

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу

До захисту допущено
Завідувач кафедри
_____ Оксана ТИМОЩУК
«07» 06 2021 р.

Дипломна робота

на здобуття ступеня бакалавра
за освітньо-професійною програмою «Системний аналіз і управління»
спеціальності 124 "Системний аналіз"
на тему: «Оптимальні стратегії в прямокутних іграх в різних класах задач»

Виконав:

Студент IV курсу, групи КА-73
Сахневич Валерій Борисович

Керівник:

доцент кафедри ММСА
к.ф.-м.н., доцент Ірина Анатоліївна Шубенкова

Консультант з економічного розділу:

доцент кафедри ТПЕ
к.е.н., доцент Надія Василівна Рощина

Консультант з нормоконтролю:

доцент кафедри ММСА
к.т.н., доцент Анатолій Єпіфанович Коваленко

Рецензент:

доцент кафедри ПЗКС ФПМ
к.т.н., Люшенко Леся Анатоліївна

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає
запозичень з праць інших авторів без
відповідних посилань.

Студент _____

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу

Рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)

Спеціальність – 124 "Системний аналіз"

Освітньо-професійна програма «Системний аналіз і управління»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Оксана ТИМОЩУК

«__» _____ 20__ р.

ЗАВДАННЯ

на дипломну роботу студенту

Сахневичу Валерію Борисовичу

1. Тема роботи «Оптимальні стратегії в прямокутних іграх в різних класах задач», керівник роботи к.ф-м.н., доцент Ірина Анатоліївна Шубенкова, затверджені наказом по університету від «26» травня 2021 р. №1344-с
2. Термін подання студентом роботи 07.06.2021 р.
3. Вихідні дані до роботи:
4. Зміст роботи: розгляд деяких практичних задач знаходження оптимальних розв'язків
5. Перелік ілюстративного матеріалу:
6. Консультанти розділів роботи:

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Економічний	Рощіна Н.В., доцент кафедри ТПЕ		

7. Дата видачі завдання:

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломної роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
			виконано
			виконано
			виконано
			виконано
			виконано
			виконано
			виконано
			виконано

Студент

Валерій Сахневич

Керівник

Ірина Шубенкова

РЕФЕРАТ

Дипломна робота: 104 с., 52 рис., 17 табл., 1 додаток, 13 джерел.

ПРЯМОКУТНА ГРА, ОПТИМАЛЬНА СТРАТЕГІЯ, СИМПЛЕКС-МЕТОД.

Актуальність теми – в різних галузях постійно трапляються ситуації, коли необхідно прийняти рішення, яке буде оптимальним.

Об'єкт дослідження – алгоритм знаходження оптимальних розв'язків на прикладі різних задач.

Мета роботи – розглянути декілька прикладів задач з різних галузей, в яких необхідно знайти оптимальні розв'язки.

Методи дослідження – знаходження оптимального розв'язку в різних задачах за допомогою надбудови «Поиск решения» в Microsoft Excel.

У цій роботі представлені деякі математичні поняття(прямокутна гра, сідлова точка, оптимальна стратегія тощо) для обчислення оптимальних розв'язків в різних практичних задачах. За допомогою спеціальної надбудови «Поиск решения» в Microsoft Excel було знайдено оптимальні розв'язки для декількох практичних задач.

ABSTRACT

Diploma work: 104 pages, 52 figures, 17 tables, 1 appendice, 13 sources.

RECTANGULAR GAME, OPTIMAL STRATEGY, SIMPLEX METHOD.

Relevance of the topic - in different areas there are always situations when it is necessary to make a decision that will be optimal.

The object of research is an algorithm for finding optimal solutions on the example of different problems.

The aim of the work is to consider several examples of problems from different fields in which it is necessary to find optimal solutions.

Research methods - finding the optimal solution to various problems using the Solver Add-in in Microsoft Excel.

This paper presents some mathematical concepts (rectangular game, saddle point, optimal strategy, etc.) for calculating optimal solutions in various practical problems. With the help of a special Solver add-in in Microsoft Excel, optimal solutions were found for several practical problems.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	8
РОЗДІЛ 1 ОПТИМАЛЬНІ СТРАТЕГІЇ В ПРЯМОКУТНИХ ІГРАХ, ЯКІ МАЮТЬ СІДЛОВУ ТОЧКУ АБО Є ДОМІНУВАННЯ	9
1.1 Поняття прямокутної гри.....	9
1.2 Домінування	10
1.3 Наявність сідлової точки	12
1.4 Висновок до розділу 1	19
РОЗДІЛ 2 ОПТИМАЛЬНІ СТРАТЕГІЇ В ПРЯМОКУТНИХ ІГРАХ, ЯКІ НЕ МАЮТЬ СІДЛОВУ ТОЧКУ	20
2.1 Змішані стратегії	20
2.2 Властивості оптимальних стратегій	25
2.3 Графічний спосіб.....	34
2.4 Симплекс-метод	43
2.5 Висновок до розділу 2.....	58
РОЗДІЛ 3 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ MS EXCEL.	59
3.1 Задача 1 Про меблеву фабрику.....	59
3.2 Задача 2 Про комп'ютери	63
3.3 Задача 3 Про деталі для двигунів	66
3.4 Задача 4 Про раціон харчування.....	70
3.5 Висновки до розділу 3.....	74

РОЗДІЛ 4 ФУНКЦІОНАЛЬНО-ВАРТІСНИЙ АНАЛІЗ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ	75
4.1 Постановка задачі проектування	75
4.2 Обґрунтування функцій програмного продукту	75
4.3 Обґрунтування системи параметрів ПП.....	78
4.4 Аналіз експертного оцінювання параметрів	80
4.5 Аналіз рівня якості варіантів реалізації функцій.....	84
4.6 Економічний аналіз варіантів розробки ПП	86
4.7 Вибір кращого варіанта ПП техніко-економічного рівня	89
4.8 Висновки до розділу 4.....	89
ВИСНОВКИ	90
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.	91
ДОДАТОК А ІЛЮСТРОВАНІЙ МАТЕРІАЛ.....	92

ВСТУП

У процесі цілеспрямованої людської діяльності дуже часто виникають ситуації, в яких інтереси окремих осіб, учасників, груп чи сторін прямо протилежні або, не будучи непримиримими, не співпадають. Якщо інтереси учасників протилежні, то максимізація виграшу одного учасників буде означати максимізацію програшу іншого учасника(якщо в грі 2 учасника, сторін тощо). А якщо учасників(сторін, груп) більше двох, то зменшується можливий виграш інших сторін. Якщо кожна зі сторін прийме якесь рішення, то подальша реалізація прийнятих рішень призведе до конкретного результату - розподілу виграшів сторін. Крім того, сторони можуть приймати рішення незалежно один від одного і не повідомляти заздалегідь іншим сторонам про власне прийняте рішення.

Таким чином, кожній зі сторін доводиться приймати рішення в умовах невизначеності поведінки інших сторін, тому виграш конкретної залежить від того, як поведуть себе інші сторони.

Прикладами таких ситуацій є спортивні ігри, арбітражні суперечки, військові навчання, боротьба між блоками виборців за своїх кандидатів, в міжнародних відносинах - це відстоювання інтересів своєї держави. В таких ситуаціях кожен учасник робить все можливе, щоб домогтися найкращого результату (за рахунок інших учасників).

Дослідженням цих та багатьох інших ситуацій займається теорія ігор. Ця дисципліна дає змогу змодельовати процес гри та її можливі результати до початку гри і на основі цього прийняти рішення про доцільність участі в грі та які там оптимальні стратегії. Оптимальна стратегія гравця – це та стратегія, яка забезпечує максимальний виграш. Якщо гра повторюється більше, ніж 1 раз і має, крім особистих, випадкові ходи, то оптимальна стратегія забезпечує максимальний середній виграш.

РОЗДІЛ 1 ОПТИМАЛЬНІ СТРАТЕГІЇ В ПРЯМОКУТНИХ ІГРАХ, ЯКІ МАЮТЬ СІДЛОВУ ТОЧКУ АБО Є ДОМІНУВАННЯ

1.1 Поняття прямокутної гри

Гра одного гравця з нульовою сумою є простим випадком для розгляду, оскільки цей гравець єдиний та отримує нуль і може обирати будь-який хід з однаковим успіхом. При грі з ненульовою сумою гравець має розв'язати задачу на максимум, тобто обрати з тих можливостей, які в нього є, ту, яка дає йому максимальний виграш або, якщо гра включає в собі випадкові ходи, то гравець має обрати ту можливість, яка дає максимум математичного сподівання виграшу.

Таким чином, для вивчення характерних особливостей стратегічних ігор, треба перейти до ігор з участю двох або більше гравців.

Почнемо з гри двох гравців з нульовою сумою, при цьому кожний гравець має лише один хід. Перший гравець обирає число з перших m додатних цілих чисел, а другий обирає число з n додатних цілих чисел, при цьому другий гравець не знає, який вибір зробив перший гравець. Потім ці два числа порівнюються і один з гравців платить іншому суму, яка залежить від виборів, які вони зробили і визначається правилами гри. Такі ігри в подальшому будемо називати прямокутними.

Тепер приведемо приклад прямокутної гри. Гравець K1 обирає число з множини $\{1, 4, 9\}$, а гравець K2 – з $\{1, 4, 9, 16\}$. При цьому гравець K2 не знає, який вибір зробив гравець K1. Після того, як обидва гравці зробили свій вибір, гравець K2 платить K1 суму, яка визначається таблицею 1.1:

Таблиця 1.1

K1 \ K2	1	4	9	16
1	3	2	14	15
4	1	-2	0	5
9	-3	-4	-2	2

Тобто, якщо гравець K1 обере, наприклад, 4, а K2 обере 16, то гравець K2 платить гравцю K1 5 доларів. Якщо ж гравець K1 обере 9, а K2 – 1, то гравець K1 платить гравцю K2 3 долара.

Прямокутну гру ми будемо описувати, вказуючи її цінкову матрицю.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 14 & 15 \\ 1 & -2 & 0 & 5 \\ -3 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1.2 Домінування

Дуже важливим питанням в будь-яких іграх є оптимальна стратегія, тобто, чи можна довести що певна стратегія є раціональною.

Введемо деякі поняття:

Нехай є матриця A, будемо говорити, що *i*-ий рядок **домінує** *k*-ий рядок, якщо

$$a_{ij} \geq a_{kj} \text{ для всіх } j$$

i

$$a_{ij} > a_{kj} \text{ принаймні для одного } j.$$

Аналогічно для стовпців:

j -ий стовпчик домінує l -ий стовпчик, якщо

$$a_{ij} \leq a_{il} \text{ для всіх } i$$

i

$$a_{ij} < a_{il} \text{ принаймні для одного } i.$$

Сформулюємо наступну теорему.

Теорема 1

Нехай A – прямокутна гра, і нехай рядки $i_1, i_2, \dots, i_k$ матриці A домінуються. Тоді перший гравець має таку оптимальну стратегію x , що $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_k} = 0$; крім того, будь-яка оптимальна стратегія для гри, яка отримується в результаті видалення домінованих рядків, також буде оптимальною стратегією для початкової гри.

Аналогічно формулюється теорема і для домінування стовпчиків.

Загальний результат цих теорем – всі доміновані рядки і стовпчики можуть бути видалені і це дозволяє розглядати меншу матрицю.

В прикладі, наведеному раніше, можна побачити, що кожний елемент першого рядка більший, ніж відповідний елемент другого рядка і також більший, ніж відповідний елемент третього рядка. Тому, незалежно від того, яке число обирає гравець $K2$, гравцю $K1$ краще вибрати 1, ніж 4 чи 9. Це означає, що 1 буде найбільш оптимальним вибором для гравця $K1$.

Точно так же кожний елемент другого стовпчика менший, ніж відповідний елемент інших стовпчиків. Тому, для $K2$ найбільш оптимальним є вибір числа 4.

Розглянемо іншу матрицю, наприклад таку:

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 8 & 6 \\ 8 & 9 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Перший і четвертий рядок однакові, тому видалимо четвертий:

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 8 & 9 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Другий рядок домінує третій, тому відкинемо третій рядок:

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Третій стовпчик домінує четвертий, тому відкинемо третій.

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Далі спростити матрицю неможливо, оскільки $8 > 6$, $4 < 7$; $8 < 9$, $6 > 5$; $8 > 4$, $6 < 7$; $9 > 4$, $5 < 7$.

1.3 Наявність сідлової точки

Розглянемо випадок, коли матриця має сідлову точку.

Нехай є прямокутна гра з матрицею $A_{m \times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Якщо гравець K1 обере 1, то гравець K2 заплатить йому принаймні

$$\min_j a_{1j}$$

Взагалі, якщо K1 обере число $i \in [1; m]$, то K2 заплатить принаймні

$$\min_j a_{ij}$$

Але оскільки він може обирати i як завгодно, то він може, зокрема, обрати так, щоб зробити величину $\min_j a_{ij}$ можливо більшою.

Тому, гравець K1 має такий вибір, який гарантує, що отримає хоча би

$$\max_i \min_j a_{ij}$$

Аналогічно для гравця K2, для нього платіж представляє собою елементи матриці A, взяті зі знаком мінус.

Тому, гравець K2 має такий вибір, який гарантує, що отримає хоча би

$$\max_j \min_i (-a_{ij})$$

Нехай $f(x)$ – будь-яка дійсна функція і існують її $\max$, $\min$. Тоді

$$\max_x (-f(x)) = -\min_x f(x),$$

$$\min_x (-f(x)) = -\max_x f(x)$$

Тоді виконується рівність

$$\max_j \min_i (-a_{ij}) = \max_j (-(\max_i a_{ij})) = -\min_j \max_i a_{ij}$$

Тому гравець K2 може грати так, щоб отримати хоча би

$$-\min_j \max_i a_{ij},$$

і, отже, так, що гравець K1 отримає найбільше

$$\min_j \max_i a_{ij}$$

Гравець K1 може собі гарантувати, що він отримає хоча би

$$\max_i \min_j a_{ij},$$

а K2 може йому перешкодити отримати більше, ніж

$$\min_j \max_i a_{ij}.$$

Якщо

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v, \quad (1.1)$$

то гравець K1 має зрозуміти, що він може отримати v , а гравець K2 може йому перешкодити отримати більше, ніж v .

Тому, якщо тільки у першого гравця немає підстав стверджувати, що другий гравець буде грати необдуманно (це має бути підтверджено на основі того, що не відноситься до цієї гри), то перший гравець буде робити ставку на v і грати так, щоб отримати цей платіж. Аналогічно можна сказати про другого гравця, тобто він може робити ставку на $-v$.

Якщо би виконувалась рівність (1.1) для будь-якої матриці A , то на основі наведених вище міркувань пошук оптимального способу гри би на цьому закінчились. Наведемо приклади матриць, для яких рівність (1.1) не виконується.

Розглянемо матрицю 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Наприклад:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max \left(\min_j a_{1j}, \min_j a_{2j} \right) = \max(-3, -3) = -3$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = \min \left(\max_i a_{i1}, \max_i a_{i2} \right) = \min(2, 2) = 2$$

Отже,

$$\max_i \min_j a_{ij} \neq \min_j \max_i a_{ij}.$$

Оскільки рівність (1.1) є дуже важливою, то обов'язково ми маємо знайти необхідну і достатню умову її виконання.

Теорема 2

Нехай A і B – деякі множини. $f(x, y)$ – дійсна функція двох змінних $x \in A$, $y \in B$ і існують $\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y)$ і $\min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y)$. Тоді

$$\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) \leq \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y)$$

Зауваження 1

Можливість застосування цього твердження до матриць обґрунтовується тим, що матрицю

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

можна розглядати як дійсну функцію двох змінних $f(i, j)$, яка визначена для $i = 1, 2, \dots, m$ і $j = 1, 2, \dots, n$ рівністю $f(i, j) = a_{ij}$.

Наслідок 1

Нехай a є матриця

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Тоді

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$$

Означення

Нехай $f(x, y)$ – дійсна функція визначена для всіх $x \in A$, $y \in B$. Точка (x_0, y_0) , $x_0 \in A$, $y_0 \in B$, називається сідловою точкою, якщо виконуються наступні умови:

- $f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0)$ для всіх $x \in A$ і
- $f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y)$ для всіх $y \in B$

Теорема 3

Нехай $f(x, y)$ – дійсна функція визначена для всіх $x \in A$, $y \in B$ і існують

- $\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y)$

$$- \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y).$$

Тоді необхідна і достатня умова для виконання рівності

$$\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) = \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y)$$

полягає в тому, що $f(x, y)$ повинна мати сідлову точку.

Крім того, якщо (x_0, y_0) є сідловою точкою функції $f(x, y)$, то

$$f(x_0, y_0) = \max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x, y) = \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x, y)$$

Зауваження 2

На основі інтерпретації матриці як дійсної функції (зауваження 1) бачимо, що сідлова точка матриці це пара цілих чисел (i, j) таких, що a_{ij} одночасно представляють собою мінімум свого рядка та максимум свого стовпчика.

Розглянемо приклади: матриця

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

має одну сідлову точку $(1, 3)$ так як 2 є мінімумом 1-го рядка і максимумом 3-го стовпчика.

Матриця

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

має 4 сідлові точки:

- $(1, 1)$, оскільки 2 є мінімумом першого рядка і першого стовпчика
- $(1, 2)$, оскільки 2 є мінімумом першого рядка і другого стовпчика

- (2, 1), оскільки 2 є мінімумом другого рядка і першого стовпчика
- (2, 2), оскільки 2 є мінімумом другого рядка і другого стовпчика

Використовуючи поняття сідлової точки, виведемо з теореми 3 наступний наслідок:

Наслідок 2:

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Необхідною і достатньою умовою того, що

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

є існування сідлової точки матриці A (тобто існування пари цілих чисел (i_0, j_0) , для яких $a_{i_0 j_0}$ є одночасно мінімумом свого рядка і максимумом свого стовпчика)

Крім того,

$$a_{i_0 j_0} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

З наслідку 2 випливає, що рівність (1) виконується тоді і тільки тоді, коли матриця A має сідлову точку.

Тому, якщо матриця прямокутної гри має сідлову точку (x_0, y_0) (в цьому випадку, для стислості, ми будемо казати, що сама гра має сідлову точку), то гравцю $K1$ краще вибрати x_0 , а гравцю $K2$ - y_0 . Назвемо x_0, y_0 оптимальними виборами для $K1$ і $K2$ відповідно, а величину $a_{x_0 y_0}$ - ціною гри (для $K1$).

Розглянемо приклад: нехай матриця прямокутної гри має такий вигляд

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Сідлова точка цієї матриці – (2, 3), оскільки 4 є мінімумом другого рядка і третього стовпчика одночасно. Це означає, що оптимальним вибором для гравця K1 є 2, а для гравця K2 – 3. Ціна гри дорівнює 4.

Гравець K1, вибравши 2 може бути впевненим, що отримає щонайменше 4(ціна гри), а гравець K2, вибравши 3, не допустить, щоб гравець K1 отримав більше, ніж 4.

Додамо, що, коли ми кажемо, що оптимальним вибором для гравця K1 є 2, ми не маємо на увазі, що 2 слід обирати в будь-якому випадку. Наприклад, нехай гравець K1 знає, що K2 вибере 4(нехай K1 знає, що K2 завжди діє за порадою якоїсь людини і підкупив останнього, щоб він радив K2 обирати 4), тоді гравцю K1 краще обирати 1, а не 2, так як в цьому випадку він отримає, а не 6. Але тут є один дуже важливий нюанс, що гравець може знати наміри іншого гравця лише у виключних випадках. Тому краще грати математично оптимальним способом.

1.4 Висновки до розділу 1

В цьому розділі розглянуто поняття прямокутної гри та знаходження оптимальних стратегій, ціни гри обох гравців при наявності

- 1) домінованих рядків або/та стовпчиків
- 2) сідлових точок

РОЗДІЛ 2. ОПТИМАЛЬНІ СТРАТЕГІЇ В ПРЯМОКУТНИХ ІГРАХ, ЯКІ НЕ МАЮТЬ СІДЛОВУ ТОЧКУ

2.1 Змішані стратегії

Розглянемо тепер випадок, коли матриця не має сідлових точок.

Нехай є прямокутна гра з матрицею

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ця матриця не має сідлової точки, а тому ті методи, які були розглянуті раніше, не допоможуть нам знайти оптимальні способи гри для кожного з гравців. Крім того, байдуже, що вибере гравець K1 1 чи 2, так як він отримає в обох випадках 1 або -1, якщо, відповідно, гравець K2 зробить такий же або протилежний вибір. З іншої сторони, якщо K2 знає, який вибір зробить K1, то гравець K2 має зробити так, щоб гравець K1 заплатив йому 1 (для цього K2 має зробити протилежний вибір).

Тому, гравцю K1 важливо зробити так, щоб гравцю K2 складно було вгадати вибір, який він вибір має намір зробити. Один із способів, який може допомогти гравцю K1 досягти такого результату, це випадковий вибір.

Нехай, наприклад, гравець K1 вирішив зробити цей випадковий вибір за допомогою підкидання монети:

- Якщо випаде герб, то він вибирає 1.
- Якщо випаде решка, то він вибирає 2.

Ймовірність того, що K1 вибере 1, дорівнює $\frac{1}{2}$. Так само, якщо він вибере 2 – ймовірність теж $\frac{1}{2}$.

Математичне сподівання виграшу для гравця K1, якщо гравець K2 вибере 1, дорівнює $1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$. І таке же математичне сподівання виграшу буде, якщо гравець K2 вибере 2.

Тобто, тут можна зробити висновок, що, незалежно від того, який вибір зробить гравець K2, математичне сподівання виграшу все одно дорівнюватиме 0. Проте, це єдиний спосіб для гравця K1 грати в цю гру без ризику програшу, навіть якщо гравець K2 дізнається про його вибір.

Нехай гравець K1 використовує випадковий вибір і ймовірність того, що він вибере 1 дорівнює x , тоді ймовірність вибору 2 дорівнює $1 - x$. Припустимо, що гравець K2 знає, яким чином гравець робить випадковий вибір. Тоді математичне сподівання виграшу гравця K1, якщо гравець K2 вибере 1 буде дорівнювати

$$1 \times x + (-1)(1 - x) = 2x - 1$$

Якщо ж K2 вибере 2, то математичне сподівання виграшу гравця K1 дорівнює:

$$(-1)x + 1(1 - x) = 1 - 2x$$

Якщо $x > \frac{1}{2}$, то $1 - 2x < 0$, тому математичне сподівання виграшу гравця K1, якщо K2 вибере 2, менше 0.

Якщо $x < \frac{1}{2}$, то $2x - 1 < 0$, тому математичне сподівання виграшу гравця K1, якщо K2 вибере 1, теж менше 0.

Отже, оптимальний спосіб грати в цю гру гравцю K1 - це обирати 1 і 2, кожне з ймовірністю $\frac{1}{2}$. І по таким же причинам має грати гравець K2.

Ціна гри для K1 (математичне сподівання виграшу, якщо K1 грає оптимальним способом) дорівнює 0.

В наведених вище міркуваннях ми розглядали випадкові механізми, які визначають ймовірності різних виборів. Розглянемо тепер відносні частоти різних виборів.

Нехай є прямокутна гра з матрицею

$$\begin{array}{c|c} & y & 1-y \\ \hline x & 5 & 6 \\ 1-x & 8 & 4 \end{array}$$

Ця матриця не має сідлової точки, тому обом гравцям бажано грати з певними частотами. Припустимо, що

- K1 обирає 1 з частотою x і 2 з частотою $1 - x$. Причому $x \geq 0$ і $1 - x \geq 0$.

- K2 обирає 1 з частотою y і 2 з частотою $1 - y$. Причому $y \geq 0$ і $1 - y \geq 0$.

Тоді математичне сподівання виграшу для гравця K1 дорівнює:

$$E(x, y) = 5xy + 6x(1 - y) + 8(1 - x)y + 4(1 - x)(1 - y).$$

Спростимо цей вираз і перетворимо його:

$$\begin{aligned} E(x, y) &= 5xy + 6x - 6xy + 8y - 8xy + 4 - 4x - 4y + 4xy = -5xy + 2x + \\ &4y + 4 = -5\left(xy - \frac{2}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{8}{25}\right) + 4 - \frac{8}{25} = -5\left(x - \frac{4}{5}\right)\left(y - \frac{2}{5}\right) + \frac{92}{25} \end{aligned} \quad (2.1)$$

З цього випливає, що, якщо K1 візьме $x = \frac{4}{5}$, то математичне сподівання дорівнює, як мінімум, $\frac{92}{25}$. Більш того, він не може собі забезпечити виграш більший, ніж $\frac{92}{25}$, оскільки, гравець K2, взявши $y = \frac{2}{5}$, може гарантувати, що очікуваний виграш у K1 буде $\frac{92}{25}$, але не більше.

Тому, гравець K1 може спокійно ставити $\frac{92}{25}$, і, вибираючи $x = \frac{4}{5}$, отримати $\frac{92}{25}$. Гравець K2 може змиритися з тим, що отримає $-\frac{92}{25}$, вибравши $y = \frac{2}{5}$.

З наведених вище міркувань можна зробити висновок, що оптимальний спосіб гри для гравця K1 – це обирати 1 з ймовірністю $\frac{4}{5}$, а 2 з ймовірністю $\frac{1}{5}$; для K2 – обирати 1 з ймовірністю $\frac{2}{5}$, а 2 з ймовірністю $\frac{3}{5}$.

Використовуючи (2.1), знаходимо, що для всіх $x \in [0; 1], y \in [0; 1]$

$$E\left(x, \frac{2}{5}\right) \leq E\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) \leq E\left(\frac{4}{5}; y\right) \quad (2.2)$$

Тому $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$ є сідловою точкою функції $E(x, y)$

Нерівність (2.2) взагалі можна прийняти як означення оптимальних частот для будь-якої прямокутної гри з матрицею 2×2 .

Отже, якщо $E(x, y)$ - математичне сподівання виграшу гравця K1, коли він обирає 1 і 2 з відносними частотами x і $1 - x$ відповідно, а гравець K2 обирає 1 і 2 з відносними частотами y і $1 - y$ відповідно, то x^* - називаємо оптимальною частотою для гравця K1, а y^* - для гравця K2, ці оптимальні частоти такі, що

$$E(x, y^*) \leq E(x^*, y^*) \leq E(x^*; y)$$

Це означення можна узагальнити для матриць $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Означення:

Змішаною стратегією для гравця K1 називається впорядкований набір m дійсних невід'ємних чисел $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, які задовольняють умову

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$

Причому ці числа можна розглядати як частоти, з якими гравець K1 обирає 1, 2, 3, ..., m.

Аналогічно для гравця K2: змішана стратегія - впорядкований набір n дійсних невід'ємних чисел $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, які задовольняють умову

$$\sum_{j=1}^n y_j = 1$$

Причому ці числа можна розглядати як частоти, з якими гравець K2 обирає 1, 2, 3, ..., n.

Якщо гравець K1 використовує змішану стратегію $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, а K2 використовує змішану стратегію $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, то математичне сподівання виграшу гравця K1 матиме вигляд:

$$E(X, Y) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i y_j$$

Якщо для деякого $X^* \in S_m$ і деякого $Y^* \in S_n$ для всіх $X \in S_m$ і $Y \in S_n$ виконується нерівність

$$E(X, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq E(X^*, Y), \quad (2.3)$$

то X^* і Y^* називаються оптимальними змішаними стратегіями для K1 і K2 відповідно, а $E(X^*, Y^*)$ – ціною гри для K1, (X^*, Y^*) – розв'язок гри або стратегічною сідловою точкою.

Якщо величини $v_1 = \max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} E(X, Y)$ і $v_2 = \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} E(X, Y)$ існують і рівні між собою, то за теоремою 3 існують змішані стратегії, які

задовольняють умову (2.3), тому гра має ціну і оптимальні стратегії для обох гравців.

Таким чином, питання про існування v_1 і v_2 і їх рівності між собою є дуже важливим.

Теорема 4

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

деяка матриця, і нехай математичне сподівання виграшу $E(X, Y)$ для будь-якого $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ і будь-якого $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, які є елементами множин S_m і S_n відповідно, визначено наступним чином:

$$E(X, Y) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i y_j$$

Тоді величини $\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} E(X, Y)$ і $\min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} E(X, Y)$ існують і рівні між собою.

Теорема 5

Будь-яка прямокутна гра має ціну; гравець в прямокутній грі завжди має оптимальну стратегію.

Ця теорема випливає з теорем 3 і 4.

2.2 Властивості оптимальних стратегій

Розглянемо мінімакський метод знаходження оптимальних стратегій. Іноді можна визначити ціну гри з інтуїтивних міркувань або з безпосереднього

розгляду гри. У таких випадках для того, щоб знайти оптимальні стратегії для обох гравців зручно користуватися наступною теоремою.

Теорема 6

Нехай E – математичне сподівання виграшу в прямокутній грі з матрицею $m \times n$, її ціна v . Тоді, для того, щоб елемент X^* множини S_m був оптимальною стратегією для гравця К1, необхідно і достатньо, щоб для кожного $Y \in S_n$ виконувалась нерівність

$$v \leq E(X^*, Y)$$

Аналогічно, для того, щоб елемент $Y^* \in S_n$ був оптимальною стратегією для гравця К2, необхідно і достатньо, щоб для кожного $X \in S_m$ виконувалась нерівність

$$E(X, Y^*) \leq v$$

Для спрощення формулювання задачі будемо писати

- 1) $E(i, Y)$ замість $E(X_i, Y)$, де X_i – елемент множини S_m , i – та компонента якого дорівнює 1, а всі інші – 0.
- 2) $E(X, j)$ замість $E(X, Y_j)$, де Y_j – елемент множини S_n , j – та компонента якого дорівнює 1, а всі інші – 0.

Якщо $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ і $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, то

$$E(i, Y) = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j$$

$$E(X, j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i$$

Крім того,

$$E(X, Y) = \sum_{i=1}^m E(i, Y)x_i = \sum_{j=1}^n E(X, j)y_j$$

Теорема 7

Нехай E – математичне сподівання виграшу в прямокутній грі з матрицею $m \times n$ і нехай v – дійсне число; $X^* \in S_m$ і $Y^* \in S_n$. Тоді, для того, щоб v було ціною гри, а X^* і Y^* - оптимальними стратегіями відповідно для гравців K_1 і K_2 , необхідно і достатньо, щоб для $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ виконувалась подвійна нерівність:

$$E(i, Y^*) \leq v \leq E(X^*, j)$$

Наступна теорема є наслідком з теореми 6.

Теорема 8

Нехай E – математичне сподівання виграшу в прямокутній грі з матрицею $m \times n$ і v – ціна гри. Тоді, для того, щоб $X^* \in S_m$ був оптимальною стратегією для гравця K_1 , необхідно і достатньо, щоб для $1 \leq j \leq n$ виконувалась нерівність:

$$v \leq E(X^*, j)$$

Аналогічно, для того, щоб $Y^* \in S_n$ був оптимальною стратегією для K_2 , необхідно і достатньо, щоб для $1 \leq i \leq m$ виконувалась нерівність:

$$E(i, Y^*) \leq v$$

Теорема 9

Нехай E – математичне сподівання виграшу в прямокутній грі з матрицею $m \times n$ і нехай (X^*, Y^*) – розв’язок гри. Тоді

$$\max_{1 \leq i \leq m} E(i, Y^*) = \min_{1 \leq j \leq n} E(X^*, j)$$

Теорема 10

Нехай E – математичне сподівання виграшу в прямокутній грі з матрицею $m \times n$ і v – ціна гри і нехай $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$ і $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$ – оптимальні стратегії відповідно для гравців K1, K2. Тоді для будь-якого i , при якому $E(i, Y^*) < v$, має місце рівність $x_i^* = 0$, а для будь-якого j , при якому $v < E(X^*, j)$, має місце рівність $y_j^* = 0$.

Теорема 11

Нехай E – математичне сподівання виграшу в прямокутній грі з матрицею $m \times n$ і нехай $X^* \in S_m$, $Y^* \in S_n$. Тоді наступні твердження еквівалентні між собою:

- а) X^* - оптимальна стратегія для гравця K1, Y^* - для гравця K2.
- б) Якщо X – будь-який елемент множини S_m , а $Y \in S_n$, то

$$E(X, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq E(X^*, Y)$$

- в) Якщо i та j будь-які цілі числа, такі, що $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, то

$$E(i, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq E(X^*, j)$$

Розглянемо приклади.

- Нехай є прямокутна гра з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Необхідно знайти оптимальні стратегії та ціну гри.

Розв'язування:

Використовуючи теорему 7, необхідно знайти числа x_1, x_2, y_1, y_2, v такі, що

$$x_1 + x_2 = 1, \quad y_1 + y_2 = 1$$

$$0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq y_1 \leq 1$$

$$0 \leq x_2 \leq 1, \quad 0 \leq y_2 \leq 1$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq v \\ 4x_1 + 2x_2 \geq v \end{cases}, \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \leq v \\ 5y_1 + 2y_2 \leq v \end{cases}$$

Звичайні способи елементарної алгебри не дають можливість розв'язувати системи, які містять нерівності і рівності одночасно.

Проте, ми знаємо з теореми 4, що система має розв'язок і можна розглянути всі можливі випадки, які отримуються при заміні знаків $\leq$ і $\geq$ в 4 останніх нерівностях відповідно на знаки $<$ і $=$ і знаки $>$ і $=$.

Розглянемо спочатку випадок, коли в системах $\geq$ і $\leq$ замінені на $=$, тобто

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = v \\ 4x_1 + 2x_2 = v \end{cases}, \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 = v \\ 5y_1 + 2y_2 = v \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 - x_1 \\ y_2 = 1 - y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 5 - 5x_1 = v \\ 4x_1 + 2 - 2x_1 = v \end{cases}, \begin{cases} 3y_1 + 4 - 4y_1 = v \\ 5y_1 + 2 - 2y_1 = v \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 - 2x_1 = v \\ 2x_1 + 2 = v \end{cases}, \begin{cases} 4 - y_1 = v \\ 3y_1 + 2 = v \end{cases}$$

$$5 - 2x_1 + 2x_1 + 2 = 2v \Rightarrow v = \frac{7}{2}$$

$$5 - 2x_1 = \frac{7}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$4 - y_1 = \frac{7}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Оскільки x_1, x_2, y_1, y_2 , знайдені таким способом, невід'ємні, то ми знайшли розв'язок нашої початкової системи рівнянь і нерівностей.

Отже, оптимальний спосіб для гравця K1 – обирати числа 1 і 2 з ймовірностями $\frac{3}{4}$ і $\frac{1}{4}$ відповідно, а для гравця K2 – обирати числа 1 і 2 з однаковими ймовірностями, тобто, $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. Ціна гри дорівнює $\frac{7}{2}$.

- Нехай тепер матриця така

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Розв'язування:

Аналогічно, як в попередньому прикладі.

Використовуючи теорему 7, необхідно знайти числа $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, v$ такі, що

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq y_1 \leq 1$$

$$0 \leq x_2 \leq 1, \quad 0 \leq y_2 \leq 1$$

$$0 \leq x_3 \leq 1, \quad 0 \leq y_3 \leq 1$$

$$\begin{cases} 0x_1 + 2x_2 + x_3 \geq v \\ 1x_1 + 0x_2 + 2x_3 \geq v \\ 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 \geq v \end{cases}, \quad \begin{cases} 0y_1 + y_2 + 2y_3 \leq v \\ 2y_1 + 0y_2 + 1y_3 \leq v \\ 1y_1 + 2y_2 + 0y_3 \leq v \end{cases}$$

Звичайні способи елементарної алгебри не дають можливість розв'язувати системи, які містять нерівності і рівності одночасно.

Проте, ми знаємо з теореми 4, що система має розв'язок і можна розглянути всі можливі випадки, які отримуються при заміні знаків $\leq$ і $\geq$ в 6 останніх нерівностях відповідно на знаки $<$ і $=$ і знаки $>$ і $=$.

Розглянемо спочатку випадок, коли в системах $\geq$ і $\leq$ замінені на $=$, тобто

$$\begin{cases} 0x_1 + 2x_2 + x_3 = v \\ 1x_1 + 0x_2 + 2x_3 = v \\ 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 = v \end{cases}, \begin{cases} 0y_1 + y_2 + 2y_3 = v \\ 2y_1 + 0y_2 + 1y_3 = v \\ 1y_1 + 2y_2 + 0y_3 = v \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 1 - x_1 - x_2 \\ y_3 = 1 - y_1 - y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + 1 = v \\ -x_1 - 2x_2 + 2 = v \\ 2x_1 + x_2 = v \end{cases}, \begin{cases} -2y_1 - y_2 + 2 = v \\ y_1 - y_2 + 1 = v \\ y_1 + 2y_2 = v \end{cases}$$

З третього рівняння обох систем $x_2 = v - 2x_1$ і $y_1 = v - 2y_2$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ 3x_1 = 3v \end{cases}, \begin{cases} 3y_2 + 2 = 3v \\ y_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3} \\ x_3 = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ і } \begin{cases} y_1 = \frac{1}{3} \\ y_2 = \frac{1}{3} \\ y_3 = \frac{1}{3} \end{cases} v = 1$$

Оскільки $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$, знайдені таким способом, невід'ємні, то ми знайшли розв'язок нашої початкової системи рівнянь і нерівностей.

Отже, оптимальний спосіб для гравця К1 – обирати числа 1, 2 і 3 з ймовірностями $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ відповідно, а для гравця К2 – так само як і гравцю К1.

Розглянемо тепер, як можна обійти труднощі, які виникають в тому випадку, коли дві системи рівнянь, які утворюються в результаті заміни знаків $\leq$ і $\geq$ на $=$ в тих двох системах нерівностей, несумісні або не мають розв'язків, які лежать на інтервалі $[0;1]$. Матриця така:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Використовуючи теорему 7, необхідно знайти числа $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, v$ такі, що

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq y_1 \leq 1$$

$$0 \leq x_2 \leq 1, \quad 0 \leq y_2 \leq 1$$

$$0 \leq x_3 \leq 1, \quad 0 \leq y_3 \leq 1$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq v \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq v \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq v \end{cases}, \quad \begin{cases} 3y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq v \\ -y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq v \\ 2y_1 + 2y_2 + 6y_3 \leq v \end{cases}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли в системах $\geq$ і $\leq$ замінені на $=$, тобто

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = v \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = v \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = v \end{cases}, \quad \begin{cases} 3y_1 - 2y_2 + 4y_3 = v \\ -y_1 + 4y_2 + 2y_3 = v \\ 2y_1 + 2y_2 + 6y_3 = v \end{cases}$$

Розв'язуючи першу систему, отримуємо:

$$x_1 = 1 - x_2 - x_3 \Rightarrow \begin{cases} -4x_2 - x_3 + 3 = v \\ 6x_2 + 4x_3 - 2 = v \\ -2x_2 + 2x_3 + 4 = v \end{cases}$$

З першого рівняння: $x_3 = 3 - 4x_2 - v \Rightarrow \begin{cases} -10x_2 + 10 = 5v \\ -10x_2 + 10 = 3v \end{cases}$

$v = 0, x_2 = 1$. Це означає, що $x_3 = 3 - 4 = -1 \notin [0; 1]$

Розглянемо тепер інший випадок:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 > v \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = v, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = v \end{cases} \quad \begin{cases} 3y_1 - 2y_2 + 4y_3 = v \\ -y_1 + 4y_2 + 2y_3 = v \\ 2y_1 + 2y_2 + 6y_3 = v \end{cases}$$

Оскільки $3x_1 - x_2 + 2x_3 > v$, то за теоремою 10 маємо $y_1 = 0$.

$$\begin{cases} -2y_2 + 4y_3 = v \\ 4y_2 + 2y_3 = v \\ 2y_2 + 6y_3 = v \\ y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

Віднімемо від другого рівняння третє, помножене на 2, тоді

$4y_2 + 2y_3 - 4y_2 - 12y_3 = 0$, отримуємо $y_3 = 0$. Додамо 1 і 3 рівняння, тоді $y_2 = 0$, що суперечить 4 рівнянню, отже, система несумісна.

Перебираючи інші випадки, в кінці кінців, маємо такий випадок:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = v \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = v, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 > v \end{cases} \quad \begin{cases} 3y_1 - 2y_2 + 4y_3 < v \\ -y_1 + 4y_2 + 2y_3 = v \\ 2y_1 + 2y_2 + 6y_3 = v \end{cases}$$

Оскільки $4x_1 + 2x_2 + 6x_3 > v$, то за теоремою 10 маємо $y_3 = 0$.

Оскільки $3y_1 - 2y_2 + 4y_3 < v$, то за теоремою 10 маємо $x_1 = 0$.

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_3 = v \\ 4x_2 + 2x_3 = v \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -y_1 + 4y_2 = v \\ 2y_1 + 2y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

Тоді $x_2 = 0, x_3 = 1, y_1 = \frac{2}{5}, y_2 = \frac{3}{5}, v = 2$.

Тому, оптимальна стратегія для першого гравця: $(0, 0, 1)$, а для другого гравця $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0)$. Ціна гри дорівнює 2.

2.3 Графічний спосіб

Розглянемо графічний спосіб знаходження оптимальних стратегій та ціни гри. Цей спосіб можна використовувати тільки в іграх $2 \times n, n \times 2, 3 \times n$ та $n \times 3$. Для матриць $m \times n, m, n > 3$ графічний метод непридатний.

Приклад:

Дана прямокутна гра з матрицею

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2.1 & 2.2 & 2.3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1.1 \\ 2.1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Примітка: 1.1 і 1.2 означають відповідно 1-ша і 2-га стратегія гравця K1, а 2.1, 2.2 і 2.3 – відповідно 1 – ша, 2-га, 3-тя стратегія гравця K2.

Якщо гравець K1 використовує змішану стратегію $(x, 1 - x)$, а K2 використовує:

а) чисту стратегію 2.1, то гравець K2 заплатить гравцю K1

$$1x + 2(1 - x) = 2 - x$$

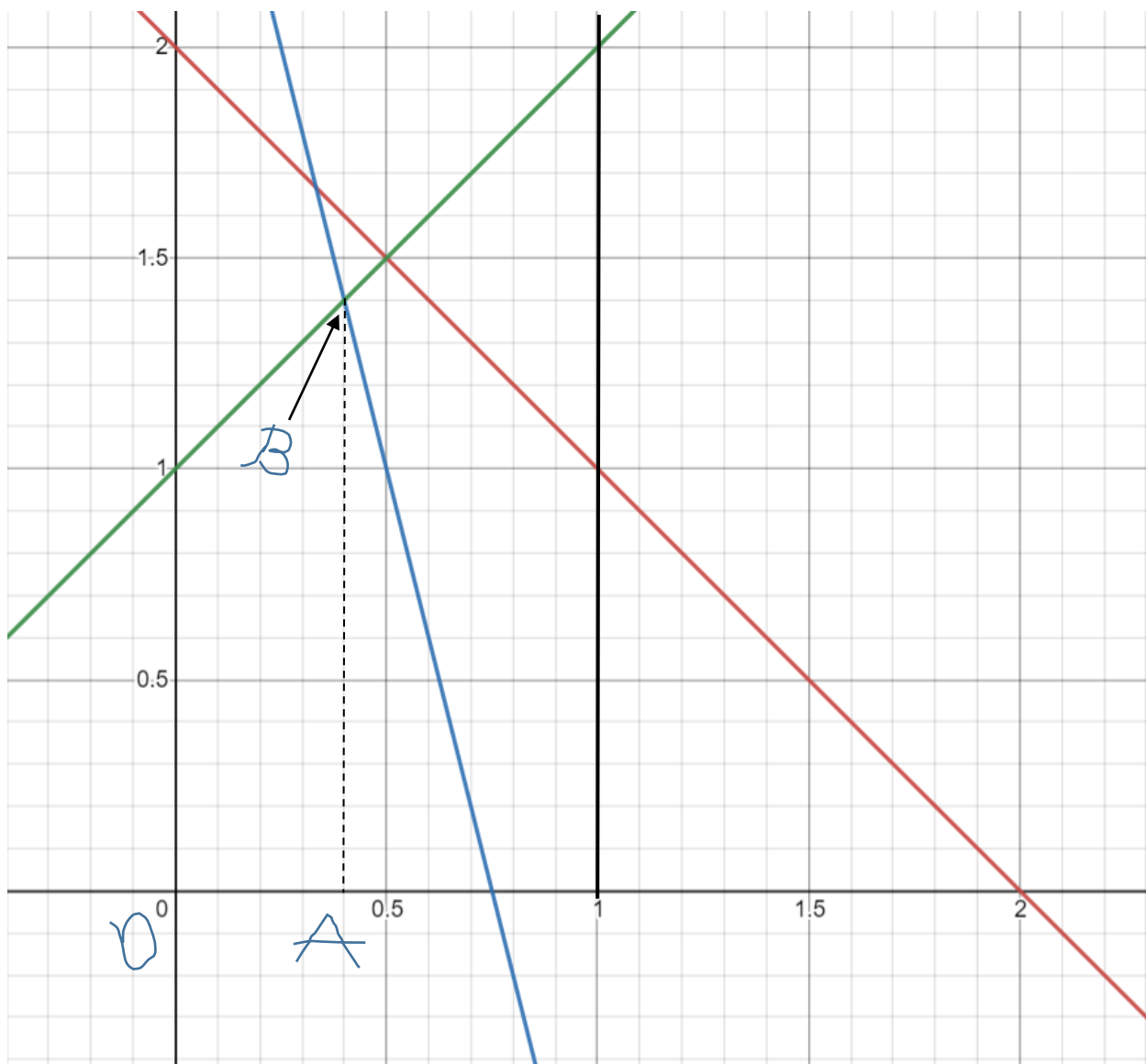
б) чисту стратегію 2.2, то гравець K2 заплатить гравцю K1

$$(-1)x + 3(1 - x) = 3 - 4x$$

в) чисту стратегію 2.3, то гравець K2 заплатить гравцю K1

$$2x + 1(1 - x) = 1 + x$$

Проведемо прямі $y = 2 - x$; $y = 3 - 4x$, $y = 1 + x$ на інтервалі $[0;1]$
(рисунок 2.1)



червона лінія $y = 2 - x$; синя $y = 3 - 4x$, а зелена $y = 1 + x$

Рисунок 2.1 – Графіки

При кожному виборі гравцем K1 стратегії x він може бути впевнений, що отримає, принаймні, найменшу з ординат трьох прямих, які відповідають x .

Таким чином, для гравця K1 вибрати оптимальне x означає вибрати таке x , при якому найменша з трьох ординат щонайбільше; з рис. 1 видно, що оптимальним x буде відрізок OA, а ціна гри – відрізок AB (беремо максимальну ординату опуклої множини, яка обмежена зверху прямими лініями. Такий же спосіб використовується для будь-якої гри з матрицею $2 \times n$. Для гри з матрицею $m \times 2$ графіки будуються аналогічно, але в цьому випадку ціна гри дорівнює мінімальній ординаті опуклої множини, обмеженої знизу прямими лініями)

Тому ми можемо знайти оптимальну стратегію для K1 та ціну гри, розв'язавши сумісно рівняння: $y = 3 - 4x$, $y = 1 + x$.

$$3 - 4x = 1 + x \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

$$\text{Ціна гри } y = \frac{7}{5}.$$

З рисунку 2.1 також видно, що стратегія 2.1 не ввійде в оптимальну змішану стратегію гравця K2, тому ми можемо знайти оптимальну стратегію гравця K2 за допомогою матриці

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Використовуючи теорему 7, необхідно знайти числа y_2, y_3 , такі, що

$$y_2 + y_3 = 1,$$

$$0 \leq y_2 \leq 1,$$

$$0 \leq y_3 \leq 1$$

$$\begin{cases} -y_2 + 2y_3 \leq \frac{7}{5} \\ 3y_2 + y_3 \leq \frac{7}{5} \end{cases}$$

Замінімо $\leq$ на $=$. Маємо:

$$\begin{cases} -y_2 + 2y_3 = \frac{7}{5} \\ 3y_2 + y_3 = \frac{7}{5} \end{cases}$$

Тоді $y_2 = \frac{1}{5}, y_3 = \frac{4}{5}$.

Отже, оптимальна стратегія для гравця К2 така: $\left(0; \frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$

Розглянемо приклад для матриці $n \times 2$:

Дана прямокутна гра з матрицею

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 2.1 & 2.2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1.1 \\ 1.2 \\ 1.3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Якщо гравець К2 використовує змішану стратегію $(x, 1 - x)$, а К1 використовує:

а) чисту стратегію 1.1, то гравець К1 заплатить гравцю К2

$$2x + 7(1 - x) = 7 - 5x$$

б) чисту стратегію 1.2, то гравець К1 заплатить гравцю К2

$$3x + 5(1 - x) = 5 - 2x$$

с) чисту стратегію 1.3, то гравець K1 заплатить гравцю K2

$$11x + 2(1 - x) = 9x + 2$$

Проведемо прямі $y = 7 - 5x$; $y = 5 - 2x$, $y = 9x + 2$ на інтервалі $[0;1]$ (рисунок 2.2)



синя лінія $y = 7 - 5x$; зелена $y = 5 - 2x$, а фіолетова $y = 9x + 2$

Рисунок 2.2 – Графіки

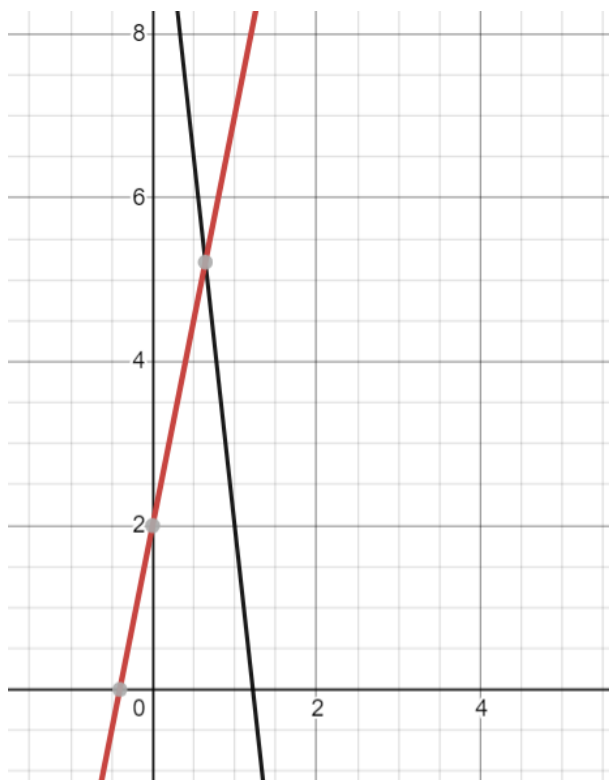
Ці графіки нам показують, що стратегія 1.2 гравця K1 не увійде в його оптимальну стратегію, тому розглянемо матрицю:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$$

$$y = 2x + 11(1 - x) = 11 - 9x$$

$$y = 7x + 2(1 - x) = 5x + 2$$

Побудуємо графіки цих двох прямих (рисунок 2.3)



$y = 11 - 9x$ (чорна лінія), $y = 5x + 2$ (червона лінія)

Рисунок 2.3 - Графіки

$$11 - 9x = 5x + 2$$

$$x = \frac{9}{14}, \quad y = \frac{73}{14}$$

Тому,

оптимальна стратегія гравця К2: $\left(\frac{9}{14}, 0, \frac{5}{14}\right)$

оптимальна стратегія гравця К1: $\left(\frac{5}{14}, \frac{9}{14}\right)$

Ціна гри дорівнює $\frac{73}{14}$.

Розглянемо тепер приклад, в якому один з гравців має багато оптимальних стратегій:

Дана прямокутна гра з матрицею

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 2.1 & 2.2 & 2.3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1.1 \\ 1.2 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & 13 \\ 8 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Примітка: 1.1 і 1.2 означають відповідно 1-шу і 2-гу стратегію гравця K1, а 2.1, 2.2 і 2.3 – відповідно 1-шу, 2-гу, 3-тю стратегію гравця K2.

Якщо гравець K1 використовує змішану стратегію $(x, 1 - x)$, а K2 використовує:

а) чисту стратегію 2.1, то гравець K2 заплатить гравцю K1

$$3x + 8(1 - x) = 8 - 5x$$

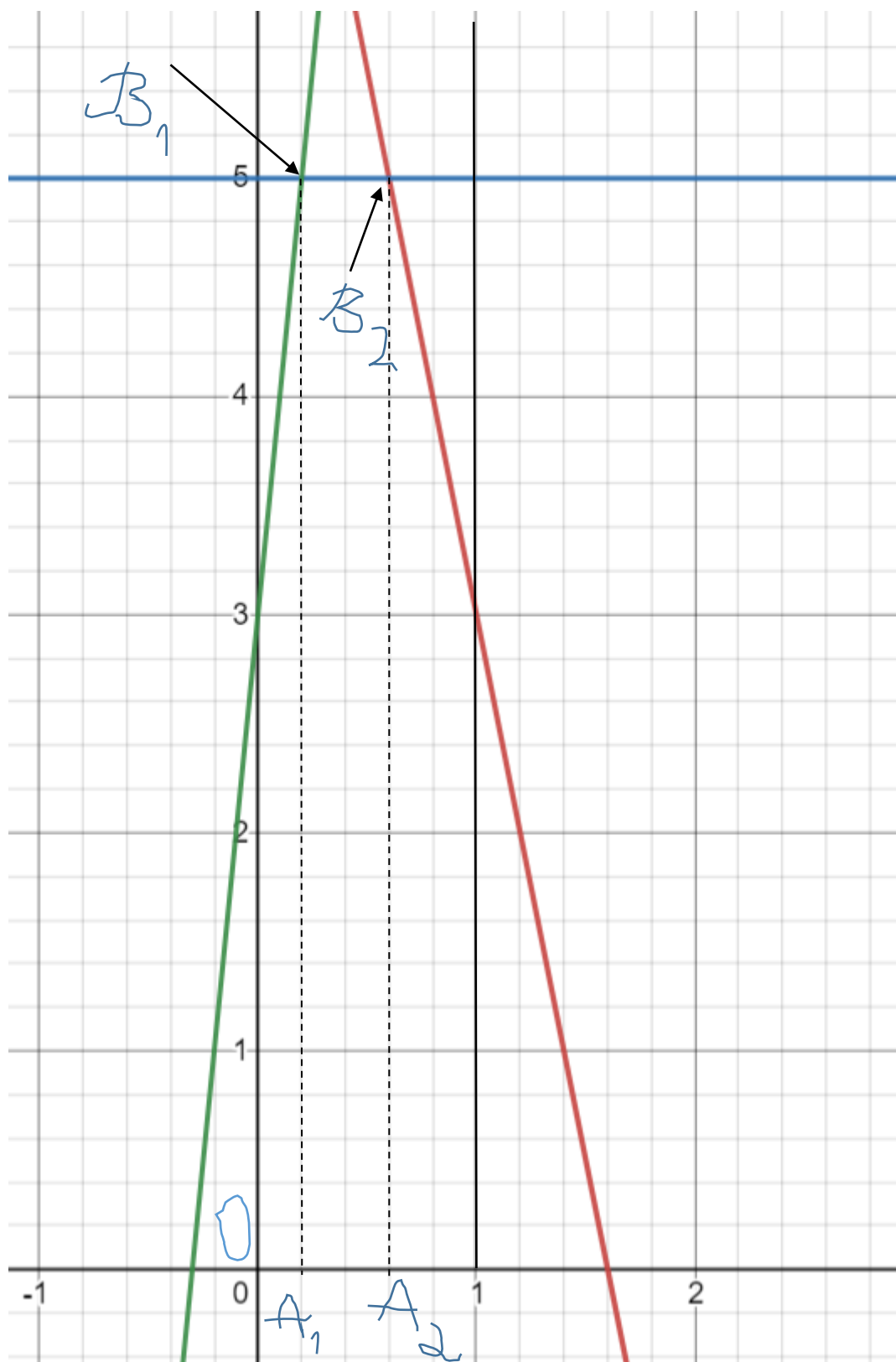
б) чисту стратегію 2.2, то гравець K2 заплатить гравцю K1

$$5x + 5(1 - x) = 5$$

в) чисту стратегію 2.3, то гравець K2 заплатить гравцю K1

$$13x + 3(1 - x) = 10x + 3$$

Проведемо прямі $y = 8 - 5x$; $y = 5$, $y = 10x + 3$ на інтервалі $[0;1]$ (рисунок 2.4)



червона лінія $y = 8 - 5x$; синя $y = 5$, а зелена $y = 10x + 3$

Рисунок 2.4 Графіки

З рис. 4 видно, що ціна гри дорівнює 5, і для будь-якого x , що задовольняє умову $OA_1 \leq x \leq OA_2$, буде оптимальним для гравця К1.

Розв'язуючи сумісно рівняння

$$\begin{cases} y = 8 - 5x \\ y = 5 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} y = 10x + 3 \\ y = 5 \end{cases},$$

отримуємо $x = 0.6$ і $x = 0.2$ відповідно.

Тоді $OA_1 = 0.2$, а $OA_2 = 0.6$

З цього можна зробити висновок, що оптимальною стратегією для гравця K1 буде $(x, 1 - x)$, де $0.2 \leq x \leq 0.6$.

Оптимальною стратегією для гравця K2 буде $(0; 1; 0)$.

2.4 Симплекс-метод

Розглянемо ще один метод розв'язання прямокутних ігор – симплекс-метод.

До кожного елемента матриці

$$A = (a_{ij}), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

можна додати таку константу $c > 0$, що всі елементи отриманої матриці стануть додатними. Якщо v – ціна гри з матрицею A , то ціна гри нової матриці буде $v + c$. Тому, без втрати загальності, можна вважати, що

$$v > 0, a_{ij} > 0, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

З усіх ймовірнісних векторів $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, які задовольняють нерівностям

$$\sum_j a_{ij} \eta_j \leq \alpha, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (2.4)$$

оптимальними стратегіями $y^0 = (\eta_1^0, \dots, \eta_n^0)$ будуть такі вектори, для яких

$$\sum_j a_{ij} \eta_j^0 \leq v, \quad 1 \leq i \leq m,$$

а ціною v – найменше з чисел α , які задовольняють умову (2.4).

Тому, щоб знайти ціну гри і оптимальну стратегію $y^0 = (\eta_1^0, \dots, \eta_n^0)$ гравця K2, достатньо знайти $\min(\alpha)$, яке задовольняє (2.4), або, еквівалентно, $\max\left(\frac{1}{\alpha}\right)$, яке задовольняє (2.4), для деякого вектора $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, $\eta_1, \dots, \eta_n \geq 0$, $\sum_j \eta_j = 1$

Якщо $y_j = \frac{\eta_j}{\alpha}$, $j = 1, \dots, n$, то треба максимізувати $\frac{1}{\alpha}$, а

$$\max\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \max \sum_j y_j$$

де y_j задовольняють нерівність

$$\sum_j a_{ij} y_j \leq 1, i = 1, \dots, m, y_1, \dots, y_n \geq 0$$

Аналогічно розглядається задача знаходження $\min \sum_i x_i$, при цьому

$$\sum_i a_{ij} x_i \geq 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad x_1, \dots, x_m \geq 0$$

Так як оптимальні стратегії існують, ми знаємо, що обидві задачі – мінімізації $\sum x_i$ та максимізації $\sum y_j$ – при відповідних обмеженнях мають розв'язки $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ і $y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$.

Нехай $x_i = \frac{\xi_i}{\alpha}$ для всіх ξ_i , які задовольняють нерівність

$$\sum_j a_{ij} \xi_i \geq \alpha, \quad j = 1, \dots, n$$

Тоді отримуємо, що максимальне α , або, еквівалентно, мінімальне $\frac{1}{\alpha} = \sum_i x_i$, досягається в точці $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$, де $x_i = \frac{\xi_i^0}{\alpha}$, а $(\xi_1^0, \dots, \xi_m^0)$ – оптимальна стратегія гравця К1.

Крім того, ми також знаємо, що

$$\min \sum_i x_i = \frac{1}{v} = \max \sum_j y_j$$

Ці дві задачі називаються двоїстими. Розглянемо ці задачі більш детально.

Задача 1: Знайти

$$\max_{y \in T} \sum_{j=1}^n q_j y_j,$$

де $T = \{y \mid y = (y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n \geq 0, \sum_j a_{ij} y_j = p_i, i = 1, \dots, m\}$

Задача 2: Знайти

$$\min_{x \in S} \sum_{i=1}^m p_i x_i,$$

де $S = \{x \mid x = (x_1, \dots, x_m), \sum_i a_{ij} x_i \geq q_j, j = 1, \dots, n\}$

Крім того, необов'язково, що $x_1, \dots, x_m \geq 0$.

Означення

Функції $\sum_{j=1}^n q_j y_j$ і $\sum_{i=1}^m p_i x_i$ називаються цільовими функціями відповідних задач, а точки множин S, T – допустимими розв’язками цих задач. Точка $x^0 \in T$, в якій досягається максимум цільової функції, називається оптимальним розв’язком задачі 1.

Аналогічно визначається оптимальний розв’язок задачі 2.

Теорема 11

Якщо $x^0 \in S, y^0 \in T$, то $\sum_j q_j y_j^0 \leq \sum_i p_i x_i^0$. Якщо точки x^0 і y^0 такі, що $\sum_j q_j y_j^0 = \sum_i p_i x_i^0$, то вони є оптимальними розв’язками відповідних задач.

Означення

Нехай $C_1, \dots, C_n, p$ – вектори з R^m такі, що

$$y_1 C_1 + \dots + y_n C_n = p,$$

де $y_1, \dots, y_n \geq 0$, причому $y_{\alpha_1}, \dots, y_{\alpha_k} > 0$, $1 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_k \leq n$, а інші y_i дорівнюють 0. Тоді, якщо вектори $C_{\alpha_1}, \dots, C_{\alpha_k}$ лінійно незалежні, то $y = (y_1, \dots, y_n)$ називається базисним розв’язком.

Теорема 12

Нехай y^0 – оптимальний розв’язок задачі 1. Тоді існує базисний оптимальний розв’язок, для якого C_j є стовпчиками матриці

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

а вектор p дорівнює

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}$$

Теорема 13

Якщо $e_1, \dots, e_m$ – базис простору R^m і f - вектор з R^m , який визначений формулою $f = \sum_j \alpha_j e_j$, де $\alpha_r \neq 0$, то $e_1, \dots, e_{r-1}, f, e_{r+1}, \dots, e_m$ – також базис в R^m .

Нехай задача 1 має оптимальний розв’язок. В цьому випадку бажано мати обчислювальну процедуру, яка дозволяє знайти оптимальний розв’язок за скінченну кількість кроків. Такою процедурою є симплекс-метод, який зараз будемо розглядати.

Припущення про невиводженість

Кожна точка $y \in T$ має принаймні m додатних компонент, а ранг матриці $(a_{ij}), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ дорівнює m .

Процедура буде починатись з базисного допустимого розв’язку. За теоремою 12, якщо існує оптимальний розв’язок, то можна знайти і базисний оптимальний розв’язок. Оскільки ранг дорівнює m , то кожні $m + 1$ стовпчиків лінійно залежні. Тому, допустимий базисний розв’язок y має не більше, ніж m додатних компонент. З припущення про невиводженість випливає, що будь-який допустимий розв’язок має не менше m додатних компонент.

Отже, будь-який базисний допустимий розв’язок має рівно m додатних компонент. Так як:

- існує лише скінченна кількість базисів, які можна скласти із стовпчиків матриці A
 - Кожний базисний розв’язок відповідає лише одному такому базису
- то, перенумеровуючи всі можливі базиси і перебираючи їх, можна за скінченну кількість кроків отримати оптимальний розв’язок. Але такий процес знаходження оптимального розв’язку є занадто громіздким.

Симплекс-метод полягає в наступному. Почнемо з допустимого базисного розв’язку. Ми маємо перевірити, чи не можна, відкидаючи деякий вектор базису і вводячи в нього деякий інший стовпчик матриці, отримати новий допустимий базисний розв’язок, який строго збільшує значення цільової функції. Якщо це неможливо, то зупиняємося і вважаємо, що отриманий базисний розв’язок є оптимальним.

Розглянемо задачу 1.

Нехай через $C_1, \dots, C_n$ позначені n стовпчиків матриці

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}$$

Будемо вважати, що перші m стовпчиків матриці, тобто $C_1, \dots, C_m$, лінійно незалежні, а $y = (y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0) \in T$ – допустима точка, де $y_1, \dots, y_m > 0$. Почнемо з наступної таблиці (таблиця 2.1)

Таблиця 2.1

	C_1	C_2	...	C_m	...	C_k	...	C_n	p
C_1	1	0	...	0	...	α_{1k}	...	α_{1n}	y_1
C_2	0	1	...	0	...	α_{2k}	...	α_{2n}	y_2
$\vdots$									$\vdots$
C_r	0	0	...	0	...	α_{rk}	...	α_{rn}	y_r
$\vdots$									$\vdots$
C_m	0	0	...	1	...	α_{mk}	...	α_{mn}	y_m

Ця таблиця означає, що

$$C_k = \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} C_i, k = 1, \dots, n.$$

Останній стовпчик, написаний справа від матриці, дає

$$p = \sum_{i=1}^m y_i C_i$$

Якщо деяке $\alpha_{rk} \neq 0$, то з теореми 13 випливає, що C_r можна вивести із базису, а C_k – ввести в базис. Таким чином можна отримувати нові базиси із старих.

Для будь-яких $r, 1 \leq r \leq m, k > m, \alpha_{rk} \neq 0$ ця процедура заслуговує увагу лише тоді, коли

- а) p є невід’ємною лінійною комбінацією $C_1, \dots, C_{r-1}, C_k, C_{r+1}, \dots, C_m$
- б) Новий розв’язок y' строго збільшує значення цільової функції.

Припустимо, що нова таблиця побудована. Вона має такий вигляд (таблиця 2.2):

Таблиця 2.2

	C_1	C_2	...	C_k	...	C_n	p
C_1	α'_{11}	α'_{12}	...	0	...	α'_{1n}	y'_1
$\vdots$	$\vdots$						$\vdots$
C_{r-1}				0			y'_{r-1}
C_k				1			y'_r
C_{r+1}				0			y'_{r+1}
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
C_m	α'_{m1}	α'_{m2}	...	0	...	α'_{mn}	y'_m

Наше правило обчислення елементів α'_{ij} можна поширити також на стовпчик, який відповідає вектору p , а саме, легко перевірити, що

$$y'_i = y_i - y_r \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{rk}}, i \neq r$$

$$y'_r = \frac{\alpha_r}{\alpha_{rk}}$$

А також

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m y'_i C_i + y'_r C_k = p$$

Якщо новий розв'язок $y' = (y'_1, \dots, y'_m)$ був би допустимим, то мали би

$$y'_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

тобто

$$y_i \geq y_r \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{rk}}, \quad i \neq r, \quad i = 1, \dots, m$$

та

$$\frac{y_r}{\alpha_{rk}} \geq 0.$$

Отже, для того, щоб виконувалась нерівність $y'_r > 0$, необхідно, щоб було $\alpha_{rk} > 0$. Так як $y_i > 0, i = 1, \dots, m$, у випадку, коли $\alpha_{ik} < 0$ для кожного $i \neq r, i = 1, \dots, m$, то для $i \neq r$ виконується умова:

$$y_i \geq \frac{y_r}{\alpha_{rk}} \alpha_{ik}$$

(якщо $\alpha_{rk} > 0$) і при цьому $y'_i \geq 0$.

Єдиний випадок, який може викликати труднощі – це випадок $\alpha_{ik} > 0$.

Тоді, щоб зробити $y'_i \geq 0$, можна діяти наступним чином.

Нехай для будь-якого фіксованого k виконується:

$$\min_{\substack{i \\ \alpha_{ik} > 0}} \frac{y_i}{\alpha_{ik}} = \frac{y_r}{\alpha_{rk}}$$

Тоді виконується всі необхідні умови, і приходимо до наступного правила:

Ввести в базис C_k і відкинути той вектор C_r , для якого

$$\min_{\substack{i \\ \alpha_{ik} > 0}} \frac{y_i}{\alpha_{ik}} = \frac{y_r}{\alpha_{rk}}.$$

Тепер задамо собі питання: чи воно варте того, що ми робили?

Так, варте. Якщо, звісно, отриманий розв'язок покращує цільову функцію, тобто, якщо

$$q_1 y'_1 + \dots + q_{r-1} y'_{r-1} + q_k y'_r + q_{r+1} y'_{r+2} + \dots + q_m y'_m > \sum_{j=1}^m q_j y_j$$

Піставляючи значення y'_j , виражені через y_j , бачимо, що необхідно, щоб виконувалась нерівність

$$\sum_{j \neq r} q_j \left(y_j - y_r \frac{\alpha_{jk}}{\alpha_{rk}} \right) + q_k \frac{y_r}{\alpha_{rk}} > \sum_{j \neq r} q_j y_j + q_r y_r$$

Відкидаючи $\sum_{j \neq r} q_j y_j$ в обох частинах нерівності, ми приходимо до умови

$$\frac{y_r}{\alpha_{rk}} \sum_{j \neq r} q_j \alpha_{jk} + q_r y_r - q_k \frac{y_r}{\alpha_{rk}} < 0$$

Тому, для того, щоб C_k можна було вважати можливим кандидатом на заміну C_r в базисі, який покращує цільову функцію, необхідно, щоб виконувалась умова

$$\frac{y_r}{\alpha_{rk}} \left(\sum_{j=1}^m q_j \alpha_{jk} - q_k \right) < 0.$$

Раніше ми вимагали, щоб для вектора C_k , який вводиться в базис, і для вектора C_r , який відкидається з базису, виконувалась умова $\alpha_{rk} > 0$.

Оскільки $y > 0$, то, якими би не були r і k , можна ввести в базис C_k і вивести з базису C_r , якщо виконуються умови:

а) $\alpha_{rk} > 0$,

б) $\sum_{j=1}^m q_j \alpha_{jk} - q_k < 0$,

в) r – індекс, для якого $\alpha_{rk} > 0$ і $\min_{\substack{i \\ \alpha_{ik} > 0}} \frac{y_i}{\alpha_{ik}} = \frac{y_r}{\alpha_{rk}}$.

Оскільки ми кожний раз отримуємо новий базис, який строго збільшує цільову функцію, то ми маємо через скінченну кількість кроків зупинитися.

Припустимо, що умова б) не виконується для жодного k . Тоді останній допустимий базисний розв'язок є оптимальним. Це впливає з наступної теореми.

Теорема 14

Нехай

$$\sum_{j=1}^m q_j \alpha_{jk} - q_k \geq 0$$

для всіх $k = 1, \dots, n$. Тоді останній отриманий в нашому процесі розв'язок y^0 є оптимальним.

Може бути такий випадок, що для деякого k умова б) виконується, але не існує жодного $\alpha_{ik} > 0$. Тоді цільова функція є необмеженою.

Теорема 15

Нехай

$$\sum_{j=1}^m q_j \alpha_{jk} - q_k < 0$$

при деякому k і $\alpha_{jk} \leq 0, j = 1, \dots, m$. Тоді на множині допустимих розв'язків T цільова функція необмежена.

Приклад: нехай є прямокутна гра з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

а) Ця матриця не має домінованих рядків чи стовпчиків

б) Мінімум першого рядка 1, але не є максимумом свого стовпчика;

Мінімум першого рядка 2, але не є максимумом свого стовпчика;

Мінімум першого рядка 0, але не є максимумом другого чи четвертого стовпчика. Отже, матриця не має сідлових точок.

в) Тепер застосовуємо симплекс-метод.

Знайдемо спочатку оптимальні стратегії другого гравця. Задача знаходження оптимальної стратегії цього гравця еквівалентно задачі:

Знайти $\max(x + y + z + w)$, якщо

$$\begin{cases} 4x + 3y + 1z + 4w \leq 1 \\ 2x + 5y + 6z + 3w \leq 1 \\ 1x + 0y + 7z + 0w \leq 1 \\ x, y, z, w \geq 0 \end{cases}$$

Після введення додаткових змінних ця задача зводиться до еквівалентної задачі:

Знайти $\max(0t + 0u + 0v + x + y + z + w)$, якщо

$$\begin{cases} 1t + 0u + 0v + 4x + 3y + 1z + 4w = 1 \\ 0t + 1u + 0v + 2x + 5y + 6z + 3w = 1 \\ 0t + 0u + 1v + 1x + 0y + 7z + 0w = 1 \\ t, u, v, x, y, z, w \geq 0 \end{cases}$$

Це задача 1, і ми можемо почати з такого допустимого базисного розв'язку:

$$t = 1, u = 1, v = 1, x = 0, y = 0, z = 0, w = 0$$

Нехай $C_1, \dots, C_7$ – стовпчики матриці, яка визначається наведеною вище системою рівнянь. Спочатку таблиця має вигляд (таблиця 2.3):

Таблиця 2.3

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	p
C_1	1	0	0	4	3	1	4	1
C_2	0	1	0	2	5	6	3	1
C_3	0	0	1	1	0	7	0	1
	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0

В останньому рядку таблиці вказані значення

$$\sum_{j=1}^m q_j \alpha_{js} - q_s,$$

де C_1, C_2, C_3 – базисні вектори, α_{js} – задана матриця. Останній нуль в цьому рядку – значення цільової функції для розглянутого розв’язку на даному кроці.

Можна ввести в базис C_7 . Так як $\min\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$, з базису відкидаємо C_1 .

Нова таблиця буде виглядати так (таблиця 2.4)

Таблиця 2.4

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	p
C_7	$\frac{1}{4}$	0	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$
C_2	$-\frac{3}{4}$	1	0	-1	$\frac{11}{4}$	$\frac{21}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
C_3	0	0	1	1	0	7	0	1
	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

Тепер можна ввести в базис C_6 .

$$\min\left(\frac{1}{4} \div \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4} \div \frac{21}{4}, 1 \div 7\right) = \frac{1}{21}$$

Тоді з базису відкидаємо C_2 .

Нова таблиця буде виглядати так (таблиця 2.5)

Таблиця 2.5

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	p
C_7	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{21}$	0	$\frac{22}{21}$	$\frac{13}{21}$	0	1	$\frac{5}{21}$
C_6	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{21}$	0	$-\frac{4}{21}$	$\frac{11}{21}$	1	0	$-\frac{1}{21}$
C_3	1	$-\frac{4}{3}$	1	$\frac{7}{3}$	$-\frac{11}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

Оскільки в нижньому рядку не всі числа невід'ємні, то продовжуємо далі.

Тепер можна ввести в базис C_4 .

$$\min\left(\frac{5}{21} \div \frac{22}{21}, \quad \frac{2}{3} \div \frac{7}{3}\right) = \frac{5}{22}$$

Тоді з базису відкидаємо C_7 .

Нова таблиця буде виглядати так (таблиця 2.6)

Таблиця 2.6

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	p
C_4	$\frac{3}{11}$	$-\frac{1}{22}$	0	1	$\frac{13}{22}$	0	$\frac{21}{22}$	$\frac{5}{22}$
C_6	$-\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	0	0	$\frac{7}{11}$	1	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$
C_3	$\frac{4}{11}$	$-\frac{27}{22}$	1	0	$\frac{111}{22}$	0	$-\frac{49}{22}$	$\frac{3}{22}$
	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{22}$	0	0	$\frac{5}{22}$	0	$\frac{3}{22}$	$\frac{7}{22}$

Оскільки всі елементи нижнього рядка невід'ємні, то ніяких покращень зробити не можна і за теоремою 14 ми знайшли оптимальний розв'язок.

Таким чином,

$$tC_1 + uC_2 + vC_3 + xC_4 + yC_5 + zC_6 + wC_7 = p;$$

як видно з останнього стовпчика, векторам C_4, C_6, C_3 відповідають додатні числа $\frac{5}{22}, \frac{1}{11}, \frac{3}{22}$, тобто $x = \frac{5}{22}, z = \frac{1}{11}, v = \frac{3}{22}$, а значення цільової функції дорівнює $\frac{7}{22}$.

З попередніх міркувань випливає, що

$$\frac{1}{v(A)} = \frac{7}{22}$$

($v(A)$ – ціна гри матриці A)

Для однієї з оптимальних стратегій $(\xi, \eta, \zeta, \lambda)$ другого гравця будуть виконуватись рівності:

$$\frac{\xi}{v(A)} = x, \quad \frac{\eta}{v(A)} = y, \quad \frac{\zeta}{v(A)} = z, \quad \frac{\lambda}{v(A)} = w$$

Розв'язок розглянутої задачі лінійного програмування:

$$x = \frac{5}{22}, y = 0, z = \frac{1}{11}, w = 0, t = 0, u = 0, v = \frac{3}{22}.$$

Отримуємо:

$$v(A) = \frac{22}{7};$$

$$\xi = x \times v(A) = \frac{5}{22} \times \frac{22}{7} = \frac{5}{7};$$

$$\eta = y \times v(A) = 0;$$

$$\zeta = z \times v(A) = \frac{1}{11} \times \frac{22}{7} = \frac{2}{7};$$

$$\lambda = w \times v(A) = 0.$$

Отже, в матриці А другий гравець обирає стовпчики 1,2,3,4 з ймовірностями $\frac{5}{7}$, 0, $\frac{2}{7}$, 0 відповідно.

Оптимальну стратегію першого гравця можна знайти за допомогою тої же таблиці. Елементи останнього рядка, які відповідають C_1, C_2, C_3 дорівнюють $\frac{2}{11}, \frac{3}{22}, 0$ відповідно.

Висновок до розділу 2

В цьому розділі було розглянуто методи знаходження оптимальних стратегій прямокутної гри з матрицею, яка не має сідлових точок (мінімаксний, графічний та симплекс-метод).

РОЗДІЛ 3. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ MS EXCEL

3.1 Задача 1 Про меблеву фабрику

Для виробництва столів і шаф меблева фабрика використовує різні ресурси. Норми витрат ресурсів на один виріб даного виду, прибуток від реалізації одного виробу і загальна кількість наявних ресурсів кожного виду наведені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальна кількість ресурсів(куб.м)
	стіл	шафа	
Деревина 1 типу	0,2	0,1	40
Деревина 2 типу	0,1	0,3	60
Трудомісткість	1,2	1,5	371,1
Прибуток від реалізації одного виробу	6	9	

Визначити, скільки столів та шаф фабриці слід випускати, щоб прибуток від реалізації був максимальним.

Розв'язання

Нехай фабрика виготовляє x_1 столів та x_2 шаф. ($x_1, x_2 \geq 0$)

Прибуток від реалізації такої кількості столів та шаф дорівнює:

$$F = 6x_1 + 9x_2$$

Її треба максимізувати, тобто $F = 6x_1 + 9x_2 \rightarrow \max$.

Обмеження:

Для виготовлення x_1 столів та x_2 шаф необхідно $0,2x_1 + 0,1x_2$ деревини 1 типу, запаси якої 40 куб.м., тому $0,2x_1 + 0,1x_2 \leq 40$.

Для виготовлення x_1 столів та x_2 шаф необхідно $0,1x_1 + 0,3x_2$ деревини 2 типу, запаси якої 60 куб.м., тому $0,1x_1 + 0,3x_2 \leq 60$.

Трудомісткість виготовлення x_1 столів та x_2 шаф дорівнює $1,2x_1 + 1,5x_2$ запаси 371,1 куб.м., тому $1,2x_1 + 1,5x_2 \leq 371,1$.

Отримали задачу:

$$F = 6x_1 + 9x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 0,2x_1 + 0,1x_2 \leq 40 \\ 0,1x_1 + 0,3x_2 \leq 60 \\ 1,2x_1 + 1,5x_2 \leq 371,1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Розв'яжемо її за допомогою MS Excel. Таблиця зображена на рисунку 3.1.

F7 $\times$ $\checkmark$ f_x =СУММПРОИЗВ(C7:D7;C8:D8)						
	A	B	C	D	E	F
1						
2		Задача 1 Про меблеву фабрику				
3		Основні змінні та цільова функція				
4						
5			Стіл	Шафа		Цільова функція
6						
7			0	0		0 max
8		Прибуток	6	9		
9						
10						
11						
12		Необхідно для виробництва (обмеження)				
13						
14		Деревина 1 типу	0,2	0,1	<=	40
15		Деревина 2 типу	0,1	0,3	<=	60
16		Трудомісткість	1,2	1,5	<=	371,1
17						
18						

G14=СУММПРОИЗВ(C14:D14;C7:D7)

G15=СУММПРОИЗВ(C15:D15;C7:D7)

G16=СУММПРОИЗВ(C16:D16;C7:D7)

Рисунок 3.1

Тепер викликаємо надбудову «Поиск решения». (у вкладці Данные в групі Анализ). Туди вносимо цільову функцію та обмеження, вказуємо невід'ємність змінних (рисунок 3.2):

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: ☒ Максимум ☐ Минимум ☐ Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

$SG\$14 \leq SF\14
 $SG\$15 \leq SF\15
 $SG\$16 \leq SF\16

☒ Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения:

Метод решения
 Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.

Справка

Рисунок 3.2 – Вікно «Параметры поиска решений»

Натискаємо «Найти решение». Маємо вікно (рисунок 3.3)

Результаты поиска решения

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

☒ Сохранить найденное решение
☐ Восстановить исходные значения

☐ Вернуться в диалоговое окно параметров поиска решения

Отчеты
 Результаты
 Устойчивость
 Пределы

☐ Отчеты со структурами

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Если используется модуль ОПГ, то найдено по крайней мере локально оптимальное решение. Если используется модуль поиска решений линейных задач симплекс-методом, то найдено глобально оптимальное решение.

Рисунок 3.3 - Вікно «Результаты поиска решений»

Отримуємо (рисунок 3.4):

F7 X ✓ fx =СУММПРОИЗВ(C7:D7;C8:D8)							
	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Задача 1 Про меблеву фабрику					
3							
4		Основні змінні та цільова функція					
5							
6			Стіл	Шафа		Цільова функція	
7			101,5714286	166,1428571		2104,714286	max
8		Прибуток	6	9			
9							
10							
11							
12		Необхідно для виробництва (обмеження)					
13							
14		Деревина 1 типу	0,2	0,1	<=	40	36,92857143
15		Деревина 2 типу	0,1	0,3	<=	60	60
16		Трудомісткість	1,2	1,5	<=	371,1	371,1
17							

Рисунок 3.4

Отримали нецілу кількість столів і шаф, тому для отримання більш реального в економічному сенсі розв'язку, додамо обмеження цілочисельності змінних (рисунок 3.5):

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

\$F\$7

До:

☒ Максимум
☐ Минимум
☐ Значения:

0

Изменяя ячейки переменных:

\$C\$7:\$D\$7

В соответствии с ограничениями:

\$C\$7:\$D\$7 = целое

\$G\$14 <= \$F\$14

\$G\$15 <= \$F\$15

\$G\$16 <= \$F\$16

Добавить

Изменить

Удалить

Сбросить

Загрузить/сохранить

☒ Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения:

Поиск решения лин. задач симплекс-методом

Параметры

Метод решения

Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.

Справка

Найти решение

Закрыть

Рисунок 3.5 - Вікно «Параметры поиска решений»

Отримуємо (рисунок 3.6):

Задача 1 Про меблеву фабрику					
Основні змінні та цільова функція					
	Стіл	Шафа		Цільова функція	
	103	165		2103	max
Прибуток	6	9			
Необхідно для виробництва (обмеження)					
Деревина 1 типу	0,2	0,1	<=	40	37,1
Деревина 2 типу	0,1	0,3	<=	60	59,8
Трудомісткість	1,2	1,5	<=	371,1	371,1

Рисунок 3.6

Отже, фабрика має виготовляти 103 стола та 165 шаф, прибуток від реалізації дорівнює 2103 у.о. В процесі виробництва залишаються $40 - 37,1 = 2,9$ куб.м. деревини 1 типу та $60 - 59,8 = 0,2$ куб.м. деревини 2 типу.

2.2 Задача 2 Про комп'ютери

Фірма «Альфа» постачає комп'ютери 4 базових комплектацій: домашній, ігровий, офісний, екстрим. Середні витрати часу на збірку, перевірку та підключення комп'ютерів наведені в таблиці 3.2. Кожний комп'ютер приносить певний рівень прибутку, але попит обмежений. Крім того, в плановому періоді обмежений ресурс людино-годин, відведених на виконання кожної виробничої операції. Обчислити, скільки комп'ютерів кожного типу необхідно виробити в плановому періоді для максимізації прибутку.

Таблиця 3.2

Комп'ютер	Прибуток	Максимальний попит на товар	Час (в годинах), необхідний на підключення	Час, необхідний для збірки (годин)	Час, необхідний для перевірки (годин)
Домашній	33	87	0,9	1,2	1,3
Ігровий	39	67	1,1	1,5	1,5
Офісний	36	110	0,7	0,9	0,9
Екстрим	43	45	1,3	1,1	1,2
Доступно людино-годин на кожну операцію			70	55	35

Розв'язання:

Вводимо дані в Excel (рисунок 3.7)

G33											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I		
19											
20		Задача 2 Про комп'ютери									
21											
22		Комп'ютер	Прибуток	Максимальни	Час (в годинах),	Час, необхідний	Час, необхідний				
23				й попит на	необхідний на	для збірки	для перевірки				
24				товар	підключення	(годин)	(годин)				
25				Домашній	33	87	0,9	1,2	1,3		
26				Ігровий	39	67	1,1	1,5	1,5		
27		Офісний	36	110	0,7	0,9	0,9				
28		Екстрим	43	45	1,3	1,1	1,2				
29		Доступно людино-годин на кожну операцію				70	55	35			
30											
31											
32		Змінні	x1	x2	x3	x4	F				
33			0	0	0	0	0				
34		Прибуток	33	39	36	43					
35											
36		попит	87	67	110	45					
37											
38		Обмеження по годинам	0,9	1,1	0,7	1,3	0 <=		70		
39			1,2	1,5	0,9	1,1	0 <=		55		
40			1,3	1,5	0,9	1,2	0 <=		35		
41											
42											

Рисунок 3.7

G38=СУММПРОИЗВ(C38:F38;C33:F33)

G39=СУММПРОИЗВ(C39:F39;C33:F33)

G40=СУММПРОИЗВ(C40:F40;C33:F33)

Викликаємо «Поиск решения» і заповнюємо параметри (рисунок 3.8):

Рисунок 3.8 - Вікно «Параметры поиска решений»

Отримуємо (рисунок 3.9):

31									
32	Змінні	x1	x2	x3	x4	F			
33		0	0	38,88888889	0	1400			
34	Прибуток	33	39	36	43				
35									
36	попит	87	67	110	45				
37									
38	Обмеження по годинам	0,9	1,1	0,7	1,3	27,22222222	<=	70	
39		1,2	1,5	0,9	1,1	35	<=	55	
40		1,3	1,5	0,9	1,2	35	<=	35	
41									
42									

Рисунок 3.9

Отже, при даних обмеженнях треба продавати комп'ютери комплектації «Офісний» в кількості 38,89 штук, прибуток дорівнює 1400 у.о.

3.3 Задача 3 Про деталі для двигунів

Цех виготовляє 8 різних видів деталей для двигунів А, В, С1, С2, С3, D, Е6, F, маючи в своєму розпорядженні 7 видів станків: 2 шт. – ADF, 3 шт. – SHG, 3 шт. – BSD, 1 шт. – AVP, 1 шт. – BFG, 3 шт – ABM, 2 шт. – RL. Час, необхідний для обробки одиниці кожного продукту на кожному станку, вклад в прибуток від виробництва одиниці кожного продукту і ринковий попит на кожний продукт за місяць наведені в таблиці 3.3:

Таблиця 3.3

Станки	Час обробки деталей на станках							
ADF	0,24	0,23	0,19	0,15	0,19	0,18	0,23	0,18
SHG	0,05	0,03	-	0,7	0,1	-	0,08	0,08
BSD	0,37	0,59	0,71	0,5	0,32	0,74	0,43	0,4
AVP	0,11	0,11	0,12	0,1	0,09	0,12	0,07	0,1
BFG	0,29	0,22	-	0,2	0,16	0,29	0,14	0,12
ABM	-	0,58	0,7	0,69	0,46	0,31	0,31	0,65
RL	0,08	0,01	0,08	0,11	0,12	0,08	-	0,12
Прибутковість	5	6	8	6	7	8	6	4
Потреба ринку	200	350	290	310	360	230	110	200

Цех працює 12 годин в добу. Кожний місяць має 26 робочих днів.

Для спрощення задачі вважаємо, що можливий довільний порядок обробки деталей на різних станках.

Необхідно скласти оптимальний план виробництва, визначити, виробництво яких продуктів обмежено ринком, і яких – технічними можливостями цеху.

Які машинні ресурси мають бути в першу чергу збільшені, щоб максимізувати прибуток.

Чи є продукт, який не вигідно виробляти? Що треба змінити, щоб всі продукти стало вигідно виробляти?

Розв'язання:

Заносимо дані в таблицю Excel (рисунок 3.10):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
41												
42												
43												
44		Задача 3 Про деталі для двигунів										
45												
46	Деталь	A	B	C1	C2	C3	D	E6	F			
47	Виробництво		0	0	0	0	0	0	0	0		
48												Парк
49	Станки		Час обробки деталей на станках									станків
50	ADF		0,24	0,23	0,19	0,15	0,19	0,18	0,23	0,18		2
51	SHG		0,05	0,03	0	0,7	0,1	0	0,08	0,08		3
52	BSD		0,37	0,59	0,71	0,5	0,32	0,74	0,43	0,4		3
53	AVP		0,11	0,11	0,12	0,1	0,09	0,12	0,07	0,1		1
54	BFG		0,29	0,22	0	0,2	0,16	0,29	0,14	0,12		1
55	ABM		0	0,58	0,7	0,69	0,46	0,31	0,31	0,65		3
56	RL		0,08	0,01	0,08	0,11	0,12	0,08	0	0,12		2
57												
58	Прибутковість		5	6	8	6	7	8	6	4		
59												
60	Потреба ринку		200	350	280	300	350	220	100	200		
61												

Рисунок 3.10

Додамо в таблицю затрачуваний час (множимо матрицю виробництва на відповідний час обробки) по кожному станку (рисунок 3.11)

M50														
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	
41														
42														
43														
44		Задача 3 Про деталі для двигунів												
45														
46	Деталь	A	B	C1	C2	C3	D	E6	F					
47	Виробництво		0	0	0	0	0	0	0	0				
48														
49	Станки	Час обробки деталей на станках										Парк станків	Потреба часу	
50	ADF		0,24	0,23	0,19	0,15	0,19	0,18	0,23	0,18		2		
51	SHG		0,05	0,03	0	0,7	0,1	0	0,08	0,08		3		
52	BSD		0,37	0,59	0,71	0,5	0,32	0,74	0,43	0,4		3		
53	AVP		0,11	0,11	0,12	0,1	0,09	0,12	0,07	0,1		1		
54	BFG		0,29	0,22	0	0,2	0,16	0,29	0,14	0,12		1		
55	ABM		0	0,58	0,7	0,69	0,46	0,31	0,31	0,65		3		
56	RL		0,08	0,01	0,08	0,11	0,12	0,08	0	0,12		2		
57														
58	Прибутковість		5	6	8	6	7	8	6	4				
59														
60	Потреба ринку		200	350	280	300	350	220	100	200				

Рисунок 3.11

Знаходимо ліміт часу роботи кожного станка: 12 годин * 26 днів=312 годин.

На основі цього розраховуємо фонд часу для кожного станку залежно від їх кількості. Також обчислюємо прибуток: множимо матрицю виробництва на матрицю прибутковості (рисунки 3.12)

62

</

Рисунок 3.12

Викликаємо «Поиск решения» (рисунки 3.13)

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: ☒ Максимум ☐ Минимум ☐ Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

☒ Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения:

Метод решения

Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.

Добавить
Изменить
Удалить
Сбросить
Загрузить/сохранить

Параметры

Справка Найти решение Закрыть

Рисунок 3.13 - Вікно «Параметры поиска решений»

Отримуємо (рисунок 3.14):

Задача 3 Про деталі для двигунів									
Деталь	A	B	C1	C2	C3	D	E6	F	
Виробництво	155	224	280	300	350	220	100	199	
Станки	Час обробки деталей на станках								
ADF	0,24	0,23	0,19	0,15	0,19	0,18	0,23	0,18	
SHG	0,05	0,03	0	0,7	0,1	0	0,08	0,08	
BSD	0,37	0,59	0,71	0,5	0,32	0,74	0,43	0,4	
AVP	0,11	0,11	0,12	0,1	0,09	0,12	0,07	0,1	
BFG	0,29	0,22	0	0,2	0,16	0,29	0,14	0,12	
ABM	0	0,58	0,7	0,69	0,46	0,31	0,31	0,65	
RL	0,08	0,01	0,08	0,11	0,12	0,08	0	0,12	
Прибутковість	5	6	8	6	7	8	6	4	
Потреба ринку	200	350	280	300	350	220	100	200	
Сумарний прибуток	11765								

Парк станків	Потреба часу	ліміт часу	Залишок часу
2	351,84	<=	624
3	283,39	<=	936
3	935,71	<=	936
1	190,09	<=	312
1	311,91	<=	312
3	922,47	<=	936
2	153,52	<=	624

Рисунок 3.14

Розглянемо співвідношення оптимального випуску і потреб ринку. На межі ринкових потреб випускаються деталі C1-C3, D, E6. Спробуємо змінити потреби ринку. Тоді маємо (рисунок 3.15):

Задача 3 Про деталі для двигунів									
Деталь	A	B	C1	C2	C3	D	E6	F	
Виробництво	169	170	290	310	360	230	110	198	
Станки	Час обробки деталей на станках								
ADF	0,24	0,23	0,19	0,15	0,19	0,18	0,23	0,18	
SHG	0,05	0,03	0	0,7	0,1	0	0,08	0,08	
BSD	0,37	0,59	0,71	0,5	0,32	0,74	0,43	0,4	
AVP	0,11	0,11	0,12	0,1	0,09	0,12	0,07	0,1	
BFG	0,29	0,22	0	0,2	0,16	0,29	0,14	0,12	
ABM	0	0,58	0,7	0,69	0,46	0,31	0,31	0,65	
RL	0,08	0,01	0,08	0,11	0,12	0,08	0	0,12	
Прибутковість	5	6	8	6	7	8	6	4	
Потреба ринку	200	350	290	310	360	230	110	200	
Сумарний прибуток	11857								

Парк станків	Потреба часу	ліміт часу	Залишок часу
2	352	<=	624
3	291,19	<=	936
3	935,63	<=	936
1	190,59	<=	312
1	311,87	<=	312
3	915,2	<=	936
2	157,88	<=	624

Рисунок 3.15

Виявилось, виробництво деталей C1-C3, D, E6 знову на межі ринку, тому, в цій ситуації ці деталі найбільш вигідні для виробництва, і їх випуск на межі ринкового попиту.

Далі розглянемо затрати часу станків (рисунок 3.16):

Задача 3 Про деталі для двигунів									
Деталь	A	B	C1	C2	C3	D	E6	F	
Виробництво	155	224	280	300	350	220	100	199	
Станки	Час обробки деталей на станках								
ADF	0,24	0,23	0,19	0,15	0,19	0,18	0,23	0,18	
SHG	0,05	0,03	0	0,7	0,1	0	0,08	0,08	
BSD	0,37	0,59	0,71	0,5	0,32	0,74	0,43	0,4	
AVP	0,11	0,11	0,12	0,1	0,09	0,12	0,07	0,1	
BFG	0,29	0,22	0	0,2	0,16	0,29	0,14	0,12	
ABM	0	0,58	0,7	0,69	0,46	0,31	0,31	0,65	
RL	0,08	0,01	0,08	0,11	0,12	0,08	0	0,12	
Прибутковість	5	6	8	6	7	8	6	4	
Потреба ринку	200	350	280	300	350	220	100	200	
Сумарний прибуток	11765								

Парк станків	Потреба часу	ліміт часу	Залишок часу
2	351,84	<=	624
3	283,39	<=	936
3	935,71	<=	936
1	190,09	<=	312
1	311,91	<=	312
3	922,47	<=	936
2	153,52	<=	624

Рисунок 3.16

По станкам BSD, BFG залишок часу близький до 0, тому ці станки найбільш дефіцитні.

Отже, для максимізації прибутку(при заданих потребах ринку), в першу чергу треба збільшити ресурси часу по цим станкам.

Тепер розглянемо продукти, які не вигідно виробляти. Оскільки в оптимальному плані беруть участь всі продуктів, таких немає.

3.4 Задача 4 Про раціон харчування

Раціон харчування тварин на фермі складається з двох видів кормів I та II. Один кг корму I коштує 80 у.о. і містить: 1 од. жирів, 3 од. білків, 1 од. вуглеводів, 2 од. нітратів. Один кг корму II коштує 10 у.о. і містить: 3 од. жирів, 1 од. білків, 8 од. вуглеводів, 4 од. нітратів.

Необхідно скласти найдешевший раціон харчування, який забезпечить не менше 6 од. жирів, не менше 9 од. білків, вуглеводів не менше 8 од., нітратів не більше 16 од.

Розв'язання:

Представимо дані, які є в умові задачі, у таблиці 3.4:

Таблиця 3.4

	Вміст поживних речовин		Норма вмісту
Хімічні речовини	I вид корму	II вид корму	
жири	1	3	6
білки	3	1	9
вуглеводи	1	8	8
нітрати	2	4	16
Ціна за кг	80	10	

Нехай x_1 , – кількість кормів виду I, II виду. ($x_1, x_2 \geq 0$)

Тоді загальна вартість такого раціону:

$$F = 80x_1 + 10x_2 \rightarrow \min$$

Її треба максимізувати, тобто $F = 6x_1 + 9x_2 \rightarrow \max$.

Обмеження:

$3x_1 + x_2 \geq 9$ для білків;

$x_1 + 3x_2 \geq 6$ для жирів;

$x_1 + 8x_2 \geq 8$ для вуглеводів;

$2x_1 + 4x_2 \leq 16$ для нітратів.

Внесемо дані в таблицю Excel (рисунок 3.17):

F71							
	A	B	C	D	E	F	G
64							
65							
66		Задача 4 Про раціон харчування					
67							
68		Вміст поживних речовин				Фактичне	
69					Норма вмісту	використання	
70		Хімічні речовини	I вид корму	II вид корму			
71		жири	1	3	6	0	
72		білки	3	1	9	0	
73		вуглеводи	1	8	8	0	
74		нітрати	2	4	16	0	
75		Ціна за кг	80	10			
76							
77							
78							
79		Оптимальний випуск	0	0			
80							
81		Затрати	0	0		Загальна вартість	0
82							
83							
84							
85							
86							

Рисунок 3.17

Фактичне використання:

$F71 = \text{СУММПРОИЗВ}(C71:D71;C79:D79)$

$F72 = \text{СУММПРОИЗВ}(C72:D72;C79:D79)$

$F73 = \text{СУММПРОИЗВ}(C73:D73;C79:D79)$

$F74 = \text{СУММПРОИЗВ}(C74:D74;C79:D79)$

Затрати:

$C81 = C75 * \text{МАКС}(C79;0)$

$D81 = D75 * \text{МАКС}(D79;0)$

G81 - загальна вартість, обчислюється так: $C81 + D81$.

Викликаємо «Поиск решения». Цільовою коміркою буде G81 (рисунок 3.18)

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: ☐ Максимум ☒ Минимум ☐ Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

Добавить

Изменить

Удалить

Сбросить

Загрузить/сохранить

☒ Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения:

Параметры

Метод решения

Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.

Справка

Найти решение

Заккрыть

Рисунок 3.18 - Вікно «Параметры поиска решений»

Отримуємо (рисунок 3.19):

Хімічні речовини	Вміст поживних речовин		Норма вмісту	Фактичне використання
	I вид корму	II вид корму		
жири	1	3	6	11
білки	3	1	9	9
вуглеводи	1	8	8	26
нітрати	2	4	16	16
Ціна за кг	80	10		
Оптимальний випуск	2	3		
Затрати	160	30		Загальна вартість
				190

Рисунок 3.19

Отже, в раціон харчування має входити 2 кг I виду корму та 3 кг II виду корму.

Загальна вартість дорівнює 190 у.о.

3.5 Висновки до розділу 3

У цьому розділі було розглянуто декілька прикладів задач з різних галузей, в яких необхідно знайти оптимальне рішення, за допомогою спеціальної надбудови «Поиск решения» в Microsoft Excel.

РОЗДІЛ 4 ФУНКЦІОНАЛЬНО-ВАРТІСНИЙ АНАЛІЗ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ

4.1 Постановка задачі проектування

У даному розділі оцінюється програмний продукт, в якому розглянуто декілька практичних задач, в яких необхідно було знайти оптимальний розв'язок. Програму було реалізовано в Microsoft Excel. Excel є дуже зручним середовищем для таких цілей, оскільки має надбудову «Поиск решения», яка дозволяє знаходити оптимальне рішення задачі, вказавши цільову комірку, обмеження на змінні.

Нижче наведено аналіз різних варіацій реалізації програмного продукту, для вибору найоптимальнішого, з використання функціонально-вартісного аналізу.

4.2 Обґрунтування функцій програмного продукту

Головна функція F_0 – розробка програмного продукту, який знаходить оптимальні рішення для кількох прикладів практичних задач. Беручи за основу цю функцію, можна виділити наступні:

F1 – вибір мови програмування або Excel: а) Python; б) Excel;

F2 – інтерфейс користувача: а) з підтримкою компонент; б) тільки з вікном для введення коду;

F3 – робота з вхідними даними: а) введення у вікно програми; б) введення в програмному коді. Варіанти реалізації основних функцій наведені у морфологічній карті системи (рисунок 4.1). На основі цієї карти побудовано позитивно-негативну матрицю варіантів основних функцій (таблиця 4.1).

Варіанти реалізації основних функцій наведені у морфологічній карті системи

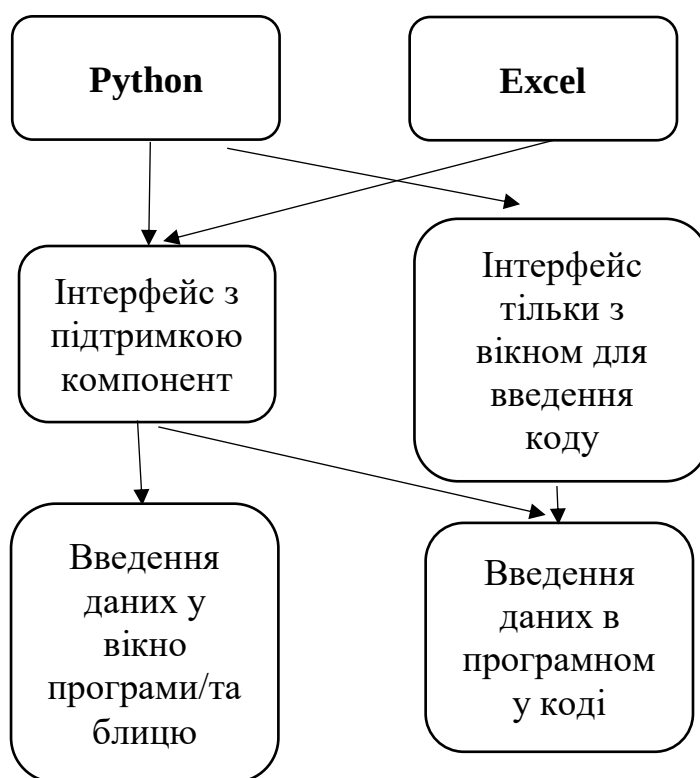


Рисунок 4.1 – Морфологічна карта

Морфологічна карта відображає множину всіх можливих варіанти основних функцій.

Таблиця 4.1 - Позитивно-негативна матриця

Функції	Варіанти реалізації	Переваги	Недоліки
F_1	<i>A</i>	Швидка розробка програми, доступність бібліотек, кросплатформеність	Низька швидкість роботи, особливо, якщо потрібно обробляти велику кількість даних
	<i>B</i>	«Поиск решения» швидко знаходить рішення	Іде багато часу на оформлення таблиць
F_2	<i>A</i>	Надійно працює з складними проектами	Не підтримується багатьма мовами
	<i>B</i>	Надійність	Додатковий час на вивчення деяких функцій
F_3	<i>A</i>	Підтримується багатьма мовами програмування, легко запускається на будь-якому сервері	Іноді можуть виникати помилки при обчисленнях
	<i>B</i>	Багато інструментів, безпечна	Працює на основі розрахунків з плаваючою точкою

Робимо висновок, що при розробці програмного продукту деякі варіанти реалізації функцій варто відкинути, тому що вони не відповідають поставленим перед програмним продуктом задачам. Ці варіанти відзначені у морфологічній карті.

Функція F1:

Оскільки швидкість отримання фінального результату дуже важлива – варіант а) маємо відкинути.

Функція F2:

Інтерфейс користувача відіграє важливу роль у даному програмному продукту, тому варіант б) має бути відкинтий.

Функція F3:

Вводити дані в програму можна будь-яким чином, тому залишаємо обидва варіанти.

Таким чином, будемо розглядати такі варіанти реалізації ПП:

F1б – F2а – F3а

F1б – F2а – F3б

Для оцінювання якості розглянутих функцій обрана система параметрів, описана нижче.

4.3 Обґрунтування системи параметрів ПП

На основі даних, розглянутих вище, визначаються основні параметри вибору, які будуть використані для розрахунку коефіцієнта технічного рівня.

Для того, щоб охарактеризувати програмний продукт, будемо використовувати наступні параметри:

- X1 – Час на оформлення таблиць;
- X2 – час, необхідний для ознайомлення з теорією;
- X3 – час виконання програмою обчислення;

Гірші, середні і кращі значення параметрів вибираються на основі вимог замовника й умов, що характеризують експлуатацію ПП як показано у таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 - Основні параметри ПП

Назва Параметра	Умовні позначе ння	Одиниці виміру	Значення параметра		
			гірші	середні	кращі
Час на оформлення таблиць	X1	год	40	30	20
Час, необхідний для ознайомлення з теорією	X2	год	90	60	30
Час виконання програмою обчислення	X3	с	2	0,8	0,2

За даними таблиці 4.2 будуються графічні характеристики параметрів –
рис. 4.2 – рис. 4.4.

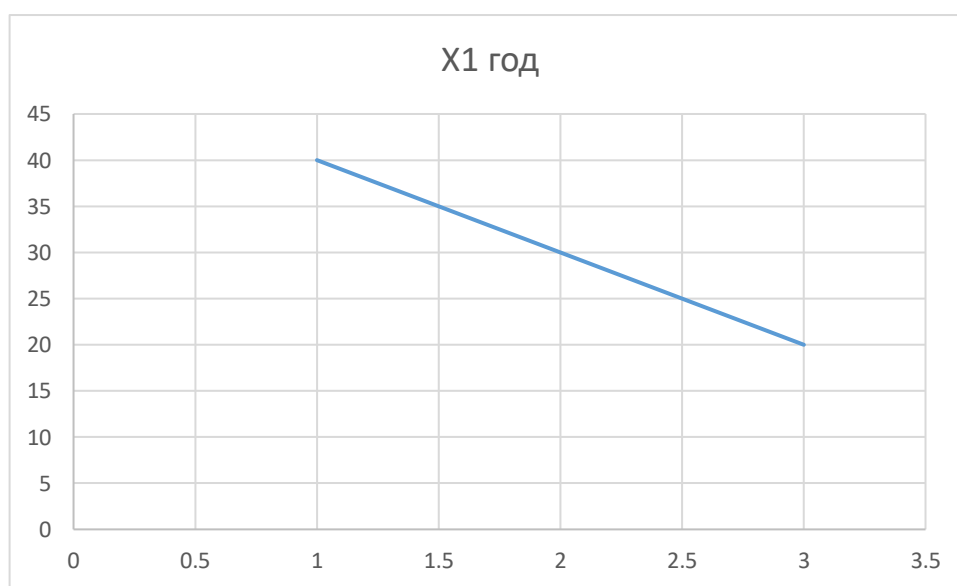


Рисунок 4.2 – X1 - Час на оформлення таблиць

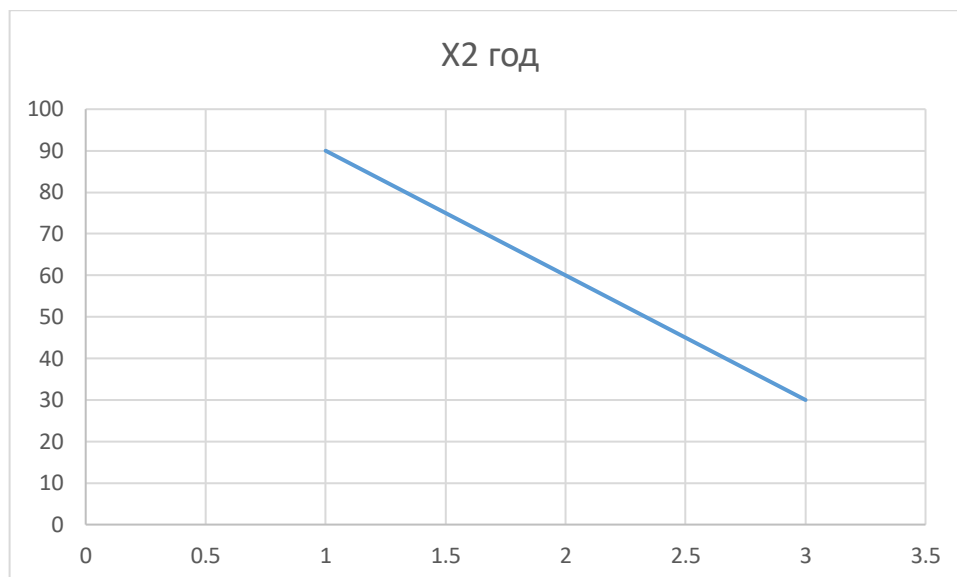


Рисунок 4.3 – X2, Час, необхідний для ознайомлення з теорією

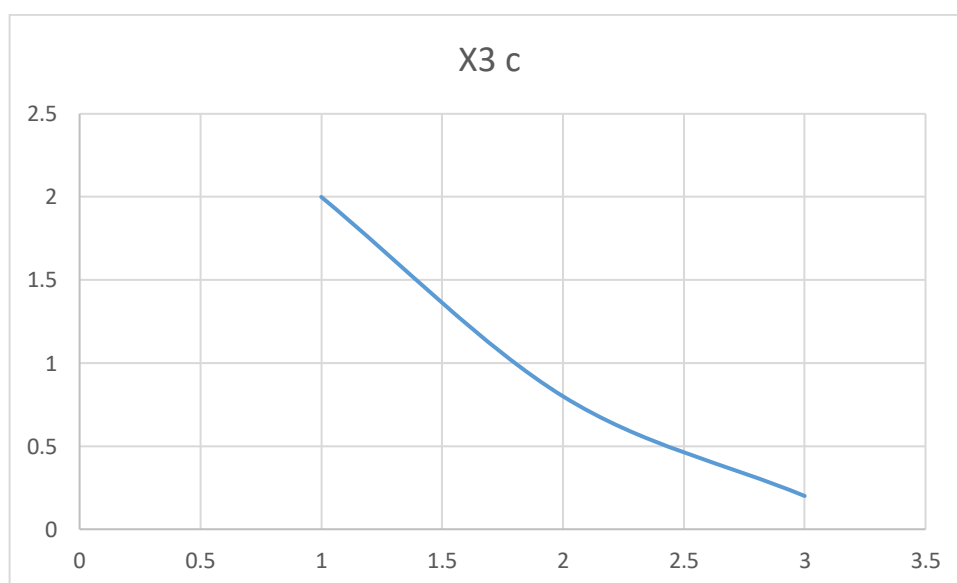


Рисунок 4.4 – X3, Час виконання програмою обчислення

4.4 Аналіз експертного оцінювання параметрів

Після детального обговорення й аналізу кожний експерт оцінює ступінь важливості кожного параметру для конкретно поставленої цілі – розробка програмного продукту, який дає найбільш точні результати при знаходженні

Для перевірки степені достовірності експертних оцінок, визначимо наступні параметри:

а) сума рангів кожного з параметрів і загальна сума рангів:

$$R_i = \sum_{j=1}^N r_{ij} R_{ij} = \frac{Nn(n+1)}{2} = 42, \quad (4.1)$$

де N – число експертів,
 n – кількість параметрів;
 б) середня сума рангів:

$$T = \frac{1}{n} R_{ij} = 14 \quad (4.2)$$

в) відхилення суми рангів кожного параметра від середньої суми рангів:

$$\Delta_i = R_i - T. \quad (4.3)$$

Сума відхилень по всіх параметрах повинна дорівнювати 0;

г) загальна сума квадратів відхилення:

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta_i^2 = 77. \quad (4.4)$$

Порахуємо коефіцієнт узгодженості:

$$W = \frac{12S}{N^2(n^3 - n)} = \frac{12 \cdot 77}{7^2(3^3 - 3)} = 0,79 > W_k = 0,67. \quad (4.5)$$

Ранжування можна вважати достовірним, тому що знайдений коефіцієнт узгодженості перевищує нормативний, котрий дорівнює 0,67.

Скориставшись результатами ранжирування, проведемо попарне порівняння всіх параметрів і результати занесемо у таблицю 4.4.

Таблиця 4.4 - Попарне порівняння параметрів.

Параметри	Експерти							Кінцева оцінка	Числове значення
	1	2	3	4	5	6	7		
X1 і X2	>	>	>	>	>	>	>	>	1,5
X1 і X3	>	>	>	>	>	>	>	>	1,5
X2 і X3	>	<	<	<	<	<	>	<	0,5

Числове значення, що визначає ступінь переваги i -го параметра над j -тим, a_{ij} визначається по формулі:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1.5 \text{ при } X_i > X_j \\ 1.0 \text{ при } X_i = X_j \\ 0.5 \text{ при } X_i < X_j \end{cases} \quad (4.6)$$

З отриманих числових оцінок переваги складемо матрицю $A = \| a_{ij} \|$.

Для кожного параметра зробимо розрахунок вагомості $K_{\theta i}$ за наступними формулами:

$$K_{\text{Bi}} = \frac{b_i}{\sum_{i=1}^n b_i} \quad (4.7)$$

$$b_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} \quad (4.8)$$

Відносні оцінки розраховуються декілька разів доти, поки наступні значення не будуть незначно відрізнятися від попередніх (менше 2%). На другому і наступних кроках відносні оцінки розраховуються за наступними формулами:

$$K_{Bi} = \frac{b'_i}{\sum_{i=1}^n b'_i}, \quad (4.9)$$

$$b'_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} b_j \quad (4.10)$$

.Як видно з таблиці 4.5, різниця значень коефіцієнтів вагомості не перевищує 5%, тому більшої кількості ітерацій не потрібно.

Таблиця 4.5 - Розрахунок вагомості параметрів

Параметри x_i	Параметри x_j			Перша ітер.		Друга ітер.	
	X1	X2	X3	b_i	K_{Bi}	b_i^1	K_{Bi}^1
X1	1,0	1,5	1,5	4	0,43	10	0,4
X2	0,5	1,0	0,5	2	0,23	7	0,28
X3	0,5	1,5	1,0	3	0,33	8	0,32
Всього:				9	1	25	1

4.5 Аналіз рівня якості варіантів реалізації функцій

Визначаємо рівень якості кожного варіанту виконання основних функцій окремо. Абсолютні значення параметрів X2 (Об'єм пам'яті), X3 (час попередньої обробки даних) та X4 (потенційний об'єм програмного коду) відповідають технічним вимогам умов функціонування даного ПП.

Абсолютне значення параметра XI (швидкість роботи мови програмування) обрано не найгіршим.

Коефіцієнт технічного рівня для кожного варіанта реалізації ПП розраховується так (таблиця 4.6):

$$K_K(j) = \sum_{i=1}^n K_{ei,j} B_{i,j}, \quad (4.11)$$

де n – кількість параметрів;

K_{ei} – коефіцієнт вагомості i -го параметра;

B_i – оцінка i -го параметра в балах.

Таблиця 4.6 - Розрахунок показників рівня якості варіантів реалізації основних функцій ПП

Основна функція	Варіант реалізації	Параметри	Абсолютне значення параметра	Бальна оцінка параметра	Коефіцієнт вагомості параметра	Коефіцієнт якості
F1	А	X1	25	7.5	0.40	3
		X2	35	9	0.28	2.52
		X3	0,5	8	0.32	2.56
F1	Б	X1	35	2	0.40	0.80
		X2	65	4	0.28	1.12
		X3	0,9	5.5	0.32	1.76
F2	А	X1	15	7.33	0.40	3.36
		X3	0,3	8,33	0.32	2.932
F3	А	X1	25	7.5	0.40	3
		X2	40	8,5	0.28	2.38

За даними з таблиці 4.6 за формулою:

$$K_K = K_{Ty}[F_{1k}] + K_{Ty}[F_{2k}] + \dots + K_{Ty}[F_{zk}], \quad (4.12)$$

визначаємо рівень якості кожного з варіантів:

$$K_{K1} = 3 + 2,52 + 2,56 + 3,36 + 2,932 + 3 + 2,38 = 19,75,$$

$$K_{K2} = 0,8 + 1,12 + 1,76 + 3,36 + 2,932 + 3 + 2,38 = 15,352.$$

Як видно з розрахунків, кращим є перший варіант, для якого коефіцієнт технічного рівня має найбільше значення.

4.6 Економічний аналіз варіантів розробки ПП

Варіанти реалізації продукту можна описати наступним чином:

- Пошук прикладів задач
- Розгляд 4 різних задач
- Демонстрація результатів

Для завдання 1 маємо: алгоритм групи складності 3, ступінь новизни Г

$$T_p = 8, K_n = 0.3, K_{ск} = 1.16, K_{ст.м} = 1.3$$

$$T_1 = 8 \cdot 0.3 \cdot 1.16 \cdot 1.3 = 3.62 \text{ людино-днів.}$$

Для завдання 2 маємо: алгоритм групи складності 1, ступінь новизни Б

$$T_p = 64, K_n = 2.02, K_{ск} = 1.08, K_{ст.м} = 1.3$$

$$T_{2a} = 64 \cdot 2.02 \cdot 1.08 \cdot 1.3 = 181.509 \text{ людино-днів.}$$

Для завдання 2(варіант Б) маємо: алгоритм групи складності 1, ступінь новизни Б

$$T_p = 64, K_{\Pi} = 2.02, K_{\text{СК}} = 1.08, K_{\text{СТ.М}} = 1.55$$

$$T_{26} = 64 \cdot 2.02 \cdot 1.08 \cdot 1.55 = 216.42 \text{ людино-днів.}$$

Для завдання 3 маємо: алгоритм групи складності 2, ступінь новизни Г

$$T_p = 12, K_{\Pi} = 0.36, K_{\text{СК}} = 1.07, K_{\text{СТ.М}} = 1.3$$

$$T_3 = 12 \cdot 0.36 \cdot 1.07 \cdot 1.3 = 6.01 \text{ людино-днів.}$$

Тоді для варіанту А:

$$T = (3.62 + 181.509 + 6.01) \cdot 8 = 1529.112 \text{ людино-годин}$$

а для варіанту Б:

$$T = (3.62 + 216.42 + 6.01) \cdot 8 = 1808.4 \text{ людино-годин}$$

В розробці бере участь один програміст з окладом 15000грн та один математик з окладом 12000 грн.

Розрахунок середньої заробітної плати за годину:

$$C = \frac{27000}{2 \cdot 21 \cdot 8} = 80.4 \text{ грн}$$

Заробітна плата для кожного з варіантів реалізації

$$C_1 = 80,4 \cdot 1529.112 = 122940.6,$$

$$C_2 = 80,4 \cdot 1808.4 = 145427.52$$

Відрахування ЄСВ складають 22%, або для кожного варіанту:

$$C_{\text{від1}} = 0.22 \cdot 122940.6 = 27046.93,$$

$$C_{\text{від}2} = 0.22 * 145427.52 = 31994.05$$

Визначимо виплату необхідну на оплату однієї машино-години.

Враховуючи, що заробітна плата одного програміста складає 15000 грн з коефіцієнтом зайнятості 0.4

$$C_{\Gamma} = 12 * M * K_3 = 12 * 15000 * 0.4 = 72000 \text{ грн}$$

Враховуючи додаткову заробітну плату:

$$C_{\text{зп}} = C_{\Gamma} \cdot (1 + K_3) = 72000 \cdot 1.4 = 100800 \text{ грн}$$

Відрахування на соціальний внесок складатимуть:

$$C_{\text{від}} = 0,22 \cdot 100800 = 22176 \text{ грн}$$

Амортизаційні відрахування розраховуємо при амортизації 25% та вартості ЕОМ – 18000 грн.

$$C_A = K_{\text{тм}} \cdot K_a \cdot C_{\text{пр}} = 1.15 \cdot 0.25 \cdot 18000 = 5175 \text{ грн}$$

Розраховуємо витрати на профілактику та ремонт:

$$C_p = K_{\text{тм}} \cdot K_p \cdot C_{\text{пр}} = 1.15 \cdot 0.05 \cdot 18000 = 1035 \text{ грн}$$

Розраховуємо ефективний годинний фонд часу ПК за рік:

$$T_{\text{ЕФ}} = (365 - 104 - 11 - 4) \cdot 8 \cdot 0.8 = 1574,4 \text{ год}$$

Розраховуємо витрати на електроенергію:

$$C_{\text{ЕЛ}} = T_{\text{ЕФ}} \cdot N_{\text{С}} \cdot K_3 \cdot C_{\text{ЕН}} = 1574,4 \cdot 0,28 \cdot 0,9 \cdot 1.75 = 694.31 \text{ грн}$$

Розраховуємо накладні витрати:

$$C_{\text{Н}} = 18000 \cdot 0.67 = 12060 \text{ грн}$$

Розраховуємо річні експлуатаційні витрати:

$$C_{\text{ЕКС}} = 94080 + 20697.6 + 5175 + 1035 + 694.31 = 121681.91 \text{ грн}$$

Розраховуємо собівартість однієї машино-години

$$C_{\text{М-Г}} = \frac{121681.91}{1574,4} = 77.29 \text{ грн/год}$$

Розраховуємо оплату машинного часу в залежності від варіантів:

$$C_{\text{М1}} = 77.29 \cdot 1529.032 = 118178.88 \text{ грн,}$$

$$C_{\text{М2}} = 77.29 \cdot 1808.232 = 139759.25 \text{ грн}$$

Розраховуємо накладні витрати в залежності від варіантів:

$$C_{H1} = 112940.419 \cdot 0.67 = 75670.08 \text{ грн},$$

$$C_{H2} = 133563.248 \cdot 0.67 = 89487.38 \text{ грн}$$

Розраховуємо вартість розробки в залежності від варіантів:

$$C_{ПП1} = 112940.419 + 24846.892 + 118178.88 + 75670.08 = 331636.271$$

грн

$$C_{ПП2} = 133563.248 + 29383.915 + 139759.25 + 89487.38 = 392193.793$$

грн

4.7 Вибір кращого варіанта ПП техніко-економічного рівня

Розраховуємо коефіцієнти техніко-економічного рівня для кожного варіанта за формулою:

$$K_{\text{ТЕР}j} = K_{Kj} / C_{\Phi j}$$

Для першого варіанта

$$K_{\text{ТЕР}1} = 19.442 / 331636.271 = 5.862 \cdot 10^{-5}$$

Для другого варіанта

$$K_{\text{ТЕР}1} = 14.841 / 392193.793 = 3.784 \cdot 10^{-5}$$

4.8 Висновки до розділу 4

Проведено повний функціонально-вартісний аналіз програмного продукту. Визначено та проведено оцінку основних функцій програмного продукту. Визначено параметри, які характеризують програмний продукт. Проведено експертне оцінювання параметрів та аналіз якості варіантів реалізації функцій.

Проведено економічний аналіз варіантів розробки – трудомісткість, витрати на заробітну плату та інші витрати.

На основі аналізу вибрано варіант реалізації програмного продукту.

ВИСНОВКИ

У ході виконання даної дипломної роботи було розглянуто поняття прямокутної гри, їх приклади, методи знаходження оптимальних стратегій при:

- наявності сідлової точки чи домінованих рядків та/або стовпчиків
- відсутності сідлової точки

Також розглянуто приклади задач з різних галузей, де можуть застосовуватись прямокутні ігри. В Microsoft Excel були створені відповідні таблиці та знайдені оптимальні розв'язки кожної задачі за допомогою надбудови «Поиск решения».

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Дж. Мак-Кинси. Введение в теорию игр; пер. с англ. И. В. Соловьева. Москва: Физматгиз, 1960. 422 с.
2. Оуэн Г. Теория игр; пер. с англ. Врублевской И. Н., Дюбина Г. Н., Ляпунова А. Н. Москва: Мир, 1971. 230 с.
3. Партхасаратхи, Рагхаван Т. Некоторые вопросы теории игр двух лиц. – М.: Мир, 1974. 297 с.
4. Васин А.А., Морозов В.В. Введение в теорию игр с приложениями к экономике. Москва: 2003. 278 с.
5. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики; пер. с франц. Меньшиковой О. Р., Меньшикова И. С. – М.: Мир, 1985. 200 с.
6. Писарук Н. Н. Введение в теорию игр. Минск: БГУ, 2019. 283 с.
7. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. Теория игр: Учебное пособие для университетов. Высш. шк., Книжный дом «Университет», 1998. 304 с.
8. Воробьев Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. 272 с.
9. Воробьев Н. Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. Москва: Наука, 1984. 495 с.
10. Печерский С. Л., Беляева А. А. Теория игр для экономистов. Вводный курс. Санкт-Петербург: Изд-во Европ. Ун-та в Санкт-Петербурге, 2001. 342 с.
11. Бодров В. И., Лазарева Т. Я., Мартемьянов Ю. Ф. Математические методы принятия решений. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. тех. ун-та, 2004. 124 с.
12. Информационные технологии принятия решений в условиях конфликта. Учебное пособие для вузов. В двух частях. Москва: НИЯУ МИФИ, 2010. 164 с.
13. Кремлев А. Г. Основные понятия теории игр: учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016. 144 с.

ДОДАТОК А ІЛЮСТРОВАНІЙ МАТЕРІАЛ

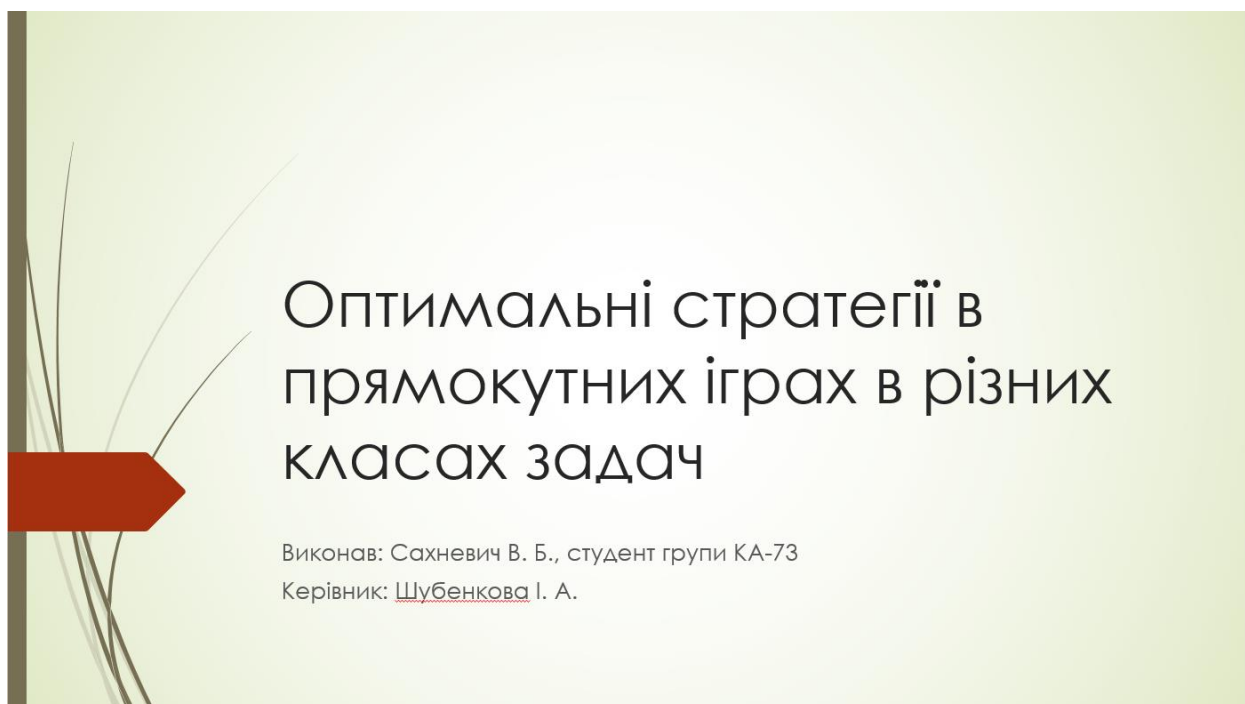


Рисунок А.1

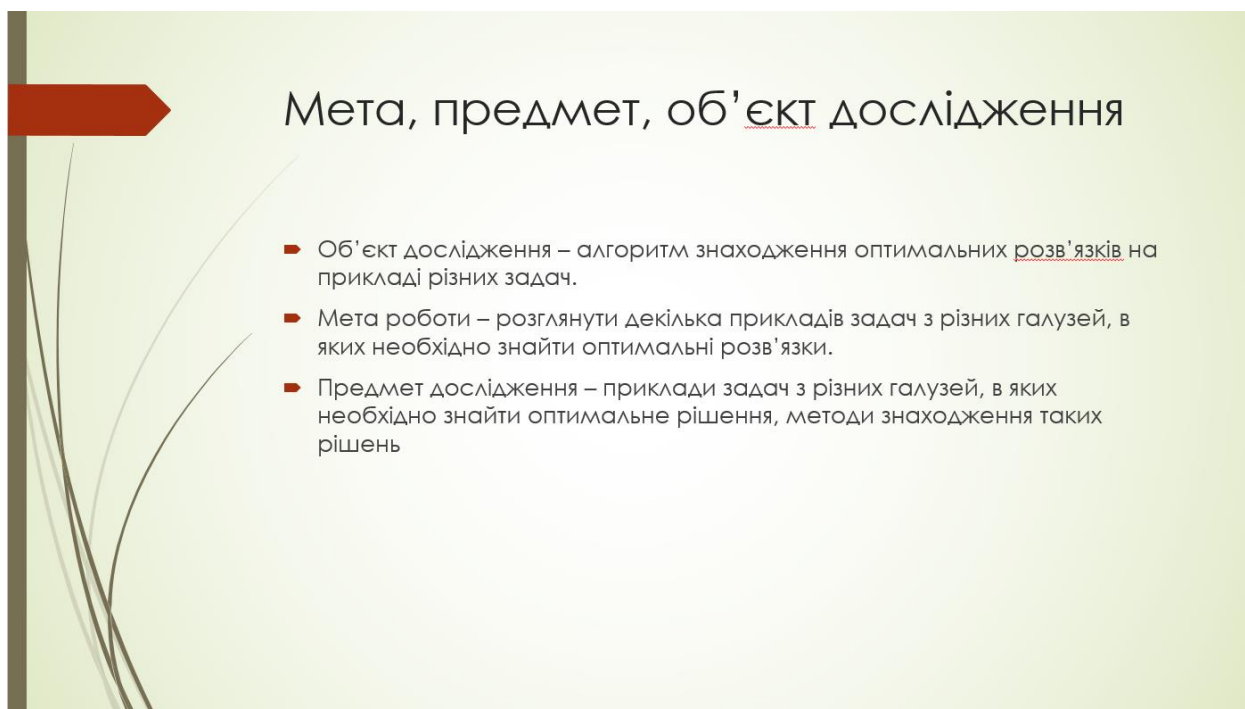


Рисунок А.2

Постановка задачі

1. Навести визначення прямокутної гри, їх приклади
2. Розглянути методи знаходження оптимальних розв'язків, коли:
 - є сідлова точка або домінування рядків, стовпчиків
 - Відсутні сідлові точки
3. Розглянути приклади задач з різних галузей, в яких необхідно знайти оптимальне рішення, за допомогою надбудови «Поиск решения» в Microsoft Excel.

Рисунок А.3

Приклад прямокутної гри

Гравець К1 обирає число з множини {1, 4, 9}, а гравець К2 – з {1, 4, 9, 16}. При цьому гравець К2 не знає, який вибір зробив гравець К1. Після того, як обидва гравці зробили свій вибір, гравець К2 платить К1 суму, яка визначається наступною таблицею:

К1 \ К2	К2			
	1	4	9	16
1	3	2	14	15
4	1	-2	0	5
9	-3	-4	-2	2

Рисунок А.4

Домінування

- Нехай є матриця A , будемо говорити, що i -ий рядок **домінує** k -ий рядок, якщо

$$a_{ij} \geq a_{kj} \quad \text{для всіх } j$$

i

$$a_{ij} > a_{kj} \quad \text{принаймні для одного } j.$$

- Аналогічно для стовпців: j -ий стовпчик **домінує** l -ий стовпчик, якщо

$$a_{ij} \leq a_{il} \quad \text{для всіх } i$$

j

$$a_{ij} < a_{il} \quad \text{принаймні для одного } i.$$

Рисунок А.5

Теорема

Нехай A – прямокутна гра, і нехай рядки $i_1, i_2, \dots, i_k$ матриці A домінуються. Тоді перший гравець має таку оптимальну стратегію x , що

$x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_k} = 0$; крім того, будь-яка оптимальна стратегія для гри, яка отримується в результаті видалення домінованих рядків, також буде оптимальною стратегією для початкової гри.

Аналогічно формулюється теорема і для домінування стовпчиків.

Рисунок А.6

Приклад

Матриця гри така:

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 8 & 6 \\ 8 & 9 & 9 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 8 & 9 & 9 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Рисунок А.7

Сідлова точка

Сідлова точка матриці це пара цілих чисел (i, j) таких, що елемент a_{ij} одночасно представляє собою мінімум свого рядка та максимум свого стовпчика.

Приклад: матриця $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

має одну сідлову точку $(1, 3)$ так як 2 є мінімумом 1-го рядка і максимумом 3-го стовпчика.

Рисунок А.8

Наявність сідлової точки

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Необхідною і достатньою умовою того, що

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} \quad (1)$$

є існування сідлової точки матриці A (тобто існування пари цілих чисел (i_0, j_0) , для яких $a_{i_0 j_0}$ є одночасно мінімумом свого рядка і максимумом свого стовпчика)

Крім того, $a_{i_0 j_0} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$

З цього випливає, що рівність (1) виконується тоді і тільки тоді, коли матриця A має сідлову точку.

Рисунок А.9

Приклад

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- Сідлова точка цієї матриці – $(2, 3)$, оскільки 4 є мінімумом другого рядка і третього стовпчика одночасно.
- Це означає, що оптимальним вибором для гравця $K1$ є 2, а для гравця $K2$ – 3.
- Ціна гри дорівнює 4.

Рисунок А.10

Приклад (аналітичний метод)

Знайти оптимальні стратегії та ціну гри з матрицею:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Використовуючи теорему 7, необхідно знайти числа $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, v$ такі, що

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, & y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \\ 0 \leq x_1 \leq 1, & & 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 1, & & 0 \leq y_2 \leq 1 \\ 0 \leq x_3 \leq 1, & & 0 \leq y_3 \leq 1 \\ \begin{cases} 0x_1 + 2x_2 + x_3 \geq v \\ 1x_1 + 0x_2 + 2x_3 \geq v \\ 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 \geq v \end{cases} & & \begin{cases} 0y_1 + y_2 + 2y_3 \leq v \\ 2y_1 + 0y_2 + 1y_3 \leq v \\ 1y_1 + 2y_2 + 0y_3 \leq v \end{cases} \end{aligned}$$

Рисунок А.11

■ за теоремою 4 система має розв'язок і можна розглянути всі можливі випадки, які отримуються при заміні знаків $\leq$ і $\geq$ в 6 останніх нерівностях відповідно на знаки $<$ і $=$ і знаки $>$ і $=$.

Розглянемо спочатку випадок, коли в системах $\geq$ і $\leq$ замінені на $=$, тобто

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 0x_1 + 2x_2 + x_3 = v \\ 1x_1 + 0x_2 + 2x_3 = v \\ 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 = v \end{cases} \quad \begin{cases} 0y_1 + y_2 + 2y_3 = v \\ 2y_1 + 0y_2 + 1y_3 = v \\ 1y_1 + 2y_2 + 0y_3 = v \end{cases} \\ \text{Отримуємо} & \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3} \\ x_3 = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ і } \begin{cases} y_1 = \frac{1}{3} \\ y_2 = \frac{1}{3} \\ y_3 = \frac{1}{3} \end{cases}, v = 1 \end{aligned}$$

Рисунок А.12

1.1
1.2
1.3

2.1 2.2

Приклад (графічний метод)

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Якщо гравець K2 використовує змішану стратегію $(x, 1 - x)$, а K1 використовує:

- чисту стратегію **1.1**, то гравець K1 заплатить гравцю K2
 $2x + 7(1 - x) = 7 - 5x$
- чисту стратегію **1.2**, то гравець K1 заплатить гравцю K2
 $3x + 5(1 - x) = 5 - 2x$
- чисту стратегію **1.3**, то гравець K1 заплатить гравцю K2
 $11x + 2(1 - x) = 9x + 2$

Проведемо прямі $y = 7 - 5x$; $y = 5 - 2x$, $y = 9x + 2$ на інтервалі $[0; 1]$

Рисунок А.13

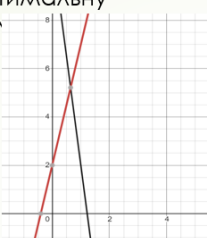
Ці графіки нам показують, що стратегія **1.2** гравця K1 не ввійде в його оптимальну стратегію, тому розглянемо

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$$

$$y = 2x + 11(1 - x) = 11 - 9x$$

$$y = 7x + 2(1 - x) = 5x + 2$$

$$x = \frac{9}{14}, \quad y = \frac{73}{14}$$

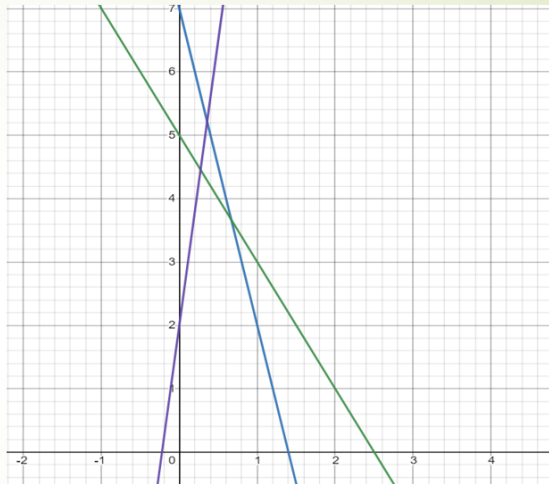


Тому,

оптимальна стратегія гравця K2: $(\frac{9}{14}, 0, \frac{5}{14})$

оптимальна стратегія гравця K1: $(\frac{5}{14}, \frac{9}{14})$

Ціна гри дорівнює $\frac{73}{14}$



синя лінія $y = 7 - 5x$; зелена $y = 5 - 2x$, а фіолетова $y = 9x + 2$

Рисунок А.14

Знаходження оптимальних розв'язків симплекс методом

Рішення задачі ЛП полягає в знаходженні оптимального плану й обчисленні значення цільової функції на цьому плані. При вирішенні гри методом лінійного програмування наводимо матричну гру до пари симетричних двоїстих задач:

Задача 1 Знайти $\max_{y \in T} \sum_{j=1}^n q_j y_j$,

де $T = \{y \mid y = (y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n \geq 0, \sum_j a_{ij} y_j = p_i, i = 1, \dots, m\}$

Задача 2 Знайти $\min_{x \in S} \sum_{i=1}^m p_i x_i$,

де $S = \{x \mid x = (x_1, \dots, x_m), \sum_i a_{ij} x_i \geq q_j, j = 1, \dots, n\}$

Крім того, необов'язково, що $x_1, \dots, x_m \geq 0$.

Якщо в платіжній матриці є від'ємні числа, додаємо до всіх елементів одне і теж позитивне число, щоб в новій матриці всі елементи були невід'ємні

Рисунок А.15

Симплекс-метод полягає в наступному. Почнемо з допустимого базисного розв'язку. Ми маємо перевірити, чи не можна, відкидаючи деякий вектор базису і вводячи в нього деякий інший стовпчик матриці, отримати новий допустимий базисний розв'язок, який строго збільшує значення цільової функції. Якщо це неможливо, то зупиняємося і вважаємо, що отриманий базисний розв'язок є оптимальним.

Рисунок А.16

Задача 1 Про меблеву фабрику

Для виробництва столів і шаф меблева фабрика використовує різні ресурси. Норми витрат ресурсів на один виріб даного виду, прибуток від реалізації одного виробу і загальна кількість наявних ресурсів кожного виду наведені в таблиці:

Визначити, скільки столів та шаф фабриці слід випускати, щоб прибуток від реалізації був максимальним.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальна кількість ресурсів(куб.м)
	стіл	шафа	
Деревина 1 типу	0,2	0,1	40
Деревина 2 типу	0,1	0,3	60
Трудомісткість	1,2	1,5	371,1
Прибуток від реалізації одного виробу	6	9	

Рисунок А.17

Excel spreadsheet showing the 'Задача 1 Про меблеву фабрику' problem. The spreadsheet includes a table for resource norms and a table for the production plan. The production plan table shows the optimal solution: 101,5714286 tables and 166,1428571 chairs, resulting in a maximum profit of 2104,714286.

Викликаємо Поиск решения

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию: $=\$F\7

Дл: ☒ Максимум ☐ Минимум ☐ Значение: 0

Изменить ячейки переменных: $=\$C\$7:\$D\7

В соответствии с ограничениями:

- $=\$E\$14 <= \$F\14
- $=\$E\$15 <= \$F\15
- $=\$E\$16 <= \$F\16

☒ Считать переменные без ограничений неотрицательными

Выборить метод решения: Поиск решения линей. задач симплекс-методом

Метод решения: Для задач нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом GRG, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для методов задач - эволюционный поиск решения.

Справка Найти решение Закрыть

Результаты поиска решения

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

☒ Сохранить найденное решение ☐ Восстановить исходные значения

☐ Вернуться в диалоговое окно параметров поиска решения ☐ Очистить го-структуру

ОК Отмена Сохранить сценарий

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены. Если используется модель GRG, то найдено по крайней мере локально оптимальное решение. Если используется модель поиска решения линейных задач симплекс-методом, то найдено глобально оптимальное решение.

Рисунок А.18

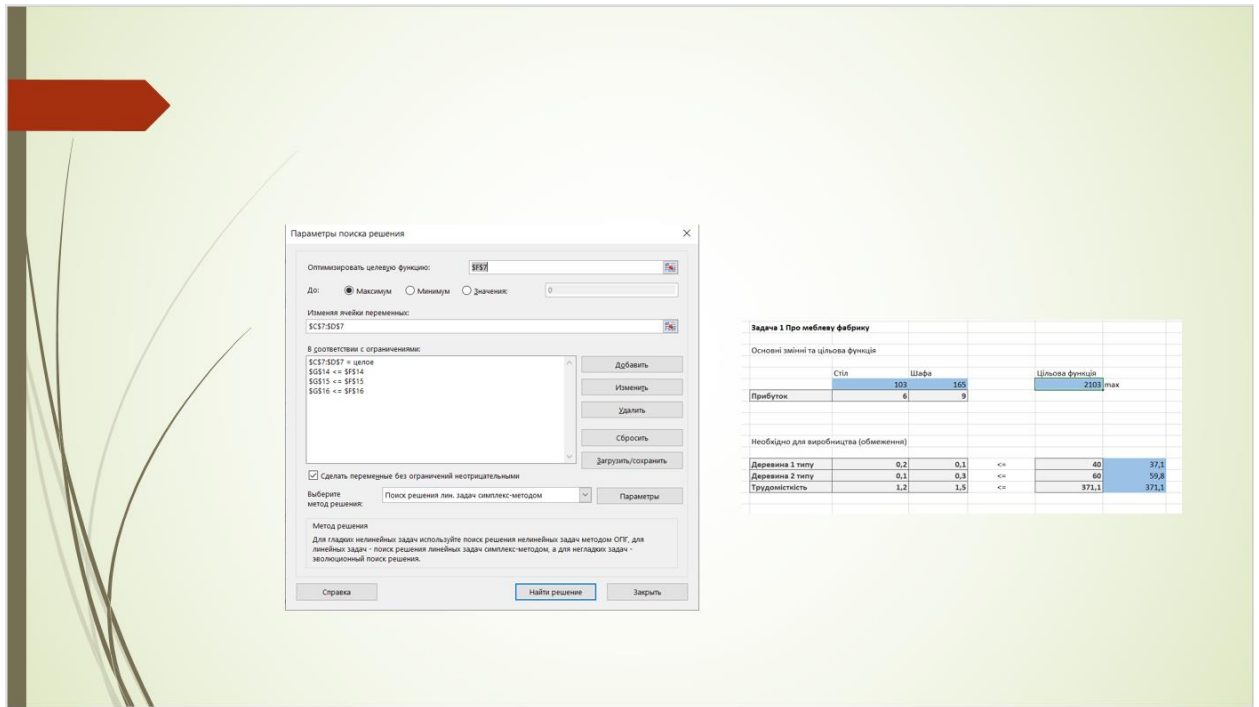


Рисунок А.19

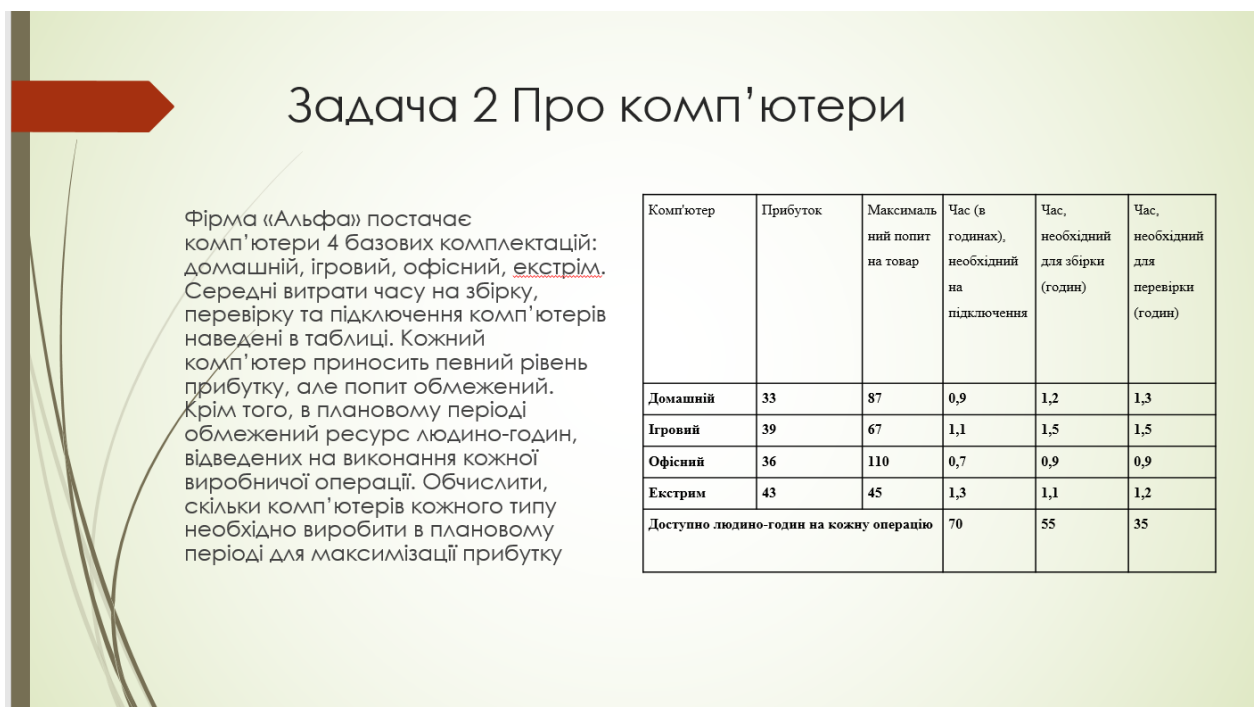


Рисунок А.20

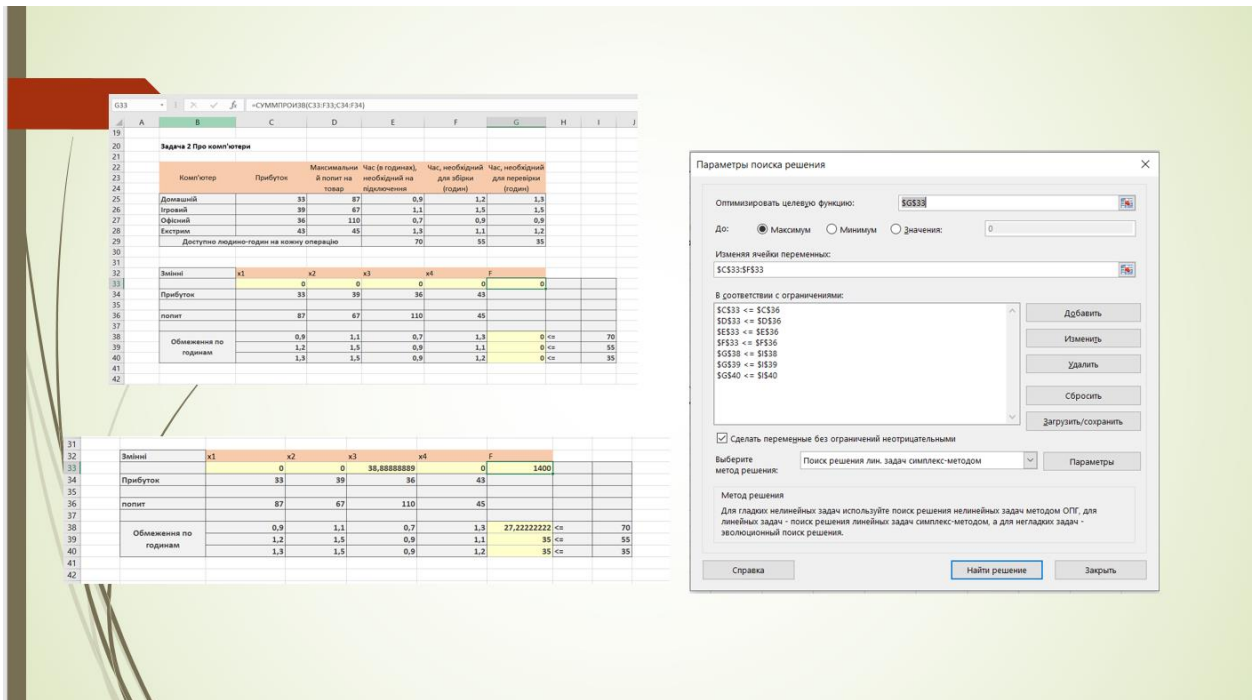


Рисунок А.21

Задача 4 Про раціон харчування

Раціон харчування тварин на фермі складається з двох видів кормів I та II.

Один кг корму I коштує 80 у.о. і містить: 1 од. жирів, 3 од. білків, 1 од. вуглеводів, 2 од. нітратів.

Один кг корму II коштує 10 у.о. і містить: 3 од. жирів, 1 од. білків, 8 од. вуглеводів, 4 од. нітратів.

Необхідно скласти найдешевший раціон харчування, який забезпечить не менше 6 од. жирів, не менше 9 од. білків, вуглеводів не менше 8 од., нітратів не більше 16 од.

Рисунок А.22

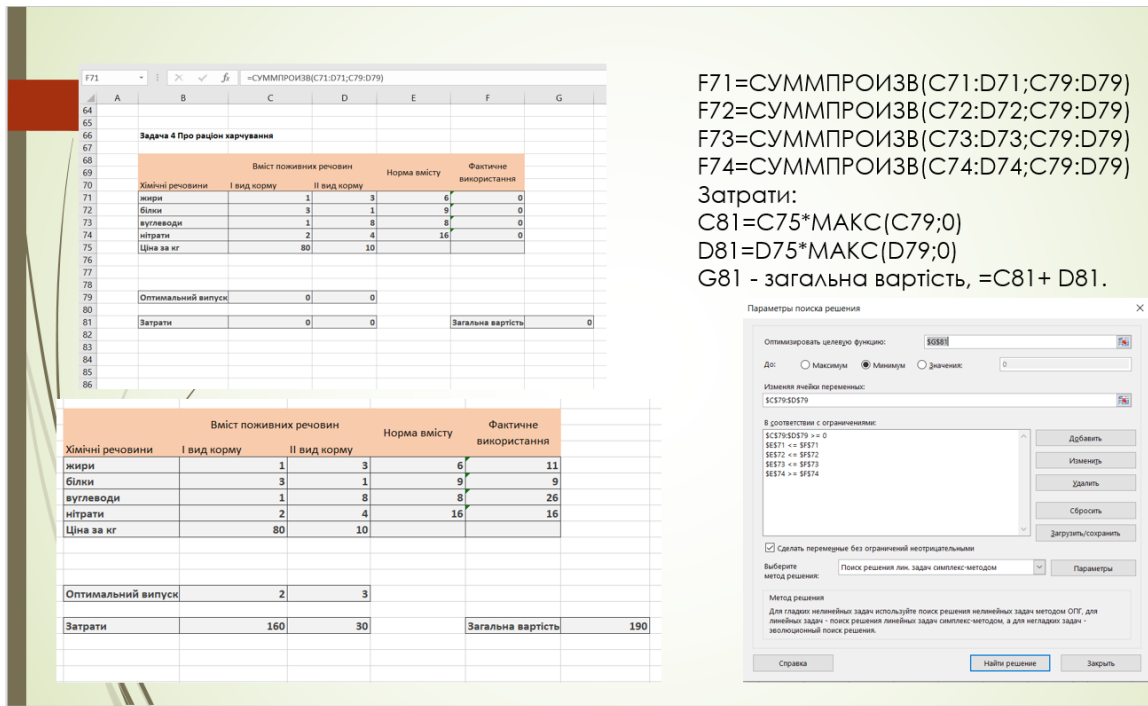


Рисунок А.23

Висновки

1. Наведено визначення прямокутної гри, їх приклади
2. Розглянуто методи знаходження оптимальних розв'язків, коли:
 - є сідлова точка або домінування рядків, стовпчиків
 - Відсутні сідлові точки
3. Розглянуто приклади задач з різних галузей, в яких необхідно знайти оптимальне рішення, за допомогою надбудови «Поиск решения» в Microsoft Excel.

Рисунок А.24



Рисунок А.25