МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО ТА МАШИНОБУДУВАННЯ

УДК 532.137

І.А. Андреєв

ОТРИМАННЯ СПРОЩЕНОЇ ФОРМУЛИ ДЛЯ ОПИСУ ЛАМІНАРНОЇ ТЕЧІЇ НЬЮТОНІВСЬКОЇ РІДИНИ В ПРЯМОКУТНОМУ КАНАЛІ ЗА ДОПОМОГОЮ “МЕТОДУ ВПЛИВУ”

Вступ

З’ясування особливостей течії рідин у каналах різного поперечного перерізу необхідне при розгляді багатьох гідромеханічних процесів, для опису змішування і виготовлення полімерних матеріалів, фібробетонних виробів при віброекструзії тощо. У статті розглядається ізотермічна ламінарна усталена течія нестисливої ньютонівської рідини в прямокутному каналі. Наведені в літературі [1–4] аналітичні формули для визначення швидкості течії такої рідини досить складні, а їх застосування нерідко призводить до помилок у розрахунках.

Постановка задачі

Метою даної статті є розробка спрощених математичних залежностей для опису ізотермічної ламінарної усталеної течії нестисливої ньютонівської рідини в прямокутному каналі, які будуть зручними для подальшої математичної обробки і в той же час об’єктивно відображатимуть даний процес.

Попередні відомості

У випадку течії ньютонівської рідини в прямокутному каналі із сторонами W і H у напрямках x і y (прямокутні координати (x, y, z)) рівняння Навьє–Стокса було реалізовано двома способами.

Використавши метод поділу перемінних введенням двох нових функцій, формулу для швидкості течії рідини u_z в напрямку осі z подали спочатку у вигляді $u_z = v(x,y) + \varphi(y)$, а визначивши функцію $\varphi(y)$ з рівняння $\partial^2\varphi/\partial y^2 = (1/\mu)(\partial p/\partial z)$ [1, 2], отримали залежність

$$u_z = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\left[\frac{y}{2}(y-H) + \frac{4H^2}{\pi^3}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right)\frac{\mathrm{ch}\left(\dfrac{n\pi\left(x-\dfrac{W}{2}\right)}{H}\right)}{\mathrm{ch}\left(\dfrac{n\pi W}{2H}\right)}\right], \quad (1)$$

де p – тиск, Па; μ – динамічний коефіцієнт в’язкості, Па·с.

У працях Х. Рауза [3], а також Дж. Хаппеля і Г. Бренера [4] подається розв’язання задачі за допомогою введення функції $\psi = u_z + \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}(x^2+y^2)$, що задовольняє двовимірне рівняння Лапласа $\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 = 0$:

$$u_z = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial z}y(y-H) + \sum_{m=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi y}{H}\right)\left(A_m\mathrm{ch}\left(\frac{m\pi x}{H}\right) + B_m\mathrm{sh}\left(\frac{m\pi x}{H}\right)\right), \quad (2)$$

де $A_m = -\dfrac{2H^2}{\mu m^3\pi^3}\dfrac{\partial p}{\partial z}(\cos(m\pi)-1)$; $B_m = -\dfrac{A_m\left(\mathrm{ch}\left(\dfrac{m\pi W}{H}\right)-1\right)}{\mathrm{sh}\left(\dfrac{m\pi W}{H}\right)}$.

Результати даних розв’язань різняться за формою. Складність отриманих формул призвела до помилок у згадуваних працях. Так, у книзі З. Тадмора і К. Гогоса [1] у формулі (1) пропущено двійку в знаменнику аргумента гіперболічного косинуса $\mathrm{ch}\left(\dfrac{n\pi W}{2H}\right)$, а в праці Дж. Хаппеля і Г. Бренера [4] пропущено двійку в чисельнику при обчисленні величини A_m (формула (2)).

Крім того, спроба розрахунку за формулами (1) і (2) показала обмеженість їх застосування. Здавалося, що при наявності обчислювальної техніки не повинно виникати проблем при розрахунках. Але, як з’ясувалося, треба обережно підходити до них через те, що індекси підсумовування n і m у формулах (1) і (2) не можуть бути необмеженими. Так, чим більше відношення W/H, тим менші значення індексів підсумовування дають можливість отримувати вірні результати. Наприклад, при визначенні максимальної швидкості течії рідини $u_{z\,\max}$

(що має місце в центрі прямокутного каналу) при H = 0,04 м, $W/H = 10$, $\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} = 1(\text{м}\cdot\text{с})^{-1}$, π = 3,14159 за допомогою програми Mathcad обчислення здійснюється до n = 22 і m = 8. Якщо m = 9, то розрахунок за формулою (2) дає невірний результат, причому похибка дуже велика і вона буде завжди виникати і мати для кожного конкретного випадку свої "критичні" значення індексу m. Розрахунки на алгоритмічній мові QBASIC виконуються тільки до n = 4 і m = 2 включно. При розгляді процесу течії поблизу стінок каналу застосування формул (1) і (2) ще більше обмежуються.

Таким чином, розрахунок за відомими з літературних джерел формулами без попереднього їх аналізу може призвести до отримання помилкових результатів. Тому і виникла потреба знайти надійну і просту методику розрахунку цього виду течії.

Розв'язок поставленої задачі. Приклади застосування запропонованої формули

У теорії надійності імовірність безвідмовної роботи системи з основним з'єднанням елементів (коли кожний елемент впливає на надійність системи) розраховується як добуток імовірностей безвідмовної роботи елементів [5]. Застосуємо такий самий підхід для випадку, що розглядається.

При течії в плоскій щілині (плоска пуазейлева течія) шириною H, в якій вісь z збігається з віссю симетрії потоку (прямокутні координати (x, y, z)), рівняння для розподілу швидкостей набуває вигляду

$$u_z(y) = -\frac{H^2}{8\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\left[1-\left(\frac{2y}{H}\right)^2\right]. \qquad (3)$$

Максимальна швидкість течії між паралельними пластинами буде при $y = 0$: $u_{z\,(y=0)} = -\frac{H^2}{8\mu}\frac{\partial p}{\partial z}$. Тоді рівняння (3) можна записати ще і в такому вигляді:

$$u_z(y) = u_{z(y=0)}\left[1-\left(\frac{2y}{H}\right)^2\right]. \qquad (4)$$

З формули (4) видно, що вплив стінок на зменшення швидкості течії рідини при віддаленні від центра плоского каналу характеризується величиною $\left[1-\left(\frac{2y}{H}\right)^2\right]$.

При застосуванні каналу прямокутного перерізу відбувається взаємний вплив вже двох пар плоских поверхонь. Тому врахуємо цей вплив, як це робиться в теорії надійності, і запишемо формулу для швидкості течії рідини u_z в такому вигляді:

$$u_z = u_{z\,\max}\left[1-\left(\frac{2x}{W}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{2y}{H}\right)^2\right], \qquad (5)$$

де $u_{z\,\max}$ – максимальна швидкість у центрі прямокутного каналу.

Розрахункову схему течії рідини в каналі прямокутного поперечного перерізу подано на рис. 1. Для зручності розрахунку початок прямокутних координат (x, y, z) на відміну від відомих розглядів вибрано в центрі прямокутного перерізу каналу.

У формулі (5) кожна квадратна дужка характеризує вплив відповідної пари плоских поверхонь каналу прямокутного перерізу.

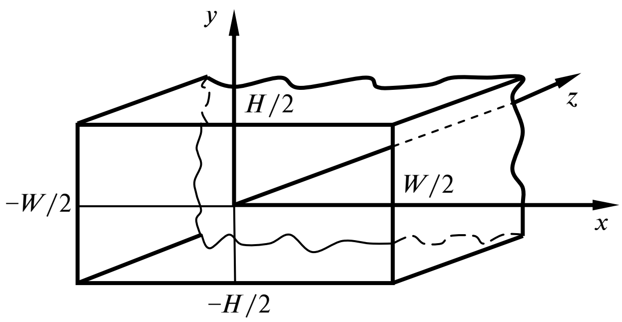

Рис. 1. Розрахункова схема течії рідини в каналі прямокутного поперечного перерізу

Використовуючи відомі формули (1) і (2) та запропоновану формулу (5), будуємо графіки розподілу відносних швидкостей $u_z/u_{z\,\max}$ на однаковій відстані $H/2$ від пари плоских поверхонь і по діагоналі каналів:

1) квадратного перерізу із стороною H = 0,04 м (рис. 2, 3);

2) прямокутного перерізу з відношенням сторін $W/H = 5$ при H = 0,04 м (рис. 4, 5).

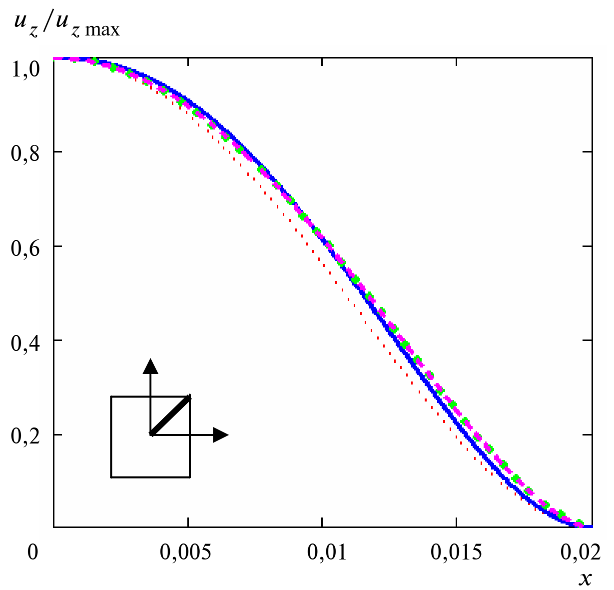

Рис. 2. Розподіл відносних швидкостей $u_z/u_{z\,\max}$ на однаковій відстані $H/2$ від пари плоских поверхонь каналу квадратного поперечного перерізу: ······ – формула (5); ▬▬ – формула (6); ● ● ● – формула (2); ▪ ▪ ▪ ▪ – формула (1)

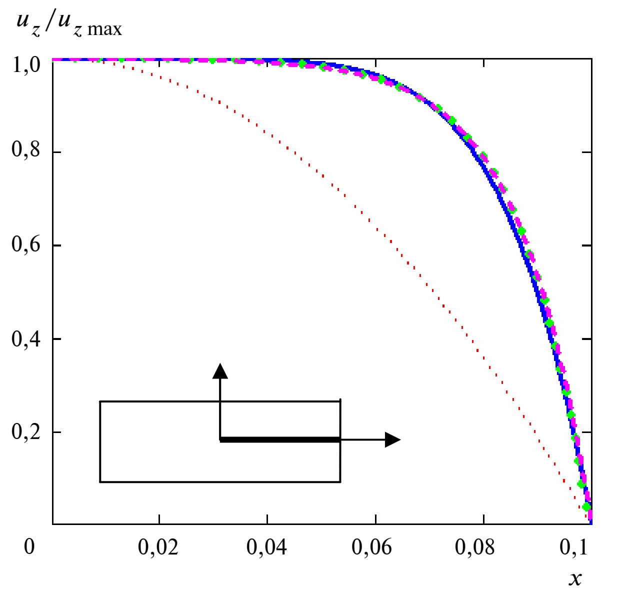

Рис. 4. Розподіл відносних швидкостей $u_z/u_{z\,\max}$ на однаковій відстані $H/2$ від пари плоских поверхонь каналу прямокутного перерізу з відношенням сторін $W/H = 5$; ······ – формула (5); ▬▬ – формула (6); ● ● ● – формула (2); ▪ ▪ ▪ ▪ – формула (1)

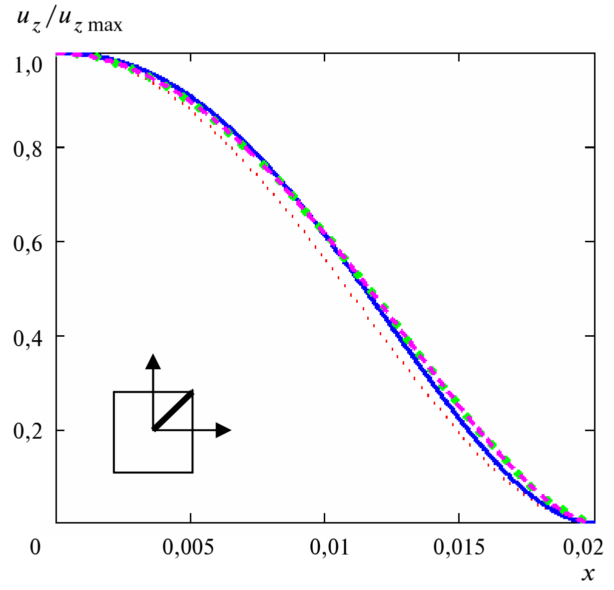

Рис. 3. Розподіл відносних швидкостей $u_z/u_{z\,\max}$ по діагоналі каналу квадратного поперечного перерізу: ······ – формула (5); ▬▬ – формула (6); ● ● ● – формула (2); ▪ ▪ ▪ ▪ – формула (1)

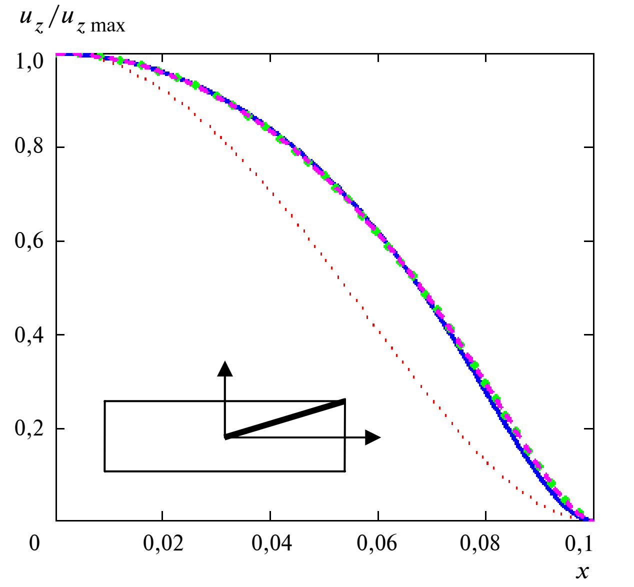

Рис. 5. Розподіл відносних швидкостей $u_z/u_{z\,\max}$ по діагоналі каналу прямокутного перерізу з відношенням сторін $W/H = 5$; ······ – формула (5); ▬▬ – формула (6); ● ● ● – формула (2); ▪ ▪ ▪ ▪ – формула (1)

З рис. 2—5 видно, що криві, які побудовані за рівнянням (5) і відомими аналітичними формулами (1) і (2), близькі за конфігурацією для каналів квадратного поперечного перерізу, але при збільшенні відношення W/H збільшуються і розбіжності між кривими. Дійсно, так і при розрахунку віброекструзійного мундштука для формування плоского виробу чисельним методом [6] було визначено значне зменшення швидкості течії суміші тільки біля торцевих зон, подібне до результатів, які отримані за допомогою формул (1) і (2).

Тому було запропоновано вирази $\left(\frac{2x}{W}\right)$ і $\left(\frac{2y}{H}\right)$ у формулі (5) підносити не до других степенів, а до показників i і j, які змінюються залежно від відношення W/H за графіками рис. 6, 7, а саму формулу записати у вигляді

$$u_z = u_{z\max}\left[1-\left(\frac{2x}{W}\right)^i\right]\left[1-\left(\frac{2y}{H}\right)^j\right]. \qquad (6)$$

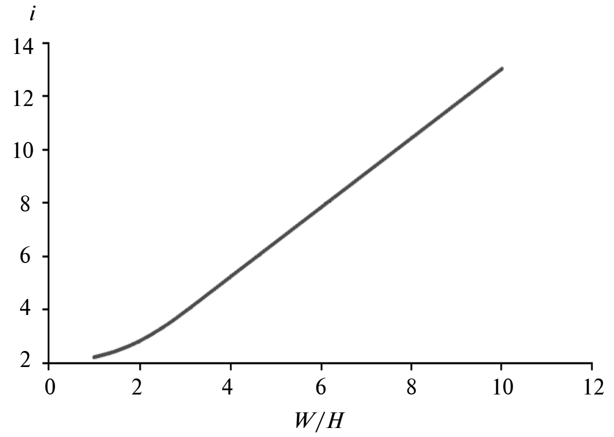

Рис. 6. Залежність показника степеня i від відношення W/H

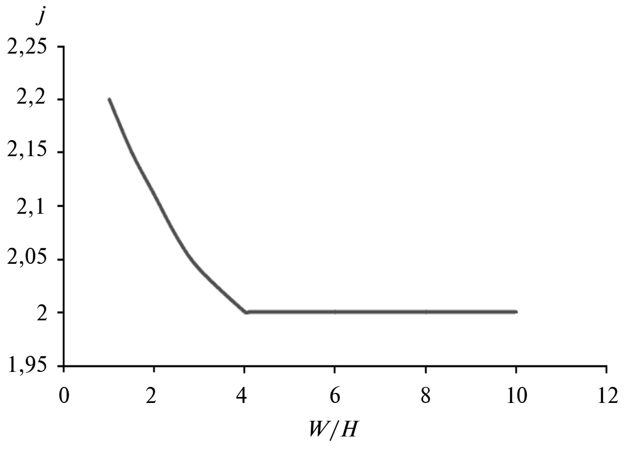

Рис. 7. Залежність показника степеня j від відношення W/H

Показник степеня i при $1 \le W/H \le 3$ можна обчислити також за формулою $i = 0,2457\left(\frac{W}{H}\right)^2 - 0,1309\frac{W}{H} + 2,084$ (достовірність апроксимації становить $R^2 = 1$), а при $W/H \ge 3$ $i = 1,3\frac{W}{H}$.

Показник степеня j при $1 \le W/H \le 4$ обчислюється за формулою $j = 0,0129\left(\frac{W}{H}\right)^2 - 0,1311\frac{W}{H} + 2,3185$ (достовірність апроксимації становить $R^2 = 0,9997$), а при $W/H \ge 4$ $j = 2$.

Запропонована формула (6) дає результат, близький до результату для кривої, яка побудована за відомими аналітичними формулами (1) і (2). Величина достовірності апроксимації R^2 (див. рис. 2–5) знаходиться в діапазоні 0,997–0,999.

Результати досліджень, їх аналіз і рекомендації

Запропонована в статті спрощена формула дає можливість без особливих труднощів виконати розрахунок процесу течії в прямокутному каналі при низьких значеннях числа Рейнольдса, коли не виникають так звані повзучі течії. При цьому відкидаються помилки, які можуть виникнути при розрахунку за відомими аналітичними залежностями через їх складність і обмеженість застосування. Так, при побудові графіків на рис. 4 і 5 за формулою (2) при використанні програми Mathcad правильні результати було отримано, коли індекс підсумовування m не перевищував 2.

Отримана формула зручна для подальшої математичної обробки, що дає можливість виконати, наприклад, розрахунок процесу ламінарного конвективного змішування в прямокутному каналі і т. ін.

Для розрахунку процесу течії за допомогою запропонованої формули необхідно знати максимальну швидкість рідини в центрі каналу $u_{z\max}$, яку можна визначити таким чином:

- для відношення сторін прямокутного каналу $W/H \ge 5$ за простою формулою (3), що описує плоску пуазейлеву течію рідини;
- за аналітичною формулою (1), яка має менші обмеження застосування і не дає похибки порівняно з формулою (2);
- за результатами експериментальних досліджень.

Висновки

Впровадження запропонованої і наведеної в статті формули для опису ізотермічної ламінарної усталеної течії нестисливої ньютонівської рідини дає змогу значно спростити розрахунки різноманітних гідродинамічних процесів у прямокутних каналах при низьких значеннях числа Рейнольдса, коли не виникають так звані повзучі течії. Формулу зручно застосовувати для подальшої математичної обробки без обмежень на відміну від відомих залежностей (1) і (2).

Отримані результати, а також "метод впливу" припускається використовувати при розрахунку процесу віброекструзійного змішання і формування композиційних матеріалів у нових конструкціях віброекструдерів [7 і 8], які мають як прямокутні канали постійного поперечного перерізу, так і збіжні канали.

И.А. Андреев

ПОЛУЧЕНИЕ УПРОЩЕННОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ С ПОМОЩЬЮ "МЕТОДА ВЛИЯНИЯ"

Предложена формула для описания изотермического ламинарного установившегося течения несжимаемой ньютоновской жидкости в прямоугольных каналах, которая позволяет значительно упростить расчеты разнообразных гидродинамических процессов. Формула удобна для последующей математической обработки и не имеет ограничений в применении в отличие от известных аналитических зависимостей.

I.A. Andreyev

ON OBTAINING THE SIMPLIFIED FORMULA FOR DESCRIBING THE LAMINAR FLOW OF NEWTONIAN LIQUID IN THE RECTANGULAR CHANNEL BY UTILIZING THE INFLUENCE METHOD

The paper presents the formula to describe an isothermal laminar stable flow of incompressible Newtonian liquid in the rectangular channels. This formula simplifies the calculations of various hydrodynamic processes. In addition, it is convenient for further mathematical treatment and has no application limitations unlike the known analytical dependences.

1. *Тадмор З., Гогос К.* Теоретические основы переработки полимеров. – М.: Химия, 1984. – 632 с.
2. *Мак-Келви Д.М.* Переработка полимеров. – М.: Химия, 1965. – 444 с.
3. *Рауз Х.* Механика жидкости. – М.: Стройиздат, 1967. – 390 с.
4. *Хаппель Дж., Бренер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 632 с.
5. *Острейковский В.А.* Теория надежности. – М.: Высш. шк., 2003. – 464 с.
6. *Расчет* сечения формующего мундштука виброэкструдера для изготовления плоского изделия / И.А. Андреев, Л.Г. Воронин, Л.Я. Лесняк и др. // Хим. машиностроение: Респ. межвед. науч.-техн. сб. – 1987. – Вып. 45.– С. 17–20.
7. *Патент України на корисну модель № 34957, МПК (2006) B28B 13/00.* Віброекструдер для змішання та формування фібробетонних виробів / І.А. Андреєв, Л.О. Безугла. – Опубл. 26.08.2008, Бюл. № 16.
8. *Патент України на корисну модель № 32251, МПК (2006) B28B 13/00.* Віброекструдер для формування фібробетонних виробів / І.А. Андреєв, В.В. Фурманська. – Опубл. 12.05.2008, Бюл. № 9.

Рекомендована Радою
Механіко-машинобудівного інституту
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
4 листопада 2009 року