МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як методичні вказівки для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою 111«Математика»
спеціальностей 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології»,
143 «Атомна енергетика»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Вища математика: Вступ до математичного аналізу: Методичні вказівки [Електронний ресурс] : метод. вказ. для студ. спеціальностей 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології», 143 «Атомна енергетика» /КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: І.В. Веригіна, Т. О. Єрьоміна, О. А. Поварова. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,50 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 27 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол №7 від 13.05.2021 р.) за поданням Вченої ради Фізико-математичного факультету (протокол № 3 від 22.03.2021 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Укладачі: *Веригіна Інга Вячеславівна*, ст. викл.
Єрьоміна Тетяна Олександрівна, канд. фіз-мат. наук, ст. викл.
Поварова Олена Андріївна, канд. фіз-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор *Дудкін М. Є.*, д-р фіз-мат. наук, проф.

Рецензент *Симчук Я. В.*, канд. фіз.-тех. наук, доц., КПІ ім. Ігоря Сікорського, кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Тематика методичних вказівок охоплює розділ дисципліни «Вища математика», в якому вивчаються границі функції, нескінченно малі та нескінченно великі функції, неперервність функції. Сформульовано основні теоретичні відомості, розв'язані відповідні задачі. В кінці вказівок наведено завдання для типового розрахунку .

ВСТУП

Методичні вказівки «Вступ до математичного аналізу» пропонуються студентам 1-го курсу теплоенергетичного факультету денної та заочної форм навчання під час вивчення тем: “Границя функції”, “Нескінченно малі та нескінченно великі функції”, “Неперервність функції”. За вказаними темами, викладено основні теоретичні відомості та розв’язані типові задачі. Це дає змогу студентам якісно засвоїти матеріал та успішно виконати і оформити завдання типового розрахунку «Границя функції», передбаченого навчальною програмою дисципліни «Вища математика». Завдання до типового розрахунку, розміщені в кінці посібника. Кожен студент виконує завдання одного з тридцяти запропонованих варіантів.

Основні теоретичні відомості

1. Означення границі числової послідовності

Число A називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число N, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n - A| < \varepsilon$.

Границю послідовності позначають: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ або $x_n \to A$ при $n \to \infty$.

2. Означення границі функції в точці

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, крім можливо самої точки x_0.

Число A називається **границею функції** $y = f(x)$ **в точці** x_0 , якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють умову $0 < |x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Границю функції $f(x)$ при $x \to x_0$ позначають: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ або $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

3. Односторонні границі

- Число A_1 називається **лівосторонньою границею функції** $y = f(x)$ **в точці** x_0**,** якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A_1| < \varepsilon$. Позначають $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = A_1$.
- Число A_2 називається **правосторонньою границею функції** $y = f(x)$ **в точці** x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f(x) - A_2| < \varepsilon$. Позначають $\lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x) = A_2$.

Теорема (необхідна і достатня умова існування скінченої границі)

Функція $y = f(x)$ має скінчену границю в точці x_0 тоді й лише тоді, коли в цій точці існують рівні між собою лівостороння та правостороння границі:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x\to x_0 + 0} f(x) = A.$$

4. Арифметичні дії над границями

Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ мають границі при $x \to x_0$, то

1) Границя суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) їх границь:

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x);$$

2) Границя добутку двох функцій дорівнює добутку їх границь:

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x);$$

3) Границя дробу дорівнює границі чисельника, поділеній на границю знаменника, якщо границя знаменника не дорівнює нулю:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \quad (\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0);$$

4) Сталий множник можна виносити за знак границі:

$$\lim_{x \to x_0}(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x),\ c = const;$$

5) Границя степеня з натуральним показником дорівнює тому ж степеню границі:

$$\lim_{x \to x_0}(f(x))^m = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^m,\ m \in N.$$

5. Границя функції на нескінченності

Число A називається границею функції $y = f(x)$ при x, що прямує до нескінченності ∞ ($x \to \infty$), якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ можна знайти число $M > 0$ таке, що при всіх $x : |x| > M$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначають $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Формули пункту 4 справедливі також і при $x \to \infty$.

6. Нескінченно малі функції (НМФ). Порівняння нескінченно малих

Озн 1. Функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою при** $x \to x_0$ (або при $x \to \infty$), якщо її границя дорівнює нулю: $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ (або $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$).

Дві НМФ порівнюються між собою за допомогою дослідження їхнього відношення. Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ –нескінченно малі функції при $x \to x_0$. Тоді мають місце наступні означення:

Озн 2. Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x \to x_0$ називаються **величинами одного порядку**, якщо їх відношення має скінчену границю, відмінну від нуля $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$.

Озн 3. Функція $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ називається **нескінченно малою** $k-$*го* **порядку** відносно функції $\beta(x)$, якщо $\alpha(x)$ і $\left(\beta(x)\right)^k$ – нескінченно малі одного порядку, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\left(\beta(x)\right)^k} = c \neq 0$.

Озн 4. Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x \to x_0$ називаються **еквівалентними нескінченно малими величинами**, якщо границя їх відношення дорівнює одиниці, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Позначають $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$.

7. Невизначеності

У найпростіших випадках знаходження границі неперервної функції $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ зводиться до підстановки у функцію $f(x)$ граничного значення аргументу x_0. Але часто така підстановка приводить до **невизначених виразів**. До таких виразів відносять: $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]$, $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$. Операцію знаходження границі у цих випадках називають *розкриттям невизначеності.* Приклади розкриття невизначеностей, будуть наведені нижче.

8. Деякі важливі границі

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (перша визначна границя).

Наслідки першої визначної границі:

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=1$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

6) Числом e називається границя: $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ (друга визначна границя);

Наслідки другої визначної границі:

8) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=e$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$;

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$;

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$.

9. Границя степенево-показникової функції

При знаходженні границь вигляду $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\varphi(x)\right)^{\psi(x)}=c$ потрібно мати на увазі наступне:

1) якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = B$, то $c = A^B$.

2) якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A \neq 1$, $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = +\infty$, то $c = \begin{cases} 0, & 0 < A < 1 \\ +\infty, & A > 1 \end{cases}$ або

якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A \neq 1$, $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = -\infty$, то $c = \begin{cases} +\infty, & 0 < A < 1 \\ 0, & A > 1 \end{cases}$.

3) якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = \infty$ (невизначеність 1^∞,), покладемо $\varphi(x) = 1 + \alpha(x)$, де $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$, тоді

$$c = \lim_{x \to x_0} \left\{ \left[1 + \alpha(x)\right]^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right\}^{\alpha(x) \cdot \psi(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} (\varphi(x) - 1)\psi(x)}.$$

10. Застосування еквівалентності нескінченно малих величин.

Для розкриття невизначеності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ часто буває корисним застосувати заміну нескінченно малих величин еквівалентними ($\sim$) їм нескінченно малими величинами.

Справедливо, якщо $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$ при $x \to x_0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}$.

Наведемо основні еквівалентності, які застосовуються при обчисленні границь: $x \sim \sin x \sim tgx \sim \arcsin x \sim arctgx \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$, при $x \to 0$ та

$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $a^x - 1 \sim x \ln a$, $\log_a(1+x) \sim x \log_a e$, $(1+x)^k - 1 \sim kx$ при $x \to 0$.

11. Неперервність функцій

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в точці x_0 та в деякому околі цієї точки. Функція $y = f(x)$ називається **неперервною в точці** x_0, якщо існує границя функції в цій точці і ця границя дорівнює значенню функції в цій точці, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Для дослідження неперервності функції в точці x_0 необхідно:

1) перевірити, що функція $f(x)$ визначена в точці x_0 та в деякому її околі, знайти $f(x_0)$;

2) перевірити, що існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ або існують односторонні границі $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ та $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$;

3) перевірити, що справедливо $f(x_0) = A$ або $A_1 = A_2 = f(x_0)$.

Якщо виконуються всі три умови , то $f(x)$ є неперервною в точці x_0.

Якщо $f(x)$ – неперервна в точці x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right) = f(x_0)$, що означає, що при знаходженні границі неперервної функції $f(x)$ можна перейти до границі під знаком функції. Тобто замість аргумента x підставити його граничне значення x_0.

Функція $f(x)$ називається **неперервною на інтервалі** (a, b), якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервала.

Функція $f(x)$ називається **неперервною на відрізку** $[a, b]$, якщо вона неперервна на інтервалі (a, b), а в точці a неперервна справа $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$, в точці b неперервна зліва $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$.

Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні в точці x_0, то в точці x_0 неперервні також функції : сума $f(x) + g(x)$, різниця $f(x) - g(x)$, добуток $f(x) \cdot g(x)$, частка $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при умові $g(x_0) \neq 0$.

Якщо $\varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а $f(y)$ неперервна в точці $y_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $F(x) = f(\varphi(x))$ неперервна в точці x_0.

Зауважимо, що всі елементарні функції є неперервними в своїй області визначення.

Точки, в яких функція не є неперервною називаються **точками розриву функції.**

Точка розриву x_0 називається **точкою розриву I роду**, якщо в цій точці існують скінченні лівостороння і правостороння границі:

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ та $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$.

При цьому:

1) якщо $A_1 = A_2$ але $f(x_0)$ не існує, або $f(x_0) \neq A_1$, то точка x_0 – **точка усувного розриву;**

2) якщо $A_1 \neq A_2$, то x_0 – точка **неусувного розриву(типу «стрибок»**);

$|A_1 - A_2|$ – стрибок функції в точці x_0.

Точка розриву x_0 називається **точкою розриву II роду**, якщо хоча б одна з односторонніх границь (лівостороння або правостороння) не існує або є нескінченою.

Приклади обчислення границь

1) Обчислити границю $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$.

Розв'язання . Границі чисельника і знаменника при $x \to 2$ дорівнюють 0. Маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Щоб її розкрити, розкладемо чисельник і знаменник на множники і скоротимо дріб на $x - 2 \neq 0$ (бо $x \to 2$, але $x \neq 2$). Отже,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+5)}{3(x-2)\left(x + \frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 2} \frac{x+5}{x + \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \frac{2+5}{2 + \frac{1}{3}} = 1.$$

2) Обчислити границю $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3 + x - 1}$.

Розв'язання . В даному випадку при $x \to \infty$ чисельник і знаменник прямують до нескінченності. Маємо справу з невизначеністю типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Поділимо чисельник і знаменник на x^3 (старший степінь x в чисельнику і знаменнику). При цьому врахуємо, що вирази типу $\dfrac{\alpha}{x}$, $\dfrac{\beta}{x^2}$, $\dfrac{\gamma}{x^3}$ прямують до 0 при $x \to \infty$.

Отже, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$=(поділимо чисельник і знаменник на x^3)=

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)\left(3+\frac{5}{x}\right)\left(4-\frac{6}{x}\right)}{3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{2\cdot3\cdot4}{3}=8.$$

3) Обчислити границю $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{1-\cos8x}$.

Розв'язання . *I спосіб.* Використаємо тригонометричні формули:

$1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$; $\sin2\beta=2\sin\beta\cos\beta$:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{1-\cos8x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 2x}{2\sin^2 4x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{4\sin^2 2x\cos^2 2x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{4\cos^2 2x}=\frac{1}{4}.$$

II спосіб. Використаємо еквівалентність нескінченно малих, а саме:

$1-\cos\alpha \sim \dfrac{\alpha^2}{2}$ при $\alpha\to0$ тобто $1-\cos4x \sim \dfrac{(4x)^2}{2}$ при $x\to0$, $1-\cos8x \sim \dfrac{(8x)^2}{2}$ при $x\to0$. Маємо

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{1-\cos8x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{(4x)^2}{2}}{\frac{(8x)^2}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{16x^2}{64x^2}=\frac{1}{4}.$$

4) Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n-3}\right)^{n+3}$.

Розв'язання . Маємо справу з невизначеністю типу $\left[1^\infty\right]$. Розв'язуємо її за допомогою II визначної границі. У виразі у дужках виділяємо 1, потім перетворюємо так, щоб можна було застосувати II визначну границю (див. 9.3)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n-3}\right)^{n+3}=\left[1^\infty\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{8}{n-3}\right)^{n+3}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{8}{n-3}\right)^{\frac{n-3}{8}}\right]^{\frac{8(n+3)}{n-3}}=e^8.$$

5) Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання . Маємо невизначеність типу $\left[1^{\infty}\right]$.Розв'язуємо, використовуючи другу визначну границю (див. 9.3) .

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+(\cos x-1)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x}}=e^{0}=1.$$

6) Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{2arctgx-\sin x}$.

Розв'язання . Розв'язуємо, використовуючи такі відомі границі:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (І визначна границя).

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{-2x}}{2arctgx-\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}(e^{6x}-1)}{2arctgx-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{6e^{-2x}\cdot\frac{e^{6x}-1}{6x}}{2\frac{arctgx}{x}-\frac{\sin x}{x}}=\frac{6\cdot 1}{2-1}=6.$$

7. Обчисливши границі, підтвердити або заперечити наступні твердження:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+5x-6}>\lim_{x\to 5}\frac{5-x}{\sqrt{5}-\sqrt{x}}>\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x-\pi)}{\cos 3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$$

Розв'язання . Обчислимо вказані границі окремо:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2+5x-6}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+6)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x+6}=\dfrac{1+1+1}{1+6}=\dfrac{3}{7};$

2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5-x}{\sqrt{5}-\sqrt{x}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{x})(\sqrt{5}+\sqrt{x})}{\sqrt{5}-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 5}(\sqrt{5}+\sqrt{x})=2\sqrt{5};$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x-\pi)}{\cos 3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin 2x}{\cos\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x}{3x}=-\dfrac{2}{3};$

4) Розглянемо нерівність: $\dfrac{3}{7}>2\sqrt{5}>-\dfrac{2}{3}$. Оскільки $\dfrac{3}{7}<2\sqrt{5}$, то розглянута нерівність не є вірною.

Відповідь: твердження неправильне.

8. Дослідити функцію на неперервність. Зробити схематичний рисунок.

а) $f(x)=8^{\frac{1}{5-x}}$.

Розв'язання . Область визначення функції $D(f): x\in(-\infty;5)\bigcup(5;+\infty)$.

Функція $f(x)$ є суперпозицією кількох неперервних функцій на $D(f)$, тому є неперервною при $x\in(-\infty;5)\bigcup(5;+\infty)$.

Розглянемо лівосторонню і правосторонню границі в точці $x_0=5$. При $x\to 5-0$ вираз $\frac{1}{5-x}\to+\infty$. При $x\to 5+0$ вираз $\frac{1}{5-x}\to-\infty$. Тому

$$\lim_{x\to 5-0} 8^{\frac{1}{5-x}}=8^{+\infty}=+\infty, \quad \lim_{x\to 5+0} 8^{\frac{1}{5-x}}=8^{-\infty}=0.$$

Оскільки лівостороння границя в точці $x_0=5$ нескінченна, то $x_0=5$ – точка розриву ІІ роду, а $x=5$ – вертикальна асимптота.

Дослідимо поведінку функції на нескінченності:

$$\lim_{x\to +\infty} 8^{\frac{1}{5-x}}=8^0=1\Rightarrow \ y=1-\text{горизонтальна асимптота.}$$

Графік функції має вигляд, зображений на рисунку 1.

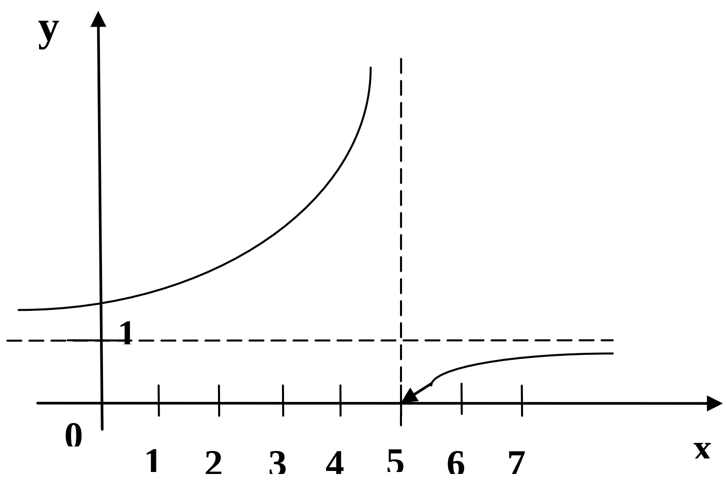

Рис. 1

б) $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x\le 2 \\ x+1, & x>2 \end{cases}$

Розв'язання . На кожному з інтервалів функція задана окремим аналітичним виразом, що задає неперервну функцію на цьому інтервалі.

Неперервність може порушуватися в точках $x_0=0$, $x_1=2$.

Знайдемо лівосторонню і правосторонню границі в цих точках і дослідимо на неперервність функцію $f(x)$. В точці $x_0=0$:

$$\left.\begin{aligned} f(0-0)&=\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}(-x)=0 \\ f(0+0)&=\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} x^2=0 \\ f(0)&=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow f(-0)=f(+0)=f(0)-x=0-\text{точка}$$

неперервності функції.

В точці $x_1=2$:

$$\left.\begin{aligned} f(2-0)&=\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0} x^2=4 \\ f(2+0)&=\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(x+1)=3 \\ f(2-0)&\ne f(2+0) \end{aligned}\right\}\Rightarrow x_1=2-\text{точка розриву I роду.}$$

Графік функції має вигляд зображений на рисунку 2

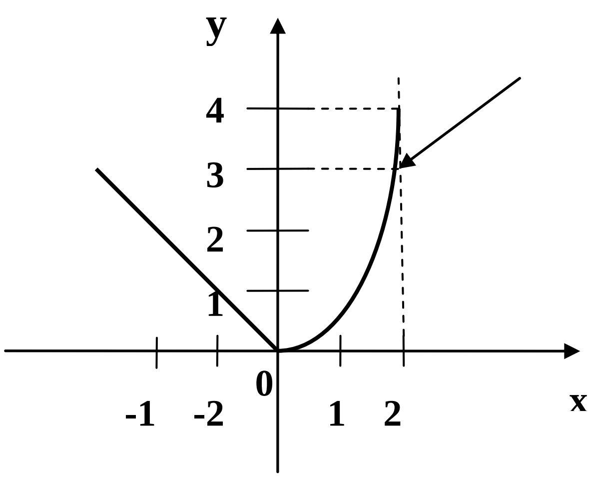

Рис. 2

9) Визначити порядок малості $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x \to 0$, якщо

$\alpha(x) = \sqrt{1+x^2}\, tg\,\frac{\pi x}{2}$; $\beta(x) = x$.

Розв'язання . Згідно означення 3 п.6, розглянемо границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}\,tg\,\frac{\pi x}{2}}{x^k} = \left|\begin{array}{c} \text{згідно п.10} \\ tg\,\frac{\pi x}{2} \sim \frac{\pi x}{2} \\ \frac{\pi x}{2}\to 0, \text{при } x\to 0 \end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}\,\frac{\pi x}{2}}{x^k} = \left|\text{при } k=1\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\sqrt{1+x^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

Отже, $\alpha(x)$ НМФ відносно $\beta(x)$ при $x \to 0$ порядку $k=1$.

Завдання для типового розрахунку

1. Знайти границю:	
1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$	16) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{2x^2+x-1}$
2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+5x+2}{x^2-1}$	17) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-1}$
3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$	18) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3+1}{2x^2-x-1}$
4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{x^2-5x+4}$	19) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+5x+2}{x^2-1}$
5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+7x+6}{x^2-x-2}$	20) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3}$
6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x-2}$	21) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+5x+2}{x^2-1}$
7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-4}$	22) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+6x+8}$
8) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+7x+6}{x^2-2x-3}$	23) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+5x+2}{x^2+4x+3}$
9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-4x+3}$	24) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+7x-8}{x^2+2x-3}$
10) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4x+4}$	25) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3+1}{2x^2-x-1}$
11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2+x-2}$	26) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+5x+2}{x^2-1}$
12) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-7x-8}{x^2-2x-3}$	27) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+7x+6}{x^2-2x-3}$
13) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-1}$	28) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2-1}$
14) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$	29) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{2x^2-8}$
15) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-7x+6}{x^2+2x-3}$	30) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+7x+5}{x^2-x-2}$

2. Знайти границю:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+2}{x^2+4x+3}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-6x+2}{x^3+2x^2+3x+2}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-6x+2}{x^3+2x^2+3x+2}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2+4x+3}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+5x+2}{x^2-4x-5}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x+2}{x^3+4x^2+3x}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2-2x+2}{2x^2+x+3}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-6x+2}{x^3-x^2+3x}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-3}{5x^2-6x+3}$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+5x+2}{2x^3+4x^2-3x}$

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-12}{2x^2+3x+3}$

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-6x+2}{x^3+2x^2+3x+2}$

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2-2x+2}{2x^2+x-3}$

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x+2}{3x^3-4x^2+3}$

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x+2}{5x^2-6x+4}$

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+5x+12}{x^2+4x-5}$

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-2x+2}{2x^2+x-3}$

18) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+6x+1}{x^3+2x^2-3x+2}$

19) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-9}{3x^2-6x+3}$

20) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+4}{2x^3+4x^2-3x}$

21) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x-2}{x^2+4x-13}$

22) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+5x+12}{x^2+4x-5}$

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x+22}{3x^3-4x^2+3x}$

24) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-12}{2x^2+3x+3}$

25) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-6x+2}{x^3+2x^2+3x+2}$

26) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+15x+2}{3x^3-x^2+x}$

27) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2+5x-3}{6x^2-x-4}$

28) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+2}{x^3-14x^2+13x}$

29) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-3}{5x^2-6x+4}$

30) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+x-3}{x^2-6x+9}$

3. Знайти границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^3-x^2}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^3+x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^3+x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{x^3+8}}{2x-2x^2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^3-x}$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x+7}}{2x-x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{3x^2}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-\sqrt{x^3+9}}{2x^3+2x^2}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+9}-3}{x^3+x^4}$

10) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{x^3+10}}{2x+2x^2}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+2}}$

12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+15}-\sqrt{x^3+15}}{2x-2x^2}$

13) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x^3+5}}{x-x^3}$

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-2}{\sqrt{x+16}-\sqrt{x^2+16}}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^3-x^2}$

16) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{10+x}-\sqrt{x^3+10}}{x+x^2}$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x^2+7}}$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+27}-3\sqrt{3}}{x^3+x}$

19) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{10-x}-\sqrt{x^3+8}}{x-x^2}$

20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{\sqrt{x^4+7}-\sqrt{x^2+7}}$

21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+25}-5}{x^3-x^2}$

22) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x+10}}{x+x^2}$

23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^3+x^2}$

24) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+17}-\sqrt{x^3+17}}{2x+2x^2}$

25) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-x}{x^2-4}$

26) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x^3+5}}{x+x^2}$

27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt{2x+6}-\sqrt{x^2+6}}$

28) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+11}-\sqrt{x^2+11}}{3x+3x^2}$

29) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9-x}-3}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x^2+5}}$

30) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+25}-5}{x^3-x^2}$

4. Знайти границю:

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x})$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^3+2x+2}-\sqrt{x^3+2x})$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^3+4x-9}-\sqrt{2x^3-x})$

4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2+x})$

5) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+3x-1})$

6) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{2x^2+2x}-\sqrt{2x^2-3x+2})$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x+7}-2\sqrt{x})$

8) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+5x})$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^3+x+3}-\sqrt{x^3+x})$

10) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+4x+3}-\sqrt{x^2-6x-1})$

11) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x-5}-2\sqrt{x})$

12) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{3x^2+x}-\sqrt{3x^2-4x-1})$

13) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{3x^2+x-1})$

14) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{9x+5}-3\sqrt{x})$

15) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^3+5x+2}-\sqrt{2x^3+3x})$

16) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x+2}-2\sqrt{x})$

17) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^3+4x+5}-\sqrt{2x^3+x})$

18) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{9x^2+4x+3}-3\sqrt{x^2-x-1})$

19) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x+5}-2\sqrt{x-3})$

20) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{5x^2+x}-\sqrt{5x^2+4x+4})$

21) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^3+4x+5}-\sqrt{x^3+4x})$

22) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{9x^2+4x}-3\sqrt{x^2-1})$

23) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{4x^2+2x+2}-\sqrt{4x^2+3x})$

24) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{3x^2+x-1})$

25) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{4x^2+2x+2}-\sqrt{4x^2+3x})$

26) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x+7}-\sqrt{4x-6})$

27) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^3+4x-9}-\sqrt{2x^3-x})$

28) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x-\sqrt{x^2+x})$

29) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-3x+1})$

30) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{16x+5}-4\sqrt{x})$

5. Знайти границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-cos3x}{xtg3x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 5x}{\sin x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-cos3x}{tg^2 4x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 5x}{\sin 3x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 7x-cos3x}{\arcsin 3x\cdot\sin 5x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos6x}{tg^2 3x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-cos4x}{\sin^2 3x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{arctg4x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{\sin 3x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 5x}{\sin x}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 9x-cos3x}{xtg3x}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 8x-cos4x}{x\sin 4x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-cos3x}{tg^2 4x}$

14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin 5x}{arctg2x}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-cos6x}{x\arcsin 4x}$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-cos4x}{x\sin 4x}$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-cos6x}{arctgx\cdot\sin 3x}$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x-\sin 3x}{tg4x}$

19)) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 7x-cos3x}{\sin 5x\cdot\arcsin x}$

20) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-cos3x}{xarctgx}$

21) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-cos4x}{x\sin 4x}$

22) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-cos3x}{tg^2 4x}$

23) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 5x}{\sin x}$

24) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 7x-cos3x}{\sin 5x\cdot\arcsin x}$

25) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arc\sin 6x}{\sin 3x-\sin 5x}$

26) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{tg3x}$

27) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-cos7x}{x\sin x}$

28) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 5x}{arctg3x}$

29) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos4x}{x\sin 4x}$

30) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x-\sin 3x}{arctg2x}$

6. Знайти границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(-x^2)}{x(e^{3x}-1)}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x^2)}{\sin x\cdot tg3x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1}{(1-\cos x)x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x^2)}{x(e^{-x}-1)}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{x\arcsin 2x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^{3x}-1)}{1-\cos 2x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x\arcsin 2x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos 2x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^2)}{1-\cos 2x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos 2x}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(3x^2)}{x(e^{5x}-1)}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x(e^{4x}-1)}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-1}{1-\cos 2x}$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^2)}{x(e^{-x}-1)}$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{1-\cos 6x}$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{1-\cos 6x}$

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2)}{xtgx}$

20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-1}{\cos 2x-1}$

21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^2)}{x(e^{x}-1)}$

22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg(x^2)}{e^{2x^2}-1}$

23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x^2)}{x(e^{2x}-1)}$

24) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2)}{xarctg3x}$

25) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{1-\cos 6x}$

26) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x^2)}{\sin x\cdot tg3x}$

27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(3x^2)}{x(e^{5x}-1)}$

28) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x(e^{x}-1)}$

29) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{tg^2 6x}$

30) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{1-\cos 4x}$

7. Знайти границю:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{2x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-3}\right)^{-x+4}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x+3}{2x^2+3}\right)^{x+2}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x-1}{2x^2+3}\right)^{3x+2}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x-1}{7x+3}\right)^{2+x}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2-1}{5x^2+3}\right)^{-x^2+2}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{2x+3}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x^2+4}\right)^{3x+2}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x-3}\right)^{2x+3}$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-1}{3x^2-4}\right)^{5x^2}$

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x-3}\right)^{5x+4}$

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3x-1}{2x^2+x+3}\right)^{3x+2}$

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{2-x}$

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+4}\right)^{2x^2-1}$

15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+5}{3x-5}\right)^{4x-2}$

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{2-x}$

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-1}{3x^2+4}\right)^{-2x^2-1}$

18) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+3}\right)^{2x-2}$

19) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-4}\right)^{x+2}$

20) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{-2x+3}$

21) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-2x-1}{4x^2+5}\right)^{x+2}$

22) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-4x+1}{-4x+2}\right)^{2x}$

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-x+3}{2x^2+3}\right)^{x}$

24) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+4}\right)^{x^2}$

25) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x-3}\right)^{5x+4}$

26) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x+3}{2x^2+3}\right)^{x+2}$

27) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-4}\right)^{x+5}$

28) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{2-x}$

29) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x-1}{3x^2+x-4}\right)^{-2x^2-1}$

30) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+3}\right)^{2x}$

8. Знайти границю:

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)^{2x-4}$

2) $\lim\limits_{x\to\pm0}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+4}\right)^{\frac{1}{x}}$

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3x+1}{x+3}\right)^{2x+4}$

4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x-1}{3x-2}\right)^{x}$

5) $\lim\limits_{x\to1+0}\left(\dfrac{7x-1}{7x+5}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

6) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{2x^2+4}\right)^{-x}$

7) $\lim\limits_{x\to1-0}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{\frac{x}{1-x}}$

8) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{2x^2}\right)^{-x}$

9) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x-1}{4x+2}\right)^{x-3}$

10) $\lim\limits_{x\to\pm0}\left(\dfrac{3x^2+1}{x^2+4}\right)^{\frac{1}{x}}$

11) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x-1}{3x+2}\right)^{-x}$

12) $\lim\limits_{x\to\pm0}\left(\dfrac{3x^2+1}{x^2+4}\right)^{\frac{1-x}{x}}$

13) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x-1}{4x+2}\right)^{-x+3}$

14) $\lim\limits_{x\to1-0}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{2x}{1-x}}$

15) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3x^2-1}{2x^2}\right)^{-x}$

16) $\lim\limits_{x\to1-0}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{\frac{x}{1-x}}$

17) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{2x^2}\right)^{-x}$

18) $\lim\limits_{x\to1-0}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{\frac{x}{1-x}}$

19) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-1}{2x^2+4}\right)^{\frac{2x+1}{x}}$

20) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x+1}{4x}\right)^{3x}$

21) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x-1}{4x^2+5}\right)^{x^2+2}$

22) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{4x+1}{x+2}\right)^{2x}$

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-1}{x^2+4}\right)^{-4x^2}$

24) $\lim\limits_{x\to\pm0}\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2-4}\right)^{\frac{3}{x}}$

25) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x-1}{5x+2}\right)^{-x+1}$

26) $\lim\limits_{x\to\pm0}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+4}\right)^{\frac{1}{x}}$

27) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x-1}{4x+2}\right)^{x-3}$

28) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{2x^2}\right)^{-x}$

29) $\lim\limits_{x\to1+0}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{\frac{x}{1-x}}$

30) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{x^2}\right)^{-2x}$

9. Дослідити функцію на неперервність. Схематично зобрази поведінку функції в околі точок розриву:	13) а) $y = arctg\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$
1) а) $y = 5^{\frac{1}{x-1}}$ б) $y = \begin{cases} -x-1, \, при \; x < 0 \\ x^2 - 1, \, при \; 0 \le x \le 2 \\ 3, \, при \; x > 2 \end{cases}$	б) $y = \begin{cases} -x, \, при \; x \le 2 \\ x-4, \, при \; 2 < x \le 4 \\ 3x-6, \, при \; x > 4 \end{cases}$
2) а) $y = 3^{\frac{1}{x-1}}$ б) $y = \begin{cases} x^2, \, при \; x < -1 \\ x+2, \, при \; -1 \le x \le 1 \\ 2, \, при \; x > 1 \end{cases}$	14) а) $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ б) $y = \begin{cases} x+2, \, при \; x < -2 \\ 4 - x^2, \, при \; -2 \le x \le 2 \\ 0, \, при \; x > 2 \end{cases}$
3) а) $y = 3^{\frac{1}{x+2}}$ б) $y = \begin{cases} 1, \, при \; x \le -2 \\ x^2 - 4, \; при \; -2 < x < 3 \\ x+2, \, при \; x \ge 3 \end{cases}$	15) а) $y = arcctg\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ б) $y = \begin{cases} x+2, \, при \; x < -2 \\ 4 - x^2, \, при \; -2 \le x \le 2 \\ 0, \, при \; x > 2 \end{cases}$
4) а) $y = \dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}$ б) $y = \begin{cases} x+1, \, при \; x \le -2 \\ x^2, \; при \; -2 < x \le 2 \\ x+2, \, при \; x > 2 \end{cases}$	16) а) $y = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$ б) $y = \begin{cases} 1-x, \, при \; x \le -2 \\ x^2, \; при \; -2 < x \le 2 \\ x+2, \, при \; x > 2 \end{cases}$
5) а) $y = 4^{\frac{1}{x+3}}$ б) $y = \begin{cases} x+2, \, при \; x < -3 \\ 4 - x^2, \, при \; -3 \le x \le 2 \\ 0, \, при \; x > 2 \end{cases}$	17) а) $y = 2^{\frac{1}{x+3}}$ б) $y = \begin{cases} x, \, при \; x \le -1 \\ x^2+1, \; при \; -1 < x \le 2 \\ x+3, \, при \; x > 2 \end{cases}$
6) а) $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$	18) а) $y = \dfrac{1-\cos 6x}{2x}$

б) $y=\begin{cases} x,\ при\ x<0 \\ x^2-2,\ при\ 0\le x\le 2 \\ 2,\ при\ x>2 \end{cases}$ 7) а) $y=arctg\left(\frac{x}{x-1}\right)$ б) $y=\begin{cases} 1-x,\ при\ x<-1 \\ x^3,\ при\ -1\le x\le 1 \\ x,\ при\ x>1 \end{cases}$ 8) а) $y=4^{\frac{1}{x+2}}$ б) $y=\begin{cases} x,\ при\ x<-2 \\ 2-x^2,\ при\ -2\le x\le 2 \\ -2,\ при\ x>2 \end{cases}$ 9) а) $y=arcctg\left(\frac{2}{x-1}\right)$ б) $y=\begin{cases} x^2,\ при\ x<-1 \\ x-2,\ при\ -1\le x\le 2 \\ 0,\ при\ x>2 \end{cases}$ 10) а) $y=\frac{x^2+5x+4}{x^2-16}$ б) $y=\begin{cases} 2,\ при\ x<1 \\ x^2+1,\ при\ 1\le x\le 2 \\ -x+3,\ при\ x>2 \end{cases}$ 11) а) $y=5^{\frac{1}{x-1}}$ б) $y=\begin{cases} 2x-1,\ при\ x\le 2 \\ x-4,\ при\ 2<x\le 4 \\ 3x-6,\ при\ x>4 \end{cases}$ 12) а) $y=\frac{1-\cos x}{2x}$	б) $y=\begin{cases} 3x+1,\ при\ x\le -1 \\ x^2-3,\ при\ -1<x\le 1 \\ -2,\ при\ x>1 \end{cases}$ 19) а) $y=arcctg\left(\frac{1}{x-1}\right)$ б) $y=\begin{cases} x+2,\ при\ x<-2 \\ 4-2x,\ при\ -2\le x\le 2 \\ 0,\ при\ x>2 \end{cases}$ 20) а) $y=5^{\frac{x+1}{x}}$ б) $y=\begin{cases} 1,\ при\ x\le -2 \\ x^2-4,\ при\ -2<x<3 \\ x+2,\ при\ x\ge 3 \end{cases}$ 21) а) $y=3^{\frac{1}{x+1}}$ б) $y=\begin{cases} x+2,\ при\ x<-2 \\ 4-x^2,\ при\ -2\le x\le 2 \\ 0,\ при\ x>2 \end{cases}$ 22) а) $y=\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}$ б) $y=\begin{cases} -x-1,\ при\ x<0 \\ x^2-1,\ при\ 0\le x\le 2 \\ 3,\ при\ x>2 \end{cases}$ 23) а) $y=5^{\frac{1}{x-1}}$ б) $y=\begin{cases} -x,\ при\ x\le 2 \\ x-4,\ при\ 2<x\le 4 \\ 3x-6,\ при\ x>4 \end{cases}$ 24) а) $y=\frac{1-\cos 6x}{2x}$

б) $y=\begin{cases} 2x, \text{ при } x<1 \\ x^2, \text{ при } 1\le x\le 3 \\ x-5, \text{ при } x>3 \end{cases}$	б) $y=\begin{cases} 2, \text{ при } x<1 \\ x^2+1, \text{ при } 1\le x\le 2 \\ -x+3, \text{ при } x>2 \end{cases}$
25) а) $y=2^{\frac{1}{x+1}}$ б) $y=\begin{cases} 1-x, \text{ при } x<-1 \\ 1-x^2, \text{ при } -1\le x\le 1 \\ 0, \text{ при } x>1 \end{cases}$	28) а) $y=2^{\frac{1}{x+3}}$ б) $y=\begin{cases} 2, \text{ при } x<-2 \\ 4-x^2, \text{ при } -2\le x\le 2 \\ x-2, \text{ при } x>2 \end{cases}$
26) а) $y=\dfrac{x+3}{x^2-9}$ б) $y=\begin{cases} -x-1, \text{ при } x<0 \\ x^2-1, \text{ при } 0\le x\le 2 \\ 2, \text{ при } x>2 \end{cases}$	29) а) $y=arctg\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ б) $y=\begin{cases} x+2, \text{ при } x<-2 \\ x^2, \text{ при } -2\le x\le 1 \\ 2-x, \text{ при } x>1 \end{cases}$
27) а) $y=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ б) $y=\begin{cases} x, \text{ при } x<0 \\ \sqrt{x}, \text{ при } 0\le x\le 4 \\ x-5, \text{ при } x>4 \end{cases}$	30) а) $y=arctg\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ б) $y=\begin{cases} -2x, \text{ при } x\le 1 \\ x-3, \text{ при } 1<x\le 3 \\ 6-x, \text{ при } x>3 \end{cases}$

10) Для заданих величин $\alpha(x)$ та $\beta(x)$:

а) перевірити, що задані величини є нес- -кінчено малими при $x \to 0$;

б) порівняти нескінчено малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ при $x \to 0$;

в) знайти порядок малості нескінчено малої $\alpha(x)$ відносно нескінчено малої $\gamma(x) = x$ при $x \to 0$;

г) знайти порядок малості нескінчено малої $\beta(x)$ відносно нескінчено малої $\gamma(x) = x$ при $x \to 0$.

1) $\alpha(x) = \ln(1+\sin^3 x)$, $\beta(x) = \sqrt{1+x^2}$

2) $\alpha(x) = e^{\sin x} - 1$, $\beta(x) = \sqrt{1+x^4} - 1$;

3) $\alpha(x) = \ln(1+tg^2 x)$, $\beta(x) = arctg^3 x$;

4) $\alpha(x) = \ln(1+x^3), \beta(x) = \sqrt[3]{1+\sin x} - 1$

5) $\alpha(x) = \ln(1+\sin^3 x)$, $\beta(x) = arctg^2 x$

6) $\alpha(x) = e^{\sin 3x} - 1$, $\beta(x) = \sqrt{1+x^5} - 1$;

7) $\alpha(x) = e^{\sin x} - 1$, $\beta(x) = \arcsin^2 x$;

8) $\alpha(x) = \ln(\cos x)$, $\beta(x) = \sqrt[5]{1+x^3} - 1$;

9) $\alpha(x) = \ln(1+x^3)$, $\beta(x) = \sqrt[3]{1+\sin^2 x}$

10)) $\alpha(x) = e^{\sin 5x} - 1$, $\beta(x) = arctg^2 x$;

11) $\alpha(x) = 1 - \cos^3 x$, $\beta(x) = e^{\sin^2 x} - 1$

12) $\alpha(x) = e^{x^3} - 1$, $\beta(x) = \sqrt{1+x^4} - 1$;

13) $\alpha(x) = e^{x\sqrt{x}} - 1$, $\beta(x) = \sqrt[3]{1+x^4} - 1$;

14) $\alpha(x) = \ln(\cos x)$, $\beta(x) = \sqrt{1+\sin x^3} - 1$

15) $\alpha(x) = \ln(1+x^3)$, $\beta(x) = \sqrt[3]{1+\sin^2 x} - 1$;

16) , $\alpha(x) = \sqrt{1+x^3} - 1$,) $\beta(x) = e^{\sin^2 x} - 1$

17) $\alpha(x) = 1 - \cos^3 x$, $\beta(x) = e^{\arcsin x} - 1$;

18) $\alpha(x) = \ln(1+x^3), \beta(x) = e^{5x} - 1$;

19) $\alpha(x) = \ln(1+tg^3 x)$,) $\beta(x) = e^{\sin 5x} - 1$;

20) $\alpha(x) = e^{x^3} - 1$, $\beta(x) = \sqrt{1+x^6} - 1$.

21) $\alpha(x) = e^{\sin x} - 1$, $\beta(x) = \sqrt[5]{1+x^3} - 1$;

22) $\alpha(x) = \ln(\cos x)$, $\beta(x) = \sqrt{1+x^4} - 1$.

23) $\alpha(x) = \ln(\cos 2x)$, $\beta(x) = \sqrt{1-x^3} - 1$.

24) $\alpha(x) = \ln(1+tgx)$, $\beta(x) = arctg^2 x$;

25) $\alpha(x) = e^{\sin^2 x} - 1$, $\beta(x) = \arcsin 2x$;

26) $\alpha(x) = \ln(1+2x)$, $\beta(x) = \sqrt{1+x^3} - 1$;

27) $\alpha(x) = e^{2\sin x} - 1$, $\beta(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$;

28) $\alpha(x) = \ln(1+tgx)$, $\beta(x) = arctg^2 x$;

29) $\alpha(x) = 1 - \cos 4x$, $\beta(x) = e^{\arcsin 2x} - 1$;

30) $\alpha(x) = e^{x^2} - 1$, $\beta(x) = \sqrt[4]{1+x^4} - 1$.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Данко П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: учебное пособие для вузов в 2-х ч. Ч. II / Павел Ефимович Данко, Александр Георгиевич Попов, Татьяна Яковлевна Кожевникова. – Изд. 5-е, исп. – М.: Высш. шк., 1996. – 416 с.: ил.; 21 см. – Библиогр.: с. 416 . – 10000 экз. – ISBN 5–06–003071–7 (ч. II). – ISBN 5–06–003072.
2. **Пискунов Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов [Текст]: учебник для вузов /. Том I - II. – М. Наука, 1972, 1978.
3. **Письменный Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике [Текст]: Тридцать пять лекций. 2 часть / Дмитрий Письменный; [вступ. ст. автора] – М.: Рольф, 2002. – 256 с.:
4. **Каплан И. А.** Практические занятия по высшей математике. [Текст]: учебник для вузов / Ч. 1-5. – Харьков, Издательство Харьковского университета, 1967–1972.

ЗМІСТ