

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Г. М. Кулик
О. І. Кушлик-Дивульська
Н. В. Степаненко
Н. П. Ярема

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Інтегральне числення функції однієї змінної.
Диференціальні рівняння

Навчальний посібник

Затверджено Вченою радою НТУУ «КПІ»
як навчальний посібник
для студентів технічних спеціальностей

Київ
НТУУ «КПІ»
2016

Навчальний посібник **«Вища математика: Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння»** для студентів технічних спеціальностей / Укл. Г.М. Кулик, О.І. Кушлик-Дивульська, Н.В. Степаненко, Н.П. Ярема – К.: НТУУ «КПІ». – 2016. – 278 с.

*Гриф надано Вченою радою
НТУУ «КПІ»*

(Протокол № 7 від 06.06.2016 р.)

Навчальний посібник

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Інтегральне числення функції однієї змінної.

Диференціальні рівняння

для студентів технічних спеціальностей

Укладачі:

Кулик Ганна Миколаївна, к.ф.-м.н.

Кушлик-Дивульська Ольга Іванівна, к.ф.-м.н.

Степаненко Наталія Вікторівна, к.ф.-м.н.

Ярема Наталія Петрівна, к.т.н.

Відповідальний
редактор

С. Д. Івасишен, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензенти

А. С. Романюк, д-р фіз.-мат. наук, проф.

О. М. Станжицький, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Передмова

Мета цього навчального видання – допомогти студентам технічних спеціальностей у вивченні кредитного модуля «Вища математика-2», «Математичний аналіз» дисципліни «Вища математика», ознайомити їх із основними поняттями, методами, теоремами, формулами інтегрального числення та теорії звичайних диференціальних рівнянь і систем, навчити набувати навички застосування теоретичного матеріалу в практичних задачах.

Навчальний посібник «Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння» призначений для студентів денної та заочної форм навчання технічних спеціальностей Механіко-машинобудівного та Видавничо-поліграфічного інститутів.

Навчальний посібник складається із двох частин, кожна з яких є завершеною. Перша частина «Інтегральне числення функції однієї змінної» містить 3 розділи «Невизначений інтеграл, його обчислення», «Визначений інтеграл», «Застосування визначеного інтеграла», друга частина «Диференціальні рівняння та системи звичайних диференціальних рівнянь» складена із розділів «Диференціальні рівняння 1-го порядку», «Диференціальні рівняння вищих порядків», «Системи звичайних диференціальних рівнянь». Кожний розділ подається за відповідними темами, кожна з них містить в основному теоретичну частину, наведена достатня кількість доведень теорем. Також стисло подано матеріал теорії комплексних чисел, многочленів та дробово-раціональних функцій. Відповідно до кожної теми розв'язано типові приклади, показано розв'язування деяких задач прикладного характеру, в основному фізичного змісту. Після кожної теми запропоновані завдання для самостійної роботи, які допомагатимуть більш повному вивченню та оволодінню студентами відповідної частини розділу.

Навчальне видання охоплює основний теоретичний матеріал, передбачений навчальними та робочими навчальними програмами для напрямів підготовки 6.050501 «Прикладна механіка», 6.050502 «Інженерна механіка»,

6.050503 «Машинобудування» (ММІ) та 6.051501 «Видавничо-поліграфічна справа», 6.051503 «Машинобудування» (ВПІ).

Додатки містять основні формули лінійної, векторної алгебри, аналітичної геометрії, функції однієї та кількох змінних, зокрема, табличні формули диференціального та інтегрального числення функції однієї змінної, основні методи інтегрування.

Навчальне видання апробовано для студентів Механіко-машинобудівного та Видавничо-поліграфічного інститутів вказаних напрямів підготовки.

Укладачі дякують студентам технічних спеціальностей ММІ та ВПІ, співробітникам кафедри математичної фізики ФМФ за співпрацю у підготовці навчального видання.

Частина I. Інтегральне числення функції однієї змінної

Розділ 1. Невизначений інтеграл, його обчислення

Початок інтегральному численню поклали задачі на обчислення площ плоских фігур, поверхонь та об'ємів тіл різної форми, а також задачі на знаходження сумарного шляху в нерівномірному русі.

Геометричні задачі розв'язували ще математики Стародавньої Греції. За допомогою розкладання фігур на нескінченно тонкі шари, на основі так званого методу вичерпування, було виведено формули для об'ємів піраміди, конуса, кулі.

Математики XVII–XVIII ст. ще не користувались поняттям границі. Вони говорили про «суму нескінченної кількості нескінченно малих доданків». Саме на такій основі німецький астроном, математик і механік Й. Кеплер (1571–1630) у творах «Нова астрономія» (1609) та «Стереометрія винних бочок» (1615) обчислив ряд площ (наприклад, площу еліптичного сектора, яка входить у формулювання 2-го закону Кеплера) та об'ємів різних тіл обертання. Ці дослідження продовжив італійський математик Б.Кавальєрі (1598–1647).

Інтегральне та диференціальне числення тривалий час розвивалися незалежно одне від одного. Англійський математик і філолог І. Барроу (1630–1677) відкрив зв'язок між задачами відшукування площі і проведення дотичної до кривої, тобто між операціями інтегрування та диференціювання. В загальному вигляді такий зв'язок було встановлено англійським фізиком і математиком Іссаком Ньютоном (1643–1727) та німецьким математиком і фізиком Г.Лейбніцом (1646–1716). Сучасне позначення інтеграла – $\int f(x)dx$ належить Лейбніцу, назва «інтеграл» – учневі Лейбніца, швейцарському математикові Я. Бернуллі (1654–1705).

Інтегрування елементарних функцій розглянуто Л. Ейлером у книзі «Інтегральне числення». Згодом з'ясувалося, що далеко не всі інтеграли від

елементарних функцій виражаються через елементарні функції. Видатний російський математик П.Л. Чебишов (1821–1894) повністю дослідив це питання для деяких класів ірраціональних функцій (так званих диференціальних біномів).

Сучасне поняття визначеного інтеграла, як границі інтегральних сум, належить французькому математику О. Коші (1789–1857). На початку XIX ст. він же довів існування первісної для всіх неперервних функцій.

Значний внесок у вивчення поняття інтеграла внесли також відомі українські математики: М.В. Остроградський (1801–1889), Д.О. Граве (1863–1939), М.П. Кравчук (1892–1942) та інші.

Тема 1. Первісна функція і невизначений інтеграл. Основні властивості інтеграла. Таблиця основних інтегралів

1.1. Первісна функції, її властивості

Означення. Функція $y = F(x)$ називається *первісною* функції $y = f(x)$ на проміжку (a, b) , якщо $y = F(x)$ диференційовна на (a, b) і $F'(x) = f(x)$ для всіх $x \in (a, b)$.

Наприклад, для функції $f(x) = \sin x$ одна із первісних $F(x) = -\cos x$, для функції $f(x) = x$ первісною є $F(x) = x^2/2 + 10$ або $F(x) = x^2/2 + C$, де $C = \text{const}$, оскільки $F'(x) = (x^2/2 + C)' = x$, $x \in \mathbb{R}$.

Задача знаходження первісної розв'язується неоднозначно, тобто в умові існування первісної для функції ця первісна не єдина.

Дійсно, якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$, то функція $F(x) + C$, де C – довільна стала, також є первісною функції $f(x)$, оскільки $(F(x) + C)' = f(x)$ для будь-якого числа C .

Покажемо, що множина функцій $F(x) + C$, де $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$, а C – довільна стала, вичерпує всі первісні функції $f(x)$.

Лема 1. Функція, похідна якої на деякому проміжку X дорівнює нулю, стала на цьому проміжку.

Доведення. Нехай у всіх точках проміжку X : $f'(x) = 0$. Для будь-яких двох точок $x_1, x_2 \in X$ за теоремою Лагранжа одержимо

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1), \quad x_1 < c < x_2.$$

Оскільки $f'(c) = 0$, то $f(x_2) = f(x_1)$, тобто $f(x) = C$, де C – деяке число.

Теорема. Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на проміжку (a, b) , то всяка інша первісна цієї функції на цьому ж проміжку має вигляд

$$y = F(x) + C. \quad (1.1)$$

Доведення. Нехай $\Phi(x)$ – деяка інша, крім $F(x)$, первісна для функції $f(x)$, тобто $\Phi'(x) = f(x)$, $x \in (a, b)$. Тоді для $\forall x \in (a, b)$:

$$[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

а це означає, що $\Phi(x) - F(x) = C$. Отже,

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

З теореми випливає, що множина функцій $F(x) + C$, де $F(x)$ – одна із первісних функції $y = f(x)$, а C – довільна стала, визначає всю сукупність первісних заданої функції.

1.2. Означення невизначеного інтеграла, його основні властивості

Означення. Множину всіх первісних $F(x) + C$ на проміжку (a, b) , де C – довільна стала для функції $y = f(x)$ називають *невизначеним інтегралом функції $f(x)$* на цьому проміжку і позначають

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (1.2)$$

При цьому функцію $f(x)$ називають *підінтегральною функцією*, вираз $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом*.

З геометричної точки зору невизначений інтеграл є множиною кривих, кожна з яких називається *інтегральною кривою* і утворюється зсувом однієї з них паралельно іншій із них відносно осі Oy .

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то для цієї функції існує первісна і, значить, невизначений інтеграл (1.2).

Властивості невизначеного інтеграла

$$1. \left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x).$$

$$2. d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx.$$

$$3. \int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx.$$

5. Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то $\int f(u) du = \int dF(u) = F(u) + C$.

$$6. \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

7. Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$, тоді

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

Доведемо властивість 4.

Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$. Тоді $kF(x)$ – первісна функції $kf(x)$: $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$. Звідси випливає, що $k \int f(x) dx = k(F(x) + C) = kF(x) + C_1 = \int kf(x) dx$, де $C_1 = kC$.

Зауваження. 1. Властивості 4, 6 використовують для скінченної кількості інтегрованих функцій та лінійних множників.

2. Властивість 5 називають *інваріантністю формули інтегрування*. Вона означає, що формула для невизначеного інтеграла залишається справедливою незалежно від того, чи змінна інтегрування є незалежною змінною, чи довільною неперервно-диференційовною функцією незалежної змінної.

Користуючись властивістю інваріантності формули інтегрування, можна з однієї формули для обчислення невизначеного інтеграла отримати нескінченну кількість таких формул. Наприклад, з формули $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ одержимо формулу $\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C$, де $u(x)$ – довільна неперервно-диференційовна функція.

1.3. Таблиця основних інтегралів

Відновлення функції за її похідною, або що те ж саме, знаходження невизначеного інтеграла за заданою функцією називається *інтегруванням*. Оскільки інтегрування – дія, обернена до диференціювання, то будь-яка формула, яка виражає похідну функції, тобто формула вигляду $F'(x) = f(x)$, може бути обернена (записана у вигляді інтегральної формули):

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Використовуючи ці міркування, напишемо таблицю значень деяких невизначених інтегралів, які випливають з основних формул диференціального числення.

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, \quad \left(\int dx = x + C, \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C \right).$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$7. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$$

$$8. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C.$$

$$13. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$14. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$15. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

$$16. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C, \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases}.$$

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C.$$

$$19. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C. \end{cases}.$$

$$20. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$21. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$22. \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Зауваження. Справедливість багатьох формул доводиться за допомогою диференціювання.

Доведемо формулу 20.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \right)' &= \frac{1}{2a} [\ln|x-a| - \ln|x+a|]' = \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right] = \\ &= \frac{1}{2a} \frac{x+a-(x-a)}{x^2-a^2} = \frac{1}{x^2-a^2},\end{aligned}$$

$$\text{тобто } \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

Якщо первісна деякої елементарної функції $f(x)$ є елементарною функцією, то кажуть, що інтеграл $\int f(x)dx$ виражається через елементарні функції або що цей інтеграл обчислюється. Зауважимо, що якщо операція диференціювання елементарних функцій знову приводить до елементарних функцій, то операція інтегрування вже може привести до неелементарних функцій, тобто функцій, які не виражаються через скінченне число арифметичних операцій і суперпозицій елементарних функцій.

Наприклад, доведено, що наступні інтеграли не інтегруються в елементарних функціях:

$$\int e^{-x^2} dx - \text{інтеграл Пуассона,}$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} - \text{інтегральний логарифм,}$$

$$\int \frac{\cos x}{x} dx - \text{інтегральний косинус, } \int \frac{\sin x}{x} dx - \text{інтегральний синус,}$$

$$\int \cos x^2 dx, \int \sin x^2 dx - \text{інтеграли Френеля та багато інших інтегралів.}$$

Інтеграл, який не обчислюється на множині елементарних функцій, може обчислюватися на множині спеціальних функцій.

Таким чином, інтегрування є набагато складнішою операцією у порівнянні з диференціюванням. Тому треба володіти основними методами інтегрування і знати класи функцій, інтеграли від яких знаходяться цими методами. При цьому слід розрізняти інтеграли, які виражаються через неелементарні, спеціальні функції.

1.4. Основні методи інтегрування

Метод безпосереднього інтегрування та внесення під знак диференціала

Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла та таблиці основних інтегралів називають *безпосереднім інтегруванням*. При цьому використовуються елементарні перетворення підінтегральної функції.

Приклад. Обчислити $\int \left(5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx$.

Розв'язання. Використовуємо властивості 4,6 та таблицю.

$$\begin{aligned} \int \left(5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx &= 5 \int \cos x dx + 2 \int dx - 3 \int x^2 dx + \\ &+ \int \frac{dx}{x} - 4 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = 5 \sin x + 2x - x^3 + \ln|x| - 4 \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Відповідь. $5 \sin x + 2x - x^3 + \ln|x| - 4 \operatorname{arctg} x + C$.

Властивості 5, 7 використовують, вносячи неперервно-диференційовну функцію під знак диференціала. Наприклад, для інтегралів маємо

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C;$$

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} d(x^3) = e^{x^3} + C.$$

Метод заміни змінної (метод підстановки)

Теорема. Нехай $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на проміжку (a, b) , тобто $\int f(x) dx = F(x) + C$ і нехай функція $x = \varphi(t)$ визначена та диференційовна на проміжку (α, β) , причому множина значень цієї функції є проміжок (a, b) . Тоді справедлива формула

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C, \quad t \in (\alpha, \beta). \quad (1.3)$$

Дійсно, з правила диференціювання складеної функції маємо

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

і справедливості формули випливає з властивості 1 невизначеного інтеграла.

Метод заміни змінної є одним із основних методів обчислення невизначених інтегралів.

Формула (1.3) називається *формулою заміни змінної в невизначеному інтегралі*.

Приклад. Обчислити $\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx &= \left| \begin{matrix} x=t+1 \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{(t+1)^3}{t^2} dt = \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2}t^2 + 3t + 3\ln |t| - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln |x-1| - \frac{1}{x-1} + C. \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln |x-1| - \frac{1}{x-1} + C$.

Зауваження. При заміні змінної в невизначеному інтегралі інколи зручніше задавати не x як функцію t , а, навпаки, задавати t як функцію x .

Завдання для самоконтролю

1. Пояснити на прикладі обчислення первісної функції.
2. Сформулювати і довести деякі властивості первісної функції.
3. Означити невизначений інтеграл та побудувати для обраної функції декілька інтегральних кривих.
4. Довести основні властивості невизначеного інтеграла.
5. Пояснити на прикладах використання властивості 7.
6. Довести формули 11, 12, 17, 18, 19, 21, 22 із таблиці інтегралів.
7. Обчислити: 1. $\int \left(3x + \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + \cos 4x + \frac{1}{x^2 + 16} \right) dx$; 2) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

$$2. \quad 1) \int \frac{x}{1+x^4} dx; 2) \int \frac{x^3}{x^4+2} dx; 3) \int \sqrt[4]{\sin x} \cos x dx \text{ (в п. 2 знайти інтеграли}$$

внесенням під знак диференціала та за допомогою заміни змінної).

$$\text{Відповіді. 7. 1. 1) } \frac{3x^2}{2} + \frac{5x^2\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C; 2) -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

$$2. 1) \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C; 2) \frac{1}{4}\ln(x^4+2) + C; 3) \frac{4}{5}\sin x \sqrt[4]{\sin x} + C.$$

Тема 2. Інтегрування частинами. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен. Прості раціональні дробы

2.1. Формула інтегрування частинами, основні випадки її використання

Інтегрування частинами – один із способів знаходження інтеграла. Суть методу в наступному: якщо підінтегральна функція представлена у вигляді добутку двох неперервних і повних функцій (кожна з яких може бути як елементарною функцією, так і композицією), то справедлива формула:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (2.1)$$

Доведемо її. Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні. Тоді для диференціала їхнього добутку маємо

$$d(uv) = v du + u dv, \quad u dv = d(uv) - v du.$$

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, дістанемо

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du,$$

або

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Формулу (2.1) називають *формулою інтегрування частинами*.

Підінтегральний вираз $u dv$ можна розбити на множники u та dv кількома способами, тому вміння розбивати підінтегральну функцію, щоб інтеграл справа був простішим, ніж інтеграл зліва, виробляється в процесі обчислення

інтегралів. Вкажемо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати даним методом.

1) Інтеграли виду

$$\int P(x)e^{kx}dx, \int P(x)a^x dx, \int P(x)\sin kx dx, \int P(x)\cos kx dx,$$

де $P(x)$ – многочлен, а k – дійсне число. В даних інтегралах $u = P(x)$, оскільки для $du = P'(x)dx$ порядок многочлена на одиницю зменшується. Відповідно до вищевказаних інтегралів приймають

$$dv = \begin{cases} e^{kx} dx, a^x dx \\ \sin kx dx, \\ \cos kx dx \end{cases}, \text{ тоді } v = \begin{cases} \frac{1}{k} e^{kx}, \frac{1}{\ln a} a^x \\ -\frac{1}{k} \cos kx, \\ \frac{1}{k} \sin kx \end{cases}.$$

2) Інтеграли виду $\int P(x)\ln^n x dx, \int P(x)\arcsin x dx, \int P(x)\arccos x dx, \int P(x)\arctg x dx, \int P(x)\text{arcctg} x dx$, де $n \in N$.

У цих інтегралах беруть $dv = P(x)dx$, відповідно, для першого інтеграла $u = \ln^n x, du = n \ln^{n-1} x \cdot \frac{1}{x} dx$, тобто зменшується степінь логарифма; для решти інтегралів:

$$u = \begin{cases} \arcsin x, \arccos x \\ \arctg x, \text{arcctg} x \end{cases}, du = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \frac{1}{1+x^2}, -\frac{1}{1+x^2} \end{cases} dx.$$

2) Інтеграли виду

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx, \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx, \int a^x \sin \beta x dx, \int a^x \cos \beta x dx,$$

де α, β – дійсні числа. Тут двічі застосовують формулу інтегрування частинами, беручи перший або другий множник за u чи dv , оскільки після двохкратного застосування формули утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв'язуючи це рівняння, знаходять інтеграл.

Приклади використання формули інтегрування частинами

Обчислити інтеграли: 1. $\int \arctg x dx$; 2. $\int x e^x dx$; 3. $\int x \ln x dx$.

Розв'язання. 1. Маємо 2-ий випадок використання формули (2.1):

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, \int dv = \int dx, v = x \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int x \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

2. Для інтеграла $\int x e^x dx$ використовуємо 1-ий типовий випадок:

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{array} \right| = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

3. Приймаємо $u = \ln x$ для обчислення $\int x \ln x dx$:

$$\int x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4}(2 - \ln x) + C.$$

Відповідь. 1. $\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$; 2. $e^x(x-1) + C$;

3. $\frac{x^2}{4}(2 - \ln x) + C$.

Інколи для обчислення інтеграла формулу інтегрування частинами приходить застосовувати декілька разів.

Приклад. Обчислити $\int x^2 \cos x dx$.

Розв'язання. Оскільки маємо x^2 , то слід використати двічі формулу (2.1).

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2, du = 2x dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin x dx, v = -\cos x \end{array} \right| = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx = x^2 \sin x + \\ &\quad 2x \cos x - 2 \sin x + C. \end{aligned}$$

Відповідь. $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$.

Для інтегралів вигляду 3) після дворазового застосування формули інтегрування частинами, приходимо в правій частині до виразу, який містить початковий інтеграл, тобто одержуємо рівняння з шуканим інтегралом як невідомим.

Приклад. Обчислити $\int e^{ax} \sin bxdx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin bxdx &= \left| \begin{array}{l} u = e^{ax}, du = ae^{ax} dx \\ dv = \sin bxdx, v = -\frac{1}{b} \cos bx \end{array} \right| = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \\ &+ \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bxdx = \left| \begin{array}{l} u = e^{ax}, du = ae^{ax} dx \\ dv = \cos bxdx, v = \frac{\sin bx}{b} \end{array} \right| = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx \\ &+ \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bxdx, \end{aligned}$$

в результаті отримали рівняння відносно невідомого інтеграла $\int e^{ax} \sin bxdx$:

$$\int e^{ax} \sin bxdx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bxdx.$$

$$\text{Звідси } \int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

$$\text{Відповідь. } \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

Зауваження. При обчисленні інтегралів виду $\int P_n(x) e^{ax} dx$, де $P_n(x)$ – многочлен n -го степеня, інтегрування частинами необхідно виконувати n разів, прийнявши $u = P_n(x)$. При цьому у результаті інтегрування отримуємо функцію, що має вигляд $Q_n(x) e^{ax}$, де $Q_n(x)$ – многочлен того ж степеня n , що й $P_n(x)$. Це дає змогу застосувати для обчислення інтегралів даного типу метод невизначених коефіцієнтів, який розглянемо на прикладі.

Приклад. Обчислити інтеграл $I = \int (3x^3 - 17)e^{2x} dx$.

Розв'язання.

Будемо шукати інтеграл I у вигляді добутку многочлена третього степеня з невизначеними коефіцієнтами на показникову функцію e^{2x} :

$$I = \int (3x^3 - 17)e^{2x} dx = (A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4)e^{2x} + C.$$

Диференціюючи праву та ліву частину цієї рівності, отримуємо:

$$(3x^3 - 17)e^{2x} = (3A_1x^2 + 2A_2x + A_3)e^{2x} + 2e^{2x}(A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4).$$

$$3x^3 - 17 \equiv 2A_1x^3 + (2A_2 + 3A_1)x^2 + (2A_3 + 2A_2)x + (2A_4 + A_3).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у правій та лівій частині даної тотожності, отримуємо систему рівнянь відносно невизначених коефіцієнтів A_1, A_2, A_3, A_4 :

$$\begin{cases} 2A_1 = 3; \\ 2A_2 + 3A_1 = 0; \\ 2A_3 + 2A_2 = 0; \\ 2A_4 + A_3 = -17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{3}{2}; A_2 = -\frac{9}{4}; \\ A_3 = \frac{9}{4}; A_4 = -\frac{77}{8}. \end{cases}$$

Таким чином, отримуємо:

$$I = \int (3x^3 - 17)e^{2x} dx = \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{77}{8} \right) e^{2x} + C.$$

Відповідь. $\left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{77}{8} \right) e^{2x} + C.$

2.2. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен

2.2.1. Розглядаємо $I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$, де a, b, c — дійсні числа.

Попередньо перетворимо тричлен: $ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] =$

$$= a \left[x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right],$$

де позначили $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2$. Знак плюс або мінус залежить від коренів

квадратного тричлена ($D > 0$ – корені дійсні і знак мінус, $D < 0$ – дійсних коренів немає і знак плюс). Таким чином,

$$I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right]}.$$

Зробивши підстановку $x + \frac{b}{2a} = t$, $dx = dt$, отримують $I = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{t^2 \pm k^2}$, які є табличними (формули 19, 20 таблиці інтегралів).

2.2.2. Розглядаємо інтеграл більш загального вигляду $I = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$, де A, B – також дійсні числа. Виконуємо тотожні перетворення підінтегральної

$$\begin{aligned} \text{функції } I = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx &= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right)}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \\ &+ \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = I_1 + I_2, \end{aligned}$$

де I_2 проаналізовано в п. 2.1. В першому інтегралі виконуємо заміну змінної $ax^2 + bx + c = t$, $(2ax + b)dx = dt$, тоді

$$\int \frac{(2ax + b)dx}{ax^2 + bx + c} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|ax^2 + bx + c| + C.$$

2.2.3. Розглядаємо $I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$

За допомогою перетворень, аналогічних п. 2.2.1, даний інтеграл зводиться в залежності від знаку числа a до табличних інтегралів

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}, a > 0 \text{ та } \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}}, a < 0.$$

2.2.4. Інтеграл $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ обчислюється за допомогою аналогічних

п. 2.2.2 перетворень:

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Тоді для першого інтеграла $ax^2 + bx + c = t$, $(2ax + b)dx = dt$, тому

$$\int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{ax^2 + bx + c} + C,$$

а другий інтеграл розглянуто в п. 2.2.3.

2.2.5. Інтеграл $\int \frac{dx}{(mx + n)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ за допомогою підстановки

$$t = \frac{1}{mx + n}, mx + n = \frac{1}{t}, dx = -\frac{1}{mt^2} dt$$

зводиться до розглянутого вище в п. 2.2.3, тобто

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(mx + n)\sqrt{ax^2 + bx + c}} &= -\frac{1}{m} \int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{a\left(\frac{1}{mt} - \frac{n}{m}\right)^2 + b\left(\frac{1}{mt} - \frac{n}{m}\right) + c}} = \\ &= -\frac{1}{m} \int \frac{dt}{t \sqrt{a\left(\frac{n^2 t^2 - 2nt + 1}{m^2 t^2}\right) + b\left(\frac{1 - nt}{mt}\right) + c}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{gt^2 + ht + a}}, \end{aligned}$$

де $g = an^2 - bmn + cm^2$, $h = bm - 2an$.

Приклади. Обчислити інтеграли: 1. $\int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx$; 2. $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx$;

3. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}.$

Розв'язання. 1. Виділимо у чисельнику підінтегральної функції похідну знаменника. Оскільки $(x^2 - 2x - 5)' = 2x - 2$, то запишемо чисельник у вигляді:

$x + 3 = \frac{1}{2}(2x - 2) + 4$. Тоді заданий інтеграл набуває вигляду:

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-2)}{x^2-2x-5} dx + 4 \int \frac{dx}{(x-1)^2-6}.$$

Оскільки

$$\int \frac{(2x-2)}{x^2-2x-5} dx = \left| \frac{x^2-2x-5=t}{dt=2x-2} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2-2x-5| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2-6} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}} \right| + C,$$

то остаточно отримуємо:

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2-2x-5| + \frac{2}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}} \right| + C.$$

2. Похідна підкореневого виразу у знаменнику дробу під знаком інтеграла $(x^2+4x+10)' = 2x+4$. Виділимо її у чисельнику:

$$5x+3 = \frac{5}{2}(2x+4-4)+3 = \frac{5}{2}(2x+4)-7.$$

Запишемо заданий інтеграл у наступному вигляді:

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)-7}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}.$$

Обчислимо інтеграли у правій частині отриманої рівності:

$$\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx = \left| \frac{x^2+4x+10=t}{(2x+4)dx=dt} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{x^2+4x+10} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} = \ln \left| x+2+\sqrt{x^2+4x+10} \right| + C.$$

Остаточно отримуємо значення заданого інтеграла у вигляді:

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx = 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7 \ln \left| x+2+\sqrt{x^2+4x+10} \right| + C.$$

3. Виконуємо заміну, як у випадку п. 2.2.5:

$$\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}} = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2x-3} = t \\ x = \frac{1}{2t} + \frac{3}{2} \\ dx = -\frac{1}{2t^2} dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{4\left(\frac{1}{2t} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{2t} + \frac{3}{2}\right)^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t \sqrt{\frac{2}{t} + 6 - \frac{1}{4t^2} - \frac{3}{2t} - \frac{9}{4}}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t \frac{\sqrt{15t^2 + 3t - 1}}{2t}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{15t^2 + 3t - 1}},$$

тобто прийшли до інтегралу п. 2.2.3, в якому $a=15>0$, матимемо формулу 18 таблиці інтегралів. Отже,

$$\begin{aligned} -\int \frac{dt}{\sqrt{15t^2 + 3t - 1}} &= -\frac{1}{\sqrt{15}} \int \frac{d\left(t + \frac{1}{10}\right)}{\sqrt{\left(t + \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{23}{300}}} = -\frac{1}{\sqrt{15}} \ln \left| t + \frac{1}{10} + \sqrt{\left(t + \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{23}{300}} \right| = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{15}} \ln \left| \frac{1}{2x-3} + \frac{1}{10} + \sqrt{\left(\frac{1}{2x-3} + \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{23}{300}} \right| + C. \end{aligned}$$

Відповідь. 1. $\frac{1}{2} \ln |x^2 - 2x - 5| + \frac{2}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}} \right| + C.$

2. $5\sqrt{x^2 + 4x + 10} - 7 \ln \left| x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 10} \right| + C.$

3. $-\frac{1}{\sqrt{15}} \ln \left| \frac{1}{2x-3} + \frac{1}{10} + \sqrt{\left(\frac{1}{2x-3} + \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{23}{300}} \right| + C.$

2.3. Інтегрування простих раціональних дробів

Означення. Відношення двох многочленів $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ вигляду $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$

називають *раціональною функцією* або *раціональним дробом* за умови $P_m(x) \neq 0, Q_n(x) \neq 0$.

Означення. Раціональний дріб називають *правильним*, якщо степінь чисельника менший степеня знаменника $m < n$; в інших випадках ($m \geq n$) раціональний дріб називають *неправильним*.

Якщо дріб неправильний, то, виконавши ділення, дістанемо правильний дріб:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = W_k(x) + \frac{R_p(x)}{Q_n(x)},$$

причому $p < n$.

Означення. Елементарними раціональними дробами називаються правильні раціональні дробі таких чотирьох видів:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a};$$

$$\text{II. } \frac{A}{(x-a)^n}, \quad n = 2, 3, \dots;$$

$$\text{III. } \frac{Mx + N}{x^2 + px + q};$$

$$\text{IV. } \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

де A, a, M, N, p, q – дійсні числа, а тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, тобто $D = p^2 - 4q < 0$.

Інтегрування дробів I– III типу є достатньо простим.

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

$$\begin{aligned} \text{III. } \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \frac{M}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \\ &= \frac{M}{2} \ln|x^2 + px + q| + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4} \right)} = \frac{M}{2} \ln|x^2 + px + q| + \\ &\quad + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C. \end{aligned}$$

Більш складнішим є інтегрування дробів IV-го типу.

Виконуємо спочатку аналогічні перетворення, як для III-го типу:

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} dx &= \frac{M}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^k} dx + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = \\ &= \frac{M}{2} I + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) I_k, \end{aligned}$$

тоді для першого інтеграла

$$I = \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^k} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 + px + q = t, \\ (2x + p)dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k} dt = \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C =$$

$$= \frac{1}{(1-k)(x^2 + px + q)^{k-1}} + C.$$

Для другого інтеграла

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4} \right) \right]^k} = \left| \begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = t, dx = dt \\ q - \frac{p^2}{4} = m^2 \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k} =$$

$$= \frac{1}{m^2} \int \frac{(t^2 + m^2) - t^2}{(t^2 + m^2)^k} dt = \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2}{(t^2 + m^2)^k} dt.$$

Перетворюємо тепер другий інтеграл і інтегруємо його частинами:

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2 + m^2)^k} = \int \frac{t \cdot t dt}{(t^2 + m^2)^k} = \left| \begin{array}{l} u = t, du = dt \\ dv = \frac{t dt}{(t^2 + m^2)^k}, v = -\frac{1}{2(k-1)} \cdot \frac{1}{(t^2 + m^2)^{k-1}} \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2(k-1)} \left[t \cdot \frac{1}{(t^2 + m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} \right].$$

Підставляємо даний вираз у I_k .

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k} = \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{2(k-1)} \left[\frac{t}{(t^2 + m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} \right] =$$

$$= \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}}.$$

Отримали

$$I_k = \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} I_{k-1}. \quad (2.2)$$

Формулу (2.2) називають *рекурентною формулою* інтегрування дробів IV-го типу.

Продовжуючи далі так само, отримуємо відомий табличний інтеграл

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m} + C,$$

тобто інтеграл від дробу IV-го типу шляхом повторного інтегрування частинами зводять до інтеграла від найпростішого дробу типу III.

Завдання для самоконтролю

1. Довести формулу інтегрування частинами.
2. Пояснити раціональність використання формули інтегрування частинами для різних підінтегральних виразів.

$$3. 1) \int (x^2 + 1) \cos 3x dx; 2) \int x^3 \ln x dx; 3) \int 3^x \sin 4x dx; 4) \int \operatorname{arctg} x dx;$$

$$5) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

4. Зінтегрувати вирази із квадратними тричленами:

$$1) \int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx; 2) \int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx.$$

5. Записати загальний вигляд та навести приклади раціональної, ірраціональної функції, навести приклади правильних та неправильних дробів.

6. Звести дробу до правильних, виділивши цілу частину:

$$1) \frac{x^2+3}{x^2-5}; 2) \frac{x^4}{x^2-1}; 3) \frac{x^5}{x-5}.$$

7. Означити елементарні раціональні дробу та на простіших прикладах пояснити інтегрування дробів I– III типу.

$$8. \text{Обчислити } \int \frac{1}{(x^2+9)^3} dx.$$

$$\text{Відповіді. 3. 1) } \frac{1}{3} (x^2+1) \sin 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x - \frac{2}{27} \sin 3x + C; 2) \frac{1}{16} x^4 (4 \ln x - 1) + C;$$

$$3) \frac{3^x}{16 + \ln^2 3} (\ln 3 \sin 4x - 4 \cos 4x) + C; 4) x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C; 5) \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

$$4.1) \frac{1}{2} \ln |x^2 - 2x - 6| + \frac{2}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}} \right| + C; 2) 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7 \ln |x+2+\sqrt{x^2+4x+10}| + C.$$

$$6. 1) 1 + \frac{8}{x^2-5}; 2) x^2 + 1 + \frac{1}{x^2-1}; 3) x^4 + 5x^3 + 25x^2 + 125x + 625 + \frac{3125}{x-5}.$$

$$8. \frac{1}{36} \left(\frac{x}{(x^2+9)^2} + \frac{x}{6(x^2+9)} + \frac{1}{18} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} \right) + C.$$

Тема 3. Комплексні числа. Деякі відомості з теорії раціональних дробів

Комплексні числа не є числами в елементарному значенні цього слова, що застосовуються при підрахунках і вимірюваннях, а є математичними об'єктами, які визначаються поданими нижче властивостями.

3.1. Комплексні числа

3.1.1. Основні поняття та означення

Означення. *Комплексним числом* називається впорядкована пара $z = (x, y)$ двох дійсних чисел x і y , дії над якими виконуються наступним чином:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (3.1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (3.2)$$

Множину комплексних чисел позначають C .

Комплексне число позначається символом $a + bi$, де a і b – дійсні числа, які називаються відповідно *дійсною* і *уявною частинами* комплексного числа $a + ib$, а символ i , визначений умовою $i^2 = -1$, називається *уявною одиницею*.

Звичайно комплексне число $a + ib$ позначають однією буквою (найчастіше z): $z = a + ib$.

Дійсну та уявну частини комплексного числа $z = a + ib$ позначають $\operatorname{Re} z$ та $\operatorname{Im} z$ відповідно:

$$a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z.$$

Означення. Комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ вважаються *рівними*, якщо рівні їх дійсні й уявні частини $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Комплексне число $z = a + ib$ вважається рівним нулю, якщо його дійсна і уявна частини дорівнюють нулю ($a = b = 0$). Комплексне число $z = a + ib$ за

$b=0$ вважається таким, що збігається з дійсним числом a ($a+0i=a$), а для $a=0$ вважається *суто уявним* і позначається ib , ($0+ib=ib$).

Означення. Сумою комплексних чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ та $z_2 = a_2 + ib_2$ є комплексне число z , дійсна частина якого дорівнює сумі дійсних частин, а уявна частина – сумі уявних частин, тобто

$$z = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2). \quad (3.3)$$

Про число z кажуть, що його дістали внаслідок додавання комплексних чисел z_1 та z_2 і записують $z = z_1 + z_2$. Числа z_1 і z_2 називають *доданками*.

Властивості операції додавання комплексних чисел:

1) асоціативність: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

2) комутативність: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

Комплексне число $-a - ib$ називається *протилежним* комплексному числу $a + ib$. Комплексне число, протилежне комплексному числу z , позначається $-z$. Сума комплексних чисел z і $-z$ дорівнює нулю ($z + (-z) = 0$).

Означення. Різниця комплексних чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ та $z_2 = a_2 + ib_2$ є комплексне число z , що є сумою числа z_1 і числа, протилежного z_2

$$z = z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2),$$

тобто комплексним числом, дійсна і уявна частини якого дорівнюють відповідно різниці дійсних і уявних частин зменшуваного та від'ємника. Про число z кажуть, що його дістали внаслідок віднімання комплексного числа z_2 від комплексного числа z_1 і записують

$$z = z_1 - z_2.$$

Означення. Добутком комплексних чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$ є комплексне число:

$$z = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1). \quad (3.4)$$

Про число z кажуть, що його дістали внаслідок множення комплексного числа z_1 на комплексне число z_2 , і записують $z = z_1 z_2$. Числа z_1 та z_2 називають *співмножниками*.

Властивості операції множення комплексних чисел:

1) асоціативність: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$;

2) комутативність: $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

Означення. Часткою двох комплексних чисел z_1 і z_2 ($z_2 \neq 0$) є таке комплексне число z , що $z_1 = z z_2$. Частку комплексних чисел $z_1 = a_1 + i b_1$ і $z_2 = a_2 + i b_2$ обчислюють за формулою

$$z = \frac{a_1 a_2 - b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \quad (3.5)$$

Доведення формули (3.5):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + i b_1}{a_2 + i b_2} = \frac{(a_1 + i b_1) \cdot (a_2 - i b_2)}{(a_2 + i b_2) \cdot (a_2 - i b_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Додавання і множення комплексних чисел зв'язані правилом, яке називається *законом дистрибутивності* множення відносно додавання:

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Означення. Число $\sqrt{a^2 + b^2}$ називається *модулем* комплексного числа $z = a + i b$.

Модуль комплексного числа позначають $|z|$. Модулі двох будь-яких комплексних чисел z_1 і z_2 (для частки вважається, що $z_2 \neq 0$) задовольняють співвідношення: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \dots, |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$,

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \dots, |z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|, \dots, |z^n| = |z|^n = |\bar{z}|^n.$$

Означення. Комплексне число $a - i b$ називається *комплексно спряженим* з числом $z = a + i b$ і позначають $\bar{z}$.

3.1.2. Геометричне зображення комплексного числа

Подібно до того, як дійсні числа можна зображати точками числової прямої, комплексні числа можна зображати точками площини. Можливість такого зображення ґрунтується на ототожненні множини комплексних чисел множині пар дійсних чисел (a, b) , які в прямокутній системі координат Oxy можна трактувати як координати точок площини.

Далі, з кожною точкою A координатної площини Oxy можна зв'язати вектор $\overrightarrow{OA}$, який виходить з початку координат і закінчується у точці A .

Тому комплексні числа допускають не одну геометричну інтерпретацію: кожне комплексне число $a + ib$ можна геометричне інтерпретувати як вектор $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) (рис.3.1). Координати вектора $\overrightarrow{OA}$ при цьому будуть такими ж, як і координати точки A , а саме $(a; b)$.

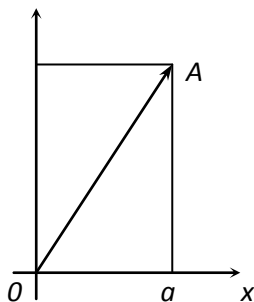


Рис. 3.1. Зображення комплексного числа.

3.1.3. Тригонометрична форма запису комплексного числа

Крім алгебраїчної форми запису комплексного числа [7] застосовують також іншу, яка називається *тригонометричною*. Нехай комплексне число $z = a + ib \neq 0$ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) (рис.3.1.). Позначимо довжину вектора $\overrightarrow{OA}$ буквою r : $r = |\overrightarrow{OA}|$, а кут, який він утворює з додатним напрямом осі Ox , через φ (кут φ вважається виміряним у радіанах).

Скориставшись означеннями функцій $\sin \varphi$ і $\cos \varphi$

$$\sin \varphi = b / r, \quad \cos \varphi = a / r,$$

комплексне число $z = a + ib$ можна записати у вигляді

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (3.6)$$

де $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а кут φ позначається з умов

$$\sin \varphi = b / \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \varphi = a / \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (3.7)$$

Вираз (3.6) має назву *тригонометрична форма* запису комплексного числа. Дійсне число r є модулем комплексного числа і позначається $|z|$, а кут φ , виміряний в радіанах, його аргументом і позначається $\text{Arg}z$.

Якщо комплексне число не дорівнює нулю, то модуль його додатний (модуль будь-якого комплексного числа визначено однозначно), а його аргумент визначається формулами:

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{якщо } x > 0, \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{якщо } x < 0, y \geq 0, \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{якщо } x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{якщо } x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{якщо } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

з точністю до кута, кратного 2π . Для того, щоб уникнути неоднозначності, яка виникає при обчисленні аргументу комплексного числа, використовують поняття *головного значення* аргументу комплексного числа (позначення $\arg z$), вважаючи, що $\arg z \in (-\pi; \pi]$. Аргумент комплексного числа відповідає співвідношенню: $\text{Arg}z = \arg z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел). Якщо ж $z = 0$, тобто $a = b = 0$, то й модуль його дорівнює нулю, а аргумент комплексного числа, що дорівнює нулю, не визначено.

Нехай z_1 і z_2 – два комплексні числа, що відмінні від нуля, записано в тригонометричній формі:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Добутком двох комплексних чисел z_1 та z_2 є комплексне число, модуль якого дорівнює добутку модулів співмножників, а аргумент – сумі аргументів співмножників:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (3.8)$$

Доведення формули (3.8):

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\
&= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = \\
&= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].
\end{aligned}$$

Вектор, що зображує добуток комплексних чисел z_1 і z_2 , дістаємо поворотом вектора $\bar{z}$ проти годинникової стрілки на кут, що дорівнює φ_2 , і розтягом його в $|z_2|$ раз (для випадку $|z_2| > 1$ див. рис.3.2).

Частка двох комплексних [10] чисел z_1 і z_2 , що не дорівнюють нулю, є комплексне число, модуль якого дорівнює частці модулів діленого і дільника, а аргумент – різниці аргументів діленого і дільника:

$$z_1 / z_2 = r_1 / r_2 [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (3.9)$$

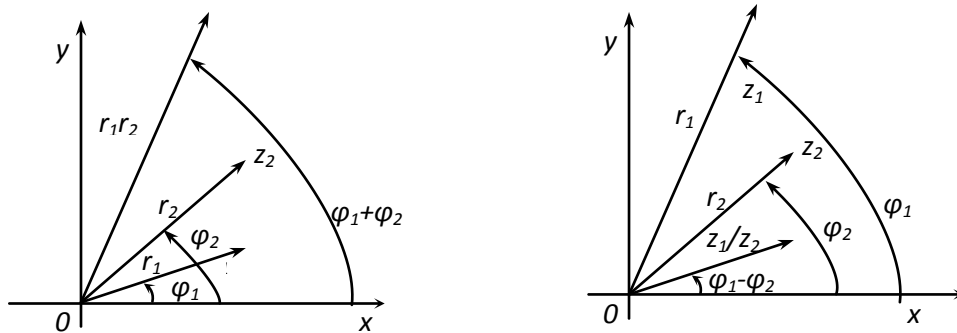


Рис.3.2. Множення і ділення комплексних чисел.

Вектор, що зображує частку двох комплексних чисел z_1 і z_2 , дістаємо поворотом вектора, який зображує комплексне число z_1 , за годинниковою стрілкою на кут, що дорівнює φ_2 , і стиском його в $|z_2|$ раз (для випадку $|z_1| > 1$ див. рис. 3.2).

3.1.4. Натуральний степінь комплексного числа. Корінь n -го степеня з комплексного числа

Означення. n -тим степенем комплексного числа z називається комплексне число w , знайдене внаслідок множення числа z самого на себе n раз:

$$w = z \cdot z \cdot \dots \cdot z.$$

Зазвичай використовують коротший запис: $w = z^n$, в якому число z є основою степеня, а натуральне число n – показником степеня.

n -й степінь комплексного числа z , заданого в тригонометричній формі обчислюється за формулою Муавра:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (3.10)$$

Означення. Коренем n -го степеня з комплексного числа z називається таке комплексне число w , n -й степінь якого дорівнює z :

$$w^n = z.$$

Корінь n -го степеня з комплексного числа z позначається символом $\sqrt[n]{z}$. На відміну від кореня з дійсного числа, корінь n -го степеня з комплексного числа визначається неоднозначно. Саме в множині комплексних чисел існує рівно n коренів n -го степеня з даного комплексного числа.

Усі корені n -го степеня [10] з комплексного числа z , заданого в тригонометричній формі, обчислюються за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \varphi + \frac{2\pi k}{n} + i \sin \varphi + \frac{2\pi k}{n} \right), \quad (3.11)$$

де $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Геометрично всі корені n -го степеня з комплексного числа зображуються точками, що лежать на колі з центром в початку координат, радіус якого дорівнює $\sqrt[n]{r}$, а центральні кути між радіусами, проведеними у сусідні точки, дорівнюють $2\pi / n$.

Приклад. Обчислити [4] корені четвертого степеня з числа -1 .

Розв'язання. Число -1 у тригонометричній формі можна записати так:

$$-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Корені четвертого степеня із числа -1 – це комплексні числа, обчислені за формулою (3.11): $\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right)$, де $k = 0, 1, 2, 3$, тобто комплексні числа (рис. 3.3):

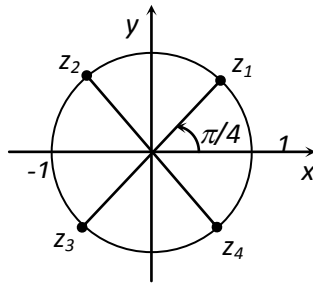


Рис. 3.3. Зображення коренів на одиничному колі.

$$z_1 = \cos(\pi / 4) + i \sin(\pi / 4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i);$$

$$z_2 = \cos(3\pi / 4) + i \sin(3\pi / 4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i);$$

$$z_3 = \cos(5\pi / 4) + i \sin(5\pi / 4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i);$$

$$z_4 = \cos(7\pi / 4) + i \sin(7\pi / 4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i).$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i); \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i); \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i); \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i).$

Аналогічно, у множині комплексних чисел можна обчислити корінь n -го степеня з будь-якого дійсного числа. При цьому хоча б один корінь з додатного дійсного числа буде дійсним.

3.2. Многочлени

Означення. Многочленом n -го степеня називається функція вигляду:

$$P_n(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \dots + A_1 z + A_0,$$

де $A_i, i = 0, 1, \dots, n$ – сталі коефіцієнти дійсні або комплексні, а z – змінна. Якщо $A_n \neq 0$, то число n називається *степенем* многочлена.

Означення. Комплексне число z_0 таке, що $P_n(z_0) = 0$ називається *коренем* даного многочлена.

Теорема 1 (Безу). При діленні многочлена $P_n(z)$ на лінійний многочлен $z - z_0$ одержується залишок, що дорівнює $P_n(z_0)$.

Доведення. При діленні $P_n(z)$ на $z - z_0$ часткою буде многочлен $Q_{n-1}(z)$, степінь якого на одиницю менший за степінь $P_n(z)$, залишком буде стале число r :

$$P_n(z) = (z - z_0)Q_{n-1}(z) + r \quad (3.12)$$

Нехай z прямує до z_0 . Тоді границя лівої частини (3.12) дорівнює $P_n(z_0)$, а границя правої частини дорівнює r . Звідси, $r = P_n(z_0)$.

Наслідок 1. Якщо z_0 – корінь многочлена, тобто $P_n(z_0) = 0$, то $P_n(z)$ ділиться без залишку на $z - z_0$ і, отже, представляється у вигляді добутку

$$P_n(z) = (z - z_0)Q_{n-1}(z) \quad (3.13)$$

Означення. Якщо многочлен $P_n(z)$ ділиться на $(z - z_0)^k$ (k – натуральне число) і не ділиться на $(z - z_0)^{k+1}$, то число k називається *кратністю* кореня z_0 .

Таким чином, якщо комплексне число z_0 є коренем кратності k многочлена $P_n(z)$, то

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z), \quad (3.14)$$

де $Q_{n-k}(z)$ – такий многочлен степеня $n - k$, що $Q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

Має місце теорема існування кореня у многочлена.

Теорема 2 (основна теорема алгебри). Довільний многочлен степеня n , $n \geq 1$ з довільними числовими коефіцієнтами має хоча б один корінь, в загальному випадку комплексний.

Приймаємо теорему без доведення. З теореми випливає важливий наслідок.

Наслідок 2. Многочлен n -го степеня $P_n(z)$ зі старшим, не рівним нулю коефіцієнтом ($A_n \neq 0$), має рівно n коренів з врахуванням кратності, інакше кажучи $P_n(z)$ представляється у вигляді добутку

$$P_n(z) = A_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m}, \quad (3.15)$$

де $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, $z_1, \dots, z_m$ – різні корені $P_n(z)$ кратностей відповідно $k_1, \dots, k_m$.

Доведення. За теоремою многочлен $P_n(z)$ має принаймні один корінь. Позначимо його через z_1 , а його кратність – через k_1 . Тоді

$$P_n(z) = (z - z_1)^{k_1} Q_{n-k_1}(z), \quad Q_{n-k_1}(z_1) \neq 0.$$

Якщо $n - k_1 = 0$, то $n = k_1$ та $Q_{n-k_1}(z) = A_n$, і теорема доведена. В цьому випадку $P_n(z) = A_n(z - z_0)^n$.

Якщо ж $k_1 < n$, то $Q_{n-k_1}(z)$ є многочлен степеня $n - k_1$. До нього можна застосувати основну теорему алгебри, за якою він має комплексний корінь. Позначимо його через z_2 , а його кратність – через k_2 . В результаті одержимо

$$P_n(z) = (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} Q_{n-k_1-k_2}(z), \quad Q_{n-k_1-k_2}(z_j) \neq 0, \quad j = 1, 2.$$

Якщо $n - k_1 - k_2 = 0$, то $Q_{n-k_1-k_2}(z) = A_n$. Якщо ні, то процес можна продовжити. Проте цей процес після скінченного числа (не більше n) етапів закінчиться, і ми одержимо формулу (3.15). Якщо в ліву частину рівності (3.15) підставити замість z число, відмінне від $z_1, \dots, z_m$, то вона не перетвориться в нуль. Це показує, що інших коренів, крім знайдених, многочлен $P_n(z)$ не має і зображення (3.15) єдине. Наслідок доведено.

Для многочлена $P_n(z)$ позначимо через $\bar{P}_n(z)$ многочлен, коефіцієнти якого є комплексними числами, спряженими до коефіцієнтів многочлена $P_n(z)$

$$\bar{P}_n(z) = \bar{A}_n z^n + \bar{A}_{n-1} z^{n-1} + \dots + \bar{A}_1 z + \bar{A}_0.$$

Многочлен $\bar{P}_n(z)$ називається многочленом, *спряженим* до многочлена $P_n(z)$. Із властивостей спряжених комплексних чисел маємо

$$\bar{\bar{P}_n(z)} = P_n(\bar{z}).$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} \bar{\bar{P}_n(z)} &= \overline{\bar{A}_n z^n + \bar{A}_{n-1} z^{n-1} + \dots + \bar{A}_1 z + \bar{A}_0} = \\ &= \bar{\bar{A}_n} \bar{z}^n + \bar{\bar{A}_{n-1}} \bar{z}^{n-1} + \dots + \bar{\bar{A}_1} \bar{z} + \bar{\bar{A}_0} = \bar{P}_n(\bar{z}). \end{aligned}$$

Очевидно також, що $\bar{\bar{P}}(z) = P(z)$.

Покажемо, що коли число z_0 є коренем многочлена $P_n(z)$ кратності k , то спряжене до нього число $\bar{z}_0$ є коренем спряженого многочлена $\bar{P}_n(z)$ і причому тієї ж кратності.

Дійсно, переходячи в формулах $P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z)$, $Q_{n-k}(z_0) \neq 0$, до спряжених виразів, одержимо

$$\bar{P}_n(\bar{z}) = (\bar{z} - \bar{z}_0)^k \bar{Q}_{n-k}(\bar{z}), \quad Q_{n-k}(\bar{z}_0) \neq 0.$$

Поклавши для наочності $\xi = \bar{z}$ ($\bar{z}$, як і z – довільні комплексні числа) перепишемо одержані формули у вигляді

$$\bar{P}_n(\xi) = (\xi - \bar{z}_0)^k \bar{Q}_{n-k}(\xi), \quad Q_{n-k}(\bar{z}_0) \neq 0.$$

Це і означає, що число $\bar{z}_0$ є коренем кратності k для многочлена $\bar{P}_n(z)$.

3.3. Многочлен з дійсними коефіцієнтами

Нехай тепер всі коефіцієнти $P_n(z)$ є дійсними [10] числами. В цьому випадку спряжений многочлен $\bar{P}_n(z)$, очевидно, співпадає з самим многочленом $P_n(z)$. Тому з доведеного випливає, що коли комплексне число z_0 є коренем кратності k многочлена $P_n(z)$ з дійсними коефіцієнтами, то і спряжене до нього число $\bar{z}_0$ також є коренем кратності k цього многочлена.

Відзначимо, що добуток $(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$ завжди є многочленом з дійсними коефіцієнтами. Дійсно, нехай $z_0 = a + ib$, де a і b дійсні, тоді $\bar{z}_0 = a - ib$, і тому

$$\begin{aligned} (z - z_0)(z - \bar{z}_0) &= (z - a - ib)(z - a + ib) = \\ &= (z - a)^2 + b^2 = z^2 - 2az + a^2 + b^2 = z^2 + pz + q, \end{aligned}$$

де $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$; очевидно, що p і q дійсні. Відмітимо, що $\frac{p^2}{4} - q^2 = -b^2$,

тому при $b \neq 0$, $\frac{p^2}{4} - q^2 < 0$.

Отже, для будь-якого многочлена степеня n з дійсними коефіцієнтами має місце розклад на множники вигляду:

$$P_n(z) = A_n(z - a_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (z - a_r)^{\alpha_r} \cdot (z^2 + p_1z + q_1)^{\beta_1} \cdot \dots \cdot (z^2 + p_sz + q_s)^{\beta_s},$$

де

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i + 2 \sum_{i=1}^S \beta_i = n, \quad \frac{p_j^2}{4} - q_j < 0, \quad j = 1, 2, \dots, S$$

і всі коефіцієнти $A_n, a_1, \dots, a_r, p_1, q_1, \dots, p_s, q_s$ – дійсні.

3.4. Раціональні дроби. Розклад правильних раціональних дробів на елементарні

Важливий клас функцій, інтеграли від яких завжди виражаються через елементарні функції утворюють раціональні функції [2] (раціональні дроби), тобто функції, які можна зобразити у вигляді дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x), Q(x)$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами.

Як відомо із попередньої теми, раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ називається *правильним*, якщо степінь многочлена $P(x)$ менший степеня многочлена $Q(x)$.

Якщо раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ не є правильним, то виконавши ділення чисельника на знаменник, дріб можна зобразити у вигляді

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P^*(x)}{Q^*(x)},$$

де $R(x), P^*(x), Q^*(x)$ – деякі многочлени, а $\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ – правильний раціональний дріб.

Приклад.
$$\frac{x^5 + x^3 - x^2 + 1}{x^3 - 2x + 1} = x^2 + 3 - \frac{2x^2 - 6x + 2}{x^3 - 2x + 1}.$$

Лема 1. Нехай $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб. Якщо число a є дійсним коренем кратності $\alpha \geq 0$ многочлена $Q(x)$, тобто $Q(x) = (x - a)^\alpha Q^*(x)$ і

$Q^*(a) \neq 0$, то існують дійсне число A і многочлен $P^*(x)$ з дійсними коефіцієнтами такі, що

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{P^*(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q^*(x)}, \quad (3.16)$$

де дріб $\frac{P^*(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q^*(x)}$ також є правильним.

Доведення.

Напишемо тотожність

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{P(x) - AQ^*(x)}{(x-a)^\alpha Q^*(x)}, \quad (3.17)$$

яка справджується при будь-якому A і визначимо сталу A так, щоб многочлен $P(x) - AQ^*(x)$ ділився на $x-a$, тобто визначимо A з умови

$$P(a) - AQ^*(a) = 0.$$

Оскільки, за умовою, $Q^*(a) \neq 0$, то звідси $A = \frac{P(a)}{Q^*(a)}$. При такому A

матимемо

$$P(x) - AQ^*(x) = (x-a)P^*(x),$$

і другий доданок в правій частині формули (3.17) можна скоротити на $x-a$, в результаті одержимо дріб вигляду

$$\frac{P^*(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q^*(x)}.$$

Оскільки дріб отримали скороченням правильного раціонального дробу на множник $x-a$, то і сам дріб також є правильним раціональним дробом.

Лема 2. Нехай $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб. Якщо комплексне число $z_1 = a + ib$ (a, b – дійсні) є коренем кратності $\beta \geq 1$ многочлена $Q(x)$, тобто

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^\beta Q^*(x),$$

де $Q^*(z_1) \neq 0$, а $x^2 + px + q = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)$, то існують дійсні числа M, N та многочлен $P^*(x)$ з дійсними коефіцієнтами такий, що

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \frac{P^*(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta-1} Q^*(x)},$$

де дріб $\frac{P^*(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta-1} Q^*(x)}$ також є правильним.

Доведення. Напишемо тотожність

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\beta} + \frac{P(x) - (Mx + N)Q^*(x)}{(x^2 + px + q)^\beta Q^*(x)}, \quad (3.18)$$

справедливу за будь-яких M і N . Виберемо M і N так, щоб многочлен $P(x) - (Mx + N)Q^*(x)$ ділився на $x^2 + px + q = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)$. Для цього достатньо вибрати M і N так, щоб z_1 було коренем многочлена $P(x) - (Mx + N)Q^*(x)$. Оскільки число $\bar{z}_1$ спряжене з z_1 , воно також буде коренем вказаного многочлена, тоді многочлен буде ділитися на $x^2 + px + q$.

Отже, нехай

$$P(z_1) - (Mz_1 + N)Q^*(z_1) = 0.$$

Якщо це має місце, то $Mz_1 + N = \frac{P(z_1)}{Q^*(z_1)}$, де, за умовою, $Q^*(z_1) \neq 0$.

Нехай $z_1 = a + ib$, $\frac{P(z_1)}{Q^*(z_1)} = A + iB$, тоді

$$A + iB = Mz_1 + N = M(a + ib) + N.$$

Звідси, прирівнюючи дійсні та уявні частини, одержимо рівняння

$$Ma + N = A \text{ і } Mb = B \text{ і, отже, } M = \frac{B}{b} \text{ і } N = A - \frac{a}{b}B.$$

При цих значеннях M і N многочлен $P(x) - (Mx + N)Q^*(x)$ буде ділитися на многочлен $x^2 + px + q$.

Скорочуючи другий доданок правої частини рівності (3.18) на $x^2 + px + q$, одержимо дріб вигляду

$$\frac{P^*(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta-1} Q^*(x)},$$

причому, очевидно, що степінь $P^*(x)$ менший за степінь знаменника.

Теорема. Нехай $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб, $P(x)$, $Q(x)$ –

многочлени з дійсними коефіцієнтами. Якщо

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_r)^{\alpha_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}, \quad (3.19)$$

де a_i – попарно різні дійсні корені многочлена $Q(x)$ кратності $\alpha_i, i=1,2,\dots,r$,

$x^2 + p_jx + q_j = (x - z_j)(x - \bar{z}_j)$, де z_j і $\bar{z}_j$ – попарно різні при різних j комплексні корені многочлена $Q(x)$ кратності $\beta_j, j=1,2,\dots,s$, то існують такі дійсні

числа $A_i^{(\alpha)}, i=1,2,\dots,r, \alpha=1,2,\dots,\alpha_i; M_j^{(\beta)}$ і $N_j^{(\beta)}, j=1,2,\dots,s, \beta=1,2,\dots,\beta_j$:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1^{(1)}}{(x - a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x - a_1)^{\alpha_1-1}} + \dots + \frac{A_1^{(\alpha_1)}}{x - a_1} + \dots + \\ & + \frac{A_r^{(1)}}{(x - a_r)^{\alpha_r}} + \frac{A_r^{(2)}}{(x - a_r)^{\alpha_r-1}} + \dots + \frac{A_r^{(\alpha_r)}}{x - a_r} + \\ & + \frac{M_1^{(1)}x + N_1^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1}} + \frac{M_1^{(2)}x + N_1^{(2)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1-1}} + \dots + \frac{M_1^{(\beta_1)}x + N_1^{(\beta_1)}}{x^2 + p_1x + q_1} + \\ & + \dots + \frac{M_s^{(1)}x + N_s^{(1)}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}} + \frac{M_s^{(2)}x + N_s^{(2)}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s-1}} + \dots + \frac{M_s^{(\beta_s)}x + N_s^{(\beta_s)}}{x^2 + p_sx + q_s} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Доведення. Із розкладу (3.18) маємо

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} Q^*(x).$$

Тут

$$Q^*(x) = (x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_r)^{\alpha_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}$$

і, отже, $Q^*(a_1) \neq 0$, тому, за лемою 1:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x - a_1)^{\alpha_1}} + \frac{P^*(x)}{(x - a_1)^{\alpha_1-1} Q^*(x)}.$$

Застосовуючи у випадку $\alpha_1 > 1$ подібним чином ту ж саму лему до

раціонального дробу $\frac{P^*(x)}{(x - a_1)^{\alpha_1-1} Q^*(x)}$, одержимо

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \frac{P^{**}(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-2} Q^{**}(x)}.$$

Продовжуючи цей процес далі, поки показник степеня у співмножника $x_1 - a$ не дорівнюватиме нулю, а потім, поступаючи аналогічно відносно множників $x - a_i$, $i = 2, \dots, r$, матимемо

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1^{(1)}}{(x-a)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \dots + \frac{A_1^{(\alpha_1)}}{x-a_1} + \dots + \\ & + \frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{\alpha_r}} + \frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}} + \dots + \frac{A_r^{(\alpha_r)}}{x-a_r} + \frac{R(x)}{S(x)}, \end{aligned}$$

де $\frac{R(x)}{S(x)}$ – знову правильний раціональний дріб, $R(x), S(x)$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами і многочлен $S(x)$ не має дійсних коренів.

Застосовуючи послідовно лему 2 до дробу $\frac{R(x)}{S(x)}$ і до виразів, які при цьому одержуються, в результаті одержимо формулу (3.20).

Означення. Раціональні дроби вигляду

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha} \text{ і } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta},$$

де a, p, q, A, M, N – дійсні числа і $\frac{p^2}{4} - q < 0$, також $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, називаються *елементарними раціональними дробами*.

Таким чином, доведена теорема стверджує, що будь-який правильний раціональний дріб можна розкласти на суму елементарних раціональних дробів.

При виконанні розкладу многочлена вигляду (3.19) для конкретного заданого дробу є зручний так званий *метод невизначених коефіцієнтів*. Він полягає в наступному. Для даного дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ записується розклад (3.20), в

якому коефіцієнти $A_i^{(\alpha)}$, $M_j^{(\beta)}$, $N_j^{(\beta)}$ вважаються невідомими ($i = 1, 2, \dots, r$, $\alpha = 1, 2, \dots, \alpha_i$, $j = 1, 2, \dots, s$, $\beta = 1, 2, \dots, \beta_j$). Після цього обидві частини рівності зводяться до спільного знаменника і у многочленів, які отримані в чисельнику,

прирівнюються коефіцієнти. При цьому, якщо степінь многочлена $Q(x)$ дорівнює n , то в чисельнику правої частини (3.20) після зведення до спільного знаменника одержується многочлен степеня $n-1$, тобто многочлен з n коефіцієнтами, а число невідомих $A_i^{(\alpha)}$, $M_j^{(\beta)}$, $N_j^{(\beta)}$ також дорівнює n :

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i + 2 \sum_{j=1}^s \beta_j = n.$$

Таким чином, ми отримуємо систему n рівнянь з n невідомими. Існування у неї розв'язку впливає з доведеної теореми.

Зауважимо, що після зведення (3.20) до спільного знаменника і його відкидання, у випадку, коли $Q(x)$ має дійсні корені, доцільно підставити в обидві частини отриманої рівності послідовно ці корені; в результаті одержимо деякі співвідношення між шуканими коефіцієнтами, які є корисними для їх подальшого визначення.

Приклади розкладу на раціональні дроби

Приклад 1. Розкладемо дріб $\frac{x}{(x^2-1)(x-2)}$ на елементарні дроби:

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

Зведемо до спільного знаменника і відкинемо його, одержимо:

$$x = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1). \quad (3.21)$$

Маємо випадок, коли всі корені знаменника дійсні. Підставивши в (3.21) послідовно $x=1$, $x=-1$ і $x=2$, знайдемо

$$1 = -2A, \quad -1 = 6B, \quad 2 = 3C, \quad \text{звідси } A = -\frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{6}, \quad C = \frac{2}{3}.$$

Отже, шуканий розклад

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)}.$$

Приклад 2. Знайдемо розклад на елементарні дроби для $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$.

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1}.$$

Зведемо до спільного знаменника і відкинемо його. Маємо

$$x^2 - 1 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x + (Dx + E)(x^2 + 1)x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x :

$$-1 = A, \quad 0 = C + E, \quad 1 = 2A + B + D, \quad 0 = E, \quad 0 = A + D, \quad \text{звідси знайдемо}$$

$$A = -1, \quad B = 2, \quad C = 0, \quad D = 1, \quad E = 0,$$

і, тому шуканий розклад має вигляд

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Зауважимо, що в окремих випадках розклад на елементарні дробки можна одержати швидше і простіше, не використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, наприклад:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2(1+x^2)^2} &= \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Завдання для самоконтролю

1. Означити комплексне число та записати його задання в алгебраїчній та тригонометричній формі.

2. Виконати дії: 1) $(1+4i) \cdot (2-3i)$; 2) $\frac{5-2i}{3+4i}$; 3) i^{13}, i^{2016} .

3. Обчислити:

1) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}$; 2) $\frac{(1+i\sqrt{3})^{10}}{(1+i)^7}$; 3) $(-1+i\sqrt{3})^{20}$; 4) $\frac{1+i}{(1+i\sqrt{3})^{10}}$.

4. Записати формулу обчислення кореня n -го степеня із комплексного числа, знайти всі значення коренів та побудувати їх на комплексній площині:

1) $\sqrt[4]{-16}$; 2) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$; 3) $\sqrt{3+4i}$.

5. Розв'язати рівняння:

1) $x^2 + 4x + 5 = 0$; 2) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$.

6. Сформулювати та пояснити теорему Безу, основну теорему алгебри та їх наслідки.

7. Записати в загальному випадку розклад многочлена з дійсними коефіцієнтами на множники.

8. Записати розклад правильного раціонального дробу на елементарні у випадках різних коренів знаменника.

9. Розкласти на елементарні дроби: 1) $\frac{x+1}{(x^2-4)(x+3)}$; 2) $\frac{x}{(x-2)^2(x^2+1)}$.

Відповіді. 2. 1) $14+5i$; 2) $\frac{7}{25} - \frac{26}{25}i$; 3) i ; 4) 1.

3. 1) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; 2) $-32((\sqrt{3}-1) - (\sqrt{3}+1)i)$; 3) $-2^{19}(1+i\sqrt{3})$; 4) $-\frac{1}{2^{11}}(\sqrt{3}+1+i(1-\sqrt{3}))$.

4. 1) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}; -\sqrt{2}+i\sqrt{2}; -\sqrt{2}-i\sqrt{2}; \sqrt{2}-i\sqrt{2}$; 2) $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{18}-i\sin\frac{\pi}{18}\right)$;

$\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{18}+i\sin\frac{11\pi}{18}\right); \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{18}+i\sin\frac{23\pi}{18}\right)$; 3) $2+i; -2-i$.

5. 1) $-2 \pm i$; 2) $\pm i; \pm 2i$.

9. 1) $\frac{3}{20(x-2)} + \frac{1}{6(x+2)} - \frac{2}{5(x+1)}$; 2) $-\frac{3}{25(x-2)} + \frac{2}{5(x-2)^2} + \frac{3x-4}{25(x^2+1)}$.

Тема 4. Інтегрування дробово-раціональних функцій

4.1. Інтегрування елементарних раціональних дробів

За теоремою 1 (тема 3) задача інтегрування раціональних дробів зводиться до обчислення інтегралів типу:

I. $\int \frac{A}{x-a} dx \quad (A, a \in \mathbb{R})$.

II. $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx \quad (A, a \in \mathbb{R}, n = 2, 3, \dots)$.

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx, \left(M, N, p, q \in \mathbb{R}, \frac{p^2}{4} - q < 0 \right)$.

$$\text{IV. } \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx, \left(M, N, p, q \in \mathbb{R}, \frac{p^2}{4} - q < 0, n = 2, 3, \dots \right).$$

Інтегрування елементарних дробів типу I, II, III не викликає труднощів (розглянуто в темі 2).

Інтегрування елементарних дробів IV типу вимагає більш складних обчислень, тому повторимо [10] його:

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx &= \frac{M}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} dx + \\ &+ \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}. \end{aligned}$$

Перший інтеграл береться підстановкою $x^2 + px + q = t$, $(2x + p)dx = dt$, а для другого інтеграла – позначимо його I_n отримують *рекурентну формулу*:

$$I_n = \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{t}{a^2(2n-2)(t^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2(2n-2)} I_{n-1},$$

звідки при $n > 1$

$$I_n = \frac{t}{a^2(2n-2)(t^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{n-1}}. \quad (4.1)$$

Розглянемо на прикладі інтегрування такого дробу:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx &= \int \frac{0.5(2x+2) + (-1-1)}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx - 2 \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 3)^2} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + 2x + 3)} - 2 \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 3)^2}. \end{aligned}$$

До останнього інтеграла застосовуємо підстановку $x+1=t$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 3)^2} &= \int \frac{dx}{((x+1)^2 + 2)^2} = \int \frac{dt}{(t^2 + 2)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(t^2 + 2) - t^2}{(t^2 + 2)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 2} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{(t^2 + 2)^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + 2)^2}. \end{aligned}$$

Розглянемо останній інтеграл, який обчислимо за формулою інтегрування частинами:

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2 + 2)^2} = \int \frac{t \cdot t dt}{(t^2 + 2)^2} = \left| \begin{array}{l} u = t, du = dt \\ dv = \frac{t dt}{(t^2 + 2)^2}, v = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + 2)}{(t^2 + 2)^2} = -\frac{1}{(t^2 + 2)} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{t}{t^2 + 2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 2} = -\frac{t}{2(t^2 + 2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

(довільної сталої поки що не пишемо, ми врахуємо її тільки в кінцевому результаті). Отже,

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 3)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \left(-\frac{x+1}{2(x^2 + 2x + 3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right),$$

звідки,
$$\int \frac{x-1}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx = -\frac{x+2}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

4.2. Інтегрування дробово-раціональних функцій в залежності від коренів знаменника

Означення. Цілою раціональною функцією називається функція, що представляє собою многочлен: $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$.

Означення. Дробово-раціональною функцією або раціональним дробом називається відношення цілих раціональних функцій:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_{m-1}x + b_m}.$$

Як відомо, якщо степінь чисельника менший за степінь знаменника, дріб називається правильним, в протилежному випадку – неправильним. З неправильного дроби можна за допомогою ділення з остачею виключити цілу частину і записати даний дріб як суму цілої раціональної функції і правильного дроби.

Можна довести, що будь-який правильний раціональний дріб можна розкласти на суму елементарних дробів. Якщо дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильний та знаменник [3] розкладається на множники

$$Q_m(x) = b_0 (x - \gamma_1)^{r_1} (x - \gamma_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot (x - \gamma_s)^{r_s} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{l_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_vx + q_v)^{l_v},$$

то його можна розкласти на елементарні дробі за такою схемою ($b_0 = 1$):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x - \gamma_1} + \frac{A_2}{(x - \gamma_1)^2} + \dots + \frac{A_{r_1}}{(x - \gamma_1)^{r_1}} + \frac{B_1}{x - \gamma_2} + \dots + \frac{B_{r_2}}{(x - \gamma_2)^{r_2}} + \dots + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{C_{l_1}x + D_{l_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \dots + \frac{M_{l_v}x + N_{l_v}}{(x^2 + p_vx + q_v)^{l_v}}.$$

Числа $A_1, A_2, \dots, A_{r_1}, B_1, B_2, \dots, B_{r_2}, C_1, D_1, C_2, D_2, \dots, C_{l_1}, D_{l_1}, \dots, M_{l_v}, N_{l_v}$ – дійсні числа, які визначають методом невизначених коефіцієнтів.

Загальний метод інтегрування дробово-раціональних функцій:

1. Виключити цілу частину з даної функції; вона інтегрується безпосередньо.
2. Знаменник правильного дробу розкласти на множники вигляду $x - a$ та $x^2 + px + q$, при цьому множники другого типу повинні бути нерозкладними на множники першого степеня.
3. Скоротити правильний дріб, якщо це можливо.
4. Розкласти правильний дріб на суму елементарних дробів та виконати інтегрування кожного доданка окремо.

Вигляд найпростіших дробів визначається коренями знаменника $Q_m(x)$.

Можливі наступні випадки:

1. Корені знаменника тільки дійсні та різні числа, тобто

$$Q_m(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_m). \quad (4.2)$$

В цьому випадку правильний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів I-го типу:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots + \frac{A_m}{x-a_m}, \quad (4.3)$$

де $A_1, A_2, \dots, A_m$ – невизначені коефіцієнти, які знаходяться із тотожності, що написана вище.

2. *Корені знаменника тільки дійсні числа, причому деякі з них кратні, тобто*

$$Q_m(x) = (x-a_1) \cdot (x-a_2) \cdot \dots \cdot (x-a_l)(x-b)^i, \quad (4.4)$$

де $l+i=m$.

Тоді правильний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів

I-го та II-го типів:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \dots + \frac{A_l}{x-a_l} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_{i-1}}{(x-b)^{i-1}} + \frac{B_i}{(x-b)^i}, \quad (4.5)$$

де невизначені коефіцієнти $A_1, \dots, A_l, B_1, B_2, \dots, B_{i-1}, B_i$ знаходяться з тотожності, що написана вище.

3. *Корені знаменника дійсні числа, причому деякі з них кратні, також знаменник містить квадратний тричлен, який не розкладається на множники (комплексні корені), тобто*

$$Q_m(x) = (x-a)(x-b)^i(x^2+px+q). \quad (4.6)$$

В цьому випадку дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів

I-го, II-го та III-го типів

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_{i-1}}{(x-b)^{i-1}} + \frac{B_i}{(x-b)^i} + \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad (4.7)$$

де $A, B_1, B_2, \dots, B_{i-1}, B_i, M, N$ – невизначені коефіцієнти, які необхідно знайти.

4. Корені знаменника дійсні числа, причому деякі з них кратні, крім того знаменник містить квадратні тричлени, які не розкладаються на множники (комплексні корені), причому деякі з них теж є кратні, тобто

$$Q_m(x) = (x-a)(x-b)^i(x^2+px+q)(x^2+mx+l)^j, \quad (4.8)$$

де $3+i+2j=m$.

В цьому випадку дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів

всіх типів

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = & \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_{i-1}}{(x-b)^{i-1}} + \frac{B_i}{(x-b)^i} + \frac{Mx+N}{x^2+px+q} + \\ & + \frac{M_1x+N_1}{x^2+mx+l} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+mx+l)^2} + \dots + \frac{M_jx+N_j}{(x^2+mx+l)^j}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

де $A, B_1, B_2, \dots, B_{i-1}, B_i, M, N, M_1, \dots, M_j, N_1, \dots, N_j$ – невизначені коефіцієнти, які необхідно знайти.

Розв'язання типових прикладів

Приклад 1. Обчислити $\int \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x^2 - 8x} dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x^2 - 8x}$ – це правильний

раціональний дріб, знаменник якого $x^3 + 2x^2 - 8x$ розкладається на множники $x(x-2)(x+4)$, тому даний дріб розкладається на суму найпростіших дробів типу I:

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x^2 - 8x} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x(x-2)(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+4}.$$

Невідомі коефіцієнти A, B, C будемо знаходити методом невизначених коефіцієнтів. Для цього праву частину одержаної вище рівності необхідно звести до спільного знаменника. Отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x^2 - 8x} &= \frac{A^{(x-2)(x+4)}}{x} + \frac{B^{x(x+4)}}{x-2} + \frac{C^{x(x-2)}}{x+4} = \\ &= \frac{A(x-2)(x+4) + Bx(x+4) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+4)} = \\ &= \frac{Ax^2 + 2Ax - 8A + Bx^2 + 4Bx + Cx^2 - 2Cx}{x(x-2)(x+4)}.\end{aligned}$$

Знаменники в обох частинах рівні, тому і чисельники повинні бути рівні, тобто $x^2 - 2x + 2 = Ax^2 + 2Ax - 8A + Bx^2 + 4Bx + Cx^2 - 2Cx$, звідки

$$x^2 - 2x + 2 = (A + B + C)x^2 + (2A + 4B - 2C)x - 8A.$$

Остання рівність можлива лише тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах рівності рівні, тобто

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A + B + C = 1, \\ 2A + 4B - 2C = -2, \\ -8A = 2. \end{array}$$

Отримали систему рівнянь, з якої знаходимо невизначені коефіцієнти

$$\begin{cases} B + C = \frac{5}{4}, \\ 2B - C = -\frac{3}{4}, \end{cases}$$

$$A = -\frac{1}{4}, B = \frac{1}{6}, C = \frac{13}{12}.$$

Підставляємо знайдені значення A, B, C в схему розкладу і отримуємо розклад підінтегральної функції:

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x^2 - 8x} = -\frac{1}{4} \frac{1}{x} + \frac{1}{6} \frac{1}{x-2} + \frac{13}{12} \frac{1}{x+4}.$$

Інтегруючи останню рівність маємо:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x^2 - 8x} dx &= \int -\frac{1}{4} \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{6} \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{13}{12} \frac{1}{x+4} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x} + \\ &+ \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{13}{12} \int \frac{dx}{x+4} = -\frac{1}{4} \ln|x| + \frac{1}{6} \ln|x-2| + \frac{13}{12} \ln|x+4| + C.\end{aligned}$$

$$\text{Відповідь. } -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{6}\ln|x-2| + \frac{13}{12}\ln|x+4| + C.$$

Зауваження. В темі 3 невідомі коефіцієнти у випадку дійсних різних коренів знаменника обчислено підстановкою цих коренів в рівність чисельників. Цей метод також можна було використати для простіших обчислень коефіцієнтів в даному прикладі.

$$\text{Приклад 2. Обчислити } \int \frac{2x^2 + 5x - 8}{(x-1)^3(x+2)^2} dx.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція – це правильний нескоротний раціональний дріб, знаменник якого містить лише дійсні кратні корені, тому цей дріб розкладається на суму найпростіших дробів I-го та II-го типу.

$$\frac{2x^2 + 5x - 8}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)} + \frac{D}{(x+2)^2} + \frac{E}{x+2}.$$

Визначимо невідомі коефіцієнти A, B, C, D , та E методом невизначених коефіцієнтів та методом задання частинних значень, які доцільно комбінувати. Праву частину рівності зведемо до спільного знаменника, отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{2x^2 + 5x - 8}{(x-1)^3(x+2)^2} = \\ &= \frac{A(x+2)^2 + B(x+2)^2(x-1) + C(x+2)^2(x-1)^2 + D(x-1)^3 + E(x-1)^3(x+2)}{(x-1)^3(x+2)^2}. \end{aligned}$$

Знаменники в обох частинах рівні, тому і чисельники повинні бути рівні:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x - 8 = & A(x+2)^2 + B(x+2)^2(x-1) + C(x+2)^2(x-1)^2 + \\ & + D(x-1)^3 + E(x-1)^3(x+2). \end{aligned}$$

Нагадаємо, що отриманий вираз є тотожністю, а через це рівність повинна зберігатися для будь-якого значення x . Використовуємо комбінований метод знаходження невизначених коефіцієнтів. Для $x = -2$ отримуємо:

$$2(-2)^2 + 5(-2) - 8 = D(-2-1)^3 \Rightarrow -10 = -27D \Rightarrow D = \frac{10}{27}.$$

$$\text{Для } x = 1: \quad 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 8 = A(1+2)^2 \Rightarrow -1 = 9A \Rightarrow A = -\frac{1}{9}.$$

Залишилось визначити коефіцієнти B , C , E . Тепер будемо порівнювати коефіцієнти при однакових степенях x в лівій та правій частинах рівності. Коефіцієнт при x^4 в лівій частині дорівнює нулю (x^4 в лівій частині відсутній), а в правій ($C + E$). Через це $C + E = 0$.

Вільний член в лівій частині дорівнює (-8) , а в правій $(4A - 4B + 4C - D - 2E)$, на основі чого отримуємо друге рівняння:

$$4A - 4B + 4C - D - 2E = -8, \text{ в якому } A \text{ та } D \text{ відомі } \left(A = -\frac{1}{9}; D = \frac{10}{27} \right), \text{ маємо}$$

$$2B - 2C + E = \frac{97}{27}.$$

Ми порівняли саме вільні члени, тому що це можливо зробити, не виконуючи множення та піднесення до степеня у правій частині рівності.

Для того, щоб отримати третє рівняння для визначення B , C і E , знову повернемося до способу задання частинних значень.

Якщо $x = 2$, отримуємо: $2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 8 = 16A + 16B + 16C + D + 4E$. Знаючи, що $A = -\frac{1}{9}; D = \frac{10}{27}$, це рівняння матиме вигляд $4B + 4C + E = \frac{77}{27}$.

Таким чином, для визначення B , C і E отримали систему рівнянь:

$$\begin{cases} C + E = 0, \\ 2B - 2C + E = \frac{97}{27}, \\ 4B + 4C + E = \frac{77}{27}. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо: $B = \frac{29}{27}, C = -\frac{13}{27}, E = \frac{13}{27}$.

Отже, маємо

$$A = -\frac{1}{9}, B = \frac{29}{27}, C = -\frac{13}{27}, D = \frac{10}{27}, E = \frac{13}{27}.$$

Тепер розклад підінтегральної функції має вигляд:

$$\frac{2x^2 + 5x - 8}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{-\frac{1}{9}}{(x-1)^3} + \frac{\frac{29}{27}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{13}{27}}{(x-1)} + \frac{\frac{10}{27}}{(x+2)^2} + \frac{\frac{13}{27}}{(x+2)}.$$

Інтегруючи цю рівність, отримуємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 5x - 8}{(x-1)^3(x+2)^2} dx &= -\frac{1}{9} \int \frac{dx}{(x-1)^3} + \frac{29}{27} \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{13}{27} \int \frac{dx}{x-1} + \\ &+ \frac{10}{27} \int \frac{dx}{(x+2)^2} + \frac{13}{27} \int \frac{dx}{x+2} = -\frac{1}{9} \int (x-1)^{-3} dx + \frac{29}{27} \int (x-1)^{-2} dx - \frac{13}{27} \ln|x-1| + \\ &+ \frac{10}{27} \int (x+2)^{-2} dx + \frac{13}{27} \ln|x+2| = \\ &= -\frac{1}{9} \frac{(x-1)^{-2}}{-2} + \frac{29}{27} \frac{(x-1)^{-1}}{-1} - \frac{13}{27} \ln|x-1| + \frac{10}{27} \frac{(x+2)^{-1}}{-1} + \frac{13}{27} \ln|x+2| + C = \\ &= \frac{1}{18(x-1)^2} - \frac{29}{27} \frac{1}{(x-1)} - \frac{13}{27} \ln|x-1| - \frac{10}{27(x+2)} + \frac{13}{27} \ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{1}{18(x-1)^2} - \frac{29}{27} \frac{1}{(x-1)} - \frac{13}{27} \ln|x-1| - \frac{10}{27(x+2)} + \frac{13}{27} \ln|x+2| + C.$

Приклад 3. Обчислити $\int \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^4 + x} dx.$

Розв'язання. Підінтегральна функція – це правильний нескоротний дріб, знаменник якого: $x^4 + x = x(x^3 + 1) = x(x+1)(x^2 - x + 1)$. Маємо, що знаменник містить квадратний тричлен, який не розкладається на множники, та два дійсних корені $x=0$ та $x=-1$. Тоді даний дріб розкладається на суму найпростіших дробів I-го та III-го типу

$$\frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^4 + x} = \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx + N}{x^2 - x + 1}.$$

Невідомі коефіцієнти A , B , M та N будемо шукати методом невизначених коефіцієнтів. Для цього праву частину рівності потрібно звести до спільного знаменника, отримаємо:

$$\frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^4 + x} = \frac{A(x^3 + 1) + B(x^2 - x + 1) + (Mx + N)(x^2 + x)}{x(x+1)(x^2 - x + 1)}.$$

Знаменники в обох частинах рівні, тому і чисельники повинні бути рівні, тобто:

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 - 2x + 1 &= A(x^3 + 1) + Bx(x^2 - x + 1) + (Mx + N)(x^2 + x) = \\ &= (A + B + M)x^3 + (-B + M + N)x^2 + (B + N)x + A. \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , отримуємо систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів A, B, M, N

$$\left. \begin{array}{l} x^3 \\ x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A + B + M = 1, \\ -B + M + N = 4, \\ B + N = -2, \\ A = 1. \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} B + M = 0, \\ -B + M + N = 4, \\ B + N = -2, \\ A = 1, \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} M = 2, \\ N = 0, \\ B = -2, \\ A = 1. \end{array}$$

Отже, розклад підінтегральної функції приймає вигляд

$$\frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^4 + x} = \frac{1}{x} + \frac{-2}{x+1} + \frac{2x+0}{x^2-x+1}.$$

Інтегруючи останню рівність, отримаємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^4 + x} dx &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-2}{x+1} dx + \int \frac{2x dx}{x^2 - x + 1} = \\ &= \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{2x-1+1}{x^2-x+1} dx = \ln|x| - 2\ln|x+1| + \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \int \frac{dx}{x^2-x+1} = \\ &= \ln|x| - 2\ln|x+1| + \ln|x^2-x+1| + \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\ &= \ln|x| - 2\ln|x+1| + \ln|x^2-x+1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C = \\ &= \ln \left| \frac{x(x^2-x+1)}{(x+1)^2} \right| + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь. } \ln \left| \frac{x(x^2-x+1)}{(x+1)^2} \right| + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати загальний метод інтегрування дробово-раціональних функцій.
2. Записати розклад дробово-раціональних функцій (загальний вигляд) на раціональні дроби у випадку дійсних та різних коренів знаменника.
3. Записати в загальному вигляді розклад дробово-раціональної функції на раціональні дроби для кратного дійсного кореня та навести приклад.

4. Якого типу дробу будуть в загальному вигляді розкладу дробово-раціональної функції на раціональні дробу для дійсних коренів (можливо, деякі кратні) та для комплексних коренів, можливо, і кратних?

5. Знайти інтеграли:

$$1) \int \frac{x dx}{(x-1)(2x-1)}; 2) \int \frac{dx}{6x^3 - 7x^2 - 3x}; 3) \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx; 4) \int \frac{3x^2 + 8}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx;$$

$$5) \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+5)}.$$

Відповіді. 5. 1) $\ln \left| \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} \right| + C$; 2) $-\frac{1}{3} \ln|x| + \frac{2}{33} \ln|2x-3| + \frac{3}{11} \ln|3x+1| + C$;

$$3) \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} + C; 4) \ln|x^2(x+2)| + \frac{10}{x+2} + C;$$

$$5) \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-1}{\sqrt{x^2+5}} \right| - \frac{1}{6\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Тема 5. Інтегрування ірраціональних функцій

Інтеграл від будь-якої раціональної функції виражається через елементарні функції – через раціональні функції, логарифми та арктангенс. Інтеграл від ірраціональної функції не завжди можна виразити через елементарні функції. Нижче будуть розглянуті випадки, коли за допомогою тієї чи іншої підстановки задача інтегрування ірраціональних чи трансцендентних функцій зводиться до інтегрування дробово-раціональних функцій і, отже, вирішується за допомогою елементарних функцій.

5.1. Інтеграли типу $\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_s} \right] dx$

Означення. Функція вигляду

$$R(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{P(u_1, \dots, u_n)}{Q(u_1, \dots, u_n)} \quad (5.1)$$

де P і Q – многочлени від змінних $u_1, \dots, u_n$, а змінні $u_1, \dots, u_n$ є функціями змінної x : $u_i = \phi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ називається *раціональною функцією* від функцій $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$.

Наприклад, функція $f(x) = \frac{x + \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}{\sqrt{x} - \sqrt{x^2 + 1}}$ є раціональною функцією

від x і радикалів $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2 - 1}$, $\sqrt{x^2 + 1}$: $f(x) = R(x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x^2 - 1}, \sqrt{x^2 + 1})$.

Тут $R(u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{u_1 + u_3^2}{u_2 - u_4}$, $u_1 = x$, $u_2 = \sqrt{x}$, $u_3 = \sqrt[3]{x^2 - 1}$, $u_4 = \sqrt{x^2 + 1}$.

Якщо в формулі (5.1) змінні $u_1, \dots, u_n$ є елементарними тригонометричними функціями, то складна функція, яка отримується, називається *раціональною відносно елементарних тригонометричних функцій*.

Прикладом такої функції є $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^3 x + \cos x} = R(\sin x, \cos x)$.

Перейдемо тепер до інтегралів від функцій вказаних типів і покажемо, що в наступних випадках вони зводяться до інтегралів від раціональних функцій.

Розглянемо інтеграли [10] типу $\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_s} \right] dx$ за умови, що

сталі $r_1, \dots, r_s$ раціональні та $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (a, b, c, d – сталі).

Нехай m – спільний знаменник чисел $r_1, \dots, r_s$: $r_i = \frac{p_i}{m}$, p_i – ціле, $i = 1, 2, \dots, s$.

Покладемо $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$, звідси $x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} = \rho(t)$; $\rho(t)$ є раціональною функцією, тому $\rho'(t)$ також раціональна функція; $dx = \rho'(t)dt$,

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_i} = t^{mr_i} = t^{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Тоді $\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_s} \right] dx = \int R \left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \dots, t^{p_s} \right) \rho'(t) dt = \int R^*(t) dt$,

де $R^*(t) = R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \dots, t^{p_s}\right) \rho'(t)$ є раціональною функцією змінної t .

Таким чином, обчислення інтегралу типу

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx \quad (5.2)$$

зводиться до інтегрування раціональних дробів.

Відзначимо, що до інтегралів типу (5.2) відносяться інтеграли

$$\int R\left[x, (ax+b)^{r_1}, \dots, (ax+b)^{r_s}\right] dx,$$

і, зокрема, також

$$\int R(x, x^{r_1}, \dots, x^{r_s}) dx.$$

Приклад. Обчислити: 1. $\int \frac{1}{(x-1)^2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx$; 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. 1. Позбудемось ірраціональності заміною $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = t$, маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-1)^2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx &= \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1} = t^3, x = \frac{t^3+1}{t^3-1} \\ dx = \frac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2}, x-1 = \frac{2}{t^3-1} \end{array} \right| = \\ &= \int t \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2} \frac{(t^3-1)^2}{4} dt = -\frac{3}{2} \int t^3 dt = -\frac{3}{8} t^4 + C = -\frac{3}{8} \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \right)^4 + C. \end{aligned}$$

2. Підінтегральна функція містить ірраціональні $\sqrt{x}$ та $\sqrt[3]{x}$, тому заміна $\sqrt[6]{x} = t$ зведе її до дробово-раціональної функції t .

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = 6 \int \frac{t^5}{t^2 + t^3} dt = 6 \left[\int (t^2 - t + 1) dt - \int \frac{dt}{t+1} \right] = \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - \ln|1+t| + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C. \end{aligned}$$

Відповідь. 1. $-\frac{3}{8} \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \right)^4 + C$; 2. $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C$.

5.2. Інтеграли типу $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$. Підстановки Ейлера

5.2.1. Нехай $a > 0$.

Зробимо заміну x на t наступним чином:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$$

(знаки можна брати в довільній комбінації). Піднесемо обидві частини написаної рівності до квадрата

$$ax^2 + bx + c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}xt + t^2,$$

звідки

$$x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}} = R_1(t),$$

$R_1(t)$ – раціональна функція від t , отже, $R'_1(t)$ – також раціональна функція.

Далі, $dx = R'_1(t)dt$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm R_1(t)\sqrt{a} \pm t = R_2(t)$, де $R_2(t)$ – раціональна функція.

Отже, $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx = \int R(R_1(t), R_2(t))R'_1(t)dt = \int R^*(t)dt$, де

$R^*(t) = R(R_1(t), R_2(t))R'_1(t)$ – раціональний дріб.

5.2.2. Нехай $c > 0$.

В цьому випадку можна застосувати підстановку

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt$$

(комбінація знаків довільна). Підносячи до квадрата, одержимо

$$ax^2 + bx = \pm 2\sqrt{c}xt + x^2t^2,$$

звідси

$$x = \frac{b \mp 2t\sqrt{c}}{t^2 - a} = R_3(t), \quad dx = R'_3(t)dt,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm R_3(t)t = R_4(t),$$

де $R_3(t), R'_3(t), R_4(t)$ – раціональні функції t . Тому

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx = \int R(R_3(t), R_4(t))R'_3(t)dt = \int \tilde{R}(t)dt,$$

де $\tilde{R}(t) = R(R_3(t), R_4(t))R'_3(t)$ – раціональний дріб.

5.2.3. Нехай корені x_1 і x_2 тричлена $ax^2 + bx + c$ є дійсними числами.

Якщо $x_1 = x_2$, то

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)^2} = |x - x_1|\sqrt{a}.$$

Звідси випливає, що в цьому випадку або під коренем стоїть від'ємна при всіх значеннях $x \neq x_1$ величина, тобто цей корінь приймає тільки чисто уявні вирази (цей випадок має місце при $a < 0$); або при $a \geq 0$ після вказаного елементарного перетворення одержимо, що змінна x не входить під знак кореня, тобто під інтегралом стоїть просто раціональна функція від x .

Нехай тепер $x_1 \neq x_2$. Тоді

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

і, відповідно,

$$R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) = R\left(x, |x - x_1|\sqrt{\frac{a(x - x_2)}{x - x_1}}\right) = R_6\left(x, \sqrt{\frac{a(x - x_2)}{x - x_1}}\right),$$

де $R_6(u, v)$ – раціональна функція змінних u, v $\left(u = x, v = \sqrt{\frac{a(x - x_2)}{x - x_1}}\right)$.

Як відомо, інтеграл від одержаної функції можна обчислити за допомогою підстановки (див. п.5.2) $t^2 = \frac{a(x - x_2)}{x - x_1}$, що в нашому випадку дає

$$\pm(x - x_1)t = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)}.$$

Приклад. Обчислити $\int \frac{(1 - \sqrt{1 + x + x^2})^2}{x^2 \sqrt{1 + x + x^2}} dx$.

Розв'язання. Виконаємо підстановку п.5.2.2, так як $c = 1 > 0$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{(1 - \sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2 \sqrt{1+x+x^2}} dx &= \left| \begin{array}{l} \sqrt{1+x+x^2} = xt+1 \\ x = \frac{2t-1}{1-t^2}, dx = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2} dt \\ \sqrt{1+x+x^2} = \frac{t^2-t+1}{1-t^2} \\ 1 - \sqrt{1+x+x^2} = -\frac{2t^2+t}{1-t^2} \end{array} \right| = \\
&= \int \frac{(-2t^2+t)^2 (1-t^2)^2 (1-t^2) (2t^2-2t+2)}{(1-t^2)^2 (2t-1)^2 (t^2-t+1) (1-t^2)^3} dt = \\
&= 2 \int \frac{t^2}{1-t^2} dt = -2t + \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} + \\
&\quad \ln \left| \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}-1}{x - \sqrt{1+x+x^2}+1} \right| + C. \\
\text{Відповідь. } &-\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} + \ln \left| \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}-1}{x - \sqrt{1+x+x^2}+1} \right| + C.
\end{aligned}$$

Зауваження. Обчислення інтегралів за допомогою підстановок Ейлера звичайно приводить до громіздких виразів, тому їх потрібно застосувати лише тоді, коли інтеграл не вдається обчислити іншим, більш коротким способом.

Розглянемо, наприклад, інтеграл типу $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$. Цей інтеграл можна звести до інтеграла від раціонального дробу за допомогою однієї з підстановок Ейлера. Проте, значно швидше до мети приводить інший прийом (розглянули в темі 2).

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx &= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx + \\
&+ \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{A}{a} \sqrt{ax^2+bx+c} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}}.
\end{aligned}$$

Тоді для $c \neq \frac{b^2}{4a}$ і $a > 0$ останній інтеграл можна звести до вигляду

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm q^2}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 \pm q^2} \right| + C,$$

а для $c > \frac{b^2}{4a}$ і $a < 0$ – до вигляду $\int \frac{dt}{\sqrt{q^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{q} + C$.

5.3. Інтеграли від диференціального бінома. Підстановки Чебишова

Означення. Вираз $x^m(a + bx^n)^p dx$ ($a \neq 0, b \neq 0$) називається диференціальним біномом.

Будемо розглядати випадки, коли n, m і p – раціональні, а числа a і b – дійсні. Нехай $x = t^{\frac{1}{n}}$, тоді

$$dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt \text{ і } \int x^m(a + bx^n)^p dx = \frac{1}{n} \int (a + bt)^p t^{\frac{m+1}{n}-1} dt.$$

Таким чином, інтеграл від диференціального бінома

$$\int x^m(a + bx^n)^p dx \tag{5.3}$$

зводиться до інтеграла типу

$$\int (a + bt)^p t^q dt, \tag{5.4}$$

де p і q – раціональні, $q = \frac{m+1}{n} - 1$.

Перший випадок: p – ціле число.

Нехай $q = \frac{r}{s}$, де r і s – цілі числа. За результатами пункту 5.1 в цьому випадку $z = t^{\frac{1}{s}}$ зводить інтеграл (5.4) до інтеграла від раціонального дробу.

Другий випадок: q – ціле число.

Нехай тепер $p = \frac{r}{s}$, де r і s – цілі числа. За результатами пункту 5.1 в цьому випадку підстановкою $z = (a + bt)^{\frac{1}{s}}$ інтеграл (5.4) зводиться до інтеграла від раціонального дробу.

Третій випадок: $p + q$ – ціле.

Нехай $p = \frac{r}{s}$, де r і s – цілі числа. Запишемо для наочності інтеграл (5.4)

в іншому вигляді:
$$\int (a + bt)^p t^q dt = \int \left(\frac{a + bt}{t} \right)^p t^{p+q} dt.$$

Знову маємо інтеграл типу, що розглядався в пункті 5.1. На цей раз до інтеграла від раціонального дробу його приводить підстановка

$$z = \left(\frac{a + bt}{t} \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Отже, в трьох випадках, коли одне з чисел p , q або $p + q$ є цілим, інтеграл (5.4) за допомогою вказаних вище підстановок зводиться до інтеграла від раціонального дробу.

Стосовно інтеграла (5.3) цей результат виглядає наступним чином: коли одне з чисел p , $\frac{m+1}{n}$ або $\frac{m+1}{n} + p$ є цілим, інтеграл можна звести до інтеграла від раціонального дробу. При цьому у випадку, коли p ціле, це зведення здійснює підстановка $z = x^{\frac{n}{s}}$, де число s є знаменником дробу $\frac{m+1}{n}$, тобто

$\frac{m+1}{n} = \frac{r}{s}$; у випадку, коли $\frac{m+1}{n}$ ціле, підстановка

$$z = (a + bx^n)^{\frac{1}{s}},$$

де число s – знаменник дробу p , тобто $p = \frac{r}{s}$, а у випадку, коли $\frac{m+1}{n} + p$ –

ціле – підстановка $z = (ax^{-n} + b)^{\frac{1}{s}}$, де s – також знаменник дробу p .

П. Л. Чебишов показав, що при показниках m, n і p , які не задовольняють вказаним вище умовам, інтеграл (5.4) не виражається через елементарні функції.

Приклад. Обчислити $\int \sqrt{x} \sqrt[4]{1 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}} dx$.

Розв'язання. Розглянемо інтеграл у вигляді диференціального бінома

$$I = \int \sqrt{x} \sqrt[4]{1 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}} dx = \int x^{1/2} \left(1 - x^{-3/2}\right)^{1/4} dx.$$

Тут $m = \frac{1}{2}, n = -\frac{3}{2}, p = \frac{1}{4}, \frac{m+1}{n} = -1$ — маємо другий випадок.

Зробимо вказану вище підстановку: $z = \left(1 - x^{-3/2}\right)^{1/4}$, звідси $x = (1 - z^4)^{-2/3}$,

$$\begin{aligned} dx &= \frac{8}{3} (1 - z^4)^{-5/3} z^3 dz, \text{ тому } I = \frac{8}{3} \int \frac{z^4}{(1 - z^4)^2} dz = \frac{2}{3} \int z d\left(\frac{1}{1 - z^4}\right) = \frac{2}{3} \left(\frac{z}{1 - z^4} - \int \frac{dz}{1 - z^4}\right) = \\ &= \frac{2z}{3(1 - z^4)} - \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{1 - z^2} + \frac{1}{1 + z^2}\right) dz = \frac{2z}{3(1 - z^4)} - \frac{1}{6} \ln \left|\frac{1+z}{1-z}\right| - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} z + C, \end{aligned}$$

де z виражається через x за зробленою підстановкою $z = \left(1 - x^{-3/2}\right)^{1/4}$.

$$\text{Відповідь. } \frac{2\sqrt{x^3} \sqrt[4]{1 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}}}{3} - \frac{1}{6} \ln \left| \frac{1 + \sqrt[4]{1 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}}}{1 - \sqrt[4]{1 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}}} \right| - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \sqrt[4]{1 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}} + C.$$

5.4. Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок

Розглянемо [7] інтеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, де $a \neq 0$ і $c - \frac{b^2}{4a} \neq 0$.

Покажемо тут метод перетворення цього інтеграла до інтеграла типу

$$\int R(\sin z, \cos z) dz. \quad (5.5)$$

Проведемо перетворення тричлена, який знаходиться під коренем

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Зробимо заміну змінної, поклавши $x + \frac{b}{2a} = t$, $dx = dt$. Тоді

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{at^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}.$$

Розглянемо всі можливі випадки.

1. Нехай $a > 0$, $c - \frac{b^2}{4a} > 0$. Введемо позначення $a = m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$. В

цьому випадку матимемо

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 + n^2}.$$

2. Нехай $a > 0$, $c - \frac{b^2}{4a} < 0$, тоді $a = m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = -n^2$. Отже,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 - n^2}.$$

3. Нехай $a < 0$, $c - \frac{b^2}{4a} > 0$. Тоді $a = -m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$. Отже,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{n^2 - t^2 m^2}.$$

4. Нехай $a < 0$, $c - \frac{b^2}{4a} < 0$. В цьому випадку $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ є комплексним

числом при будь-якому значенні x .

Таким чином інтеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ перетвориться до одного з наступних типів інтегралів:

$$\int R(t, \sqrt{m^2 t^2 + n^2}) dt, \quad (5.6)$$

$$\int R(t, \sqrt{m^2 t^2 - n^2}) dt, \quad (5.7)$$

$$\int R(t, \sqrt{n^2 - m^2 t^2}) dt. \quad (5.8)$$

Очевидно, що інтеграл (5.6) зводиться до інтеграла вигляду (5.5) за допомогою підстановки $t = \frac{n}{m} \operatorname{tg} z$. Інтеграл (5.7) зводиться до вигляду (5.5) за

допомогою підстановки $t = \frac{n}{m} \frac{1}{\cos z}$, а інтеграл (5.8) – підстановки $t = \frac{n}{m} \sin z$.

Приклад. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4x + 7)^3}}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат в квадратному тричлені, отримаємо $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4x + 7)^3}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + 3)^3}}$, де $t = x + 2$.

Виконаємо тепер підстановку $t = \sqrt{3} \operatorname{tg} z$, $dt = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 z} dz$, $\sqrt{t^2 + 3} = \sqrt{3} \frac{1}{\cos z}$, одержимо

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4x + 7)^3}} &= \int \frac{\sqrt{3} \cos^3 z}{\cos^2 z \sqrt{3^3}} = \frac{1}{3} \int \cos z dz = \frac{1}{3} \sin z + C = \frac{1}{3} \frac{t}{\sqrt{t^2 + 3}} + C = \\ &= \frac{1}{3} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x + 7}} + C. \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{1}{3} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x + 7}} + C$.

Завдання для самоконтролю

1. Пояснити методику інтегрування простіших ірраціональних виразів та обчислити $\int \frac{x dx}{1 + \sqrt{3x + 1}}$.

2. Розглянути в загальному випадку використання підстановок Ейлера для обчислення інтегралів типу $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$.

3. Сформулювати основні випадки інтегрування диференціального бінома (згідно із теоремою Чебишова).

4. Розглянути використання гіперболічних підстановок для обчислення інтегралів типу $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$.

5. Обчислити: 1) $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1 + x^2}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4 + x^2)^3}}$.

6. Обчислити $\int \sqrt{x^2 + 10x + 26} dx$ різними способами: інтегруванням частинами; за допомогою різних вибраних підстановок Ейлера; з використанням тригонометричної (гіперболічної) підстановки.

Відповіді. 1. $\frac{3x+1}{27}(2\sqrt{3x+1}-3)+C$.

4. Вказівки. Виділити повний квадрат, звести до вигляду (5.6)-(5.8), врахувати основні формули для гіперболічних функцій: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, $\operatorname{cth}^2 x = 1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$, $\operatorname{th}^2 x = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

5. 1) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{\sqrt{\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1}} \right| + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{1+x^2} + 1}{\sqrt{3}} + C$; 2) $\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C$.

6. Вказівки. Наприклад, зробити заміни: $x+5 = \operatorname{sh} t$, $x+5 = \operatorname{tg} t$.

Тема 6. Інтегрування виразів із тригонометричними функціями

Розглянемо інтегрування виразів, які залежать від тригонометричних функцій, тому і називаються *раціональними функціями від тригонометричних функцій* та позначаються $R(\sin x; \cos x)$.

6.1. Універсальна тригонометрична підстановка. Інтеграли типу
 $\int R(\sin x; \cos x) dx$.

Теорема. Інтеграли типу $\int R(\sin x; \cos x) dx$, де підінтегральна функція є дробово-раціональна відносно $\sin x$ та $\cos x$ підстановкою $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$ зводяться до інтегралів від раціональних дробів.

Доведення. Щоб довести цю теорему треба показати, що $\sin x$, $\cos x$, dx виражаються раціонально через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Це дуже легко побачити, застосовуючи відомі формули:

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} u, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}, \quad (6.1)$$

тому $\int R(\sin x, \cos x) dx = 2 \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \frac{du}{1+u^2}.$

Таким чином, отримали інтеграл від раціональної функції.

Приклад. Обчислити $\int \frac{dx}{5-3\cos x}.$

Розв'язання. Використовуємо універсальну тригонометричну підстановку

$$\int \frac{dx}{5-3\cos x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = z, \quad x = 2 \operatorname{arctg} z, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2} \\ \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-z^2}{1+z^2} \end{array} \right| = \int \frac{2dz}{\left(5-3\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)(1+z^2)} =$$

$$= \int \frac{2dz}{2+8z^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2z + C = \left| z = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

Відповідь. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$

Зауважимо, що хоча розглядувані інтеграли завжди можна звести до інтеграла від раціонального дробу вказаним методом, при практичному його застосуванні він часто приводить до громіздких обчислень; разом з тим інші методи, зокрема, підстановки виду $u = \sin x$, $u = \cos x$, $u = \operatorname{tg} x$ інколи значно швидше дозволяють обчислити потрібний інтеграл. Універсальна тригонометрична підстановка найзручніша для інтегралів

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}, \quad a, b, c - \text{дійсні числа, які не дорівнюють одночасно нулевi.}$$

У вказаних нижче випадках віддається перевага наступним підстановкам, які також раціоналізують інтеграл:

1) Якщо інтеграл має вигляд $\int R(\sin x) \cos x dx$, то підстановка $u = \sin x$, $du = \cos x dx$ приводить цей інтеграл до виду $\int R(u) du$.

2) Якщо інтеграл має вид $\int R(\cos x) \sin x dx$, то він зводиться до інтеграла від раціональної функції заміною $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$.

3) Якщо підінтегральна функція залежить тільки від $\operatorname{tg} x$, то заміна $u = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arctg} u$, $dx = \frac{du}{1+u^2}$ зводить цей інтеграл до інтеграла від раціональної функції $\int R(\operatorname{tg} x) dx = \int R(u) \frac{du}{1+u^2}$.

6.2. Інтеграли типу $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

Нехай m і n – раціональні числа. Інтеграл $\int \sin^m x \cos^n x dx$ за допомогою підстановок $u = \sin x$ або $u = \cos x$ зводиться до інтеграла від диференціального бінома.

Дійсно, поклавши, наприклад, $u = \sin x$, одержимо $\cos x = (1-u^2)^{\frac{1}{2}}$, $du = \cos x dx$, $dx = (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} du$, тому $\int \sin^m x \cos^n x dx = \int u^m (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}} du$.

Таким чином, інтеграл $\int \sin^m x \cos^n x dx$ виражається або через елементарні функції або як інтеграл від диференціального бінома.

У випадку, коли m і n – цілі (не обов'язково додатні) числа, інтеграл $\int \sin^m x \cos^n x dx$ відноситься до типу інтегралів, які розглядалися в пункті 5.1.

Наприклад, якщо $m = 2k+1$ (відповідно, $n = 2k+1$) – непарне число, то можна зробити підстановку $u = \cos x$ (відповідно, $u = \sin x$):

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x d \cos x = -\int (1-u^2)^k u^n du.$$

Інтеграл зведено до інтеграла від раціонального дробу.

Аналогічний результат можна одержати і для інтеграла $\int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx$ за допомогою підстановки $u = \sin x$.

Якщо $m = 2k + 1$, $n = 2l + 1$, то буває корисна підстановка $t = \cos 2x$:

$$\begin{aligned} \int \sin^{2k+1} x \cos^{2l+1} x dx &= \int \sin^{2k} x \cos^{2l} x \sin x \cos x dx = \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^k \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^l \left(-\frac{1}{2} d \cos 2x \right) = -\frac{1}{2^{k+l+1}} \int (1-t)^k (1+t)^l dt, \end{aligned}$$

тобто знову отримали інтеграл від раціонального дробу.

Якщо обидва показники m і n додатні і парні (або один з них нуль), то доцільно застосувати формули

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

які приводять розглядуваний інтеграл до інтеграла того ж типу, але з меншими, також невід'ємними показниками.

Приклад. Обчислити $\int \cos^2 x dx$.

Розв'язання. Використовуємо формулу пониження порядку

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Відповідь. $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$.

В загальному випадку для парних степенів має місце теорема.

Теорема. Інтеграли типу $\int R(\sin^2 x; \cos^2 x) dx$, де підінтегральна функція є дробово-раціональна відносно $\sin^2 x$ та $\cos^2 x$ підстановкою $\operatorname{tg} x = z$ ($\operatorname{ctg} x = z$) зводяться до інтегралів від раціональних дробів.

Доведення. Використаємо тригонометричні формули

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

далі, очевидно, що підстановка

$$\operatorname{tg} x = z \Rightarrow x = \operatorname{arctg} z \Rightarrow dx = \frac{dz}{1 + z^2} \quad (6.2)$$

зведе інтеграл до виду

$$\int R\left(\frac{z^2}{1 + z^2}; \frac{1}{1 + z^2}\right) \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Приклад. Обчислити $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$.

Розв'язання. Можна виконати як підстановку $\operatorname{tg} x = z$, так і заміну змінної $\operatorname{ctg} x = z$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} &= |\operatorname{tg} x = z| = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{a^2 \frac{z^2}{1+z^2} + b^2 \frac{1}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{(az)^2 + b^2} = \\ &= \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{az}{b} + C. \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{a \operatorname{tg} x}{b} + C$.

При інтегруванні $\int \cos^n x \sin^m x dx$, де m та n – цілі невід'ємні числа розглядають два випадки:

1) Принаймні один із показників m (чи n) – число непарне. Тоді функцію $\cos^m x dx$ записуємо у вигляді добутку $\cos^{m-1} x \cdot \cos x dx = \cos^{m-1} x d(\sin x)$, тобто заводимо першу степінь косинуса (чи синуса) під диференціал, виражаємо підінтегральну функцію через ту тригонометричну функцію, яка стоїть під диференціалом. Інтеграл тим самим раціоналізується (заміна $\sin x = t$, чи $\cos x = t$ приводить його до раціонального дробу).

2) Обидва показники m та n – числа парні і додатні, то інтеграл зводиться до табличного тригонометричними перетвореннями зниженням показників степеня і перетворенням добутку в суму.

Приклад. Обчислити: 1. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$; 2. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Розв'язання. 1. Підінтегральна функція непарна і відносно $\sin x$, і відносно $\cos x$, тому

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^3 x dx &= \int \sin^3 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^3 x (1 - \sin^2 x) d \sin x = \int \sin^3 x d \sin x - \\ &= \int \sin^5 x d \sin x = \frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{6} \sin^6 x + C. \end{aligned}$$

2. Можна понизити степінь кожної тригонометричної функції, але зручніше спочатку використати формулу подвійного кута:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C.$$

Зауваження. Застосовуючи формулу подвійного кута, можна було б і інтеграл п.1 обчислювати так:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^3 x dx &= \frac{1}{8} \int (2 \sin x \cos x)^3 dx = \frac{1}{8} \int \sin^3 2x dx = \frac{1}{16} \int \sin^3 2x d(2x) = \\ &= \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \sin 2x d 2x = -\frac{1}{16} \int (1 - \cos^2 2x) d \cos 2x = \\ &= -\frac{1}{16} \cos 2x + \frac{1}{48} \cos^3 2x + C. \end{aligned}$$

Порівнюючи відповіді, ми можемо зробити висновок, що їх вигляд залежить від методу обчислення інтегралу. Але ці відповіді будуть тотожно рівними, в чому неважко переконатись, розписавши

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x.$$

$$\text{Відповідь. 1. } -\frac{1}{16} \cos 2x + \frac{1}{48} \cos^3 2x + C. \text{ 2. } \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C.$$

6.3. Інтеграли типу $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$.

Вказані в заголовку пункту інтеграли (в загальному випадку $\alpha \neq \pm \beta$) безпосередньо обчислюються безпосередньо, якщо в них підінтегральні функції перетворити за формулами

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x],$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x],$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x].$$

Приклад. Обчислити $\int \sin 2x \cos x dx$.

Розв'язання. Перетворимо добуток тригонометричних функцій в суму за вище написаною формулою, маємо

$$\int \sin 2x \cos x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 3x + \sin x) dx = -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos x + C.$$

Зауваження. В даному прикладі із використанням тригонометричної формули $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ маємо

$$\int \sin 2x \cos x dx = 2 \int \sin^2 x \cos x dx = 2 \int \sin^2 x d \sin x = \frac{2}{3} \sin^3 x + C,$$

тому варто обирати раціональніший, зручніший спосіб обчислення інтеграла.

Відповідь. $\frac{2}{3} \sin^3 x + C$.

6.4. Інтеграли типу: а) $\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} dx$; б) $\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx$.

У випадку, коли m і n – парні додатні числа, і $n-m$ – число парне раціоналізуються підстановкою $\operatorname{tg} x = z$ ($\operatorname{ctg} x = z$).

Приклад. Обчислити інтеграли: 1. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$; 2. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

Розв'язання. Для обох прикладів можна використовувати кожен із підстановок, але обчислимо раціональним способом.

$$\begin{aligned} 1. \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}}{1} d(\operatorname{tg} x) = \int \operatorname{tg}^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x) d \operatorname{tg} x = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C. \\ 2. \int \frac{dx}{\sin^4 x} &= \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = - \int \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} d \operatorname{ctg} x = - \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) d \operatorname{ctg} x = \\ &= - \left(\operatorname{ctg} x + \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} \right) + C. \end{aligned}$$

Відповідь. 1. $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C$; 2. $C - \left(\operatorname{ctg} x + \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} \right)$.

Якщо m – непарне, то в чисельнику функцію $\cos^m x dx$ (для інтеграла пункту b) записуємо у вигляді добутку $\cos^{m-1} x \cdot \cos x dx = \cos^{m-1} x d(\sin x)$, тобто заводимо першу степінь косинуса (чи синуса) під диференціал, виражаємо підінтегральну функцію через таку, як під диференціалом, і інтеграл тим самим раціоналізується.

Приклад. Обчислити $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x) d \sin x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C.$$

Відповідь. $C - \frac{1}{\sin x} - \sin x$.

Завдання для самоконтролю

1. Універсальна тригонометрична підстановка, раціональність її використання.

2. Обчислити із використанням універсальної тригонометричної підстановки інтеграли $\int \frac{dx}{\sin x}$, $\int \frac{dx}{\cos x}$ і відповідь перевірити диференціюванням (формули 11, 12 таблиці інтегралів).

3. Пояснити застосування заміни тригонометричних функцій для обчислення $\int \sin^m x \cos^n x dx$ для різних значень чисел m і n .

4. Обчислити [11] інтеграли:

1) $\int \sin^4 x dx$; 2) $\int \sin 2x \sin^6 x dx$; 3) $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} dx$; 4) $\int \operatorname{tg}^4 x dx$; 5) $\int \cos 3x \sin 7x dx$.

5. Обчислити інтеграли [11] (повторення за розділом I):

1) $\int \frac{(x+1)^2 dx}{x\sqrt{x}}$; 2) $\int \frac{\sin x + \operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x} dx$; 3) $\int \frac{dx}{2x \ln x}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16x + 7}}$;

$$5) \int x e^{3x^2+2} dx; 6) \int x e^{-3x} dx; 7) \int \cos(\ln x) dx; 8) \int \frac{x^4 - 2x^3 - 11x^2 - 22}{x^3 - 13x - 12} dx;$$

$$9) \int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 3}; 10) \int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx.$$

Biðnosiði. 4.1) $\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$; 2) $\frac{\sin^8 x}{4} + C$; 3) $\sqrt{2} \arctg\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C$;

4) $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C$; 5) $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} \cos 10x + \frac{1}{2} \cos 4x\right) + C$. 5. 1) $\frac{2(x^2+6x-3)}{3\sqrt{x}} + C$;

2) $\sin x - \operatorname{ctg} x - x + C$; 3) $\frac{1}{2} \ln |\ln x| + C$; 4) $\ln |x+4+\sqrt{x^2+16x+7}| + C$; 5) $\frac{1}{6} e^{3x^2+2} + C$;

6) $-\frac{1}{9} e^{-3x} (3x+1) + C$; 7) $\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$; 8) $\frac{x^2}{2} - 2x + \ln \left| \frac{(x+1)^3 (x+3)}{(x-4)^2} \right| + C$;

9) $\frac{2}{\sqrt{7}} \arctg \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{7}} + C$; 10) $x+1+4\sqrt{x+1}+4 \ln |\sqrt{x+1}-1| + C$.

Розділ II. Визначений інтеграл

Визначений інтеграл широко застосовується для розв'язку багатьох математичних задач, що описують фізичні, хімічні, біологічні та інші явища, процеси в природі, науці, техніці. Важливе значення має його застосування для розв'язування прикладних геометричних задач: обчислення площ криволінійних трапецій, довжин дуг ліній (в різних системах координат), об'ємів тіл обертання.

Тема 7. Визначений інтеграл

Визначений інтеграл в математичному аналізі – це інтеграл функції однієї змінної з вказаною областю інтегрування. Визначений інтеграл є неперервним функціоналом, лінійним за підінтегральними функціями та адитивним по області інтегрування. У найпростішому випадку область інтегрування – відрізок числової осі. Існує кілька різновидів визначених інтегралів: інтеграл Рімана, інтеграл Лебега, інтеграл Стільтєса тощо. Розглянемо інтеграл Рімана – найпростіший із визначених інтегралів, який є границею інтегральної суми для функції однієї змінної. Також інтеграл Рімана можна визначити як границю сум Дарбу.

7.1. Означення визначеного інтеграла

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$. Розіб'ємо цей відрізок на n довільних частин точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b.$$

Позначимо це розбиття через τ , а точки $x_0, x_1, \dots, x_n$ будемо називати точками розбиття. В кожному з одержаних відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ виберемо довільну точку $\xi_i (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i), i = 1, \dots, n$. Через Δx_i позначимо різницю $x_i - x_{i-1}$, яку називають довжиною відрізка $[x_{i-1}, x_i]$.

Утворимо суму

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = I, \quad (7.1)$$

яку назвемо *інтегральною сумою* для функції $f(x)$ на $[a, b]$, яка відповідає даному розбиттю $[a, b]$ на відрізки і даному вибору проміжних точок ξ_i .

Позначимо через λ довжину найбільшого відрізка розбиття τ :
 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}.$

Означення. Якщо існує скінченна границя I інтегральної суми (7.1) за $\lambda \rightarrow 0$, то ця границя називається *визначенням інтегралом* від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначається наступним чином

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad (7.2)$$

$$\text{або } \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

В цьому випадку функція $f(x)$ називається *інтегровною* на $[a, b]$. Числа a та b називаються відповідно *нижньою* і *верхньою межами* інтегрування, $f(x)$ – *підінтегральною функцією*, x – *змінною інтегрування*.

З означення визначеного інтеграла [10] випливає, що величина інтеграла (7.2) залежить тільки від виду функції $f(x)$ та чисел a, b . Отже, якщо задана $f(x)$ і межі інтегрування, то інтеграл (7.2) визначається однозначно і є деяким числом. Звідси, зокрема, випливає, що визначений інтеграл не залежить від вибору позначення для аргументу підінтегральної функції, тобто від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\xi)d\xi \text{ і т. д.}$$

7.2. Умови існування визначеного інтеграла

Теорема 1 (*необхідна умова інтегровності функції*). Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a, b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Доведення. Припустимо обернене, тобто, що $f(x)$ необмежена на $[a, b]$.

Покажемо, що в цьому випадку інтегральну суму σ можна зробити як завгодно великою для будь-якого розбиття відрізка $[a, b]$ через вибір точок $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Дійсно, оскільки $f(x)$ необмежена на $[a, b]$, то для будь-якого розбиття відрізка $[a, b]$ вона має цю властивість хоча б на одному відрізку розбиття, наприклад, на $[x_0, x_1]$. Виберемо на інших відрізках розбиття точки $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ довільно і позначимо

$$\sigma' = f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Задамо довільне число $M > 0$ та візьмемо таке ξ_1 на $[x_0, x_1]$, щоб

$$|f(\xi_1)| \geq \frac{|\sigma'| + M}{\Delta x_1}.$$

Це можна зробити із-за необмеженості функції $f(x)$ на $[x_0, x_1]$. Тоді

$$|f(\xi_1)| \Delta x_1 \geq |\sigma'| + M, \quad |\sigma| = |f(\xi_1)\Delta x_1 + \sigma'| \geq |f(\xi_1)| \Delta x_1 - |\sigma'| \geq M,$$

тобто інтегральна сума σ за абсолютною величиною більша від будь-якого наперед заданого числа. Тому вона і не має скінченної границі при $\lambda \rightarrow 0$, а це означає, що визначений інтеграл від необмеженої функції не існує.

Зауваження. Обернена теорема не має місця, тобто умова обмеженості функції $f(x)$ необхідна, але не достатня умова інтегровності функції. Пояснимо це твердження на прикладі. Розглянемо функцію Діріхле [7] на відрізку $[0, 1]$.

Функція Діріхле, очевидно, обмежена. Проте вона не інтегровна на $[0, 1]$. Покажемо це. Якщо при будь-якому розбитті відрізка $[0, 1]$ вибрати раціональні точки $\xi_i (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$, то одержимо

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = 1,$$

а якщо взяти ξ_i ірраціональними, то одержимо

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Таким чином, при розбитті на як завгодно малі частини відрізка, інтегральна сума може досягати, як значення, яке дорівнює 0, так і значення, яке дорівнює 1. Тому інтегральна сума σ при $\lambda \rightarrow 0$ границі не має.

Отже, для існування визначеного інтеграла від деякої функції $f(x)$, крім обмеженості, вона повинна мати деякі додаткові властивості, які забезпечать її інтегровність. Для встановлення цих властивостей вводять поняття нижніх і верхніх сум Дарбу [7].

Нехай функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a, b]$ і τ -розбиття цього відрізка точками: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < \dots < x_i < x_n = b$. Позначимо через m_i та M_i відповідно точну нижню і точну верхню грані цієї функції на відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ та складемо наступні суми:

$$S = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

$$s = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i.$$

Ці суми називаються відповідно *верхньою* і *нижньою* сумами або *верхньою* і *нижньою* сумами Дарбу функції $f(x)$ для даного розбиття τ відрізка $[a, b]$.

З означення нижньої і верхньої граней випливає, що

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$$

для $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Звідси

$$s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = S,$$

тобто будь-яка інтегральна сума і суми Дарбу для даного розбиття пов'язані нерівностями $s \leq \sigma \leq S$.

Теорема 2 (необхідна і достатня умова інтегровності).

Для того, щоб обмежена на відрізку $[a, b]$ функція $f(x)$ була інтегровною на цьому відрізку, необхідно і достатньо, щоб $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0$.

Відзначимо деякі класи інтегровних функцій:

- функції неперервні на відрізку $[a, b]$;
- функції обмежені на відрізку $[a, b]$ і неперервні на ньому всюди, крім скінченного числа точок.

7.3. Основні властивості визначеного інтеграла

Інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ було введено для випадку $a < b$. Узагальнимо поняття визначеного інтеграла на випадок, коли межі інтегрування співпадають або нижня межа більша верхньої. За означенням покладемо

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$
$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx. \quad \int_a^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Основні властивості визначеного інтеграла

1. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла, тобто

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

Доведення.

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i = k \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = k \int_a^b f(x)dx.$$

2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх інтегралів,

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Доведення.

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Зауваження. Властивість 2 має місце для будь-якого скінченного числа доданків.

3. Які б не були числа a, b, c має місце рівність

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (7.3)$$

Доведення. Припустимо спочатку, що $a < c < b$. Оскільки границя інтегральної суми σ не залежить від способу розбиття відрізка $[a, b]$, то будемо розбивати $[a, b]$ так, щоб точка c була точкою розбиття. Якщо, наприклад, $c = x_m$, то σ можна розбити на дві суми:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Переходячи в цій рівності до границі при $\lambda \rightarrow 0$, одержимо рівність (7.3)

Доведення для іншого розташування точок a, b, c легко зводиться до попереднього випадку. Нехай, наприклад, $a < b < c$, тоді за доведеним, маємо

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

звідки,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

тобто знову прийшли до рівності (7.3).

4. Якщо на відрізку $[a, b]$, де $a < b$, функція $f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Доведення. Дійсно, будь-яка інтегральна сума $\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ для функції $f(x)$ на $[a, b]$ невід'ємна, оскільки $f(\xi_i) \geq 0$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Переходячи до границі при $\lambda \rightarrow 0$ в нерівності $\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0$, одержимо

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Зауваження. Якщо на відрізку $[a, b]$, де $a < b$, функція $f(x) \geq 0$, то

$$S_{\text{крив.трапеції}} = \int_a^b f(x) dx,$$

де ця трапеція обмежена віссю Ox , вертикальними прямими $x = a$ та $x = b$ і графіком невід'ємної функції $y = f(x)$.

5. Якщо на відрізку $[a, b]$ ($a < b$) виконується нерівність для всіх значень незалежної змінної $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad (7.4)$$

Доведення. Застосуємо властивість 4 до функції $g(x) - f(x) \geq 0$. Маємо

$$\int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0.$$

За властивістю 2

$$\int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0,$$

звідки одержимо нерівність (7.4).

6. Для функції $f(x)$, визначеної на відрізку $[a, b]$ ($a < b$), має місце нерівність

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (7.5)$$

Доведення.

Застосувавши властивість 4 до нерівностей $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, одержимо

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

а це рівносильно нерівності (7.5).

Наслідок. Якщо всюди на відрізку $[a, b]$ ($a < b$), $|f(x)| \leq k$, то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq k(b-a). \quad (7.6)$$

Дійсно, з нерівності $|f(x)| \leq k$ та властивостей 5 і 6 випливає, що

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b k dx = k \int_a^b dx.$$

Звідси, зауваживши, що

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = b-a, \quad (7.7)$$

отримуємо (7.6).

7. Теорема 3 (оцінка визначеного інтеграла).

Якщо m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad (7.8)$$

Доведення.

За умовою, для будь-якого $x \in [a, b]$ маємо $m \leq f(x) \leq M$. Застосовуючи властивість 5 до цих нерівностей, маємо

$$m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx,$$

звідки з врахуванням (7.7) одержимо нерівності (7.8).

8. Теорема 4 (теорема про середнє). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то на цьому відрізку існує точка c така, що

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a). \quad (7.9)$$

Доведення. Оскільки $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то за теоремою Вейерштрасса існують числа m і M такі, що

$$\min_{[a,b]} f(x) = m \leq f(x) \leq M = \max_{[a,b]} f(x).$$

Звідси, за властивістю 7, одержимо

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

і, отже, $m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M$. Покладемо $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = \mu$ ($m \leq \mu \leq M$).

Оскільки число μ знаходиться між найменшим і найбільшим значеннями неперервної функції $f(x)$ на $[a, b]$, то за теоремою про проміжне значення, існує точка $c \in [a, b]$ така, що $f(c) = \mu$. Тому

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = f(c),$$

і це рівносильно рівності (7.9).

7.4. Інтеграл із змінною верхньою межею

Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a, b]$. Тоді вона інтегровна і на будь-якому відрізку $[a, x]$, де $a \leq x \leq b$, тобто для будь-якого $x \in [a, b]$ має

зміст інтеграл $\int_a^x f(t)dt$.

Розглянемо функцію

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Ця функція $\Phi(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$ і називається *інтегралом із змінною верхньою межею*.

Теорема (основна властивість інтеграла зі змінною верхньою межею).

Похідна інтеграла від неперервної функції по змінній верхній межі існує і дорівнює значенню підінтегральної функції в точці, що дорівнює верхній межі, тобто

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x). \quad (7.10)$$

Доведення. Нехай $x \in [a, b]$, $x + \Delta x \in [a, b]$. Тоді

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(x)dt - \int_a^x f(x)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(x)dt.$$

Використовуючи теорему про середнє, одержимо $\Delta\Phi = f(c)\Delta x$, де c — число, яке міститься між числами x і $x + \Delta x$. Поділимо обидві частини рівності на Δx :

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(c).$$

Тому, переходячи до границі при $\Delta x \rightarrow 0$ в останній рівності, одержимо

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x) \text{ або } \Phi'(x) = f(x).$$

Зауваження:

З доведеної теореми, зокрема, випливає, що будь-яка неперервна на відрізку функція має первісну на цьому відрізку, причому функція $\Phi(x)$ — інтеграл з змінною верхньою межею — є первісною для $f(x)$. А оскільки будь-

яка інша первісна функції $f(x)$ може відрізнятися від $\Phi(x)$ тільки на сталу, то встановлено зв'язок між невизначеним і визначеним інтегралом у вигляді

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(x)dt + C,$$

де C – довільна стала.

7.5. Формула Ньютона-Лейбніца

Теорема (основна теорема інтегрального числення).

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$. Якщо функція $F(x)$ є довільною її первісною на цьому відрізку, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (7.11)$$

Ця формула називається *формулою Ньютона-Лейбніца*.

Доведення. Нехай $F(x)$ є деякою первісною функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. За доведеною вище теоремою, функція $\Phi(x) = \int_a^x f(x)dt$ також є первісною функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Таким чином, функції $F(x)$ та $\Phi(x)$ – дві первісні однієї і тієї ж функції $f(x)$, тому

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad a \leq x \leq b.$$

При $x = a$ з цієї рівності випливає, що $C = -F(a)$.

Отже,

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a).$$

Поклавши $x = b$, одержимо формулу (7.11).

Якщо ввести позначення $F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$, то формулу (7.11) можна переписати так

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Наведемо практичне використання формули Ньютона-Лейбніца.

Приклад. Обчислити: 1. $\int_1^2 x^2 dx$; 2. $\int_0^2 \frac{e^x}{e^x + 3} dx$.

Розв'язання. 1. Інтеграл є табличним, тому

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

2. Оскільки чисельник є похідною знаменника, маємо

$$\int_0^2 \frac{e^x}{e^x + 3} dx = \int_0^2 \frac{d(e^x + 3)}{e^x + 3} = \ln(e^x + 3) \Big|_0^2 = \ln \frac{e^2 + 3}{4}.$$

Відповідь. 1. $\frac{7}{3}$; 2. $\ln \frac{e^2 + 3}{4}$.

Завдання для самоконтролю

1. Дати означення інтегральної суми для функції однієї змінної та визначеного інтеграла.

2. Дати означення нижньої та верхньої сум Дарбу, пояснити їх деякі властивості.

3. Навести приклад обмеженої, але не інтегрованої функції.

4. Сформулювати та довести декілька властивостей визначеного інтеграла.

5. Сформулювати теорему про середнє значення та пояснити її зміст (на конкретному підібраному прикладі).

6. Показати обмеженість визначеного інтеграла для функції $y = x^2 + 1, 1 \leq x \leq 2$ (використати формулу $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$).

7. Означити інтеграл зі змінною верхньою межею, пояснити та довести його основну властивість.

8. Записати та довести формулу Ньютона-Лейбніца.

9. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} \cos x dx; \quad 2) \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx; \quad 3) \int_1^2 \left(\sqrt[4]{(x-1)^3} + 3e^{2x-1} \right) dx.$$

Відповіді. 9. 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\ln 2$; 3) $\frac{4}{7} + \frac{3}{2}e(e^2 - 1)$.

Тема 8. Обчислення визначеного інтеграла

Розглянемо основні формули інтегрального числення для невизначеного інтеграла: заміну змінної та інтегрування частинами для визначеного інтеграла, також деякі методи наближеного обчислення визначеного інтеграла.

8.1. Визначений інтеграл як границя інтегральних сум

Один із способів обчислення визначеного інтеграла пов'язаний з безпосереднім використанням означення інтеграла як границі інтегральних сум

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Приклад. Обчислити $\int_1^2 x^2 dx$.

Розіб'ємо відрізок $[1, 2]$ на частини так, щоб абсциси точок розбиття утворювали геометричну прогресію:

$$x_0 = 1, x_1 = q, x_2 = q^2, \dots, x_{n-1} = q^{n-1}, x_n = q^n = 2,$$

де $q = 2^{1/n}$. Точку ξ_i виберемо на лівому кінці i -го відрізка.

Тоді

$$f(x_0) = 1, f(x_1) = q^2, f(x_2) = q^4, \dots, f(x_{n-1}) = q^{2(n-1)},$$

$$\Delta x_1 = q - 1, \Delta x_2 = q^2 - q = q(q - 1),$$

$$\Delta x_3 = q^2(q - 1), \dots, \Delta x_n = q^{n-1}(q - 1),$$

$$\sigma = 1 \cdot (q - 1) + q^3(q - 1) + q^6(q - 1) + \dots + q^{3(n-1)}(q - 1) = (q - 1) \times$$

$$\times (1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{3(n-1)}) = (q - 1) \frac{q^{3n} - 1}{q^3 - 1} = \frac{q^{3n} - 1}{q^2 + q + 1} = \frac{2^3 - 1}{2^{\frac{2}{n}} + 2^{\frac{1}{n}} + 1} = \frac{7}{2^{\frac{2}{n}} + 2^{\frac{1}{n}} + 1}.$$

$$\text{Отже, } \int_1^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{2^{\frac{2}{n}} + 2^{\frac{1}{n}} + 1} = \frac{7}{3}.$$

Відповідь. $\frac{7}{3}$.

8.2. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Теорема. Нехай $f(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a, b]$. Тоді, якщо:

- 1) функція $x = \varphi(t)$ – диференційовна на $[\alpha, \beta]$ і $\varphi'(t)$ неперервна на $[\alpha, \beta]$;
- 2) множиною значень функції $x = \varphi(t)$ є відрізок $[a, b]$;
- 3) $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$, то має місце рівність

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad (8.1)$$

Ця формула називається *формулою заміни змінної у визначеному інтегралі* або *формулою інтегрування підстановкою*.

Доведення.

Нехай $F(x)$ – будь-яка первісна для функції $f(x)$ на $[a, b]$. Тоді для точок $t \in [\alpha, \beta]$ має зміст складна функція $F[\varphi(t)]$, яка є первісною для $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. За формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

З цих рівностей і випливає формула (8.1).

Зауваження. Якщо при обчисленні невизначеного інтеграла з допомогою заміни змінної від нової змінної t потрібно повертатися до початкової змінної інтегрування x , то при обчисленні визначеного інтеграла цього робити не потрібно, оскільки тепер потрібно знайти число, яке за доведеною теоремою

дорівнює значенню кожного з інтегралів. Тому проведення заміни змінної передбачає виконання умов 1-3) теореми, зокрема, зміну меж інтегрування у визначеному інтегралі, що і дозволяє не повертатись до початкової змінної.

Приклад. Обчислити $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Розв'язання. Розглянемо підстановку $x = \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Дана підстановка задовольняє всі умови теореми, оскільки $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ неперервна на $[0,1]$, функція $\varphi(t) = \sin t$ диференційовна на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ і $\varphi'(t) = \cos t$ неперервна на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; при зміні t від 0 до $\frac{\pi}{2}$ функція $\varphi(t) = \sin t$ змінюється від 0 до 1 і $\varphi(0) = 0$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Застосуємо формулу (8.1):

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \left(\frac{1}{2} t + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{4}$.

Зауваження. При використанні формули (8.1) необхідно перевіряти виконання перерахованих в теоремі умов. Якщо ці умови порушуються, то можна одержати неправильний результат.

Приклад. Обчислити $\int_0^{\pi} dx$.

Розв'язання. Маємо $\int_0^{\pi} dx = x \Big|_0^{\pi} = \pi$.

З іншого боку,

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}.$$

Підстановка $\operatorname{tg} x = t$ формально приводить до наступного результату

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{d(\operatorname{tg} x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \int_0^0 \frac{dt}{1 + t^2} = 0.$$

Одержали неправильний результат [12], оскільки $\pi \neq 0$. Це сталося тому, що функція $t = \operatorname{tg} x$ розривна для $x = \frac{\pi}{2}$ і не задовольняє умови теореми.

8.3. Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Теорема. Якщо функція $u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a, b]$, то має місце формула

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (8.2)$$

Доведення. Оскільки функція $u(x)v(x)$ є первісною функції

$$[u(x)v(x)]' = u(x)v'(x) + v'(x)u(x),$$

то за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b [u(x)v'(x) + v(x)u'(x)] dx = [u(x)v(x)] \Big|_a^b$$

або, що те ж саме $\int_a^b u dv + \int_a^b v du = uv \Big|_a^b$, звідки і випливає (8.2).

Приклад. Обчислити $\int_1^e \ln x dx$.

Розв'язання.

$$\int_1^e \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} = e - x \Big|_1^e = 1.$$

Відповідь. 1.

8.4. Наближене обчислення визначених інтегралів

При розв'язуванні фізичних і технічних задач доводиться знаходити визначені інтеграли від функцій, первісні яких не виражаються через елементарні функції. Це привело до необхідності виведення наближених формул обчислення визначених інтегралів.

Основна ідея побудови цих формул полягає в заміні підінтегральної функції на функцію простішого вигляду, наприклад, многочлен, інтеграл від якого знаходять безпосередньо за формулою Ньютона-Лейбніца.

8.4.1. Формули прямокутників і трапецій

Найпростіший спосіб [11] наближеного обчислення визначених інтегралів випливає з означення останнього. Поділимо відрізок $[a, b]$ на рівні частини точками

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (8.3)$$

і покладемо

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \quad (8.4)$$

Вираз (8.4) називається *формулою прямокутників*. В формулі прямокутників шукана площа фігури, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$, $x = b$, наближено дорівнює сумі площ прямокутників (рис.8.1).

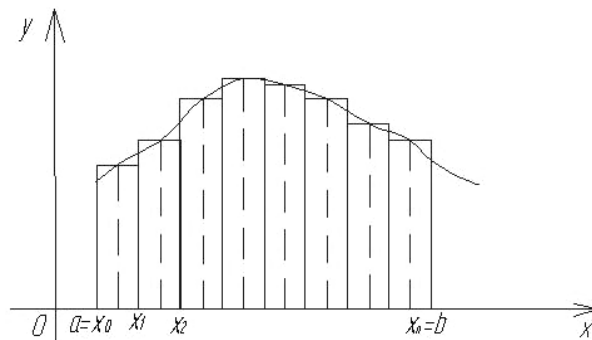


Рис.8.1. Площі прямокутників.

Зауважимо, що якщо функція є лінійною, то для неї формула (8.4) точна.

Наведемо ще другий природний спосіб наближеного обчислення визначеного інтеграла, який приводить до *формули трапецій*. Він полягає в тому, що відрізок $[a, b]$ ділиться на рівні частини точками системи (8.3) і вважається наближено, що

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) \quad (8.4)$$

Це і є формула трапеції. В ній площа криволінійної трапеції замінюється сумою площ прямолінійних трапецій (рис. 8.2).

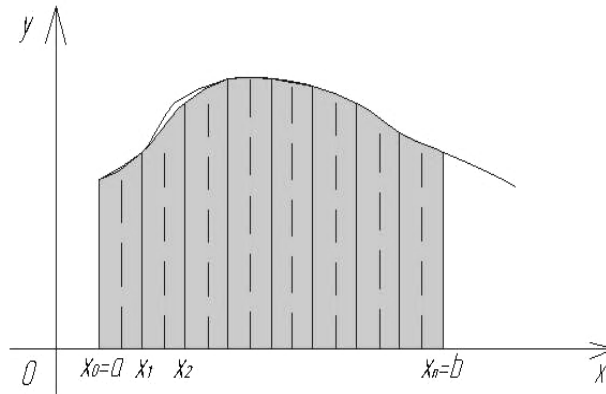


Рис. 8.2. Прямолінійні трапеції.

Формула трапецій точна для многочленів не вище першого степеня. В цьому розумінні формула трапеції не має переваг перед формулою прямокутників, обидві вони є точними для лінійних функцій. Формули прямокутників і трапецій тим точніші, чим більше n . Можна показати, якщо функція $f(x)$ має на $[a, b]$ неперервну другу похідну, то абсолютна величина похибки прямокутників і трапецій не більша за

$$\Delta = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M, M = \max_{x \in [a; b]} f''(x), \quad (8.5)$$

причому наявність похідних порядку вище другого не впливає на точність.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. За формулою (8.5) маємо: $R_n < 0$, $|R_n| < \frac{1}{6n^2}$.

Візьмемо $n = 10$, тоді $|R_{10}| < \frac{1}{600} < 1 \cdot 7 \cdot 10^{-3}$. Обчислення подамо таблицею:

x	11,0	11,1	11,2	11,3	11,4	11,5	11,6	11,7	11,8	11,9	22,0
$f(x)$	0,9091	0,8333	0,7692	0,7143	0,7143	0,6667	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5000

Отже, за формулою (8.4):

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{10} \left(\frac{1 \cdot 500}{2} + 6,1877 \right) = 0,69377.$$

Відповідь. 0,69377.

8.4.2. Формула Сімпсона

Щоб для обчислення визначеного інтеграла дістати наближену формулу вищої точності, ніж формули прямокутників і трапецій, вписуватимемо в дану криву замість прямолінійних відрізків гілки *параболи*.

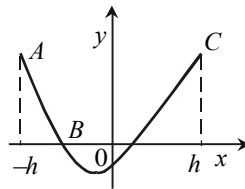


Рис. 8.3. Парабола.

Можна довести, що площа S криволінійної трапеції, обмеженої параболою $y = ax^2 + bx + c$, яка проходить через точки A, B, C (рис. 8.3), обчислюється формулою:

$$S = \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3) \quad (8.6)$$

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену графіком функції $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, і розіб'ємо відрізок інтегрування $[a, b]$ на $2n$ рівних частин точками:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2k} < \dots < x_{2n-1} < x_{2n} = b.$$

Провівши через кожні три точки $A_0A_1A_2, \dots, A_{2k-2}A_{2k-1}A_{2k}, \dots, A_{2n-2}A_{2n-1}A_{2n}$ параболу, дістанемо n криволінійних трапецій, обмежених зверху параболою. За формулою (8.6) площа кожної такої частинної криволінійної трапеції, що спирається на відрізок $[x_{2k}, x_{2k+2}]$, подається у вигляді

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n} (y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}),$$

де $y_k = f(x_k)$, $0 \leq k \leq 2n$.

Додаючи почленно ці наближені рівності, дістаємо формулу:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{6n} [y_0 + y_n + 2(y_2 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + \dots + y_{2n-1})]. \quad (8.7)$$

Формула (8.7) називається *формулою Сімпсона*.

Можна довести, що похибка формули (8.7) не перевищує

$$M \frac{(b-a)^5}{2880n^4}, \quad M = \max_{x \in [a;b]} |f^{IV}(x)|. \quad (8.8)$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_0^1 e^{x^2} dx$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. За формулою (8.8) маємо:

$$y^{IV} > 0, \quad |y^{IV}| = y^{IV} = 4e^{x^2} (4x^4 + 12x^2 + 3).$$

Очевидно, що похідна y^{IV} зростає для $0 \leq x \leq 1$ і набуває найбільшого значення за $x=1$.

Отже, $|R_n| \leq \frac{1}{180n^4} \cdot 76e$. Поклавши $n=10$, дістаємо

$$|R_n| \leq \frac{76e}{180 \cdot 10^4} < 0,00012.$$

Розрахунки наведемо в таблиці

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	0	1,0101	1,0408	1,0942	1,1735	1,284	1,433	1,6323	1,8965	2,2479	2,7183

Тоді за формулою (8.7) маємо $\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1,463$.

Відповідь. 1,463.

Зауваження. У деяких випадках застосовують досконаліші обчислювальні схеми (наприклад, Гаусса, Чебишова і т. ін.), які за рахунок вибору значень функції дають змогу швидше обчислювати наближені значення визначених інтегралів.

Завдання для самоконтролю

1. Навести приклад обчислення визначеного інтеграла як границі інтегральних сум.

2. Сформулювати та довести теорему про заміну змінної у визначеному інтегралі.

3. Пояснити на підібраних прикладах використання теореми про заміну змінної у визначеному інтегралі

4. Обчислити: 1) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$; 2) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{1+8x+1}}$.

5. Вивести формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла (записати основні випадки її використання).

6. Обчислити: 1) $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos 3x dx$; 2) $\int_0^1 e^{2x} \sin x dx$.

7. Записати наближені формули обчислення визначених інтегралів.

8. Знайти наближене значення $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 \approx 0,69315$, використовуючи

формули прямокутників, трапецій та Сімпсона.

Відповіді. 2. 1) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{1}{4}(2 - \ln 2)$. 4. 1) $-\frac{\pi^2}{12} + \frac{2}{27}$; 2) $\frac{1}{5}(e^2(2\sin 1 - \cos 1) + 1)$.

Тема 9. Невласні інтеграли

Означивши визначений інтеграл як границю інтегральних сум, ми припускали, що відрізок інтегрування скінченний, а підінтегральна функція обмежена на цьому відрізку. Узагальнимо поняття інтеграла як на випадок функцій визначених на необмежених проміжках, так і на випадок функцій, визначених на обмежених проміжках, але необмежених на них.

9.1. Невласні інтеграли на нескінченному проміжку

Розглянемо невластні інтеграли 1-го роду.

Згідно з теоремою існування визначеного інтеграла цей інтеграл існує, якщо виконані умови:

- 1) відрізок інтегрування $[a, b]$ скінченний;
- 2) підінтегральна функція $f(x)$ неперервна або обмежена і має скінченну кількість точок розриву 1-го роду. Якщо хоч би одна із умов не виконується, то визначений інтеграл називають невластним.

Якщо не виконується перша умова, тобто $b = +\infty$ або $a = -\infty$, також одночасно $a = -\infty$ та $b = +\infty$, то інтеграли називають невластними інтегралами з нескінченними межами.

9.1.1. Означення невластного інтеграла 1-го роду

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a, +\infty)$ і інтегровна на будь-якому відрізку $[a, b]$. Якщо існує границя $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$, то її

називають *невластним інтегралом* і позначають $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. Таким чином:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (9.1)$$

Якщо границя (9.1) існує (дорівнює сталій величині), то, кажуть, що невластний інтеграл збігається. Якщо ця границя, а, значить, і невластний інтеграл не існують, то кажуть, що невластний інтеграл розбігається.

Аналогічно до (9.1) вводиться невластний інтеграл на проміжку $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx \quad (9.2)$$

Як суму інтегралів виду (9.1) і (9.2) визначимо невластний інтеграл з двома нескінченними границями, тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx, \quad (9.3)$$

де c – будь-яке число за умови існування обидвох інтегралів справа.

Зауваження. Якщо для якогось фіксованого числа c один із інтегралів

$$\int_{-\infty}^c f(x)dx \text{ чи } \int_c^{+\infty} f(x)dx \text{ розбігається, тоді є розбіжним і інтеграл } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Геометрична інтерпретація

Нехай задано невід'ємну функцію $y = f(x)$, неперервну на промені $[a, +\infty)$. Для кожного $b > a$ визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ визначає площу криволінійної трапеції $aABb$.

Перемістивши відрізок Bb праворуч, дістанемо замість значення невластного інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ площу «трикутника $Aa\infty$ » (рис. 9.1).

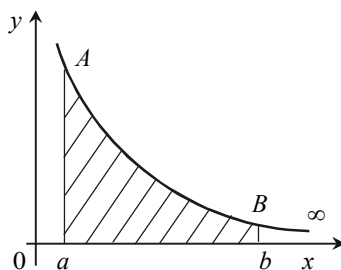


Рис. 9.1. Площа нескінченної криволінійної трапеції.

Приклад. Дослідити збіжність інтеграла [6] $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} (a > 0)$ залежно від параметра λ .

Зауваження. Інтеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} (a > 0)$ називають *інтегралом Діріхле*.

Розв'язання. Скориставшись означенням (9.1), розглянемо два випадки.

1. $\lambda \neq 1$:

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Big|_a^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{A^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right) = \\ &= \begin{cases} \infty, & \text{якщо } \lambda < 1; \\ \frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1}, & \text{якщо } \lambda > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

2. $\lambda = 1$:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln A - \ln a) = \infty.$$

Отже,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} \Rightarrow \begin{cases} \text{збіжний,} & \text{якщо } \lambda > 1; \\ \text{розбіжний,} & \text{якщо } \lambda \leq 1. \end{cases} \quad (9.4)$$

Відповідь. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ збіжний, якщо $\lambda > 1$, $\lambda \leq 1$ – розбіжний.

Приклад. Дослідити збіжність інтеграла $\int_0^{+\infty} \sin bx dx (b > 0)$.

Розв'язання. За означенням (9.1) маємо

$$\int_0^{+\infty} \sin bx dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \sin bx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} \cos bx \Big|_0^A \right) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} \cos bA + \frac{1}{b} \right),$$

границя $\lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} \cos bA \right)$ не існує, тому інтеграл розбіжний.

Відповідь. Інтеграл розбіжний.

9.1.2. Формули інтегрального числення

Враховуючи властивості границі і означення невластного інтеграла, як границі визначеного інтеграла [2], на невластні інтеграли переносять багато властивостей визначеного інтеграла.

Розглянемо деякі з них.

1. *Формула Ньютона-Лейбніца* для невластних інтегралів. Якщо функція $f(x)$ визначена, інтегровна на проміжку $[a, +\infty)$ і $F(x)$ – будь-яка її первісна на ньому, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a),$$

де $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

2. *Лінійність невластного інтеграла*. Якщо невластні інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$,

$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ збігаються, то для будь-яких чисел λ, μ збігається і невластний інтеграл $\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x))dx$, причому

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)dx + \mu \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

3. *Інтегрування нерівностей*

Якщо інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_a^{+\infty} g(x)dx$ збігаються, і для всіх $x \in [a, +\infty)$ виконується нерівність $f(x) < g(x)$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx < \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

4. *Формула інтегрування частинами*

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервно-диференційовні на проміжку $[a, +\infty)$, то

$$\int_a^{+\infty} u dv = uv \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v du ,$$

причому, якщо будь-які два з виразів $\int_a^{+\infty} u dv$, $uv \Big|_a^{+\infty}$ та $\int_a^{+\infty} v du$ мають зміст (тобто відповідні границі існують та скінченні), то має зміст і третій.

9.1.3. Ознаки збіжності інтегралів

Якщо функція $f(x)$ додатна, то інтеграл

$$\Phi(A) = \int_a^A f(x) dx \quad (9.5)$$

являє собою монотонно зростаючу функцію від змінної A . Питання про існування скінченної границі при $A \rightarrow \infty$ розв'язується за допомогою поданих далі [2] (без доведення) теорем.

Теорема. Для збіжності невластого інтеграла (9.1) необхідно і достатньо, щоб інтеграл (9.5) зі зростанням A залишався обмеженим зверху:

$$\int_a^A f(x) dx \leq L \quad (L = \text{const}).$$

Теорема. Якщо хоча б для значень змінної таких, що $x \geq A$ виконується нерівність $f(x) \leq g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int_a^{\infty} g(x) dx$ випливає збіжність

інтеграла $\int_a^{\infty} f(x) dx$ або із розбіжності $\int_a^{\infty} f(x) dx$ випливає розбіжність

інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x) dx$.

Теорема. Якщо існує границя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \quad (0 \leq K \leq +\infty), \quad (9.6)$$

то із збіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ при $K < +\infty$ впливає збіжність інтеграла

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а із розбіжності першого інтеграла впливає розбіжність другого.

Теорема (Коші). Нехай для достатньо великих x функція $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\lambda} \quad (\lambda > 0).$$

Тоді:

1) якщо $\lambda > 1$ і $\varphi(x) \leq c$, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається;

2) якщо $\lambda \leq 1$ і $\varphi(x) \geq c > 0$ то цей інтеграл розбіжний.

Теорема. Якщо збіжним є інтеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$, то збіжний також

інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

Означення. Якщо одночасно з інтегралом $\int_a^{\infty} f(x)$ збігається інтеграл

$\int_a^{\infty} |f(x)|dx$, то інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ називається *абсолютно збіжним*, а функція $f(x)$ –

абсолютно інтегровною на проміжку $[a; \infty)$.

Теорема (ознака Абеля). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені на проміжку $[a; \infty)$, причому:

1) функція $f(x)$ інтегровна на цьому проміжку, так що інтеграл (9.1) збігається;

2) функція $g(x)$ монотонна і обмежена: $|g(x)| \leq L$ ($L = \text{const}$).

Тоді інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ збіжний.

Теорема (ознака Діріхле). Нехай виконуються такі умови:

1) функція $f(x)$ інтегровна на будь-якому проміжку $[a, A]$ і інтеграл

$\int_a^A f(x)dx$ обмежений:

$$\left| \int_a^A f(x)dx \right| \leq K \quad (K = \text{const});$$

2) функція $g(x)$ монотонно прямує до 0 при $x \rightarrow +\infty$: $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

Тоді інтеграл $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ збіжний.

Приклади. Дослідити збіжність інтегралів:

$$1. \int_a^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx \quad (a > 0). \quad 2. \int_a^\infty \frac{\arctg x}{x^3} dx \quad (a > 0). \quad 3. \int_0^\infty x^\mu e^{-ax} \cos x dx \quad (\mu, a > 0).$$

Розв'язання.

$$1. \int_a^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx \quad (a > 0). \text{ За ознакою Діріхле візьмемо } f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Умови 1 і 2 ознаки виконано, оскільки $\left| \int_a^A \sin x dx \right| = |\cos a - \cos A| \leq 2$ і

функція $\frac{1}{x^2}$ монотонно спадає, прямує до 0, коли $x \rightarrow \infty$, тому інтеграл збіжний.

$$2. \int_a^\infty \frac{\arctg x}{x^3} dx \quad (a > 0). \text{ За ознакою Абеля візьмемо } f(x) = \frac{1}{x^3}, \quad g(x) = \arctg x.$$

За умовою 1 інтеграл $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ збіжний, за умовою 2 $|\arctg x| < \frac{\pi}{2}$. Отже, інтеграл збіжний.

$$3. \int_0^\infty x^\mu e^{-ax} \cos x dx \quad (\mu, a > 0). \text{ За ознакою Абеля візьмемо } f(x) = x^\mu e^{-ax},$$

$g(x) = \cos x$. Інтеграл $\int_a^{+\infty} x^\mu e^{-ex} dx$ збіжний (довести), $|\cos x| \leq 1$, тому

розглядуваний інтеграл збіжний.

Відповідь. 1. Збіжний. 2. Збіжний. 3. Збіжний.

9.2. Невласні інтеграли від необмеженої функції

Розглянемо функції, які визначені на обмеженому проміжку, але є необмеженими в крайніх точках проміжку (можливо, є необмеженими для однієї внутрішньої точки, а також і для скінченної кількості внутрішніх точок проміжку).

9.2.1. Означення невластного інтеграла 2-го роду

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[a; b)$.

Означення. Точка $x = b$ називається особливою точкою, якщо функція $f(x)$ необмежена в будь-якому околі точки b .

Геометрична інтерпретація особливої точки (рис. 9.2).

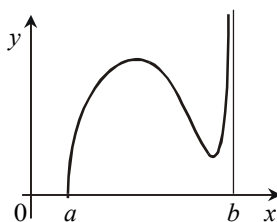


Рис.9.2. Необмежена функція в правій точці.

Означення. Границя інтеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (скінченна або нескінченна) називається *невласним інтегралом 2-го роду* функції $f(x)$ на проміжку $[a; b)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \quad (9.7)$$

Якщо границя існує, то говорять, що невластний інтеграл (9.7) збіжний. Якщо границя не існує або нескінченна, то цей інтеграл розбіжний.

Аналогічно, якщо $x = a$ — особлива точка, то невластний інтеграл визначають так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \quad (9.8)$$

Якщо $x = c$ — єдина внутрішня особлива точка на проміжку $(a; b)$, то вважають

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx,$$

за умови, що обидва невласні інтеграли праворуч збіжні.

Якщо особливих точок на відрізку $[a; b]$ декілька, то його розбивають таким чином, щоб у кожному проміжку розбиття була не більш, ніж одна особлива точка, і користуються означеннями (9.7), (9.8).

Нехай $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$. Візьмемо

$$F(a+0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F(a+\varepsilon),$$

$$F(b-0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} F(b-\varepsilon),$$

(якщо ці границі існують). Тоді аналогом *формули Ньютона-Лейбніца* для збіжних інтегралів, в яких особливими є точки $x = a$ та $x = b$, буде формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a+0). \quad (9.9)$$

Приклад. Дослідити збіжність [7] інтеграла $\int_0^a \frac{dx}{x^\lambda}$, $a > 0$, $a = \text{const}$.

1. Нехай $\lambda \neq 1, \lambda < 1$. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x^\lambda}$ має одну особливу точку на проміжку інтегрування $(0; a]$:

$$\int_0^a \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_\varepsilon^a \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Big|_{0+\varepsilon}^a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{\varepsilon^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right) = \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}.$$

У випадку $\lambda > 1$ маємо

$$\int_0^a \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_\varepsilon^a \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Big|_{0+\varepsilon}^a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{\varepsilon^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right) = \infty, \text{ так як } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^{1-\lambda}}{1-\lambda} = \infty.$$

Отже, якщо $\lambda < 1$ інтеграл збіжний, а для $\lambda > 1$ — розбіжний.

2. Нехай $\lambda = 1$. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x}$ має одну особливу точку на проміжку інтегрування $(0; a]$. Звідси випливає:

$$\int_0^a \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{\varepsilon}^a \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \ln|x| \Big|_{\varepsilon}^a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} (\ln a - \ln \varepsilon) = +\infty,$$

тобто інтеграл розбіжний.

Відповідь. Інтеграл $\int_0^a \frac{dx}{x^{\lambda}}$ розбіжний для $\lambda \geq 1$, для $\lambda < 1$ – збіжний.

Зауваження. Аналогічно досліджують на збіжність $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\lambda}}$ та

$\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^{\lambda}}$, які широко використовують для дослідження на збіжність за допомогою ознак збіжності.

9.2.2. Основні ознаки збіжності та властивості

1. Нехай $f(x) \geq 0$ на проміжку $[a; b)$. Тоді для збіжності невластного інтеграла (9.7) необхідно і достатньо, щоб для всіх $\varepsilon > 0$ виконувалась нерівність

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \leq L \quad (L = \text{const}).$$

2. *Ознака Коші.* Нехай для достатньо близьких до b значень x функція $f(x)$ має вигляд $f(x) = \frac{g(x)}{(b-x)^{\lambda}}$, ($\lambda > 0$). Тоді:

1) якщо $\lambda < 1$ і $0 < g(x) \leq c$, то інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ збіжний;

2) якщо $\lambda \geq 1$ і $g(x) \geq c > 0$, то інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ розбіжний.

3. Якщо при $x \rightarrow b$ функція $y = f(x)$ є нескінченно великою порядку $\lambda > 0$ (порівняно з $\frac{1}{b-x}$), то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збіжний або розбіжний залежно від того, яка умова виконується: $\lambda < 1$ чи $\lambda \geq 1$.

Приклад. Дослідити збіжність інтегралів: 1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$; 2. $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$.

Розв'язання. 1. Для підінтегральної функції $x=1$ – особлива точка, функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ є нескінченно великою функцією порядку $\frac{1}{4}$, оскільки

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} : \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x+x^2+x^3}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{4}},$$

коли $x \rightarrow 1$. Отже, інтеграл збіжний.

2. $x=1$ – особлива точка. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ є нескінченно великою порядку 1, оскільки $\frac{\ln x}{x-1} \rightarrow 1$, якщо $x \rightarrow 1$. Отже, інтеграл розбіжний.

Відповідь. 1. Збіжний. 2. Розбіжний.

Зауваження. Властивості невласних інтегралів аналогічні властивостям визначених інтегралів і впливають із них, а саме: інтеграл є границею визначених інтегралів, тому, зазвичай, достатньо написати для цих останніх (визначених інтегралів) рівність або нерівність, що виражає потрібну властивість, і перейти до границі.

Зауважимо також, що не всі властивості визначеного інтеграла переносяться на невласні інтеграли. Так, наприклад, добуток двох функцій, інтегрованих на деякому відрізку, є функцією, також інтегрованою на ньому. Аналог цього твердження для невласних інтегралів не завжди справедливий.

Дійсно, нехай, наприклад, $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Інтеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ збігається, а інтеграл $\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx$ розбігається.

Зауваження. Можливі випадки, коли за допомогою заміни змінних невластний інтеграл перетворюється в звичайний, наприклад,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \\ 0 \leq t < \pi/2 \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} dt = t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

9.3. Деякі особливі інтеграли (Ейлера, Ейлера-Пуассона, Фруллані)

9.3.1. Інтеграл Ейлера

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx. \quad (9.10)$$

Інтегруванням частинами [10] цей невластний інтеграл можна звести до визначеного та, відповідно, довести його існування.

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln \sin x, du = \frac{\cos x dx}{\sin x} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| = \\ &= x \ln \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x \frac{\cos x}{\sin x} dx = - \int_0^{\pi/2} x \operatorname{ctg} x dx. \end{aligned}$$

Обчислимо інтеграл (9.10):

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \left| \begin{array}{c|c|c} x = 2t & & \\ \hline x & 0 & \pi/2 \\ \hline t & 0 & \pi/4 \end{array} \right| = 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin 2t dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\pi/4} \ln \sin t dt + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \cos t dt =$$

$$= \left| \begin{array}{c|c|c} t = \frac{\pi}{2} - u, dt = -du & & \\ \hline t & 0 & \pi/4 \\ \hline u & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin t dt + 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin t dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin t dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I,$$

або $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

Зауваження. До інтеграла I зводяться також інтеграли $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{ctg} x dx$,

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

9.3.2. Інтеграл Ейлера-Пуассона

$$P = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx. \quad (9.11)$$

Функція $f(t) = (1+t)e^{-t}$ досягає свого найбільшого значення 1 при $t = 0$.

Отже, $(1+t)e^{-t} < 1$ для $t > 0$ і $t < 0$. Беручи $t = \pm x^2$, дістаємо:

$$(1-x^2)e^{x^2} < 1 \text{ і } (1+x^2)e^{-x^2} < 1,$$

звідки

$$1-x^2 < e^{-x^2}, \quad x \in (0; 1); \quad (9.12)$$

$$e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}, \quad x > 0. \quad (9.13)$$

Підносячи вирази (9.12) і (9.13) до степеня з будь-яким натуральним показником n , маємо:

$$(1-x^2)^n < e^{-nx^2} \quad (0 < x < 1), \quad (9.14)$$

$$e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n} \quad (x > 0). \quad (9.15)$$

Інтегруючи нерівність (9.14) на проміжку від 0 до 1, а нерівність (9.15) – від 0 до $+\infty$, дістаємо:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^1 e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Водночас виконуються такі співвідношення:

$$1) \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{n}x; \\ \frac{u}{\sqrt{n}} = x; \\ dx = \frac{1}{\sqrt{n}} du \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-n \frac{u^2}{n}} du = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{n}} P;$$

$$2) \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t, \\ dx = \cos t dt; \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2} \end{array} \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t dt = \frac{2n!!}{(2n+1)!!};$$

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{ctg} t; \\ dx = -\frac{1}{\sin^2 t} dt; \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & 0 \end{array} \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} t dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Звідси

$$\sqrt{n} \frac{2n!!}{(2n+1)!!} < P < \sqrt{n} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (9.16)$$

Підносячи до квадрата і перетворюючи вираз (9.16), дістаємо:

$$\frac{n}{2n+1} \cdot \frac{(2n!!)^2}{[(2n-1)!!]^2 (2n+1)} < P^2 < \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{[(2n-3)!!]^2 (2n-1)}{[(2n-2)!!]^2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2. \quad (9.17)$$

Із формули Валліса $\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2 (2n+1)}$ випливає, що обидва крайні

вирази у (9.17) при $n \rightarrow \infty$ прямують до $\frac{\pi}{4}$, тому $P^2 = \frac{\pi}{4}$ та $P = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Отже,

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (9.18)$$

9.3.3. Інтегралі Фруллані

Інтегралі Фруллані записуються у вигляді

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \quad (a, b > 0), \quad (9.19)$$

причому виконуються такі умови:

- 1) функція $y = f(x)$ визначена і неперервна для $x \geq 0$;
- 2) існує скінченна границя $f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Можна довести, що $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(0) - f(+\infty)] \ln \frac{b}{a}$.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати означення невластного інтеграла 1-го роду (на різних нескінченних проміжках).
2. Дослідити збіжність інтеграла Діріхле.
3. Записати деякі формули інтегрального числення для невластного інтеграла.
4. Сформулювати ознаки збіжності невластного інтеграла 1-го роду.
5. Обчислити невластні інтегралі або довести їхню розбіжність:

$$1) \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}; \quad 2) \int_0^{\infty} e^{-kx} dx (k > 0, k < 0).$$

6. Сформулювати означення невласного інтеграла 2-го роду для особливих точок, які є крайніми точками проміжку інтегрування та внутрішніми точками.

7. Дослідити збіжність інтеграла $\int_0^a \frac{dx}{(x-a)^\lambda}$, $a > 0$, $a = \text{const}$.

8. Сформулювати основні властивості невласних інтегралів 2-го роду, пояснити на прикладах подібність та відмінність від властивостей визначеного інтеграла.

9. Обчислити невласні інтеграли або довести їхню розбіжність:

$$1) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}; 2) \int_2^4 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$$

10. Дослідити на збіжність інтеграли: 1) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{11}}{(x^5+4x^3+2x^2+x)^3} dx$;

$$2) \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1} dx.$$

Відповіді. 5. 1) Розбіжний. 2) $k > 0$ – інтеграл збіжний; $k < 0$ – розбіжний.

9. 1) Збіжний; 2) Розбіжний. 10. 1) Збіжний; 2) Збіжний.

Розділ III. Застосування визначеного інтеграла

Сучасне інтегральне числення ґрунтується на поєднанні двох аспектів: визначення інтеграла, як границі інтегральних сум, та відновлення функції за її похідною.

Відомий англійський математик і механік Ісаак Ньютон (1643-1727) в основному використовував другий метод. Ньютон прийшов до поняття похідної, розв'язуючи задачу про миттєву швидкість. Керуючись фізичними уявленнями, він розглядав час, як аргумент функції, функцію від часу називав *флюентою* (та, що змінюється), а її похідну розглядав як швидкість зміни функції і називав *флюксією*.

Якщо диференціювання дозволяло визначити швидкість за переміщенням, яка змінювалася, чи прискорення за швидкістю, то інтегрування давало можливість визначити переміщення за швидкістю, швидкість за прискоренням, а також обчислити роботу, яка виконувалася змінною силою, що і розглянемо надалі.

Тема 10. Геометричні застосування визначеного інтеграла

Розглянемо застосування визначеного інтеграла для геометричних задач, в основному, із використанням методу інтегральних сум [10].

10.1. Площа плоскої фігури

Нехай на площині Oxy задана фігура, обмежена відрізком $[a, b]$ осі Ox , прямими $x = a$, $y = b$ і графіком неперервної функції $y = f(x)$ на $[a, b]$. Таку фігуру називають *криволінійною трапецією* (рис.10.1).

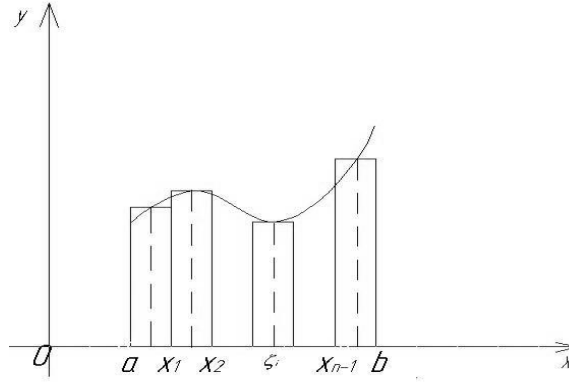


Рис.10.1. Вигляд криволінійної трапеції.

Поставимо задачу обчислити площу криволінійної трапеції. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n частин точками

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

виберемо на кожному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ довільну точку $\xi_i (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$ і розглянемо цю фігуру (рис.10.1). Площа S криволінійної трапеції наближено дорівнює площі східчатої фігури:

$$S \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, \dots, n$. Природно вважати, що при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ площа східчатої фігури прямує до площі криволінійної трапеції. З іншого боку, площа східчатої фігури є інтегральною сумою для інтеграла $\int_a^b f(x) dx$. Оскільки функція $y = f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то площа S криволінійної трапеції дорівнює визначеному інтегралу функції $y = f(x)$ на $[a, b]$:

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (10.1)$$

Отже, визначений інтеграл від невід'ємної, неперервної функції на відрізку $[a, b]$, дорівнює площі криволінійної трапеції з основою $[a, b]$, обмеженої зверху графіком функції $f(x)$, збоку прямими $x = a, x = b$, а знизу – віссю Ox . В цьому також і полягає *геометричний зміст визначеного інтеграла*.

Нехай фігура обмежена знизу і зверху графіками функцій $y = f_1(x), y = f_2(x)$, причому $f_1(x) < f_2(x), x \in [a, b]$ (рис. 10.2), де $f_1(x), f_2(x)$ – дві неперервні функції.

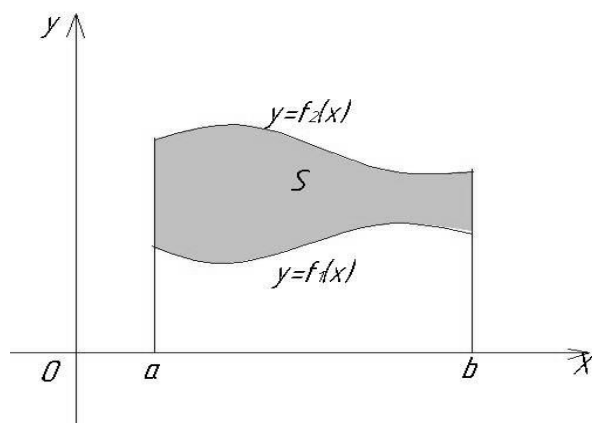


Рис.10.2. Обмеженість криволінійної трапеції двома функціями.

Якщо обидві функції невід'ємні, то площа S даної фігури дорівнює різниці площ криволінійних трапецій, обмежених зверху відповідно графіками функцій $y = f_1(x), y = f_2(x)$. Отже,

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \quad (10.2)$$

Формула (10.2) справедлива і тоді, коли $f_1(x), f_2(x)$ не є невід'ємними. Дійсно, якщо функції є обмеженими, то існує число де $h > 0$ таке, що функції $f_1^h(x) = f_1(x) + h, f_2^h(x) = f_2(x) + h$ є невід'ємними, і має місце очевидна рівність

$$\int_a^b (f_2^h(x) - f_1^h(x))dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = f_1(x) = x, y = f_2(x) = 2 - x^2$.

Розв'язання. Будуємо вказану криволінійну трапецію. Знайдемо абсциси точок перетину прямої $x = a$ з параболою $y = 2 - x^2$. Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x, \\ y = 2 - x^2, \end{cases}$$

одержимо $x_1 = -2$ та $x_2 = 1$. Це є межі інтегрування (рис. 10.3).

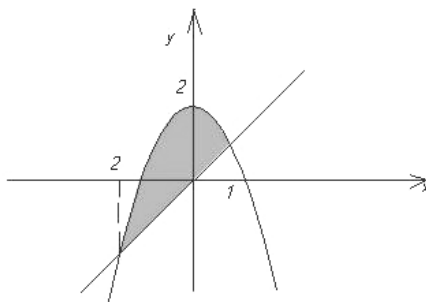


Рис.10.3. Вигляд обчислюваної площі.

Тоді площа фігури обчислюється за формулою (10.2):

$$S = \int_{-2}^1 (f_2(x) - f_1(x)) dx = \int_{-2}^1 ((2 - x^2) - x) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2} \text{ (од. площі)}.$$

Відповідь. $\frac{9}{2}$ од. площі.

Обчислення площі плоскої фігури у випадку параметричного задання її межі

Для обчислення площі криволінійної трапеції у випадку, коли верхня неперервна невід'ємна функція $y = f(x)$ на $[a, b]$ задана параметричними рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, причому $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, функція $y = \psi(t)$ є неперервною та невід'ємною, а функція $x = \varphi(t)$ є диференційовною та її похідна $\varphi'(t)$ – неперервною невід'ємною функцією потрібно зробити в формулі (10.1) заміну змінної, поклавши $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$. Виконані умови теореми про заміну змінної у визначеному інтегралі, також підінтегральна функція є неперервною та невід'ємною, тоді одержимо формулу обчислення площі криволінійної трапеції, заданої параметричними рівняннями

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt. \quad (10.4)$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$

Розв'язання. Еліпс симетричний відносно осей координат, тому достатньо обчислити площу частини фігури, яка знаходиться в I чверті (рис.10. 4).

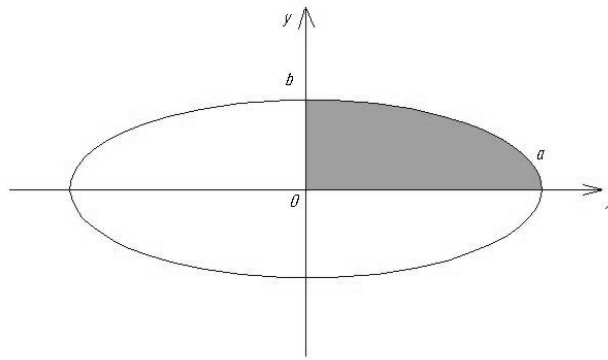


Рис.10.4. Еліпс.

Отже, за формулою (10.4)

$$S = 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin t (a \cos t)' dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt = \pi ab.$$

Відповідь. πab од. площі.

Зауваження. Зокрема, якщо $a = b = R$, то одержимо відому формулу площі круга

$$S = \pi R^2.$$

Обчислення площі криволінійного сектора у полярній системі координат

Нехай крива AB задана в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, причому функція $\rho = \rho(\varphi)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[\alpha, \beta]$.

Плоску фігуру, обмежену кривою AB і двома променями, які утворюють з полярною віссю кути α і β , будемо називати *криволінійним сектором* (рис.10.5).

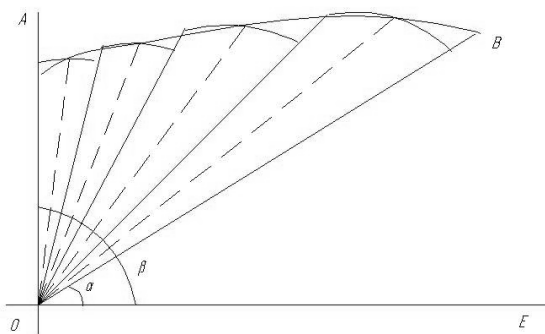


Рис.10.5. Криволінійний сектор.

Знайдемо площу криволінійного сектора. Розіб'ємо довільним чином відрізок $[\alpha, \beta]$ на n частин точками

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{i-1} < \varphi_i < \dots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta,$$

виберемо на кожному відрізку $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ довільну точку $\xi_i (\varphi_{i-1} \leq \xi_i \leq \varphi_i)$ та побудуємо кругові сектори з радіусами $\rho(\xi_i)$. В результаті одержимо фігуру, площа якої S наближено дорівнює сумі площ кругових секторів

$$S \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho^2(\xi_i) \Delta \varphi_i,$$

де $\Delta \varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$. З іншого боку, ця площа є інтегральною сумою для інтеграла

$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$. Оскільки функція $\rho^2(\varphi)$ неперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$, то границя

цієї суми при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta \varphi_i\} \rightarrow 0$ існує і дорівнює інтегралу $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$.

Отже, площа криволінійного сектора дорівнює цьому визначеному інтегралу

$$S = \frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho^2(\xi_i) \Delta \varphi_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi,$$

тобто

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi \quad (10.5)$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ (рис.10.6).

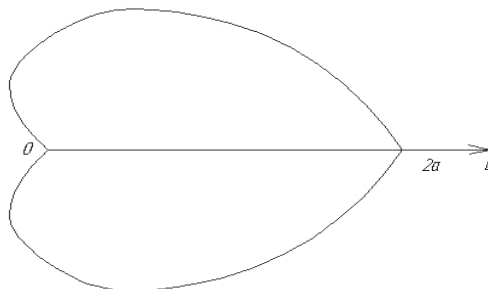


Рис. 10.6. Кардіоїда.

Розв'язання. За формулою (10.5) маємо

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos \varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

Відповідь. $\frac{3}{2} \pi a^2$ од. площі.

10.2. Об'єм тіла

Обчислення об'єму тіла обертання

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[a, b]$. Знайдемо об'єм тіла, яке утворюється обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, які обмежена зверху графіком функції $y = f(x)$.

Розіб'ємо довільним чином відрізок $[a, b]$ на n частин точками

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

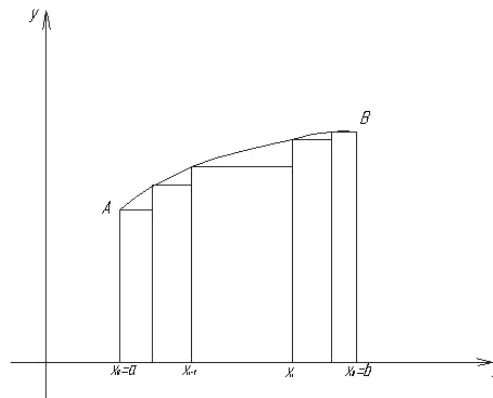


Рис.10.7. Вписані прямокутники під функцією.

На кожному відрізку побудуємо прямокутник (рис.10.7). При обертанні $[x_{i-1}, x_i]$ навколо осі Ox кожний прямокутник опише циліндр. Знайдемо об'єм i -го циліндра, який має висоту $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$ і радіус $y_i = f(x_{i-1})$

$$V_i \approx \pi f^2(x_{i-1}) \Delta x_i.$$

Сума об'ємів всіх циліндрів наближено дорівнює об'єму даного тіла обертання

$$V \approx \sum_{i=1}^n V_i \approx \pi \sum_{i=1}^n f^2(x_{i-1}) \Delta x_i.$$

З іншого боку, ця сума є інтегральною сумою для інтеграла $\pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Оскільки функція $f^2(x)$ неперервна на $[a, b]$, то границя цієї суми при

$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ існує і дорівнює визначеному інтегралу $\pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Таким чином,

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \pi \sum_{i=1}^n f^2(x_{i-1}) \Delta x_i = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (10.6)$$

Приклад. Знайти об'єм еліпсоїда, який утворений обертанням еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ навколо осі } Ox.$$

Розв'язання. Еліпсоїд обертання є тіло, обмежене поверхнею обертання

кривої $y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $(-a \leq x \leq a)$ навколо осі Ox , тому за формулою (10.6)

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi b^2 \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

Відповідь. $\frac{4}{3} \pi a b^2$ од. куб.

Зауваження. Формулу (10.6) можна одержати із формули обчислення об'єму тіла за відомою площею поперечного перерізу.

Обчислення об'єму тіла за площею поперечного перерізу

Нехай маємо деяке тіло T . Припустимо, що відома площа будь-якого його перерізу площиною, перпендикулярною до осі Ox (рис.10.8). Ця площа залежатиме від положення площі перерізу, тобто буде функцією від x : $Q = Q(x)$.

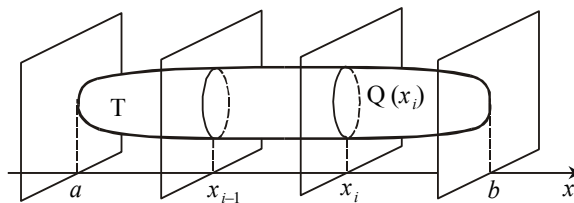


Рис.10.8. Переріз тіла площинами.

Вважаючи, що $Q(x)$ є неперервна функція на відрізку $[a, b]$ визначимо об'єм даного тіла. Аналогічно п.1 розіб'ємо довільний відрізок $[a, b]$ на n частин точками

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

виберемо на кожному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ довільну точку $\xi_i (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$ і побудуємо циліндричне тіло, твірна якого паралельна осі Ox , а напрямна являє собою контур перерізу тіла T площиною $x = \xi_i, i = 1, \dots, n$. Об'єм такого елементарного циліндра з площею основи $Q(\xi_i)$ і висотою Δx_i дорівнює $Q(\xi_i)\Delta x_i$. Об'єм усіх циліндрів тоді буде

$$V_n \approx \sum_{i=1}^n Q(\xi_i)\Delta x_i,$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, \dots, n$. Природно вважати, що при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ границя цієї суми прямує до об'єму даного тіла

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b Q(x)dx.$$

Отже, обчислення об'єму тіла за площами паралельних перерізів виражається визначенням інтегралом:

$$V = \int_a^b Q(x)dx. \quad (10.7)$$

Зауваження. Для знаходження об'єму тіла, яке утворюється обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої зверху графіком функції $y = f(x), x \in [a, b]$, довільний переріз тіла площиною, перпендикулярною до осі абсцис, є кругом, площа якого $Q = \pi y^2 = \pi (f(x))^2$, тобто має зміст (10.6).

Приклад. Обчислити об'єм [5] еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Розв'язання. Оскільки у перерізі площинами, перпендикулярними осям координат, матимемо еліпси (площа еліпса $S = \pi ab$), то для знаходження функції $Q = Q(x)$ в інтегралі (10.7) проведемо на відстані $z = h$ площину,

перпендикулярну осі Oz , в перерізі одержимо еліпс із півосями, залежними від змінної (параметра) h :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1,$$

тому $Q = Q(h) = \pi ab \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)$.

За формулою (10.7)

$$V = \int_{-c}^c Q(h) dh = 2\pi ab \int_0^c \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right) dh = 2\pi ab \left(h - \frac{h^3}{3c^2}\right) \Big|_0^c = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Відповідь. $\frac{4}{3} \pi abc$ од. об'єму.

Зауваження. Якщо вважати, що неперервна, невід'ємна крива $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ обертається навколо осі Oy , то формула для знаходження об'єму тіла обертання має вигляд

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy,$$

де $x = \varphi(y)$, $y \in [c, d]$ теж є неперервною, невід'ємною кривою для $y \in [c, d]$. В даному випадку справедлива також формула

$$V = 2\pi \int_a^b xy dy.$$

Якщо розглянути фігуру (криволінійну трапецію), обмежену знизу і зверху графіками функцій $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, збоку – вертикальними прямими $x = a$, $x = b$, причому $f_1(x) < f_2(x)$, $x \in [a, b]$ (рис. 10.2), де $f_1(x)$, $f_2(x)$ – дві неперервні функції, тоді об'єм тіла обертання цієї фігури відносно осі Ox визначається формулою

$$V = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx. \quad (10.8)$$

Обчислення об'єму тіла обертання криволінійної трапеції, заданої параметричними рівняннями, відносно осі Ox

Аналогічно, як для обчислення площі плоскої фігури у випадку параметричного задання її межі, розглядається неперервна невід'ємна функція $y = f(x)$ на $[a, b]$ задана параметричними рівняннями $x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta$, причому $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ та $y > 0$. Функції $y = \psi(t), x = \varphi(t)$ є неперервно-диференційовними, а функція $x = \varphi(t)$ є зростаючою функцією на $[\alpha, \beta]$, тому $\varphi'(t), \psi(t)$ – додатні функції на відрізках $[\alpha, \beta], [a, b]$ відповідно ($\psi(t) = f(\varphi(t)) = y$).

У формулі (10.6) заміна змінної приводить до формули

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \int_a^b f^2(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \varphi'(t) dt,$$

тобто

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \varphi'(t) dt. \quad (10.9)$$

Якщо, на відміну від вище вписаних умов, $\varphi(\alpha) = b, \varphi(\beta) = a$ та функція $x = \varphi(t)$ є спадною, то слід користуватись формулою

$$V = -\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \varphi'(t) dt.$$

Мають місце аналогічні формули для обчислення об'єму тіла обертання криволінійної трапеції, заданої параметричними рівняннями, відносно осі Oy .

Приклад. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням астроїди $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases}$

навколо осі Oy .

Розв'язання. Оскільки астроїда є симетричною кривою відносно кожної із осей координат та, відповідно, початку координат, то можна використати формулу (10.9), причому $V = 2V_1$, де

$$\begin{aligned}
V_1 &= \pi \int_{\pi/2}^0 a^2 \sin^6 t (-3a \cos^2 t \sin t) dt = -3\pi a^3 \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t \sin t dt = \\
&= 3\pi a^3 \int_{\pi/2}^0 (\cos^2 t - 3\cos^4 t + 3\cos^6 t - \cos^8 t) d \cos t = \\
&= 3\pi a^3 \left(\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{3\cos^5 t}{5} + \frac{3\cos^7 t}{7} - \frac{\cos^9 t}{9} \right) \bigg|_{\pi/2}^0 = \\
&= 3\pi a^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right) = \frac{16}{105} \pi a^3.
\end{aligned}$$

Отже, $V = 2V_1 = \frac{32}{105} \pi a^3$, тобто обчислено об'єм тіла, утвореного обертанням астроїди навколо осі Oy та Ox .

Відповідь. $\frac{32}{105} \pi a^3$ од. об'єму.

Обчислення об'єму тіла обертання криволінійного сектора, заданого у полярних координатах, відносно полярної осі

Нехай криволінійний сектор [5], який задається неперервною функцією $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, (рис.10.5) обертається навколо полярної осі. Тоді утворений об'єм тіла обертання можна обчислити за формулою

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (10.10)$$

або за формулою $V = \frac{2}{3} \pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \cos \varphi d\varphi$.

Приклад. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі кардіоїди $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ (рис.10.6).

Розв'язання. Оскільки для половини кардіоїди $0 \leq \varphi \leq \pi$, то за формулою (10.10) маємо

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi} a^3 (1 + \cos \varphi)^3 \sin \varphi d\varphi = -\frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi} a^3 (1 + \cos \varphi)^3 d(1 + \cos \varphi) =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3 \left(\frac{(1 + \cos \varphi)^4}{4} \right) \bigg|_0^\pi = \frac{2}{3}\pi a^3 \cdot \frac{2^4}{4} = \frac{8}{3}\pi a^3.$$

Відповідь. $\frac{8}{3}\pi a^3$ од. об'єму.

10.3. Довжина дуги кривої

Ми розглянули ряд задач, які приводять до поняття визначеного інтеграла. Всі вони мають спільне, що в них знаходження значення будь-якої величини зводиться до визначення границі деякої інтегральної суми [10] при прямуванні діаметра поділу розбиття до нуля, тобто до визначеного інтеграла. Існує також інше коло задач, які приводять до поняття визначеного інтеграла. В них відома швидкість зміни однієї величини відносно іншої і потрібно знайти першу величину, або, точніше, дана похідна функції, а потрібно знайти саму функцію, тобто за заданою функцією знайти одну з її первісних. Ця задача також розв'язується за допомогою визначеного інтеграла, оскільки такою первісною є, наприклад, визначений інтеграл із змінною верхньою межею. Розглянемо для прикладу обчислення довжини дуги кривої [14].

Нехай крива Γ задана параметрично векторним записом $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, де функція $\vec{r}(t)$ неперервно-диференційовна на відрізку $[a, b]$. Тоді, як відомо, крива Γ спрямлювана, і зміна довжини дуги $l(t)$, яка відраховується від початкової точки (її радіус-вектор – це $\vec{r}(a)$) кривої Γ , є також неперервно-диференційовною функцією параметра t на відрізку $[a, b]$, причому

$$\frac{dl}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|.$$

Тому за формулою Ньютона-Лейбніца для довжини $l = l(b)$ кривої Γ одержимо

$$l = l(b) - l(a) = \int_a^b \frac{dl}{dt} dt,$$

звідки

$$l = \int_a^b \left| \frac{dr}{dt} \right| dt.$$

Якщо $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то

$$l = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt. \quad (10.11)$$

У випадку, коли крива Γ є графіком неперервно-диференційовної функції $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, формула (10.11) набуває вигляду

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (10.12)$$

Приклад. Обчислити довжину дуги напівкубічної параболи $y = x^{3/2}$, якщо $0 \leq x \leq 5$. (рис.10.9).

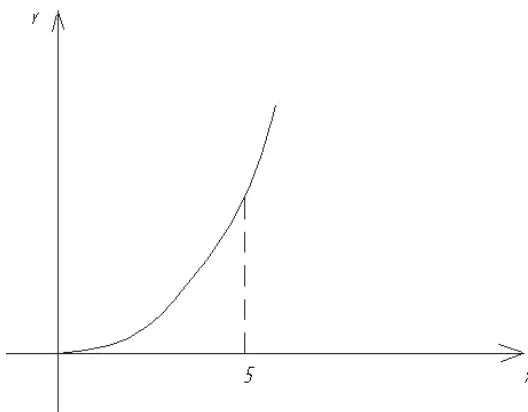


Рис.10.9. Вигляд дуги кривої.

Розв'язання. З рівняння $y = x^{3/2}$ знайдемо $y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$. Отже, за формулою (10.12)

$$l = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x \right)^{3/2} \Big|_0^5 = \frac{335}{27}.$$

Відповідь. $\frac{335}{27}$ од. довжини.

Зауваження. Для обчислення довжини дуги плоскої кривої у випадку, коли крива задана в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, де $\rho = \rho(\varphi)$ має неперервну похідну $\rho'(\varphi)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$, потрібно перейти від

полярних координат до прямокутних. Тоді одержимо параметричне задання кривої рівняннями $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ (φ – параметр).

Оскільки $x' = \rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi$, $y' = \rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi$, то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi.$$

10.4. Площа поверхні обертання

Нехай функція $f(x)$ невід'ємна і неперервна разом зі своєю першою похідною на відрізку $[a, b]$. Знайдемо площу поверхні, яка утворюється обертанням графіка цієї функції навколо осі Ox . Розіб'ємо довільний відрізок $[a, b]$ на n частин точками

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Нехай $A_0, A_1, \dots, A_n$ – відповідні точки графіка функції $f(x)$. Побудуємо ламану, що з'єднує точки $A_0, A_1, \dots, A_n$. При обертанні цієї ламаної навколо осі Ox одержимо поверхню, яка складається з бічних поверхонь зрізаних конусів(циліндрів).

Площа бічної поверхні зрізаного конуса (циліндра), утвореного обертанням i -тої ланки ламаної, дорівнює $2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} l_i$, де l_i – довжина хорди $A_{i-1}A_i$, $i = 1, \dots, n$, тобто

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

За формулою Лагранжа скінченних приростів

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i).$$

Поклавши $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$, одержимо

$$l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Отже, площа поверхні обертання наближено дорівнює площі поверхні, отриманої від обертання ламаної і має вигляд

$$P \approx \sum_{i=1}^n 2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Представимо цю суму у вигляді двох сум

$$P \approx 2\pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i + \\ + \pi \left(\sum_{i=1}^n [(f(x_{i-1}) - f(\xi_i)) + (f(x_i) - f(\xi_i))] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i \right). \quad (10.13)$$

Перша сума в правій частині (10.13) є аналогом інтегральної суми для інтеграла $2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$ і для $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ за неперервності функції

$f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}$ має границею цей інтеграл. Оскільки функція $f(x)$ рівномірно неперервна на $[a, b]$, то, за теоремою Кантора, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для $\lambda < \delta$ виконується нерівності $|f(x_{i-1}) - f(\xi_i)| < \varepsilon$ і $|f(x_i) - f(\xi_i)| < \varepsilon$. Якщо позначити через M максимальне значення функції $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ на відрізку $[a, b]$, то права сума в (10.13) при $\lambda < \delta$ оцінюється наступним чином

$$\left| \sum_{i=1}^n [(f(x_{i-1}) - f(\xi_i)) + (f(x_i) - f(\xi_i))] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i \right| < 2M\varepsilon \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 2M(b-a)\varepsilon.$$

Оскільки ε — довільно мале число, то звідси випливає, що границя вказаного виразу дорівнює нулю при $\lambda > 0$.

Таким чином, переходячи в рівності (10.13) до границі при $\lambda > 0$, матимемо

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (10.14)$$

Зауваження.

1) Якщо поверхня отримується обертанням навколо осі Ox кривої AB , яка задана параметричними рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, причому

$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, то, зробивши в інтегралі (10.14) заміну змінної $x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt$, матимемо

$$P = 2\pi \int_a^b \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (10.15)$$

2) Якщо крива задана в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$, де $\rho = \rho(\varphi)$ і має неперервну похідну $\rho'(\varphi)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$, то цей випадок зводиться до параметричного задання кривої $x = \rho(\varphi) \cos \varphi, y = \rho(\varphi) \sin \varphi, \alpha \leq \varphi \leq \beta$ (φ – параметр), тому формула (10.15) набуває вигляду

$$P = 2\pi \int_0^\pi \rho(\varphi) \sin \varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi. \quad (10.16)$$

Приклад. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням кардіоїди $\rho = 2a(1 + \cos \varphi)$ навколо полярної осі.

Розв'язання. Маємо $\rho' = -2a \sin \varphi$,

$$\sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} = \sqrt{4a^2(1 + \cos \varphi)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi} = 4a \cos \frac{\varphi}{2}.$$

$$P = 2\pi \int_0^\pi 2a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi \cdot 4a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 64\pi a^2 \int_0^\pi \cos^4 \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{128}{5} \pi a^2.$$

Відповідь. $\frac{128}{5} \pi a^2$ од. площі.

Завдання для самоконтролю

1. Записати формули обчислення площі криволінійної трапеції для різних випадків задання кривої.
2. Записати формули обчислення площі криволінійного сектора та навести приклад її використання.
3. Отримати формулу обчислення об'єму тіла, яке утворюється обертанням неперервної кривої навколо осі Oy .

4. Пояснити формулу обчислення об'єму тіла обертання навколо вказаної осі за відомою площею поперечного перерізу.

5. Записати формули обчислення об'єму тіла обертання криволінійної трапеції, заданої параметричними рівняннями, відносно осі Oy .

6. Отримати формулу обчислення об'єму тіла обертання криволінійного сектора, заданого у полярних координатах, відносно полярної осі.

7. Вивести формулу обчислення довжини дуги явно заданої неперервної кривої, користуючись засобами інтегрального числення і як наслідок, вивести формули для параметрично заданої кривої та кривої в полярній системі координат.

8. Пояснити отримання формули обчислення площі поверхні тіла обертання, утвореного обертанням навколо вказаної осі явно заданої функції.

9. Записати формули обчислення площі поверхні обертання тіла, утвореної обертанням навколо вказаної осі кривої, що задається параметричними рівняннями та в полярних координатах.

10. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y = 2 - x^2$ та $y = 2 - x$.

11. Обчислити площу фігури, яка обмежена лінією $\rho = 2 - \cos \varphi$.

12. Обчислити довжину дуги лінії $y = \ln x$, якщо $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$.

13. Обчислити об'єми тіл обертання навколо осей Ox та Oy фігури, яка обмежена лініями $y = x^2$ та $y = x$.

14. Обчислити об'єм тіла $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$.

15. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням астроїди $\begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 16 \sin^3 t, \end{cases}$

навколо осі Ox .

Відповіді. 9. $\frac{1}{6}$. 10. $\frac{9\pi}{2}$. 11. $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$. 12. $\frac{2\pi}{15}; \frac{\pi}{6}$. 13. 80π . 14. $\frac{2 \cdot 16^4}{105} \pi$.

Тема 11. Застосування визначеного інтеграла до розв'язання задач фізики

Розглянемо застосування визначеного інтеграла до розв'язування задач із використанням методу інтегральних сум та методу диференціала.

11.1. Задача про обчислення шляху

Нехай матеріальна точка [7] рухається прямолінійно з деякою миттєвою швидкістю $v = v(t)$. Треба знайти шлях, який пройде тіло за проміжок часу від $t = T_1$ до $t = T_2$.

У найпростішому випадку, якщо миттєва швидкість стала, тобто $v(t) = v_0 = \text{const}$, то шлях, пройдений тілом, дорівнює (за означенням, відомим з курсу фізики) добутку швидкості на час руху:

$$S = v_0(T_2 - T_1). \quad (11.1)$$

У загальному випадку, коли миттєва швидкість не стала, застосовують методи інтегрального числення. Проміжок часу $[T_1, T_2]$ ділять точками $T_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T_2$ на n відрізків $[t_{i-1}, t_i], i = 1, 2, \dots, n$, не обов'язково однакової довжини (можна, не втрачаючи загальності, розглядати і однакової довжини).

Далі, взявши на кожному відрізку $[t_{i-1}, t_i]$ довільну точку $\tau_i, i = 1, 2, \dots, n$, складають суму

$$\sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i. \quad (11.2)$$

Кожний доданок $v(\tau_i) \Delta t_i$ цієї суми дає наближене значення шляху, пройденого тілом за час на кожному відрізку $[t_{i-1}, t_i]$. Отже, шлях, пройдений тілом за час $[T_1, T_2]$, наближено виражається сумою (11.2).

Легко побачити, що наближення буде тим кращим, чим дрібніші відрізки поділу $[t_{i-1}, t_i], i=1, 2, \dots, n$. Тому шлях s , пройдений тілом за відрізок часу $[T_1, T_2]$, визначається як границя суми (11.2) при $n \rightarrow \infty$:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i.$$

Оскільки остання границя, за означенням, є визначний інтеграл від функції $v(t)$ на відрізку $[T_1, T_2]$, то шлях, пройдений тілом за проміжок часу $[T_1, T_2]$, обчислюють за формулою

$$S = \int_{T_1}^{T_2} v(t) dt. \quad (11.3)$$

Зауваження. За означенням швидкість $v(t)$ є похідна від пройденого шляху $s(t)$ за часом: $v(t) = s'(t)$. Іншими словами, функція $s(t)$ є первісною для функції $v(t)$. Шлях S , пройдений тілом за час від $t = t_1$ до $t = t_2$ є приростом функції $s = s(t)$ (приростом первісної) на відрізку $[t_1, t_2]$, який виражається за формулою Ньютона-Лейбніца, тобто $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$, за умови, що функція $v(t)$

неперервна. Аналогічно, $a(t) = v'(t)$, тоді $v(t) = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$.

Приклад. Тіло рухається прямолінійно з швидкістю $v(t) = (3t^2 + 4t + 1)$ м/с. Знайти шлях, який пройшло тіло за перші 3 с.

Розв'язання. За формулою (11.3) дістанемо

$$S = \int_0^3 (3t^2 + 4t + 1) dt = (t^3 + 2t^2 + t) \Big|_0^3 = 48 \text{ (м)}.$$

Відповідь. 48 м.

11.2. Задача про силу тиску рідини

Нехай пластинку у вигляді криволінійної трапеції [5] занурено вертикально в рідину з густиною ρ так, що її бічні сторони паралельні поверхні

рідини і лежать нижче від її рівня відповідно на відстані a і b . Визначити силу тиску рідини на пластинку.

Якщо пластинка буде в горизонтальному положенні на глибині h від поверхні (рівня) рідини, то сила тиску P рідини в ньютонках на горизонтальну пластинку дорівнюватиме вазі стовпа рідини, основа якого – дана пластинка, а висота – глибина h , тобто

$$P = g \rho h S, \quad (11.4)$$

де S – площа пластинки.

Але, якщо пластинку занурено в рідину вертикально, то за формулою (11.4) тиск рідини на пластинку не можна обчислити, бо в цьому разі тиск рідини на одиницю площі пластинки змінюється із зміною глибини занурення, тобто залежить від відстані пластинки до поверхні рідини.

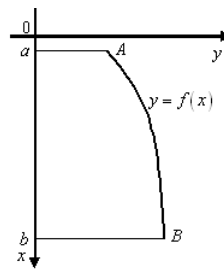


Рис.11.1. Пластинка, занурена вертикально в воду.

Розв'язуючи задачу, враховуватимемо те, що за законом Паскаля тиск у рідині передається однаково в усіх напрямках, у тому числі й на вертикальну площадку.

Для розв'язання задачі поділимо пластинку на n частин (малих горизонтальних смужок) прямими, які паралельні поверхні рідини, тобто паралельні осі Oy (в загальному випадку, не обов'язково повинні бути однакові частини) і проходять через точки $x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$, де

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}i, i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Виділимо одну із смужок на глибині x_i . Для досить вузької смужки тиск у всіх її частинах можна вважати наближено однаковим, а саму смужку можна

взяти за прямокутник з висотою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ і основою, яка дорівнює нижній основі смужки. Легко побачити, що довжина основи прямокутника є функцією від x . Позначимо цю функцію через $f(x)$, де $x \in [a; b]$. Отже, силу тиску P_i на i -ту смужку можна обчислити за формулою (11.4), тобто

$$P_i \approx g \rho f(x_i) x_i \Delta x_i.$$

Підсумувавши сили тиску на всі смужки, знайдемо наближене значення сили тиску рідини на всю пластинку

$$P \approx \sum_{i=1}^n g \rho f(x_i) x_i \Delta x_i.$$

Точність наближеної рівності тим більша, чим менші відрізки $[x_{i-1}; x_i]$, на які поділено відрізок $[a; b]$. Тому, точне значення сили тиску рідини на пластинку визначають за формулою

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g \rho f(x_i) x_i \Delta x_i.$$

За означенням визначеного інтеграла остання границя – це визначений інтеграл від функції $xf(x)$ на відріжку $[a; b]$, тому силу тиску рідини на пластинку обчислюють за формулою

$$P = g \int_a^b \rho x f(x) dx. \quad (11.5)$$

Зауваження. Якщо в рідину вертикально занурена пластинка $A_1 B_1 B_2 A_2$ (рис.11.2),

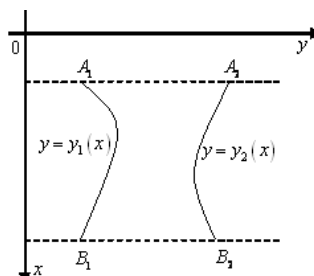


Рис.11.2. Пластинка $A_1 B_1 B_2 A_2$, занурена вертикально в воду.

обмежена прямими $x=a$, $x=b$ та кривими $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, то сила тиску на таку пластинку обчислюється за формулою:

$$P = g \int_a^b \rho x (y_2 - y_1) dx. \quad (11.6)$$

Приклад. Акваріум має форму прямокутного паралелепіпеда. Знайти силу тиску води (густина води 1000 кг/м^3), яка наповнює акваріум, на одну з його вертикальних стінок, розміри якої $0,4 \text{ м}$ та $0,7 \text{ м}$.

Розв'язання. Візьмемо систему координат так, щоб осі Oy і Ox відповідно містила верхню основу і бічну сторону вертикальної стіни акваріума. Щоб знайти силу тиску, скористаємось формулою (11.5).

Стінка має форму прямокутника, тому $f(x) = 0,7$, $x \in [0; 0,4]$. Оскільки межі інтегрування $a = 0$ і $b = 0,4$, то дістанемо

$$P = g \int_0^{0,4} 1000 \cdot 0,7 \cdot x dx = 700g \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,4} = 56g.$$

Враховуючи, що $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, маємо $P \approx 548,8 \text{ Н}$.

Відповідь. $548,8 \text{ Н}$.

11.3. Робота змінної сили

Нехай матеріальна точка під дією сили F рухається по прямій. Якщо діюча сила стала, а пройдений шлях дорівнює s , то, як відомо з курсу фізики, роботу A [10] цієї сили F обчислюють за формулою

$$A = F \cdot s. \quad (11.7)$$

Перейдемо тепер до розгляду питання про знаходження роботи змінної сили. Нехай матеріальна точка рухається вздовж осі Ox під дією сили, проекція якої на вісь Ox – це функція від x . Позначимо її через $f(x)$ і припустимо, що вказана функція є неперервною. Нехай під дією сили F матеріальна точка перемістилась з точки $M(a)$ в точку $M(b)$. Доведемо, що робота в цьому разі обчислюється за формулою

$$A = \int_a^b f(x) dx. \quad (11.8)$$

Поділимо відрізок $[a; b]$ точками $x_i = a + \frac{b-a}{n}i$ на n частин $[x_{i-1}; x_i]$, можна і однакової довжини $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. На кожному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ роботу сили можна наближено обчислювати за формулою (11.7), тобто вважати, що вона дорівнює $f(\xi_i)\Delta x_i$, де ξ_i – деяка точка відрізка $[x_{i-1}; x_i]$. Тоді робота сили на відрізку $[a; b]$ наближено виражатиметься формулою $A \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$.

Точність наближення буде тим точнішою, чим меншими є відрізки $[x_{i-1}; x_i]$, на які поділено відрізок $[a; b]$. Тому, переходячи в останній рівності до границі при $n \rightarrow \infty$, дістаємо

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx. \quad (11.9)$$

Отже, робота змінної сили обчислюється за формулою (11.8).

Приклад. Сила пружності пружини, розтягнутої на 0,05м, дорівнює 3Н. Яку роботу треба виконати, щоб розтягти пружину на ці 0,05м?

Розв'язання. За законом Гука сила F , яка розтягує або стискає пружину, пропорційна цьому розтягу або стиску, тобто $F = kx$, де x – величина розтягу або стиску, k – коефіцієнт пропорційності. З умови випливає, що $3 = k \cdot 0,05$, тобто $k = 60$, отже, $F = 60x$.

Використовуючи формулу (11.8), дістаємо

$$A = \int_0^{0,05} 60x dx = 30x^2 \Big|_0^{0,05} = 0,075 \text{ (Дж)}.$$

Відповідь. 0, 075 Дж.

11.4. Статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас

11.4.1. Основні поняття та означення

Розглянемо прямокутну систему координат Oxy .

Означення. Статичним моментом матеріальної точки $A(x; y)$, в якій зосереджена маса m , відносно осі Ox (осі Oy) називається величина, яка

чисельно дорівнює добутку маси цієї точки на відстань до осі Ox (осі Oy):

$$M_x = my \quad (M_y = mx).$$

Означення. Моментом інерції матеріальної точки $A(x; y)$, в якій зосереджена маса m , відносно осі Ox (осі Oy , початку координат) називається величина, яка чисельно дорівнює добутку маси цієї точки і квадрата відстані до осі Ox (осі Oy , початку координат):

$$I_x = my^2, \quad I_y = mx^2, \quad I_0 = I_x + I_y = m(x^2 + y^2).$$

Якщо задана система матеріальних точок $A_1(x_1; y_1), A_2(x_2; y_2), \dots, A_n(x_n; y_n)$, в яких зосереджені маси $m_1, m_2, \dots, m_n$, то статичні моменти обчислюють за формулами:

$$M_x = \sum_{k=1}^n m_k y_k, \quad M_y = \sum_{k=1}^n m_k x_k,$$

а моменти інерції – за формулами:

$$I_x = \sum_{k=1}^n m_k y_k^2, \quad I_y = \sum_{k=1}^n m_k x_k^2, \quad I_0 = I_x + I_y = \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2) m_k.$$

Означення. Центром мас системи матеріальних точок називається точка із властивістю: якщо в цій точці зосередити всю масу $M = \sum_{k=1}^n m_k$ системи, то статичний момент цієї точки відносно будь-якої осі дорівнює статичному моменту даної системи матеріальних точок відносно цієї ж осі.

Тому, позначивши центр мас системи $C(x_C; y_C)$, маємо:

$$M_x = \sum_{k=1}^n m_k y_k = M y_C, \quad M_y = \sum_{k=1}^n m_k x_k = M x_C.$$

Таким чином, координати центра мас системи матеріальних точок обчислюються за формулами:

$$x_C = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad y_C = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}.$$

11.4.2. Обчислення маси, статичних моментів, координат центра мас та моментів інерції плоскої кривої

Нехай на спрямлюваній кривій AB , яка задана рівнянням $y = f(x)$, розподілена маса з густиною $\rho = \rho(x)$ (рис. 11.3).

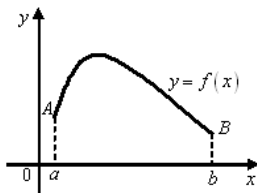


Рис.11.3. Крива AB .

Справедливі формули:

маса кривої:

$$M = \int_a^b \rho \sqrt{1 + (y')^2} dx;$$

статичні моменти кривої відносно осей Ox , Oy :

$$M_x = \int_a^b \rho y \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad M_y = \int_a^b \rho x \sqrt{1 + (y')^2} dx;$$

координати центра мас:

$$x_c = \frac{M_y}{M}, \quad y_c = \frac{M_x}{M};$$

моменти інерції відносно осей Ox , Oy та початку координат $O(0,0)$:

$$I_x = \int_a^b \rho y^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad I_y = \int_a^b \rho x^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad I_0 = I_x + I_y.$$

Для параметричного і полярного задання плоскої лінії AB відповідні формули наводяться в таблиці 11.1.

Таблиця 11.1.

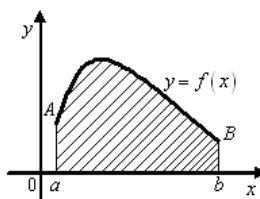
Формули для обчислення маси, статичних моментів, координат центра мас та моментів інерції плоскої лінії

Параметричне задання $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha; \beta]$	Полярне задання $r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha; \beta]$
<i>Маса</i>	
$M = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(x(t)) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$	$M = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(r(\varphi) \cos \varphi) \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi$
<i>Статичні моменти</i>	
$M_x = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(x(t)) y(t) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt,$ $M_y = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(x(t)) x(t) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$	$M_x = \int_{\alpha}^{\beta} \rho r(\varphi) \sin \varphi \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi,$ $M_y = \int_{\alpha}^{\beta} \rho r(\varphi) \cos \varphi \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi,$ $\rho = \rho(r(\varphi) \cos \varphi)$
<i>Моменти інерції</i>	
$I_x = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(x(t)) y^2(t) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt,$ $I_y = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(x(t)) x^2(t) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt,$ $I_0 = I_x + I_y$	$I_x = \int_{\alpha}^{\beta} \rho r^2(\varphi) \sin^2 \varphi \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi,$ $I_y = \int_{\alpha}^{\beta} \rho r^2(\varphi) \cos^2 \varphi \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi,$ $\rho = \rho(r(\varphi) \cos \varphi)$

Зауваження. Лінія (фігура) називається *однорідною*, якщо $\rho = \text{const}$ вздовж всієї лінії (фігури). Якщо при цьому $\rho = 1$, то маса лінії (фігури) дорівнює довжині лінії (площі фігури).

11.4.3. Обчислення маси, статичних моментів, координат центра мас та моментів інерції плоскої фігури

Нехай задана матеріальна криволінійна трапеція $aABb$, обмежена графіком функції $y = f(x) \geq 0, x \in [a; b]$, віссю Ox і прямими $x = a, x = b$ (рис. 11.4).

Рис.11.4. Криволінійна трапеція $aABb$.

Припустимо, що на фігурі розподілена маса з густиною $\rho = \rho(x)$.

За такими формулами обчислюють:

$$\text{масу фігури: } M = \int_a^b \rho y dx;$$

статичні моменти відносно осей координат:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \rho y^2 dx, \quad M_y = \int_a^b \rho x y dx;$$

моменти інерції відносно осей координат:

$$I_x = \frac{1}{2} \int_a^b \rho y^3 dx, \quad I_y = \int_a^b \rho x^2 y dx;$$

$$\text{координати центра мас: } x_c = \frac{M_y}{M}, \quad y_c = \frac{M_x}{M}.$$

Для параметричного та полярного задання плоскої фігури відповідні формули наведено в таблиці 11.2.

Таблиця 11.2

Формули для обчислення маси, статичних моментів, координат центра мас та моментів інерції плоскої фігури

Параметричне задання $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha; \beta]$	Полярне задання $r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha; \beta]$
<i>Маса</i>	
$M = \int_a^\beta \rho(x(t)) y(t) x'(t) dt$	$M = \frac{1}{2} \int_a^\beta \rho(r(\varphi) \cos \varphi) r^2(\varphi) d\varphi$
<i>Статичні моменти</i>	
$M_x = \frac{1}{2} \int_a^\beta \rho(x(t)) y^2(t) x'(t) dt,$ $M_y = \int_a^\beta \rho(x(t)) x(t) x'(t) dt$	$M_x = \frac{1}{3} \int_a^\beta \rho r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi,$ $M_y = \frac{1}{3} \int_a^\beta \rho r^3(\varphi) \cos \varphi d\varphi,$ $\rho = \rho(r(\varphi) \cos \varphi)$
<i>Моменти інерції</i>	
$I_x = \frac{1}{3} \int_a^\beta \rho(x(t)) y^3(t) x'(t) dt,$ $I_y = \int_a^\beta \rho(x(t)) x^2(t) y(t) x'(t) dt,$	$I_x = \frac{1}{4} \int_a^\beta \rho r^4(\varphi) \sin^2 \varphi d\varphi,$ $I_y = \frac{1}{4} \int_a^\beta \rho r^4(\varphi) \cos^2 \varphi d\varphi,$ $\rho = \rho(r(\varphi) \cos \varphi)$

Приклад. Знайти статичні моменти та моменти інерції відносно осей Ox

та Oy дуги ланцюгової лінії $y = \operatorname{ch} x$, $0 \leq x \leq 1$.

Розв'язання. Маємо $y' = \operatorname{sh} x$, $\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + (\operatorname{sh} x)^2} = \operatorname{ch} x$. Тоді

$$M_x = \int_0^1 \operatorname{ch}^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \operatorname{ch} 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \operatorname{sh} x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} (2 + \operatorname{sh} 2),$$

$$M_y = \int_0^1 x \operatorname{ch} x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x, dv = \operatorname{ch} x \, dx, \\ du = dx, v = \operatorname{sh} x \end{array} \right] = x \operatorname{sh} x \Big|_0^1 -$$

$$- \int_0^1 \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} x \Big|_0^1 = \operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1 + 1,$$

$$I_x = \int_0^1 \operatorname{ch}^3 x \, dx = \int_0^1 (1 + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{ch} x \, dx = \left(\operatorname{sh} x + \frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 x \right) \Big|_0^1 = \operatorname{sh} 1 + \frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 1,$$

$$I_y = \int_0^1 x^2 \operatorname{ch} x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2, dv = \operatorname{ch} x \, dx, \\ du = 2x \, dx, v = \operatorname{sh} x \end{array} \right] = x^2 \operatorname{sh} x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x \operatorname{sh} x \, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = x, dv = \operatorname{sh} x \, dx, \\ du = dx, v = \operatorname{ch} x \end{array} \right] = \operatorname{sh} 1 - 2 \left(x \operatorname{ch} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \operatorname{ch} x \, dx \right) =$$

$$= \operatorname{sh} 1 - 2 \operatorname{ch} 1 + 2 \operatorname{sh} 1 = 3 \operatorname{sh} 1 - 2 \operatorname{ch} 1.$$

Відповідь. $M_x = \frac{1}{4} (2 + \operatorname{sh} 2)$; $M_y = \operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1 + 1$; $I_x = \operatorname{sh} 1 + \frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 1$;

$I_y = 3 \operatorname{sh} 1 - 2 \operatorname{ch} 1$.

Приклад. Знайти координати центра мас дуги кола [5]

$$x = a \cos t, y = a \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Розв'язання. Маса дуги кола в першій чверті $M = \frac{\pi a}{2}$.

Маємо $x' = -a \sin t$, $y' = a \cos t$, $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} = a$.

Тоді

$$M_x = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = a^2 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2, \quad M_y = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = -a^2 \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2.$$

$$\text{Отже, } x_C = \frac{M_y}{M} = \frac{a^2}{\frac{\pi a}{2}} = \frac{2a}{\pi}, y_C = \frac{M_x}{M} = \frac{a^2}{\frac{\pi a}{2}} = \frac{2a}{\pi}.$$

$$\text{Відповідь. } x_C = \frac{2a}{\pi}, y_C = \frac{2a}{\pi}.$$

11.5. Деякі застосування визначеного інтеграла в інших науках

Визначений інтеграл широко застосовується не тільки в математиці та фізиці, а й, наприклад, в хімії, біології та інших науках.

Визначений інтеграл в задачах хімії, біології

Приклад1. Виведемо формулу для обчислення кількості речовини, яка вступила в хімічну реакцію за проміжок часу $[\tau_1, \tau_2]$, швидкість хімічного перетворення якої $v = v(t)$.

Розв'язання. Оскільки $v = v(t)$ неперервна і невід'ємна функція на відрізку $[\tau_1, \tau_2]$, то для розв'язання задачі засобами інтегрального числення виконують такі кроки:

1) Розбиття відрізка $[\tau_1, \tau_2]$ на n , не обов'язково рівних, частин точками $\tau_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \tau_2$ та знаходження довжини кожного з відрізків $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, тобто величини Δt_k .

2) Утворення добутоків $v(\xi_k) \Delta t_k$, – приростів кількості речовини, яка вступила в реакцію за проміжок часу Δt_k , $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$; суми добутоків $m_n = \sum_{k=1}^n v(\xi_k) \Delta t_k$ – наближеного значення приросту кількості речовини, яка вступила в хімічну реакцію;

3) $m = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n$ – приріст кількості речовини, яка вступила в хімічну реакцію за проміжок часу $[\tau_1, \tau_2]$.

Застосувавши поняття інтеграла приходять до висновку: кількість хімічної речовини m , яка вступила в хімічну реакцію за проміжок часу $[\tau_1, \tau_2]$ дорівнює

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} v(t) dt.$$

За таким же алгоритмом одержують формулу приросту P особин популяції за проміжок часу $[\tau_1, \tau_2]$, але в цьому випадку $v(t)$ – швидкість зростання популяції.

Приклад 2. Швидкість зміни концентрації речовини, що вступила в реакцію, виражається функцією $v(t) = 3t + 1$, де t – час (с), $v(t)$ – швидкість (моль/с·м³). Як зміниться концентрація речовини за час 5 с?

Розв'язання. Задача розв'язується методом безпосереднього інтегрування. Оскільки $v(t) = C'(t)$, де $C(t)$ – концентрація речовини і первісна для $v(t)$, тому

$$C(5) - (0) = \int_0^5 (3t + 1) dt = \left(\frac{3t^2}{2} + t \right) \Big|_0^5 = 42,5 \text{ (моль/м}^3\text{)}.$$

Відповідь. 42,5 моль/м³.

Приклад 3. Швидкість зростання популяції пеніцилінових грибків при необмеженості ресурсів живлення описується експоненціальним законом $v = ae^{kt}$. Знайдіть приріст чисельності популяції ΔP за проміжок часу $\Delta t = t - t_0$.

Розв'язання. Задача також розв'язується методом безпосереднього інтегрування. Приріст чисельності популяції

$$\Delta P = \int_{t_0}^t ae^{kt} dt = \frac{a}{k} e^{kt} \Big|_{t_0}^t = \frac{a}{k} (e^{kt} - e^{kt_0}) = P(t) - P(t_0).$$

Відповідь. $\Delta P = P(t) - P(t_0)$.

Визначений інтеграл в економічних задачах

Основні економічні задачі, які використовують визначений інтеграл: визначення загального обсягу випущеної продукції, визначення коефіцієнта

Джині, дисконтованого значення грошових доходів, розрахунок надлишку виробника та надлишку споживача. Розглянемо на прикладах деякі з них.

Приклад 1. Знайти обсяг продукції, виробленої за чотири роки, якщо продуктивність праці характеризується формулою $f(t) = (1+t)e^{3t}$.

Розв'язання. Якщо $f(t)$ – продуктивність праці в момент часу t , то

$U = \int_0^T f(t)dt$ – обсяг продукції, що випускається за проміжок часу $[0; T]$;

$U = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ – обсяг продукції, що випускається за проміжок часу $[t_1; t_2]$.

Отже, обсяг виробленої продукції дорівнює

$$U = \int_0^4 (1+t)e^{3t} dt.$$

Використаємо метод інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^4 (1+t)e^{3t} dt = \left| \begin{array}{l} u = 1+t, \quad du = dt \\ dv = e^{3t} dt, v = \int e^{3t} dt = \frac{1}{3}e^{3t} \end{array} \right| = \\ &= (t+1)\frac{1}{3}e^{3t} \Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{3}e^{3t} dt = \frac{5}{3}e^{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}e^{3t} \Big|_0^4 = \\ &= \frac{1}{3}(5e^{12} - 1) - \frac{1}{9}(e^{12} - 1) = \frac{1}{9}(14e^{12} - 2) \approx 2,53 \cdot 10^5. \end{aligned}$$

Відповідь. $2,53 \cdot 10^5$ ум. одиниць.

Приклад 2. Знаходження капіталу за відомими інвестиціями

Розглянемо задачу знаходження капіталу (основних фондів) за відомими частими інвестиціями. Чисті інвестиції (капіталовкладення) – це загальні інвестиції, які були зроблені за певний проміжок часу, за винятком інвестицій на відшкодування основних фондів (капіталу), які виходять з ладу. Таким чином, за одиницю часу капітал збільшується на суму чистих інвестицій.

Якщо капітал розглядати як функцію часу $K(t)$, а чисті інвестиції, відповідно, як $f(t)$, то викладене вище можна записати у вигляді $f(t) = \frac{d}{dt} K(t)$.

Часто вимагається знайти приріст капіталу за період з моменту часу t_1 до t_2 , тобто величину $\Delta K = K(t_2) - K(t_1)$. Враховуючи, що $K(t)$ – первісна для функції $f(t)$, маємо

$$\Delta K = K(t_2) - K(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

Відповідь. $\Delta K = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$

Приклад 3. Чисті інвестиції задано функцією $f(t) = 7000\sqrt{t}$. Визначити:

- а) приріст капіталу за три роки;
- б) термін часу (у роках), після якого приріст капіталу складає 50000.

Розв'язання. а) Скористаємося вище записаною формулою для обчислення приросту капіталу:

$$\Delta K = K(3) - K(0) = \int_0^3 7000\sqrt{t} dt = 7000 \frac{2}{3} t^{3/2} \Big|_0^3 = 7000 \frac{2}{3} \sqrt{3^3} = 24248,71.$$

б) Позначимо шукану тривалість часу через T , тоді $\Delta K = \int_0^T f(t) dt.$

Підставляємо $\Delta K = 50000$ і $f(t) = 7000\sqrt{t}$. Тоді

$$50000 = \int_0^T 7000\sqrt{t} dt; \int_0^T 7000\sqrt{t} dt = 7000 \frac{2}{3} t^{3/2} \Big|_0^T = 7000 \frac{2}{3} T^{3/2};$$

$$50000 = 7000 \frac{2}{3} T^{3/2}; T^{3/2} = \frac{50000 \cdot 3}{7000 \cdot 2} = 10,71;$$

$$T = (10,71)^{2/3} = 4,86.$$

Відповідь. а) $\Delta K = 24248,71$; б) 4,86 років.

Завдання для самоконтролю

1. Вивести формулу обчислення шляху із використанням інтегрального числення.

2. Обчислити шлях, пройдений тілом при рівномірному русі за інтервал часу від t_1 до t_2 :

1) $v(t) = 5t - 3, t_1 = 0, t_2 = 3$; 2) $v(t) = 1 + 3t, t_1 = 2, t_2 = 5$.

3. Знайти кількість електрики, що проходить через поперечний переріз провідника за час від t_1 до t_2 під дією сили струму $I(t)$.

4. Обчислити масу $m(l)$ неоднорідного стержня за його лінійною густиною $\rho(l)$.

5. Пояснити задачу обчислення сили тиску рідини на поверхню.

6. Обчислити тиск води на вертикальний прямокутний шлюз із основою 20м і висотою 5м.

7. Обчислити тиск води на поверхню кулі діаметром 6м, якщо її центр знаходиться на глибині 4м від поверхні води.

7. Пояснити задачу знаходження роботи змінної сили.

8. Обчислити роботу, яка виконується під час тиску гвинтової пружини на 4см, якщо для її стискання на 1см треба прикласти силу в 9,8Н.

9. Обчислити роботу, необхідну для викачування рідини з вертикальної циліндричної посудини висотою 5м та радіусом основи 2м, якщо питома вага рідини 900 кг/м^3 .

10. Пояснити основні формули обчислення маси, статичних моментів, координат центра мас та моментів інерції плоскої кривої.

11. Записати основні формули обчислення маси, статичних моментів, координат центра мас та моментів інерції однорідної плоскої фігури (густина вважати 1).

12. Обчислити координати центра мас фігури, обмеженої лініями $y = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 3, y = -\frac{1}{2}(x-6)^2 + 5$.

13. Знайти моменти інерції еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ відносно осей координат.

14. Експериментально встановлено, що продуктивність праці робітника наближено виражається функцією $f(t) = -0,0036t^2 - 0,089t + 20,96$, де t – час у

годинах. Обчислити обсяг випуску продукції за квартал, вважаючи робочий день восьмигодинним, а кількість робочих днів у кварталі 62.

Відповіді. 2. 1) 13,5; 2) 34,5.

3. Вказівка. $I(t) = q'(t)$. 4. Вказівка. $\rho = m'(l)$.

6. 2,45 МН. 7. 1,41МН. 8. 0,784Дж. 9. 441450Дж. 12. $x_c = 5, y_c = 4$.

13. $I_x = \frac{27}{2}\pi, I_y = 6\pi$. 14. ≈ 10185 од.

Частина II. Диференціальні рівняння та системи диференціальних рівнянь

У більшості випадків закони, що керують тими чи іншими природними явищами, знаходять своє відображення у формі диференціальних рівнянь. Ісаак Ньютон, який вважається засновником математичного природознавства розглядав дві задачі. У першій з них було необхідно для заданої функції визначити відповідну їй похідну. Отже, це задача диференціального числення. Друга задача передбачає, що за рівнянням, яке містить похідні, визначають співвідношення між функцією та аргументом. Ця задача визначає вже зміст теорії звичайних диференціальних рівнянь. Своє відкриття у цій галузі Ньютон вважав таким важливим, що відомості про нього надав лише у зашифрованому вигляді. У перекладі зміст цього відкриття такий: «Розв'язувати диференціальні рівняння корисно».

Тема 12. Диференціальні рівняння 1-го порядку

12.1. Основні поняття для диференціальних рівнянь 1-го порядку.

Теорема Коші існування та єдиності розв'язку задачі Коші

Розглянемо відомі задачі, що приводять до поняття диференціального рівняння та його розв'язування.

1) *Приклад із математичного аналізу.* Із співвідношення $\frac{dy}{dx} = f(x)$, де $f(x)$ – відома функція, знайти невідому функцію $y = y(x)$. Тоді розв'язки – невизначений інтеграл

$$y = \int f(x)dx + C,$$

де C – довільна стала (функція $y = f(x)$ є інтегрованою).

Розв'язок, який містить довільну сталу C , називають *загальним розв'язком* рівняння; розв'язок, утворений із загального, при окремому значенні $C \in (-\infty; +\infty)$ називають *частинним*.

Якщо $f(x)$ є неперервна функція на деякому проміжку (a, b) , то розв'язок можна записати так:

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx + C,$$

де x_0 – довільна точка проміжку. При $x = x_0$ матимемо $C = y(x_0)$. Якщо позначити $y(x_0) = y_0$, тоді розв'язок диференціального рівняння запишеться у вигляді

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x)dx.$$

З останнього слідує, що частинний розв'язок диференціального рівняння цілком визначається, якщо задати певне (початкове) значення y_0 функції $y(x)$.

Числа x_0 та y_0 називають *початковими даними* або *початковими умовами*.

2) Приклад із механіки

Нехай матеріальна точка M з масою m рухається прямолінійно під дією сили $\vec{F} = \vec{F}(t)$, напрям дії якої збігається з напрямом руху точки M , а величина її дорівнює $F(t)$. Треба знайти закон, за яким відбувається рух точки.

Позначимо $x = x(t)$ шлях, який точка пройде від початку руху за час t . За другим законом Ньютона

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t).$$

Отримане рівняння є диференціальним рівнянням другого порядку. Знаходження невідомої функції, що входить в нього, називають *розв'язанням* або *інтегруванням*.

Зінтегруємо рівняння. Записуємо його у вигляді $\frac{d}{dx}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \frac{1}{m}F(t)$, так

як $\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$, тоді $\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{m}F(t)$, звідки і знаходимо

$$v(t) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt + C_1,$$

де C_1 – стала інтегрування.

Підставляючи $\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$, маємо $\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt + C_1$, яке зінтегруємо:

$$x(t) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^t F(t) dt \right) dt + C_1(t - t_0) + C_2,$$

де C_2 – довільна стала.

Сталим C_1, C_2 надають певного змісту: $C_1 = v(t_0) = v_0$, $C_2 = x(t_0) = x_0$ і поклавши $t_0 = 0$, маємо

$$x(t) = \frac{1}{m} \int_0^t \left(\int_0^t F(t) dt \right) dt + v_0 t + x_0,$$

де v_0 – початкова швидкість, а x_0 – початкове положення точки.

Означення. Диференціальним рівнянням 1-го порядку, розв'язаним відносно похідної, називають співвідношення вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (12.1)$$

де $f(x, y)$ – задана і неперервна функція двох змінних в деякій області двовимірного простору R^2 .

Означення. Диференціальне рівняння, нерозв'язне відносно y' , називають неявним диференціальним рівнянням:

$$F(x, y, y') = 0, \quad (12.2)$$

де $F(x, y, y')$ – задана функція трьох змінних x, y, y' , які змінюються в деякій області тривимірного простору.

Нехай $f(x, y)$ – визначена і неперервна в деякій області $D \subset R^2$.

Означення. Область D називають *областю визначення* диференціального рівняння (12.1).

Якщо $f(x, y)$ в околі точки $(x_0, y_0) \in D$ є необмеженою, тоді розглядають диференціальні рівняння $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$.

Означення. Розв'язком диференціального рівняння (12.1) на проміжку (a, b) (a і b можуть бути і невластими числами, відповідно $-\infty$ та $+\infty$) називається функція $y = \varphi(x)$, яка задовольняє умови:

1) $\varphi(x)$ має на проміжку (a, b) неперервну похідну і не виходить для всіх $x \in (a, b)$ з області визначення D ;

2) для $\forall x \in (a, b)$: $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$.

Якщо проміжок (a, b) є відрізок або піввідрізок, то під похідною $\varphi'(x)$ в кінцевих точках розуміють односторонню похідну (також так розуміють неперервність функції).

Розглянемо задачу Коші та теорему Коші [12] існування і єдиності її розв'язку.

Задача Коші: Серед усіх розв'язків диференціального рівняння (12.1) знайти такий розв'язок $y = y(x)$, який при заданому значенні незалежної змінної $x = x_0$ дорівнює заданому значенню y_0 : $y(x_0) = y_0$.

Теорема (теорема Коші існування і єдиності розв'язку задачі Коші).

Нехай для (12.1) виконані умови:

1) Функція $f(x, y)$ є неперервною в замкненому прямокутнику R : $[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, $a > 0, b > 0$. Тоді $\exists M > 0$, що для $\forall (x, y) \in R$ виконується нерівність $|f(x, y)| \leq M$ (обмеженість функції);

2) Функція $f(x, y)$ за змінною y в прямокутнику задовольняє умові Ліпшиця

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

де L – стала Ліпшиця, а точки $(x, y_1), (x, y_2)$ – довільні точки із прямокутника.

Тоді на відрізку $[x_0 - h, x_0 + h]$, де $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ (12.1), який для $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ не виходить із прямокутника R і $y(x_0) = y_0$.

Теорема. Якщо функція $f(x, y)$ в прямокутнику R має обмежену частинну похідну за змінною y , тобто $|f'_y(x, y)| \leq A$, де A – додатне число, тоді умова Ліпшиця виконується.

Доведення. Різницю $f(x, y_1) - f(x, y_2)$ можна розглядати як частинний приріст за змінною y і застосувати теорему Лагранжа про скінченний приріст:

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = f'_y(x, y_1 + \theta(y_1 - y_2))(y_1 - y_2), \quad 0 < \theta < 1.$$

Тоді, згідно із обмеженістю частинної похідної за другою змінною, впливає виконання умови Ліпшиця.

В результаті інтегрування (12.1) отримуємо всі розв'язки у вигляді загального

$$y = \varphi(x, C). \quad (12.3)$$

Тоді, якщо задати початкові дані, то за теоремою Коші із загального можна дістати єдиний розв'язок, що задовольняє дану початкову умову. При цьому треба знайти значення C , що відповідає даним початковим умовам.

Отже, (12.3) повинно допускати розв'язання відносно C , яке повинно забезпечувати єдиність розв'язку задачі Коші.

Означення. Нехай область $D \subset R^2$ є тією областю, в кожній точці якої (12.1) має єдиний розв'язок. Тоді функція (12.3), яка визначена в деякій області змінних x, C і має в цій області неперервну похідну за змінною x , називається загальним розв'язком (12.1), якщо:

- 1) (12.3) допускає розв'язання відносно C , тобто $C = \psi(x, y)$;
- 2) для всіх x, y із області D $C = \psi(x, y)$ дає таке значення C , включаючи $\pm \infty$, при якому функція (12.3) є розв'язок (12.1).

Означення. Розв'язок (12.1), в кожній точці якого виконуються умови єдиності, називається частинним.

Означення. Загальний розв'язок є сім'я кривих, залежних від параметра C , яку називають *інтегральною сім'єю кривих*, частинний розв'язок – *інтегральною кривою* для (12.1).

Означення. Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності, називають *особливим*.

Геометричне тлумачення. Диференціальне рівняння $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ задає в області D поле напрямів ($\forall (x_0, y_0) \in D: \alpha_0 = \arctg \frac{dy}{dx} = \arctg f(x_0, y_0)$). Тому задача інтегрування (12.1) – *знайти такі криві, дотичні до яких в кожній точці збігаються з напрямом поля в цій точці*.

12.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Означення. Рівняння вигляду

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (12.4)$$

де $M_1(x), M_2(x), N_1(y), N_2(y)$ – задані і неперервні на деякому інтервалі функції, називають диференціальним рівнянням, яке допускає *відокремлювання змінних*.

Для відокремлювання змінних в рівнянні (12.4) досить його помножити на функцію $\frac{1}{N_1(y)M_2(x)}$ за умови $N_1(y) \neq 0, M_2(x) \neq 0$:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Інтегруючи, отримаємо загальний інтеграл (12.4) у вигляді:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Тут окремо слід дослідити ті значення x та y , за яких функції $N_1(y)$ і $M_2(x)$ дорівнюють 0. Корені рівнянь $N_1(y) = 0$ та $M_2(x) = 0$ також будуть розв'язками (12.4) (можуть бути особливими, тоді їх слід записувати додатково до загального інтеграла).

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння першого порядку

$$(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0.$$

Розв'язання. Перетворимо дане рівняння: $y(1 - x^2)dy = -x(y^2 + 1)dx$.

Рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні за умови $1 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

$$\frac{ydy}{y^2 + 1} = \frac{-x dx}{1 - x^2}.$$

Інтегруємо отриману рівність:

$$\int \frac{ydy}{y^2 + 1} = -\int \frac{x dx}{1 - x^2}, \quad \frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + \frac{1}{2} \ln C,$$

$$y^2 + 1 = C|x^2 - 1|, \quad y^2 = C|x^2 - 1| - 1.$$

Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y = \pm \sqrt{C|x^2 - 1| - 1}.$$

Значення $x = \pm 1$ задовольняють початкове рівняння та не входять в загальний розв'язок.

$$\text{Відповідь. } y = \pm \sqrt{C|x^2 - 1| - 1}, \quad x = \pm 1.$$

12.3. Однорідні диференціальні рівняння (права частина є однорідною функцією нульового виміру)

Означення. Функція $f(x, y)$ називається *однорідною функцією n -го виміру* відносно змінних x та y , якщо для $\forall t \neq 0$ виконується рівність:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Означення. Диференціальне рівняння $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ називають *однорідним*, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Зауваження. Рівняння вигляду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ буде однорідним тоді і тільки тоді, коли функції $P(x, y), Q(x, y)$ будуть однорідними функціями одного й того самого виміру.

Однорідні рівняння зводять до рівнянь з відокремлюваними змінними підстановкою

$$y = u \cdot x, \quad u = u(x) \quad (12.5)$$

Якщо функція (12.5) є розв'язком диференціального. рівняння, тоді

$$u + x \frac{du}{dx} = f(x, ux).$$

Поклавши $t = \frac{1}{x}$, дістанемо $f(x, ux) = f(1, u)$ і рівняння з

відокремлюваними змінними:

$$u + x \frac{du}{dx} = f(1, u).$$

За умови $f(1, u) - u \neq 0$, знаходимо:

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \ln|x| + C, \quad u = \frac{y}{x} \text{ — загальний інтеграл рівняння.}$$

Якщо $f(1, u) - u = 0$, то рівняння запишеться у вигляді $x \frac{du}{dx} = 0$ і можуть бути ще розв'язки $y = Cx$ ($x \neq 0$) та $x = 0$ ($y \neq 0$).

Зауваження. Рівняння виду $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$, $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$, а f — довільна неперервна функція в розглядуваній області введенням нових змінних ξ, η за формулами $x = \xi + h, y = \eta + k$ приводиться до однорідного.

Зауваження. Рівняння вигляду [9]

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right) \quad (12.6)$$

зводиться до однорідного. Якщо $c_1 = c = 0$, то це однорідне рівняння.

Припустимо, що хоч одне з чисел c_1, c не дорівнюють 0. Можливі два випадки.

Перший випадок. $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$. Проводимо заміну

$$x = \xi + \alpha, y = \eta + \beta, \quad (12.7)$$

де ξ, η – нові змінні, α, β – параметри. Тоді

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a\xi + b\eta + a\alpha + b\beta + c}\right). \quad (12.8)$$

Параметри α, β вибираємо згідно системи

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a\alpha + b\beta + c = 0. \end{cases} \quad (12.9)$$

Так як $\Delta \neq 0$, то система (12.9) має єдиний розв'язок. Таким чином, ми прийшли до однорідного диференціального рівняння

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a\xi + b\eta}\right).$$

Другий випадок. $\Delta = 0$. В цьому випадку $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = k$, тобто $a_1 = ka, b_1 = kb$.

Тому

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(ax + by) + c_1}{ax + by + c}\right) = f_1(ax + by). \quad (12.9)$$

Заміною $t = ax + by$ диференціальне рівняння (12.6) зводимо до рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dt}{dx} = a + bf_1(t). \quad (12.10)$$

Приклад. Розв'язати однорідні диференціальні рівняння першого порядку:

$$1) y - x \frac{dy}{dx} = x + y \frac{dy}{dx}; \quad 2) (x^2 + xy + y^2)dx + x^2dy = 0.$$

Розв'язання.

$$1) \text{З рівняння знаходимо } \frac{dy}{dx}:$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x+y}.$$

Рівняння є однорідним рівнянням першого порядку, оскільки

$f(x, y) = \frac{y-x}{x+y}$ є однорідною функцією нульового виміру.

Розв'язуємо його за допомогою підстановки $y = x \cdot u(x)$. Знаходимо:

$$y' = u'x + u, \quad u'x + u = \frac{ux - x}{x + ux},$$

$$u'x + u = \frac{u-1}{1+u}, \quad u'x = \frac{u-1}{u+1} - u,$$

$$x \frac{du}{dx} = -\frac{u^2 + 1}{u + 1}.$$

Одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його.

$$\frac{u+1}{u^2+1} du = -\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{u+1}{u^2+1} du = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2udu}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1} = -\ln|x| + \ln|C|,$$

$$\frac{1}{2} \ln(u^2+1) + \operatorname{arctg} u = \ln \left| \frac{C}{x} \right|,$$

$$\operatorname{arctg} u = \ln \left| \frac{C}{x\sqrt{u^2+1}} \right|, \quad \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \frac{|C|}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

тобто знайшли загальний інтеграл вихідного рівняння.

Відповідь. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \frac{|C|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

$$(x^2 + xy + y^2)dx + x^2 dy = 0.$$

2) Це однорідне рівняння, $m = 2$. Зробимо заміну

$$y = zx, dy = zdx + xdz, \quad (1 + z + z^2)dx - (xdz + zdx) = 0.$$

Відокремлюємо змінні:

$$(1 + z^2)dx - xdz = 0, \quad x \neq 0,$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{dz}{1+z^2} = 0, \quad \ln x - \operatorname{arctg} z = C.$$

Отже, $\ln x - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C$ – загальний розв’язок нашого рівняння.

Відповідь. 1) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \frac{|C|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; 2) $\ln x - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C, x = 0$.

12.4. Деякі задачі, які приводять до розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку

Диференціальні рівняння є математичною моделлю, яка використовується для розв’язування різного виду задач у фізиці, в геометрії, біології. Наведемо приклади розв’язування задач [11], [8] з допомогою диференціальних рівнянь першого порядку.

Приклад 1. З експерименту відомо, що швидкість радіоактивного розпаду речовини пропорційна її кількості. Визначити півперіод розпаду речовини (час, за який розпадається половина речовини).

Розв’язання.

Нехай $x(t)$ – кількість радіоактивної речовини в момент часу t , $x(0) = x_0$.

За умовою задачі $x'(t) = -kx, k > 0$. Тому $\frac{dx}{x} = -kdt, \ln x = -kt + \ln C, x = Ce^{-kt}$.

Оскільки $x(0) = x_0$, то закон зміни кількості речовини з часом має вигляд

$$x(t) = x_0 e^{-kt}.$$

Час T , за який розпадається половина речовини, визначається з рівняння $\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-kt}$, тобто $T = \frac{\ln 2}{k}$. Як видно, цей час не залежить від початкової кількості речовини.

Відповідь. $T = \frac{\ln 2}{k}$.

Приклад 2. З експерименту відомо, що швидкість розмноження бактерій у разі достатнього запасу їжі пропорційна їх кількості. Визначити, за який час кількість бактерій збільшиться в m разів порівняно з початковою кількістю.

Розв'язання.

Нехай $x(t)$ – кількість бактерій у момент часу t , $x(0) = x_0$. Зміна їх кількості описується рівнянням $x'(t) = kx, k > 0$. Тому

$$\frac{dx}{x} = kdt, \ln x = kt + \ln C, x = Ce^{kt}, x = x_0 e^{kt}.$$

Час T , за який кількість бактерій збільшиться в m разів, визначається з рівняння $x(T) = mx_0, mx_0 = x_0 e^{-kt}$, тобто $T = \frac{\ln m}{k}$.

Відповідь. $T = \frac{\ln m}{k}$.

Приклад 3. На матеріальну точку масою m діє стала сила, що надає точці прискорення a . Навколишнє середовище чинить рухомій точці опір, пропорційний швидкості її руху (γ – коефіцієнт пропорційності). Визначити, як змінюється швидкість руху залежно від часу, якщо в початковий момент точка була в стані спокою.

Розв'язання.

Відлік часу починається від початку руху точки. Нехай $v(t)$ – швидкість руху точки в будь-який момент часу t , тоді $v(0) = 0$. У будь-який момент часу t на цю точку діє сила $ma - \gamma v(t)$. За другим законом Ньютона ця сила надає точці прискорення $\frac{ma - \gamma v(t)}{m}$. Прискорення в момент часу t є швидкістю зміни швидкості в цей момент, тобто похідною швидкості по часу, тобто

$$v' = \frac{ma - \gamma v(t)}{m}, v' = -\frac{\gamma}{m}v + a, v(t) = \frac{m}{\gamma}a + Ce^{-\frac{\gamma}{m}t}.$$

Розглянемо розв'язок, який задовольняє початкову умову $v(0) = 0$. Якщо $t = 0$, то $0 = \frac{m}{\gamma}a + C, C = -\frac{m}{\gamma}a$, тому швидкість матеріальної точки змінюється за законом $v(t) = \frac{m}{\gamma}a \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)$.

Швидкість руху зростає з часом, наближаючись до $\frac{m}{\gamma}a$. Через деякий час рух можна вважати рівномірним зі швидкістю, близькою до $\frac{m}{\gamma}a$.

Відповідь.
$$v(t) = \frac{m}{\gamma}a \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t} \right).$$

Приклад 4. Матеріальна точка рухається по прямій зі швидкістю, обернено пропорційною пройденому шляху. В початковий момент руху точка була на відстані 5 м від початку відліку шляху і мала швидкість $v_0 = 20$ м/с. Знайти шлях, який пройшла точка, та її швидкість через 10 с після початку руху.

Розв'язання.

Нехай $s = s(t)$ – відстань точки від початку відліку в момент часу t . Тоді $s(0) = 5$. За умовою, зміна величини s залежно від часу описується диференціальним рівнянням $s' = \frac{k}{s}$, k – коефіцієнт пропорційності. Відокремивши змінні та інтегрувавши, отримаємо

$$s^2 = 2(kt + C), s = \sqrt{2(kt + C)}.$$

З початкової умови $s(0) = 5$ знайдемо сталу інтегрування:

$$5 = \sqrt{2C}, C = \frac{25}{2}, s = \sqrt{25 + 2kt}.$$

Продиференціювавши це рівняння за t , знайдемо швидкість руху точки в момент часу t :

$$v(t) = s'(t) = \frac{k}{\sqrt{25 + 2kt}}.$$

З умови $v(0) = v_0 = 20$ м/с визначимо коефіцієнт пропорційності k :

$$v(0) = \frac{k}{5} = 20, k = 100.$$

Отже, відстань $s(t)$ і швидкість $v(t)$ змінюються за законом

$$s(t) = \sqrt{25 + 200t}, v(t) = \frac{100}{\sqrt{25 + 200t}}.$$

Через 10с після початку руху

$$s(10) = \sqrt{25 + 200 \cdot 10} = 45 \text{ м}, v(10) = \frac{100}{\sqrt{25 + 200 \cdot 10}} = \frac{20}{9} \text{ м/с}.$$

Отже, через 10 с після початку руху швидкість точки становила $\frac{20}{9}$ м/с, за цей час точка пройшла відстань $s(10) - s(0) = 45 - 5 = 40 \text{ м}$.

Відповідь. 40м, $\frac{20}{9}$ м/с.

Приклад 5. Рух човна сповільнюється під дією опору води, який пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна дорівнює 2 м/с, а його швидкість через 4 с становить 1 м/с. Визначити, через скільки секунд швидкість човна дорівнюватиме 0,25 м/с, і який шлях він може пройти до зупинки.

Розв'язання.

Нехай $v = v(t)$ – швидкість човна в момент t . Тоді $v(0) = 2$. За другим законом Ньютона $mv' = F(t)$, де F – сила, яка діє на човен, m – маса човна. За умовою $F(t) = -kv(t)$, $k > 0$ – коефіцієнт пропорційності, знак „-” вказує на те, що сила напрямлена проти руху човна (на зменшення швидкості). Тому, $mv' = -kv$ – диференціальне рівняння руху човна. Його розв'язки $v = Ce^{-\frac{k}{m}t}$. За умовою $v(0) = 2$, тому, $C = 2$, $v(t) = 2e^{-\frac{k}{m}t}$. За умовою $v(4) = 1$, тому маємо $1 = 2e^{-\frac{k}{m}4}$, $\frac{k}{m} = \frac{\ln 2}{4}$. Швидкість човна $v(t) = 2^{1-\frac{t}{4}}$.

Час T , через який швидкість човна буде дорівнювати 0,25 м/с, знайдемо з рівняння $0,25 = 2^{1-\frac{T}{4}}$, $2^{-2} = 2^{1-\frac{T}{4}}$, $T = 12$ с. Шлях, що пройшов човен, знаходимо за формулою

$$s(t) = \int_0^t v(x) dx = \int_0^t 2^{1-\frac{x}{4}} dx = \frac{8}{\ln 2} \left(1 - 2^{-\frac{t}{4}} \right).$$

Отже, човен може пройти шлях, не більший від $\frac{8}{\ln 2} \approx 11,5$ м.

Відповідь. 12с, $\approx 11,5$ м.

Приклад 6. Прискорення локомотива, початкова швидкість якого дорівнює v_0 , прямо пропорційне силі тяги F і обернено пропорційне масі поїзда m . Сила тяги локомотива $F(t) = b - kv(t)$, де $v(t)$ – швидкість локомотива в момент t , a, b, k – сталі величини. Знайти залежність сили тяги локомотива від часу t .

Розв’язання. Прискорення локомотива – це похідна його швидкості $a = v'$. Тому, за умовою $v' = \frac{b - kv}{m}$.

Зінтегрувавши це рівняння, дістаємо $v' = \frac{b}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}$. Початкова швидкість локомотива $v(0) = v_0$, тому $v(0) = v_0 = \frac{b}{k} + C, C = v_0 - \frac{b}{k}$.

Отже, $v = \frac{b}{k} + (v_0 - \frac{b}{k})e^{-\frac{k}{m}t}$, тому залежність сили тяги локомотива від часу виражається рівністю

$$F(t) = b - kv(t) = (b - kv_0)e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Відповідь. $F(t) = (b - kv_0)e^{-\frac{k}{m}t}$.

Приклад 7. Матеріальна точка масою m рухається вздовж координатної прямої Ox . Робота сили, яка діє на точку, пропорційна часу t від початку руху (коефіцієнт пропорційності дорівнює k). Визначити закон руху точки, якщо в початковий момент ($t = 0$) точка була в стані спокою на відстані s_0 від початку відліку.

Розв’язання.

При прямолінійному переміщенні точки в напрямі дії сили робота сили $F(s)$, яка діє на точку, виражається формулою $A = \int_{s_0}^s F(u) du$. За умовою задачі

$A = kt$. Прирівнявши ці вирази, отримаємо $\int_{s_0}^s F(u) du = kt$. Продиференціюємо по t обидві частини цього рівняння

$$F(s)s' = k, s' = v, F(s)v = k.$$

За другим законом Ньютона $F(s) = mv'$, тому маємо диференціальне рівняння $mv' = k$. Зінтегруємо і отримаємо $\frac{mv^2}{2} = kt + C$. З початкової умови $v(0) = 0$ (в початковий момент точка була в стані спокою) знаходимо $C = 0$. Тому $v = \sqrt{\frac{2k}{m}}t$, оскільки $s' = v$, то, зінтегрувавши, отримаємо

$$s = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2k}{m}} t^{\frac{3}{2}} + C_1.$$

Оскільки $s(0) = 0$, то $C_1 = s_0$. Отже, $s = s_0 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2k}{m}} t^{\frac{3}{2}}$.

Відповідь. $s = s_0 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2k}{m}} t^{\frac{3}{2}}$.

Приклад 8. Сила струму в електричному колі з опором R і коефіцієнтом самоіндукції L задовольняє диференціальне рівняння $L \frac{di}{dt} + Ri = E$, де E – електрорушійна сила. Знайти залежність сили $i(t)$ струму від часу, якщо E змінюється за синусоїдальним законом $E = E_0 \sin \omega t, i(0) = 0$.

Розв'язання.

З заданого рівняння маємо рівняння $\frac{di}{dt} + \alpha i = \frac{E_0}{L} \sin \omega t$, де $\alpha = \frac{R}{L}$. Це лінійне неоднорідне рівняння (розглядається в наступній темі), розв'язок якого зручно знайти методом Бернуллі у вигляді $i(t) = u(t)v(t)$. Розв'язуючи це рівняння, будемо мати $u = e^{-\alpha t}$ та $v = \frac{E_0}{L} \int e^{\alpha t} \sin \omega t dt$. Отриманий інтеграл знаходимо методом інтегрування частинами. Результат інтегрування буде:

$$I = \int e^{\alpha t} \sin \varpi t dt = \frac{e^{\alpha t} (-\varpi \cos \varpi t + \alpha \sin \varpi t)}{\varpi^2 + \alpha^2} + C.$$

Звідси, $v(t) = \frac{E_0}{L} \left(\frac{e^{\alpha t} (-\varpi \cos \varpi t + \alpha \sin \varpi t)}{\varpi^2 + \alpha^2} + C \right)$, де C – довільна стала.

$$i(t) = \frac{E_0}{L} \left(\frac{(-\varpi \cos \varpi t + \alpha \sin \varpi t)}{\varpi^2 + \alpha^2} + C e^{-\alpha t} \right).$$

З початкової умови $i(0) = 0$ маємо $0 = \frac{E_0}{L} \left(\frac{-\varpi}{\varpi^2 + \alpha^2} + C \right)$, $C = \frac{\varpi}{\varpi^2 + \alpha^2}$.

Отже, $i(t) = \frac{E_0}{L} \left(\frac{(-\varpi \cos \varpi t + \alpha \sin \varpi t) + \varpi e^{-\alpha t}}{\varpi^2 + \alpha^2} \right)$.

Відповідь. $i(t) = \frac{E_0}{L} \left(\frac{(-\varpi \cos \varpi t + \alpha \sin \varpi t) + \varpi e^{-\alpha t}}{\varpi^2 + \alpha^2} \right)$.

Приклад 9. Крива $y = f(x)$ проходить через точку $(1; 2)$. Кожна дотична до цієї кривої перетинає пряму $y = 1$ у точці з абсцисою, яка дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику. Знайти криву $y = f(x)$.

Розв'язання.

Нехай $(x; y)$ – довільна точка на даній кривій. Рівняння дотичної, проведеної до цієї кривої в точці $(x; y)$, має вигляд: $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$, де X, Y – змінні координати точок дотичної. З умови, що дотична перетинає пряму $Y = 1$ в точці з абсцисою $2x$, отримаємо диференціальне рівняння, яке задовольняє шукана крива:

$$1 - y = \frac{dy}{dx}(2x - x); \quad x \frac{dy}{dx} = 1 - y.$$

Розв'язавши отримане рівняння, яке є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними, маємо $y - 1 = \frac{C}{x}$. Шукана крива проходить через точку $(1; 2)$, тому $C = 1, y = 1 + \frac{1}{x}$.

Відповідь. $y = 1 + \frac{1}{x}$.

Приклад 10. Крива $y = f(x)$ проходить через точку $(0;1)$ в кожній її точці тангенс кута нахилу дотичної до цієї кривої дорівнює подвоєному добуткові координат точки дотику. Знайти криву $y = f(x)$.

Розв'язання.

Нехай $(x; y)$ – довільна точка на даній кривій. Тангенс кута нахилу дотичної, проведеної до цієї кривої в точці $(x; y)$, дорівнює похідній шуканої функції в точці x , тобто y' . Використовуючи умову, отримуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінним $y' = 2xy$. Його розв'язок $y = Ce^{x^2}$. Оскільки $y(0) = 1$, то $C = 1$, відповідно, $y = e^{x^2}$ – рівняння шуканої кривої.

Відповідь. $y = e^{x^2}$.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати основні означення для диференціальних рівнянь першого порядку.
2. Сформулювати задачу Коші та теорему існування та єдиності її розв'язку із використанням достатніх умов виконання умови Ліпшиця.
3. Записати загальний вигляд диференціального рівняння із відокремлюваними змінними та пояснити розв'язування таких рівнянь.
4. Знайти загальний інтеграл (загальний розв'язок) та особливі розв'язки диференціальних рівнянь:

$$1) x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0; \quad 2) (xy^2 + y^2)dx + (x^2 - x^2y)dy = 0.$$

5. Розв'язати $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, якщо $f(x, y)$ – однорідна функція нульового порядку.

$$6. \text{Розв'язати } x \frac{dy}{dx} = y \ln \frac{y}{x}.$$

7. Знайти розв'язок рівняння $y' + 2xy = 2x$, який задовольняє умову $y(0) = 2$.

Відповіді. 4. 1) $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = C$. 2) Загальний інтеграл та особливі розв'язки:

$$\ln \left| \frac{x}{y} \right| - \frac{x+y}{xy} = C, \quad x=0, y=0. \quad 6. y = xe^{Cx+1}. \quad 7. y = e^{-x^2} + 1.$$

Тема 13. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння першого порядку

Найчастіше в механіці використовуються лінійні однорідні, неоднорідні диференціальні рівняння 1-го порядку та звідні до них типи, тому нижче розглянемо їх детальніше.

13.1. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння. Теорема про структуру загального розв'язку

Означення. Рівняння вигляду

$$A(x) \frac{dy}{dx} + B(x)y = C(x),$$

де $A(x), B(x), C(x)$ – неперервні функції на деякому проміжку (a, b) , причому $\forall x \in (a, b): A(x) \neq 0$ називають *лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку*.

Записують його у вигляді

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad (13.1)$$

$$\text{де } P(x) = \frac{B(x)}{A(x)}, \quad Q(x) = \frac{C(x)}{A(x)}.$$

Доводять, що в будь-якому прямокутнику $R: \{a_1 \leq x \leq b_1; -k \leq y \leq k\}$, де $a_1 > a; b_1 < b; k$ – довільне додатне число, для рівняння (13.1) виконуються умови теореми Коші про існування та єдиність розв'язку.

13.1.1. Метод Лагранжа (варіації довільної сталої)

Нехай для (13.1) $Q(x) = 0$, тоді рівняння $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ називають *лінійним однорідним* диференціальним рівнянням. Воно допускає відокремлення змінних

при $y \neq 0$: $\frac{dy}{y} = -P(x)dx$, звідки загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння має вигляд

$$y = Ce^{-\int P(x)dx},$$

де C – довільна стала.

Нехай $C = C(x)$, $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$, підставляємо в (13.1):

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int P(x)dx} - CP(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)Ce^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

або $\frac{dC}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$, з якого $C = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_1$, де C_1 – довільна стала.

Підставивши значення C , знаходимо загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння у вигляді

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx. \quad (13.2)$$

Довели [12] **теорему (про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння)**: загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння складається із суми загального розв'язку відповідного однорідного диференціального рівняння і частинного розв'язку неоднорідного диференціального рівняння.

13.1.2. Метод Бернуллі

Розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (13.1) шукають у вигляді добутку $y = uv$, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – невідомі функції, причому одна з цих функцій довільна.

Отже, $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ – підстановка згідно з методом Бернуллі дає для рівняння $u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$ згідно з довільністю у виборі функції $v(x)$ систему вигляду:

$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0, \\ u'v = Q(x). \end{cases}$$

Перше рівняння $\frac{dv}{v} = -P(x)dx$ має розв'язок $v = C_1 e^{-\int P(x)dx}$, $C_1 \neq 0$.

Візьмемо тоді $v = e^{-\int P(x)dx}$, $C_1 = 1$ і для другого рівняння $du = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$ маємо $u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C$.

Оскільки $y = uv$, тоді

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right) -$$

отримали загальний розв'язок рівняння (13.1) вигляду (13.2).

13.2. Рівняння Бернуллі, його розв'язування

Означення. Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, n \neq 0, n \neq 1 \quad (13.3)$$

називають *рівнянням Бернуллі*.

Очевидно, що для $n = 0$ це рівняння лінійне неоднорідне, а для $n = 1$ – диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

Припустивши $y \neq 0$, $n \neq 1$, $n \neq 0$, поділимо на y^n :

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x).$$

Заміна $z = y^{1-n}$ зводить рівняння Бернуллі до лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Для $n > 0$, крім розв'язку $y = uv \neq 0$, рівняння Бернуллі має розв'язок $y \equiv 0$.

Приклад розв'язування лінійного неоднорідного диференціального рівняння

Розглянемо обидва методи на прикладі. Знайдемо розв'язок рівняння $y' - y \operatorname{tg} x = \cos x$, яке є лінійним.

1. За методом Бернуллі застосовуємо підстановку $y = uv$, де u і v – функції змінної x . Тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляючи y і y' у вихідне рівняння, одержуємо:

$$u'v + uv' - uv \operatorname{tg} x = \cos x.$$

Згрупуємо члени, що містять u , і винесемо u за дужки, а саме:

$$u'v + u(v' - v \operatorname{tg} x) = \cos x.$$

Отже,

$$\begin{cases} v' - v \operatorname{tg} x = 0; \\ u'v = \cos x. \end{cases}$$

За першим рівнянням системи знаходимо функцію v , для чого відокремлюємо змінні:

$$\frac{dv}{dx} = v \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{dv}{v} = \operatorname{tg} x dx$$

і інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Отримуємо частинний розв'язок:

$$\ln|v| = -\ln|\cos x| \Rightarrow \ln|v| = \ln|\cos x|^{-1}.$$

$$\text{Звідси } v = \frac{1}{\cos x}.$$

Знайдену функцію v підставляємо в друге рівняння системи і отримуємо диференціальне рівняння відносно функції u :

$$u' \cdot \frac{1}{\cos x} = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos^2 x.$$

Отже, $du = \cos^2 x dx$.

Інтегруємо

$$\int du = \int \cos^2 x dx + C \Rightarrow u = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx + C.$$

$$\text{Звідси отримуємо загальний розв'язок: } u = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Таким чином,

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C \right) \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

2. Розв'яжемо цей же приклад за *методом варіації довільної сталої*.

Спочатку складаємо однорідне рівняння, яке відповідає вихідному

$$y' - y \operatorname{tg} x = 0$$

і знаходимо його загальний розв'язок:

$$\frac{dy}{y} = \operatorname{tg} x dx \Rightarrow \ln |y| = -\ln |\cos x| + C$$

або

$$\ln |y| = -\ln |\cos x| + \ln C \Rightarrow y = \frac{C}{\cos x}.$$

Припустимо, що $C = C(x)$. Тоді, підставивши у вихідне рівняння,

$$y' = \frac{C'(x) \cos x - C(x)(-\sin x)}{\cos^2 x},$$

отримуємо:

$$\frac{C'(x) \cos x + C(x) \sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)}{\cos x} \operatorname{tg} x = \cos x.$$

Зводимо подібні і отримуємо: $\frac{C'(x)}{\cos x} = \cos x \Rightarrow dC = \cos^2 x \cdot dx$.

Ми вже знаходили функцію за таким диференціалом, отже, можемо записати:

$$C(x) = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Підставивши замість довільної сталої у загальний розв'язок однорідного рівняння знайдене значення $C = C(x)$, матимемо загальний розв'язок лінійного рівняння:

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C \right) \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Зрозуміло, що ми отримали той самий розв'язок.

13.3. Рівняння Ріккати

Означення. Рівняння Ріккати має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \quad (13.4)$$

де $P(x), Q(x), R(x)$ – визначені та неперервні на (a, b) скалярні функції, причому $R(x) \neq 0, P(x) \neq 0$.

Зауваження. Якщо не виконуються умови $R(x) \neq 0, P(x) \neq 0$, диференціальне рівняння (13.4) вироджується в рівняння Бернуллі або лінійне відповідно.

При зроблених припущеннях відносно функцій $P(x), Q(x), R(x)$ диференціальне рівняння (13.4) має єдиний розв'язок при $y(x_0) = y_0$, тому диференціальне рівняння особливих розв'язків не має.

Заміною $y = \alpha(x)z + \beta(x)$ диференціальне рівняння (13.4) зводиться до рівняння вигляду

$$\frac{dz}{dx} = \pm z^2 + a(x). \quad (13.5)$$

Для змінних $P(x), Q(x), R(x)$ диференціальне рівняння (13.4) інтегрується тільки в деяких випадках, а саме:

$$y' = \varphi(x)(ay^2 + by + c), \quad a, b, c - \text{константи}, \quad (13.6)$$

тобто є диференціальним рівнянням з відокремленими змінними.

Якщо

$$y' = a \frac{y^2}{x^2} + b \frac{y}{x} + c, \quad a, b, c - \text{константи}, \quad (13.7)$$

то маємо однорідне диференціальне рівняння.

Побудова загального розв'язку диференціального рівняння (13.4) у випадках, якщо відомі частинні лінійно-незалежні розв'язки.

1. Відомо один частинний розв'язок $y_1(x)$.

Твердження. Якщо відомо один частинний розв'язок $y = y_1(x)$ диференціального рівняння (13.4), то воно зводиться до рівняння Бернуллі при $n = 2$.

Доведення. Зробимо заміну

$$y = y_1(x) + z. \quad (13.8)$$

Підставимо (13.8) в (13.4)

$$y_1' + z' = P(x)(y_1^2 + 2y_1z + z^2) + Q(x)(y_1 + z) + R(x),$$

звідки

$$z' - (2P(x)y_1(x) + Q(x))z = P(x)z^2. \quad (13.9)$$

Далі, підстановкою $u = \frac{1}{z}$, диференціальне рівняння (13.9) зводимо до лінійного

$$u' + (2P(x)y_1(x) + Q(x))u = -P(x). \quad (13.10)$$

Тому, при відомому одному частинному розв'язку диференціальне рівняння (13.4) інтегрується через дві квадратури. Оскільки $z = \frac{1}{u}$, то

$$y = y_1(x) + \frac{1}{u}. \quad (13.11)$$

2. Відомо два частинні розв'язки диференціального рівняння (13.4) $y_1(x), y_2(x)$.

Твердження. Якщо відомо два частинні розв'язки диференціального рівняння (13.4), то загальний розв'язок записується через одну квадратуру.

Дійсно, при заміні для (13.4) $u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}$ є частинним розв'язком лінійного рівняння (13.10), якщо $y_1(x), y_2(x)$ — частинні розв'язки рівняння Ріккаті. Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (13.10) знаходиться через одну квадратуру

$$u = Ce^{-\int (2P(x)y_1(x) + Q(x))dx} + \frac{1}{y_2 - y_1}. \quad (13.12)$$

3. Відомо три частинні розв'язки диференціального рівняння (13.4) $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння Ріккаті в цьому випадку знаходиться без квадратур. Дійсно, якщо $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ — частинні розв'язки

диференціального рівняння Ріккаті, то $u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}$, $u_2 = \frac{1}{y_3 - y_1}$ – частинні розв’язки лінійного рівняння (13.10). В цьому випадку його розв’язок знаходиться без квадратур

$$u = c(u_2(x) - u_1(x)) + u_1(x) = C \left(\frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1} \right) + \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)}. \quad (13.13)$$

13.4. Рівняння в повних диференціалах

Означення. Рівняння називається *рівнянням в повних диференціалах*, якщо його ліва частина представляє собою повний диференціал деякої функції $U(x, y)$, тобто

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU(x, y) = 0. \quad (13.14)$$

Загальний інтеграл диференціального рівняння (13.14) має вигляд

$$U(x, y) = C. \quad (13.15)$$

Особливих розв’язків в цьому випадку диференціальне рівняння не має.

Наприклад, для диференціального рівняння $x dx + y dy = 0$,

$$U(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2},$$

відповідно, $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$ – загальний інтеграл.

Припустимо, що функції $M(x, y)$, $N(x, y)$ – неперервно-диференційовні.

Теорема. Для того, щоб диференціальне рівняння (13.14) було рівнянням в повних диференціалах необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (13.16)$$

Доведення.

Необхідність. Нехай диференціальне рівняння (13.14) є рівнянням в повних диференціалах

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy.$$

Звідси

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \\ \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y), \end{cases} \quad (13.17)$$

Це і означає, що виконується (13.16).

Достатність. Нехай умова (13.16) виконується. Покажемо, що існує $U(x, y)$, яка задовольняє диференціальне рівняння (13.14) або ж (13.15).

Розглянемо перше рівняння з системи (13.17)

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = M(x, y).$$

Його задовольняє функція

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y), \quad (13.18)$$

де $\varphi(y)$ – функція, яку виберемо так, щоб виконувалося друге рівняння системи (13.17)

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Останнє співвідношення запишемо таким чином

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Використавши (13.16), отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} dx + \varphi'(y) &= N(x, y), \quad N(x, y)|_{x_0}^x + \varphi'(y) = \\ &= N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y), \\ \varphi'(y) &= N(x_0, y). \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1, \quad U(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1.$$

Теорема доведена.

Покладаючи $C_1 = 0$, загальний інтеграл диференціального рівняння (13.14) буде $U(x, y) = C$, тобто

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C. \quad (13.19)$$

Якщо при побудові функції $U(x, y)$ взяти спочатку друге рівняння системи (13.17), то отримаємо

$$\int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy = C. \quad (13.20)$$

В формулах (13.19), (13.20) точки x_0, y_0 вибирають довільно, але так, щоб інтеграли мали зміст. Якщо точки x_0, y_0 вибрані вдало, то задача інтегрування спрощується.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(x^3 + y)dx + (x - y)dy = 0.$$

Розв'язання. Тут $M(x, y) = x^3 + y$, $N(x, y) = x - y$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1$.

Використовуємо формулу (13.20) за умови, що $x_0 = y_0 = 0$. Знайдемо

$$\int_0^x (x^3 + y) dx + \int_0^y (0 - y) dy = C.$$

Отже, $\frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2} = C$ – загальний інтеграл.

Відповідь. $\frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2} = C$.

Формули (13.19), (13.20) дають можливість розв'язувати задачу Коші з умовами $y(x_0) = y_0$, якщо точка (x_0, y_0) лежить в області визначення диференціального рівняння. Для цього достатньо взяти в (13.19), (13.20) $C = 0$:

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = 0, \quad (13.21)$$

$$\int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy = 0. \quad (13.22)$$

Цей розв'язок буде єдиний.

Зауваження. Ейлер довів, що для будь-якого диференціального рівняння першого порядку

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

для якого не виконується умова (13.16), існує інтегрувальний множник [9]

$\mu = \mu(x, y)$, такий, що диференціальне рівняння

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$$

є рівнянням у повних диференціалах. Із умови виду (13.16)

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} N - \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} M = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad (13.23)$$

шукаємо інтегрувальний множник μ , а потім інтегруємо рівняння.

Приклад. Знайти інтегрувальний множник для диференціального рівняння

$$(x^2 - 2y)dx + (-x)dy = 0$$

та розв'язати рівняння в повних диференціалах.

Розв'язання. За умовою маємо $M(x, y) = x^2 - 2y$, $N(x, y) = -x$.

Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1.$$

Умова (13.16) не виконується. Розглядуване диференціальне рівняння не є рівнянням у повних диференціалах. Складемо рівняння (13.23).

Припустимо, що інтегрувальний множник μ залежить тільки від x .
Дістанемо рівняння

$$\frac{d \ln \mu(x)}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \ln \mu(x) = \ln |x|, \quad \mu(x) = x.$$

Домножимо початкове диференціальне рівняння на x і дістанемо рівняння в повних диференціалах $(x^3 - 2xy)dx - x^2 dy = 0$, яке легко зінтегрувати:

$$\int_0^x x^3 dx + \int_0^y (-x^2) dy = C, \quad \frac{x^4}{4} - x^2 y = C.$$

Відповідь. $\mu(x) = x, \quad \frac{x^4}{4} - x^2 y = C.$

Завдання для самоконтролю

1. Означити лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку, пояснити виконання умов теореми Коші про існування та єдиність розв'язку задачі Коші.
2. Довести теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння.
3. Пояснити метод Лагранжа розв'язування лінійного неоднорідного диференціального рівняння та рівняння Бернуллі.
4. Пояснити метод Бернуллі розв'язання лінійного неоднорідного диференціального рівняння.
5. Знайти загальний та частинний розв'язок диференціального рівняння $y' + \frac{y}{x} = 2$, якщо $y(1) = 1$.
6. Розв'язати методом Бернуллі лінійні неоднорідні диференціальні рівняння:
 - 1) $y' - \frac{3y}{x} = x$; 2) $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$.
7. Записати рівняння Бернуллі, провести заміну зведення його до лінійного неоднорідного диференціального рівняння.
8. Розв'язати методом Бернуллі рівняння Бернуллі $y'x + y = -xy^2$.
9. Записати Рівняння Ріккаті, пояснити його розв'язування.
10. Означити диференціальне рівняння в повних диференціалах, його загальний розв'язок.
11. Сформулювати та довести необхідні та достатні умови рівняння в повних диференціалах.

12. Знайти розв'язок диференціального рівняння $ydx + (x - y^3)dy = 0$ у повних диференціалах.

Відповіді. 5. $y = \frac{1}{x}(x^2 + C)$, $y = x$. 6. 1) $y = Cx^3 - x^2$; 2) $y = \frac{C - \cos 2x}{2 \cos x}$.

8. $y = \frac{1}{x(\ln|x| + C)}$. 12. $xy - \frac{y^4}{4} = C$.

Розділ V. Диференціальні рівняння вищих порядків

Звичайні диференціальні рівняння не вичерпуються диференціальними рівняннями першого порядку. Важливе значення при побудові різноманітних математичних моделей фізичних, хімічних процесів мають диференціальні рівняння вищих порядків, особливо найбільш використовуваними є лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Тема 14. Диференціальні рівняння вищих порядків, їх розв'язування пониженням порядку

Як і для диференціальних рівнянь першого порядку, розглянемо поняття загального, частинного, та особливого розв'язків. Також буде показано зведення деяких типів диференціальних рівнянь вищих порядків до вже відомих диференціальних рівнянь першого порядку, які інтегруються в квадратурах.

14.1. Основні поняття та означення. Задача Коші

Диференціальне рівняння n -го порядку, не розв'язане відносно старшої похідної [9], має вигляд

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (14.1)$$

а розв'язане відносно $y^{(n)}$ має форму

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (14.2)$$

Частинний випадок цих рівнянь – це лінійне рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x).$$

Означення. Функція $y = y(x)$, визначена і n раз неперервно-диференційовна на (a, b) , називається *розв'язком* диференціального рівняння (14.1), якщо вона на (a, b) перетворює це рівняння в тотожність

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \equiv 0, \quad x \in (a, b). \quad (14.3)$$

Будь-якому розв'язку диференціального рівняння (14.1) відповідає на площині (x, y) деяка крива, яку будемо називати *інтегральною*.

Розглянемо диференціальне рівняння (14.2) і поставимо *задачу Коші*: серед всіх розв'язків диференціального рівняння (14.2) знайти такий $y = y(x)$, який задовольняє умови

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}, \quad (14.4)$$

де $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{n-1}$ – задані числа, x_0 – початкове значення незалежної змінної, $y_0, y'_0, \dots, y_0^{n-1}$ – початкові дані.

Для диференціального рівняння другого порядку

$$y''(x) = f(x, y, y') \quad (14.5)$$

розв'язання задачі Коші полягає в тому, щоб знайти такий його розв'язок, який задовольняє умови

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0. \quad (14.6)$$

Геометрично задача Коші полягає в тому, щоб знайти таку криву $y = y(x)$, яка задовольняє диференціальне рівняння (14.5), проходить через точку $M(x_0, y_0)$ і має заданий напрямок дотичної $\operatorname{tg} \alpha = y'_0$ (рис. 14.1).

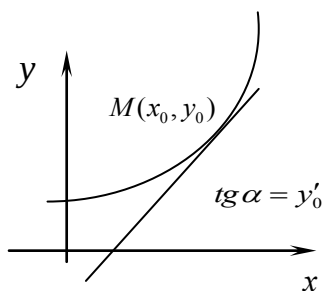


Рис. 14.1. Геометричне тлумачення задачі Коші.

Механічний зміст задачі Коші

$$x'' = f(x, t, x'), \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = V_0 \quad (14.7)$$

полягає в тому, щоб знайти ту траєкторію механічної системи, яка є розв'язком диференціального рівняння і має в t_0 фіксовані положення x_0 і швидкість V_0 .

Розглянемо питання єдиності та існування розв'язку задачі Коші (14.2), (14.4). Єдиність розв'язку для диференціального рівняння (14.2) не означає, що через точку $M(x_0, y_0)$ проходить тільки одна інтегральна крива. Але, наприклад, для диференціального рівняння (14.5) єдиність розуміється в тому сенсі, що через точку $M(x_0, y_0)$ проходить єдина інтегральна крива (рис.14.1) із заданим нахилом дотичної, а через точку $M(x_0, y_0)$ можуть проходити і інші інтегральні криві, які мають інші нахили дотичних.

Необхідні умови існування розв'язку задачі Коші (14.2), (14.4) – права частина диференціального рівняння (14.2) неперервна в околі початкових даних.

Сформулюємо без доведення теорему [12] про достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші.

Теорема (теорема Пікара). Розглянемо задачу Коші (14.2), (14.4) Припустимо, що функція $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ визначена в деякій замкненій обмеженій області

$$R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |y' - y'_0| \leq b, |y'' - y''_0| \leq b, \dots, |y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \leq b \quad (14.8)$$

(a, b – дійсні додатні числа) і задовольняє в цій області умовам:

1) Функція $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ є неперервною за своїми аргументами і, отже, обмеженою

$$|f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})| \leq M, (x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in R \quad (14.9)$$

(тут $M > 0$ – константа);

2) Функція $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ має обмежені частинні похідні за змінними $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, тобто

$$\left| \frac{\partial f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}{\partial y^{(l)}} \right| \leq K, l=0, 1, 2, \dots, (n-1); (x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in R, \quad (14.10)$$

де K – константа.

При цих припущеннях диференціальне рівняння (14.2) має єдиний розв'язок, який задовольняє умовам (14.4) і є неперервним разом з своїми похідними до n -го порядку включно на інтервалі

$$|x - x_0| < h = \min \left\{ a, \frac{b}{\max_R \left(M, |y'|, |y''|, \dots, |y^{(n-1)}| \right)} \right\}. \quad (14.11)$$

З теореми випливає, що для поліноміальної правої частини диференціального рівняння (14.2) розв'язок задачі Коші з довільними початковими умовами існує та є єдиним.

Загальний розв'язок та загальний інтеграл, частинний та особливий розв'язки. Проміжні та перші інтеграли

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння (14.2) називається сімейство розв'язків, яке залежить від n довільних констант $C_1, C_2, \dots, C_n$:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (14.12)$$

Розглянемо область D в просторі $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, в кожній точці якої виконуються умови теореми про існування і єдиність розв'язку задачі Коші.

Означення. Функцію (14.12), визначену в деякій області змінних x , $C_1, C_2, \dots, C_n$, і яка має частинні похідні по x до n -го порядку включно, будемо називати *загальним розв'язком* диференціального рівняння (14.2) в області D , якщо

- 1) функція (14.12) є розв'язком диференціального рівняння (14.2) при всіх значеннях $C_1, C_2, \dots, C_n$;
- 2) система рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \varphi(x, C_1, ..., C_n), \\ y' = \varphi'(x, C_1, ..., C_n), \\ \\ y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, ..., C_n), \end{array} \right. \quad (14.13)$$

розв'язується відносно $C_1, C_2, \dots, C_n$ в області D

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \\ \\ C_n = \psi_n(x, y, y', ..., y^{(n-1)}). \end{cases} \quad (14.14)$$

Для розв'язування задачі Коші необхідно (14.4) підставити в (14.14) і визначити

[illegible]

Розв'язок задачі Коші запишеться у вигляді $y = \varphi(x, C_1^{(0)}, \dots, C_n^{(0)})$. Якщо розв'язок можна представити у вигляді $y = \varphi(x, x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$, то така форма запису називається формою Коші.

В більшості випадків розв'язок диференціального рівняння (14.2) отримуємо у вигляді

$$\Phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad (14.15)$$

який називається загальним інтегралом.

Означення. Будемо називати (14.15) загальним інтегралом диференціального рівняння (14.2) в області D , якщо це співвідношення визначає загальний розв'язок $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ диференціального рівняння (14.2) в області D .

Означення. Розв'язок, що визначається співвідношеннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C_1, \dots, C_n), \\ y = \psi(t, C_1, \dots, C_n), \end{cases} \quad (14.16)$$

називають загальним розв'язком в параметричній формі.

Означення. Якщо розв'язок диференціального рівняння (14.2) складається тільки з точок єдиності розв'язку задачі Коші, то такий розв'язок будемо називати *частинним*.

Наприклад, при конкретних $C_1, C_2, \dots, C_n$ розв'язок буде частинним.

Означення. Розв'язок, в кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші, будемо називати *особливим розв'язком*.

Рівняння n -го порядку може мати сім'ю особливих розв'язків, залежних від довільних констант, кількість яких може досягати $n-1$.

Приклад. Знайти особливі розв'язки рівняння

$$y'' = 2\sqrt{y'}.$$

Розв'язання. Вводимо заміну $y' = z$, z – нова змінна. Маємо

$$z' = 2\sqrt{z}. \quad (14.17)$$

Звідки $z = (x + C_1)^2$, $x > -C_1$, $y' = (x + C_1)^2$, $x > -C_1$, $y = \frac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2$, $x > -C_1$.

Рівняння (14.17) має особливий розв'язок $z = 0$, тобто $y' = 0$. Тому $y = C$ – сім'я особливих розв'язків.

Відповідь. $y = \frac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2$, $x > -C_1$; $y = C$.

14.2. Інтегрування і пониження порядку диференціальних рівнянь з похідними вищого порядку

14.2.1. Диференціальні рівняння, які містять n -у похідну від шуканої функції і незалежну змінну

а) Розглянемо диференціальне рівняння [12]

$$y^{(n)} = f(x). \quad (14.18)$$

Так як $(y^{(n-1)})' = f(x)$, то $y^{(n-1)} = \int_{x_0}^x f(x)dx + C_1$.

Аналогічно, $y^{(n-2)} = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(x)dx dx + C_1(x - x_0) + C_2, \dots$,

$$y = \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(x)dx \dots dx + C_1 \left(\frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} \right) + C_2 \left(\frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} \right) + \dots + C_n. \quad (14.19)$$

Остання формула дає загальний розв'язок в області

$$a < x < b, -\infty < y < \infty, -\infty < y' < \infty, -\infty < y'' < \infty, \dots, -\infty < y^{(n-1)} < \infty.$$

Формулу (14.19) легко використати для знаходження розв'язків задачі Коші з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (14.20)$$

Цей розв'язок представляється у вигляді

$$y = \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(x) dx \dots dx + y_0^{n-1} \left(\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} \right) + y_0^{n-2} \left(\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} \right) + \dots + y_0. \quad (14.21)$$

Функція

$$y_1 = \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(x) dx \dots dx$$

є частинним розв'язком диференціального рівняння (14.18) з початковими умовами

$$y_1(x_0) = 0, y_1'(x_0) = 0, \dots, y_1^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

яким відповідають константи $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$.

Для обчислення $y_1(x)$ використовують формулу Коші

$$y_1(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t)(x-t)^{n-1} dt. \quad (14.22)$$

Дійсно, інтеграл

$$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(x) dx dx = \int_{x_0}^x \left(\int_{x_0}^u f(t) dt \right) du = \int_{x_0}^x du \int_{x_0}^u f(t) dt$$

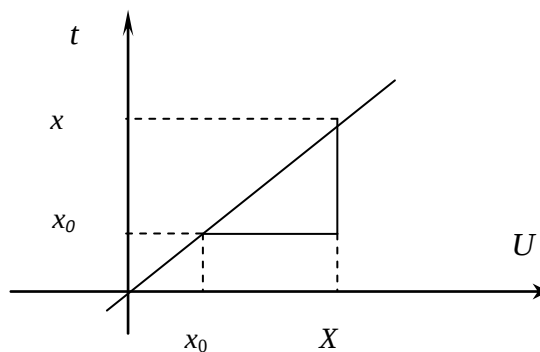


Рис.14.2. Область інтегрування.

можна розглядати як повторний інтеграл в зображеній області (рис. 14.2).

Міняючи порядок інтегрування, отримаємо

$$\int_{x_0}^x du \int_{x_0}^u f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt \int_t^x du = \int_{x_0}^x f(t)(x-t) dt.$$

Аналогічно обчислюємо

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(x) dx dx dx &= \int_{x_0}^x \int_{x_0}^u f(t)(u-t) dt du = \int_{x_0}^x du \int_{x_0}^u f(t)(u-t) dt = \\ &= \int_{x_0}^x f(t) dt \int_t^x (u-t) du = \frac{1}{2} \int_{x_0}^x f(t)(u-t)^2 dt \text{ і т.д.} \end{aligned}$$

Приходимо до формули (14.22). Таким чином, розв'язок (14.21) записується у вигляді

$$y_1(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t)(x-t)^{n-1} dt + y_0^{n-1} \left(\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} \right) + y_0^{n-2} \left(\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} \right) + \dots + y_0.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (13.18) можна також записати через невизначений інтеграл

$$y = \int \dots \int f(x) dx \dots dx + C_1 \left(\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} \right) + C_2 \left(\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} \right) + \dots + C_n. \quad (14.23)$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' = 6x$.

Розв'язання. Послідовно понижуємо порядок похідної та знаходимо

$$y' = 3x^2 + C_1, \quad y = x^3 + xC_1 + C_2.$$

Відповідь. $y = x^3 + xC_1 + C_2$.

б) Розглянемо випадок

$$F(x, y^{(n)}) = 0, \quad (14.23)$$

в якому рівняння не можна розв'язати відносно $y^{(n)}$ в елементарних функціях або вирази для $y^{(n)}$ будуть досить складними.

Припустимо, що диференціальне рівняння (14.23) допускає параметризацію

$$y^{(n)} = \psi(t), \quad x = \varphi(t), \quad (14.24)$$

де $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ такі, що $F(\psi(t), \varphi(t)) \equiv 0$.

Проводимо обчислення

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx = \psi(t) \varphi'(t) dt,$$

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C_1 \equiv \varphi_1(t, C_1).$$

Аналогічно обчислюємо

$$y^{(n-2)} = \int \varphi_1(t, C_1) \varphi'(t) dt + C_2 \equiv \varphi_2(t, C_1, C_2).$$

Остаточно маємо

$$\begin{cases} y = \varphi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ x = \varphi(t), \end{cases} \quad (14.25)$$

загальний розв'язок в параметричній формі.

Відмітимо два випадки, в яких диференціальне рівняння (14.23) легко параметризується.

$$\text{I. } x = \varphi(y^{(n)}), \quad y^{(n)} = \psi(t), \quad x = \varphi(\psi(t)) \quad (14.26)$$

(зокрема, можна ввести таку параметризацію $y^{(n)} = t, x = \varphi(t)$);

$$\text{II. } P(x, y^{(n)}) + Q(x, y^{(n)}) = 0, \quad (14.27)$$

де P і Q – однорідні функції виміру k і m відповідно.

Покладемо

$$y^{(n)} = tx \quad (14.28)$$

і розв'яжемо рівняння (14.27) відносно x через t : $x = \varphi(t)$.

Підставляючи $x = \varphi(t)$ в (14.28), отримаємо

$$\begin{cases} y^{(n)} = t\varphi(t), \\ x = \varphi(t). \end{cases} \quad (14.29)$$

Далі, вищеописаним способом, знаходимо загальний розв'язок в параметричній формі.

Приклад. Розв'язати рівняння $e^{y''} + y'' = x$.

Розв'язання. Зробимо заміну $\begin{cases} y'' = t, \\ x = e^t + t, \end{cases}$

$$dy' = y'' dx = t(e^t + 1) dt,$$

$$y' = (t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1,$$

$$dy = y'dx = \left[(t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1 \right] (e^t + 1) dt.$$

Остаточнo маємо

$$\begin{cases} y = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4} \right) e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} + c_1 - 1 \right) e^t + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2, \\ x = e^t + t. \end{cases}$$

Відповідь.
$$\begin{cases} y = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4} \right) e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} + c_1 - 1 \right) e^t + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2, \\ x = e^t + t. \end{cases}$$

14.2.2. Інтегрування диференціальних рівнянь, які не містять шуканої функції та $(k-1)$ -ї похідної

Розглянемо диференціальне рівняння [7]

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (14.30)$$

в якому є $y^{(k)}$, як функція незалежної змінної x .

Введемо нову змінну

$$y^{(k)} = z, \quad (14.31)$$

отримаємо

$$F(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-k)}) = 0, \quad (14.32)$$

тобто ми понизили порядок диференціального рівняння (14.30) на k одиниць.

Припустимо, що ми розв'язали диференціальне рівняння (14.32) і визначили

$$z = \omega(x, C_1, \dots, C_{n-k}). \quad (14.33)$$

Тоді рівняння

$$y^{(k)} = \omega(x, C_1, \dots, C_{n-k}) \quad (14.34)$$

інтегруємо і отримаємо загальний розв'язок

$$y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n). \quad (14.35)$$

Якщо замість загального розв'язку можна знайти загальний інтеграл

$$\Omega(x, z, C_1, \dots, C_{n-k}) = 0,$$

то отримаємо диференціальне рівняння $\Omega(x, y^{(k)}, C_1, \dots, C_{n-k}) = 0$ типу (14.23).

Розглянемо два частинних випадки відносно диференціального рівняння (14.30).

а) Диференціальне рівняння вигляду

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \quad (14.36)$$

Якщо диференціальне рівняння (14.36) можна розв'язати відносно $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}), \quad (14.37)$$

то поклавши $y^{(n-1)} = z$ перейдемо до рівняння $z' = f(z)$.

Якщо $z = \omega(x, C_1)$ – загальний розв'язок останнього рівняння, то остаточно маємо рівняння вигляду (14.18) $y^{(n-1)} = \omega(x, C_1)$.

Припустимо, що диференціальне рівняння (14.35) не можна записати в вигляді (14.37), але воно допускає параметризацію

$$y^{(n-1)} = \varphi(t), y^{(n)} = \psi(t). \quad (14.38)$$

Тоді із співвідношення $dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx$ знаходимо $dx = \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)}$,

відповідно,

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)} + C_1, \\ y^{(n-1)} = \varphi(t). \end{cases} \quad (14.39)$$

Диференціальне рівняння (14.39) вигляду (14.24) і його розв'язки можна отримати в параметричній формі.

б) Диференціальне рівняння вигляду

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0. \quad (14.40)$$

Нехай диференціальне рівняння (14.40) можна розв'язати відносно $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)}). \quad (14.41)$$

Позначимо $y^{(n-2)} = z$ і перейдемо до диференціального рівняння

$$z'' = f(z). \quad (14.42)$$

Помножимо (14.42) на $2z'dx$: $2z'z''dx = 2z'f(z)dx$, звідки $d(z')^2 = 2f(z)dz$.

Отже,

$$(z')^2 = 2 \int f(z)dz + C_1,$$

з якого визначимо

$$z' = \pm \sqrt{2 \int f(z)dz + C_1}.$$

Останнє диференціальне рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Знайшовши з нього

$$z = \varphi(x, C_1, C_2),$$

ми остаточно переходимо до диференціального рівняння вигляду (14.18)

$$y^{(n-2)} = \varphi(x, C_1, C_2). \quad (14.43)$$

Припустимо, що диференціальне рівняння (14.40) не можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, але для нього можлива параметризація $y^{(n-2)} = \varphi(t)$, $y^{(n)} = \psi(t)$.

Запишемо співвідношення

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx, dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx.$$

Помножимо першу рівність на $y^{(n-1)}$

$$y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = y^{(n)}y^{(n-1)}dx,$$

після чого отримаємо

$$d(y^{(n-1)})^2 = 2y^{(n)}y^{(n-1)}dx = 2y^{(n)}dy^{(n-2)},$$

звідки

$$d(y^{(n-1)})^2 = 2\psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Отже, маємо

$$y^{(n-1)} = \pm \sqrt{2\psi(t)\varphi'(t)dt + C_1} \equiv \psi_1(t, C_1).$$

Приєднавши до останньої рівності $y^{(n-2)} = \varphi(t)$, ми отримаємо рівняння пункту а).

Приклад. Знайти загальний розв'язок [5] диференціального рівняння

$$y'' - a(1 + y'^2)^{3/2} = 0.$$

Розв'язання. Задане рівняння є рівнянням вигляду (14.36). Ввівши підстановку $y' = z$, запишемо його у вигляді

$$\frac{dz}{dx} = a(1 + z^2)^{3/2}.$$

Відокремивши змінні, маємо

$$\frac{dz}{(1 + z^2)^{3/2}} = a dx.$$

Звідси $\int \frac{dz}{(1 + z^2)^{3/2}} = ax + C_1$, де зліва є інтеграл від диференціального

бінома: $p = -3/2, n = 2, m = 0$. За допомогою третьої підстановки Чебишова

$1 + z^2 = z^2 t^2$ приходимо до результату

$$\frac{z}{(1 + z^2)} = ax + C_1, \quad z = \frac{ax + C_1}{\sqrt{1 - (ax + C_1)^2}}.$$

Підставимо $z = y'$, матимемо

$$y' = \frac{ax + C_1}{\sqrt{1 - (ax + C_1)^2}}.$$

Інтегруючи останнє рівняння, маємо

$$y = \int \frac{ax + C_1}{\sqrt{1 - (ax + C_1)^2}} dx + C_2 = -\frac{1}{a} \sqrt{1 - (ax + C_1)^2} + C_2.$$

Відповідь. $y = -\frac{1}{a} \sqrt{1 - (ax + C_1)^2} + C_2$.

14.2.3. Пониження порядку диференціальних рівнянь, які не містять незалежної змінної

Ці диференціальні рівняння [14] мають вигляд

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (14.44)$$

і їх порядок можна понизити на одиницю заміною $y' = z$.

При цьому y стає незалежною змінною, а z — шуканою функцією.

Обчислюємо

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dz}{dy} z \right) \frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2 z}{dy^2} z + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right) z,$$

$$\dots$$

$$y^{(n)} = \omega_n \left(z, \frac{dz}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} \right)$$

і остаточно прийдемо до диференціального рівняння $(n-1)$ порядку

$$F \left(y, z, \frac{dz}{dy} z, \dots, \omega_n \left(z, \frac{dz}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} \right) \right) = 0. \quad (14.45)$$

Якщо $z = \varphi(y, C_1, \dots, C_{n-1})$ – розв’язок диференціального рівняння (14.45),
то

$$y' = \varphi(y, C_1, \dots, C_{n-1}). \quad (14.46)$$

Інтегруємо диференціальне рівняння (14.46) і знайдемо загальний інтеграл.

Особливі розв’язки можуть з’являтися при інтегруванні диференціального рівняння (14.46). Переходячи до диференціального рівняння (14.45), можна загубити розв’язки $y = \text{const}$. Для їх знаходження необхідно розв’язати рівняння $F(b, 0, \dots, 0) = 0$. Якщо $b = b_i$ – розв’язок останнього рівняння, то $y = b_i$ – розв’язок диференціального рівняння (14.44).

Приклад. Розв’язати рівняння

$$4y''\sqrt{y} = 1.$$

Розв’язання. Вводимо змінну $y' = z$, $y'' = \frac{dz}{dy} z$, тоді $4 \frac{dz}{dy} z \sqrt{y} = 1$,

$$z^2 = \sqrt{y} + C_1, \text{ звідки } z = \pm \sqrt{\sqrt{y} + C_1}, \text{ отже, } \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\sqrt{y} + C_1},$$

$$x + C_2 = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{\sqrt{y} + C_1}} - \text{ загальний інтеграл рівняння.}$$

Відповідь. $x + C_2 = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{\sqrt{y} + C_1}}.$

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати основні поняття та означення для диференціальних рівнянь вищих порядків.
2. Сформулювати задачу Коші для диференціального рівняння вищого порядку та теорему існування та єдиності її розв'язку.
3. Пояснити з геометричної та механічної точки зору існування єдиного розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку.
4. Розв'язати $y^{(n)} = f(x)$ в загальному вигляді, навести приклад розв'язування диференціального рівняння послідовним пониженням його порядку.
5. Розв'язати диференціальні рівняння $F(x, y', y'') = 0, \quad F(y', y'') = 0.$
6. Пояснити пониження порядку для диференціальних рівнянь $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad F(y, y', y'') = 0.$
7. Розв'язати диференціальні рівняння: 1) $y''' = \cos 5x + x + 3$;
2) $y'' + y' = x$; 3) $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$; 4) $1 + y'^2 = yy'', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
8. Розглянути в загальному вигляді та на конкретних прикладах частинні випадки відносно інтегрування диференціального рівняння $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$

Відповіді.

7.1) $y(x) = -\frac{1}{125} \sin 5x + \frac{1}{24} x^4 + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$; 2) $y(x) = \frac{1}{2} x^2 - x - C_1 e^{-x} + C_2$;

3) $x = C_1 \ln|y| + y + C_2$; 4) $\pm x = \ln|y + \sqrt{y^2 - 1}|.$

Тема 15. Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку

Розглянемо спочатку лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків і для зручності введемо поняття лінійного диференціального оператора.

15.1. Загальні властивості лінійних однорідних диференціальних рівнянь n -го порядку

Властивості лінійних однорідних диференціальних рівнянь n -го порядку будемо розглядати, в основному, як властивості лінійного диференціального оператора [14].

15.1.1. Властивості лінійного диференціального оператора

Означення. Лінійним диференціальним рівнянням називається рівняння вигляду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x), \quad (15.1)$$

де $p_i(x)$, $i=1, \dots, n$, $f(x)$ – задані функції, неперервні на (a,b) .

За таких умов диференціальне рівняння (15.1) має єдиний розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}.$$

Цей розв'язок визначений і n раз неперервно-диференційований на (a,b) .

Особливих розв'язків диференціальне рівняння (15.1) не має. Будь-який розв'язок при конкретних початкових умовах є частинним. Якщо при $y^{(n)}$ стоїть $p_0(x)$, то точки, в яких $p_0(x) = 0$, називаються *особливими*.

Якщо $f(x) = 0$, то диференціальне рівняння (15.1) називають *однорідним*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0. \quad (15.2)$$

Для скорочення запису введемо лінійний диференціальний оператор

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + p_n(x). \quad (15.3)$$

Властивості оператора L

$$1) L(ky) = kL(y), \quad k = \text{const};$$

$$2) L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2);$$

$$3) L\left(\sum_{i=1}^m C_i y_i\right) = \sum_{i=1}^m C_i L(y_i), \text{ де } C_1, C_2, \dots, C_n - \text{ деякі числа.}$$

Використовуючи оператор L , диференціальні рівняння (15.1) і (15.2) перепишемо у вигляді

$$L(y) = f(x), \quad (15'.1)$$

$$L(y) = 0. \quad (15'.2)$$

Означення. Функція $y = y(x)$ називається *розв'язком* диференціального рівняння (15.1), якщо $L(y(x)) = f(x)$ (для диференціального рівняння (15.2) $L(y(x)) \equiv 0$).

Справедливі твердження.

1. Лінійне диференціальне рівняння (15.1) є лінійним для будь-якої заміни незалежної змінної $x = \varphi(t)$ ($\varphi'(t) \neq 0$).

2. Лінійне диференціальне рівняння (15.1) є лінійним для будь-якої лінійної заміни шуканої функції

$$y = \alpha(x)z + \beta(x) \quad (15.4)$$

при певних обмеженнях на функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$.

15.1.2. Властивості розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння, їх лінійна незалежність

Задача полягає в тому, щоб знайти всі дійсні розв'язки диференціального рівняння

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0. \quad (15.5)$$

Для розв'язування такої задачі доцільними є деякі поняття теорії функцій комплексної змінної.

Означення. Функцію $z(x) = u(x) + iv(x)$, де $u(x)$, $v(x)$ – дійсні функції, $i = \sqrt{-1}$, називають *комплексною функцією* від дійсної змінної x ($u(x)$ – дійсна частина, $v(x)$ – уявна частина).

Похідна n -го порядку від $z(x)$ дорівнює

$$z^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x). \quad (15.6)$$

Наведемо потрібні формули для обчислення похідних:

$$а) (e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x} \quad (\alpha = a + ib). \quad (15.7)$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} [e^{\alpha x} (\cos bx + i \sin bx)]' &= \alpha e^{\alpha x} (\cos bx + i \sin bx) + e^{\alpha x} [-b \sin bx + ib \cos bx] = \\ &= e^{\alpha x} (a + ib) \cos bx + e^{\alpha x} (ai - b) \sin bx = (a + ib) e^{\alpha x} (\cos bx + i \sin bx); \end{aligned}$$

б) для дійсного k і будь-якого α справедлива формула

$$(x^k e^{\alpha x})' = (kx^{k-1} + \alpha x^k) e^{\alpha x}; \quad (15.8)$$

в) можна показати

$$(P_n(x) e^{\alpha x})' = \bar{P}_n(x) e^{\alpha x}, \quad (15.9)$$

де $P_n(x)$, $\bar{P}_n(x)$ – поліноми степеня n ;

г) при будь-якому α (дійсному або комплексному) справедлива формула

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}. \quad (15.10)$$

Формула (15.10) доводиться шляхом представлення $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ і використання формули (15.7).

Означення. Комплексна функція

$$y(x) = y_1(x) + iy_2(x) \quad (15.11)$$

називається *розв'язком* однорідного диференціального рівняння (15.5), якщо

$$L(y(x)) \equiv 0, \quad a < x < b.$$

Комплексний розв'язок (15.11) утворює два дійсних розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$. Дійсно, $L(y(x)) = L(y_1(x) + iy_2(x)) = L(y_1(x)) + iL(y_2(x)) = 0$, звідки $L(y_1(x)) = 0$, $L(y_2(x)) = 0$.

Властивості розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння

а) Якщо $y_1(x)$ – розв'язок, тобто $L(y_1(x)) = 0$, то $y = Cy_1(x)$, де C – довільна константа, теж розв'язок диференціального рівняння (15.5)

$$L(Cy_1) = CL(y_1) = 0;$$

б) якщо $y_1(x), y_2(x)$ – розв'язки диференціального рівняння (15.5), то $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ теж розв'язок. Дійсно, $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = 0$;

в) якщо $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ – розв'язки диференціального рівняння (15.5), то їх лінійна комбінація також є розв'язком

$$L\left(\sum_{i=1}^m C_i y_i(x)\right) = \sum_{i=1}^m C_i L(y_i(x)) = 0.$$

Означення. Функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ називаються *лінійно незалежними* на (a, b) , якщо між ними не існує співвідношення виду

$$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0, \quad a < x < b, \quad (15.12)$$

де $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – постійні числа, не рівні нулю одночасно. В протилежному випадку функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ називають *лінійно залежними* на (a, b) .

Для двох функцій поняття лінійної незалежності на (a, b) зводиться до того, щоб відношення функцій $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$, ($y_2(x) \neq 0$) не було постійним на (a, b) .

Зауваження. Якщо одна із функцій на (a, b) тотожно дорівнює нулю, то ці функції лінійно залежні.

Приклад. Функції $y_1=1, y_2=x, \dots, y_n=x^{n-1}$ – лінійно незалежні на будь-якому інтервалі $(a, b) \subset (-\infty, +\infty)$.

Дійсно, співвідношення $\alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_n x^{n-1} = 0$, в якому не всі α_i дорівнюють нулю, не може виконуватися для будь-яких x , так як рівняння $(n-1)$ -го степеня має не більше $(n-1)$ -го кореня.

Приклад. Функції $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ – лінійно незалежні, так як співвідношення $\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{-x} = 0$, де α_1, α_2 не рівні одночасно нулю, виконуються не більше, ніж в одній точці. Це випливає з рівності

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = e^{2x} \neq \text{const}.$$

Розглянемо необхідні умови лінійної залежності n функцій.

Теорема 1. Якщо функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – лінійно залежні на (a, b) , то їх вронскіан $W(x)$ тотожно дорівнює нулю на (a, b) . Тут

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \quad (15.13)$$

Доведення. Згідно умови теореми

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0, \quad a < x < b,$$

де не всі α_i одночасно рівні нулю. Нехай $\alpha_n \neq 0$, тоді

$$y_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}. \quad (15.14)$$

Диференціюємо (15.14) $(n-1)$ раз і підставляємо в (15.13)

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_{n-1}(x) & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1} \\ y_1'(x) & \dots & y_{n-1}'(x) & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1' - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2' - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1^{(n-1)} - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2^{(n-1)} - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}. \quad (15.15)$$

Розкладаючи визначник (15.15) на суму визначників, будемо мати в кожному з них два однакові стовпчики, тому всі визначники будуть рівні нулю і, отже, $W(x) = 0, a < x < b$.

Теорема доведена.

Нехай кожна з функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – розв’язок диференціального рівняння (15.5).

Теорема 2. Якщо функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – лінійно незалежні розв’язки диференціального рівняння (15.5), всі коефіцієнти якого неперервні на (a,b) , то вронскіан цих розв’язків W не дорівнює нулеві в жодній точці інтервалу (a,b) .

Доведення. Припустимо протилежне, що в точці $x_0 \in (a,b)$ $W(x_0) = 0$.

Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \quad (15.16)$$

Так як визначник системи (15.16) $W(x_0) \neq 0$, то вона має ненульовий розв’язок $C_1^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}$. Розглянемо функцію

$$y = C_1^{(0)} y_1(x) + \dots + C_n^{(0)} y_n(x), \quad (15.17)$$

яка є розв’язком диференціального рівняння (15.5).

Система рівнянь (15.16) показує, що в точці x_0 розв’язок (15.17) перетворюється в нуль разом із своїми похідними до $(n-1)$ -го порядку. В силу теореми існування і єдиності це значить, що має місце тотожність

$$y(x) = C_1^{(0)} y_1(x) + \dots + C_n^{(0)} y_n(x) \equiv 0, \quad a < x < b,$$

де не всі $C_i^{(0)}$ дорівнюють нулю. Останнє означає, що розв’язки $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – лінійно залежні на (a,b) . Це протиріччя і доводить теорему.

З теорем випливає: для того, щоб n розв’язків диференціального рівняння (15.5) були лінійно незалежними на (a,b) необхідно і достатньо, щоб їх вронскіан не дорівнював нулю в жодній точці цього інтервалу.

Отже, для вияснення лінійної незалежності n розв’язків диференціального рівняння (15.5) достатньо переконатися, що $W(x)$ не дорівнює нулю хоча б в

одній точці інтервалу (a,b) . Це випливає з наступних властивостей вронскіана від n розв'язків диференціального рівняння (15.5).

а) Якщо вронскіан дорівнює нулю в одній точці $x_0 \in (a,b)$ і всі коефіцієнти диференціального рівняння (15.5) є неперервними, то $W(x_0) \equiv 0$ на (a,b) . Дійсно, якщо $W(x_0) = 0$, то за *теоремою 2* функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – лінійно залежні на (a,b) . Тоді, за *теоремою 1* $W(x) \equiv 0$ на (a,b) ;

б) Якщо вронскіан n розв'язків диференціального рівняння (15.5) відмінний від нуля в одній точці $x_0 \in (a,b)$, то $W(x) \neq 0$ на (a,b) . Дійсно, якби $W(x)$ дорівнював в одній точці із (a,b) нулеві, то згідно п. а) $W(x) \equiv 0$ на (a,b) , в тому числі і в точці $x_0 \in (a,b)$, що суперечить умові.

Звідси випливає, якщо n розв'язків диференціального рівняння (14.5) лінійно незалежні на (a,b) , то вони будуть лінійно незалежні на будь-якому $(a_1, b_1) \subset (a,b)$.

15.1.3. Формула Остроградського-Ліувілля. Фундаментальна система розв'язків та її існування

Теорема. Формула Остроградського-Ліувілля має вигляд

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p_1(x) dx}. \quad (15.18)$$

Доведення. Розглянемо вронскіан $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$ і

обчислимо його похідну

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} +$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Перших $(n-1)$ визначників рівні нулю, так як всі вони мають по два однакових рядки. Далі, домножимо перші $(n-1)$ рядки останнього визначника відповідно на $p_n(x), p_{n-1}(x), \dots, p_2(x)$ і додамо всі n рядків. В силу диференціального рівняння (15.5) маємо

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ -p_1 y_1^{(n-1)} & -p_1 y_2^{(n-1)} & \dots & p_1 y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -p_1(x)W(x).$$

Отже, маємо формулу (15.18).

Означення. Сукупність n розв'язків диференціального рівняння (15.5), визначених і лінійно незалежних на (a,b) , називається *фундаментальною системою розв'язків*.

З попереднього випливає, для того, щоб система n розв'язків диференціального рівняння (15.5) була *фундаментальною системою розв'язків* необхідно і достатньо, щоб вронскіан цих розв'язків був відмінний від нуля хоч в одній точці інтервалу неперервності коефіцієнтів диференціального рівняння (15.5). Всі ці розв'язки повинні бути ненульовими.

Теорема (про існування фундаментальної системи розв'язків). Якщо коефіцієнти диференціального рівняння (15.5) є неперервними на (a,b) , то існує фундаментальна система розв'язків на цьому інтервалі.

Доведення. Візьмемо точку $x_0 \in (a, b)$ і побудуємо, використовуючи метод Пікара, розв'язки :

$y_1(x)$ з початковими умовами $y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = 0, \dots, y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$;

$y_2(x)$ з початковими умовами $y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1, \dots, y_2^{(n-1)}(x_0) = 0$;

.....

$y_n(x)$ з початковими умовами $y_n(x_0) = 0, y_n'(x_0) = 0, \dots, y_n^{(n-1)}(x_0) = 1$.

Очевидно, що $W(x_0) = 1 \neq 0$, отже, побудовані розв'язки лінійно незалежні.

Теорема доведена.

З методу побудови лінійно незалежних функцій випливає, що таких функцій можна побудувати безліч.

Побудована система розв'язків називається *нормованою* в точці $x = x_0$.

Для будь-якого диференціального рівняння (15.5) існує тільки одна фундаментальна система розв'язків, нормована за x_0 .

Теорема. Якщо $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння (15.5), то формула

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (15.19)$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні константи, дає загальний розв'язок диференціального рівняння (15.5) в області

$$a < x < b, |y| < \infty, |y'| < \infty, \dots, |y^{(n-1)}| < \infty, \quad (15.20)$$

тобто в області визначення диференціального рівняння (15.5).

Доведення. Якщо $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – розв'язки диференціального рівняння (15.5), то лінійна комбінація (15.19) теж розв'язок. Систему

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x), \\ y' = \sum_{i=1}^n C_i y_i'(x), \\ \dots \\ y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^n C_i y_i^{(n-1)}(x) \end{array} \right. \quad (15.21)$$

можна розв'язати відносно $C_1, C_2, \dots, C_n$ в області (15.20), так як $W(x) \neq 0$. Згідно означення, (15.19) – загальний розв'язок, і він містить в собі всі розв'язки диференціального рівняння (15.5).

Теорема доведена.

Для знаходження частинного розв'язку такого, що

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (15.22)$$

необхідно все підставити в (15.21) і визначити $C_i^{(0)}, i = 1, \dots, n$. Тоді

$y = \sum_{i=1}^n C_i^{(0)} y_i(x)$ – частинний розв'язок. Якщо фундаментальна система розв'язків

нормована в точці $x = x_0$, то $C_i^{(0)} = y_0$, тобто

$$y = y_0 y_1(x) + y_0' y_2(x) + \dots + y_0^{(n-1)} y_n(x) - \quad (15.23)$$

загальний розв'язок в формі Коші.

Зауважимо, що загальний розв'язок диференціального рівняння (15.5) є однорідна лінійна функція від довільних констант.

Теорема. Диференціальне рівняння (15.5) не може мати більше ніж n лінійно незалежних частинних розв'язків.

15.2. Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Побудова загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (15.24)$$

де $a_1, \dots, a_n$ – постійні дійсні числа, $f(x)$ – неперервна функція на (a, b) .

Разом з неоднорідним диференціальним рівнянням (15.24) будемо розглядати однорідне диференціальне рівняння

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \quad (15.25)$$

Для побудови загального розв'язку диференціального рівняння (15.25) необхідно знайти хоч одну фундаментальну систему розв'язків. Виявляється, що фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (15.25) можна побудувати з елементарних функцій.

Наприклад, якщо $n=1$ для диференціального рівняння $y' + a_1 y = 0$, де a_1 – дійсне число, то частинним розв'язком буде функція $y_1 = e^{-a_1 x}$.

Дотримуючись ідеї Ейлера, частинні розв'язки диференціального рівняння (15.25) шукають у вигляді

$$y = e^{\lambda x}, \quad (15.26)$$

де λ – деякі, поки невідомі, постійні числа (дійсні або комплексні). Підставимо (15.26) в (15.25) отримаємо

$$L(e^{\lambda x}) = (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) e^{\lambda x} = P_n(\lambda) e^{\lambda x}. \quad (15.27)$$

Із (15.27) випливає, що $y = e^{\lambda x}$ є розв'язком диференціального рівняння (15.25) тоді і тільки тоді, коли $P_n(\lambda) = 0$, тобто

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (15.28)$$

Рівняння (15.28) називають *характеристичним рівнянням*, а його корені – *характеристичними числами* диференціального рівняння (15.25).

Розглянемо три випадки побудови лінійно незалежних розв'язків.

а) *Корені характеристичного рівняння $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – дійсні і різні.* Тоді n дійсних частинних розв'язків знайдемо згідно формул

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}.$$

Ці розв'язки є лінійно незалежними. Дійсно,

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

так як останній визначник є визначником Вандермонда, який не дорівнює нулю, коли всі числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – різні.

В цьому випадку загальний розв'язок має вигляд

$$y = \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k x} \quad (15.29)$$

в області

$$|x| < \infty, |y| < \infty, |y'| < \infty, \dots, |y^{(n-1)}| < \infty, \quad (15.30)$$

де $C_1, \dots, C_n$ – довільні сталі.

б) *Корені характеристичного рівняння всі різні, але серед них є комплексні.*

Нехай $a \pm bi$ – пара комплексно-спряжених коренів. Кореневі $a + bi$ відповідає комплексний розв'язок $y = e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$. Згідно доведеному вище, функції $e^{ax} \cos bx$, $e^{ax} \sin bx$ також є розв'язками диференціального рівняння (15.25), які є незалежними в інтервалі $(-\infty, \infty)$. Аналогічно, кореню $a - bi$ відповідають два дійсних, лінійно незалежних розв'язки $e^{ax} \cos bx$, $-e^{ax} \sin bx$. Їх приєднання до знайдених розв'язків дають лінійно залежну систему розв'язків, тобто спряжений корінь не приносить нових дійсних, лінійно незалежних частинних розв'язків.

Таким чином, кожній парі комплексно спряжених коренів відповідає два дійсних, лінійно незалежних розв'язки виду

$$e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx,$$

які разом із розв'язком $e^{\lambda_k x}$ (λ_k – дійсні числа) утворюють фундаментальну систему розв'язків на інтервалі $(-\infty, \infty)$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь.

1) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$; 2) $y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$; 3) $y^{IV} - y''' + 4y'' - 4y' = 0$.

Розв'язання. Запишемо для всіх диференціальних рівнянь характеристичні рівняння і знайдемо їх розв'язки.

$$1) \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$$

Тоді для всіх дійсних різних коренів маємо фундаментальну систему розв'язків

$$y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}$$

та за формулою (15.29) загальний розв'язок

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

2) Характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$$

має один дійсний корінь $\lambda_1 = -1$ та комплексно-спряжені $\lambda_{2,3} = 2 \pm 3i$.

Фундаментальна система розв'язків $y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{2x} \cos 3x, y_3 = e^{2x} \sin 3x$ та загальний розв'язок

$$y = C_1 e^{-x} + (C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x) e^{2x}.$$

3) Аналогічно, як для рівнянь 1) та 2), маємо для характеристичного рівняння $\lambda^4 - \lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = 0$ дійсні, різні корені $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ та комплексні корені $\lambda_{3,4} = \pm 2i$. Отже, $y_1 = 1, y_2 = e^x, y_3 = \cos 2x, y_4 = \sin 2x$ – фундаментальна система розв'язків, $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$ – загальний розв'язок.

Відповідь. 1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$; 2) $y = C_1 e^{-x} + e^{2x} (C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x)$;

3) $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$.

в) *Випадок наявності кратних коренів характеристичного рівняння.*

Припустимо, що $\lambda_1 - k$ -кратний корінь характеристичного рівняння (15.28), так що

$$P_n(\lambda_1) = P'_n(\lambda_1) = \dots = P_n^{(k-1)}(\lambda_1) = 0, \text{ але } P_n^{(k)}(\lambda_1) \neq 0. \quad (15.31)$$

Щоб знайти розв'язки, які відповідають характеристичному числу λ_1 , продиференціюємо тотожність

$$L(e^{\lambda x}) = P_n(\lambda) e^{\lambda x} \quad (15.32)$$

m раз за λ , використовуючи при цьому формулу

$$\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} L(u) = L\left(\frac{\partial^m u}{\partial \lambda^m}\right), \quad (u = e^{\lambda x}).$$

Для знаходження похідної від добутку функцій використовуємо формулу Лейбніца

$$(uv)^{(m)} = \sum_{i=0}^m C_m^i u^{(i)} v^{(m-i)}, \quad (C_m^0 = 1),$$

де $u(\lambda) = P_n(\lambda)$, $v(\lambda) = e^{\lambda x}$. Маємо

$$L(x^m e^{\lambda x}) = \sum_{i=0}^m C_m^i P_n^{(i)}(\lambda) x^{m-i} e^{\lambda x}.$$

Використовуючи (15.31), запишемо $L(x^m e^{\lambda x}) \equiv 0$, $m = 0, 1, \dots, k-1$, тобто функції

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda_1 x} \quad (15.33)$$

є розв'язками диференціального рівняння (15.25). Ці функції лінійно незалежні на (a, b) .

Таким чином, кожному дійсному кореню λ_1 кратності k відповідає k дійсних лінійно незалежних розв'язків виду (15.33).

Зауваження. Якщо характеристичне рівняння має комплексні корені $a \pm ib$ кратності k , то $2k$ лінійно незалежних розв'язків будуть мати вигляд

$$\begin{cases} e^{ax} \cos bx, x e^{ax} \cos bx, \dots, x^{k-1} e^{ax} \cos bx, \\ e^{ax} \sin bx, x e^{ax} \sin bx, \dots, x^{k-1} e^{ax} \sin bx, \end{cases} \quad (15.34)$$

Розв'язки (15.34) лінійно незалежні на інтервалі $(-\infty, \infty)$.

Приклад. Розв'язати диференціальні рівняння:

$$1) y''' - 3y'' + 3y' - y = 0; 2) y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0; 3) y^{IV} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0.$$

Розв'язання.

1) Запишемо розв'язки характеристичного рівняння

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Тоді за формулою (15.33) $y_1 = e^x, y_2 = xe^x, y_3 = x^2e^x$ – фундаментальна система розв’язків та $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$ – загальний розв’язок.

2) Маємо для $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$, $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, тому

$y_1 = e^{3x}, y_2 = e^{2x}, y_3 = xe^{2x}$ – фундаментальна система розв’язків,
 $y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x}$ – загальний розв’язок.

3) Характеристичне рівняння $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$ має кратні комплексні корені $\lambda_{1,2} = 1+i, \lambda_{3,4} = 1-i$, тому за формулою (15.34) фундаментальна система розв’язків має вигляд

$$y_1 = e^x \cos x, y_2 = xe^x \cos x, y_3 = e^x \sin x, y_4 = xe^x \sin x,$$

відповідно, $y = e^x \cos x(C_1 + xC_2) + e^x \sin x(C_3 + xC_4)$ – загальний розв’язок.

Відповідь. 1) $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$; 2) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x}$;

3) $y = e^x \cos x(C_1 + xC_2) + e^x \sin x(C_3 + xC_4)$.

15.3. Структура загального розв’язку неоднорідного рівняння

Розглянемо побудову загального розв’язку лінійного однорідного диференціального рівняння.

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x), \quad (15.35)$$

де $f(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ – неперервні на (a, b) функції.

Припустимо, що для диференціального рівняння (15.35) ми знайшли частинний розв’язок так, що

$$L(y_1) = f(x). \quad (15.36)$$

Введемо нову змінну z

$$y = y_1 + z. \quad (15.37)$$

Тоді $L(y_1 + z) = L(y_1) + L(z) = f(x)$, звідки

$$L(z) \equiv z^{(n)} + p_1(x)z^{(n-1)} + \dots + p_n(x)z = 0. \quad (15.38)$$

Диференціальне рівняння (15.38) називається *однорідним диференціальним рівнянням*, яке відповідає неоднорідному диференціальному рівнянню (15.36).

Загальний розв'язок диференціального рівняння (15.38) записується у формі

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n, \quad (15.39)$$

де $z_1, z_2, \dots, z_n$ – фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння (15.38), $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні сталі. Тоді

$$y = y_1(x) + C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n \quad (15.40)$$

буде загальним розв'язком диференціального рівняння (15.35) в області

$$a < x < b, |y| < \infty, |y'| < \infty, \dots, |y^{(n-1)}| < \infty. \quad (15.41)$$

Таким чином, для знаходження загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння (15.35) необхідно знайти один частинний розв'язок диференціального рівняння (15.35) і додати до нього загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння.

Зауваження. Розглянемо диференціальне рівняння

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x). \quad (15.42)$$

Припустимо, що $y_1(x)$ – частинний розв'язок диференціального рівняння $L(y_1) = f_1(x)$, а $y_2(x)$ – частинний розв'язок диференціального рівняння $L(y_2) = f_2(x)$. Тоді, очевидно, $y_1(x) + y_2(x)$ – частинний розв'язок диференціального рівняння (15.42), тобто справедлива **теорема про накладання частинних розв'язків для неоднорідного диференціального рівняння**.

Приклад. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 2y = 2 + 3e^x.$$

Розв'язання. Розглянемо диференціальні рівняння:

$$y'' + 2y = 2 \quad \text{для якого } y_1 = 1;$$

$$y'' + 2y = 3e^x \quad \text{для якого } y_2 = e^x.$$

Тоді $y_1 + y_2 = e^x + 1$ – частинний розв’язок даного диференціального рівняння.

Відповідь. $y = e^x + 1$.

15.4. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

Методом варіації довільних констант розв’язують лінійні неоднорідні (в загальному випадку, диференціальні рівняння, для яких відома система фундаментальних розв’язків) диференціальні рівняння з різним виглядом правої частини (неперервна функція). Розглянемо цей метод в загальному випадку та для неоднорідного лінійного диференціального рівняння *другого* порядку.

15.4.1. Метод Лагранжа для неоднорідного лінійного диференціального рівняння n -го порядку

Загальний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння (15.35) можна знайти в квадратурах, якщо відомо загальний розв’язок відповідного однорідного диференціального рівняння (15.38). Будемо шукати загальний розв’язок диференціального рівняння (15.35) у вигляді

$$y = \sum_{i=1}^n C_i(x) z_i, \quad (15.43)$$

де $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$ – деяка фундаментальна система розв’язків диференціального рівняння (15.38).

Виберемо функції $C_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ так, щоб функція (15.43) була загальним розв’язком диференціального рівняння (15.35). Так як шукані функції задовольняють тільки одній умові, то для їх визначення підпорядкуємо ці функції будь-яким $(n-1)$ умовам.

Таким чином, знайдемо n похідних функції (15.43):

$$y' = \sum_{i=1}^n C_i(x) z'_i + \sum_{i=1}^n C'_i(x) z_i \text{ та покладемо } \sum_{i=1}^n C'_i(x) z_i = 0;$$

$$y'' = \sum_{i=1}^n C_i(x) z_i'' + \sum_{i=1}^n C_i'(x) z_i' \text{ та покладемо } \sum_{i=1}^n C_i'(x) z_i' = 0;$$

.....

$$y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^n C_i(x) z_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^n C_i'(x) z_i^{(n-2)} \text{ та покладемо } \sum_{i=1}^n C_i'(x) z_i^{(n-2)} = 0;$$

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^n C_i(x) z_i^{(n)} + \sum_{i=1}^n C_i'(x) z_i^{(n-1)} \text{ та покладемо } \sum_{i=1}^n C_i'(x) z_i^{(n-1)} = 0. \quad (15.44)$$

Підставляючи (15.44) в диференціальне рівняння (15.35) отримаємо останнє n -е рівняння

$$\sum_{i=1}^n C_i(x) L(z_i) + \sum_{i=1}^n C_i'(x) z_i^{(n-1)} = f(x).$$

Таким чином, для визначення невідомих функцій отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n C_i'(x) z_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n C_i'(x) z_i' = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^n C_i'(x) z_i^{(n-2)} = 0, \\ \sum_{i=1}^n C_i'(x) z_i^{(n-1)} = f(x) . \end{cases} \quad (15.45)$$

Відносно $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$ – це система лінійних рівнянь з визначником $W(x) \neq 0$. Для знаходження $C_i'(x)$ запишемо формулу

$$C_i'(x) = \frac{W_{ni}(x) f(x)}{W(x)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (15.46)$$

де $W_{ni}(x)$ – алгебраїчне доповнення до елемента n -го рядка i -го стовпчика визначника $W(x)$. Всі функції, які входять в праву частину диференціального рівняння (15.46), є неперервними на (a, b) . Із (15.46) отримаємо

$$C_i(x) = \int_{x_0}^x \frac{W_{ni}(x) f(x)}{W(x)} dx + C_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (15.47)$$

де C_i , $i=1, 2, \dots, n$ – довільні сталі, $x_0 \in (a, b)$.

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (15.35) запишеться у вигляді

$$y = \sum_{i=1}^n z_i \int_{x_0}^x \frac{W_{ni}(t) f(t)}{W(t)} dt + \sum_{i=1}^n C_i z_i. \quad (15.48)$$

Тут

$$y_1 = \sum_{i=1}^n z_i \int_{x_0}^x \frac{W_{ni}(t) f(t)}{W(t)} dt - \quad (15.49)$$

частинний розв'язок диференціального рівняння (15.35).

Неважко перевірити, що частинний розв'язок (15.49) задовольняє нульові початкові умови

$$y_1(x_0) = 0, y_1'(x_0) = 0, \dots, y_1^{(n-1)}(x_0) = 0, x_0 \in (a, b).$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + k^2 y = f(x), \quad k \neq 0.$$

Розв'язання. Фундаментальна система розв'язків для диференціального рівняння $z'' + k^2 z = 0$ буде $z_1 = \cos kx$, $z_2 = \sin kx$. Отже,

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos kx & \sin kx \\ -k \sin kx & k \cos kx \end{vmatrix} = k.$$

Тому загальний розв'язок запишемо у вигляді ($w_{21} = -\sin kx$, $w_{22} = \cos kx$)

$$y = -\frac{\cos kx}{k} \int_{x_0}^x \sin kt f(t) dt + \frac{\sin kx}{k} \int_{x_0}^x \cos kt f(t) dt + C_1 \cos kx + C_2 \sin kx,$$

$$y = \frac{1}{k} \int_{x_0}^x \sin k(x-t) f(t) dt + C_1 \cos kx + C_2 \sin kx.$$

$$\text{Відповідь. } y = \frac{1}{k} \int_{x_0}^x \sin k(x-t) f(t) dt + C_1 \cos kx + C_2 \sin kx.$$

Висновок. Для знаходження загального розв'язку диференціального рівняння (15.35) необхідно знайти фундаментальну систему розв'язків

однорідного рівняння (15.38), після чого загальний розв'язок запишеться в квадратурах.

15.4.2. Метод варіації довільних сталих при розв'язуванні лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку

Для диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (15.50)$$

загальний розв'язок (із попереднього пункту) запишеться у вигляді

$$y = -z_1 \int_{x_0}^x \frac{z_2 f(t)}{W(t)} dt + z_2 \int_{x_0}^x \frac{z_1 f(t)}{W(t)} dt + C_1 z_1 + C_2 z_2. \quad (15.51)$$

При цьому $y_1(x)$ – частинний розв'язок диференціального рівняння (15.50), який задовольняє цьому рівнянню з початковими умовами $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$:

$$y = -z_1 \int_{x_0}^x \frac{z_2 f(t)}{W(t)} dt + z_2 \int_{x_0}^x \frac{z_1 f(t)}{W(t)} dt.$$

Для диференціального рівняння виду

$$y'' + q(x)y = f(x), \quad (p(x) \equiv 0), \quad (15.52)$$

так як $W(x) = \text{const}$, що впливає з формули Остроградського-Ліувілля, загальний розв'язок запишемо у формі

$$y = -\frac{z_1}{W(x_0)} \int_{x_0}^x z_2 f(t) dt + \frac{z_2}{W(x_0)} \int_{x_0}^x z_1 f(t) dt. \quad (15.53)$$

Розглянемо цей метод для лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \quad (15.54)$$

Суть методу полягає в тому, що розв'язується відповідне однорідне рівняння $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, для якого записується загальний розв'язок зі сталими C_1, C_2 :

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (15.55)$$

де $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – незалежні частинні розв’язки однорідного рівняння.

Розв’язок неоднорідного рівняння (15.54) шукаємо у вигляді

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \quad (15.56)$$

причому величини C_1 і C_2 уже розглядаємо як функції від аргументу x . Ці функції підбираємо таким чином, щоб записана у зазначеному вигляді функція (15.56) була розв’язком (15.54).

Для знаходження функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ будемо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases} \quad (15.57)$$

звідки похідні $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ невідомих функцій $C_1(x), C_2(x)$ знаходимо як розв’язки цієї системи рівнянь:

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}, \quad C_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)},$$

при цьому самі функції $C_1(x), C_2(x)$ визначаються шляхом безпосереднього інтегрування.

Приклад. Знайти загальний розв’язок $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$.

Розв’язання. Запишемо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 1 = 0$. Його корені комплексні і дорівнюють $\lambda_1 = i$ і $\lambda_2 = -i$. Отже, загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння має вигляд

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння шукаємо у вигляді

$$y(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x.$$

Для визначення $C_1(x)$ і $C_2(x)$ складемо систему із двох рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \operatorname{tg}^2 x, \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему відносно $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, знайдемо

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \operatorname{tg}^2 x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}; \quad C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \operatorname{tg}^2 x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Тепер функції $C_1(x), C_2(x)$ знаходимо шляхом інтегрування:

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} d(\cos x) = -\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1;$$

$$C_2(x) = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x \right) dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \sin x + C_2.$$

Підставивши знайдені функції $C_1(x), C_2(x)$ в $y(x)$, знайдемо загальний розв'язок даного диференціального рівняння:

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x = \\ &= \left(-\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1 \right) \cos x + \left(\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \sin x + C_2 \right) \sin x = \\ &= C_1 \cos x + C_2 \sin x - \sin x \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - 2. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь. } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \sin x \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - 2.$$

15.5. Знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів

Для деяких частинних випадків функції $f(x)$ можна знайти частинні розв'язки диференціального рівняння

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (15.58)$$

де $a_1, \dots, a_n$ – постійні дійсні числа, $f(x)$ – неперервна функція на (a, b) простішим методом, ніж метод Лагранжа. Такий метод називають **методом невизначених коефіцієнтів**. Розглянемо його для двох типових виглядів правої частини.

I). Нехай диференціальне рівняння задане із правою частиною $P_m(x)e^{\alpha x}$, тобто

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = P_m(x)e^{\alpha x}, \quad (15.59)$$

де $P_m(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_{m-1} x + p_m$, $(m \geq 0)$ – поліном з дійсними чи комплексними коефіцієнтами, α – постійне дійсне чи комплексне число.

Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Число α не є коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок диференціального рівняння (15.59) шукають у вигляді

$$y_1 = Q_m(x)e^{\alpha x}, \quad (15.60)$$

де

$$Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \dots + q_{m-1} x + q_m - \quad (15.61)$$

поліном m -го степеня з невизначеними коефіцієнтами. Тобто, в цьому випадку, частинний розв'язок має ту ж аналітичну структуру, що і права частина диференціального рівняння (15.59).

Коефіцієнти q_i , $i = 0, 1, \dots, m$ знаходяться шляхом підстановки (15.60) в (15.59) і прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x .

Переконаємося, що шукані коефіцієнти визначаються однозначно. Підставимо (15.60) в (15.59), отримаємо

$$\begin{aligned} L(y_1) &= L(Q_m(x)e^{\alpha x}) = L((q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \dots + q_{m-1} x + q_m)e^{\alpha x}) = \\ &= q_0 L(x^m e^{\alpha x}) + q_1 L(x^{m-1} e^{\alpha x}) + \dots + q_{m-1} L(x e^{\alpha x}) + q_m L(e^{\alpha x}) = \\ &= (p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_{m-1} x + p_m) e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

Використовуючи вище наведені формули, запишемо

$$L(e^{\alpha x}) = P_n(\alpha) e^{\alpha x}, \quad L(x^s e^{\alpha x}) = \sum_{i=0}^s C_s^i P_n^{(i)}(\alpha) x^{s-i} e^{\alpha x}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} & q_0 \sum_{i=0}^m C_m^i P_n^{(i)}(\alpha) x^{m-i} e^{\alpha x} + q_1 \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i P_n^{(i)}(\alpha) x^{m-1-i} e^{\alpha x} + \\ & + \dots + q_{m-1} \sum_{i=0}^1 C_1^i P_n^{(i)}(\alpha) x^{1-i} e^{\alpha x} + q_m P_n(\alpha) e^{\alpha x} = \\ & = (p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_{m-1} x + p_m) e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

Скорочуємо на $e^{\alpha x}$ і прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях

$$\left. \begin{array}{l} x^m : \\ x^{m-1} : \\ \dots \\ x : \\ 1 : \end{array} \right\} \begin{array}{l} q_0 P_n(\alpha) = p_0 \\ q_0 C_m^1 P_n'(\alpha) + q_1 P_n(\alpha) = p_1 \\ \dots \\ q_0 C_m^{m-1} P_n^{(m-1)}(\alpha) + q_1 C_{m-1}^{m-2} P_n^{(m-2)}(\alpha) + \dots + q_{m-1} P_n(\alpha) = p_{m-1} \\ q_0 C_m^m P_n^{(m)}(\alpha) + q_1 C_{m-1}^{m-1} P_n^{(m-1)}(\alpha) + \dots + q_{m-1} P_n'(\alpha) + q_m P_n(\alpha) = p_m. \end{array} \quad (15.62)$$

Так як $P_n(\alpha) \neq 0$, то із (15.62) послідовно визначаються всі коефіцієнти $q_0, q_1, \dots, q_m$.

Випадок 2. Параметр α є k -кратним коренем характеристичного рівняння ($k \geq 1$), тобто

$$P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = \dots = P_n^{(k-1)}(\alpha) = 0, P_n^{(k)}(\alpha) \neq 0. \quad (15.63)$$

В цьому випадку частинний розв'язок не можна побудувати в вигляді (15.60), так як $P_n(\alpha) = 0$. Його шукаємо у вигляді

$$y_1 = x^k Q_m(x) e^{\alpha x}, \quad (15.64)$$

де $Q_m(x)$ – поліном вигляду (15.61).

Коефіцієнти полінома визначаються шляхом підстановки (15.64) в (15.59).

$$\begin{aligned} L(y_1) &= L(x^k Q_m(x) e^{\alpha x}) = L\left(\sum_{s=0}^m q_s x^{k+m-s} e^{\alpha x}\right) = \sum_{s=0}^m q_s L(x^{k+m-s} e^{\alpha x}) = \\ &= \sum_{s=0}^m q_s \sum_{i=k}^{k+m-s} C_{k+m-s}^i P_n^{(i)}(\alpha) x^{k+m-s-i} e^{\alpha x} = \sum_{s=0}^m p_s x^{m-s} e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\sum_{s=0}^m q_s \sum_{i=0}^{m-s} C_{k+m-s}^{k+i} P_n^{(k+i)}(\alpha) x^{m-s-i} = \sum_{s=0}^m p_s x^{m-s}.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях

$$\begin{aligned} & x^m \left\{ \begin{aligned} & q_0 C_{k+m}^k P_n^{(k)}(\alpha) = p_0, \\ & q_0 C_{k+m}^{k-1} P_n^{(k+1)}(\alpha) + q_1 C_{k+m-1}^k P_n^{(k)}(\alpha) = p_1, \\ & \dots \\ & q_0 C_{k+m}^{k+m-1} P_n^{(k+m-1)}(\alpha) + q_1 C_{k+m-1}^{k+m-2} P_n^{(k+m-2)}(\alpha) + \dots + q_{m-1} C_{k+1}^k P_n^{(k)}(\alpha) = p_{m-1}, \\ & q_0 C_{k+m}^{k+m} P_n^{(k+m)}(\alpha) + q_1 C_{k+m-1}^{k+m-1} P_n^{(k+m-1)}(\alpha) + \dots + q_m C_k^k P_n^{(k)}(\alpha) = p_m. \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (15.65)$$

Із (15.65) послідовно однозначно визначаються $q_0, q_1, \dots, q_m$, так як $P_n^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

II). Припустимо, що права частина диференціального рівняння (15.58) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_m^{(1)}(x) \cos \beta x + P_m^{(2)}(x) \sin \beta x), \quad (15.66)$$

де $P_m^{(1)}(x), P_m^{(2)}(x)$ – відомі поліноми зі степенем $\leq m$ (хоча б один має степінь m).

Використовуючи формули Ейлера, обчислимо

$$\cos \beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \quad \sin \beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2}$$

і перепишемо функцію $f(x)$ таким чином

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\alpha x} \left(P_m^{(1)}(x) \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + P_m^{(2)}(x) \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2} \right) = \\ &= \bar{P}_m^{(1)}(x) e^{(\alpha+i\beta)x} + \bar{P}_m^{(2)}(x) e^{(\alpha-i\beta)x}, \end{aligned}$$

де $\bar{P}_m^{(1)}(x)$ і $\bar{P}_m^{(2)}(x)$ – поліноми степені m , тобто $f(x)$ є сума двох функцій, які розглянуті вище.

Випадок 1. Число $\alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_1 = \bar{Q}_m^{(1)}(x) e^{(\alpha+i\beta)x} + \bar{Q}_m^{(2)}(x) e^{(\alpha-i\beta)x}, \quad (15.67)$$

де $\bar{Q}_m^{(1)}(x)$ і $\bar{Q}_m^{(2)}(x)$ – поліноми m -го степеня з невизначеними коефіцієнтами.

Випадок 2. Якщо $\alpha + \beta i$ – k -кратний корінь характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукаємо в вигляді

$$y_1 = x^k \left(\overline{Q}_m^{(1)}(x) e^{(a+ib)x} + \overline{Q}_m^{(2)}(x) e^{(a-ib)x} \right). \quad (15.68)$$

Зводячи (15.67) і (15.68) до дійсного вигляду, сформулюємо наступне правило знаходження частинного розв'язку для випадку правої частини вигляду (15.66).

Випадок 1. Якщо $\alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, то

$$y_1 = e^{\alpha x} \left(\overline{Q}_m^{(1)}(x) \cos \beta x + \overline{Q}_m^{(2)}(x) \sin \beta x \right). \quad (15.69)$$

Випадок 2. Якщо $\alpha + \beta i$ – k -кратний корінь характеристичного рівняння ($k \geq 1$), то

$$y_1 = x^k e^{\alpha x} \left(\overline{Q}_m^{(1)}(x) \cos \beta x + \overline{Q}_m^{(2)}(x) \sin \beta x \right). \quad (15.70)$$

Тут $\overline{Q}_m^{(1)}(x)$ та $\overline{Q}_m^{(2)}(x)$ – поліноми m -го степеня з невизначеними коефіцієнтами, які визначаються однозначно.

Завдання для самоконтролю

1. Пояснити (на прикладі) поняття лінійно залежних та незалежних функцій, фундаментальної системи розв'язків для лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку.

2. Записати та довести властивості лінійного диференціального оператора, пояснити доцільність його введення.

3. Довести необхідні умови лінійної залежності n функцій.

4. Сформулювати властивості вронскіана від n розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку.

5. Записати в загальному вигляді структуру загального розв'язку для лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку та пояснити метод Ейлера побудови фундаментальної системи розв'язків.

6. Знайти частинні розв'язки:

$$1) y''' + 3y'' + 3y' + y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1;$$

$$2) y^{IV} - 16y = 0, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y'''(0) = -8.$$

7. Записати та пояснити структуру загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку.

8. Метод Лагранжа для неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку та лінійного неоднорідного диференціального рівняння 1-го порядку (ідея методу, його реалізація, подібність та відмінності).

9. Записати реалізацію методу варіації довільних сталих при розв'язуванні лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку, навести приклад.

10. Метод невизначених коефіцієнтів для запису частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку, якщо права частина має спеціальний вигляд $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$.

11. Метод невизначених коефіцієнтів для запису частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку, якщо права частина має спеціальний вигляд $f(x) = e^{\alpha x} (P_m^{(1)}(x) \cos \beta x + P_m^{(2)}(x) \sin \beta x)$.

8. Розв'язати диференціальне рівняння методом варіації довільних констант:

$$1) y'' + 2y' + 5y = \frac{e^{-x}}{\sin 2x}; \quad 2) y'' + 9y = \frac{1}{\cos 3x}; \quad 3) y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}.$$

9. Розв'язати диференціальні рівняння вищих порядків:

$$\begin{aligned} 1) y^V - 6y^{IV} + 9y''' &= e^x(x^2 + 4); & 2) y^{IV} + 5y'' + 4y &= x^4 + 3x^2 - 1; \\ 3) y^{IV} + 10y'' + 9y &= \cos 4x; & 4) y^{IV} - y''' - 3y'' + 5y' &= 2x^4 + 3x^2 - x + 1. \end{aligned}$$

Відповіді. 6. 1) $y(x) = -e^{-x}(1+x)$; 2) $y(x) = -\frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}\sin 2x$.

8. 1) $y(x) = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{-x}\left(-\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \ln|\sin 2x|\right)$;

2) $y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{1}{9}\cos 3x \ln|\cos 3x| + \frac{1}{3}x \sin 3x$.

3) $y(x) = e^x\left(C_1 + C_2 x - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + x \operatorname{arctg} x\right)$.

9. 1) $y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + (C_4 + C_5 x)e^{3x} + e^x\left(\frac{1}{4}x^2 - x + 4\right)$;

2) $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x + \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + \frac{23}{4}$;

$$3) y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x + \frac{1}{105} \cos 4x.$$

$$4) y(x) = C_1 e^{-2x} + (C_2 + C_3 x + C_4 x^2) e^x - x^4 + 10x^3 + \frac{183}{2} x^2 + 380x + 693.$$

Тема 16. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Найбільше практичне застосування лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами має місце в фізиці: гармонічні, вимушені та вільні коливання, електромагнітні коливання, тому на таких рівняннях зупинимось в цій темі.

16.1. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Загальний та частинний розв'язки

Розглянемо

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (16.1)$$

де p, q – дійсні числа.

За методом Ейлера [12] слід шукати частинні розв'язки цього рівняння у вигляді

$$y = e^{kx}, \quad (16.2)$$

де k – стала (дійсна чи комплексна), яку треба знайти. Підставивши функцію (16.2) в рівняння (16.1) дістанемо

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (16.3)$$

Отже, якщо k буде коренем рівняння (16.3), то функція (16.2) буде розв'язком рівняння (16.1). Квадратне рівняння (16.3) називається *характеристичним рівнянням диференціального рівняння (16.1)*.

Позначимо корені характеристичного рівняння через k_1 і k_2 . Можливі три випадки:

- I. k_1 і k_2 – дійсні і різні числа ($k_1 \neq k_2$);
- II. k_1 і k_2 – комплексні числа ($k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$);
- III. k_1 і k_2 – дійсні і рівні числа ($k_1 = k_2$).

Розглянемо кожен випадок окремо.

I. *Корені характеристичного рівняння дійсні і різні:* $k_1 \neq k_2$. У цьому випадку частинними розв'язками рівняння (16.1) є функції

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні, тому що для $k_1 \neq k_2$,

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const.}$$

Згідно з теоремою про фундаментальну систему розв'язків, за формулою (15.19), загальний розв'язок рівняння (16.1) знаходять за формулою $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, тобто

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \quad (16.4)$$

II. *Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені:*

$$k_1 = \alpha + \beta i, \quad k_2 = \alpha - \beta i.$$

Підставивши значення k_1 і k_2 у формулу (14.36), знайдемо розв'язки

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}, y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}.$$

За формулою Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

маємо

$$\begin{aligned} e^{(\alpha + \beta i)x} &= e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x); \\ e^{(\alpha - \beta i)x} &= e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x). \end{aligned}$$

Зауважимо, що коли функція $z(x) = u(x) + iv(x)$ є розв'язком рівняння (16.1), то розв'язками будуть також функції $u(x)$ та $v(x)$. Дійсно, підставивши функцію $z(x)$ в рівняння (16.1), дістанемо:

$$u'' + v''i + p(u' + v'i) + q(u + vi) \equiv 0,$$

$$\text{або } (u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) = 0.$$

Остання тотожність можлива, коли вирази в дужках дорівнюють нулю. Це означає, що функції u та v – розв’язки рівняння (16.1). Згідно з цим зауваженням, тоді частинними розв’язками є функції (фундаментальна система розв’язків)

$$y_1 = e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x.$$

Ці розв’язки лінійно незалежні, оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\alpha x} \sin \beta x}{e^{\alpha x} \cos \beta x} = \operatorname{tg} \beta x \neq \operatorname{const},$$

Тому загальний розв’язок рівняння (16.1) запишеться у вигляді

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x). \quad (16.5)$$

III. *Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні $k_1 = k_2 = k$.* За формулою (16.2) дістанемо один з розв’язків:

$$y = e^{kx}.$$

Другий розв’язок шукатимемо у вигляді $y_2 = ue^{kx}$, де u – невідома функція від x . Знайшовши y'_2, y''_2 та підставивши їх у рівняння (16.1), дістанемо

$$(u'' + 2u'k + uk^2)e^{kx} + p(u' + uk)e^{kx} + que^{kx} = 0,$$

або

$$u'' + (2k + p)u' + (k^2 + pk + q)u = 0.$$

Оскільки k – корінь рівняння (16.3), то $k^2 + pk + q = 0$ і за теоремою Вієта $2k = -p$, тому $2k + p = 0$ і $u'' = 0$, звідки $u = C_1x + C_2$, де C_1, C_2 – довільні сталі. Поклавши $C_1 = 1, C_2 = 0$ (нас цікавить який-небудь розв’язок $u(x) \neq 0$), знайдемо другий частинний розв’язок рівняння (16.1):

$$y_2 = xe^{kx}.$$

Розв’язки y_1, y_2 – лінійно незалежні, тому загальний розв’язок рівняння (16.1) має вигляд

$$y = e^{kx} (C_1 + C_2x). \quad (16.6)$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 6 = 0$ і знайдемо його корені $k_1 = 2, k_2 = 3$. За формулою (16.4) шуканий розв'язок має вигляд $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

16.2. Неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та із спеціальною правою частиною

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння

$$y'' + py' + qu = f(x), \quad (16.7)$$

де p, q – задані дійсні числа, $f(x) \neq 0$ – задана функція, неперервна на деякому проміжку $(a; b)$.

Загальний розв'язок такого рівняння є сумою частинного розв'язку рівняння (16.7) і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння. Розглянемо детальніше питання про знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Насамперед слід зазначити, що частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (16.7) можна знайти в квадратурах методом варіації довільних сталих. Проте, для рівнянь із спеціальною правою частиною, частинний розв'язок можна знайти значно простіше, не вдаючись до операції інтегрування.

Розглянемо деякі з таких рівнянь.

I. Нехай права частина в рівнянні (16.7) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x), \quad (16.8)$$

де α – дійсне число, $P_n(x)$ – многочлен степеня n .

Можливі такі випадки.

1) Число α не є коренем характерного рівняння

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (16.9)$$

Тоді диференціальне рівняння (16.7) має частинний розв'язок виду

$$y^* = Q_n(x)e^{\alpha x} = (A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n)e^{\alpha x}, \quad (16.10)$$

де $A_0, A_1, \dots, A_n$ – невизначені коефіцієнти.

Справді, підставляючи функцію (16.10) в рівняння (16.7), після скорочення на $e^{\alpha x}$ дістанемо

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x) \equiv P_n(x), \quad (16.11)$$

де $Q_n''(x)$ – многочлен степеня $n-2$, $Q_n'(x)$ – многочлен степеня $n-1$. Таким чином, зліва і справа в тотожності (16.11) є многочлени степеня n . Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях n , дістанемо систему $n+1$ невідомих коефіцієнтів A_i многочлена $Q_n(x)$.

Не зупиняючись далі на доведеннях, вкажемо форму, в якій потрібно шукати частинний розв'язок рівняння (16.7), залежно від виду правої частини $f(x)$ цього рівняння.

2) Якщо число α збігається з одним коренем характеристичного рівняння (16.9), тобто є простим коренем цього рівняння, то частинний розв'язок рівняння (16.7) треба шукати у вигляді

$$y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x}. \quad (16.12)$$

3) Якщо число α є двократним коренем рівняння (16.9), то частинний розв'язок рівняння (16.7) шукають у вигляді

$$y^* = x^2Q_n(x)e^{\alpha x}. \quad (16.13)$$

Об'єднаємо випадки 1)–3).

Якщо права частина рівняння (16.7) має вигляд (16.8), то частинний розв'язок цього рівняння треба шукати у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x),$$

де $Q_n(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами того самого степеня, що й многочлен $P_n(x)$, а r – число коренів характеристичного рівняння, які

дорівнюють α . Якщо α не є коренем характеристичного рівняння, то приймаємо $r = 0$.

II. Нехай права частина в рівнянні (16.7) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x), \quad (16.14)$$

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n , $R_m(x)$ – многочлен степеня m ; α, β – дійсні числа.

Зауваження. Функція (16.14) є окремим випадком функції (16.8) і утворюється з неї при $\beta = 0$.

Частинний розв’язок рівняння (16.7) треба шукати у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x} (Q_s(x) \cos \beta x + L_s(x) \sin \beta x), \quad (16.15)$$

де $Q_s(x)$ та $L_s(x)$ – многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами; s – найвищий степінь многочленів $P_n(x)$ та $R_m(x)$, тобто $s = \max(n, m)$, а r – кількість коренів характеристичного рівняння вигляду $\alpha + i\beta$.

Зокрема, якщо права частина рівняння (16.7) має вигляд

$$f(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x, \quad (16.16)$$

де A, B – невідомі дійсні числа, то частинний розв’язок цього рівняння треба шукати у вигляді

$$y^* = x^r (M \cos \beta x + N \sin \beta x) \quad (16.17)$$

де M, N – невідомі коефіцієнти; r – кількість коренів характеристичного рівняння (16.9), які дорівнюють $i\beta$.

Зауваження. Якщо права частина має так званий спеціальний вигляд (наведений вище), то вигляд частинного розв’язку можна визначити за поданою нижче таблицею.

Функція $f(x)$	Корені характеристичного рівняння	Частинний розв'язок неоднорідного рівняння
$P_n(x)$ – поліном степеня n	$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$	$Q_n(x)$ – поліном степеня n з невідомими коефіцієнтами $xQ_n(x)$ $xQ_n(x)$
$P_n(x)e^{ax}$ $P_n(x)e^{ax}$ $P_n(x)e^{ax}$ $P_n(x)e^{ax}$	$\lambda_1 \neq a, \lambda_2 \neq a$ $\lambda_1 = a, \lambda_2 \neq a$ $\lambda_1 \neq a, \lambda_2 = a$ $\lambda_1 = \lambda_2 = a$	$Q_n(x)\exp(ax)$ $xQ_n(x)\exp(ax)$ $xQ_n(x)\exp(ax)$ $x^2Q_n(x)\exp(ax)$
$P_n(x)\sin(bx)$ $P_n(x)\sin(bx)$	$\lambda_{1,2} \neq \pm ib$ $\lambda_{1,2} = \pm ib$	$Q_n(x)\sin(bx) + R_n(x)\cos(bx)$ $x(Q_n(x)\sin(bx) + R_n(x)\cos(x))$
$P_n(x)\cos(bx)$ $P_n(x)\cos(bx)$	$\lambda_{1,2} \neq \pm ib$ $\lambda_{1,2} = \pm ib$	$Q_n(x)\sin(bx) + R_n(x)\cos(bx)$ $x(Q_n(x)\sin(bx) + R_n(x)\cos(x))$
$P_n(x)e^{ax}\sin(bx)$ $P_n(x)e^{ax}\sin(bx)$	$\lambda_{1,2} \neq a \pm ib$ $\lambda_{1,2} = a \pm ib$	$(Q_n(x)\sin(bx) + R_n(x)\cos(bx))\exp(bx)$ $x(Q_n(x)\sin(bx) + R_n(x)\cos(x))\exp(bx)$
$P_n(x)e^{ax}\cos(bx)$ $P_n(x)e^{ax}\cos(bx)$	$\lambda_{1,2} \neq a \pm ib$ $\lambda_{1,2} = a \pm ib$	$(Q_n(x)\sin(bx) + R_n(x)\cos(bx))\exp(bx)$ $x(Q_n(x)\sin(bx) + R_n(x)\cos(x))\exp(bx)$

У наведеній таблиці поліноми $P_n(x)$, $Q_n(x)$ і $R_n(x)$ – відповідні многочлени степеня n .

Приклад. Розв'язати диференціальні рівняння: 1) $y'' - 2y' + y = 2x + 3$;
2) $y'' + 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$; 3) $y'' + y' - 2y = e^x(\cos x - \sin x)$.

Розв'язання. 1) Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 1$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\bar{y}(x) = e^x(C_1 + C_2x)$. Оскільки правою частиною даного рівняння є функція виду $P_1(x)e^{0 \cdot x}$, причому $\alpha = 0, \alpha \neq k_1, \alpha \neq k_2$, то за формулою (16.10) частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y^* = Q_1(x)e^{0 \cdot x}$, тобто $y^* = A + Bx$, де A і B – невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $y^{*'} = B, y^{*''} = 0$ та підставивши їх у рівняння, дістанемо

$$-2B + A + Bx = 2x + 3.$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} B = 2, \\ -2B + A = 3, \end{cases}$$

звідки $B = 2, A = 7$. Отже, частинний розв'язок даного рівняння має вигляд $y^* = 7 + 2x$, тому $y = \bar{y}(x) + y^*(x) = e^x(C_1 + C_2x) + 2x + 7$ – шуканий загальний розв'язок.

2) Запишемо розв'язки однорідного диференціального рівняння, розв'язавши характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}.$$

Знаходимо розв'язки неоднорідного диференціального рівняння. Оскільки $\alpha = 0, 6x^2 - 10x + 2$ – многочлен другого порядку, тоді $y_1 = Ax^2 + Bx + C$ – вигляд частинного розв'язку. Знаходимо невизначені коефіцієнти:

$$6Ax^2 + (6B - 10A)x + 6C - 5B + 2A = 6x^2 - 10x + 2,$$

$$\begin{cases} 6A = 6, \\ 6B - 10A = -10, \\ 6C - 5B + 2A = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = 0, \\ C = 0. \end{cases}$$

Отже, $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + x^2$ – загальний розв'язок.

3) Права частина диференціального рівняння має вигляд (16.15) і для нашого випадку $\alpha = 1, \beta = 1$.

$$\text{Маємо } \lambda^2 + \lambda - 2 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, y(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x}.$$

Оскільки $\alpha + i\beta = 1 + i$, то $y_1(x) = e^x(A\cos x + B\sin x)$. Після підстановки в початкове рівняння $y_1(x)$, прирівнявши коефіцієнтів за $\sin x, \cos x$, отримаємо

$$y_1 = e^x(2\cos x + \sin x),$$

де $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + e^x(2\cos x + \sin x)$ – загальний розв'язок.

Відповідь. 1) $y = e^x(C_1 + C_2x) + 2x + 7$; 2) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + x^2$;

$$3) y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + e^x (2 \cos x + \sin x).$$

16.3. Диференціальні рівняння коливань

16.3.1. Механічні коливання

Існують два види коливальних рухів: вільні і вимушені.

Вільні коливання – це коливання, які відбуваються в механічній системі під дією внутрішніх сил системи після короткочасного впливу зовнішньої сили.

До таких коливань належать, наприклад, коливання маятника, тягарця на нитці, тягарця на пружині, шальки вагів тощо.

Вільні коливання – коливання, які відбуваються тільки за рахунок початкового запасу енергії, наданого системі.

Коливання, які виникають під дією зовнішніх сил, що змінюються з часом за величиною і напрямом, називаються **вимушеними**.

Механічні коливання, що відбуваються під дією сили, пропорційної зміщенню і напрямленої до положення рівноваги, називаються *гармонічними коливаннями* і описуються гармонічним законом:

$$s = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (16.18)$$

Тут s – зміщення тіла (точки) від положення рівноваги, A – амплітуда, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ – циклічна частота, T – період, φ_0 – початкова фаза.

Швидкість v коливань тіла (точки):

$$v = \frac{ds}{dt} = \omega \cdot A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (16.19)$$

З рівняння (16.19) випливає, що швидкість коливання змінюється з часом. Отже, коливальний рух відбувається з прискоренням:

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega^2 A \cdot s. \quad (16.20)$$

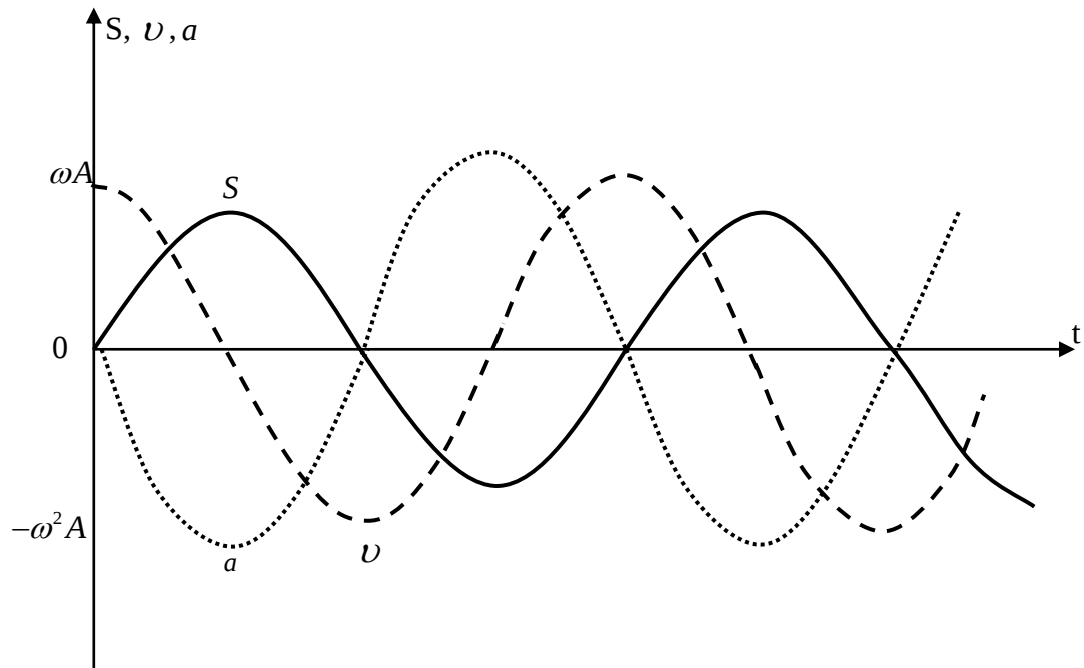


Рис. 16.1. Вигляд зміни основних характеристик при гармонічному коливанні.

Для наочності, зміна s , v та a з часом (при гармонічному коливанні), розраховані за формулами (16.18–16.20) при $\varphi_0 = 0$ представлені на рис. 16.1.

Коли на тіло діє лише сила пружності, тоді

$$F_{np} = -k \cdot s, \quad (16.21)$$

де k – коефіцієнт жорсткості, тоді, згідно з другим законом Ньютона, одержимо:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} + k \cdot s = 0. \quad (16.22)$$

Позначивши через $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, отримуємо диференціальне рівняння гармонічного коливання:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0. \quad (16.23)$$

Оскільки всередині коливної системи завжди присутня також сила тертя, то гармонічні коливання будуть затухати і з часом зовсім зникнуть. При невеликих швидкостях руху можна вважати, що сила тертя пропорційна швидкості руху тіла:

$$F_{mp} = -r\dot{s} = -r \frac{ds}{dt}, \quad (16.24)$$

де r – коефіцієнт опору середовища. Тоді другий закон Ньютона, для розгляданого випадку, запишемо у вигляді

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{r}{m} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{k}{m} \cdot s = 0 \quad (16.25)$$

Позначивши $\frac{r}{m} = 2\beta$ (β – коефіцієнт затухання), отримаємо диференціальне рівняння затухаючих коливань:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0, \quad (16.26)$$

розв'язком якого є функція $s(t)$ (рис. 16.2),

$$s = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (16.27)$$

де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Залежність зміни амплітуди з часом має вигляд $s = A_0 e^{-\beta t}$ і графічно показана на рис. 16.2.

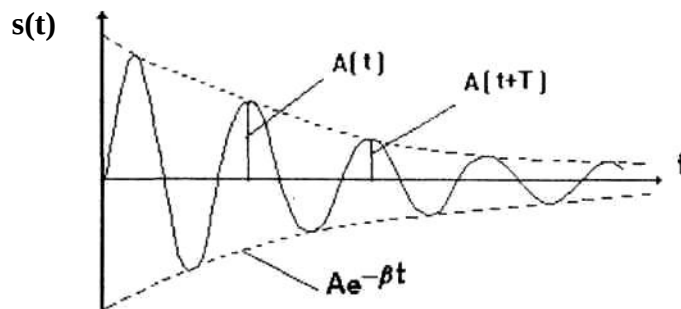


Рис.16.2. Затухаючі коливання.

Період затухаючих коливань визначається за формулою

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (16.28)$$

Відношення двох сусідніх амплітуд, розділених інтервалом часу, рівним періоду коливань, називається *декрементом затухання* і позначається буквою дельта δ :

$$\delta = \frac{A(t)}{A(t+T)}. \quad (16.29)$$

Коливанням, які виникають в системі при дії зовнішньої сили, що змінюється за періодичним законом, називаються *вимушеними коливаннями*.

Якщо на матеріальну точку, крім квазіпружної сили і сили тертя, діє зовнішня сила

$$F = F_0 \cos \omega t, \quad (16.30)$$

де F_0 – її амплітуда, ω – кругова частота зовнішньої сили, то другий закон Ньютона матиме вигляд

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -ks - r \frac{ds}{dt} + F_0 \cos \omega t \quad (16.31)$$

або

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 \cdot s = f_0 \cos \omega t, \quad (16.32)$$

де $f_0 = \frac{F}{m}$.

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$s = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (16.33)$$

де

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{2\beta \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Резонансна кругова частота, при якій зміщення досягає максимальної амплітуди визначається за формулою $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.

Відповідно, амплітуда при резонансі дорівнює $A = \frac{f_0}{2 \cdot \beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$.

Залежність амплітуди коливань від частоти зображена на рис.16.3 ($\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$).

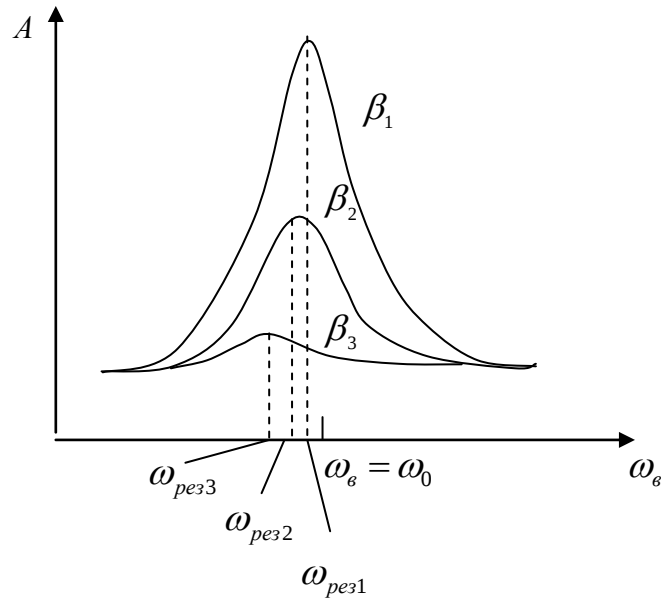


Рис.16.3. Залежність амплітуди від частоти.

Існують коливальні системи, в яких підтримуються незатухаючі коливання власної частоти. Такі системи називаються *автоколивальними*, а коливання, що в них відбуваються – *автоколиваннями*.

16.3.2. Приклади вільних та вимушених коливань

Приклад 1. Знайдемо період коливань математичного маятника довжиною l (рис.16.4).

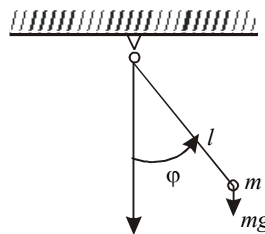


Рис. 16.4. Коливання математичного маятника.

Коливання маятника описуються диференціальним рівнянням

$$ml \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi. \quad (16.34)$$

У рівнянні (16.34) t – час, φ – кут відхилення маятника, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння.

За малих коливань вважають, що $\sin \varphi \approx \varphi$. Лінеаризувавши диференціальне рівняння, приходимо до диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0, \quad \omega^2 = gl^{-1}. \quad (16.35)$$

Характеристичне рівняння $p^2 + \omega^2 = 0$ має корені $p = \pm i\omega$, $i = \sqrt{-1}$.

Диференціальне рівняння (16.35) має загальний розв'язок

$$\varphi = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Цей розв'язок має період $T = 2\pi \omega^{-1} = 2\pi \sqrt{g^{-1}l}$.

Приклад 2. Нехай вимушені коливання системи з одним ступенем вільності описуються диференціальним рівнянням другого порядку

$$y'' + \omega^2 y = a \cos \nu x, \quad a \geq 0. \quad (16.36)$$

Якщо $a = 0$, то система має коливання з частотою, яка називається *частотою власних коливань*. Величина ν називається *частотою вимушених коливань*.

Однорідним диференціальним рівнянням є рівняння вигляду (16.35), яке має, відповідно, такий загальний розв'язок

$$\varphi = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Знайдемо частинний розв'язок методом невизначених коефіцієнтів. Так як $\nu \neq \omega$, диференціальне рівняння матиме частинний розв'язок вигляду

$$u = A \cos \nu x + B \sin \nu x,$$

який підставляємо в початкове рівняння для визначення A, B .

$$\begin{aligned} (A \cos \nu x + B \sin \nu x)'' + \omega^2 (A \cos \nu x + B \sin \nu x) &= a \cos \nu x, \\ -A\nu^2 \cos \nu x - B\nu^2 \sin \nu x + (A\omega^2 \cos \nu x + B\omega^2 \sin \nu x) &= a \cos \nu x, \\ (\omega^2 - \nu^2) A \cos \nu x + (\omega^2 - \nu^2) B \sin \nu x &= a \cos \nu x, \end{aligned}$$

звідки і отримуємо частинний розв'язок у вигляді

$$y = \frac{a}{\omega^2 - \nu^2} \cos \nu x.$$

На рис.16.5 зображено графік амплітуди $A = \frac{a}{|\omega^2 - \nu^2|}$ вимушених коливань.

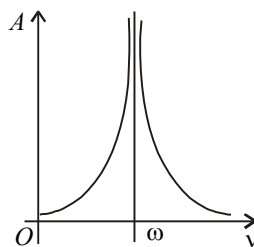


Рис.16.5. Амплітуда вимушених коливань.

При $\nu \rightarrow \omega$ амплітуда коливань необмежено зростає. Це явище називається резонансом.

Приклад 3. Розглянемо випадок, коли частота вимушених коливань збігається з частотою власних коливань. Коливання системи описуються диференціальним рівнянням

$$y'' + \omega^2 y = a \cos \omega x. \quad (16.37)$$

Оскільки $p = i\omega$ є коренем рівняння $p^2 + \omega^2 = 0$, то шукаємо частинний розв'язок у вигляді

$$y = Ax \cos \omega x + Bx \sin \omega x.$$

Права частина диференціального рівняння є парною функцією, отже, можемо припустити, що $B = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} y &= Ax \cos \omega x, & y' &= A(\cos \omega x - x\omega \sin \omega x), \\ y'' &= A(-\omega \sin \omega x - \omega \sin \omega x - x\omega^2 \cos \omega x). \end{aligned}$$

Підставляємо в диференціальне рівняння

$$A(-\omega \sin \omega x - \omega \sin \omega x - x\omega^2 \cos \omega x) + \omega^2 Ax \cos \omega x = a \cos \omega x,$$

звідки знаходимо значення $A = -0,5a\omega^{-1}$ та частинний розв'язок

$$y = -\frac{a}{2\omega} x \cos \omega x.$$

Амплітуда коливань необмежено зростає. Цей випадок у фізиці називають резонансом між власними значеннями матеріальної точки та зовнішньою силою.

16.3.3. Вільні гармонійні коливання у коливальному контурі

Серед різних електричних явищ особливе місце займають електромагнітні коливання, при яких фізичні величини (заряди, струми, електричні і магнітні поля) періодично змінюються. Для виникнення і підтримування електромагнітних коливань необхідні певні системи, найпростішою з яких є коливальний контур – ланцюг, який складається з увімкнених послідовно котушки індуктивністю L , конденсатора ємністю C і резистора опором R .

Розглянемо послідовні стадії коливального процесу в ідеалізованому контурі, опір якого безмежно малий $R \approx 0$. Для виникнення в контурі коливань конденсатор попередньо заряджають, надаючи його обкладкам заряди $\pm Q$. Тоді в початковий момент часу $t = 0$ (рис. 16.6, а) між обкладками конденсатора виникне електричне поле, енергія якого $W = \frac{1}{2C}Q^2$.

Замкнувши конденсатор на котушку індуктивності, він почне розряджатися й у контурі потече зростаючий з часом струм I . У результаті енергія електричного поля буде зменшуватися, а енергія магнітного поля котушки зростати.

Так як $R \approx 0$, то, відповідно до закону збереження енергії, повна енергія контуру буде дорівнювати

$$W = \frac{1}{2C}Q^2 + \frac{1}{2}LI^2 = \text{const}, \quad (16.38)$$

(енергія на нагрівання провідників у такому коливальному контурі не витрачається). У момент часу $t = \frac{1}{4}T$, коли конденсатор повністю розрядиться, енергія електричного поля зменшується до нуля, а енергія магнітного поля, а, отже, і струм досягають найбільшого значення (рис. 16.6,б). Починаючи з цього моменту часу, струм у контурі буде зменшуватися; отже, почне слабшати магнітне поле котушки та індукований у ній струм, який тече (відповідно до правила Ленца) у тому ж напрямку, що й струм розрядки конденсатора. Конденсатор почне перезаряджатися, при цьому виникне електричне поле, яке

намагатиметься послабити струм, який зрештою зменшується до нуля, а заряд на обкладках конденсатора досягне максимуму (рис. 16.6, в). Далі ті ж процеси будуть відбуватись в зворотному напрямку (рис. 16.6, г), і система до моменту часу $t = T$ прийде в початковий стан (рис. 16.6, а). Після цього почнеться повторення розглянутого циклу розрядки і зарядки конденсатора.

Якби втрат енергії не було, то в контурі відбувалися б періодичні незатухаючі коливання, тобто періодично змінювалися (коливалися) б заряд Q на обкладках конденсатора, напруга U на конденсаторі і сила струму I , яка тече через котушку індуктивності.

Отже, у контурі виникають електричні коливання з періодом T , причому протягом першої половини періоду струм тече в одному напрямку, протягом другої половини – у протилежному. Коливання супроводжуються перетвореннями енергій електричних і магнітних полів.

Електричні коливання у коливальному контурі можна зіставити з механічними коливаннями маятника, які супроводжуються взаємними перетвореннями потенціальної і кінетичної енергій маятника.

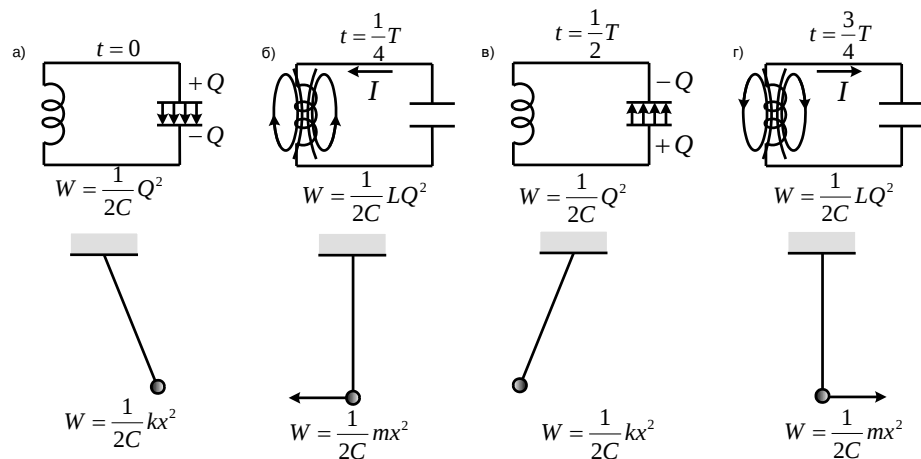


Рис.16.6. Послідовні стадії коливального процесу.

У даному випадку потенціальна енергія маятника $\frac{kx^2}{2}$ аналогічна енергії електричного поля конденсатора $\frac{Q^2}{2C}$, кінетична енергія маятника $\frac{mv^2}{2}$ – енергії

магнітного поля котушки $\frac{LI^2}{2}$, а швидкість руху маятника – силі струму в контурі.

Роль інерції маятника буде зводитися до самоіндукції котушки, а роль сили тертя, яке діє на маятник – до опору контуру.

Відповідно до другого правила Кірхгофа, для контуру, який містить котушку індуктивністю L , конденсатор ємністю C і резистор опором R маємо $IR + U_C = \varepsilon_s$, де IR – спад напруги на резисторі, $U_C = \frac{Q}{C}$ – напруга на конденсаторі, $\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}$ – е.р.с. самоіндукції, яка виникає в котушці при протіканні в ній змінного струму (ε_s – єдина е.р.с. у контурі).

Отже,

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0. \quad (16.39)$$

Поділивши (16.39) на L і підставивши $I = \dot{Q}$ та $\frac{dI}{dt} = \ddot{Q}$, одержимо диференціальне рівняння коливань заряду Q у контурі:

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0. \quad (16.40)$$

У даному коливальному контурі зовнішні е. р. с. відсутні, тому розглянуті коливання є вільними коливаннями. Якщо опір $R = 0$, то вільні електромагнітні коливання у контурі є гармонічними. Тоді з (16.40) одержимо диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань заряду Q в контурі:

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0. \quad (16.41)$$

З виразу (16.41) випливає, що заряд Q в коливальному контурі виконує гармонічні коливання за законом

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (16.42)$$

де Q_m – амплітуда коливань заряду конденсатора з циклічною частотою ω_0 , яка

називається власною частотою контуру $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ та періодом $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Сила струму в коливальному контурі буде дорівнювати

$$I = \dot{Q} = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}), \quad (16.43)$$

де $I_m = \omega_0 Q_m$ – амплітуда сили струму.

Напруга на конденсаторі

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{Q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (16.44)$$

де $U_m = \frac{Q_m}{C}$ – амплітуда напруги.

З виразів (16.43) і (16.44) випливає, що коливання струму I випереджають по фазі коливання заряду Q на $\pi/2$, тобто коли струм досягає максимального значення, тоді заряд, також і напруга, перетворюються в нуль і, навпаки. Цей взаємозв'язок був установлений при розгляді послідовних стадій коливального процесу в контурі та на підставі енергетичних міркувань. Вільні електромагнітні коливання в контурі є незатухаючими.

Завдання для самоконтролю

1. Записати, обчислити вронськіани для коренів характеристичного рівняння лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розглянути всі випадки та пояснити отримані результати.

2. Записати фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку:

1) $y'' + 4y' + 20y = 0$; 2) $y'' + y' - 2y = 0$; 3) $y'' - 14y' + 49y = 0$.

3. Пояснити метод невизначених коефіцієнтів для запису частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами для правої частини спеціального вигляду $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$.

4. Розглянути метод невизначених коефіцієнтів для лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку у випадку правої

частини спеціального вигляду $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x)$, зокрема, і для $f(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x$.

5. Розв'язати диференціальні рівняння:

$$1) y'' + 2y' = 4e^x (\sin x + \cos x); \quad 2) y'' + 10y' + 25y = 40 + 52x - 240x^2 - 200x^3;$$

$$3) y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 6x; \quad 4) y'' + 2y' + y = (12x - 10)e^{-x};$$

$$5) y'' + y = 2 \cos 5x + 3 \sin 5x; \quad 6) y'' + 4y' = 15e^x.$$

Відповіді.

$$6. 1) y_1(x) = e^{-2x} \cos 4x; y_2(x) = e^{-2x} \sin 4x; y(x) = e^{-2x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x);$$

$$2) y_1(x) = e^{-2x}; y_2(x) = e^x; y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x;$$

$$3) y_1(x) = e^{7x}; y_2(x) = x e^{7x}; y(x) = e^{7x} (C_1 + C_2 x). 3. 1) y(x) = C_1 + C_2 e^{-2x} + e^x \left(-\frac{2}{5} \cos x + \frac{6}{5} \sin x \right);$$

$$2) y(x) = e^{-5x} (C_1 + C_2 x) - 8x^3 + 4x; 3) y(x) = e^{2x} (C_1 + C_2 x) - \frac{1}{36} e^{2x} \sin 6x;$$

$$4) y(x) = e^{-x} (C_1 + C_2 x + 2x^3 - 5x^2);$$

$$5) y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{12} \cos 5x - \frac{1}{8} \sin 5x; 6) y(x) = C_1 + C_2 e^{-4x} + 3e^x.$$

Розділ VI. Системи звичайних диференціальних рівнянь

Тема 17. Системи звичайних диференціальних рівнянь

У багатьох науково-технічних задачах буває потрібно знайти не одну, а зразу декілька невідомих функцій, які пов'язані між собою кількома диференціальними рівняннями. Сукупність таких рівнянь утворює систему диференціальних рівнянь.

Приклад. Нехай матеріальна точка маси m має криволінійну траєкторію в просторі. Потрібно визначити закон руху точки, тобто залежність координат x , y , z від часу t , коли на неї діє сила $\vec{F}$.

Якщо $\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}(x; y; z)$ – радіус-вектор рухомої точки, то її швидкість і прискорення знаходяться за формулами:

$$\vec{v} = \vec{r}'(t) = (x'; y'; z'), \quad \vec{a} = \vec{r}''(t) = (x''; y''; z'').$$

Сила $\vec{F}$, під дією якої рухається точка, взагалі кажучи, є функцією часу, координат точки та проєкцій швидкості на осі координат: $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{r}')$. Тому, згідно із другим законом Ньютона, диференціальне рівняння руху точки має вигляд $m\vec{r}'' = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{r}')$.

Це векторне рівняння еквівалентне системі трьох скалярних рівнянь:

$$\begin{cases} mx'' = F_x(t, x, y, z, x', y', z'), \\ my'' = F_y(t, x, y, z, x', y', z'), \\ mz'' = F_z(t, x, y, z, x', y', z'). \end{cases}$$

Наведені диференціальні рівняння утворюють систему трьох диференціальних рівнянь другого порядку відносно трьох невідомих функцій $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

17.1. Основні поняття та означення. Задача Коші

Означення. Сукупність рівнянь вигляду

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0, \\ \dots \\ F_n(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0, \end{cases} \quad (17.1)$$

де $y_1, \dots, y_n$ – шукані функції від незалежної змінної x , називається *системою диференціальних рівнянь першого порядку*.

Означення. Систему звичайних диференціальних рівнянь (17.1) записано в *нормальній формі*, якщо її можна розв'язати відносно похідних і представити в такому вигляді

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17.2)$$

Кількість рівнянь системи (17.2) називається *порядком системи звичайних диференціальних рівнянь*.

Означення. Якщо праві частини [14] системи диференціальних рівнянь (17.2) лінійні за змінними $y_1, \dots, y_n$

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n p_{ij}(x) y_j + f_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad (17.3)$$

то система називається *лінійною*.

Означення. Сукупність n функцій

$$y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x), \quad (17.4)$$

визначених і неперервно диференційовних на (a, b) , називається *розв'язком системи (17.2)*, якщо вона перетворює всі рівняння системи (17.2) в тотожності на (a, b) .

Процес знаходження розв'язків системи називається *інтегруванням*.

Задача Коші: для системи диференціальних рівнянь (17.2) серед всіх розв'язків знайти такий розв'язок

$$y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x), \quad (17.5)$$

який задовольняє умови

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \dots, y_n(x_0) = y_n^{(0)}. \quad (17.6)$$

Тут $y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ – початкові значення шуканих функцій, x_0 – початкове значення незалежної змінної x . Числа $x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ називаються *початковими даними* розв'язку (17.5), умови (17.6) – *початковими умовами*.

Геометричний зміст задачі Коші – серед всіх інтегральних кривих системи диференціальних рівнянь (17.2) знайти ту, яка проходить через точку (17.6).

Механічний зміст задачі Коші – знайти такий рух, визначений системою диференціальних рівнянь (17.2), який задовольняє початкові умови (17.6).

17.2. Теореми про достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші

Теорема 1 (про існування і єдиність розв'язку задачі Коші). Розглянемо задачу (17.2), (17.6). Припустимо, що праві частини системи диференціальних рівнянь (17.2) визначені в області

$$R: |x - x_0| \leq a, |y_k - y_k^{(0)}| \leq b, k = 1, 2, \dots, n$$

($a, b > 0$ – задані числа) і задовольняють на R умови:

1) функції $f_k(x, y_1, \dots, y_n)$, $k = 1, 2, \dots, n$ є неперервними за всіма аргументами, і, отже, обмеженими:

$$|f_k(x, y_1, \dots, y_n)| < M, M > 0, k = 1, 2, \dots, n, (x, y_1, \dots, y_n) \in R;$$

2) функції $f_k(x, y_1, \dots, y_n)$ мають обмежені частинні похідні за змінними $y_1, \dots, y_n$, тобто $\left| \frac{\partial f_k(x, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_l} \right| \leq K, l, k = 1, 2, \dots, n, (x, y_1, \dots, y_n) \in R$ ($K > 0$ – задане число).

При цьому існує єдиний розв'язок системи (17.2) за умови (17.6), визначений і неперервно-диференційовний на інтервалі $|x - x_0| \leq h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$.

Зауваження. Якщо праві частини системи диференціальних рівнянь (17.2) – суто поліноми від своїх аргументів, то існує єдиний розв’язок задачі Коші (17.2), (17.6) для будь-яких початкових умов.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь в нормальній формі, але залежну від параметрів

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m), \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (17.7)$$

праві частини якої визначенні в областях

$$R: |x - x_0| \leq a, |y_k - y_k^{(0)}| \leq b, \quad k=1, 2, \dots, n$$

та $R_\lambda: \lambda_1^{(0)} \leq \lambda_1 \leq \lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_m^{(0)} \leq \lambda_m \leq \lambda_m^{(1)}$.

Теорема 2 (про неперервну залежність розв’язку від параметрів).

Припустимо, що праві частини системи диференціальних рівнянь (17.7) задовольняють умови:

1) *функції $f_k(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $k=1, 2, \dots, n$ неперервні за $x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ в області R і R_λ , і, отже, обмежені*

$$|f_k(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)| \leq M, \quad M > 0;$$

$$(x, y_1, \dots, y_n) \in R, (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in R_\lambda, (M = \text{const});$$

2) *функції $f_k(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $k=1, 2, \dots, n$ задовольняють умові Ліпшиця за $y_1, \dots, y_n$*

$$|f_k(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) - f_k(x, \bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \dots, \bar{\bar{y}}_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)| \leq L \sum_{i=1}^n |\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_i|,$$

де $(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$ і $(x, \bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \dots, \bar{\bar{y}}_n)$ – будь-які точки з R , λ – будь-яка точка з R_λ , L – постійне додатне число, незалежне від x та λ . Тоді система (17.7) має єдиний розв’язок

$$y_i = y_i(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m), \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (17.8)$$

який задовольняє початкові умови $y_i(x_0) = y_i^{(0)}, i=1, \dots, n$.

Цей розв’язок є визначеним і неперервно-диференційовним за x на інтервалі

$$|x - x_0| \leq h = \min \left\{ a, \frac{b}{m} \right\}, \quad (17.9)$$

визначений і неперервний за $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ в області R_λ та рівномірно-неперервний за x в області (17.9), тобто, для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, що одночасно для кожного x із (17.9) виконується нерівність

$$|y_k(x, \lambda_1 + \Delta\lambda_1, \dots, \lambda_m + \Delta\lambda_m) - y_k(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m)| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

лише за умов

$$|\Delta\lambda_1| < \delta, \dots, |\Delta\lambda_m| < \delta.$$

Теорема 3 (про неперервну залежність розв'язків від початкових умов).

Якщо праві частини системи диференціальних рівнянь (17.2) задовольняють в R умови теореми Пікара (теореми 1), то розв'язок

$$y_k = \varphi_k(x, x^*, y_1^*, \dots, y_n^*), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (17.10)$$

з початковими умовами

$$y_1(x^*) = y_1^*, \dots, y_n(x^*) = y_n^* \quad (17.11)$$

буде неперервним за x і початковими умовами $x^*, y_1^*, \dots, y_n^*$, коли

$$|x - x_0| \leq \frac{h}{2} - \omega, \quad (17.12)$$

а $y_1(x^*) = y_1^*, \dots, y_n(x^*) = y_n^*$ лежать в області

$$|x^* - x_0| \leq \omega, \quad |y_i^* - y_i^{(0)}| \leq \frac{b}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (17.13)$$

$$\text{де } h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad 0 \leq \omega \leq \frac{h}{4}.$$

При цьому розв'язок (17.10) буде неперервним за $x^*, y_1^*, \dots, y_n^*$ в області (17.13), рівномірно неперервним за x із (17.12), тобто для любого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, що нерівності

$$|\varphi_k(x, x^* + \Delta x^*, y_1^* + \Delta y_1^*, \dots, y_n^* + \Delta y_n^*) - \varphi_k(x, x^*, y_1^*, \dots, y_n^*)| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

виконується одночасно для всіх x з (17.12), коли

$$|\Delta x^*| < \delta, \quad |\Delta y_1^*| < \delta.$$

17.3. Загальний, частинний і особливий розв'язки

Нехай D – область, в кожній точці якої виконуються умови теореми існування і єдиності.

Означення. Сукупність n функцій

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, \dots, C_n), \\ \dots \dots \dots \dots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, \dots, C_n), \end{cases} \quad (17.14)$$

визначених в деякій області зміни змінних $x, C_1, \dots, C_n$, і які мають неперервні частинні похідні за x , будемо називати *загальним розв'язком системи* (17.2) в області D , якщо систему (17.14) можна розв'язати відносно $C_1, \dots, C_n$

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots \dots \dots \dots \\ C_n = \psi_n(x, y_1, \dots, y_n), \end{cases} \quad (17.15)$$

а сукупність функцій (17.14) є розв'язком диференціального рівняння (17.2) для всіх сталих, визначених співвідношеннями (17.15), коли $(x, y_1, \dots, y_n) \in D$.

Якщо в (17.14) роль сталих відіграють початкові умови

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}), \\ \dots \dots \dots \dots \\ y_n = \varphi_n(x, x_0, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}), \end{cases} \quad (17.16)$$

то (17.16) називається *загальним розв'язком в формі Коші*.

Означення. Розв'язок системи диференціальних рівнянь (17.2) називається *частинним*, якщо він складається з точок єдиності розв'язку задачі Коші. Його можна отримати при конкретних сталих, включаючи $\pm \infty$.

Означення. Розв'язок системи диференціальних рівнянь (17.2) називається *особливим*, якщо в кожній точці його порушується єдиність розв'язку задачі Коші.

Розглянемо одну з рівностей (17.15)

$$\psi_i(x, y_1, \dots, y_n) = C_i. \quad (17.17)$$

Функція $\psi_i(x, y_1, \dots, y_n)$ на будь-якому частинному розв'язку приймає постійні значення, тобто

$$\psi_i(x, \varphi_1(x, C_1, \dots, C_n), \dots, \varphi_n(x, C_1, \dots, C_n)) = C_i.$$

Ця функція називається інтегралом.

Означення. Функція $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$, визначена на D і яка не зводиться до сталої, називається *інтегралом* системи диференціальних рівнянь (17.2) в області D , якщо при заміні $y_1, \dots, y_n$ будь-яким частинним розв'язком цієї системи, вона приймає постійне значення.

На частинних розв'язках системи (17.2) $d\psi \equiv 0$, тобто

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} dy_n \equiv 0.$$

Це записується таким чином

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1(x, y_1, \dots, y_n) dx + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n(x, y_1, \dots, y_n) dx \equiv 0. \quad (17.18)$$

17.4. Лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь

17.4.1. Однорідні системи

Розглянемо лінійну однорідну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (17.19)$$

або в матричній формі

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A(x) = \{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n. \quad (17.20)$$

Тут $A(x)$ – неперервна за $a < x < b$ матриця розміру $n \times n$. Якщо функції $y^{(1)}(x), \dots, y^{(n)}(x)$ – вектор-розв'язки системи (17.20), то і

$$y(x) = \sum_{i=1}^n C_i y^{(i)}(x), \quad (17.21)$$

де $C_1, \dots, C_n$ – довільні сталі, теж є розв'язком системи (17.20).

Дійсно, введемо оператор

$$L = \frac{d}{dx} - A, \quad (17.22)$$

який має властивості:

$$\text{а) } L(Cy) = CL(y);$$

$$\text{б) } L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

За допомогою оператора L систему диференціальних рівнянь (17.20) запишемо так

$$L(y) = 0. \quad (17.23)$$

Якщо $L(y^{(i)}) = 0, i = 1, 2, \dots, n$, то в силу властивостей а), б) функція (17.21) також є розв'язком системи (17.2).

17.4.2. Лінійно незалежні розв'язки. Теореми про лінійно залежні і незалежні розв'язки

Означення. Вектор-розв'язки $y^{(1)}(x), \dots, y^{(m)}(x)$ системи диференціальних рівнянь (17.20) називаються *лінійно залежними* на (a, b) , якщо існують такі сталі $C_1, \dots, C_m$, які не дорівнюють нулю одночасно, що

$$C_1 y^{(1)}(x) + \dots + C_m y^{(m)}(x) \equiv 0, \quad a < x < b,$$

в протилежному випадку система розв'язків називається *лінійно незалежною* на (a, b) .

Теорема. Якщо для всіх $x_0 \in (a, b)$ система векторів

$$y^{(1)}(x_0), \dots, y^{(m)}(x_0) \quad (17.24)$$

лінійно залежна, то відповідні їм розв'язки $y^{(1)}(x), \dots, y^{(m)}(x)$ системи диференціальних рівнянь (17.20) також лінійно залежні.

Доведення. Припустимо, що вектори (17.24) лінійно залежні, тобто

$$C_1 y^{(1)}(x_0) + \dots + C_m y^{(m)}(x_0) = 0, \quad (17.25)$$

де не всі $C_1, \dots, C_m$ дорівнюють нулю. Розглянемо вектор-функцію з тими ж сталими

$$y(x) = C_1 y^{(1)}(x) + \dots + C_m y^{(m)}(x). \quad (17.26)$$

Вектор $y(x)$ задовольняє системі диференціальних рівнянь (17.20) і, в силу (17.25), $y(x_0) = 0$. На основі теореми існування і єдиності отримуємо, що

$$y(x) = C_1 y^{(1)}(x) + \dots + C_m y^{(m)}(x) \equiv 0. \quad (17.27)$$

Співвідношення (17.27) означає, що $y^{(1)}(x), \dots, y^{(m)}(x)$ – лінійно залежні.

Означення. Система n лінійно незалежних розв'язків

$$y^{(1)}(x), \dots, y^{(n)}(x) \quad (17.28)$$

системи диференціальних рівнянь (17.20) називається *фундаментальною системою розв'язків або базисом цієї системи рівнянь*.

Теорема. Система звичайних диференціальних рівнянь (17.20) має фундаментальну систему розв'язків. Якщо (17.28) – фундаментальна система розв'язків системи диференціальних рівнянь (17.20), то загальний розв'язок записується у вигляді

$$y(x) = \sum_{i=1}^n C_i y^{(i)}(x), \quad (17.29)$$

де $C_1, \dots, C_n$ – довільні сталі.

17.4.3. Неоднорідні системи. Метод варіації довільних сталих

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x), \quad (17.30)$$

яка називається *лінійною неоднорідною системою звичайних диференціальних рівнянь*.

Теорема. Якщо $\bar{y}(x)$ – розв'язок неоднорідної системи, тобто $L(\bar{y}) = f(x)$, а $y_1(x)$ – розв'язок однорідної системи $L(y_1) = 0$, то сума $y_1(x) + \bar{y}(x)$ є розв'язком неоднорідної системи.

$$L(\bar{y} + y_1) = L(\bar{y}) + L(y_1) \equiv f(x).$$

Теорема. Загальний розв'язок неоднорідної системи (17.30) можна записати у вигляді суми загального розв'язку однорідного і частинного неоднорідного.

Загальний розв'язок системи однорідних диференціальних рівнянь (17.20) запишемо у формі

$$y(x) = \sum_{i=1}^n C_i y^{(i)}(x), \quad (17.31)$$

де C_i – довільні сталі.

Розв'язок лінійної системи диференціальних рівнянь (17.30) шукаємо у вигляді

$$y(x) = \sum_{i=1}^n C_i(x) y^{(i)}(x), \quad (17.32)$$

де $C_i(x)$, $i=1,2,\dots,n$ невідомі функції.

Підставляючи в систему, отримаємо

$$\sum_{i=1}^n C'_i(x) y^{(i)}(x) + \sum_{i=1}^n C_i(x) y^{(i)'}(x) = A(x) \sum_{i=1}^n C_i(x) y^{(i)}(x) + f(x).$$

Так як $y^{(i)'} = A(x) y^{(i)}$, $i=1,2,\dots,n$, то остаточно функції $C_i(x)$ шукаємо з системи диференціальних рівнянь

$$\sum_{i=1}^n C'_i(x) y^{(i)}(x) = f(x). \quad (17.33)$$

Визначник системи (17.33) $W(x) \neq 0$, якщо $y^{(i)}(x)$, $i=1,2,\dots,n$ – фундаментальна система рівнянь. Із (17.33) визначаємо $C'_i(x) = \varphi_i(x)$, $i=1,2,\dots,n$, звідки

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + C_i, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Тому

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \left(\int \varphi_i(x) dx + C_i \right) y^{(i)}(x) - \quad (17.34)$$

загальний розв'язок диференціального рівняння (17.30).

Приклад. Розв'язати системи звичайних [6] диференціальних рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + ay, \end{cases} ; 2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{y}{t}, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{t}, \end{cases} t > 0.$$

Розв'язання. 1) Зведемо дану систему до диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = a \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2a \frac{dx}{dt} - (1 + a^2)x.$$

Звідси отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2a \frac{dx}{dt} + (1 + a^2)x = 0.$$

Запишемо та розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 2a\lambda + (1 + a^2) = 0.$$

Знайдемо корені $\lambda_{1,2} = a \pm i$. Тоді

$$x = e^{at}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \quad y = \frac{dx}{dt} - ax = e^{at}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t)$$

є загальним розв'язком системи.

2) Додамо і віднімемо почленно два рівняння, отримаємо

$$\frac{d(x+y)}{dt} = -\frac{1}{t}(x+y), \quad \frac{d(x-y)}{dt} = \frac{1}{t}(x-y).$$

$$\text{Звідки} \quad x+y = \frac{C_1}{t}, \quad x-y = C_2 t, \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \left(\frac{C_1}{t} + C_2 t \right), \\ y = \frac{1}{2} \left(\frac{C_1}{t} - C_2 t \right), \end{cases} \text{— загальний}$$

розв'язок нашої системи.

$$\text{Відповідь. 1) } \begin{cases} x = e^{at}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y = e^{at}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t), \end{cases} ; 2) \begin{cases} x = \frac{1}{2} \left(\frac{C_1}{t} + C_2 t \right), \\ y = \frac{1}{2} \left(\frac{C_1}{t} - C_2 t \right), \end{cases}.$$

17.5. Системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

17.5.1. Розв'язування однорідних систем лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Розглянемо *матричний метод* розв'язування лінійної однорідної системи.

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad (17.35)$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}.$$
$$x_1 = k_1 e^{\lambda t}, \quad x_2 = k_2 e^{\lambda t}, \quad \dots, \quad x_n = k_n e^{\lambda t},$$

Підставимо значення $x_1, x_2, \dots, x_n$ в систему диференціальних рівнянь і скоротивши на множник $e^{\lambda t} \neq 0$, отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda k_1 = \alpha_{11}k_1 + \alpha_{12}k_2 + ... + \alpha_{1n}k_n; \\ \lambda k_2 = \alpha_{21}k_1 + \alpha_{22}k_2 + ... + \alpha_{2n}k_n; \\ \\ \lambda k_n = \alpha_{n1}k_1 + \alpha_{n2}k_2 + ... + \alpha_{nn}k_n, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_{11}-\lambda)k_1 + \alpha_{12}k_2 + ... + \alpha_{1n}k_n = 0; \\ \alpha_{21}k_1 + (\alpha_{22}-\lambda)k_2 + ... + \alpha_{2n}k_n = 0; \\ \\ \alpha_{n1}k_1 + \alpha_{n2}k_2 + ... + (\alpha_{nn}-\lambda)k_n = 0, \end{array} \right. \quad (17.36)$$

251

$$(17.37)$$

1. *Корені характеристичного рівняння дійсні і різні.* Нехай, це характеристичне рівняння має n різних коренів $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, які є характеристичними числами матриці A . Кожному характеристичному числу відповідає свій власний вектор. Нехай характеристичному числу λ_p відповідає власний вектор $(k_{1p}, k_{2p}, \dots, k_{np})$, де $p = 1, 2, \dots, n$. Тоді система диференціальних рівнянь має n розв'язків:

1. *Корені характеристичного рівняння дійсні і різні.* Нехай, це характеристичне рівняння має n різних коренів $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, які є характеристичними числами матриці A . Кожному характеристичному числу відповідає свій власний вектор. Нехай характеристичному числу λ_p відповідає p -ий вектор $(k_{1p}, k_{2p}, \dots, k_{np})$, де $p = 1, 2, \dots, n$. Тоді система диференціальних рівнянь має n розв'язків:

$$x_{11} = k_{11}e^{\lambda_1 t}, \quad x_{21} = k_{21}e^{\lambda_1 t}, \quad \dots, \quad x_{n1} = k_{n1}e^{\lambda_1 t};$$
$$x_{12} = k_{12}e^{\lambda_{12}t}, \quad x_{22} = k_{22}e^{\lambda_{22}t}, \quad \dots, \quad x_{n2} = k_{n2}e^{\lambda_{n2}t};$$
$$x_{1n} = k_{1n} e^{\lambda_{nt}}, \quad x_{2n} = k_{2n} e^{\lambda_{nt}}, \quad \dots, \quad x_{nn} = k_{nn} e^{\lambda_{nt}}.$$
[illegible]

17.5.2. Розв'язування неоднорідних систем лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Метод варіації довільних сталих

Нормальна неоднорідна система рівнянь в матричній формі має вигляд

$$\frac{dX}{dt} = AX + F(t), \quad (17.41)$$

де $F(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))^T$.

Загальний розв'язок неоднорідної системи має вигляд

$$X(t) = X_0(t) + \bar{X}(t),$$

$X_0(t)$ – загальний розв'язок відповідної однорідної системи рівнянь (формула (17.38)), а $\bar{X}(t)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідної системи рівнянь, який знаходиться наступним чином. В розв'язку (17.38) замінюємо сталі $C_1, C_2, \dots, C_n$ відповідними функціями $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$. Ці функції визначаються за допомогою даної неоднорідної системи: в неї підставляють $x_1, x_2, \dots, x_n, x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ і отримують лінійну систему n алгебраїчних рівнянь відносно $C'_1(t), C'_2(t), \dots, C'_n(t)$, розв'язок якої завжди існує і має вигляд:

$$C'_1 = \varphi_1(t), \quad C'_2 = \varphi_2(t), \quad \dots, \quad C'_n = \varphi_n(t), \quad (17.42)$$

де $\varphi_i(t), (i = \overline{1, n})$ – відомі функції. Зінтегрувавши рівності (17.42), знаходять

$$C_i(t) = \int \varphi_i(t) dt + C_i,$$

де C_i – довільні сталі. Підставляючи в розв'язок (17.38) замість $C_i = \text{const}$ знайдені значення $C_i(t)$, отримують розв'язок неоднорідної системи рівнянь.

Метод невизначених коефіцієнтів

Розглянемо лінійну неоднорідну систему із сталими коефіцієнтами

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + f_k(t), \quad k = \overline{1, n}. \quad (17.43)$$

Якщо функції $f_k(t)$ у системі (17.43) складаються із сум та добутків многочленів $P_m(t) = p_0 + p_1 t + \dots + p_m t^m$ та функцій $e^{\alpha t}, \cos \beta t, \sin \beta t$, то її розв'язок можна шукати методом невизначених коефіцієнтів.

$$x_i = Q_{m+S}^i(t) e^{\alpha t} \quad i=1,...,n, \quad (17.44)$$

Невідомі коефіцієнти многочленів $Q_{m+s}^i(t)$ визначають прирівнюванням коефіцієнтів біля відповідних доданків після підставлення (17.44) у систему (17.43).

17.6. Розв’язування нормальних систем методом виключення
(зведення системи диференціальних рівнянь до одного рівняння n -го порядку,
яке містить одну невідому функцію)

[illegible]

255

Тобто, якщо в лівій частині рівнянь системи стоять похідні першого порядку, а праві частині зовсім не містять похідних, то така система називається *нормальною*.

Розв'язком системи (17.45) називають сукупність функцій $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, які задовольняють кожному з рівнянь цієї системи.

Зауваження. В багатьох випадках системи рівнянь і рівняння вищих порядків можна звести до нормальної системи (17.45).

Загальна схема зведення до диференціального рівняння [13] вищого порядку

Продиференціюємо за t , наприклад, перше з рівнянь системи (17.45):

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}.$$

Підставимо в цю рівність значення похідних x'_i , $i=1,...,n$ із системи (17.45), маємо:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} f_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} f_n, \text{ адо } \frac{d^2x_1}{dt^2} = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Продиференціювавши цю рівність ще раз, маємо

$$\frac{d^3x_1}{dt^3} = F_3(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Продовжуючи цей процес послідовно $(n-1)$ раз, отримаємо систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} = F_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \\ \frac{d^{(n-1)}x_1}{dt^{(n-1)}} = F_{n-1}(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \frac{d^{(n)}x_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, x_2, ..., x_n). \end{array} \right. \quad (17.46)$$

Визначимо з перших $(n-1)$ рівнянь системи (17.45) функції $x_2, \dots, x_n$ через t , функцію x_1 та її похідні $x_1', x_1'', \dots, x_1^{(n-1)}$, отримаємо:

[illegible]

Підставимо ці вирази в останнє рівняння системи (17.45), отримуємо диференціальне рівняння n -го порядку

$$\frac{d^{(n)}x_1}{dt^n} = F\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{d^{(n-1)}x_1}{dt^{n-1}}\right).$$

Розв'язавши це рівняння, знайдемо $x_1 = \psi_1(t, C_1, C_2, \dots, C_n)$, де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні сталі. Продиференціювавши потім цей вираз $(n - 1)$ раз та підставивши значення похідних в знайдені із системи (17.45) значення $x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$, дістанемо загальний розв'язок системи

[illegible]

Приклад. Розв'язати [13] систему диференціальних рівнянь
$$\begin{cases} \dot{x} = -7x + y, \\ \dot{y} = -2x - 5y \end{cases}$$

двома способами:

- 1) зведенням до диференціального рівняння вищого порядку;
- 2) за допомогою характеристичного рівняння.

Розв'язання.

- 1) Продиференціюємо перше рівняння системи та підставимо $\dot{y}$ із другого рівняння системи.

$$\ddot{x} = -7\dot{x} + \dot{y}, \ddot{y} = -7\dot{y} - 2x - 5y.$$

Із першого рівняння $y = \dot{x} + 7x$, тому

$$\ddot{x} = -7\dot{x} - 2x - 5\dot{x} - 35x, \ddot{x} + 12\dot{x} + 37x = 0.$$

Для останнього складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0$, з якого $\lambda_{1,2} = -6 \pm i$. Тоді $x(t) = e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t)$.

Оскільки $y = \dot{x} + 7x$, тому знайдемо $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x} = -6e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t} (-C_1 \sin t + C_2 \cos t).$$

Тоді

$$y = -6e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t} (-C_1 \sin t + C_2 \cos t) + 7e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t);$$

$$y = e^{-6t} (C_1 (\cos t - \sin t) + C_2 (\cos t + \sin t)).$$

Отже, система має розв'язок:

$$\begin{cases} x = e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y = e^{-6t} (C_1 (\cos t - \sin t) + C_2 (\cos t + \sin t)). \end{cases}$$

2) Складаємо характеристичне рівняння і розв'язуємо його.

$$\begin{vmatrix} -7 - \lambda & 1 \\ -2 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(7 + \lambda)(5 + \lambda) + 2 = 0, \lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0, \lambda_{1,2} = -6 \pm i.$$

Для $\lambda_1 = -6 + i$ одержуємо систему:

$$\begin{cases} (-7 + 6 - i)\alpha + \beta = 0, \\ -2\alpha + (-5 + 6 - i)\beta = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(1 + i)\alpha + \beta = 0, \\ -2\alpha + (1 - i)\beta = 0. \end{cases}$$

Поклавши $\alpha = 1, \beta = 1 + i$ знаходимо перший частинний розв'язок вихідної системи рівнянь: $x_1 = e^{(-6+i)t}, y_1 = (1+i)e^{(-6+i)t}$.

Для $\lambda_2 = -6 - i$ маємо систему:

$$\begin{cases} (-7 + 6 + i)\alpha + \beta = 0, \\ -2\alpha + (-5 + 6 + i)\beta = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1 + i)\alpha + \beta = 0, \\ -2\alpha + (1 + i)\beta = 0. \end{cases}$$

Поклавши $\alpha = 1, \beta = 1 - i$ одержуємо другий частинний розв'язок вихідної системи рівнянь: $x_2 = e^{(-6-i)t}, y_2 = (1-i)e^{(-6-i)t}$.

Перейдемо до нової фундаментальної системи розв'язків, користуючись формулами

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \bar{x}_2 = \frac{x_1 - x_2}{2i}, \bar{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \bar{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i}.$$

Використовуючи формули Ейлера

$$e^{(\alpha \pm i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + \sin \beta t),$$

знаходимо

$$\bar{x}_1 = e^{-6t} \cos t, \bar{x}_2 = e^{-6t} \sin t, \bar{y}_1 = e^{-6t} (\cos t - \sin t), \bar{y}_2 = e^{-6t} (\cos t + \sin t).$$

Загальний розв'язок вихідної системи має вигляд

$$\begin{cases} x = C_1 \bar{x}_1 + C_2 \bar{x}_2, \\ y = C_1 \bar{y}_1 + C_2 \bar{y}_2, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} x = e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y = e^{-6t} (C_1 (\cos t - \sin t) + C_2 (\cos t + \sin t)). \end{cases}$$

Відповідь.
$$\begin{cases} x = e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y = e^{-6t} (C_1 (\cos t - \sin t) + C_2 (\cos t + \sin t)). \end{cases}$$

Завдання для самоконтролю

1. Означити основні поняття для систем звичайних диференціальних рівнянь.
2. Загальний, частинний і особливий розв'язки системи, теорема Коші існування та єдиності розв'язку задачі Коші.
3. Лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь: однорідні та неоднорідні, структура їх розв'язку.
4. Розв'язування неоднорідних систем лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами: метод варіації довільних сталих та метод невизначених коефіцієнтів (навести приклади).
5. Розв'язування системи диференціальних рівнянь зведенням до одного рівняння n -го порядку, яке містить одну невідому функцію.
6. Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x} = -2x - 4y + 1 + 4t, \\ \dot{y} = -x + y + \frac{3}{2}t^2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \dot{x} = -5x + 2y, \\ \dot{y} = x - 6y. \end{cases}$$

$$\text{Βιθνοβιθι. 6. a) } \begin{cases} x(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t} + t^2 + t, \\ y(t) = \frac{1}{4} (C_1 e^{-3t} - 4C_2 e^{2t} + 2t^2); \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t}, \\ y(t) = \frac{1}{2} (C_1 e^{-4t} - 2C_2 e^{-7t}). \end{cases}$$

I. Таблиця похідних основних функцій

- | | |
|--|---|
| 1. $(x^n)' = nx^{n-1}$. | 2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$. |
| 3. $(\sin x)' = \cos x$. | 4. $(\cos x)' = -\sin x$. |
| 5. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. | 6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$. |
| 7. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x < 1)$. | 8. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x < 1)$. |
| 9. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$. | 10. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$. |
| 11. $(a^x)' = a^x \ln a$. | 12. $(e^x)' = e^x$. |
| 13. $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$. | 14. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x} \quad (x > 0, a > 0)$. |
| 15. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$. | 16. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$. |
| 17. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. | 18. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$. |

II. Основні правила знаходження похідної. Якщо C – постійна величина і

$u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ – диференційовні функції, тоді

- | | |
|--|---|
| 1) $(C)' = 0$; | 2) $(x)' = 1$; |
| 3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; | 4) $(Cu)' = Cu'$; |
| 5) $(uv)' = u'v + uv'$; | 6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0)$; |
| 7) $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$. | |

III. Правило диференціювання складеної функції. Якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, тобто

$y = f[\varphi(x)]$, де функції y і u мають похідні, тоді

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

або в інших позначеннях

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Таблиця основних інтегралів

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, \left(\int dx = x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \quad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C \right).$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$7. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$$

$$8. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C.$$

$$13. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$14. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$15. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

$$16. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C.$$

$$19. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$20. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$21. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$22. \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Модуль вектора: $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$, $|\vec{a}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$.

Координати вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$.

Умова колінеарності векторів: $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{b} = (x_1, y_1, z_1)$, $\frac{x_0}{x_1} = \frac{y_0}{y_1} = \frac{z_0}{z_1}$.

Скалярний добуток: $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, $\vec{a}\vec{b} = x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1$,

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}.$$

Умова перпендикулярності векторів: $\vec{a}\vec{b} = 0$, $x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 = 0$.

Проекція вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$: $np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Векторний добуток: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = (y_0z_1 - y_1z_0)\vec{i} - (x_0z_1 - x_1z_0)\vec{j} + (x_0y_1 - x_1y_0)\vec{k}$.

Площа паралелограма, трикутника, побудованих на векторах

$$\vec{a}, \vec{b}: S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|, \quad S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Мішаний добуток: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$.

Об'єм паралелепіпеда і піраміди: $V_{\text{пар}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$, $V_{\text{пір}} = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.

Пряма на площині

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0) \perp$ до вектора $\vec{N}(A, B)$:
 $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Загальне рівняння прямої: $Ax + By + C = 0$. Кут φ між двома прямими, які задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$: $\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n)$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Рівняння прямої через дві точки $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$: $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$.

Параметричні рівняння прямої: $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases}$

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k :

$$y - y_0 = k(x - x_0) \text{ (прямі перпендикулярні: } k_1 \cdot k_2 = -1 \text{)}.$$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k : $y = kx + b$. Для прямих $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$ тангенс кута між ними через їх кутові коефіцієнти обчислюють за формулою $\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right|$.

Відстань від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Криві 2-го порядку

Рівняння кола з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$ радіуса R : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Рівняння еліпса з центром в точці $O(0, 0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Рівняння гіперболи з центром в точці $O(0, 0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1, \quad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm 1.$$

Рівняння параболи з вершиною $O(0, 0)$, $M_0(x_0, y_0)$:

$$y^2 = 2px, \quad x^2 = 2py; \quad (y - y_0)^2 = 2p(x - x_0), \quad (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0).$$

Пряма в просторі

Рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n, p)$:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}. \quad \text{Кут між двома прямими} \quad \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{і}$$

$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} : \cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad \text{Умова паралельності двох}$$

прямих: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$, умова перпендикулярності: $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

Рівняння прямої через дві точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$: $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$

. Параметричні рівняння прямої через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно вектору $\vec{l}(m, n, p)$:

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt.$$

Загальні рівняння прямої:
$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Площина в просторі

Рівняння площини через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\perp$ до вектора $\vec{N}(A, B, C)$:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

Рівняння площини у відрізках на осях: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Загальне рівняння площини: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Рівняння площини через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Кут між площинами: $\cos \varphi = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|}$, $\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пряма і площина в просторі

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ і площиною $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Умова паралельності прямої і площини: $Am + Bn + Cp = 0$, а умова перпендикулярності $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.

Поверхні 2-го порядку

Сфера: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, еліпсоїд: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Циліндри 2-го порядку:

круговий $x^2 + y^2 = R^2$; еліптичний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; гіперболічний $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

параболічний $y^2 = 2px$.

Конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Гіперболоїди: однопорожнинний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, двопорожнинний

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Параболоїд: еліптичний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$; гіперболічний $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$.

Функція однієї та багатьох змінних**Функція однієї змінної**

Дві важливі границі: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 \pm x)^{\pm \frac{1}{x}} = e$.

Основні еквівалентні величини: $\sin x \sim x, x \rightarrow 0$;

$\ln(1+x) \sim x, \log_a(1+x) \sim (\log_a e)x, x \rightarrow 0$; $e^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a, x \rightarrow 0$; $\arcsin x \sim x, x \rightarrow 0$;

$\operatorname{tg} x \sim x, x \rightarrow 0$; $\operatorname{arctg} x \sim x, x \rightarrow 0$; $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x, x \rightarrow 0$.

Рівняння дотичної і нормалі

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0).$$

Екстремуми функцій

Точки, в яких $f'(x_0) = 0$ – критичні точки функції. Якщо похідна змінює знак з + на -, то точка x_0 – точка максимуму, якщо з - на +, то точка мінімуму.

Функція багатьох змінних

$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ – похідна за змінною x , y – стала; $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$ – похідна за змінною y , x – стала.

$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – похідна 2-го порядку за x ; $z''_{yy} = (z'_y)'_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – похідна 2-го порядку за y ;

$z''_{xy} = (z'_y)'_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – мішана похідна 2-го порядку за x, y .

Значення функцій деяких кутів

$$\sin 0 = 0, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin \pi = 0, \quad \sin \frac{3\pi}{2} = -1;$$

$$\cos 0 = 1, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos \pi = -1, \quad \cos \frac{3\pi}{2} = 0;$$

$$\operatorname{tg} 0 = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \text{ – не існує};$$

$$\operatorname{ctg} 0 \text{ – не існує}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0.$$

Додаток 7. Основні методи інтегрування

Вид інтегралу	Метод інтегрування
1. $\int F(\varphi(x))\varphi'(x)dx$	Підстановка $\varphi(x) = t$
2. $\int u dv$	Інтегрування частинами $\int u dv = uv - \int v du$
3. $\int f(x)\varphi^{(n)}(x)dx$	Зводиться до інтегрування добутку $f^{(n)}(x)\varphi(x)$ за допомогою n -кратного інтегрування частинами: $\int f(x)\varphi^{(n)}(x)dx = f(x)\varphi^{(n-1)}(x) - f'(x)\varphi^{(n-2)}(x) + f''(x)\varphi^{(n-3)}(x) + \dots + (-1)^{n-1}f^{(n-1)}(x)\varphi(x) + (-1)^{n-1}\int f^{(n)}(x)\varphi(x)dx$
4. $\int e^{kx} p_n(x)dx$, де $p_n(x)$ – многочлен n -го степеня	Застосовуючи n раз формулу інтегрування частинами одержимо: $\int e^{kx} p_n(x)dx = e^{kx} \left(\frac{p_n(x)}{k} - \frac{p'_n(x)}{k^2} + \frac{p''_n(x)}{k^3} - \dots + (-1)^n \frac{p_n^{(n)}(x)}{k^{n+1}} \right) + C$
5. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, D < 0$	Підстановка $x + \frac{p}{2} = t$
6. $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$	Застосовуємо рекурентне співвідношення: $I_n = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$
7. $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$	Якщо $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб і знаменник $Q(x) = (x-x_1)^n(x-x_2)^m \dots (x^2+px+q)^k$, то підінтегральний вираз представляють у вигляді суми найпростіших дробів: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-x_1)^n} + \frac{B_1}{(x-x_2)} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{B_m}{(x-x_2)^m} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}$
8. $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$	Зводиться до інтегралу від раціонального дробу підстановкою $x = t^k$, де k – спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$
9. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$	Зводиться до інтегралу від раціонального дробу підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$
10. $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$	Підстановкою $x + \frac{b}{2a} = t$ інтеграл зводиться до суми двох табличних інтегралів $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = M_1 \int \frac{tdt}{\sqrt{at^2+m}} + N_1 \int \frac{dt}{\sqrt{at^2+m}}$
11. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$, де R – раціональна функція $x, \sqrt{ax^2+bx+c}$	Зводиться до інтегралу від раціональних дробів підстановками Ейлера: $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}, (a > 0); \sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}, (c > 0);$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1), (b^2-4ac > 0)$

12. $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня n .	Застосовуємо метод невизначених коефіцієнтів до рівності $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + k \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx.$ Продиференціювавши та звівши до спільного знаменника, одержимо тотожність $P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b) + k$, яка дає нам систему $n+1$ лінійних рівнянь для знаходження коефіцієнтів многочлена $Q_{n-1}(x)$ і множника k
13. $\int \frac{dx}{(x-x_1)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}$	Підстановкою $x-x_1 = \frac{1}{t}$ зводиться до інтегралу (12).
14. $\int x^m (a+bx^n)^p dx$, де m, n, p – раціональні числа (інтеграл від біноміального диференціала)	1. Якщо p – ціле додатне число, то двочлен підноситься по біному Ньютона до степеня і інтеграл дорівнює сумі інтегралів від степеневих функцій. 2. Якщо p – ціле від'ємне число, то підстановка $x=t^k$, де k – спільний знаменник дробів m і n зводить до інтегралу від раціональної функції. 3. Якщо $\frac{m+1}{n}$ – ціле число, то застосовують підстановку $a+bx^n = t^k$, де k – знаменник дробу p ; 4. Якщо $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле число, то застосовується підстановка $a+bx^n = x^n t^k$, де k – знаменник дробу p
15. $\int R(\sin x, \cos x) dx$	До інтегралу від раціонального дробу завжди зводить підстановка $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Однак дроби будуть простішими, якщо скористатись такими підстановками: Якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то підстановка $\cos x = t$; Якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то підстановка $\sin x = t$; Якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то підстановка $\operatorname{tg} x = t$
16. $\int \sin ax \sin bxdx$ $\int \sin ax \cos bxdx$ $\int \cos ax \cos bxdx$	Добуток перетворюємо в суму. Одна із формул: $\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x)$
17. $\int \sin^m x \cos^n x dx$, де m і n – цілі числа	Якщо $m = 2k+1$, $k > 0$ – підстановка $\cos x = t$; якщо $n = 2k+1$, $k > 0$ – підстановка $\sin x = t$; якщо $m+n = 2k$, $k < 0$ – підстановка $\operatorname{tg} x = t$; якщо $m = 2k$, $k > 0$ і $n = 2l$, $l > 0$ – знижують степінь, застосовуючи формули $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
18. $\int \sin^p x \cos^q x dx$, де p і q – раціональні числа	Підстановкою $\sin x = t$ зводиться до інтеграла від біноміального диференціалу $\int \sin^p x \cos^q x dx = \int t^p (1-t^2)^{q-1} dt$ (див. п.14)
19. $\int R(e^{ax}) dx$	Підстановкою $e^{ax} = t$ зводиться до інтеграла від раціонального дробу

Список використаної літератури

1. Берман Г.Н. Сборник задач по математическому анализу./ Г.Н. Берман.– М.: Наука, 1985. – 439 с.
2. Бугров Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1989. – 431 с.
3. Васильченко І.П. та ін. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. Навч посібник: У двох книгах. Книга 2/ І.П. Васильченко, В.Я. Данилов, А.І. Лобанов, Є.Ю. Таран. – друге видання зі змінами. – К.: Либідь, 1994. – 280 с.
4. Герасимчук В.С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: У 3ч.: Навч. Посіб./ В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.І. Кравцов. – К.: Книги України ЛТД, 2009. – Ч.1. – 578с., 2010. – Ч.2. – 470с., 2009. – Ч.3. – 400с.
5. Грималюк В.П. Вища математика: У 2ч.: Навч. посіб./ В.П. Грималюк, М. М. Кухарчук, В.В. Ясінський. –К.: Віпол, 2004. Ч.1. – 376с., 2005. – Ч.2. – 376с.
6. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. II. Учеб. пособие для вузов, 5-е изд., испр. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова.– М.: Высшая школа, 1997. – 416 с.
7. Дубовик В.П. Вища математика. Начальний посібник. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик / Навч. посіб. — К.: Вища шк., 1993. – 648 с.
8. Дубовик В.П. Вища математика. Збірник задач/ В.П. Дубовик, І.І. Юрик / Навч. посіб. — К.: А.С.К., 2005. – 648 с.
9. Івасишен С.Д. Диференціальні рівняння: Методи та застосування: навч. посібник/ С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, П.П. Настасієв, І.І. Дрінь. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2010. – 288с.
10. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. Том 1. /Н.С. Пискунов.– М.: Наука, 1978. – 416 с.

11. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Том 2./ Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985.– 560 с.
12. Шкіль М.І. Математичний аналіз. Ч.2./ М.І. Шкіль. – К, 1981. –456 с.
13. Кушлик-Дивульська О.І. Методичні вказівки до виконання розрахункової роботи кредитного модуля "Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння" для напрямів підготовки 6.051501 "Видавничо-поліграфічна справа", 6.050503 "Машинобудування" для студентів Видавничо-поліграфічного інституту [Електронний ресурс] / НТУУ "КПІ"; Уклад. О.І. Кушлик-Дивульська. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,64 Мбайт).– Київ: НТУУ "КПІ", 2013.–117с. – Назва з екрана. – Доступ <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/2838>.
14. Кушлик-Дивульська О.І. Конспект лекцій кредитного модуля «Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння» (Вища математика-2) для напряму підготовки 6.051501 «Видавничо-поліграфічна справа» [Електронний ресурс] / НТУУ «КПІ» ; уклад. О. І. Кушлик-Дивульська. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,68 Мбайт). – Київ: НТУУ «КПІ», 2015. – 241 с. – Назва з екрана. – Доступ : <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/12700>.

Зміст

Передмова.....	3
Частина I. Інтегральне числення функції однієї змінної.....	5
Розділ 1. Невизначений інтеграл, його обчислення.....	5
Тема 1. Первісна функція і невизначений інтеграл. Основні властивості інтеграла. Таблиця основних інтегралів.....	6
1.1. Первісна функції, її властивості.....	6
1.2. Означення невизначеного інтеграла, його основні властивості.....	7
1.3. Таблиця основних інтегралів.....	9
1.4. Основні методи інтегрування.....	12
<i>Завдання для самоконтролю.....</i>	<i>13</i>
Тема 2. Інтегрування частинами. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен. Прості раціональні дроби.....	14
2.1. Формула інтегрування частинами, основні випадки її використання.....	14
2.2. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен.....	18
2.3. Інтегрування простих раціональних дробів.....	22
<i>Завдання для самоконтролю.....</i>	<i>25</i>
Тема 3. Комплексні числа. Деякі відомості з теорії раціональних дробів.....	26
3.1. Комплексні числа.....	26
3.1.1. Основні поняття та означення.....	26
3.1.2. Геометричне зображення комплексного числа.....	28
3.1.3. Тригонометрична форма запису комплексного числа.....	29
3.1.4. Натуральний степінь комплексного числа. Корінь n -го степеня з комплексного числа.....	31
3.2. Многочлени.....	33

3.3. Многочлен з дійсними коефіцієнтами.....	36
3.4. Раціональні дроби. Розклад правильних раціональних дробів на елементарні.....	37
Завдання для самоконтролю.....	43
Тема 4. Інтегрування дробово-раціональних функцій.....	44
4.1. Інтегрування елементарних раціональних дробів.....	44
4.2. Інтегрування дробово-раціональних функцій в залежності від коренів знаменника.....	46
Завдання для самоконтролю.....	54
Тема 5. Інтегрування ірраціональних функцій.....	55
5.1. Інтеграли типу $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx$	55
5.2. Інтеграли типу $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$. Підстановки Ейлера.....	58
5.3. Інтеграли від диференціального бінома. Підстановки Чебишова.....	61
5.4. Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок.....	63
Завдання для самоконтролю.....	65
Тема 6. Інтегрування виразів із тригонометричними функціями.....	66
6.1. Універсальна тригонометрична підстановка. Інтеграли типу $\int R(\sin x; \cos x) dx$	66
6.2. Інтеграли типу $\int \sin^m x \cos^n x dx$	68
6.3. Інтеграли типу $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx, \int \sin \alpha x \sin \beta x dx, \int \cos \alpha x \cos \beta x dx$	71
6.4. Інтеграли типу: а) $\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} dx$; б) $\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx$	72
Завдання для самоконтролю.....	73
Розділ II. Визначений інтеграл.....	75
Тема 7. Визначений інтеграл.....	75
7.1. Означення визначеного інтеграла.....	75

7.2. Умови існування визначеного інтеграла.....	76
7.3. Основні властивості визначеного інтеграла.....	79
7.4. Інтеграл із змінною верхньою межею.....	83
7.5. Формула Ньютона-Лейбніца.....	85
<i>Завдання для самоконтролю.....</i>	86
Тема 8. Обчислення визначеного інтеграла.....	87
8.1. Визначений інтеграл як границя інтегральних сум.....	87
8.2. Заміна змінної у визначеному інтегралі.....	88
8.3. Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі.....	90
8.4. Наближене обчислення визначених інтегралів.....	91
8.4.1. Формули прямокутників і трапецій.....	91
8.4.2. Формула Сімпсона.....	93
<i>Завдання для самоконтролю.....</i>	95
Тема 9. Невласні інтеграли.....	96
9.1. Невласні інтеграли на нескінченному проміжку.....	96
9.1.1. Означення невластного інтеграла 1-го роду.....	96
9.1.2. Формули інтегрального числення	99
9.1.3. Ознаки збіжності інтегралів.....	100
9.2. Невласні інтеграли від необмеженої функції.....	103
9.2.1. Означення невластного інтеграла 2-го роду	103
9.2.2. Основні ознаки збіжності та властивості.....	105
9.3. Деякі особливі інтеграли (Ейлера, Ейлера-Пуассона, Фрулані)....	107
9.3.1. Інтеграл Ейлера.....	107
9.3.2. Інтеграл Ейлера-Пуассона.....	108
9.3.3. Інтеграли Фрулані.....	110
<i>Завдання для самоконтролю.....</i>	110
 Розділ III. Застосування визначеного інтеграла.....	112
Тема 10. Геометричні застосування.....	112
10.1. Площа плоскої фігури.....	112

10.2. Об'єм тіла	118
10.3. Довжина дуги кривої.....	124
10.4. Площа поверхні обертання.....	126
<i>Завдання для самоконтролю.....</i>	<i>128</i>
Тема 11. Застосування визначеного інтеграла до розв'язання задач	
фізики	130
11.1. Задача про обчислення шляху.....	130
11.2. Задача про силу тиску рідини.....	131
11.3. Робота змінної сили.....	134
11.4. Статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас.....	135
11.4.1. Основні поняття та означення.....	135
11.4.2. Обчислення маси, статичних моментів, координат центра мас та моментів інерції плоскої кривої.....	137
11.4.3. Обчислення маси, статичних моментів, координат центра мас та моментів інерції плоскої фігури.....	138
11.5. Деякі застосування визначеного інтеграла в інших науках.....	141
<i>Завдання для самоконтролю.....</i>	<i>144</i>
 Частина II. Диференціальні рівняння та системи диференціальних рівнянь.....	 147
 Розділ IV. Диференціальні рівняння 1-го порядку.....	 147
Тема 12. Диференціальні рівняння 1-го порядку.....	147
12.1. Основні поняття для диференціальні рівняння 1-го порядку. Теорема Коші існування та єдиності розв'язку задачі Коші.....	147
12.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.....	152
12.3. Однорідні диференціальні рівняння (права частина є однорідною функцією нульового виміру).....	153
12.4. Деякі задачі, які приводять до розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку.....	157
<i>Завдання для самоконтролю.....</i>	<i>164</i>

Тема 13. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння.....	165
13.1. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння. Теорема про структуру загального розв'язку.....	165
13.1.1.Метод Лагранжа (варіації довільної сталої).....	165
13.1.2.Метод Бернуллі.....	166
13.2. Рівняння Бернуллі, його розв'язування.....	167
13.3. Рівняння Ріккаті.....	170
13.4. Рівняння в повних диференціалах.....	172
<i>Завдання для самоконтролю.....</i>	<i>176</i>
 Розділ V. Диференціальні рівняння вищих порядків.....	178
Тема 14. Диференціальні рівняння вищих порядків, їх розв'язування пониженням порядку	178
14.1. Основні поняття та означення. Задача Коші.....	178
14.2. Інтегрування і пониження порядку диференціальних рівнянь з вищими похідними.....	183
14.2.1. Диференціальні рівняння, які містять n-у похідну від шуканої функції і незалежну змінну.....	183
14.2.2. Інтегрування диференціальних рівнянь, які не містять шуканої функції та $(k - 1)$-ї похідної.....	187
14.2.3. Пониження порядку диференціальних рівнянь, які не містять незалежної змінної.....	190
<i>Завдання для самоконтролю.....</i>	<i>192</i>
Тема 15. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку.....	193
15.1. Загальні властивості лінійних однорідних диференціальних рівнянь n-го порядку.....	193
15.1.1. Властивості лінійного диференціального оператора.....	193
15.1.2. Властивості розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння, їх лінійна незалежність.....	194

15.1.3. Формула Остроградського-Ліувілля. Фундаментальна система розв'язків та її існування.....	199
15.2. Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Побудова загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння.....	202
15.3. Структура загального розв'язку неоднорідного рівняння.....	207
15.4. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа).....	209
15.4.1. Метод Лагранжа для неоднорідного лінійного диференціального рівняння n -го порядку.....	209
15.4.2. Метод варіації довільних сталих при розв'язуванні лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку.....	212
15.5. Знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів.....	214
<i>Завдання для самоконтролю.....</i>	218
Тема 16. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.....	220
16.1. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Загальний та частинний розв'язки.....	220
16.2. Неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та із спеціальною правою частиною.....	223
16.3. Диференціальні рівняння коливань.....	228
16.3.1. Механічні коливання.....	228
16.3.2. Приклади вільних та вимушених коливань.....	232
16.3.3. Вільні гармонійні коливання у коливальному контурі.....	235
<i>Завдання для самоконтролю.....</i>	238
 Розділ VI. Системи звичайних диференціальних рівнянь.....	240
Тема 17. Системи звичайних диференціальних рівнянь.....	240
17.1. Основні поняття та означення. Задача Коші.....	240

17.2. Теорема про достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші.....	242
17.3. Загальний, частинний і особливий розв'язки.....	245
17.4. Лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь.....	246
17.4.1. Однорідні системи.....	246
17.4.2. Лінійно незалежні розв'язки. Теорема про лінійно залежні і незалежні розв'язки.....	247
17.4.3. Неоднорідні системи. Метод варіації довільних сталих....	248
17.5. Системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами.....	250
17.5.1. Розв'язування однорідних систем лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами.....	250
17.5.2. Розв'язування неоднорідних систем лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами.....	254
17.6. Розв'язування нормальних систем методом виключення.....	255
Завдання для самоконтролю.....	259
Додаток 1. Табличне диференціювання.....	261
Додаток 2. Таблиця основних інтегралів.....	262
Додаток 3. Елементи векторної алгебри.....	263
Додаток 4. Аналітична геометрія на площині.....	264
Додаток 5. Аналітична геометрія в просторі.....	265
Додаток 6. Функція однієї та багатьох змінних.....	267
Додаток 7. Основні методи інтегрування.....	268
Список використаної літератури.....	270
Зміст.....	272