння (3.14), частинний розв'язок якого можна знайти методом варіації довільних сталих. Під час застосування цього методу для знаходження інтегралів часто доводиться виконувати складні, громіздкі операції, проте для рівнянь зі спеціальною правою частиною частинний розв'язок можна знайти значно простіше, не вдаючись до операції інтегрування. При розв'язуванні рівнянь зі сталими коефіцієнтами з правою частиною вигляду

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x), \quad (3.20)$$

де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами степенів n і m відповідно; а α і β – дійсні числа, застосовують метод невизначених коефіцієнтів для знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння (3.14). Функцію (3.20) називають функцією спеціального вигляду.

Розглянемо деякі типи рівнянь з частинними випадками функції (3.20), до яких метод невизначених коефіцієнтів для знаходження частинного розв'язку застосовний, і вкажемо форму, в якій потрібно шукати частинний розв'язок рівняння (3.14) залежно від вигляду правої частини.

1. Нехай права частина рівняння (3.14) має вигляд

$$f(x) = P_n(x),$$

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n . Тоді:

а) якщо $\lambda = 0$ не є коренем характеристичного рівняння (3.5), то частинний розв'язок рівняння (3.14) шукають у вигляді многочлена стандартного вигляду

$$y_{\text{чн}} = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n, \quad (3.21)$$

де $A_0, A_1, \dots, A_n$ – невизначені коефіцієнти;

б) якщо $\lambda = 0$ є коренем кратності r характеристичного рівняння (3.5), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.14) шукають у вигляді

$$y_{\text{чн}} = x^r (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n),$$

де $A_0, A_1, \dots, A_n$ – невизначені коефіцієнти. Очевидно, що можливими значеннями $r \in 1$ і 2 (є «резонанс» порядку r).

Щоб знайти невизначені коефіцієнти $A_0, A_1, \dots, A_n$, необхідно знайти вирази $y'_{\text{чн}}, y''_{\text{чн}}$ і підставити $y_{\text{чн}}, y'_{\text{чн}}, y''_{\text{чн}}$ у рівняння (3.14), прирівняти коефіцієнти біля відповідних степенів x , в результаті чого отримаємо систему $n+1$ лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $A_0, A_1, \dots, A_n$ многочлена. Далі на прикладі буде показано, як це робиться практично.

Приклад 6. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 3y' - 4y = 4x^2 - 6x - 10, \quad y(0) = 9, \quad y'(0) = 2.$$

Розв'язування. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{\text{зн}}(x) = y_{\text{зо}}(x) + y_{\text{чн}}(x).$$

Запишемо характеристичне рівняння, яке відповідає однорідному диференціальному рівнянню: $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ з коренями $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 1$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння згідно з формулою (3.6) буде мати вигляд

$$y_{\text{зо}} = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x.$$

Знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння з правою частиною $f(x) = 4x^2 - 6x - 10$. У цьому разі $P_n(x) = 4x^2 - 6x - 10$, $n = 2$ – многочлен другого степеня; $\lambda = 0$ не є коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок шукатимемо у вигляді (3.21)

$$y_{\text{чн}} = Ax^2 + Bx + C,$$

де A, B, C – невизначені коефіцієнти.

Враховуючи, що $y'_{\text{чн}} = 2Ax + B$, $y''_{\text{чн}} = 2A$, підставимо $y_{\text{чн}}$, $y'_{\text{чн}}$ і $y''_{\text{чн}}$ у задане рівняння, тоді дістанемо

$$2A + 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2 - 6x - 10.$$

Після прирівнювання коефіцієнтів з відповідними степенями x матимемо

$$\begin{array}{l|l} x^2 & -4A = 4, \\ x & 6A - 4B = -6, \\ x^0 & 2A + 3B - 4C = -10, \end{array}$$

звідки $A = -1$, $B = 0$, $C = 2$.

Отже, частинний розв'язок заданого рівняння

$$y_{\text{чн}} = -x^2 + 2,$$

а загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_{\text{зн}}(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x - x^2 + 2.$$

Для того, щоб розв'язати задачу Коші, знаходимо $y'_{\text{зн}}(x)$

$$y'_{\text{зн}}(x) = -4C_1 e^{-4x} + C_2 e^x - 2x.$$

Використовуючи початкові умови, отримуємо лінійну систему рівнянь для визначення довільних сталих C_1 і C_2 :

$$y(0) = C_1 + C_2 + 2 = 9; \quad y'(0) = -4C_1 + C_2 = 2,$$

звідки знаходимо $C_1 = 1$, $C_2 = 6$.

Підставивши знайдені сталі в загальний розв'язок, отримуємо розв'язок задачі Коші

$$y(x) = e^{-4x} + 6e^x - x^2 + 2.$$

2. Нехай права частина рівняння (3.14) має вигляд

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}, \quad (3.22)$$

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n ; α – дійсне число. Тоді:

а) якщо $\lambda = \alpha$ не є коренем характеристичного рівняння (3.5), то частинний розв'язок рівняння (3.14) шукають у вигляді

$$y_{\text{чн}} = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) e^{\alpha x}, \quad (3.23)$$

де $A_0, A_1, \dots, A_n$ – невизначені коефіцієнти;

б) якщо $\lambda = \alpha$ є коренем кратності r характеристичного рівняння (3.5), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.14) шукають у вигляді

$$y_{\text{чн}} = x^r (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) e^{\alpha x}, \quad (3.24)$$

де $A_0, A_1, \dots, A_n$ – невизначені коефіцієнти.

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + y' - 2y = 3xe^x.$$

Розв'язування. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{\text{чн}}(x) = y_{\text{зо}}(x) + y_{\text{чн}}(x).$$

Характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння має корені $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння набуває вигляду (3.6)

$$y_{\text{зо}} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x.$$

Оскільки $f(x) = 3xe^x$, то згідно з формулою (3.22) маємо $P_n(x) = 3x$, $n = 1$ та $\alpha = 1$. Число $\lambda = 1$ збігається з коренем λ_2 , тому є коренем кратності $r = 1$ характеристичного рівняння. Тоді згідно з формулою (3.24) частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{\text{чн}} = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Знайдемо

$$y'_{\text{чн}} = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x = (Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x,$$

$$\begin{aligned} y''_{\text{чн}} &= (2Ax + 2A + B)e^x + (Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x = \\ &= (Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B)e^x \end{aligned}$$

і підставимо у вихідне рівняння $y_{\text{чн}}$, $y'_{\text{чн}}$ і $y''_{\text{чн}}$:

$$\begin{aligned} (Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B)e^x + (Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x - \\ - 2(Ax^2 + Bx)e^x = 3xe^x, \end{aligned}$$

тоді $(6Ax + 2A + 3B)e^x = 3xe^x$ або $6Ax + 2A + 3B = 3x$. Знайдемо A і B прирівнюючи коефіцієнти з однаковими степенями x . Із системи

$$\begin{cases} 6A = 3, \\ 2A + 3B = 0, \end{cases}$$

маємо $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{3}$.

Отже, $y_{\text{чн}} = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\right)e^x$ – частинний розв’язок заданого рівняння, а

$y_{\text{зн}} = C_1e^{-2x} + C_2e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\right)e^x$ – його загальний розв’язок.

3. Нехай права частина рівняння (3.14) має вигляд

$$f(x) = P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x, \quad (3.25)$$

де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени відповідно n -го і m -го степенів. Тоді:

а) якщо $\lambda = \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння (3.5), то частинний розв’язок рівняння (3.14) шукають у вигляді

$$\begin{aligned} y_{\text{чн}} &= (A_0x^k + A_1x^{k-1} + \dots + A_k)\cos\beta x + \\ &+ (B_0x^k + B_1x^{k-1} + \dots + B_k)\sin\beta x, \end{aligned} \quad (3.26)$$

де $k = \max\{n, m\}$; $A_0, A_1, \dots, A_k, B_0, B_1, \dots, B_k$ – невизначені коефіцієнти;

б) якщо $\lambda = \beta i$ є коренем характеристичного рівняння (3.5), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.14) шукають у вигляді

$$y_{\text{чн}} = x((A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \dots + A_k) \cos \beta x + (B_0 x^k + B_1 x^{k-1} + \dots + B_k) \sin \beta x),$$

де $k = \max\{n, m\}$; $A_0, A_1, \dots, A_k, B_0, B_1, \dots, B_k$ – невизначені коефіцієнти.

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 4y' + 13y = 80 \cos 3x.$$

Розв'язування. Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' + 4y' + 13y = 0$. Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ має корені $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$, тому

$$y_{\text{зн}} = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Оскільки $f(x) = 80 \cos 3x$, то згідно з формулою (3.25) маємо $P_n(x) = 80$, $n = 0$; $Q_m(x) = 0$, $m = 0$ і $\beta = 3$. Число $\lambda = 3i$ не є коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді (3.26)

$$y_{\text{чн}} = A \cos 3x + B \sin 3x.$$

Знаходимо невизначені коефіцієнти A і B , для чого $y'_{\text{чн}} = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x$, $y''_{\text{чн}} = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x$ підставимо у вихідне рівняння:

$$\begin{aligned} -9A \cos 3x - 9B \sin 3x + 4(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x) + \\ + 13(A \cos 3x + B \sin 3x) = 80 \cos 3x. \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos 3x$ і $\sin 3x$, матимемо систему

$$\begin{cases} 4A + 12B = 80, \\ -12A + 4B = 0, \end{cases}$$

звідки $A = 2$, $B = 6$. Тоді $y_{\text{чн}} = 2 \cos 3x + 6 \sin 3x$ – частинний розв'язок заданого рівняння, а $y_{\text{зн}} = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + 2 \cos 3x + 6 \sin 3x$ – його загальний розв'язок.

4. Нехай права частина рівняння (3.14) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x), \quad (3.27)$$

де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени відповідно n -го і m -го степенів. Тоді:

а) якщо $\lambda = \alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння (3.5), то частинний розв’язок рівняння (3.14) шукають у вигляді

$$y_{\text{чн}} = e^{\alpha x} ((A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \dots + A_k) \cos \beta x + (B_0 x^k + B_1 x^{k-1} + \dots + B_k) \sin \beta x),$$

де $k = \max\{n, m\}$; $A_0, A_1, \dots, A_k, B_0, B_1, \dots, B_k$ – невизначені коефіцієнти;

б) якщо $\lambda = \alpha + \beta i$ є коренем характеристичного рівняння (3.5), то частинний розв’язок неоднорідного рівняння (3.14) шукають у вигляді

$$y_{\text{чн}} = x e^{\alpha x} ((A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \dots + A_k) \cos \beta x + (B_0 x^k + B_1 x^{k-1} + \dots + B_k) \sin \beta x),$$

де $k = \max\{n, m\}$; $A_0, A_1, \dots, A_k, B_0, B_1, \dots, B_k$ – невизначені коефіцієнти.

Зауваження. Якщо права частина диференціального рівняння (3.14) $f(x)$ є сумою декількох різних за структурою функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$ вигляду (3.27), то для відшукування частинного розв’язку використовують принцип суперпозиції: якщо $y_{1\text{чн}}(x)$ є частинний розв’язок рівняння (3.14) з правою частиною $f_1(x)$, а $y_{2\text{чн}}(x)$ – частинний розв’язок рівняння з правою частиною $f_2(x)$, то функція

$$y(x) = y_{1\text{чн}}(x) + y_{2\text{чн}}(x)$$

буде частинним розв’язком рівняння (3.14) з

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 9y = \operatorname{ch} x.$$

Розв'язування. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{\text{зн}}(x) = y_{\text{зо}}(x) + y_{\text{чн}}(x).$$

Відповідне лінійне однорідне рівняння має вигляд

$$y'' + 9y = 0.$$

Коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 + 9 = 0$ є числа $\lambda_{1,2} = \pm 3i$, тоді загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння набуває вигляду (3.10)

$$y_{\text{зо}} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Функція $f(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$ є сумою двох різних функцій спеціального вигляду: $f_1(x) = \frac{1}{2}e^x$ і $f_2(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$.

Частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння знайдемо, виходячи з принципу суперпозиції як суму

$$y_{\text{чн}} = y_{1\text{чн}} + y_{2\text{чн}}, \quad (3.28)$$

де $y_{1\text{чн}}$ – частинний розв'язок рівняння $y'' + 9y = \frac{1}{2}e^x$, а $y_{2\text{чн}}$ – частинний розв'язок рівняння $y'' + 9y = \frac{1}{2}e^{-x}$.

Для $f_1(x) = \frac{1}{2}e^x$ маємо з формули (3.22) $P_n(x) = \frac{1}{2}$, $n = 0$, $\alpha = 1$, $r = 0$, таким чином, $y_{1\text{чн}} = Ae^x$, для $f_2(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$ маємо з формули (3.22)

$P_n(x) = \frac{1}{2}$, $n = 0$, $\alpha = -1$, $r = 0$, звідки $y_{2\text{чн}} = Be^{-x}$.

Тоді, згідно з формулою (3.28), частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{\text{чн}} = y_{1\text{чн}} + y_{2\text{чн}} = Ae^x + Be^{-x}.$$

Знайдемо

$$y'_{\text{чн}} = Ae^x - Be^{-x}, y''_{\text{чн}} = Ae^x + Be^{-x}$$

і підставимо у вихідне рівняння $y_{\text{чн}}$ і $y''_{\text{чн}}$:

$$Ae^x + Be^{-x} + 9(Ae^x + Be^{-x}) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при e^x і e^{-x} у лівій і правій частинах останньої рівності, маємо систему

$$\begin{cases} 10A = \frac{1}{2}, \\ 10B = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

звідки $A = \frac{1}{20}$, $B = \frac{1}{20}$. Тоді $y_{\text{чн}} = \frac{1}{20}e^x + \frac{1}{20}e^{-x} = \frac{1}{10}\text{ch}x$ – частинний

розв'язок заданого рівняння, а $y_{\text{зн}} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{10}\text{ch}x$ – його загальний розв'язок.

Запитання для самоперевірки

1. Які рівняння називають лінійними диференціальними рівняннями n -го порядку?
2. Які лінійні диференціальні рівняння n -го порядку називають однорідними, неоднорідними?
3. Опишіть властивості розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку.
4. Сформулюйте означення лінійної залежності та лінійної незалежності системи функцій.
5. Які диференціальні рівняння називають лінійними однорідними диференціальними рівняннями другого порядку? Укажіть основні властивості їхніх розв'язків.
6. Яка структура загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку?
7. Які диференціальні рівняння називають лінійними неоднорідними диференціальними рівняннями другого порядку? Яка структура їхнього загального розв'язку?
8. У чому полягає суть методу варіації довільної сталої (метод Лагранжа) розв'язування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку?
9. Сформулюйте теорему про накладання частинних розв'язків лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку.
10. Яке рівняння називають характеристичним рівнянням лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
11. Укажіть метод знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами у випадку дійсних різних коренів характеристичного рівняння.
12. Укажіть метод знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами у випадку дійсних кратних коренів характеристичного рівняння.

13. Вкажіть метод знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами у випадку комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння.
14. Яке лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами буде рівнянням зі спеціальною правою частиною?
15. Опишіть суть методу знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду.

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ**Варіант 1**

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$y' = (2y + 1) \operatorname{tg} x.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$x^2 y' = y^2 - 2x^2.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$y' + \frac{3}{x} y = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$xy' + 2y + x^5 e^x y^3 = 0.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' = \frac{5}{x^4} + 2 \sin x.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 50 \sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' + 3y'' + 2y' = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x} \cos 2x.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

Варіант 2

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$e^x dy + 3x^2 \sqrt{1-y^2} dx = 0.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$x(x-1)y' + y = x^2(2x-1), \quad y(2) = 4.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$3y' + 2xy = 2xy^2 e^{-2x}.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' = \ln(x+1).$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x^5 y''' + x^4 y'' = 1.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y''y^3 + 9 = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 3.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' - 7y'' + 6y' = 0.$$

- 1.1. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' - 2y' - 8y = 12\sin 2x - 36\cos 2x.$$

- 1.2. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

- 1.3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}.$$

Варіант 3

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$y' = e^{x+y} + e^{x-y}.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$xy' + y = \ln x + 1, \quad y(1) = 3.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$(1 + x^2)y' = xy + x^2y^2.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{(4)} = x^2 + 3\sin x.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$xy''' + 2y'' = 0.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 18\sin^3 y \cos y = 0, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 3.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' - 9y' = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 7.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - y' = e^{2x} \operatorname{cose}^x.$$

Варіант 4

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$(1 - e^{y^2}) dy - \frac{dx}{2y} = 0.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$xy' = y + (x + y) \ln \frac{x + y}{x}.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$x^2 + xy' = y, \quad y(1) = 0.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$3xy' + 5y = (4x - 5)y^4.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' = \frac{1}{x}.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\operatorname{tg} x \cdot y''' = 2y''.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - e^{2y} = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' - y'' = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

Варіант 5

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$y' - \frac{xy^3 + x}{-x^2y^2 + y^2} = 0.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$xy' + y \left(\ln \frac{y}{x} - 1 \right) = 0.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$x^2 y' + 2x^3 y = y^2 (1 + 2x^2).$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' = x + \cos x.$$

- 2.4. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x^3 y''' + x^2 y'' = 1.$$

- 2.5. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 98y^3 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 7.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' - 4y' = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' - 6y' + 10y = 51e^x.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - y' = e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}}.$$

Варіант 6

1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$(1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy.$$

1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$4xy + y^2 = x(x+y)y'.$$

1.3. Розв'язати задачу Коші

$$y' \cos x - y \sin x = 2x, \quad y(0) = 0.$$

1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}.$$

2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'''(x+2)^5 = 1.$$

2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\operatorname{ctg} 2x \cdot y''' + 2y'' = 0.$$

2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' = 32 \sin^3 y \cos y = 0, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 4.$$

3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' + y' = 0.$$

3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + y' = 2 \cos x - 4 \sin x.$$

3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Варіант 7

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$2x^2 yy' + y^2 = 2.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$xy' - y = x \operatorname{ctg} \frac{y}{x}.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$(1+x)y' + y + x^2(1+x) = 0, \quad y(0) = \frac{1}{12}.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$xy' - y = 2xy^2.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' = xe^x.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x \cdot y''' + y'' = x + 1.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y^3 y'' + 49 = 0, \quad y(3) = -7, \quad y'(3) = -1.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' - y' = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + 6y' + 10y = 74e^{3x}.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 14.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}.$$

Варіант 8

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$(1 + e^{2x})y^2 dy - e^x dx = 0.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$(2y - x)dx = (3x + y)dy.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^3 x}, \quad y(0) = 0.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' = 2x \ln x.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$2xy''' = y''.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y^3 y'' + 36 = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' + y'' - 5y' + 3y = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' - 3y' + 2y = 3 \cos x + 19 \sin x.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}.$$

Варіант 9

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$y' = 2^{x-y}.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$2xyy' = x^2 + y^2.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$xy' + y = x(2\ln x + 1), \quad y(1) = 2.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$y' + y = x\sqrt{y}.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' = \cos 2x + \frac{1}{x}.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$xy''' + y'' = 1.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 50y^3 = 0, \quad y(3) = 1, \quad y'(3) = 5.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' + y'' = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + 6y' + 9y = (48x + 8)e^x.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 8y' = 18x + 60x^2 - 32x^3, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 2.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$$

Варіант 10

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 + e^x) \sec^2 y dy = 0.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$(x - y)y' = x + 2y.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad y(\pi) = 1.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' = e^{2x} + x^3.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x \ln x \cdot y''' = y''.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y^3 y'' - 4y^4 + 4 = 0, \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + y' - 6y = (6x + 1)e^{3x}.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{\ln x}{e^{2x}}.$$

Варіант 11

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$2xy' = x e^{\frac{y}{x}} + 2y.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$y' \cos x - y \sin x = \sin 2x, \quad y(0) = 1.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$3xy^2y' - 2y^3 = x^3.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' = \sin^2 x + x \sin 2x.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$xy''' + y'' + x = 0.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 8y^3 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' + 3y'' + 2y' = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' - 5y' - 6y = 3\cos x + 19\sin x.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$2y'' - y' = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}.$$

Варіант 12

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$\sqrt{y^2 + 1} dx = xy dy.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$2xy dy = (x^2 - y^2) dx.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$y' + 3y \operatorname{tg} 3x = \sin 6x, \quad y(0) = \frac{1}{3}.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$y' + 2xy = 2xy^2.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' = (x^2 + 3x + 1)e^x.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$xy''' + y'' = \sqrt{x}.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 2 \sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' - 8y' + 25y = 18e^{5x}.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + y = x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}.$$

Варіант 13

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$(y+1)y' - \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} - xy = 0.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x, \quad y(e) = \frac{e^2}{2}.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$y' + 2xy = y^2 e^{x^2}.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' = 2 \ln x + x + 2.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\operatorname{tg} x \cdot y''' = y'' + 1.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y^3 y'' + 16 = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 2.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' - 9y' + 20y = 126e^{-2x}.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + y = x^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x.$$

Варіант 14

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$y' \sin x = y \ln y.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$xy' = xe^{\frac{2y}{x}} + y.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$y' \sin x - y \cos x = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$y' - 2ye^x = 2\sqrt{y}e^x.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' = \cos 2x + \frac{1}{x}.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x^3 y''' + x^2 y'' = \sqrt{x}.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y^3 y'' + 25 = 0, \quad y(2) = -5, \quad y'(2) = -1.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' + 9y' = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + y = -4 \cos x - 2 \sin x.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 2y' + 5y = x^2 + 1, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = \frac{1}{5}.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x.$$

Варіант 15

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$5^{x^2+y} dy + x dx = 0.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$xy' = x \sin \frac{y}{x} + y.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$y' - \frac{1}{x+2} y = x^2 + 4x + 5, \quad y(-1) = \frac{3}{2}.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$y' - \frac{y}{x} + x^5 y^3 = 0.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' = \frac{5}{x^4} + 2 \sin x.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\operatorname{tg} 5x \cdot y''' = 5y''.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 128y^3 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' - 13y'' + 12y' = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + 2y' - 24y = 6 \cos 3x - 33 \sin x.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 4y' + 4y = -x^2 + 3x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = \frac{4}{3}.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Варіант 16

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$(x-2y)y' = x-y.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x, \quad y(0) = 0.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$xy' + y = x^3y^4.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' = xe^{-x}.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(x+1) \cdot y''' + y'' = x+1.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y''y^3 + 4 = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -2.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' - y'' + y' - y = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + 6y' + 13y = -75\sin 2x.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x + 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}.$$

Варіант 17

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$(1 + y^2)dx + xydy = 0.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$y' \operatorname{ctg} x - y = 2 \cos^2 x \operatorname{ctg} x, \quad y(0) = 0.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' = \frac{6}{x^3}.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(1 + \sin x) \cdot y''' = \cos x \cdot y''.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' = 18y^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' - 4y' + 5y = (24 \sin x + 8 \cos x)e^{-2x}.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 4y' + 8y = 8x^2 + 4, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

Варіант 18

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$2x\sqrt{1-y^2} = y'(1+x^2).$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$(4x-3y)dx + (2y-3x)dy = 0.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$(xy' - 1)\ln x = 2y, \quad y(e) = 0.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' = x \sin x.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$xy''' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 8\sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' - 6y' + 5y = 18\cos 5x + 80\sin 5x.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 4y' + 5y = 10x, \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = 6.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3 + e^{-x}}.$$

Варіант 19

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$y' \operatorname{tg} x - y = 1.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$xy' = 2y(\ln y - \ln x) + y.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}, \quad y(0) = 0.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$y' + y = e^{\frac{x}{2}} \sqrt{y}.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' \sin^4 x = \sin 2x.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$xy''' - 2y'' = -\frac{2}{x^2}.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 72y^3 = 0, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = 6.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' + y'' - 4y' - 4y = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' - 6y' + 13y = 34e^{-2x} \sin x.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 4y' + 4y = 3x - x^2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = \frac{4}{3}.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 4y = 4 \operatorname{ctg} 2x.$$

Варіант 20

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$y' = 5^{x+y}.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$x^2 y' = y^2 + xy.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$y' + xy = -x^3, y(0) = 3.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$y' + \frac{3x^2 y}{x^3 + 1} = y^2 (x^3 + 1) \sin x.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' = \frac{1}{x} + 5^x.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x^4 y''' + x^3 y'' = 4.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 2 \sin^3 y \cos y = 0, y(1) = \frac{\pi}{2}, y'(1) = 1.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 2y' - 8y = 16x + 4, y(0) = 2, y'(0) = 6.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}.$$

Варіант 21

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$xy' + 2y = y^2.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$y' - \frac{x^3}{y} = -\frac{2y}{x}.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x^2 y''' = (y'')^2.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 32y^3 = 0, \quad y(4) = 1, \quad y'(4) = 4.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' - 6y'' + 9y' = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + 4y' + 20y = -4\cos 4x - 52\sin 4x.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 4y' + 5y = 5x^2 - 4, \quad y(0) = \frac{2}{25}, \quad y'(0) = \frac{3}{5}.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{2 + e^{-2x}}.$$

Варіант 22

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$\sin x \cdot \cos y dx + \cos x \cdot \sin y dy = 0.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$x(\ln x - \ln y) dy - y dx = 0.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, \quad y(1) = e.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$y' + \frac{y}{x+1} = -y^2.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' = 2^x - 4x.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y''' + \operatorname{tg} x \cdot y'' = \frac{1}{\cos x}.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$4y^3 y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + 4y = (-24x - 10)e^{2x}.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 2y' + 2y = x^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = \frac{3}{2}.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 3y' = \frac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}.$$

Варіант 23

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$2y'\sqrt{x} = y.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$x^2 y' + y^2 = xy y'.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$y' - 3x^2 y = \frac{x^2(1+x^3)}{3}, \quad y(0) = 0.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' = \sin^2 x \cdot \cos x.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y''' + (y'')^2 = 0.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 2y^3 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' - 14y' + 49y = 144 \sin 7x.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$2y'' - y' = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\sin \pi x}.$$

Варіант 24

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$y \sin x dx + \cos x dy = 0.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$(x + 2y)y' + y = 0.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$xy' - 4y - x^2 \sqrt{y} = 0.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' = \sin 2x + e^{-x}.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$xy''' - y'' = x^2 + 1.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 50y^3 = 0, \quad y(3) = 1, \quad y'(3) = 5.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' + 5y'' + 4y' = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$4y'' - 4y' + y = -25 \cos x.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 4y' + 4y = x^2, \quad y(0) = \frac{3}{8}, \quad y'(0) = \frac{3}{2}.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1 + e^{-2x}}.$$

Варіант 25

- 1.1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок рівняння

$$e^x \sin^3 y + (1 + e^{2x}) \cos y y' = 0.$$

- 1.2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння

$$x dy - (\sqrt{x^2 + y^2} + y) dx = 0.$$

- 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$y' - 4xy = -4x^3, y(0) = -\frac{1}{2}.$$

- 1.4. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі

$$xy' - 4y - x^2 \sqrt{y} = 0.$$

- 2.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos x.$$

- 2.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$xy''' - y'' = 0.$$

- 2.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' = 50 \sin^3 y \cos y, y(1) = \frac{\pi}{2}, y'(1) = 5.$$

- 3.1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y''' + 10y'' + 9y' = 0.$$

- 3.2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y'' - 2y' + y = 4e^x.$$

- 3.3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 2y' + 2y = 1 + x, y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}.$$

- 3.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}.$$

ДОДАТОК. Зразок оформлення титульної сторінки

КПІ ім. Ігоря Сікорського
Хіміко-технологічний факультет

Модульна контрольна робота
з вищої математики
студента I курсу групи ХК₃–11
Тарасенка Сергія Васильовича

Тема: Диференціальні рівняння

Варіант № 2

Протокол виконання роботи

1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3	3.4

Роботу перевірів

доцент кафедри математичної фізики

та диференціальних рівнянь

Шостак Микола Іванович

Київ–2022

Список рекомендованої літератури

1. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Невизначений, визначений та невластні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – Київ: Книги України ЛТД, 2010. – 470 с. – ISBN 978-966-2331-05-9.
2. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ: Ігнатекс – Україна, 2011. – 648 с. – ISBN 978-966-97049-3-1.
3. Івасишен С. Д. Диференціальні рівняння: методи та застосування: навч. посіб. / С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук, П. П. Настасієв, І. І. Дрінь. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2010. – 288 с. – ISBN 978-966-423-135-7.
4. Івасишен С. Д. Звичайні диференціальні рівняння: методи розв'язування та застосування: навч. посіб. / С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук, Н. І. Турчина. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2018. – 332 с.
5. Неділько С. А. Математичні методи в хімії / С. А. Неділько. – Київ: Либідь, 2005. – 256 с. – ISBN 966-06-0384-3.
6. Шкіль М. І. Вища математика / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник. – Київ: Вища шк., 1986. – 512 с.