

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА КЕРУВАННЯ

УДК 519.85

О.О. Ємець, Н.Ю. Устьян

ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІГРОВИХ ЗАДАЧ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Вступ

Необхідність вибору оптимального в деякому розумінні варіанта поведінки в кожній ситуації зумовила створення великої кількості точних і наближених методів для розв'язування задач із різних розділів математики. Якщо визначимо, до якого класу належить та чи інша задача, то зможемо знайти її розв'язки, використовуючи потрібний метод.

Багато ситуацій описуються задачами оптимізації, і тоді для розв'язування таких задач можна використовувати, наприклад, методи дискретної [1–4] чи комбінаторної [5–15] оптимізації. Теорія ігор також використовує методи математичного програмування. Так, матричні ігри [16–20] зводяться до задач лінійного програмування, що дає змогу отримати їх точний розв'язок. При великих вимірностях задач або якщо точний розв'язок непотрібний, використовується наближений ітераційний метод Брауна–Робінсона.

У працях [21–24] було введено новий клас задач – задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу, які є специфічними іграми з комбінаторними обмеженнями на використання гравцями своїх стратегій. Було запропоновано методи [21–24] для розв'язування таких задач, як графічний метод для певних вимірностей, метод комбінаторного відсікання для частково комбінаторних задач на перестановках (чи розміщеннях залежно від вигляду комбінаторних обмежень на стратегії гравців) та метод для знаходження оптимальної стратегії гравця в задачах, коли на стратегії другого гравця не накладаються комбінаторні обмеження [25]. Оскільки складність задач комбінаторної оптимізації ігрового типу залежить факторіально від вимірності, то вважається за доцільне досліджувати і модифікувати наближені методи для розв'язування цього класу задач, наприклад, використовувати ідеї ітераційного методу з класичної теорії ігор. Для ігрових задач комбінаторної оптимізації ігрового типу, які можуть реалізовуватись багато разів (наприклад, задача

розвезення хліба потребує розв'язання кожного дня), ітераційний метод дає змогу знаходити ймовірності застосування кожної можливої стратегії (з деякої комбінаторної множини).

Постановка задач

У статті пропонується і обґрунтовується ітераційний метод, що за ідеєю близький до методу Брауна–Робінсона [17]), для знаходження розв'язків задач комбінаторної оптимізації ігрового типу з обмеженнями, які визначаються перестановками. Цей метод враховує специфіку розглянутих задач. Його робота ілюструється на прикладі.

Задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу

У [24] було сформульовано і досліджено таку економічну задачу сільськогосподарського виробництва, яка є задачею комбінаторної оптимізації ігрового типу.

Задача 1. В районі є два фермерських господарства, які конкурують між собою. Вони вирощують сільськогосподарську продукцію і продають її на ярмарку восени. Перше господарство має m полів, на кожному з яких вирощуються різні культури. Поля різної площі, тому кількість кожної вирощеної культури залежить від того, на якому полі вона буде посаджена. Аналогічно, у другого господарства є n полів, на яких вирощується n різних культур. Прибутки обох виробників залежать від того, яку кількість кожної культури виростить кожне господарство. Треба розробити оптимальні обсяги вирощення культур обома господарствами.

Якщо у другого господарства немає обмежень на вирощування культур (тобто, наприклад, всі його поля знаходяться поряд, і можна припустити, що цей виробник може вирощувати таку кількість кожної культури, яку він вважатиме найбільш вигідною), то тоді в такій задачі комбінаторні обмеження на використання стратегій будуть тільки у першого виробника.

Розглянемо побудову математичної моделі такої задачі, як антагоністична гра двох осіб, в якій на стратегії одного гравця накладаються комбінаторні обмеження. Математичну модель будуватимемо таким же чином, як і для ще однієї задачі сільськогосподарського виробництва, яка також була сформульована в [24] і в якій одним гравцем є природа, що була теж названа антагоністичною грою. Єдиною від-

мінністю в нашій математичній моделі буде економічний зміст елементів платіжної матриці, а звідси — і вигляд оптимальних стратегій гравців. Вектори $P^x = (P_1^x, P_2^x, \dots, P_m^x)$ і $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, останній з яких характеризує обсяги вирощування продукції першим господарством, такі самі, як і в моделі 1 з [24].

Нехай вектор $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — мішана стратегія другого виробника — набір ймовірностей застосування кожної чистої стратегії. Оскільки y_j — ймовірності повної групи дій, то

$$\forall j \in J_n \quad y_j \geq 0; \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1.$$

Складемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

У цій матриці елемент a_{ij} — різниця прибутків другого і першого виробників у тому випадку, коли б перше господарство вирощувало на всіх своїх полях тільки культуру типу i , а друге — тільки культуру типу j .

Нехай $F(X, Y)$ — функція прибутків, тобто різниця прибутків другого і першого виробників, якщо $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ і $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Вона буде мати вигляд $F(X, Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$.

Оптимальні стратегії гравців визначатимемо так, як і в класичній теорії ігор, беручи до уваги зміст коефіцієнтів платіжної матриці: другий гравець має мету за рахунок мішаних стратегій максимально збільшити свій мінімальний прибуток $F(X, Y)$, тобто треба знайти такі X і Y , за яких досягається нижня ціна гри:

$$\alpha = \max_{j \in J_n} \min_{i \in J_m} F(X, Y),$$

а перший гравець завдяки зміні компонент вектора $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ прагне зробити свій максимальний програш мінімальним, тобто знайти верхню ціну гри:

$$\beta = \min_{i \in J_m} \max_{j \in J_n} F(X, Y).$$

Ми отримали таку математичну модель задачі: знайти оптимальні стратегії гравців X_{i_1} і Y_{j_2} з виразу $F(X_{i_1}, Y_{j_2}) = \min_{i \in J_m} \max_{j \in J_n} F(X, Y)$,

а Y_{j_2} з виразу $F(X_{i_2}, Y_{j_2}) = \max_{j \in J_n} \min_{i \in J_m} F(X, Y)$,

де функція $F(X, Y)$ має вигляд $F(X, Y) =$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j; \quad a_{ij} (\forall i \in J_m \quad \forall j \in J_n) \text{ — задані чис-$$

ла, при обмеженнях: 1) $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ задо-

вольняє умови $\forall j \in J_n \quad y_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1$; 2) $X =$

$= (x_1, x_2, \dots, x_m) \in E_m(P^x)$; 3) $P^x = (P_1^x, P_2^x, \dots, P_m^x)$

задовольняє умови $\forall i \in J_m \quad P_i^x \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m P_i^x = 1$.

Розглянемо ще одну економічну задачу виробничого типу.

Задача 2. Два конкуруючих підприємства виробляють відповідно m і n сортів сиру. Перше підприємство виробляє продукцію в m цехах, і в кожному цеху вона є тільки одного сорту. В такому разі будемо вважати, що кількість виробленої продукції лінійно залежить від площі цеху. На другому підприємстві продукція виробляється на майже однаковому обладнанні, різні сорти сиру відрізняються тільки складовими та їх кількістю, тобто можна вважати, що підприємство може виробляти таку кількість кожного сорту продукції, яку воно вважатиме найбільш вигідною. Прибутки обох виробників залежать від того, яку кількість кожного сорту продукції виробить кожне підприємство. Треба розробити оптимальні обсяги випуску продукції обома підприємствами.

Дану задачу, як і попередню, можна розглядати як антагоністичну гру, в якій на стратегії одного гравця (першого підприємства) накладаються комбінаторні обмеження. Математична модель задачі 2 матиме такий самий вигляд, як і для задачі 1, відмінність буде лише в змісті елементів векторів P^x і X та елементів матриці A :

- елемент P_i^x вектора P^x — це відно-

шення площі i -го цеху першого підприємства до суми площ всіх цехів першого підприємства;

- $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ — вектор, який характеризує обсяги виготовлення сиру першим під-

приємством. Його компонента з номером i є відношенням кількості виробленого сиру сорту i до тієї кількості цієї продукції, яка була б вироблена, якщо б в усіх цехах виробляли лише цей сорт сиру, тобто показує, яку частину від максимально можливої кількості сиру сорту i виробили;

- елемент a_{ij} матриці A – це різниця прибутків другого та першого підприємств у тому випадку, якби перше підприємство виробляло в усіх своїх цехах тільки сорт сиру i , а друге – тільки сорт сиру j .

Задачі 1 і 2 мають однакову математичну модель (відрізняється лише зміст елементів векторів P^x і X та матриці A). Проте є ще одна відмінність. В задачі 1 сільськогосподарська продукція вирощується цілий рік, тобто оптимальні стратегії гравців потрібно знайти тільки раз. У задачі 2 сир можна вважати достатньо швидкоореалізованою продукцією, яку потрібно виробляти постійно, тобто можна вважати, що ця гра може бути зіграна багато разів, а це означає, що оптимальною стратегією кожного з гравців може виявитися не одна стратегія, а деяка їх комбінація (можливо всіх). Для другого гравця поняття мішаної стратегії є відомим. Вектор $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ми і вводили як мішану стратегію – набір ймовірностей застосування кожної чистої стратегії. З першим гравцем є складнощі, адже він не може використовувати чисті стратегії, а лише мішані стратегії з множини перестановок. Але оскільки з означення оптимальної стратегії гравця випливає, що при багатократному повторенні гри вона повинна забезпечувати гравцю максимально можливий середній виграш (чи мінімально можливий середній програш), тому має сенс ввести для першого гравця поняття ймовірностей застосування кожної можливої стратегії з множини перестановок. Отже, тепер замість оптимальної стратегії – вектора $X = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in E_m(P^x)$ – будемо шукати вектор $K = (k_1, \dots, k_M)$ ймовірностей повторення кожної стратегії $X \in E_m(P^x)$. Тут $M = |E_m(P^x)|$ – кількість елементів у множині $E_m(P^x)$.

Розглянемо ітераційний метод знаходження оптимальної стратегії першого гравця в задачах 1 і 2. Всі обчислення будуть проводитись однаково для обох задач, відрізнятиметься тільки інтерпретація результату. Цей метод за

ідеєю близький до методу Брауна–Робінсона [17] для розв'язування класичних матричних ігор. Розрахунки робляться виходячи з припущення, що гравці прагнуть збільшити свій виграш (зменшити програш) та роблять ходи за принципом “майбутнє схоже на минуле”, враховують всі зроблені ходи.

Ітераційний метод знаходження оптимальної стратегії гравця, на стратегії якого накладаються комбінаторні обмеження, в задачах комбінаторної оптимізації ігрового типу

Кроки ітерації будемо заносити в таблицю, в якій N – номер кроку, X – вибрана стратегія першого гравця, $B_1, B_2, \dots, B_n$ – стратегії другого гравця, $B_1X, B_2X, \dots, B_nX$ – скалярний добуток векторів, $N\bar{v}$ – максимальний накопичений виграш (максимальне з накопичених скалярних добутків $B_1X, \dots, B_nX$, які зберігаються в рядку SUM), $\bar{v} = \frac{N\bar{v}}{N}$, j – вибрана стратегія другого гравця, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ – програш першого гравця для його чистої i -ї стратегії при вибраній стратегії другого; числа в рядку з назвою SUM – накопичені суми значень у попередньому рядку з назвою sum, Next X – вибрана стратегія першого гравця; Nv – мінімальний накопичений програш (скалярний добуток елементів векторів SUM і Next X), $v = \frac{Nv}{N}$, $v^* = \frac{\bar{v} + v}{2}$.

Спочатку перший гравець вибирає довільно свою першу стратегію. Другий гравець аналізує виграш, який він отримає при кожній своїй стратегії, та вибирає стратегію з метою максимізувати виграш (починаючи з другої ітерації накопичений виграш) – значення в рядку SUM. У наведеному прикладі більший прибуток він отримає, якщо застосує свою першу чисту стратегію (при першій стратегії отримає 5,7, а при другій – 4,7). Перший гравець вибирає свою наступну стратегію Next X , яка б мінімізувала програш (починаючи з другої ітерації накопичений програш) – скалярний добуток елементів векторів SUM і Next X . Такий процес продовжується й далі.

Якщо перший гравець зробив S ходів, то другий вибирає свою стратегію j_S з метою, щоб

максимізувати накопичений виграш — максимальне із значень відповідного рядка SUM. Перший гравець на кроці $S+1$ вибирає свою стратегію $\text{Next } X_{S+1}$ таким чином, щоб мінімізувати накопичений програш — скалярний добуток елементів вектора $\text{Next } X_{S+1}$ і відповідного рядка SUM.

Розглянемо роботу ітераційного методу на прикладі. Нехай за умовою $m=3, n=2$ $P^x =$

$$= \{0, 2; 0, 3; 0, 5\}, \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}. \quad \text{В таблицю будемо}$$

заносити результати розрахунків на кожній ітерації методу. За першу стратегію першого гравця виберемо стратегію довільно — наприклад, $(0, 2; 0, 5; 0, 3)$.

Можна помітити, що на 36-й ітерації методу максимальний накопичений виграш одна-

Таблиця. Розв'язування ігрової задачі ітераційним методом

N	X	B_1	$B_1 X$	B_2	$B_2 X$	$N\bar{v}$	$\bar{v}$	j	A_1	A_2	A_3	$N\underline{v}$	$\underline{v}$	v^*
1	0,2	8	1,6	6	1,2			1	8	7	2			
	0,5	7	3,5	4	2			sum	8	7	2	17		
	0,3	2	0,6	5	1,5			SUM	8	7	2	4,7	4,7	5,2
	sum		5,7		4,7			Next X	0,2	0,3	0,5			
	SUM		5,7		4,7	5,7	5,7							
2	0,2	8	1,6	6	1,2			1	8	7	2			
	0,3	7	2,1	4	1,2			sum	8	7	2	17		
	0,5	2	1	5	2,5			SUM	16	14	4	9,4	4,7	4,95
	sum		4,7		4,9			Next X	0,2	0,3	0,5			
	SUM		10,4		9,6	10,4	5,2							
3	0,2	8	1,6	6	1,2			1	8	7	2			
	0,3	7	2,1	4	1,2			sum	8	7	2	17		
	0,5	2	1	5	2,5			SUM	24	21	6	14,1	4,7	4,867
	sum		4,7		4,9			Next X	0,2	0,3	0,5			
	SUM		15,1		14,5	15,1	5,033							
4	0,2	8	1,6	6	1,2			1	8	7	2			
	0,3	7	2,1	4	1,2			sum	8	7	2	17		
	0,5	2	1	5	2,5			SUM	32	28	8	18,8	4,7	4,825
	sum		4,7		4,9			Next X	0,2	0,3	0,5			
	SUM		19,8		19,4	19,8	4,95							
5	0,2	8	1,6	6	1,2			1	8	7	2			
	0,3	7	2,1	4	1,2			sum	8	7	2	17		
	0,5	2	1	5	2,5			SUM	40	35	10	23,5	4,7	4,8
	sum		4,7		4,9			Next X	0,2	0,3	0,5			
	SUM		24,5		24,3	24,5	4,9							
⋮														
36	0,2	8	1,6	6	1,2			2	6	4	5			
	0,3	7	2,1	4	1,2			sum	6	4	5	15		
	0,5	2	1	5	2,5			SUM	228	162	162	175,2	4,867	4,867
	sum		4,7		4,9			Next X	0,2	0,5	0,3			
	SUM		175,2		175,2	175,2	4,867							

ковий (175,2) при застосуванні будь-якої стратегії, тому другий гравець може вибирати будь-яку стратегію. Для першого гравця в рядку SUM також стоять два однакових числа (228, 162, 162), а мінімальний накопичений програш дорівнює 175,2, тобто становить максимальний накопичений виграш другого гравця. На цьому кроці можна зупинити розрахунки — коли всі стратегії супротивника забезпечують приблизно однаковий виграш (програш) для якогось гравця.

Після 36-ї ітерації методу виявилось, що стратегія (0,2;0,5;0,3) першого гравця використовувалась шість разів, а стратегія (0,2;0,3;0,5) — тридцять разів, тому ймовірність застосування стратегії (0,2;0,5;0,3) становить 1/6, а стратегії (0,2;0,3;0,5) — 5/6.

Тепер, якщо ми знаходили розв'язок задачі 1, то оптимальною стратегією першого гравця X_{i_1} буде стратегія з максимальною ймовірністю, тобто стратегія (0,2;0,3;0,5). Якщо розв'язували задачу 2, то тоді в оптимальній стратегії першого гравця стратегія (0,2;0,5;0,3) ви-

користовується з ймовірністю 1/6, стратегія (0,2;0,3;0,5) — 5/6, а ймовірності застосування всіх інших стратегій дорівнюють 0.

Висновки

У задачах комбінаторної оптимізації ігрового типу для знаходження оптимальної стратегії гравця, на стратегії якого накладаються комбінаторні обмеження, що визначаються перестановками, можна використовувати обґрунтований у цій статті ітераційний метод. Він не тільки враховує специфіку задач комбінаторної оптимізації ігрового типу, а й може використовуватися для задач великої вимірності, що дуже важливо, оскільки складність таких задач факторіально зростає із збільшенням вимірності.

Подальші дослідження можуть бути направлені на розробку наближених методів для знаходження оптимальних стратегій гравців в інших задачах даного класу (наприклад, в задачах, в яких на стратегії одного або обох гравців накладаються комбінаторні обмеження, що визначаються розміщеннями).

О.А. Емец, Н.Ю. Устьян

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Предлагается и обосновывается метод, который можно использовать в задачах комбинаторной оптимизации игрового типа для нахождения оптимальной стратегии игрока, на стратегии которого накладываются комбинаторные ограничения, определяемые перестановками.

O.O. Yemets, N.Yu. Ustian

ITERATION METHOD FOR SOLVING GAME PROBLEMS ON THE ARRANGEMENTS

This paper proposes a novel method, used to find a player's optimal strategy considering the combinatorial restrictions determined by arrangements in the optimization combinatorial problems of the game type.

1. Сергиенко И.В., Каспицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — К.: Наук. думка, 1981. — 288 с.
2. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы исследования, решения. — К.: Наук. думка, 2003. — 264 с.
3. Панишев А.В., Данильченко О.М., Скачков В.О. Вступ до теорії складності дискретних задач. — Житомир: ЖДТУ, 2004. — 236 с.
4. Панишев А.В., Плечистый Д.Д. Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера. — Житомир: ЖГТУ, 2006. — 300 с.
5. Емец О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом про-

граммировании: Учеб. пособие. — К.: УМК ВО, 1992. — 92 с.

6. Стоян Ю.Г., Емец О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — К.: ІСДО, 1993. — 188 с.
7. Стоян Ю.Г., Емец О.О., Емец Є.М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. — 103 с.
8. Емец О.О., Колечкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. — К.: Наук. думка, 2005. — 118 с.
9. Емец О.О., Роскладка О.В. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. — 128 с.

10. Гуляницький Л.Ф. Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях: Автореф. дис. ...докт. техн. наук (01.05.02). — К.: Ін-т кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, 2005. — 32 с.
11. Гребеннік І.В. Математичні моделі та методи комбінаторної оптимізації в геометричному проектуванні: Автореф. дис. ...докт. техн. наук (01.05.02). — Харків: Ін-т проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного, 2006. — 34 с.
12. Емец О.А. Об одном методе отсечения для задач комбинаторной оптимизации // Экономика и мат. методы. — 1997. — 33, вып. 4. — С. 120–129.
13. Ємець О.О., Ємець Є.М. Відсікання в лінійних частково комбінаторних задачах евклідової комбінаторної оптимізації // Доп. НАН України. — 2000. — № 9. — С. 105–109.
14. Емец О.А., Роскладка Е.В. Решение некоторых евклидовых комбинаторных задач оптимизации методом динамического программирования // Кибернетика и систем. анализ. — 2002. — № 1. — С. 138–146.
15. Барболина Т.Н., Емец О.А. Полностью целочисленный метод отсечения для решения линейных условных задач оптимизации на размещениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2005. — 45, № 2. — С. 254–261.
16. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970. — 780 с.
17. Вентцель Е.С. Элементы теории игр. Изд. 2-е, стереотип. — М.: Физматгиз, 1961. — 67 с.
18. Зайченко Ю.П. Исследование операций. — К.: Вища шк., 1979. — 392 с.
19. Крушевский А.В. Теория игр. — К.: Вища шк., 1977. — 216 с.
20. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семин Е.А. Теория игр. — М.: Высш. шк., 1998. — 304 с.
21. Емец О.А., Устьян Н.Ю. Решение некоторых задач комбинаторной оптимизации на размещениях и перестановках игрового типа // Пробл. управления и информатики. — 2006. — № 3. — С. 37–47.
22. Емец О.А., Устьян Н.Ю. Исследование задач комбинаторной оптимизации игрового типа на размещениях // Там же. — 2007. — № 1. — С. 26–36.
23. Емец О.А., Устьян Н.Ю. Задачи на перестановках игрового типа // Тез. докл. XIV Междунар. конф. "Проблемы теоретической кибернетики". — М.: Изд. мех.-мат. факультета МГУ, 2005. — С. 46.
24. Емец О.А., Устьян Н.Ю. Исследование математических моделей и методов решения задач на перестановках игрового типа // Кибернетика и систем. анализ. — 2007. — № 6. — С. 103–114.
25. Ємець О.О., Устьян Н.Ю. Розв'язування ігрових задач на переставленнях // Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2007. — № 3. — С. 47–52.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
"Інститут прикладного системного
аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
23 листопада 2007 року