

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

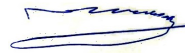
Факультет електроніки

Кафедра акустичних та мультимедійних електронних систем

«На правах рукопису»
УДК 681.518.5:519.213.2

До захисту допущено:

Завідувач кафедри



Сергій Найда

« 07 » 06 2022 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

**за освітньо-науковою програмою «Акустичні електронні системи та техно-
логії обробки акустичної інформації»**

зі спеціальності 171 «Електроніка»

на тему: «Кумулянтні методи розрізнення акустичних сигналів»

Виконав:

студент II курсу, групи ДГ-01мн
Березницький Антон Єгорович



Науковий керівник:

доц. каф. АМЕС, к.т.н., доц.
Берегун Віктор Сергійович



Рецензент:

доц. каф. ЕПС, к.т.н., доц.
Сафронов Павло Сергійович



Засвідчую, що у цій магістерській дисер-
тації немає запозичень з праць інших ав-
торів без відповідних посилань.

Студент 

Київ – 2022 року

**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**

Факультет електроніки

Кафедра акустичних та мультимедійних електронних систем

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою

Акустичні електронні системи та технології обробки акустичної інформації

Спеціальність (спеціалізація) 171 Електроніка

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри



Сергій НАЙДА
(ініціали, прізвище)

« 02 » 02 2022 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Березницькому Антону Єгоровичу

1. Тема дисертації «Кумулянтні методи розрізнення акустичних сигналів» керівник дисертації Берегун Віктор Сергійович к.т.н, доц. каф. АМЕС, затверджені наказом по університету від «14» квітня 2022 р. №НС/8/2022
2. Строк подання дисертації «04» червня 2022 р.
3. Об'єкт дослідження: Процес обробки шумових та музичних сигналів, спрямований на їхнє виявлення та розпізнавання.
4. Предмет дослідження: Кумулянтні методи в системах розпізнавання образів.
5. Перелік завдань, які потрібно зробити: опрацювати наукові джерела з обраної теми, визначити теоретичні основи досліджень; систематизувати інформацію про методи розпізнавання акустичних сигналів і про кумулянтні методи дослідження акустичних сигналів; опанувати побудову моделей шумових сигналів; опрацювати методи одного та двох кумулянтів; виконати розрахункову та експериментальну частини; зробити узагальнення та висновки по проведеним дослідженням.
6. Перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: графіки щільностей імовірності оцінок кумулянтів із зображеним пороговим значенням; графіки залежності ймовірності правильного виявлення залежно від об'єму вибірки; графіки ядерних оцінок кумулянтів; графіки еліпсів розсіювання оцінок двох кумулянтів та кумулянтних коефіцієнтів; таблиці з вихідними даними та проведеними розрахунками; графіки результатів моделювання шумових сигналів; таблиці з результатами моделювання; таблиці з результатами експериментів.
7. Орієнтовний перелік публікацій: 1 наукова стаття.

8. Дата видачі завдання 01.10.2020

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломного проекту (роботи)	Строк виконання етапів проекту (роботи)	Примітка
1	Опрацювання наукових джерел з обраної теми, визначення теоретичних основ дослідження	до 15.01.2021	Виконано
2	Систематизація інформації про методи розпізнавання акустичних сигналів	до 28.03.2021	Виконано
3	Систематизація інформації про кумулянтні методи дослідження акустичних сигналів	до 25.04.2021	Виконано
4	Опрацювання моделей шумових сигналів	до 17.06.2021	Виконано
5	Опрацювання методів одного та двох кумулянтів	до 03.08.2021	Виконано
6	Виконання розрахункової частини	до 01.12.2021	Виконано
7	Виконання експериментальної частини	до 12.03.2022	Виконано
8	Узагальнення та висновки по проведеним дослідженням	до 19.05.2022	Виконано
9	Здача готової роботи	до 04.06.2022	Виконано

Студент


(підпис)

А.Є. Березницький

(ініціали, прізвище)

Науковий керівник дисертації


(підпис)

В.С. Берегун

(ініціали, прізвище)

Реферат

Магістерська дисертація **містить** 105 сторінок, 4 розділи, 59 рисунків, 26 таблиць і 35 джерел.

Стрімкий розвиток галузі цифрової обробки сигналів сприяє широкому поширенню автоматизованих систем розпізнавання акустичних сигналів для вирішення задач діагностики, моніторингу, прогнозування, навчання та керування поведінкою складних систем. Для підвищення точності систем розпізнавання створюються нові методи аналізу акустичних сигналів. Одними з перспективних методів є кумулянтні методи, які потребують перевірки прикладного застосування на моделях і реальних сигналах.

Таким чином, перевірка чутливості кумулянтних методів до виявлення та розпізнавання сигналів на імітаційних моделях та реальних акустичних сигналах є **актуальною** науково-технічною задачею, що має важливе прикладне значення.

Магістерську дисертацію виконано на кафедрі акустичних та мультимедійних електронних систем Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Обраний напрямок наукових досліджень співпадає з напрямками досліджень кафедри.

Метою роботи є перевірка чутливості кумулянтних методів у застосуванні для обробки акустичних сигналів в залежності від кількості та порядків кумулянтів і кумулянтних коефіцієнтів, об'єму вибірки та розподілів миттєвих значень досліджуваних сигналів.

Для досягнення поставленої мети необхідним було вирішення таких задач:

1. Отримання формул для розрахунку параметрів розподілів оцінок кумулянтів завади та адитивної суміші завади та сигналу;
2. Розрахунок об'ємів вибірки та порогових значень або параметрів для побудови еліпсів розсіювання для подальшого прийняття рішення про відсутність або наявність сигналу;

3. Дослідження чутливості кумулянтних методів на моделях шумових сигналів з негауссівським розподілом миттєвих значень;
4. Дослідження можливості розпізнавання музичних сигналів із використанням кумулянтних методів.

Об’єкт дослідження – процес обробки акустичних сигналів, спрямований на їх виявлення та розпізнавання.

Предмет дослідження – кумулянтні методи в системах розпізнавання акустичних сигналів.

У процесі дослідження були використані основні **методи** теорії ймовірностей, математичної статистики, математичного моделювання, випадкових процесів і систем.

Наукова новизна одержаних результатів: набув подальшого розвитку кумулянтний метод розрізнення акустичних сигналів, який базується на статистичній перевірці гіпотез; отримано формули для розрахунку параметрів розподілів оцінок кумулянтів; розраховано об’єми вибірок і порогові значення для розпізнавання з імовірностями помилок першого та другого роду 0,01; побудовано еліпси розсіювання оцінок кумулянтів і кумулянтних коефіцієнтів; перевірено чутливість кумулянтних методів до розрізнення змодельованих сигналів та реальних акустичних сигналів.

Практичне значення одержаних результатів: запропоновано спосіб розрізнення акустичних сигналів, придатний для використання в автоматизованих системах розпізнавання акустичних сигналів.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень представлено на XIV Міжнародній науково-технічній конференції молодих вчених «Електроніка – 2021» (Київ, 20-22 квітня 2021 року) та на семінарах, що проходили на кафедрі акустичних та мультимедійних електронних систем.

Публікації. Березницький А.Є. Виявлення шумового сигналу в адитивній суміші на основі кумулянта другого порядку // Електронна та Акустична Інженерія. – 2021. – Т. 4, № 2. DOI: <https://doi.org/10.20535/2617-0965.eae.227817>.

Ключові слова: випадковий процес, еліпси розсіювання, імовірність правильного виявлення, кумулянт, кумулянтний коефіцієнт, кумулянтні методи, акустичний сигнал, музичний сигнал, негауссівський розподіл, розпізнавання сигналів, розпізнавання образів, шумовий сигнал, ядерна оцінка.

Abstrakt

Die Masterarbeit umfasst 105 Seiten, 4 Kapitel, 59 Abbildungen, 26 Tabellen und 35 Quellen.

Die schnelle Entwicklung der digitalen Signalverarbeitungsindustrie trägt zur weit verbreiteten Verwendung von automatisierten akustischen Signalerkennungssystemen bei, um Probleme der Diagnose, Überwachung, Vorhersage, Schulung und Steuerung des Verhaltens komplexer Systeme zu lösen. Neue Methoden der akustischen Signalanalyse werden geschaffen, um die Genauigkeit von Erkennungssystemen zu erhöhen. Eine der vielversprechenden Methoden sind kumulative Methoden, die eine Überprüfung der Anwendung an Modellen und realen Signalen erfordern.

Daher ist die Prüfung der Sensitivität kumulativer Verfahren zur Detektion und Erkennung von Signalen an Simulationsmodellen und realen akustischen Signalen eine dringende wissenschaftliche und technische Aufgabe mit hohem praktischem Wert.

Die Masterarbeit wurde am Institut für Akustische und Multimediale Elektronische Systeme der Nationalen Technischen Universität der Ukraine „Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute“ angefertigt. Die gewählte wissenschaftliche Forschungsrichtung deckt sich mit den Forschungsrichtungen des Fachbereichs.

Ziel der Studie ist es, die Empfindlichkeit von kumulativen Verfahren zur Verarbeitung akustischer Signale in Abhängigkeit von der Anzahl und Reihenfolge der Kumulanten und kumulativen Koeffizienten, der Stichprobengröße und der Verteilung der Momentanwerte der untersuchten Signale zu testen.

Um dieses Ziel zu erreichen, mussten folgende Aufgaben gelöst werden:

1. Erhalten von Formeln zum Berechnen der Parameter der Verteilung von Schätzungen von Rauschkumulanten und additiver Mischung von Rauschen und Signal;
2. Berechnung von Probenvolumina und Schwellwerten bzw. Parametern zur Konstruktion von Streuellipsen zur weiteren Entscheidungsfindung über das Fehlen oder Vorhandensein eines Signals;

3. Untersuchung der Sensitivität kumulanter Verfahren auf Modelle von Rauschsignalen mit nicht-Gauß'scher Momentanwertverteilung;

4. Erforschung der Möglichkeit, musikalische Signale mit kumulanten Methoden zu erkennen.

Gegenstand der Forschung ist der Prozess der Verarbeitung akustischer Signale mit dem Ziel ihrer Detektion und Erkennung.

Gegenstand der Forschung sind kumulative Verfahren in akustischen Signalerkennungssystemen.

Im Forschungsprozess wurden die wichtigsten Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie, der mathematischen Statistik, der mathematischen Modellierung, der Zufallsprozesse und -systeme verwendet.

Wissenschaftliche Neuheit der erzielten Ergebnisse: Die kumulative Methode zur Unterscheidung akustischer Signale, die auf statistischer Hypothesenprüfung beruht, wurde weiterentwickelt; Formeln zur Berechnung der Parameter der Verteilung kumulanter Schätzungen werden erhalten; Stichprobenumfänge und Erkennungsschwellen mit Irrtumswahrscheinlichkeiten erster und zweiter Art von 0,01 wurden berechnet; Streuellipsen von kumulanten Schätzungen und kumulanten Koeffizienten werden konstruiert; Die Empfindlichkeit kumulanter Verfahren zur Unterscheidung zwischen simulierten Signalen und realen akustischen Signalen wurde getestet.

Praktische Bedeutung der erhaltenen Ergebnisse: Es wird ein Verfahren zur akustischen Signalunterscheidung vorgeschlagen, das zur Verwendung in automatisierten akustischen Signalerkennungssystemen geeignet ist.

Approbation von Dissertationsergebnissen. Die Forschungsergebnisse wurden auf der XIV International Scientific and Technical Conference of Young Scientists „Electronics – 2021“ (Kyiv, 20.-22. April 2021) und auf Seminaren am Department of Acoustic and Multimedia Electronic Systems präsentiert.

Veröffentlichungen. A. Ie. Berezhnyskyi Detection of Noise Signal in the Additive Mixture Based on the Second-Order Cumulant // Electronic and Acoustic

Engineering. - 2021. - Vol. 4, № 2. DOI: <https://doi.org/10.20535/2617-0965.eae.227817>.

Schlüsselwörter: Zufallsprozess, Streuellipse, Wahrscheinlichkeit korrekter Detektion, Kumulante, Kumulantekoeffizient, Kumulanteverfahren, Musiksignal, Nicht-Gauß-Verteilung, akustische Signalerkennung, Bilderkennung, Rauschsignal, nukleare Bewertung.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ.....	12
ВСТУП.....	13
1 РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ	15
1.1 Задача виявлення. Статистичні критерії прийняття рішення.....	15
1.2 Одноступінчастий алгоритм класифікації з накопиченням даних	20
1.3 Непараметричні методи навчання систем розпізнавання.....	24
1.3.1 Метод побудови еталонів.....	25
1.3.2 Правило найближчого сусіда.....	25
1.3.3 Метод роздільних функцій.....	26
1.4 Методи групування даних.....	27
1.4.1 Метод найближчого сусіда	30
1.4.2 Метод найвіддаленішого сусіда	30
Висновки до розділу 1	31
2 СТАТИСТИЧНА ОБРОБКА АКУСТИЧНИХ СИГНАЛІВ.....	33
2.1 Класифікація акустичних сигналів.....	33
2.2 Імовірнісні характеристики сигналів	35
2.2.1 Функція розподілу та щільність імовірностей.....	36
2.2.2 Кумулянти та кумулянтні коефіцієнти	37
2.2.3 Кореляційно-спектральні характеристики	39
2.3 Запис і обробка сигналів.....	40
2.4 Моделі акустичних сигналів	42
2.5 Побудова моделі процесу Бунімовича–Райса	45
2.6 Оцінювання кумулянтів і кумулянтних коефіцієнтів	52
2.6.1 Точкові оцінки.....	52
2.6.2 Оцінки кумулянтів	54
2.6.3 Оцінки кумулянтних коефіцієнтів	57
2.6.4 Оцінювання кумулянтів і кумулянтних коефіцієнтів моделі процесу Бунімовича–Райса	58
Висновки до розділу 2	61

3 КУМУЛЯНТНІ МЕТОДИ ОБРОБКИ АКУСТИЧНИХ СИГНАЛІВ.....	63
3.1 Задачі виявлення та розпізнавання.....	63
3.2 Метод одного кумулянта.....	65
3.2.1 Теоретична складова методу одного кумулянта	65
3.2.2 Вихідні дані для моделювання: сигнали з основними розподілами.....	68
3.2.3 Вихідні дані для моделювання: сигнали – процеси Бунімовича–Райса	71
3.2.4 Перевірка методу одного кумулянта на змодельованих адитивних сумішах.....	75
3.3 Метод двох кумулянтів	85
3.3.1 Теоретична складова методу двох кумулянтів	85
3.3.2 Перевірка методу двох кумулянтів на змодельованих адитивних сумішах.....	87
Висновки до розділу 3	89
4 КУМУЛЯНТНИЙ АНАЛІЗ ЗАПИСІВ МУЗИЧНИХ ІНСТРУМЕНТІВ.....	91
4.1 Постановка експерименту – обладнання та музичні інструменти, вихідні дані для вимірювань.....	91
4.2 Обробка записів. Вимірювання кумулянтів і кумулянтних коефіцієнтів..	94
4.3 Результати експерименту	97
Висновки до розділу 4	99
ВИСНОВКИ.....	100
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	102

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

ЩІ – щільність імовірності

ВВ – випадкова величина

ВП – випадковий процес

ІПВ – імовірність правильного виявлення

ВСТУП

Наразі широко використовуються автоматизовані системи розпізнавання, які ґрунтуються на можливостях штучного інтелекту для вирішення задач діагностики, моніторингу, прогнозування, навчання та керування поведінкою складних систем. Для створення цих систем розпізнавання використовуються методи розпізнавання образів [1, 2]. У цій роботі досліджуються образи, які є акустичними сигналами [3].

Автоматизовані системи розпізнавання образів знаходять своє прикладне застосування у найрізноманітніших областях. Наприклад, у промисловості широко використовуються пасивні системи технічної діагностики [4–7], які дозволяють неперервно контролювати технологічні процеси технічного обладнання, яке знаходиться в процесі експлуатації. У свою чергу в медіа-індустрії активно розвиваються та впроваджуються системи автоматичного розпізнавання аудіо- та візуальних образів для подальшої автоматизованої обробки інформації [8–10].

При розгляді акустичних сигналів в обох випадках переважно розглядаються шумові сигнали. Як інформативні параметри зазвичай використовуються кореляційно-спектральні характеристики, які є вичерпними для гауссівських випадкових процесів. Оскільки шумові сигнали здебільшого мають негауссівський розподіл миттєвих значень [7], для їхнього дослідження використовуються кумулянтні методи, які засновані на кумулянтному аналізі [6, 11]. В якості інформативних характеристик використовуються кумулянти та кумулянтні коефіцієнти вищих порядків шумових сигналів [12–15].

Основи застосування кумулянтних методів закладені в роботах Р.Л. Стратоновича і розвинені в роботах В.І. Тихонова, А.М. Малахова, Ю.П. Кунченка, О.І. Красильнікова, В.С. Берегуна.

Для вдосконалення наявних і створення нових систем розпізнавання акустичних сигналів, необхідно мати в наявності математичні моделі, які відображають фізику виникнення цих сигналів. Однією з перспективних моделей шу-

мових сигналів з негауссівським розподілом миттєвих значень є процеси Бунімовича–Райса [16].

Загалом існує дві задачі розрізнення акустичних сигналів: виявлення корисного сигналу на фоні шумової завади, де досліджуваним сигналом є адитивна суміш завади і сигналу, та розпізнавання окремих акустичних сигналів [13]. Для вирішення наведених задач в цій роботі використовуються методи одного та двох кумулянтів [6].

В розділі 1 описано методи розпізнавання образів, які знаходять своє прикладне застосування в сучасних автоматизованих системах розпізнавання.

В розділі 2 представлено ймовірнісні характеристики акустичних сигналів. Описано процес побудови моделі процесів Бунімовича–Райса. Оскільки на практиці замість теоретичних кумулянтів використовуються їхні оцінки, представлена теоретична складова оцінювання та показана практична складова в застосуванні до реалізацій побудованої моделі.

Розділ 3 присвячений застосуванню кумулянтних методів при дослідженні адитивних сумішей завад з гауссівським розподілом миттєвих значень і сигналів з типовими розподілами та сигналів, які представлені процесами Бунімовича–Райса.

В розділі 4 описано використання кумулянтних методів для дослідження акустичних сигналів типових музичних інструментів – клавішних, духових, перкусії та вокалу. Результати вимірювання кумулянтів та кумулянтних коефіцієнтів музичних сигналів представлені в цій роботі.

1 РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ

1.1 Задача виявлення. Статистичні критерії прийняття рішення

Теорія розпізнавання образів [1–2, 17–18] – це розділ кібернетики, що розвиває основи та методи класифікації й ідентифікації предметів, явищ, процесів, сигналів тощо, які характеризуються кінцевим набором певних властивостей і ознак.

Реалізація методів розпізнавання образів необхідна для автоматизованих систем, які використовують можливості штучного інтелекту та призначені для вирішення задач діагностики, моніторингу, прогнозування, навчання, керування поведінкою складних систем у відповідності до заданих специфікацій [2]. Наразі в наукових дослідженнях широко використовуються такі методи розпізнавання, як кластерний аналіз, виявлення закономірностей в експериментальних даних, прогнозування різноманітних процесів і явищ [17, 18].

Історично теорія розпізнавання образів розвивається у двох напрямках: детерміністичному та статистичному. Детерміністичний підхід базується на математично формалізованих емпіричних і евристичних методах, в основі яких лежить моделювання досліджуваного процесу. Статистичний підхід ґрунтується на фундаментальних результатах математичної статистики, а саме використанні теорії оцінок, послідовного аналізу, стохастичної апроксимації та теорії інформації.

Одним із методів розпізнавання образів є класифікація [1] – віднесення досліджуваного об'єкта, який задається в вигляді сукупності спостережень, до одного зі взаємовиключних класів. Тобто існує однозначне відображення сукупності спостережень – кінцева числова множина $\{X\}$ на множину класів $\{A\} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}, k = 1 \dots K, \{A\} \leftarrow \{X\}$.

При повній апіорній інформації про класи сигналів класифікація називається розрізненням, а при неповній – розпізнаванням. У випадку, коли кількість класів $K = 2$ задача розпізнавання формулюється як задача класичного виявлення [1].

В класичній постановці задачі розпізнавання універсальна множина розбивається на частини – образи. Відображення об'єкта на органи сприйняття системи розпізнавання називається зображенням, а множини таких зображень, які об'єднані спільними властивостями, – образами.

Процес, в результаті якого система поступово отримує здатність відповідати потрібними реакціями на певні сукупності зовнішніх впливів, називається навчанням [17] і є частиною процесу класифікації. Його мета – формування еталонних описів класів, форма яких визначається способом їхнього використання в вирішальних правилах.

Вирішальним правилом називається методика віднесення елемента до певного образу. Для його побудови використовується навчальна вибірка – множина об'єктів, заданих значеннями ознак, належність до певного класу яких відома «вчителю» в повідомляється їм системі розпізнавання. Якість вирішальних правил оцінюється по контрольній вибірці, куди входять об'єкти, задані значеннями ознак, які відомі тільки «вчителю», шляхом пред'явлення цих об'єктів системі розпізнавання.

Для вищезазначених вибірок є дві вимоги: об'єкти контрольної вибірки не мають входити в навчальну, обидві вибірки мають вичерпно представляти генеральну сукупність – гіпотетичну множину всіх можливих об'єктів кожного образу.

Статистичне розпізнавання має три основні етапи: формування ознакового простору, отримання еталонних описів класів і побудова правила прийняття рішення про клас об'єктів [2].

Якщо при попередньому аналізі спостережуваної вибірки є можливість навіть наближено встановити її закон розподілу, тоді апріорна невизначеність відноситься тільки до параметрів цього закону, а метою навчання стає отримання оцінок параметрів розподілу. У цьому випадку методи розпізнавання будуть параметричними.

В загальному випадку відсутні апріорні відомості про закон розподілу [19] спостережуваної вибірки, тоді апріорна невизначеність називається не-

параметричною, а методи розпізнавання непараметричними. Метою навчання стає отримання оцінок умовних ЩІ $\hat{f}_n(\vec{x}|a_j)$. При непараметричному оцінюванні ЩІ використовуються гістограмний метод, метод Парзена, метод розкладу на базисні функції, метод поліномів Смірнова, метод локального оцінювання по k найближчих сусідах та спеціальні методи нелінійного оцінювання [1, 17].

Для розпізнавання об'єкти представляються в вигляді сукупності (вибір-ки) спостережень [2], яка записується у вигляді матриці

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Стовпці $\vec{x}_i = (x_{1i}, \dots, x_{pi})^T, i=1 \dots n$ матриці X є p -вимірними векторами спостережуваних значень ознак $X_1, X_2, \dots, X_n$, які є безрозмірними величинами.

Сукупність ознак має вичерпно відображати найважливіші для класифікації властивості об'єкта. Від розмірності p ознакового простору залежать обчислювальна складність процедур навчання та прийняття рішень, достовірність класифікації, витрати на вимірювання характеристик об'єктів.

Початковий набір ознак формується з кількості доступних для вимірювання характеристик об'єкта $Y_1, \dots, Y_g$, які відображають найсуттєвіші для класифікації властивості. Потім формується новий набір $X_1, \dots, X_p, p < g$. Формування нових ознак в умовах повного апріорного знання базується на максимізації деякої функції $J(Y_1, \dots, Y_g)$, яка називається критерієм, коли вона визначає деяку відстань між класами в однаковому просторі з координатами $Y_1, \dots, Y_g$, або її мінімізації, коли вона визначає діаметр чи об'єм області, що займається класом.

В теорії статистичних рішень усі види вирішальних правил для $K \geq 2$ класів засновані на формуванні відношення правдоподібності L і його порів-

нянні з певним порогом Γ , значення якого визначається обраним критерієм якості [17]

$$L = \frac{p_n(x_1, \dots, x_n | a_2)}{p_n(x_1, \dots, x_n | a_1)} \geq \Gamma, \quad (1.2)$$

де $p_n(x_1, \dots, x_n | a_j)$ – умовна n -вимірна ЩІ вибірових значень $x_1, \dots, x_n$ за умови їхньої належності до класу a_j . На практиці через невідомість цих ЩІ використовуються їхні оцінки $\hat{p}_n(x_1, \dots, x_n | a_j)$, які отримуються в процесі навчання. Тобто в вирішальному правилі з порогом Γ порівнюється оцінка відношення правдоподібності $\hat{L}$.

Вирішальне правило при використанні байєсового критерію [17] при $K = 2$ має вигляд

$$L = \frac{p(x_1, \dots, x_n | a_2)}{p(x_1, \dots, x_n | a_1)} \geq \frac{\Pi_{12} - \Pi_{11}}{\Pi_{21} - \Pi_{22}} \frac{P(a_1)}{P(a_2)}, \quad (1.3)$$

де $\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix}$ – матриця втрат, а елемент Π_{kl} кількісно відображає втрати від прийнятого рішення на користь класу a_k , коли насправді вибірка належить до класу a_l ; $P(a_j)$ – апіорні ймовірності класів.

Байєсів критерій мінімізує середній ризик

$$R = \sum_{k=1}^K P(a_k) \sum_{l=1}^K \Pi_{kl} P_{kl}, \quad (1.4)$$

де P_{kl} – ймовірність прийняття хибного рішення про належність вибірки до класу a_k , коли насправді вибірка належить до класу a_l .

Ймовірність прийняття хибних рішень для $K \geq 2$ класів визначається так. Помилка 1-го роду – віднесення вибірки не до того класу, до якого вона належить. Тобто ймовірність α_k віднесення вибірки з n контрольних спостережень до будь-якого з класів $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_K$, відмінного від a_k , до якого

справді належить вибірка. Помилка 2-го роду – віднесення вибірки до певного класу a_k , до якого вона не належить, з імовірністю β_k [1, 20].

Якщо матриця втрат невідома або важко задається чисельно, використовуються критерій максимуму апостеріорної ймовірності, згідно з яким спостереження x_k належить класу a_j , чия апостеріорна ймовірність

$$P(a_j | x_n) = \frac{P(a_j) p(x_n | a_j)}{\sum_{k=1}^K P(a_k) p(x_n | a_k)} \quad (1.5)$$

перевищує апостеріорні ймовірності інших класів:

$$a = \begin{cases} a_2, \text{ якщо } L(x_n) \geq P(a_1) / P(a_2); \\ a_1, \text{ якщо } L(x_n) < P(a_1) / P(a_2). \end{cases} \quad (1.6)$$

При відсутності апріорної інформації про ймовірнісні стани та втрати використовуються критерії Неймана–Пірсона, максимальної правдоподібності тощо.

Для $K = 2$ вирішальне правило за критерієм Неймана–Пірсона [18] має вигляд

$$a = \begin{cases} a_2, \text{ якщо } L(x_n) \geq \Gamma; \\ a_1, \text{ якщо } L(x_n) < \Gamma, \end{cases} \quad (1.7)$$

причому поріг визначається так, щоб імовірність хибного рішення P_{12} була не більше заданого значення α :

$$P_{12} = \int_{\Gamma}^{\infty} p(L | a_1) dL \leq \alpha. \quad (1.8)$$

Цей критерій варто використовувати, якщо одну з імовірностей помилок можна обрати як основну і задати необхідним значенням. Проте критерій несиметричний відносно імовірностей помилок P_{12} і P_{21} , а при класифікації важливо забезпечити мінімальні або хоча б обмежені заданими межами обидві ймовірності хибних рішень.

Критерій максимальної правдоподібності

$$a = \begin{cases} a_2, \text{ якщо } L(x_n) \geq 1; \\ a_1, \text{ якщо } L(x_n) < 1 \end{cases} \quad (1.9)$$

не вимагає знання апріорних імовірностей класів і функцій втрат, дозволяє оцінювати достовірність рішень, узагальнюється в випадку багатьох класів та простий в обчисленнях [18].

1.2 Одноступінчастий алгоритм класифікації з накопиченням даних

Для розпізнавальних систем найбільше використовується такий варіант постановки задачі оптимізації характеристик: мінімізувати сумарну кількість спостережень, яка визначається об'ємами навчальних та контрольних вибірок і розмірністю ознакового простору, необхідну для забезпечення потрібного рівня достовірності розпізнавання при заданій найменшій можливій відстані між класами.

Достовірність рішення $a = a_k$ – це ймовірність прийняття правильного рішення P_{kk} . При кількості класів $K = 2$, враховуючи, що $\alpha = P_{12} = 1 - P_{11}$ і $\beta = P_{21} = 1 - P_{22}$, для достовірностей рішень a_1 і a_2 отримуються вирази:

$$P_{11} = 1 - \alpha; P_{22} = 1 - \beta. \quad (1.10)$$

На достовірності P_{11} і P_{22} накладаються обмеження:

$$P_{11} + P_{22} > 1, \quad (1.11)$$

також бажано, щоб P_{11} і P_{22} були не менше 0,5.

Одним з основних факторів впливу на достовірність класифікації вважається відстань між класами в ознаковому просторі $X = \{x_{ij}\} : (n \times p)$, $i = 1 \dots n, j = 1 \dots p$, яка пропорційна достовірності розпізнавання. Відомо, що максимізація відстані між класами, наприклад, шляхом лінійного перетворення $\mathbf{A}$ вихідного простору ознак $\mathbf{Y}$ у новий простір $\mathbf{X}$: $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}$, збільшує «роздільну силу ознак», яка забезпечить необхідну достовірність розрізнення.

Формування ознакового простору відбувається у два етапи: формування вихідного ознакового простору та мінімізація розмірності p цього простору.

Можливість збільшення достовірності розпізнавання шляхом збільшення кількості спостережень n дозволяє сформулювати ознаковий простір без застосування лінійного перетворення простору вихідних ознак $Y_1, \dots, Y_g$. На практиці корисна задача оптимізації сумарної кількості спостережень, необхідної для забезпечення для потрібного гарантованого рівня достовірності при заданій найменшій відстані між класами, яка представляється реальною точністю вимірювання цієї відстані в системах розпізнавання. У випадку, якщо час на прийняття рішень обмежений, єдиним виходом для збільшення достовірності може стати збільшення розмірності ознакового простору [17].

Розглянемо задачу визначення належності вибірки, що складається з n незалежних нормально розподілених з однаковою дисперсією [2] спостережень, до одного з двох класів $A = \{a_1, a_2\}$.

Вимірювані значення ознаки об'єкта x є реалізацією випадкової величини з ЩІ

$$p(x, m, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (1.12)$$

Для побудови вирішального правила [1, 19, 20] (алгоритму класифікації об'єкта) за критерієм максимальної правдоподібності необхідно визначити точки перетину графіків умовних ЩІ $p(x|a_1) = p(x, m_1, \sigma_1)$ і $p(x|a_2) = p(x, m_2, \sigma_2)$, тобто значення ознаки x , для яких відношення правдоподібності дорівнює одиниці:

$$L(x) = \frac{p(x, m_1, \sigma_1)}{p(x, m_2, \sigma_2)} = 1. \quad (1.13)$$

При спільній обробці сукупності значень вимірюваної ознаки $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ за припущення незалежності елементів x_i ($i=1, 2, \dots, n$) вибірки $\vec{x}$ умовні по класу a_k функції правдоподібності (багатовимірні ЩІ) матимуть вигляд

$$p(x|a_k) = p(\vec{x}, m_k, \sigma_k) = \prod_{i=1}^n p(x_i, m_k, \sigma_k). \quad (1.14)$$

Логарифм відношення правдоподібності при рівних дисперсіях σ^2 функцій правдоподібності при $m_2 > m_1$ має вигляд

$$\ln \left[\frac{p(\bar{x}, m_1, \sigma)}{p(\bar{x}, m_2, \sigma)} \right] = \frac{m_2 - m_1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n(m_2^2 - m_1^2)}{2\sigma^2}.$$

При апіорно відомих математичних сподіваннях m_1, m_2 задача розпізнавання формулюється та вирішується за допомогою теорії перевірки статистичних гіпотез [20] як перевірка простої гіпотези H_1 : середнє значення нормально розподілених спостережень дорівнює m_1 . Альтернативна гіпотеза H_2 – середнє значення дорівнює m_2 при відомій однаковій дисперсії σ . Вирішальна процедура полягає в порівнянні логарифму відношення правдоподібності з порогом $\ln(\Gamma)$, що залежить від обраного критерію якості:

$$\ln L(\bar{x}) \geq \ln(\Gamma), a_2 > a_1. \quad (1.15)$$

При виконанні цієї нерівності приймається рішення H_2 , при невиконанні – H_1 . Якщо рішення приймається за критерієм максимальної правдоподібності, то $\ln(\Gamma) = \ln(1) = 0$.

Оскільки логарифм – монотонне перетворення, то достатньою статистикою для прийняття рішень буде середнє значення вибірки

$$y_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i, \quad (1.16)$$

і для отримання вирішальної процедури використовують правило

$$\gamma = \begin{cases} y_n > x_{gr} \Rightarrow H_2 : A = a_2; \\ y_n \leq x_{gr} \Rightarrow H_1 : A = a_1, \end{cases} \quad (1.17)$$

де поріг прийняття рішення $x_{gr} = \ln(\Gamma)$ визначається як

$$\ln(\Gamma) = x_{gr} = \frac{m_1 + m_2}{2}. \quad (1.18)$$

Величина y_n за умовою задачі є сумою незалежних нормально розподілених випадкових величин та має нормальний розподіл із середнім

$$M\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \mid a_k\right\} = m_k, k = 1, 2 \quad (1.19)$$

і дисперсією

$$D\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \mid a_k\right\} = \frac{\sigma_k^2}{n}, k = 1, 2. \quad (1.20)$$

Тоді достовірність розпізнавання при використанні вирішального правила визначається через табульований інтеграл імовірності $F(z)$:

$$\alpha = \beta = 1 - F\left[\frac{(m_2 - m_1)\sqrt{n}}{2\sigma} + \frac{\sigma \ln(\Gamma)}{(m_2 - m_1)\sqrt{n}}\right], m_2 > m_1. \quad (1.21)$$

При послідовному аналізі Вальда на кожному етапі простір вибірок спостережень розділяється на три області: допустиму G_1 , критичну G_2 та проміжкову $G_{пр}$. При потраплянні вибіркового значення в проміжкову область, то робляться наступні спостереження доти, поки при деякому значенні n_1 розміру вибірки вибіркоче значення не потрапить в одну з інших областей. Після цього приймається одна з гіпотез: при потраплянні в область G_1 спостерігається клас a_1 , а в область G_2 – клас a_2 .

Критерієм якості послідовного правила вибору рішення є мінімум середнього значення розміру вибірки, що необхідна для прийняття рішення, при заданих значеннях імовірностей хибної тривоги α і пропуску сигналу β .

А. Вальдом показано, що серед усіх правил вибору рішення, для яких умовні ймовірності хибної тривоги та пропуску сигналу не перебільшують α і β , послідовне правило прийняття рішень, що базується на порівнянні відношення правдоподібності або його логарифму з двома порогами – нижнім Γ_1 і верхнім Γ_2 – призводить до найменших середніх значень розміру вибірок $M\{n \mid a_1\}$ при виконанні гіпотези H_1 і $M\{n \mid a_2\}$ при H_2 .

Процедуру послідовного аналізу можна записати таким виразом: при n -му спостереженні приймається гіпотеза H_1 , якщо

$$\Gamma_1 < \ln L(x_1, x_2, \dots, x_k) < \Gamma_2, k = 1, 2, \dots, n-1; \ln L(x_1, x_2, \dots, x_k) \leq \Gamma_1, \quad (1.22)$$

гіпотеза H_2 , якщо

$$\Gamma_1 < \ln L(x_1, x_2, \dots, x_k) < \Gamma_2, k = 1, 2, \dots, n-1; \ln L(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq \Gamma_2. \quad (1.23)$$

Послідовне правило прийняття рішення, на відміну від байєсового, передбачає порівняння логарифму відношення правдоподібності з порогами Γ_1 і Γ_2 , які не залежать від апіорних імовірностей наявності або відсутності сигналу та втрат. Ці пороги наближено виражаються через задані значення ймовірностей хибної тривоги α і пропуску сигналу β :

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \ln \left(\frac{\beta}{1-\alpha} \right), \\ \Gamma_2 &= \ln \left(\frac{1-\beta}{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Оскільки при послідовному аналізі розмір вибірки є випадковою величиною, то навіть при порівняно малих середніх значеннях тривалості процедури можливі випадки недопустимо великих розмірів вибірки. Типовим прикладом компромісного рішення для розподілення тривалості процедури є усічений послідовний аналіз, при якому встановлюється максимальне значення об'єму вибірки $n_{\max}$, при досягненні якого послідовна процедура припиняється та відповідне відношення правдоподібності порівнюється не з двома порогами, а тільки з одним Γ_{yc} , в результаті чого обов'язково приймається одне з рішень.

1.3 Непараметричні методи навчання систем розпізнавання

Для використання непараметричних методів розпізнавання [2] необхідно, щоб система розпізнавання набула певних реакцій на групи зовнішніх ідентичних сигналів шляхом багаторазового впливу на систему зовнішнього корегування. Цей процес називається навчанням. Спосіб генерації корегування визначає алгоритм навчання. Далі описані методи навчання з «учителем».

1.3.1 Метод побудови еталонів

Еталон – це усереднений по навчальній вибірці абстрактний об’єкт. Абстрактним його називають тому, що він може не співпадати не тільки з жодним об’єктом навчальної вибірки, а й генеральної сукупності [18].

Для кожного класу за навчальною вибіркою будується еталон, який має значення ознак:

$$\bar{x}^0 = \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\}, x_i^0 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_{ik}, \quad (1.25)$$

де K – кількість об’єктів образу в навчальній вибірці.

Розпізнавання відбувається таким чином. На вхід системи розпізнавання надходить об’єкт $\bar{x}^*$, належність якого до певного образу не відома. Вимірюються відстані від цього об’єкта до еталонів усіх образів, і система відносить $\bar{x}^*$ до того образу, відстань до еталону якого мінімальна.

1.3.2 Правило найближчого сусіда

Нехай $X^n = \{\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \dots, \bar{x}_n^*\}$ буде множиною n позначених вибірових значень і $\bar{x}_i^* \in X^n$ буде точкою, найближчою до $\bar{x}$. Тоді правило найближчого сусіда для класифікації $\bar{x}$ формулюється як присвоювання $\bar{x}$ мітки, яка асоціюється з $\bar{x}_i^*$.

При використанні правила найближчого сусіда [1] з конкретною множиною даних результуючий рівень помилки класифікації буде залежати від випадкових характеристик вибірки. Зокрема, якщо для класифікації $\bar{x}$ використовуються різні множини вибірових даних, то для найближчого сусіда вектора $\bar{x}$ будуть отримані різні вектори $\bar{x}_i^*$. До того ж при необмеженому об’ємі вибірки рівень помилки по правилу найближчого сусіда ніколи не буде більше байєсового більше ніж у два рази.

1.3.3 Метод роздільних функцій

Роздільна функція [1] представляється лінійною комбінацією компонент $\vec{x}$ і записується у вигляді

$$g(\vec{x}) = \vec{w}^T \cdot \vec{x} + w_0, \quad (1.26)$$

де $\vec{w}$ – ваговий вектор, w_0 – поріг.

В основу лінійного класифікатора для двох класів покладено таке вирішальне правило: якщо $g(\vec{x}_i^*) > 0$, то спостерігається клас a_1 , а якщо $g(\vec{x}_i^*) < 0$ – клас a_2 .

Рівняння $g(\vec{x}) = 0$ визначає поверхню рішень, які відділяють точки, що відповідають рішенню $a = a_1$, від точок, які відповідають рішенню $a = a_2$. Коли функція $g(\vec{x})$ лінійна, поверхня рішень є гіперплощиною, яка розділяє ознаковий простір на два півпростори: область рішень G_1 для a_1 і G_2 для a_2 .

Якщо $K > 2$, то необхідно декілька лінійних функцій, а границя вважається кусково-лінійною. Для наочності вважатимемо $K = 2$. Якщо на множині об'єктів виконуються умови

$$g(\vec{x}) > 0, \text{ якщо } \vec{x}^0 \text{ – реалізація першого образу } (a_1); \quad (1.27)$$

$$g(\vec{x}) < 0, \text{ якщо } \vec{x}^0 \text{ – реалізація першого образу } (a_2), \quad (1.28)$$

то образи a_1 і a_2 називаються лінійно роздільними.

Складну границю розділення для лінійно нероздільних класів апроксимують функціями виду

$$g_i(\vec{x}) = \sum_{j=0}^n w_{ij} \cdot x_j, \quad (1.29)$$

де $x_0 \equiv 0$ – фіктивна змінна, w_{ij} – елемент матриці вагових коефіцієнтів $\mathbf{W} : (p \times n + 1)$.

Наприклад, для двовимірного випадку $\vec{x} = (x_1, x_2)$ границя описується системою рівнянь

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} w_{10} + w_{11}x_1 + w_{12}x_2 & \text{для } \forall x_1 \in [x_1^0, x_1^1]; \\ w_{20} + w_{21}x_1 + w_{22}x_2 & \text{для } \forall x_1 \in (x_1^1, x_1^2]; \\ w_{30} + w_{31}x_1 + w_{32}x_2 & \text{для } \forall x_1 \in (x_1^2, x_1^3]. \end{cases} \quad (1.30)$$

Вирішальне правило виглядає так: якщо $g(x_1^*, x_2^*) > 0$, то спостерігається клас a_1 , якщо навпаки – клас a_2 .

При побудові границі між класами можна керуватись правилом найближчого сусіда. Якщо відомо, що точки $\xi_1 = (x_1, y_1) \in a_1$, $\xi_2 = (x_2, y_2) \in a_2$, то $g(x, y)$ – це нормаль, проведена до відрізка, який з'єднує точки ξ_1 і ξ_2 , яка проходить через середину цього відрізка $M(x_0, y_0)$ з координатами

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (1.31)$$

1.4 Методи групування даних

Найбільш проблемна задача побудови вирішального правила в умовах повної апостеріорної невизначеності [18]: коли існує множина вибірових значень без зазначення їх класифікації, тобто не відомі ні кількість об'єктів, ні що це за об'єкти. Тому перший крок, який необхідно зробити при навчанні без «учителя», – розділити дані на підгрупи (кластери). В одну групу об'єднуються дані зі схожими ознаками. Далі постають дві проблеми: як виміряти подібність між спостереженнями (відліками) та як оцінити розподіл вибіркової множини на групи. Найчастіше як міру правдоподібності між двома відліками використовують відстань між ними. Відстань між відліками в одній групі (одному класі) буде суттєво меншою ніж з різних груп.

Нехай два відліки $\vec{x}$ і $\vec{x}'$ належать одній групі, якщо евклідова відстань між ними

$$r = \sqrt{(\vec{x} - \vec{x}')^T (\vec{x} - \vec{x}')} = \|\vec{x} - \vec{x}'\| \quad (1.32)$$

менша ніж порогова відстань d_0 . Значення d_0 має бути більшим, ніж типові внутрішньогрупові відстані, і меншим, ніж типові міжгрупові відстані.

У випадку двовимірного ознакового простору $\vec{x}^T = (x_1, x_2)$, $\vec{x}'^T = (x'_1, x'_2)$ формула відстані має вигляд

$$r = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}. \quad (1.33)$$

Якість групування будь-якої частини даних визначається за допомогою функції критерію. Найпростіша та найбільш вживана функція критерію – сума квадратів помилок

$$J_e = \sum_{i=1}^k \sum_{\vec{x} \in X_i} \|\vec{x} - \vec{m}_i\|^2, \quad (1.34)$$

де $\vec{m}_i$ – середній вектор i -ї групи, яка складається з n_i відліків:

$$\vec{m}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{\vec{x} \in X_i} \vec{x}. \quad (1.35)$$

Наведена формула інтерпретується так: для даної X_i групи середній вектор $\vec{m}_i$ якнайкраще представляє відліки, так як він мінімізує суму квадратів довжин векторів «помилки» – відхилень $\vec{x}$ від $\vec{m}_i$. Критерій J_e вимірює загальну квадратичну помилку, яка з'являється при представленні n відліків $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ центрами k груп $\vec{m}_1, \dots, \vec{m}_k$. Розділення, яке мінімізує J_e , вважається оптимальним.

Функції критерію отримують з матриць розсіювання:

- 1) Матриця розсіювання для i -ї групи

$$\mathbf{S}_i = \sum_{\vec{x} \in X_i} (\vec{x} - \vec{m}_i)^T (\vec{x} - \vec{m}_i); \quad (1.36)$$

- 2) Матриця розсіювання всередині групи

$$\mathbf{S}_W = \sum_{i=1}^k \mathbf{S}_i; \quad (1.37)$$

- 3) Матриця розсіювання між групами

$$\mathbf{S}_B = \sum_{i=1}^k n_i (\vec{m}_i - \vec{m})^T (\vec{m}_i - \vec{m}), \quad (1.38)$$

де $\vec{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \vec{m}_i$ – спільний середній вектор.

Загальна матриця розсіювання має вигляд

$$\mathbf{S}_T = \mathbf{S}_W + \mathbf{S}_B. \quad (1.39)$$

Коли знайдена функція критерію, групування стає задачею дискретної (k) оптимізації [2]: необхідно знайти такі розділення вибіркової множини, які приводять до екстремуму функції критерію. Для вирішення цієї задачі найчастіше використовується ітераційна оптимізація: знаходиться деяке початкове розділення і далі «пересуваються» відліки з одної групи в іншу, якщо це покращує значення функції критерію. Підхід гарантує локальний, але не глобальний екстремум, а різні початкові точки приводять до різних рішень, при цьому не відомо, чи знайдено найкраще рішення.

Розглянемо послідовність розділень n відліків на k груп. Спочатку відбувається розділення на n груп, при чому кожна група містить по одному відліку. Далі розділення на $(n-1)$ групу, на $(n-2)$ тощо. Якщо два відліки утворюють одну групу на рівні k і залишаються разом на вищих рівнях, то така послідовність називається ієрархічним групуванням. Агломератові (об'єднувальні) процедури починають з n одиночних груп і створюють послідовність груп, які поступово об'єднуються. Розділювальні процедури починаються з одної групи, яка містить усі n відліків, і створюють послідовність груп, які поступово розділяються.

Основні кроки базового агломератового групування:

- 1) Нехай поточна кількість груп $\hat{k} = n$, $X_i = \{\bar{x}_i\}$, $i = 1, \dots, n$;
- 2) ЦИКЛ: якщо $\hat{k} \leq k$ (задане число груп), то СТОП;
- 3) Знайти найближчу пару груп X_i та X_j ;
- 4) Об'єднати X_i та X_j , видалити X_j , зменшити $\hat{k}$ на 1;

5) Перейти до кроку 2.

Для виміру відстані між групами використовують такі критерії:

$$\begin{aligned} d_{\min}(X_i, X_j) &= \min_{\substack{\bar{x} \in X_i, \\ \bar{x}' \in X_j}} \|\bar{x} - \bar{x}'\|; \\ d_{\max}(X_i, X_j) &= \max_{\substack{\bar{x} \in X_i, \\ \bar{x}' \in X_j}} \|\bar{x} - \bar{x}'\|; \\ d_{\text{mean}}(X_i, X_j) &= \|\bar{x} - \bar{x}'\|. \end{aligned} \quad (1.40)$$

1.4.1 Метод найближчого сусіда

Розглядається випадок, коли використовується $d_{\min}$ [1]. Нехай точки даних розглядаються як вершини графу, при чому ребра графу утворюють шлях між вершинами в одній підмножині X . Коли для вимірювання відстані між підмножинами використовується $d_{\min}$, найближчі сусіди визначають найближчі підмножини. Злиття X_i та X_j відповідає додаванню ребра між двома найближчими вершинами X_i та X_j . Оскільки ребра, які з'єднують точки підмножини, завжди проходять між різними групами, то результуючий граф ніколи не буде мати замкнених контурів або ланцюгів, тобто ця процедура генерує дерево. Якщо її продовжувати доти, поки всі точки підмножин не будуть з'єднані, то в результаті отримується кістякове дерево (остов). При чому сума довжин ребер результуючого дерева не перевищуватиме її для будь-якого іншого дерева для даної множини вибіркового даних. Таким чином, при використанні $d_{\min}$ як міру відстані, агломератова процедура групування перетворюється в алгоритм генерування мінімального кістякового дерева.

Мінімальне кістякове дерево отримується при додаванні найкоротшого ребра між двома іншими ребрами або двома найближчими парами точок.

1.4.2 Метод найвіддаленішого сусіда

Коли використовується $d_{\max}$, застосування процедури розглядається як отримання графу, в якому ребра поєднують усі вершини в групу [18]. Кожна

група утворює повний підграф. Відстань між двома групами визначається найвіддаленішими вершинами в них. Коли дві найближчі групи об'єднуються, грав змінюється шляхом додавання ребер між кожною парою вершин у цих двох групах.

Якщо діаметр групи визначається як найбільша відстань між точками в групі, то відстань між двома групами – діаметр їх об'єднання. Якщо діаметр розділення визначається як найбільший діаметр для групи в розділенні, то кожна ітерація збільшує діаметр розділення мінімально. Це є перевагою у випадку, коли істинні групи компактні та приблизно однакові за розміром.

Висновки до розділу 1

У першому розділі цієї роботи було опрацьовано наукові джерела, які детально розкривають сутність теорії розпізнавання образів. Методи розпізнавання образів застосовуються в автоматизованих системах для вирішення задач діагностики, моніторингу, прогнозування та ін.

Статистичне розпізнавання вимагає сформувати ознаковий простір, отримати еталонні описи класів і побудувати правила прийняття рішення про клас об'єктів. Було розглянуто постановку задачі виявлення та статистичні критерії прийняття рішення за якими обирається поріг для створення вирішального правила.

Також розглянуто методи навчання систем розпізнавання, а саме непараметричні: метод побудови еталонів, правило найближчого сусіда та метод роздільних функцій.

Представлені методи групування даних – об'єднання даних зі схожими ознаками. Як міри правдоподібності між двома відліками використовується відстань між ними. Найчастіше використовуються методи найближчого сусіда та найвіддаленішого сусіда.

Слід зазначити, що представлені методи розпізнавання образів достатньо складні в реалізації та практичному застосуванні. Враховуючи те, що в дослідженні розглядаються здебільшого сигнали з негауссівським розподілом миттє-

вих значень, пропонується використання більш простих і зручних у реалізації кумулянтних методів. Ці методи ґрунтуються на перевірці гіпотез щодо значень кумулянтів або кумулянтних коефіцієнтів.

2 СТАТИСТИЧНА ОБРОБКА АКУСТИЧНИХ СИГНАЛІВ

2.1 Класифікація акустичних сигналів

В загальному випадку сигнал – об’єкт часу та простору. Він пов’язаний із фізичним носієм. В часовій та/або просторовій зміні його параметрів міститься інформація. Сигнал можна представити залежністю $f(x, y, z, t)$, де x, y, z – координати простору, t – змінна часу. Сигнали різні за своєю природою та часто важко піддаються класифікації. Автори роботи [3] для вирішення цієї задачі пропонують складання альтернативних пар, які певною мірою вирішують потребу систематизації.

Електричні та неелектричні сигнали. Це розрізнення є важливим, оскільки наразі сигнали обробляються переважно в електричній формі (наприклад, за допомогою комп’ютера). З цього випливає, що неелектричні сигнали спочатку мають бути перетворені в електричні сигнали відповідними перетворювачами (наприклад, для перетворення акустичного сигналу в електричний використовуються мікрофони, п’єзокерамічні перетворювачі тощо).

Неперервні та перервні сигнали. В загальному випадку, як незалежна змінна (час або місце, як область визначення), так і залежна змінна (амплітуда сигналу, як область значень) можуть бути неперервними та перервними. Якщо область визначення неперервна, то мова йде про неперервні в часі або просторі сигнали, якщо область визначення перервна (дискретна), то сигнали є дискретними в часі або просторі. Прикладом неперервного в часі сигналу є вимовлене слово.

Періодичні та неперіодичні сигнали. В періодичних сигналах основний період повторюється нескінченно, типовий приклад – функція синус $f(t) = \sin(\omega t)$, де в аргументі знаходиться добуток часу t та кругової частоти ω . Прикладом неперіодичного сигналу є згасаюча функція синус $f(t) = e^{-t} \sin(\omega t)$.

Гармонічні та негармонічні сигнали. До гармонічних сигналів належать всі синусоїдальні сигнали, що характеризуються частотою, амплітудою, періодом і фазою. До негармонічних сигналів у першу чергу належать сигнали прямокутної форми. Для їхнього опису необхідні інші параметри.

Енергетичні сигнали та сигнали потужності. Розглянемо на прикладі дискретних у часі сигналів f_n . Енергія E для дискретного сигналу в загальному випадку визначається як сума квадратів модулів його відліків f_n :

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2. \quad (2.1)$$

Якщо сигнал f_n згасає, то його енергія скінченна, а сигнал називається енергетичним. Якщо сигнал нескінченний, то його енергія дорівнює нескінченності. В цьому випадку енергія обмежується інтервалом часу. Ця величина відповідає потужності

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |f_n|^2. \quad (2.2)$$

Сигнали з кінцевою потужністю називаються сигналами потужності. До них належать періодичні сигнали, а також гармонічні коливання.

Стаціонарні та нестаціонарні сигнали. Стаціонарні сигнали – це сигнали, статистичні властивості яких не залежать від часу. Якщо сигнали вважаються стаціонарними, то в більшості випадків їхня обробка значно спрощується. Багато методів обробки сигналів передбачають стаціонарність сигналів, яка ділиться на сильну та слабку. При сильній стаціонарності функція розподілу не залежить від часу, а при слабкій стаціонарності – лише математичне сподівання та дисперсія (при необхідності коваріація).

Корисні сигнали та завади. Корисний сигнал містить інформацію, яка нас цікавить, а завада – небажана величина, яка ускладнює розпізнавання параметрів, які містять інформацію. Типова завада – шум. Він може по-різному впливати на корисний сигнал. Переважно існують адитивний та мультиплікативний впливи.

Стохастичні та нестохастичні сигнали. Стохастичний (випадковий) сигнал у будь-який момент часу є випадковою величиною, яка приймає конкретне значення з деякою ймовірністю. Випадковість підлягає закономірності, яка описується теорією ймовірностей. Нестохастичні (детерміновані) сигнали описуються функціями. Миттєві значення таких сигналів відомі в будь-який момент часу, тобто передбачувані. Зважаючи на ці міркування, можна зробити висновок, що тільки з непередбачуваних сигналів може бути вилучено інформацію.

2.2 Ймовірнісні характеристики сигналів

В загальному випадку сигнал представляється [21, 22] функцією $\xi(t)$, яка називається випадковою, якщо при кожному значенні аргументу t вона є ВВ. Якщо параметром t є поточний час, то випадкова функція $\xi(t)$ називається ВП. Якщо ВВ визначається множиною її можливих значень і розподілом ймовірностей на цій множині, то ВП характеризується множиною функцій часу

$$\xi(t) = \{\xi_k(t), t \in T\} \quad (2.3)$$

і ймовірнісною мірою, заданою на множині функцій (2.3). Кожна окрема функція часу $\xi_k(t)$ називається реалізацією ВП $\xi(t)$.

Множина T значень параметра t називається областю визначення ВП $\xi(t)$, а множина X , якій належать можливі значення $\xi(t)$, – простором значень процесу. Узагальненням випадкового процесу є випадкове поле $\xi(x, y, z, t, \dots)$. Наприклад, випадкове поле може представляти зміну стану об'єкта в залежності не тільки від часу, а й від його розташування у просторі.

Розрізняють два класи випадкових процесів: з дискретним часом (випадкові послідовності), коли область визначення T ВП є кінцевою або зліченною множиною моментів часу, та неперервним часом, коли область визначення континуум. Випадкова послідовність називається дискретною у випадку, коли множина X кінцева або зліченна, та неперервною, коли множина X – конти-

нуум. Часто використовується тимчасова дискретизація ВП з неперервним часом, тоді такий процес апроксимується випадковою послідовністю.

Нехай задано довільне число n моментів часу $(t_1, t_2, \dots, t_n) = t \in T^{(n)}$. Сукупність значень ВП у визначені моменти часу $\xi(t_i)$, $i = \overline{1, n}$ утворює систему ВВ (векторну ВВ)

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad \xi_i = \xi(t_i) \quad (2.4)$$

зі значеннями в n -вимірному евклідовому просторі $\xi \in X^{(n)}$. Тоді ймовірнісними характеристиками випадкових послідовностей і ВП з неперервним часом (при тимчасовій дискретизації) є функції спільного розподілу цих ВВ.

2.2.1 Функція розподілу та щільність імовірностей

Якщо зафіксувати $n = 1, 2, \dots$ моменти часу, отримується послідовність функцій розподілу ВП $\xi(t)$:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, t_1) &= P\{\xi(t_1) \leq x_1\}; \\ F_2(x_1, x_2, t_1, t_2) &= P\{(\xi(t_1) \leq x_1) \cap (\xi(t_2) \leq x_2)\}; \\ &\vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) &= P\left\{\bigcap_{k=1}^n \xi(t_k) \leq x_k\right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Скорочений варіант запису

$$F_n(x, t) = P\{\xi(t) \leq x\}, \quad (2.6)$$

де розмірність вектору x визначає розмірність функції, а вектор t є вектором параметрів [19].

До ймовірнісних характеристик ВП належить також ЩІ, яка визначається як похідна від функції розподілу:

$$p_n(x, t) = \frac{d^n F_n(x, t)}{dx}. \quad (2.7)$$

2.2.2 Кумулянти та кумулянтні коефіцієнти

Після застосування перетворення Фур'є до щільності імовірності $p_{\xi}(x)$ отримуємо характеристичну функцію [21]

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) e^{iux} dx. \quad (2.8)$$

Наступним кроком проводиться розклад логарифму характеристичної функції в ряд Маклорена

$$\ln f(u) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\kappa_s}{s!} (iu)^s. \quad (2.9)$$

Кумулянти – це коефіцієнти розкладу логарифму характеристичної функції випадкової величини в ряд Маклорена в околі нуля [11].

Вираз для знаходження кумулянтів порядку s має вигляд

$$\kappa_s = i^{-s} \left(\frac{d^s \ln f(u)}{du^s} \right)_{u=0}. \quad (2.10)$$

Кумулянти мають зв'язок з початковими та центральними моментами. Відповідні формули наведено в роботі [23]. Зв'язок «кумулянти – центральні моменти» має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_1 = m; \\ \kappa_2 = \mu_2; \\ \kappa_3 = \mu_3; \\ \kappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2; \\ \kappa_5 = \mu_5 - 10\mu_3\mu_2; \\ \kappa_6 = \mu_6 - 15\mu_4\mu_2 - 10\mu_3^2 + 30\mu_2^3; \\ \kappa_7 = \mu_7 - 21\mu_5\mu_2 - 35\mu_4\mu_3 + 210\mu_3\mu_2^2; \\ \kappa_8 = \mu_8 - 28\mu_6\mu_2 - 56\mu_5\mu_3 - 35\mu_4^2 + 420\mu_4\mu_2^2 + 560\mu_3^2\mu_2 - 630\mu_2^4, \end{array} \right. \quad (2.11)$$

де $\kappa_1 = m$ – математичне сподівання, а $\kappa_2 = \mu_2 = \sigma^2 = D$ – дисперсія.

Вирази зв'язку «центральні моменти – кумулянти» мають вигляд:

$$\begin{cases} \mu_2 = \kappa_2; \\ \mu_3 = \kappa_3; \\ \mu_4 = \kappa_4 + 3\kappa_2^2; \\ \mu_5 = \kappa_5 + 10\kappa_3\kappa_2; \\ \mu_6 = \kappa_6 + 15\kappa_4\kappa_2 + 10\kappa_3^2 + 15\kappa_2^3; \\ \mu_7 = \kappa_7 + 21\kappa_5\kappa_2 + 35\kappa_4\kappa_3 + 105\kappa_3\kappa_2^2; \\ \mu_8 = \kappa_8 + 28\kappa_6\kappa_2 + 56\kappa_5\kappa_3 + 35\kappa_4^2 + 210\kappa_4\kappa_2^2 + 280\kappa_3^2\kappa_2 + 105\kappa_2^4. \end{cases} \quad (2.12)$$

Особлива цінність кумулянтів $\kappa_3, \dots, \kappa_6$ при оцінюванні відхилення ЩІ від гауссівської впливає з можливості представити довільну ЩІ [11] у вигляді розкладу за похідними гауссівської ЩІ:

$$p(x) \approx p_G(x) - \frac{\kappa_3}{3!} p_G^{(3)}(x) + \frac{\kappa_4}{4!} p_G^{(4)}(x) - \frac{\kappa_5}{5!} p_G^{(5)}(x) + \frac{\kappa_6 + 10\kappa_3^2}{6!} p_G^{(6)}(x), \quad (2.13)$$

де $p_G(x)$ – ЩІ гауссівського розподілу.

Для того, щоб оцінити кількісно ступінь відхилення від гауссівського розподілу, яке описують $\kappa_3, \kappa_4, \dots$ вводяться безрозмірні числа – кумулянтні коефіцієнти:

$$\gamma_n = \frac{\kappa_n}{\sigma^n}. \quad (2.14)$$

Кумулянтні коефіцієнти $\gamma_s, s \geq 3$ незалежні від значень параметрів розміщення та масштабу та застосовуються при порівнянні законів розподілів різних типів. Наразі найчастіше використовуються γ_3 – коефіцієнт асиметрії та γ_4 – коефіцієнт ексцесу [6, 11].

Кумулянтні коефіцієнти акустичних сигналів знаходять своє практичне застосування в діагностиці та контролі [4, 6–7, 12–13, 24–26] підшипників кочення, двигунів внутрішнього згоряння, використовуються для діагностики колінних суглобів, пошуку витоків рідини в трубопроводах тощо. Кількість напрямків застосування збільшується [6, 10].

2.2.3 Кореляційно-спектральні характеристики

Кореляційна функція [27] $R(t_1, t_2)$ показує взаємозв'язок (кореляцію) значень $\xi(t_1) = \xi_1$ і $\xi(t_2) = \xi_2$ ВП $\xi(t)$ в моменти часу t_1 і t_2 :

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_1)(x_2 - m_2) p_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2, \quad (2.15)$$

де $m_i = \int_{-\infty}^{\infty} x_i p_i(x_i, t_i) dx_i$ – математичне сподівання ВП в моменти часу t_i . Якщо

$R(t_1, t_2) = 0$, то випадкові величини ξ_1 і ξ_2 некорельовані.

Для стаціонарних випадкових процесів $m_1 = m_2 = m$, а кореляційна функція залежить лише від $\tau = t_2 - t_1$:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m)(x_2 - m) p_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2. \quad (2.16)$$

Часто використовується нормована кореляційна функція

$$\rho(\tau) = R(\tau) / R(0), \quad (2.17)$$

де $R(0) = D$ – дисперсія ВП.

Інтегральною характеристикою часу кореляції перерізів ВП є інтервал кореляції

$$\Delta\tau = 2 \int_0^{\infty} |\rho(\tau)| d\tau. \quad (2.18)$$

Якщо перерізи знаходяться на відстані один від одного більше $\Delta\tau$, для інженерних розрахунків вони вважаються некорельованими.

Кореляційні та спектральні характеристики ВП пов'язані відношенням Вінера–Хінчіна [27]:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \\ R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega, \end{aligned} \quad (2.19)$$

де $S(\omega)$ – спектральна щільність ВП. Відношення (2.19) є перетвореннями Фур'є для ВП. Їхня особливість полягає в тому, що в інтегралах фігурують не самі процеси, а їхні кореляційні функції.

З (2.19) випливає, що дисперсія ВП дорівнює

$$D = R(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (2.20)$$

Інтегральною характеристикою спектральної щільності є ширина спектра

$$\Delta\omega = \frac{1}{S_{\max}} \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = \frac{\pi D}{S_{\max}}. \quad (2.21)$$

2.3 Запис і обробка сигналів

Система запису й обробки сигналів є апаратно-програмним комплексом, який здійснює збір, реєстрацію та статистичну обробку акустичних сигналів, в результаті якої приймається рішення про вид сигналу.

Апаратно-програмний комплекс [4, 6, 25] побудований за модульним принципом та містить у собі такі основні блоки (рис. 2.1): сенсори, попередні підсилювачі (ПП), аналогово-цифровий перетворювач (АЦП) і персональний комп'ютер (ПК).

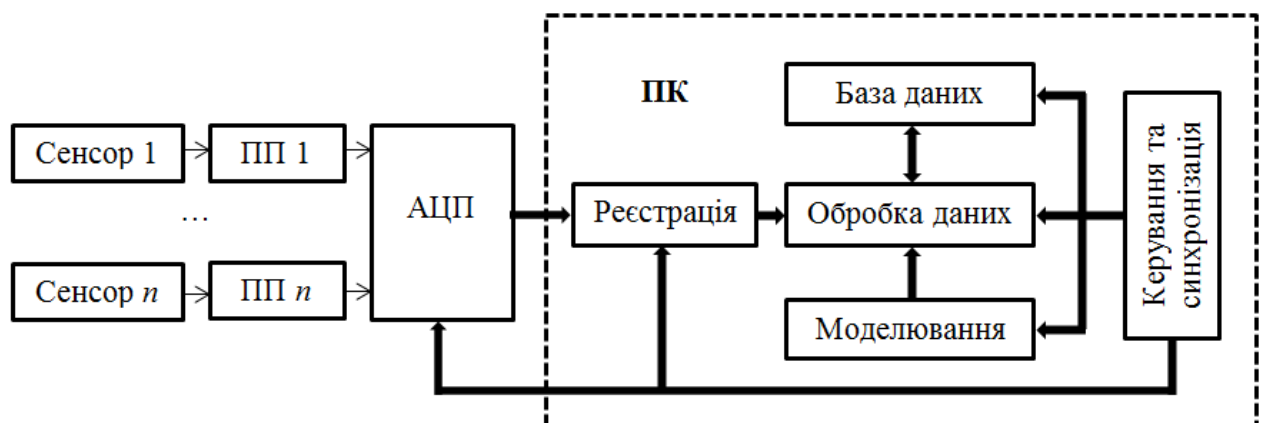


Рисунок 2.1 Структурна схема апаратно-програмного комплексу

Блоково-модульний принцип побудови апаратної частини і програмного забезпечення дозволяє зменшити час на розробку апаратури та програм, а та-

кож здійснити інтеграцію в системи запису і обробки, які вже використовуються. Далі представлено призначення основних блоків.

Сенсори – електроакустичні перетворювачі, які перетворюють акустичні коливання в електричний сигнал.

Попередні підсилювачі призначені для узгодження за опором і напругою сенсорів з АЦП. За необхідності додатково після попередніх підсилювачів можуть додаватися нормуючі підсилювачі й аналогові фільтри.

АЦП здійснює перетворення аналогових інформаційних сигналів у цифрові масиви вихідних даних для подальшої обробки та забезпечує їх реєстрацію на жорсткому диску персонального комп'ютера.

Блок реєстрації здійснює реєстрацію на жорсткому диску ПК цифрових масивів даних, які отримані з АЦП.

Блок моделювання призначений для формування реалізацій тестових сигналів для перевірки роботи алгоритмів і програмного забезпечення системи.

Блок обробки даних виконує декілька функцій: підготовку даних, оцінку ймовірнісних характеристик сигналів, їх аналіз і прийняття рішення. Підготовка даних полягає у зчитуванні даних із файлу, прив'язці їх до шкали часу та одиниць вимірювання напруги або прискорення з урахуванням параметрів системи. Тут на основі статистичних методів і алгоритмів цифрової обробки сигналів виконується перетворення масиву вихідних даних у масив імовірнісних характеристик і параметрів, пов'язаних з видом сигналу. За отриманими імовірнісними характеристиками приймається рішення про вид сигналу.

Блок бази даних призначений для зберігання реалізацій зареєстрованих сигналів, результатів вимірювання імовірнісних характеристик і параметрів, графіків зміни параметрів у часі (трендів). Також в цьому блоці зберігаються бази еталонів, протоколи подій тощо.

Блок керування та синхронізації призначений для загального керування роботою всієї системи запису й обробки за певними алгоритмами. Також у склад комплексу входить блок інтерфейсів, який здійснює обмін інформацією

між блоками системи та забезпечує зв'язок з користувачем, а також візуалізацію результатів.

Система працює наступним чином. Збір сигналів здійснюється встановленими на об'єкт дослідження перетворювачами, за допомогою яких первинний акустичний сигнал перетворюється в електричний, який підсилюється попереднім підсилювачем. Потім з виходу підсилювача сигнал потрапляє в АЦП, який перетворює його в цифрову форму, та потім передається на ПК. Оцифрований сигнал після реєстрації та обробки зберігається в блоці бази даних. Реєстрація та обробка сигналів виконується за допомогою спеціалізованого програмного забезпечення.

2.4 Моделі акустичних сигналів

Побудова математичних моделей [28] використовується для формування реалізацій тестових сигналів, щоб перевірити роботу алгоритмів і програмного забезпечення систем запису й обробки. Математичні моделі мають відображати фізичну сутність модельованих акустичних сигналів. В цій роботі розглядатимуться моделі шумових сигналів. Шумові сигнали представляються [6] як результат накладання великої кількості елементарних імпульсів, які виникають у випадкові моменти часу, з випадковими параметрами.

Шумові сигнали мають характерні особливості [4]:

- відносна рівномірність спектральної щільності в широкому частотному діапазоні;
- в більшості випадків негауссівський розподіл миттєвих значень;
- іноді мають нестационарний характер через різну форму елементарних імпульсів і флуктуацію.

Наразі на практиці найчастіше використовуються такі моделі шумових сигналів [6]:

- білий шум;
- процес Бунімовича–Райса;
- пуассонівський імпульсний процес;

➤ лінійний випадковий процес.

Білий шум в скінченній смузі частот – стаціонарний ВП $\xi(t)$, який має спектральну щільність і кореляційну функцію наступного вигляду відповідно:

$$\begin{aligned} S(f) &= D_0, |f| < f_\epsilon; \\ R(\tau) &= 2D_0 f_\epsilon \frac{\sin(2\pi f_\epsilon \tau)}{2\pi f_\epsilon \tau}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

де $D_0 > 0$ – інтенсивність білого шуму, f_ϵ – верхня гранична частота.

Рожевий шум – стаціонарний ВП $\xi(t)$, спектральна щільність і кореляційна функція якого мають вигляд відповідно:

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{D_0 \alpha^2}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}; \\ R(\tau) &= \frac{D_0 \alpha}{2} e^{-\alpha |\tau|}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

де $\alpha < 0$, а $f_\epsilon = \frac{\alpha}{2\pi}$ на рівні -3дБ.

Процес Бунімовича–Райса описується моделлю [16]

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{v(t)} \eta_k h(t - t_k), t > 0, \quad (2.24)$$

де $v(t)$ – однорідний процес Пуассона, що має інтенсивність $\lambda > 0$, описує число імпульсів на інтервалі $[0; t]$; імпульси з випадковими амплітудами η_k виникають моменти часу t_k , які є однорідним пуассонівським потоком подій; не випадкова функція $h(t)$ описує форму елементарних імпульсів (табл. 2.1); амплітуди імпульсів η_k є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, які не залежать від t_k [29].

Таблиця 2.1 Аналітичні вирази для різних форм імпульсів

Форма імпульсу		Аналітичний вираз $h(t)$, $A > 0, b > -1, \tau_0$ – тривалість імпульсу
1	Прямокутна	$AE(t)E(\tau_0 - t)$
2	Пилкоподібна	$A(t / \tau_0)E(t)E(\tau_0 - t)$
3	Експоненціальна	$A(t / \tau_0)^b e^{-t/\tau_0} E(t), \quad b = 0$
4	Експоненціально-степенева	$A(t / \tau_0)^b e^{-t/\tau_0} E(t), \quad b > -1$
5	Експоненціально-синусоїдальна	$Ae^{-t/\tau_0} \sin(2\pi f_0 t) E(t)$

Спектральна щільність та кореляційна функція дорівнюють відповідно:

$$S(f) = \lambda \alpha_{s\eta} |H(f)|^2; \quad (2.25)$$

$$R(\tau) = \lambda \alpha_{s\eta} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)h(t+\tau)dt,$$

де $\alpha_{s\eta} = \mathbf{M}[\eta_k^s]$ – початковий момент порядку s амплітуд η_k імпульсів, а

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i2\pi ft}dt.$$

Кумулянти κ_s дорівнюють

$$\kappa_s = \lambda \alpha_{s\eta} \int_{-\infty}^{\infty} h^s(t)dt. \quad (2.26)$$

Модель лінійного випадкового процесу – шумовий сигнал, який представляється відгуком лінійної системи, яка має імпульсну характеристику формуючого фільтра $h(t, \tau)$, на білий шум у вузькому сенсі $\zeta(t)$:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)\zeta(\tau)d\tau, \quad (2.27)$$

де $\zeta(t) = \frac{d\eta(t)}{dt}$, $\eta(t)$ – процес з незалежними приростами (породжуючий процес).

Для стаціонарних лінійних процесів, коли $h(t, \tau) = h(t - \tau)$, спектральна щільність, кореляційна функція та кумулянти відповідно дорівнюють:

$$\begin{aligned} S(f) &= \sigma_\eta^2 |H(f)|^2; \\ R(\tau) &= \sigma_\eta^2 \int_{-\infty}^{\infty} h(t) h(t + \tau) dt; \\ \kappa_s &= \kappa_{s\eta} \int_{-\infty}^{\infty} h^s(t) dt, \end{aligned} \quad (2.28)$$

де $\kappa_{s\eta} = \kappa_s[\eta(\tau)]$ в точці $\tau = 1$.

2.5 Побудова моделі процесу Бунімовича–Райса

Наразі для комп'ютерного моделювання шумових сигналів [6, 16, 28] широко використовуються два методи: прямий метод і метод формуючого фільтра. Прямий метод полягає у безпосередній реалізації ВП як результату підсумовування елементарних імпульсів. Метод формуючого фільтра заснований на дискретній згортці імпульсної характеристики фільтра $h(t_n)$ і приросту $\Delta\eta(\tau_r)$ процесу $\eta(\tau)$, де $t_n = nT_d$, $\tau_r = rT_d$, $n, r = 0, 1, 2, \dots, T_d$ – крок дискретизації. Оскільки час моделювання прямим методом набагато більший [6], у цій роботі використовується метод формуючого фільтра.

Після математичних перетворень (2.24) [6] отримується вираз, за яким буде змодельовано реалізацію ВП

$$\xi(t_n) \approx \sum_{r=0}^{N-1} h(t_n - \tau_r) \Delta\eta(\tau_r). \quad (2.29)$$

Основні етапи моделювання [6, 16]:

- 1) визначення кроку дискретизації T_d модельованого сигналу. Значення обирається на основі кореляційної функції сигналу (набагато менше ін-

- тервалу кореляції $T_d \ll \tau_{cor}$) або на основі спектральної щільності (обернено пропорційно ефективній смузі частот спектру сигналу);
- 2) визначення необхідної тривалості реалізацій і формування масиву дискретних моментів часу t , для яких будуть змодельовані відліки шумового сигналу;
 - 3) створення масиву моментів часу t_k появи елементарних імпульсів. Випадкові величини t_k моделюються в залежності від заданої інтенсивності λ пуассонівського потоку подій, у якого інтервали між сусідніми моментами часу t_k розподілені за показниковим законом;
 - 4) формування масиву випадкових амплітуд η_k імпульсів із відповідним законом розподілу (використовуються стандартні генератори псевдовипадкових чисел);
 - 5) формування k -го елементарного імпульсу. Для цього моделюється функція $h(t)$, зміщена на величину t_k і помножена на відповідне значення амплітуди η_k ;
 - 6) моделювання реалізації, яка формується підсумовуванням отриманих заздалегідь елементарних імпульсів для всіх значень із масиву часу.

Виходячи з очевидного припущення про невід'ємність амплітуд імпульсів задамо показникову щільність імовірності величин η_k

$$p_\eta(y) = \beta e^{-\beta y} E(y), \quad \beta > 0, \quad (2.30)$$

для яких початкові моменти дорівнюють $\alpha_s \{\eta_k\} = s! / \beta^s$.

Кумулянти κ_s процесу (2.24) визначаються формулою [6]

$$\kappa_s = d_s \int_{-\infty}^{\infty} h^s(t) dt, \quad (2.31)$$

де $d_s = \lambda \alpha_s \{\eta_k\}$.

Для різних форм елементарних імпульсів використовуються формули, наведені в табл. 2.1. Задамо параметри моделювання. Нехай $A=1$, $\beta=1$, $\tau_0=1$ мкс. Частоту заповнення імпульсів оберемо

$f_0 = \omega_0 / 2\pi = 5 \text{ МГц}$. Задамо інтенсивність $\lambda = 5 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, що відповідає $\lambda\tau_0 = 5$.

Оберемо крок дискретизації $T_d = 10 \text{ нс}$ (частота дискретизації 100 МГц), який менший тривалості τ_0 елементарного імпульсу в 100 разів. Тривалість реалізації оберемо $T = 2 \text{ мс}$. Тоді об'єм вибірки для кожної реалізації становитиме $N = 2 \cdot 10^5$ відліків. Для забезпечення стаціонарності модельованого процесу перенесемо початок відліку часу в точку $t_0 = 20\tau_0$.

Змодельовані реалізації наведемо у вигляді часових представлень реалізації та відповідного елементарного імпульсу. Побудуємо за миттєвими значеннями для отриманих реалізацій кореляційну функцію, спектральну щільність і гістограму [6].

Результати моделювання реалізацій і їхньої статистичної обробки наведені на рис. 2.1 – 2.25.

Для прямокутного імпульсу (1) рис. 2.1 – 2.5.

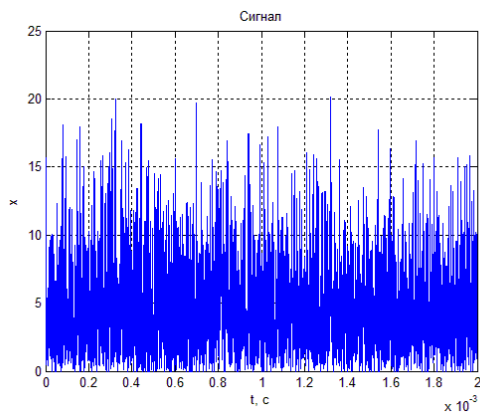


Рисунок 2.1 Сигнал

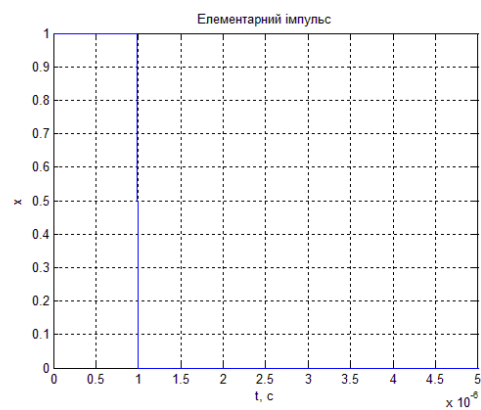


Рисунок 2.2 Елементарний імпульс

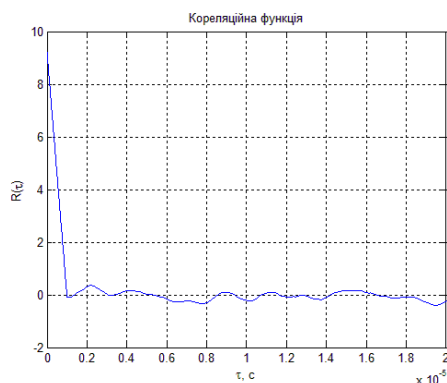


Рисунок 2.3 Кореляційна функція

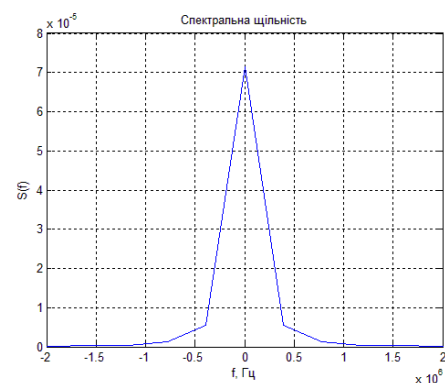


Рисунок 2.4 Спектральна щільність

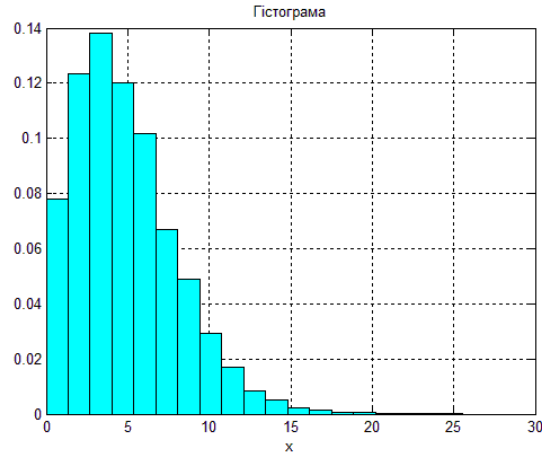


Рисунок 2.5 Гістограма

Для пилкоподібного імпульсу (2) рис. 2.6 – 2.10.

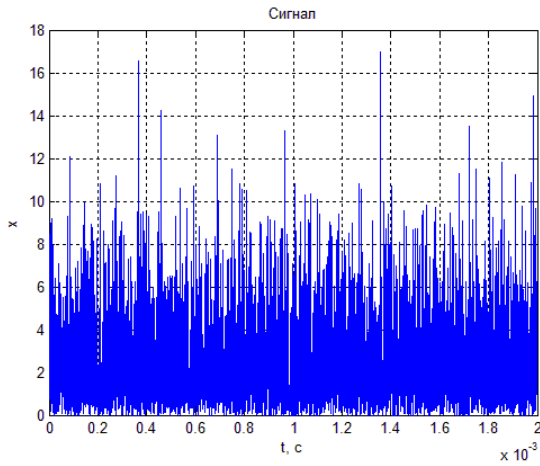


Рисунок 2.6 Сигнал

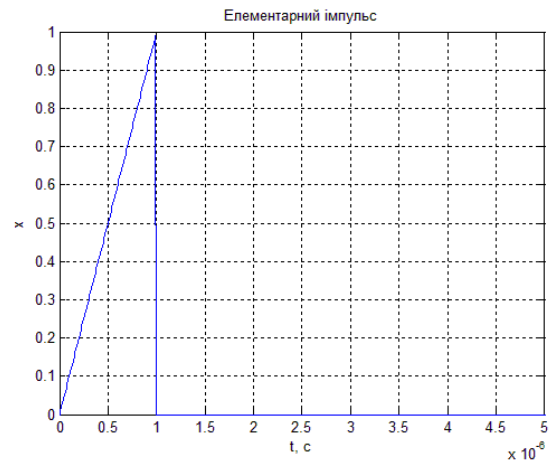


Рисунок 2.7 Елементарний імпульс

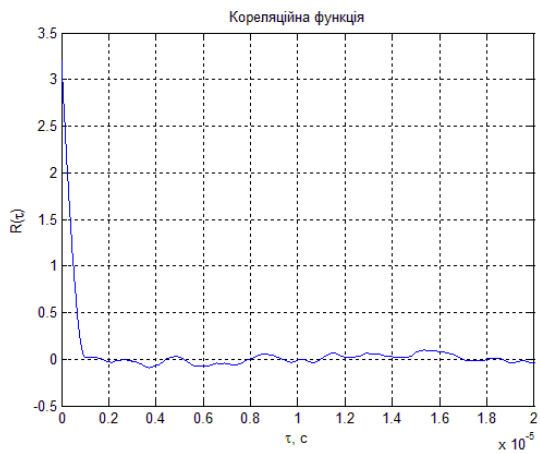


Рисунок 2.8 Кореляційна функція

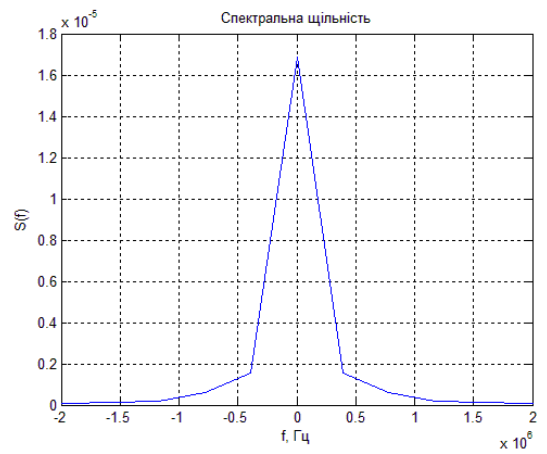


Рисунок 2.9 Спектральна щільність

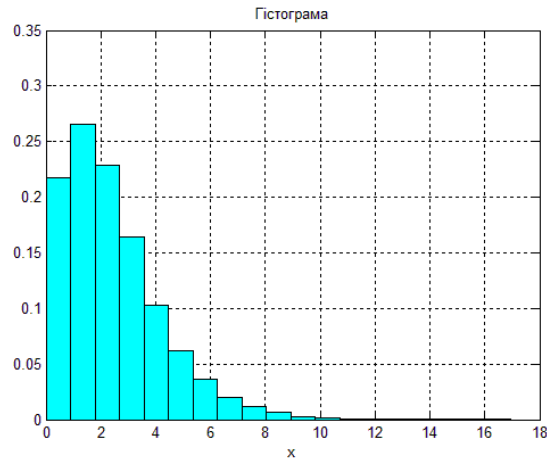


Рисунок 2.10 Гістограма

Для експоненціального імпульсу (3) ($b = 0$) рис. 2.11 – 2.15.

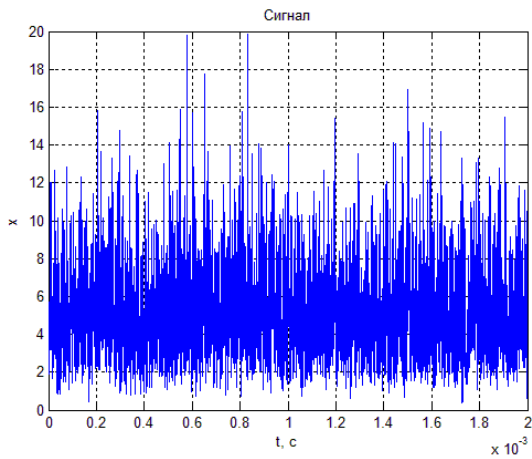


Рисунок 2.11 Сигнал

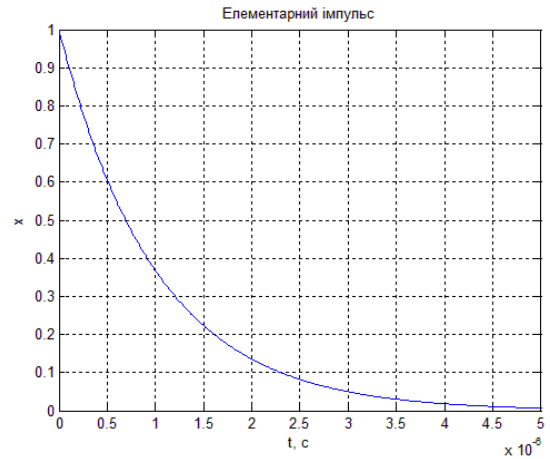


Рисунок 2.12 Елементарний імпульс

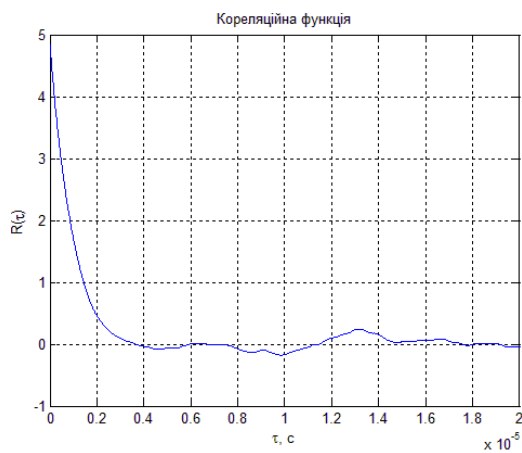


Рисунок 2.13 Кореляційна функція

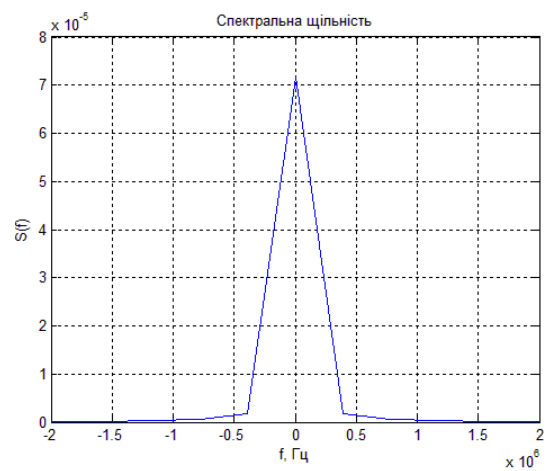


Рисунок 2.14 Спектральна щільність

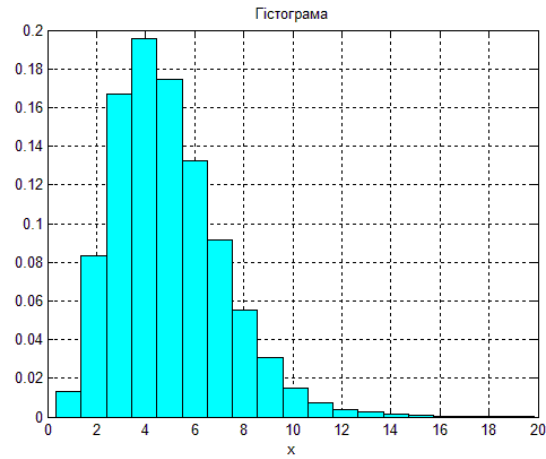


Рисунок 2.15 Гістограма

Для експоненціально-степеневого імпульсу (4) ($b=1$) рис. 2.16 – 2.20.

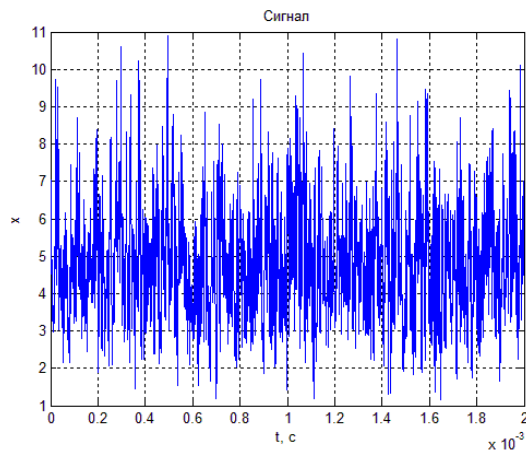


Рисунок 2.16 Сигнал

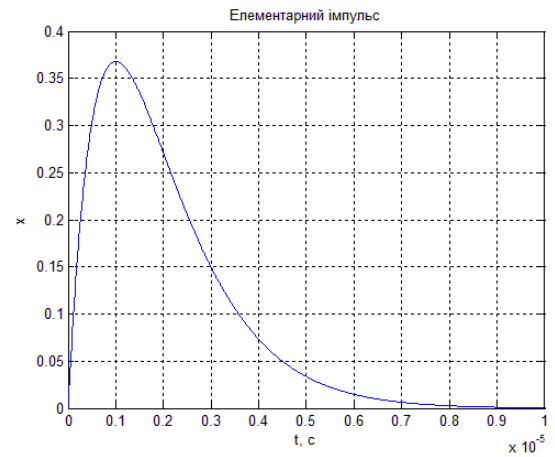


Рисунок 2.17 Елементарний імпульс

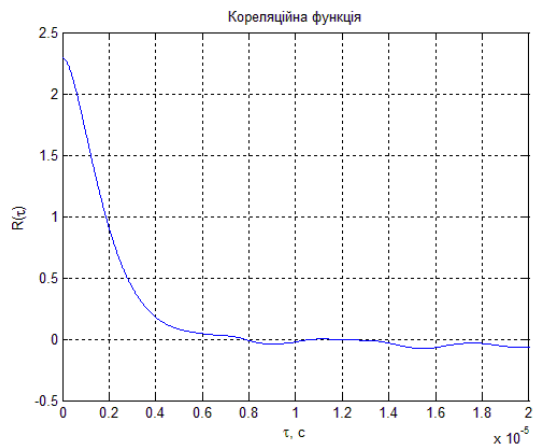


Рисунок 2.18 Кореляційна функція

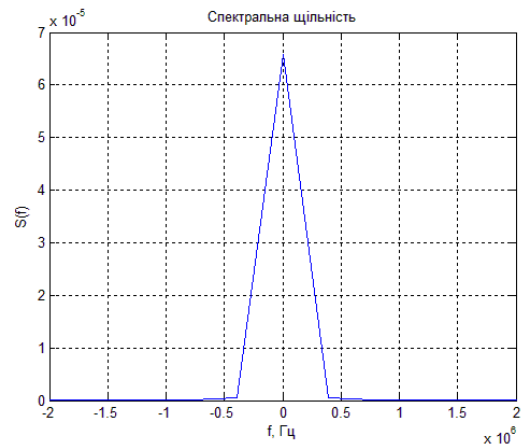


Рисунок 2.19 Спектральна щільність

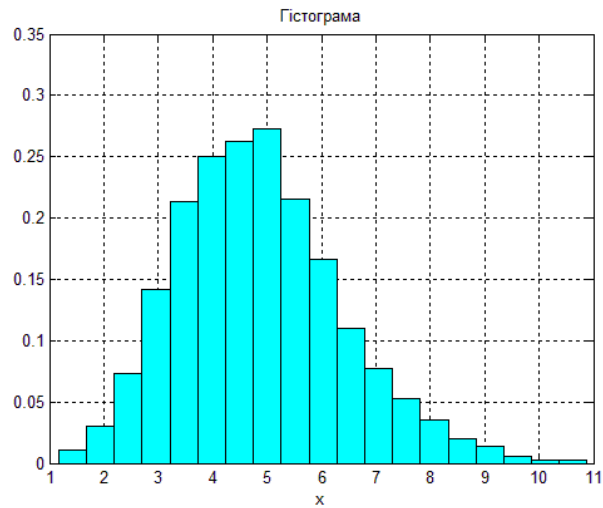


Рисунок 2.20 Гістограма

Для експоненціально-синусоїдального імпульсу (5) рис. 2.21 – 2.25.

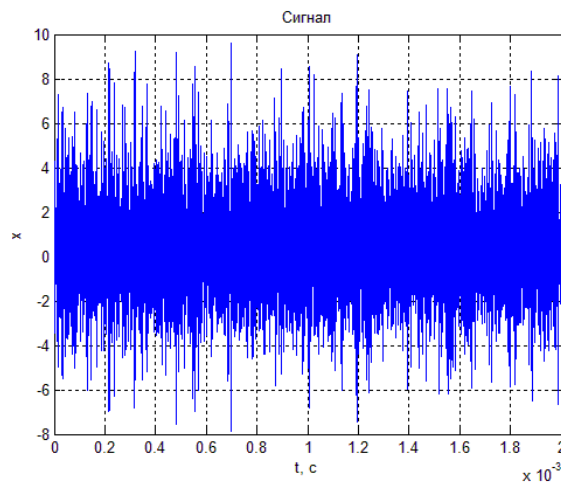


Рисунок 2.21 Сигнал

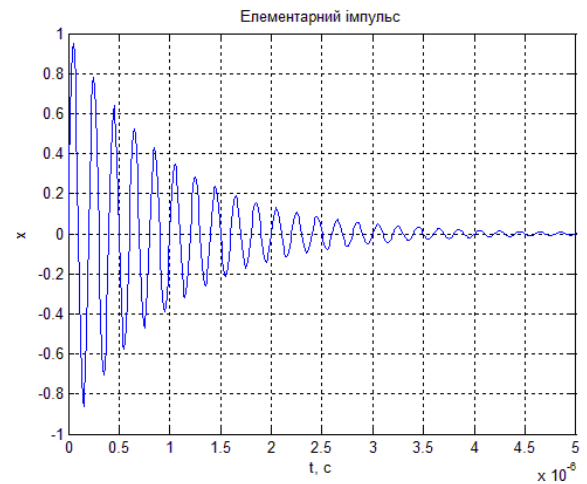


Рисунок 2.22 Елементарний імпульс

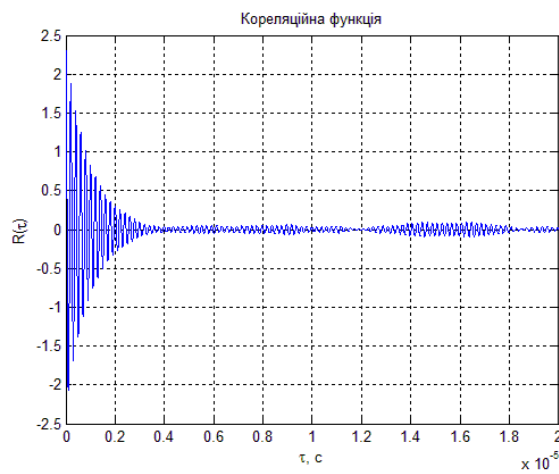


Рисунок 2.23 Кореляційна функція

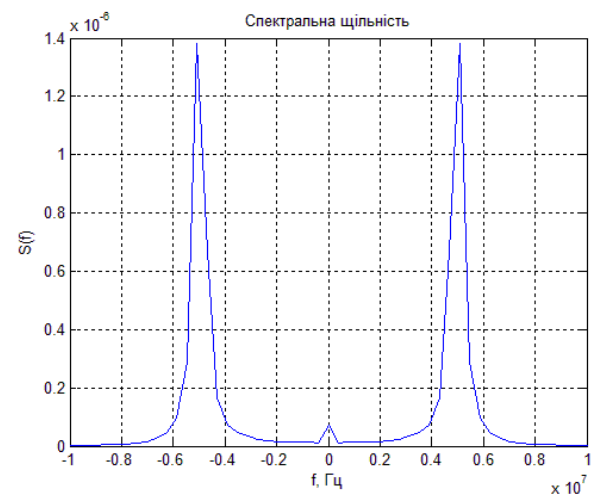


Рисунок 2.24 Спектральна щільність

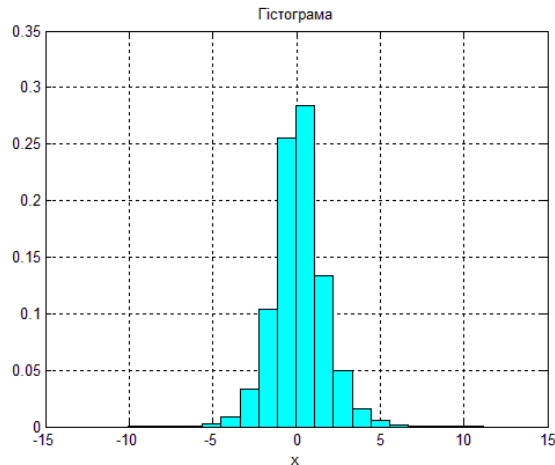


Рисунок 2.25 Гістограма

2.6 Оцінювання кумулянтів і кумулянтних коефіцієнтів

На практиці кумулянтні методи ґрунтуються на використанні експериментальних значень моментів, кумулянтів і кумулянтних коефіцієнтів, а саме їхніх точкових оцінок. Їх отримують з реалізацій ВП, які піддаються обробці. Наразі досліджуються помилки оцінювання кумулянтів та їхня залежність від об'єму вибірки [4, 6, 33].

2.6.1 Точкові оцінки

Нехай є досліджувана ВВ ξ . Вона неперервна та має ЩІ $p_\xi(x)$. θ – параметр ВВ, який піддається дослідженню. Експеримент, проведений N разів представляється моделлю – випадковою вибіркою $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, що має об'єм N , де $\xi_1, \dots, \xi_N$ – незалежні й однаково розподілені ВВ, розподіл яких відповідає розподілу величини ξ . ЩІ цієї вибірки має вигляд

$$p_\xi(x_1, \dots, x_N) = \prod_{k=1}^N p_\xi(x_k) \quad (2.32)$$

Експериментальне отримання параметра θ здійснюється з випадкової вибірки $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ методами статистичного оцінювання, які розділяють на точкове та інтервальне оцінювання. Результатом точкового оцінювання є деяке число $\hat{\theta}$, яке приймається в якості значення параметра θ .

Точною оцінкою $\hat{\theta}$ параметра θ називається детермінована функція результатів спостережень $\hat{\theta} = G(\xi_1, \dots, \xi_N)$, значення якої приймаються за теоретичний параметр θ . Для отримання точкових оцінок параметрів ВВ (знаходження функції $y = G(\xi_1, \dots, \xi_N)$) наразі найчастіше використовуються такі методи: моментів, максимальної правдоподібності, найменших квадратів, максимізації поліному тощо.

Оцінка є функцією ВВ $\xi_1, \dots, \xi_N$, тому й сама є ВВ, яка зазвичай неперервна та має ЩІ $p_{\hat{\theta}}(y)$, математичне сподівання $\mathbf{M}[\hat{\theta}]$ та дисперсію $\mathbf{D}[\hat{\theta}]$. Оцінка $\hat{\theta}$ може бути різною $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_L$ для одного параметра θ . Вибір оцінки базується на перевірці її основних властивостей – незміщеності, слушності та ефективності.

Оцінка $\hat{\theta}$ незміщена, якщо при будь-якому N виконується рівність

$$\mathbf{M}[\hat{\theta}] = \theta. \quad (2.33)$$

При невиконанні умови (2.33) оцінка є зміщеною, а зміщення оцінки має вигляд

$$\Delta(\hat{\theta}) = \mathbf{M}[\hat{\theta}] - \theta. \quad (2.34)$$

Якщо при $N \rightarrow \infty$ зміщення прямує до нуля, то оцінка вважається асимптотично незміщеною.

Оцінка $\hat{\theta}$ слушна, якщо

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{D}[\hat{\theta}] = 0. \quad (2.35)$$

Оцінка $\hat{\theta}$ ефективна, якщо при фіксованому N вона має найменшу дисперсію серед оцінок $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_L$:

$$\mathbf{D}[\hat{\theta}] = \min_k \mathbf{D}[\hat{\theta}_k]. \quad (2.36)$$

Для аналізу помилок точкового оцінювання в загальному випадку необхідно знати ЩІ $p_{\hat{\theta}}(y)$ оцінки $\hat{\theta}$, а в більш простих випадках достатньо знати її математичне сподівання $\mathbf{M}[\hat{\theta}]$ та дисперсію $\mathbf{D}[\hat{\theta}]$.

Для технічних задач як характеристику точності оцінки $\hat{\theta}$ використовується середньоквадратична помилка

$$\varepsilon = \sqrt{\mathbf{M}\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right]} = \sqrt{\mathbf{D}[\hat{\theta}] + \Delta^2(\hat{\theta})}, \quad (2.37)$$

де $\mathbf{D}[\hat{\theta}]$ характеризує випадкову помилку оцінки, $\Delta(\hat{\theta})$ характеризує її систематичну помилку.

При $\theta \neq 0$ є зручною для використання відносна помилка оцінки $\hat{\theta}$:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\theta}. \quad (2.38)$$

2.6.2 Оцінки кумулянтів

Оскільки кумулянти та кумулянтні коефіцієнти є функціями моментів ВВ, то для початку варто розглянути характеристики точкових оцінок моментів.

Формули для точкових оцінок початкових $\hat{\alpha}_s$ і центральних $\hat{\mu}_s$ моментів порядку s ВВ ξ мають вигляд відповідно:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_s &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k^s; \\ \hat{\mu}_s &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\xi_k - \hat{m})^s, \end{aligned} \quad (2.39)$$

де $\hat{m} = \hat{\alpha}_1$ – оцінка математичного сподівання $m = \mathbf{M}[\xi]$.

Вважатимемо елементи вибірки $\xi_1, \dots, \xi_N$ незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, розподіл яких співпадає з розподілом величини ξ .

Математичні сподівання та дисперсії оцінок початкових моментів $\hat{\alpha}_s$ дорівнюють відповідно:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\hat{\alpha}_s] &= \alpha_s; \\ \mathbf{D}[\hat{\alpha}_s] &= \frac{\alpha_{2s} - \alpha_s^2}{N}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

де α_s – початкові моменти порядку s ВВ ξ .

На основі формул (2.33) і (2.35) з формул (2.40) випливає, що оцінки початкових моментів $\hat{\alpha}_s$ незміщені та слухні.

Математичні сподівання та дисперсії оцінок центральних моментів $\hat{\mu}_s$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\hat{\mu}_s] &= \mu_s + O(N^{-1}); \\ \mathbf{D}[\hat{\mu}_s] &= \frac{\mu_{2s} - 2s\mu_{s-1}\mu_{s+1} - \mu_s^2 + s^2\mu_2\mu_{s-1}^2}{N} + O(N^{-2}), \end{aligned} \quad (2.41)$$

де μ_s – центральні моменти s ВВ ξ ; $O(N^{-z})$ – величина порядку N^{-z} .

З формул (2.34) і (2.35) випливає, що оцінки центральних моментів є асимптотично незміщеними та слухними. Через необхідність використання великих об'ємів вибірок N при оцінюванні моментів, доданком $O(N^{-z})$ нехтуватимемо.

На основі формул (2.11) отримуються вирази для кумулянтів через моменти. Оцінки перших шести кумулянтів мають вигляд

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{k}_1 &= \hat{m}; \\ \hat{k}_2 &= \hat{\mu}_2; \\ \hat{k}_3 &= \hat{\mu}_3; \\ \hat{k}_4 &= \hat{\mu}_4 - 3\hat{\mu}_2^2; \\ \hat{k}_5 &= \hat{\mu}_5 - 10\hat{\mu}_3\hat{\mu}_2; \\ \hat{k}_6 &= \hat{\mu}_6 - 15\hat{\mu}_4\hat{\mu}_2 - 10\hat{\mu}_3^2 + 30\hat{\mu}_2^3. \end{aligned} \right. \quad (2.42)$$

Математичні сподівання та дисперсії оцінок кумулянтів $\hat{k}_s$ для порядків $s = \overline{1,4}$ наведено в роботі [6] відповідно:

$$\begin{cases} \mathbf{M}[\hat{\kappa}_1] = \kappa_1; \\ \mathbf{M}[\hat{\kappa}_2] = \frac{N-1}{N} \kappa_2; \\ \mathbf{M}[\hat{\kappa}_3] = \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} \kappa_3; \\ \mathbf{M}[\hat{\kappa}_4] = \frac{(N-1)(N^2-6N+6)}{N^3} \kappa_4 - 6 \frac{(N-1)}{N^2} \kappa_2^2; \end{cases} \quad (2.43)$$

$$\begin{cases} \mathbf{D}[\hat{\kappa}_1] = \mathbf{D}[\hat{\alpha}_1] = \frac{\alpha_2 - \alpha_1^2}{N}; \\ \mathbf{D}[\hat{\kappa}_2] = \mathbf{D}[\hat{\mu}_2] = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{N}; \\ \mathbf{D}[\hat{\kappa}_3] = \mathbf{D}[\hat{\mu}_3] = \frac{\mu_6 - 6\mu_2\mu_4 - \mu_3^2 + 9\mu_2^3}{N}; \\ \mathbf{D}[\hat{\kappa}_4] = \frac{\mu_8 - 12\mu_6\mu_2 - 8\mu_5\mu_3 - \mu_4^2 + 48\mu_4\mu_2^2 + 64\mu_3^2\mu_2 - 36\mu_2^4}{N}. \end{cases} \quad (2.44)$$

З виразів (2.43) випливає, що оцінки кумулянтів є асимптотично незміщеними, а з формул (2.44) – слушними.

Формули математичних сподівань і дисперсій оцінок кумулянтів п'ятого та шостого порядків знаходяться в роботі [6].

Для компактного запису виразів (2.44) чисельники позначаються як $c_{\kappa s}$:

$$\mathbf{D}[\hat{\kappa}_s] = \frac{c_{\kappa s}}{N}. \quad (2.45)$$

Середньоквадратична помилка оцінювання має вигляд

$$\varepsilon(\hat{\kappa}_s) = \sqrt{\mathbf{D}[\hat{\kappa}_s]} = \sqrt{\frac{c_{\kappa s}}{N}}. \quad (2.46)$$

Відносна помилка за умови, що $\kappa_s \neq 0$, записується формулою

$$\delta(\hat{\kappa}_s) = \frac{\varepsilon(\hat{\kappa}_s)}{\kappa_s} = \frac{1}{\kappa_s} \sqrt{\frac{c_{\kappa s}}{N}}. \quad (2.47)$$

Для забезпечення заданої відносної помилки обирається мінімальний об'єм вибірки

$$N_{\min} = \frac{c_{\kappa s}}{[\kappa_s \delta(\hat{\kappa}_s)]^2}. \quad (2.48)$$

Відомо [14], що при збільшенні порядку кумулянта зростають мінімальні об'єми вибірки для всіх розподілів і середньоквадратичні помилки для всіх розподілів за виключенням рівномірного.

2.6.3 Оцінки кумулянтних коефіцієнтів

Використовуючи вирази (2.14) і (2.42) отримуються формули для оцінок кумулянтних коефіцієнтів:

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_3 = \hat{\mu}_3 / \hat{\mu}_2^{3/2}; \\ \hat{\gamma}_4 = \hat{\mu}_4 / \hat{\mu}_2^2 - 3; \\ \hat{\gamma}_5 = (\hat{\mu}_5 - 10\hat{\mu}_3\hat{\mu}_2) / \hat{\mu}_2^{5/2}; \\ \hat{\gamma}_6 = (\hat{\mu}_6 - 15\hat{\mu}_4\hat{\mu}_2 - 10\hat{\mu}_3^2) / \hat{\mu}_2^3 + 30, \end{cases} \quad (2.49)$$

де $\hat{\mu}_s$ – оцінки центральних моментів (2.39).

Математичні сподівання та дисперсії оцінок (2.49) дорівнюють відповідно [14]:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\hat{\gamma}_s] &= \gamma_s; \\ \mathbf{D}[\hat{\gamma}_s] &= \frac{c_{\gamma s}}{N}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

де $s = 3, 4, \dots, n$.

Коефіцієнти $c_{\gamma 3}$, $c_{\gamma 4}$ визначаються виразами відповідно [6, 14]:

$$\begin{aligned} c_{\gamma 3} &= M_6 - 3M_3M_5 - 6M_4 + \frac{9}{4}M_3^2M_4 + \frac{35}{4}M_3^2 + 9; \\ c_{\gamma 4} &= M_8 - 4M_4M_6 - 8M_3M_5 + 4M_4^3 - 4M_4^2 + 16M_3^2M_4 + 16M_3^2, \end{aligned} \quad (2.51)$$

де $M_s = \mu_s \mu_2^{-s/2}$ – нормовані центральні моменти.

Для симетричних розподілів вирази (2.41) перетворюються так:

$$\begin{aligned} c_{\gamma 3} &= M_6 - 6M_4 + 9; \\ c_{\gamma 4} &= M_8 - 4M_4M_6 + 4M_4^3 - 4M_4^2. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Вирази для математичних сподівань і дисперсій оцінок кумулянтних коефіцієнтів п'ятого та шостого порядків наведено в роботі [6].

З отриманих результатів випливає, що наведені оцінки кумулянтних коефіцієнтів незміщені та слушні. Середньоквадратична помилка дорівнює

$$\varepsilon(\hat{\gamma}_s) = \sqrt{\mathbf{D}[\hat{\gamma}_s]} = \sqrt{\frac{c_{\gamma s}}{N}}. \quad (2.53)$$

За умови, що $\gamma_s \neq 0$, відносна помилка оцінювання кумулянтних коефіцієнтів має вигляд

$$\delta(\hat{\gamma}_s) = \frac{\varepsilon(\hat{\gamma}_s)}{\gamma_s} = \frac{1}{\gamma_s} \sqrt{\frac{c_{\gamma s}}{N}}. \quad (2.54)$$

З формули (2.54) маємо мінімальний об'єм вибірки, який забезпечує задану відносну помилку $\delta(\hat{\gamma}_s)$:

$$N_{\min} = \frac{c_{\gamma s}}{[\gamma_s \delta(\hat{\gamma}_s)]^2}. \quad (2.55)$$

2.6.4 Оцінювання кумулянтів і кумулянтних коефіцієнтів моделі процесу Бунімовича–Райса

Розрахуємо теоретичні кумулянти та кумулянтні коефіцієнти процесу (2.29) з використанням вихідних даних, наведених Розділі 2.5.

Згідно з формулою (2.31) маємо формули для розрахунку кумулянтів порядку s для типових форм елементарних імпульсів (табл. 2.2).

Таблиця 2.2 Теоретичні кумулянти процесу Бунімовича–Райса

Форма імпульсу		Формула для κ_s	
1	Прямокутна	$d_s A^s \tau_0$	
2	Пилкоподібна	$\frac{d_s A^s \tau_0}{s+1}$	
3	Експоненціальна	$\frac{d_s A^s \tau_0}{s}$	
4	Експоненціально-степенева	$\frac{d_s A^s \Gamma(bs+1) \tau_0}{s^{bs+1}}$	
5	Експоненціально-синусоїдальна	κ_1	$\frac{d_1 A \omega_0}{1/\tau_0^2 + \omega_0^2}$
		κ_2	$\frac{1}{4} d_2 A^2 \left[\tau_0 - \frac{1/\tau_0}{1/\tau_0^2 + \omega_0^2} \right]$
		κ_3	$\frac{3}{4} d_3 A^3 \omega_0 \left[\frac{1}{9/\tau_0^2 + \omega_0^2} - \frac{1}{9/\tau_0^2 + 9\omega_0^2} \right]$
		κ_4	$\frac{1}{8} d_4 A^4 \left[\frac{4/\tau_0}{16/\tau_0^2 + 16\omega_0^2} - \frac{16/\tau_0}{16/\tau_0^2 + 4\omega_0^2} + \frac{3}{4} \tau_0 \right]$

Теоретичні кумулянтні коефіцієнти процесу Бунімовича–Райса мають вигляд

$$\gamma_s = \frac{\kappa_s}{\kappa_2^{s/2}}.$$

Результати теоретичних розрахунків кумулянтів і кумулянтних коефіцієнтів наведені в табл. 2.4.

Таблиця 2.4 Теоретичні кумулянти і кумулянтні коефіцієнти процесу Бунімовича–Райса

Форма імпульсу	Кумулянти та кумулянтні коефіцієнти					
	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	γ_3	γ_4
1	5	10	30	120	0,949	1,2
2	2,5	3,333	7,5	24	1,232	2,16
3	5	5	10	30	0,894	1,2
4	5	2,5	2,222	2,812	0,562	0,45
5	0,159	2,497	0,63	11,193	0,16	1,795

Зробимо оцінки кумулянтів і кумулянтних коефіцієнтів по $k = 30$ реалізаціям та наведемо середні оцінки в табл. 2.5 та відносні помилки оцінювання в табл. 2.6.

Таблиця 2.5 Оцінки кумулянтів і кумулянтних коефіцієнтів процесу Бунімовича–Райса

Форма імпульсу	Кумулянти та кумулянтні коефіцієнти					
	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}_3$	$\hat{\kappa}_4$	$\hat{\gamma}_3$	$\hat{\gamma}_4$
1	4,973	9,847	30,977	118,73	1,002	1,224
2	2,417	3,289	7,628	22,617	1,279	2,091
3	4,914	4,802	9,541	28,374	0,907	1,23
4	4,892	2,437	2,112	2,761	0,555	0,465
5	0,154	2,403	0,586	10,724	0,157	1,857

Таблиця 2.6 Відносні помилки оцінок

Форма імпульсу	Відносна помилка δ , %					
	$\hat{\kappa}_1$	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{\kappa}_3$	$\hat{\kappa}_4$	$\hat{\gamma}_3$	$\hat{\gamma}_4$
1	0,5	1,5	3,3	1,1	5,7	2
2	3,3	1,3	1,7	5,8	3,8	3,2
3	1,7	4	4,6	5,4	1,4	2,5
4	2,2	2,5	5	1,8	1,2	3,3
5	3,1	3,8	7	4,2	1,5	3,5

Отже, за отриманими результатами оцінювання кумулянтів і кумулянтних коефіцієнтів можна зробити висновок про достатньо хороше узгодження теоретичних та експериментальних значень. Відносна помилка оцінювання в межах 7%, найбільша – для $\hat{\kappa}_3$ процесу з формою елементарного імпульсу (5).

Висновки до розділу 2

У цьому розділі було розкрито сутність статистичної обробки акустичних сигналів. Було представлено узагальнену класифікацію акустичних сигналів та їхні ймовірнісні характеристики: функцію розподілу, щільність імовірностей, кумулянти та кумулянтні коефіцієнти, кореляційно-спектральні характеристики.

Наведено схему апаратно-програмного комплексу запису й обробки акустичних сигналів, принцип побудови якого блоково-модульний. Описано порядок реєстрації та обробки сигналів.

Представлено моделі тестових акустичних сигналів, які використовуються для перевірки роботи алгоритмів і програмного забезпечення запису й обробки. Розглянуто моделі шумових сигналів.

Змодельовано реалізації процесу Бунімовича–Райса та наведено відповідні результати їхньої статистичної обробки – графіки для різних форм елементарних імпульсів: часові представлення, гістограми, кореляційні функції та спектральні щільності.

Виконано оцінювання кумулянтів порядків $s = \overline{1,4}$ і кумулянтних коефіцієнтів порядків $s = \overline{3,4}$. Найбільша відносна помилка становить 7% для $\hat{\kappa}_3$ процесу Бунімовича–Райса з експоненціально-синусоїдальною формою елементарного імпульсу, що показало правильність алгоритму моделювання.

3 КУМУЛЯНТНІ МЕТОДИ ОБРОБКИ АКУСТИЧНИХ СИГНАЛІВ

3.1 Задачі виявлення та розпізнавання

Сигнали та завади, які досліджуються, вважатимемо стаціонарними процесами, аналіз яких подібний аналізу випадкових величин і не залежить від часу. Нехай є неперервна ВВ ξ_z , яку назвемо «завадою». Друга неперервна ВВ, яка розглядатиметься, з відмінним від ξ_z розподілом, називатиметься «сигналом» ξ_c . В більшості випадків на практиці завада є шумовим сигналом, який, наприклад, супроводжує роботу справного технічного обладнання.

Сигналом вважається ВВ, наявність якої необхідно підтвердити або спростувати. Під час проведення експериментальних вимірювань на вході приймача за наявності сигналу ξ_c матимемо адитивну суміш $\xi = \xi_z + \xi_c$ – теж неперервну ВВ. Подальша обробка результатів вимірювань відбувається з дискретним представленням ВВ $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, де N – об'єм вибірки.

Задача виявлення (задача контролю [6, 12]) формулюється як задача розрізнення двох класів ВВ. В нашому випадку маємо класи a_0 , що відповідає заваді (сигнал відсутній), та a_1 , який відповідає адитивній суміші (сигнал наявний). Зазвичай така задача розв'язується шляхом перевірки статистичних гіпотез відносно кумулянтів або кумулянтних коефіцієнтів. Скористаємось властивістю адитивності кумулянтів:

$$\kappa_s[\xi_1 + \xi_2] = \kappa_s[\xi_1] + \kappa_s[\xi_2]. \quad (3.1)$$

Будемо вважати, що в випадку відсутності сигналу, матимемо розподіл, кумулянти якого $\kappa_s = \kappa_s[\xi_z]$ – гіпотеза H_0 . Тоді за наявності сигналу матимемо розподіл, кумулянти якого дорівнюють сумі кумулянтів завади та сигналу $\kappa_s = \kappa_s[\xi_z] + \kappa_s[\xi_c] = \kappa_s[\xi]$ – альтернативна гіпотеза H_1 .

Під час вирішення задачі на основі кумулянтів замість теоретичного значення κ_s використовується його оцінка $\hat{\kappa}_s$, яка отримується за експериментальними даними. Рішення про прийняття гіпотези ґрунтується на основі порівняння оцінки кумулянта з порогом Γ_0 – критичним значенням для статистично-

го критерію $\hat{\kappa}_s$. У випадку $\hat{\kappa}_s \leq \Gamma_0$ приймається гіпотеза H_0 , якщо $\hat{\kappa}_s > \Gamma_0$, – гіпотеза H_1 .

Величина порогу Γ_0 залежить від заданих ймовірностей помилок першого α та другого β роду. $\alpha = P(H_1 | H_0)$ – ймовірність хибної тривоги, $\beta = P(H_0 | H_1)$ – ймовірність прийняття неправильної гіпотези H_0 (рис. 2.1). Звідси ймовірність правильного виявлення дорівнює

$$P_{\text{пв}} = 1 - \beta = P(H_1 | H_1). \quad (3.2)$$

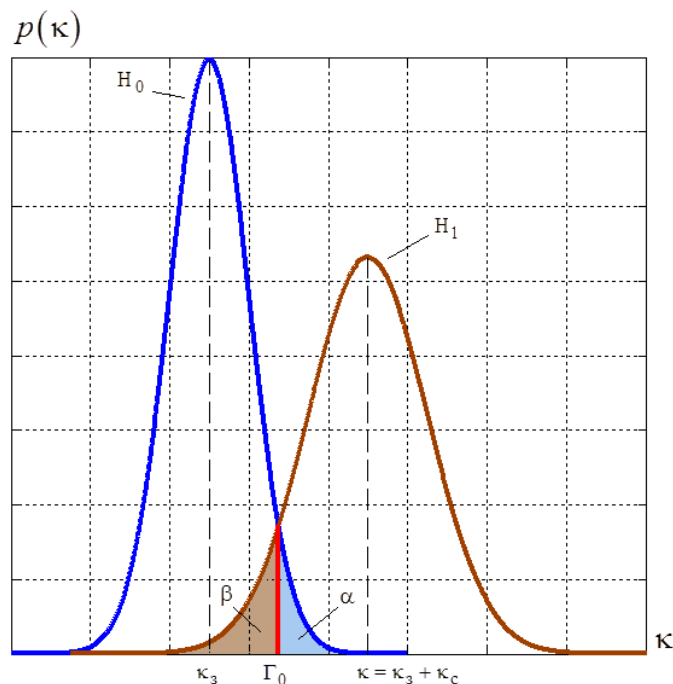


Рисунок 2.1 Розподіли кумулянтів за відсутності та наявності сигналу

Задача розпізнавання включає в себе розрізнення при кількості класів $K > 2$ (задача діагностики [6, 12]). В загальному випадку зводиться до прийняття однієї з двох гіпотез для кожної пари класів. Тобто перша гіпотеза H_n – ВВ належить до класу a_n , альтернативна гіпотеза H_{n+1} – ВВ належить до класу a_{n+1} (рис. 2.2). Перебір пар відбувається у порядку зростання теоретичного статистичного критерію.

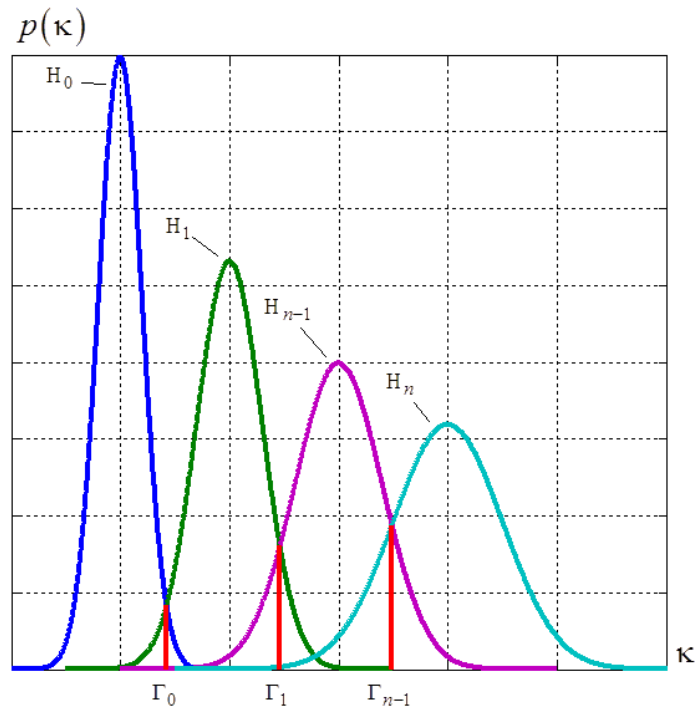


Рисунок 2.2 Розподіли кумулянтів у випадку кількості класів $K > 2$

3.2 Метод одного кумулянта

Метод одного кумулянта передбачає використання одного статистичного критерію для вирішення задач виявлення та розпізнавання. Гіпотези H_0 і H_1 стосуються розподілу оцінки статистичного критерію.

Для використання методу одного кумулянта при вирішенні задачі розрізнення двох класів випадкових величин необхідно розрахувати порогове значення Γ_0 , яке є «межею» двох класів, та об'єм вибірки N , від якого залежить точність вирішення задачі.

Після теоретичних розрахунків метод одного кумулянта буде перевірено на змодельованих адитивних сумішах, сигнал і завада в яких матимуть різні розподіли миттєвих значень.

3.2.1 Теоретична складова методу одного кумулянта

З центральної граничної теореми випливає, що оцінки при великих значеннях об'єму вибірки N матимуть наближений до нормального розподіл, який

визначається математичним сподіванням та дисперсією (2.43, 2.44, 2.50). Отже, функція розподілу оцінок кумулянтів дорівнює

$$F_{\hat{\kappa}_s}(x) = \Phi\left(\frac{x - \mathbf{M}[\hat{\kappa}_s]}{\sqrt{\mathbf{D}[\hat{\kappa}_s]}}\right), \quad (3.3)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-0,5x^2} dx$ – інтеграл імовірності.

Імовірністю потрапити в інтервал $(-\infty; \Gamma_0)$ буде значення функції розподілу оцінки за відсутності сигналу в точці Γ_0 :

$$\mathbf{P}\{\hat{\kappa}_s < \Gamma_0\} = F_{\hat{\kappa}_{s3}}(\Gamma_0) = 1 - \alpha, \quad (3.4)$$

де $F_{\hat{\kappa}_{s3}}$ – функція розподілу оцінок кумулянтів завади, α – ймовірність помилки першого роду.

Звідси маємо формулу, яка визначає залежність порогового значення для випадку завади (сигнал відсутній):

$$\frac{\Gamma_0 - \mathbf{M}[\hat{\kappa}_{s3}]}{\sqrt{\mathbf{D}[\hat{\kappa}_{s3}]}} = k_{1-\alpha}, \quad (3.5)$$

де $\mathbf{M}[\hat{\kappa}_{s3}], \mathbf{D}[\hat{\kappa}_{s3}] = c_{s3} / N$ – математичне сподівання та дисперсія розподілу оцінок кумулянтів завади відповідно, k_p – квантиль стандартного нормального розподілу порядку p .

При наявності сигналу, тобто утворенні адитивної суміші, ймовірність потрапити в інтервал $(\Gamma_0; \infty)$ матиме вигляд

$$\mathbf{P}\{\hat{\kappa}_s > \Gamma_0\} = 1 - F_{\hat{\kappa}_{sac}}(\Gamma_0) = 1 - \beta = P_{пв}, \quad (3.6)$$

де $F_{\hat{\kappa}_{sac}}$ – функція розподілу оцінок кумулянтів адитивної суміші.

Залежність порогового значення для випадку суміші (сигнал наявний):

$$\frac{\Gamma_0 - \mathbf{M}[\hat{\kappa}_{sac}]}{\sqrt{\mathbf{D}[\hat{\kappa}_{sac}]}} = k_\beta, \quad (3.7)$$

де $\mathbf{M}[\hat{\kappa}_{sac}], \mathbf{D}[\hat{\kappa}_{sac}] = c_{sac} / N$ – математичне сподівання та дисперсія розподілу оцінок кумулянтів адитивної суміші відповідно.

З виразів (3.5, 3.7) маємо систему рівнянь, що пов'язує порогове значення та об'єм вибірки:

$$\begin{cases} \Gamma_0 = \mathbf{M}[\hat{\kappa}_{s3}] + k_{1-\alpha} \sqrt{\frac{c_{s3}}{N}} \\ \Gamma_0 = \mathbf{M}[\hat{\kappa}_{sac}] + k_{\beta} \sqrt{\frac{c_{sac}}{N}} \end{cases} \quad (3.8)$$

Отже, мінімальний об'єм вибірки дорівнює:

$$N_{\min} = \left(\frac{k_{1-\alpha} \sqrt{c_{s3}} - k_{\beta} \sqrt{c_{sac}}}{\mathbf{M}[\hat{\kappa}_{sac}] - \mathbf{M}[\hat{\kappa}_{s3}]} \right)^2. \quad (3.9)$$

Виведемо формули для математичних сподівань для завади та c_{s3} оцінок кумулянтів порядків $s = \overline{2,4}$ через центральні моменти. Згідно з (2.43, 2.44) маємо:

$$\begin{cases} \mathbf{M}[\hat{\kappa}_{23}] = \kappa_{23} = \mu_{23}; \\ \mathbf{M}[\hat{\kappa}_{33}] = \kappa_{33} = \mu_{33}; \\ \mathbf{M}[\hat{\kappa}_{43}] = \kappa_{43} = \mu_{43} - 3\mu_{23}^2. \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} c_{23} = \mu_{43} - \mu_{23}^2; \\ c_{33} = \mu_{63} - 6\mu_{23}\mu_{43} - \mu_{33}^2 + 9\mu_{23}^3; \\ c_{43} = \mu_{83} - 12\mu_{23}\mu_{63} - 8\mu_{33}\mu_{53} - \mu_{43}^2 + 48\mu_{23}^2\mu_{43} + 64\mu_{23}\mu_{33}^2 - 36\mu_{23}^4; \end{cases} \quad (3.11)$$

У випадку адитивної суміші центральні моменти порядку s матимуть вигляд:

$$\mu_s(\xi_1 + \xi_2) = \mathbf{M}[(\overset{\circ}{\xi}_1 + \overset{\circ}{\xi}_2)^s], \quad (3.12)$$

де $\overset{\circ}{\xi}_n$ – центрована ВВ.

Формули математичних сподівань для адитивної суміші та c_{sac} оцінок кумулянтів (при застосуванні теорем додавання та множення математичних сподівань) приймають такий вигляд:

$$\begin{cases} \mathbf{M}[\hat{\kappa}_{2ac}] = \kappa_{2c} + \kappa_{23} = \mu_{2c} + \mu_{23}; \\ \mathbf{M}[\hat{\kappa}_{3ac}] = \kappa_{3c} + \kappa_{33} = \mu_{3c} + \mu_{33}; \\ \mathbf{M}[\hat{\kappa}_{4ac}] = \kappa_{4c} + \kappa_{43} = \mu_{4c} + \mu_{43} - 3(\mu_{2c}^2 + \mu_{23}^2). \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} c_{2ac} &= \mu_{4c} + \mu_{43} - (\mu_{2c}^2 + \mu_{23}^2) + 4\mu_{2c}\mu_{23}; \\ c_{3ac} &= \mu_{6c} + \mu_{63} - 6(\mu_{2c}\mu_{4c} + \mu_{23}\mu_{43}) - (\mu_{3c}^2 + \mu_{33}^2) + 9(\mu_{2c}^3 + \mu_{23}^3) + \\ &+ 9(\mu_{2c}\mu_{43} + \mu_{23}\mu_{4c} + 2\mu_{3c}\mu_{33} - \mu_{2c}\mu_{23}^2 - \mu_{23}\mu_{2c}^2); \\ c_{4ac} &= \mu_{8c} + \mu_{83} - 12(\mu_{2c}\mu_{6c} + \mu_{23}\mu_{63}) - 8(\mu_{3c}\mu_{5c} + \mu_{33}\mu_{53}) - (\mu_{4c}^2 + \mu_{43}^2) + \\ &+ 48(\mu_{2c}^2\mu_{4c} + \mu_{23}^2\mu_{43}) + 64(\mu_{2c}\mu_{3c}^2 + \mu_{23}\mu_{33}^2) - 36(\mu_{2c}^4 + \mu_{23}^4) + \\ &+ 16(\mu_{2c}\mu_{63} + \mu_{23}\mu_{6c} - \mu_{2c}\mu_{33}^2 - \mu_{23}\mu_{3c}^2) + 48(\mu_{3c}\mu_{53} + \mu_{33}\mu_{5c}) + \\ &+ 144(\mu_{2c}\mu_{23}^3 + \mu_{23}\mu_{2c}^3) - 132(\mu_{2c}^2\mu_{43} + \mu_{23}^2\mu_{4c}) - 96\mu_{2c}\mu_{23}(\mu_{4c} + \mu_{43}) - \\ &- 192\mu_{3c}\mu_{33}(\mu_{2c} + \mu_{23}) + 68\mu_{4c}\mu_{43} + 324\mu_{2c}^2\mu_{23}^2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.2.2 Вихідні дані для моделювання: сигнали з основними розподілами

Моделювання проведемо із використанням програмного пакету MATLAB [22, 31, 32].

Для моделювання адитивної суміші пропонується обрати такі сигнали: з рівномірним, показниковим, гауссівським розподілами. Також перевіримо метод одного кумулянта для адитивних сумішей, сигнали яких представляють процес Бунімовича–Райса з різними формами елементарних імпульсів.

В табл. 3.1 наведено обрані статистичні критерії для сигналів з перерахованими розподілами.

Таблиця 3.1 Статистичні критерії сигналів

Розподіл		Статистичний критерій
1	Гауссівський	κ_2
2	Рівномірний	κ_2, κ_4
3	Показниковий	$\kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$

Для гауссівського розподілу сигналу обрано статистичний критерій κ_2 , оскільки, починаючи з третього порядку, всі кумулянти дорівнюють нулю. Для рівномірного розподілу не обрано κ_3 , оскільки він дорівнює нулю через симетрію розподілу.

Для моделювання адитивної суміші оберемо для завади стандартний нормальний розподіл із математичним сподіванням $m_3 = 0$ та дисперсією $D_3 = 1$.

Для можливості порівняння результатів для різних розподілів, оберемо однакову середню потужність сигналів, яка співпадає з дисперсією. Нехай відношення сигнал/завада $\text{SNR} = -10$ дБ. Тоді дисперсія сигналу $D_c = 0,1$, що на один порядок менше за дисперсію завади. Враховуючи це в табл. 3.2 наведено вхідні дані сигналів.

Таблиця 3.2 Вихідні дані моделювання для сигналів

Розподіл	Параметр задання
Завада (нормальний)	$m = 0; \sigma = 1$
1	$m = 0; \sigma = 0,3162$
2	$a = 0; b = 1,0954$
3	$\lambda = 3,1623$

Для розрахунку математичних сподівань кумулянтів завади та адитивних сумішей, а також c_{s3} і c_{sac} необхідно знайти центральні моменти відповідних розподілів. Для деяких із них у відомій літературі наводяться формули лише для початкових моментів α_s або кумулянтів κ_s . У такому випадку використаємо формули зв'язку центральних і початкових моментів:

$$\mu_s = \sum_{k=0}^s C_s^k (-\alpha_1)^k \alpha_{s-k} \quad (3.15)$$

та центральних моментів і кумулянтів [23].

Формули для розрахунку моментів наведемо в табл. 3.3.

Таблиця 3.3 Центральні та початкові моменти

Розподіл	Формула
1	$\mu_s = \begin{cases} 0, & s = 2n + 1, \\ \sigma^s (s-1)!!, & s = 2n \end{cases}$
2	$\alpha_s = \frac{b^{s+1} - a^{s+1}}{(b-1)(s+1)}$
3	$\alpha_s = \frac{s!}{\lambda^s}$

Отже, користуючись (3.15) та табл. 3.3 отримаємо центральні моменти μ_s порядків $s = \overline{2,8}$ для сигналів (табл. 3.4) і завади (табл.3.5).

Таблиця 3.4 Центральні моменти сигналів

Розподіл	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
1	0,1	0	0,03	0	0,015	0	0,0105
2	0,1	0	0,018	0	0,0039	0	0,0009
3	0,1	0,0632	0,09	0,1391	0,265	0,5863	1,4832

Таблиця 3.5 Центральні моменти завади

μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
1	0	3	0	15	0	105

Використовуючи формули (3.10–3.11) розрахуємо математичні сподівання оцінок кумулянтів завади $\mathbf{M}[\hat{\kappa}_{s3}]$ та c_{s3} (табл. 3.6).

Таблиця 3.6 Характеристики розподілу завади

$\mathbf{M}[\hat{\kappa}_{23}]$	$\mathbf{M}[\hat{\kappa}_{33}]$	$\mathbf{M}[\hat{\kappa}_{43}]$	c_{23}	c_{33}	c_{43}
1	0	0	2	6	24

Користуючись формулами (3.13–3.14) розрахуємо математичні сподівання оцінок кумулянтів адитивної суміші $\mathbf{M}[\hat{\kappa}_{sac}]$ та c_{sac} (табл. 3.6).

Таблиця 3.7 Характеристики розподілу адитивних сумішей

Розподіл	$M[\hat{k}_{2ac}]$	$M[\hat{k}_{3ac}]$	$M[\hat{k}_{4ac}]$	c_{2ac}	c_{3ac}	c_{4ac}
1	1,1	0	0	2,42	7,986	35,1384
2	1,1	0	- 0,012	2,408	7,8741	34,2105
3	1,1	0,0632	0,06	2,48	8,736	43,968

Слід зазначити, що трапляються випадки, коли сума кумулянтів завади і сигналу (кумулянт адитивної суміші) менша за кумулянт завади. Тоді необхідно відобразити порогове значення дзеркально відносно математичного сподівання кумулянту завади. В цьому випадку сигнал буде наявний за умови $\hat{k}_s < \Gamma_0$.

При вирішенні практичних задач значення ймовірності помилки першого роду зазвичай обирається $\alpha = 0,01$, що дозволяє мінімізувати об'єм вибірки N й одночасно зберегти високу точність. Також задамо ймовірність правильного виявлення $P_{\text{пв}} = 0,99$, що відповідає ймовірності помилки другого роду $\beta = 0,01$. За формулами (3.8–3.9) розрахуємо порогові значення та мінімальні об'єми вибірок для оцінок $\hat{k}_s$ (табл. 3.8).

Таблиця 3.8 Порогові значення та мінімальні об'єми вибірок

Розподіл	$\hat{k}_2$		$\hat{k}_3$		$\hat{k}_4$	
	$N_{\min}$	Γ_0	$N_{\min}$	Γ_0	$N_{\min}$	Γ_0
1	4774	1,0476	—	—	—	—
2	4761	1,0477	—	—	4341486	- 0,0055
3	4836	1,0473	39586	0,0286	199845	0,0255

3.2.3 Вихідні дані для моделювання: сигнали – процеси Бунімовича–Райса

Для моделювання оберемо сигнали, які є процесами Бунімовича–Райса з такими формами елементарних імпульсів:

- 1) прямокутна;

- 2) пилкоподібна;
- 3) експоненціальна;
- 4) експоненціально-синусоїдальна.

Відношення сигнал/завада залишимо $\text{SNR} = -10$ дБ. Але через недостовірні результати моделювання при заданні малого $\lambda\tau_0$, збільшимо дисперсію завади так, щоб збереглось відношення сигнал/завада. Отже, завада має нормальний розподіл із математичним сподіванням $m_3 = 0$ та дисперсією $D_3 = 10$, а дисперсія сигналу $D_c = 1$. Обрані дані для моделювання процесу Бунімовича–Райса з різними формами елементарних імпульсів наведено в табл. 3.9.

Таблиця 3.9

Форма імпульсу		Параметри моделювання
1	Прямокутна	$\lambda = 10^4 \text{ с}^{-1}, \tau_0 = 50 \text{ мкс},$ $A = 1, \beta = 1$
2	Пилкоподібна	$\lambda = 10^4 \text{ с}^{-1}, \tau_0 = 150 \text{ мкс},$ $A = 1, \beta = 1$
3	Експоненціальна	$\lambda = 10^4 \text{ с}^{-1}, \tau_0 = 100 \text{ мкс},$ $A = 1, \beta = 1$
4	Експоненціально-синусоїдальна	$\lambda = 5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}, \tau_0 = 400 \text{ мкс},$ $f_3 = 1 \text{ МГц}, A = 1, \beta = 1$

Аналогічно з розділом 3.3.2 проведемо розрахунки всіх величин, необхідних для здійснення моделювання (табл. 3.10–3.14).

Таблиця 3.10 Центральні моменти завади

μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
10	0	300	0	$15 \cdot 10^3$	0	$1,05 \cdot 10^6$

Таблиця 3.11 Центральні моменти сигналів

Форма імпульсу	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
1	1	3	15	90	645	5355	50505
2	1	2,25	10,2	52,5	327,9107	2378,25	19668,9
3	1	2	9	44	265	1854	14833
4	1	0,0064	7,5	-	-	-	-

Оскільки відсутні формули для розрахунку кумулянтів $\kappa_4, \dots, \kappa_8$, отримати центральні моменти $\mu_4, \dots, \mu_8$ для процесу Бунімовича–Райса формою елементарного імпульсу (4) наразі неможливо. Тому в цьому дослідженні буде перевірено кумулянтний метод тільки для κ_2 для відповідного сигналу.

Таблиця 3.12 Характеристики розподілу завади

$M[\hat{\kappa}_{23}]$	$M[\hat{\kappa}_{33}]$	$M[\hat{\kappa}_{43}]$	c_{23}	c_{33}	c_{43}
10	0	0	200	6000	240000

Таблиця 3.13 Характеристики розподілу адитивних сумішей

Форма імпульсу	$M[\hat{\kappa}_{2ac}]$	$M[\hat{\kappa}_{3ac}]$	$M[\hat{\kappa}_{4ac}]$	c_{2ac}	c_{3ac}	c_{4ac}
1	11	3	12	254	9615	567240
2	11	2,25	7,2	249,2	8898,6482	461006,2436
3	11	2	6	248	8736	439680
4	11	—	—	246,5	—	—

Таблиця 3.14 Порогові значення та мінімальні об'єми вибірок

Форма імпульсу	$\hat{\kappa}_2$		$\hat{\kappa}_3$		$\hat{\kappa}_4$	
	$N_{\min}$	Γ_0	$N_{\min}$	Γ_0	$N_{\min}$	Γ_0
1	4897	10,4701	32932	0,993	161311	2,8376
2	4848	10,4725	31550	1,0145	142633	3,0177
3	4836	10,4731	39529	0,9063	199845	2,5494
4	4820	10,4739	—	—	—	—

За проведеними розрахунками побудуємо графіки (рис. 3.3–3.4) залежності ІПВ від об'єму вибірки N . Ця залежність описується формулою:

$$P_{\text{пв}} = \Phi \left(\sqrt{\frac{N}{c_{\text{sac}}}} (\kappa_{\text{sac}} - \Gamma_0) \right). \quad (3.16)$$

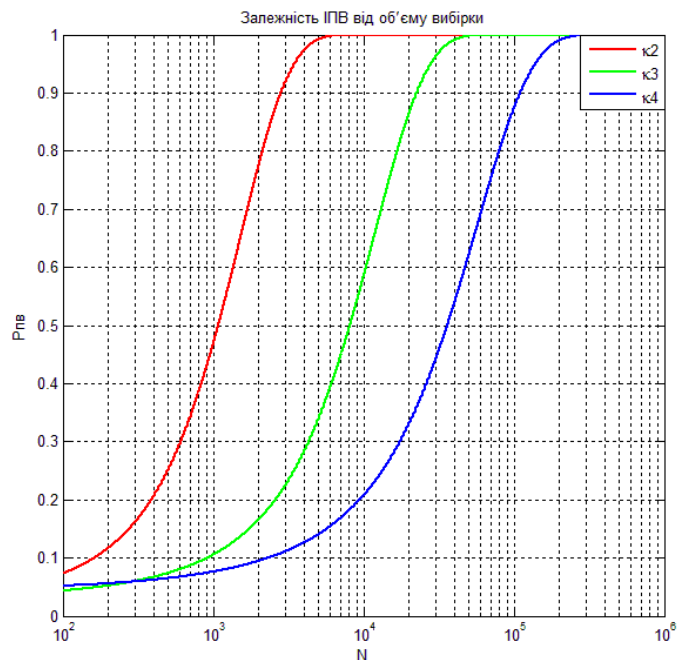


Рисунок 3.3 Залежність ІПВ при сигналі з експоненційним розподілом

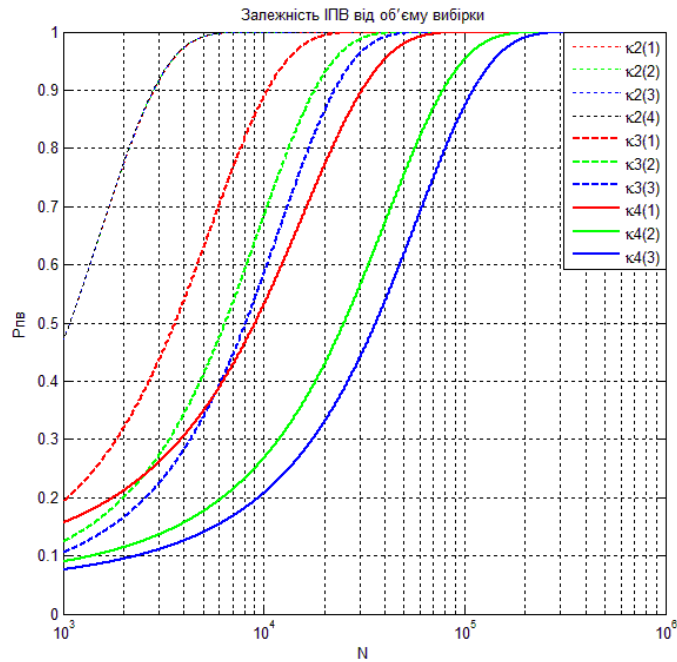


Рисунок 3.4 Залежність ІПВ. Сигнал – процес Бунімовича–Райса

Порахованих даних, наведених вище, достатньо для перевірки кумулянтного методу шляхом моделювання адитивних сумішей, оцінювання кумулянтів і підрахунку перевищень порогового значення кумулянтами.

3.2.4 Перевірка методу одного кумулянта на змодельованих адитивних сумішах

Частоту дискретизації оберемо $F_d = 48$ кГц як одну зі стандартних, що використовується в сучасних аналогово-цифрових перетворювачах. Для основних розподілів кількість реалізацій обрана $k = 10^3$, а для моделі Бунімовича–Райса через низькі обчислювальні потужності персонального комп'ютера обрано кількості реалізацій в залежності від мінімальних об'ємів вибірок: $\kappa_2 : k = 200$, $\kappa_3 : k = 80$, $\kappa_4 : k = 30$.

Для наочного представлення розподілу оцінок кумулянтів використаємо ядерну оцінку щільності ймовірності [33]:

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{Nh(N)} \sum_{k=1}^N \varphi\left(\frac{x - \xi_k}{h(N)}\right), \quad (3.17)$$

де $\varphi(x)$ – ядро, $h(N)$ – коефіцієнт внеску.

Зазвичай рекомендується [33] задавати коефіцієнт внеску $h(N) = \sigma N^{-1/5}$, де σ – середнє квадратичне відхилення досліджуваної ВВ ξ . При такому коефіцієнті внеску формула (3.17) приймає такий вигляд:

$$\hat{p}_N(x) = \frac{1}{\hat{\sigma} N^{4/5}} \sum_{k=1}^N \varphi\left(N^{1/5} \frac{x - \xi_k}{\hat{\sigma}}\right), \quad (3.18)$$

де $\hat{\sigma}$ – оцінка середнього квадратичного відхилення випадкової величини ξ .

В усіх змодельованих випадках сигнал наявний, отже виконується гіпотеза H_1 . Результати моделювання представлені часовим представленням завади, сигналу та адитивної суміші. Результати перевірки методу одного кумулянта наведені в табл. 3.14–3.15 та проілюстровані графіками порівняння теоретичних ЩІ та експериментальних ЩІ, отриманих за допомогою ядерних оцінок, оцінок кумулянтів (рис.3.5–3.12).

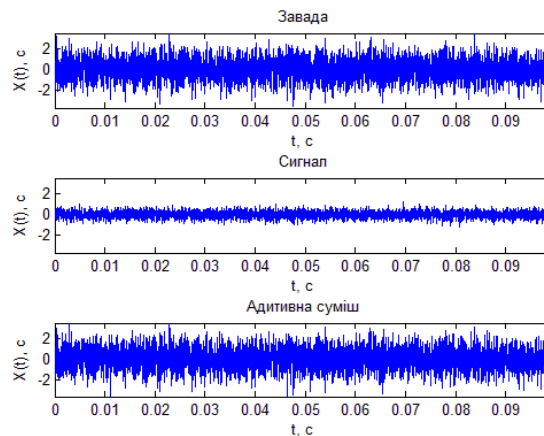


Рисунок 3.5 Реалізації. Розподіл сигналу (1)

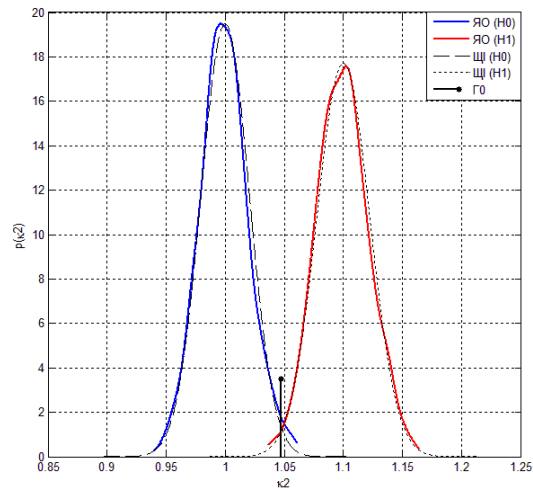


Рисунок 3.6 Теоретичні та експериментальні ЩІ оцінок $\hat{k}_2$. Розподіл сигналу (1)

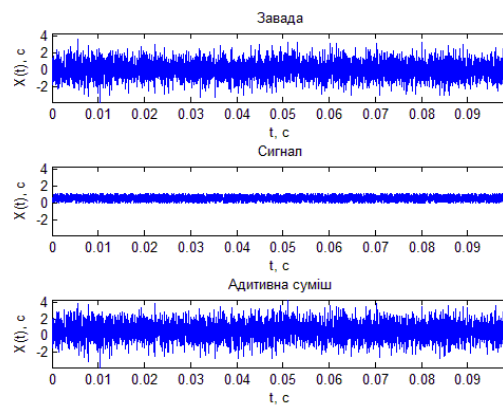


Рисунок 3.7 Реалізації. Розподіл сигналу (2)

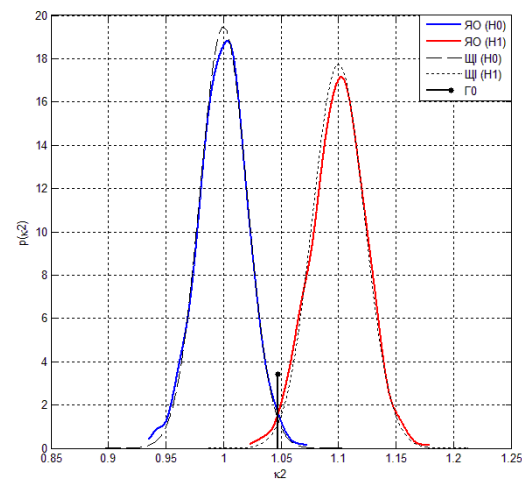


Рисунок 3.8 Теоретичні та експериментальні ЩІ оцінок $\hat{\kappa}_2$. Розподіл сигналу (2)

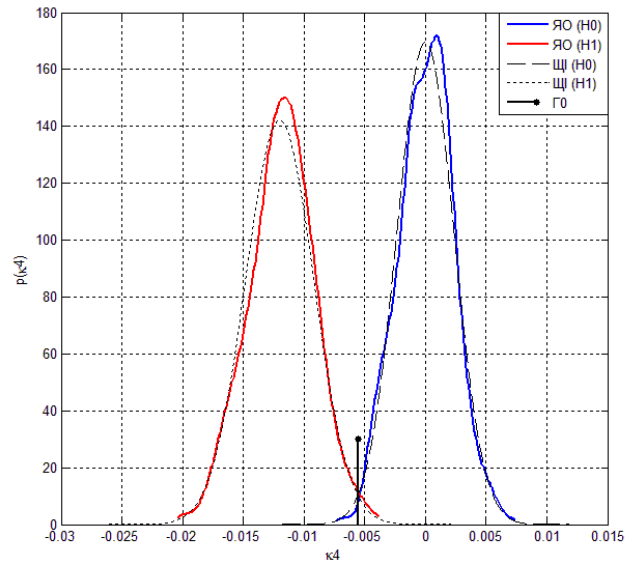


Рисунок 3.9 Теоретичні та експериментальні ЩІ оцінок $\hat{\kappa}_4$. Розподіл сигналу (2)

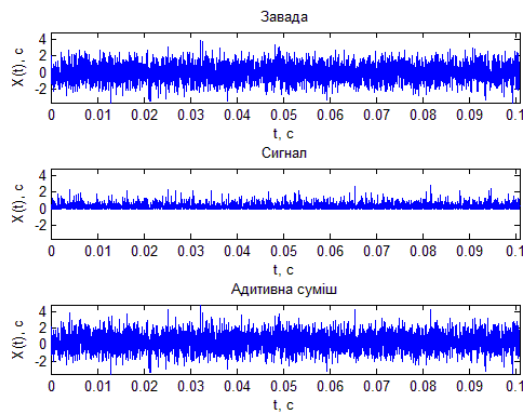


Рисунок 3.10 Реалізації. Розподіл сигналу (3)

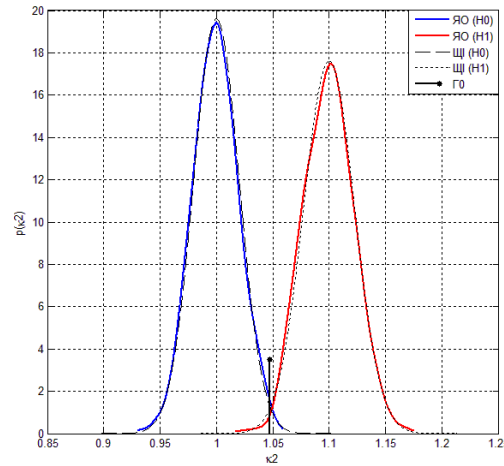


Рисунок 3.11 Теоретичні та експериментальні ЩІ оцінок $\hat{k}_2$. Розподіл сигналу (3)

Моделювання адитивної суміші з розподілом сигналу (2) для κ_4 і розподілом сигналу (3) для κ_3 і κ_4 відбувалося аналогічно, як і для κ_2 , з відповідними розрахованими об'ємами вибірок. Оскільки на практиці спостерігалась лише зміна тривалості модельованого сигналу (збільшення тривалості зі збільшенням порядку кумулянта і відповідно мінімального об'єму вибірки), часове представлення сигналів для κ_3 , κ_4 не наводиться.

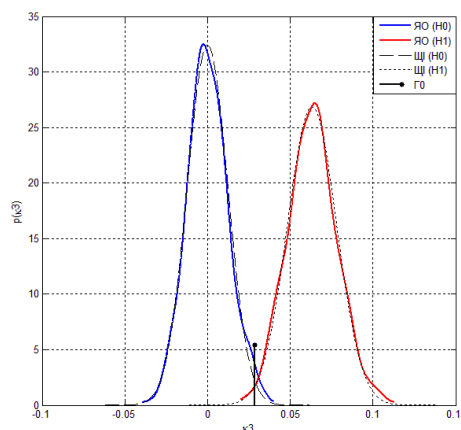


Рисунок 3.12 Теоретичні та експериментальні ЩІ оцінок $\hat{k}_3$. Розподіл сигналу (3)

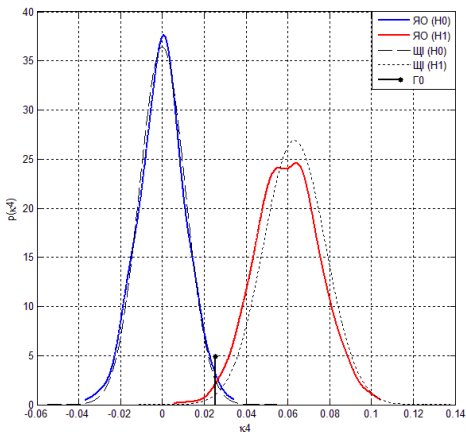


Рисунок 3.13 Теоретичні та експериментальні ЩІ оцінок $\hat{\kappa}_4$. Розподіл сигналу (3)

Таблиця 3.15 Результати оцінювання кумулянтів. Сигнали з основними розподілами

Розподіл	Оцінки для κ_s								
	$s = 2$			$s = 3$			$s = 4$		
	$\hat{\kappa}_2$	$\hat{P}_{\text{пв}}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\kappa}_3$	$\hat{P}_{\text{пв}}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\kappa}_4$	$\hat{P}_{\text{пв}}$	$\hat{\alpha}$
1	1,1	0,992	0,011	—	—	—	—	—	—
2	1,101	0,996	0,011	—	—	—	- 0,012	0,993	0,014
3	1,099	0,987	0,009	0,064	0,993	0,011	0,06	0,991	0,017

Таблиця 3.16 Відносні помилки оцінювання

Розподіл	Відносні помилки оцінювання для κ_s					
	$s = 2$		$s = 3$		$s = 4$	
	$\delta_{\kappa}, \%$	$\delta_{\text{пв}}, \%$	$\delta_{\kappa}, \%$	$\delta_{\text{пв}}, \%$	$\delta_{\kappa}, \%$	$\delta_{\text{пв}}, \%$
1	0	0,2	—	—	—	—
2	0,1	0,6	—	—	0	0,3
3	0,1	0,3	1,3	0,3	0	0,1

Аналогічним чином отримано результати експериментального виявлення сигналів, що є моделями процесу Бунімовича–Райса, на фоні завади з нормальним розподілом (рис. 3.14–3.21, табл. 3.17).

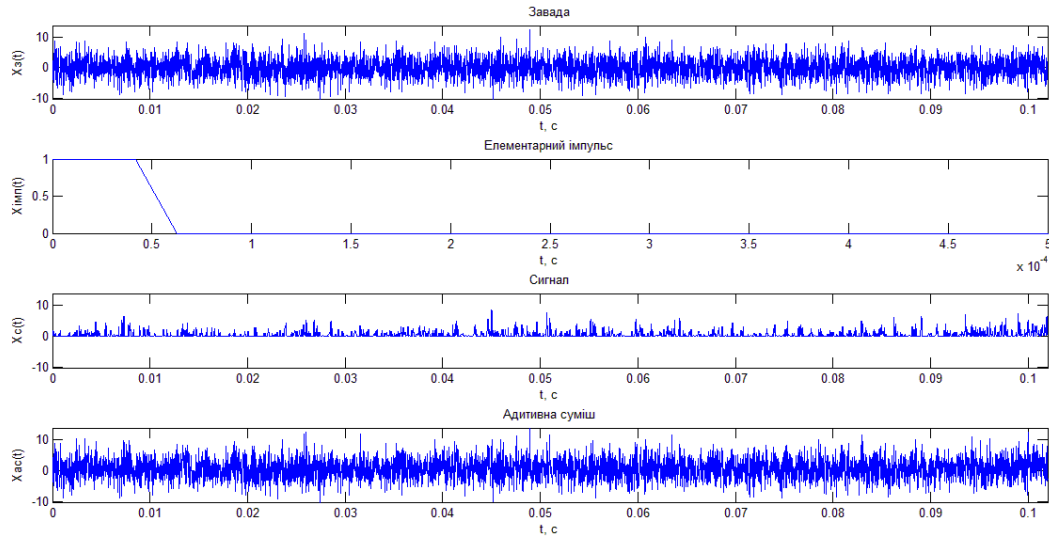


Рисунок 3.14 Реалізації. Форма імпульсу (1)

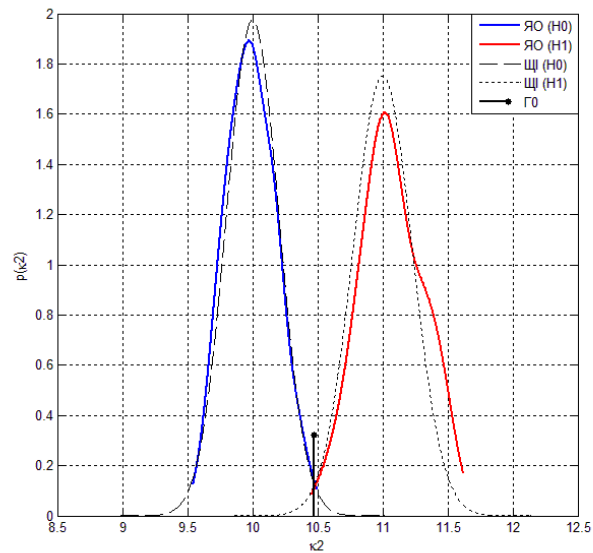


Рисунок 3.15 Теоретичні та експериментальні ЩІ оцінок $\hat{\kappa}_2$. Форма імпульсу (1)

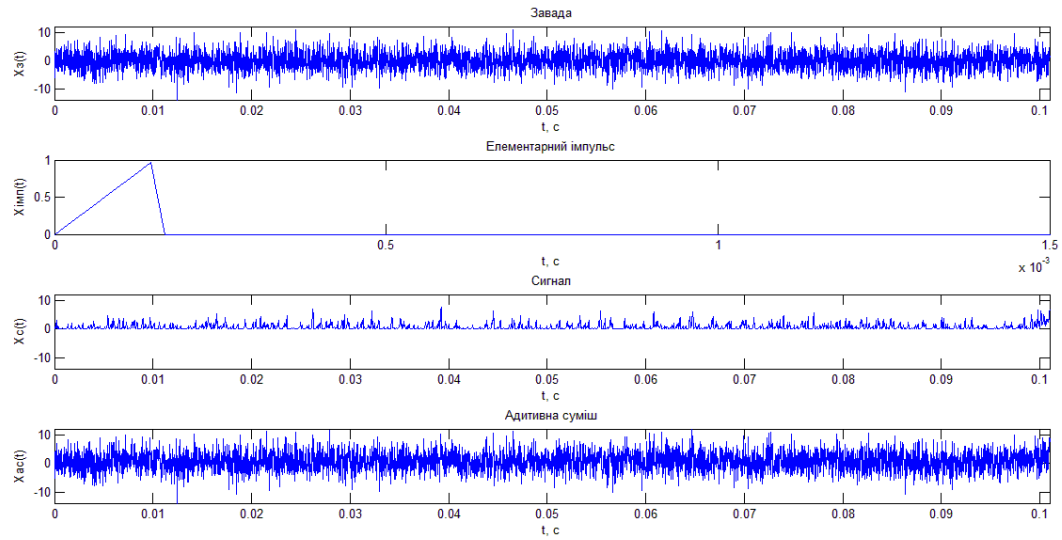


Рисунок 3.16 Реалізації. Форма імпульсу (2)

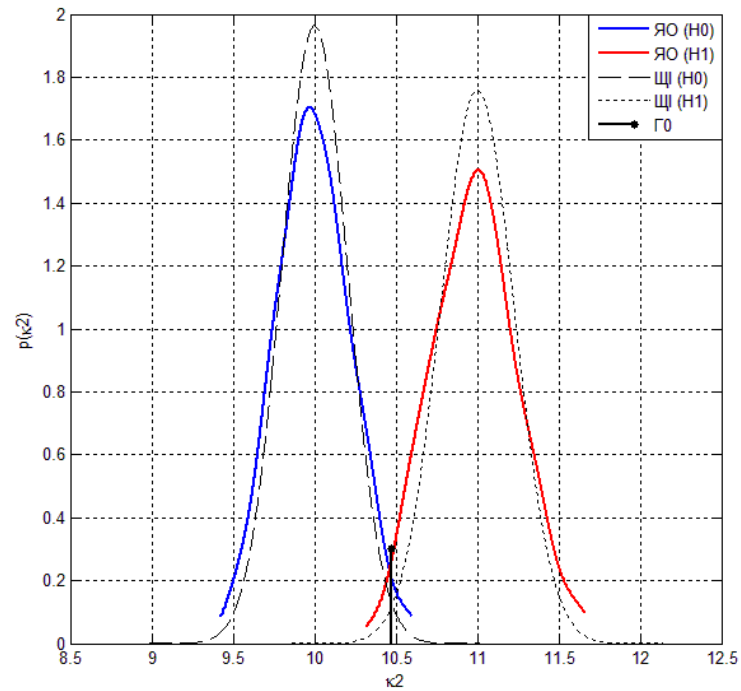


Рисунок 3.17 Теоретичні та експериментальні ШІ оцінок $\hat{k}_2$. Форма імпульсу (2)

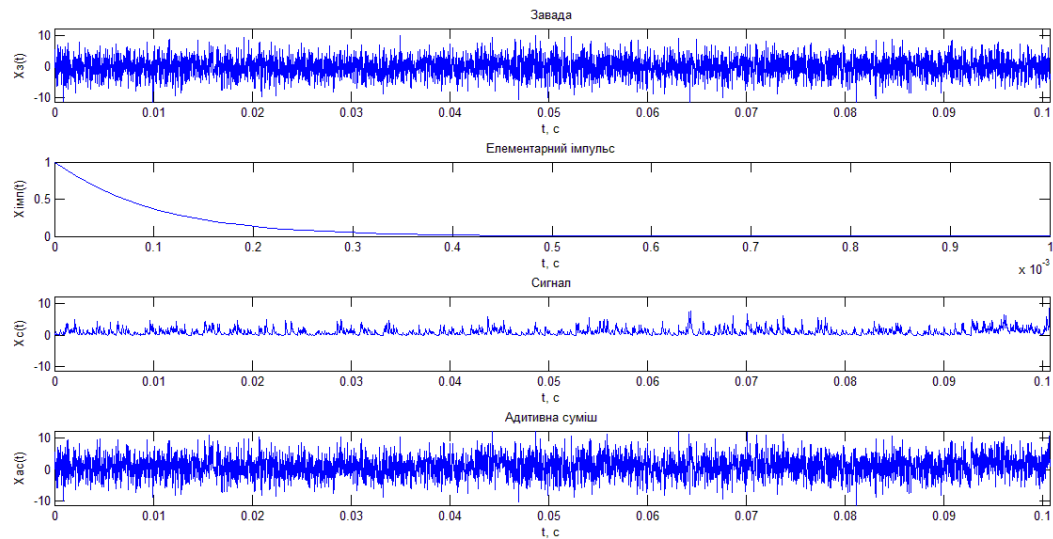


Рисунок 3.18 Реалізації. Форма імпульсу (3)

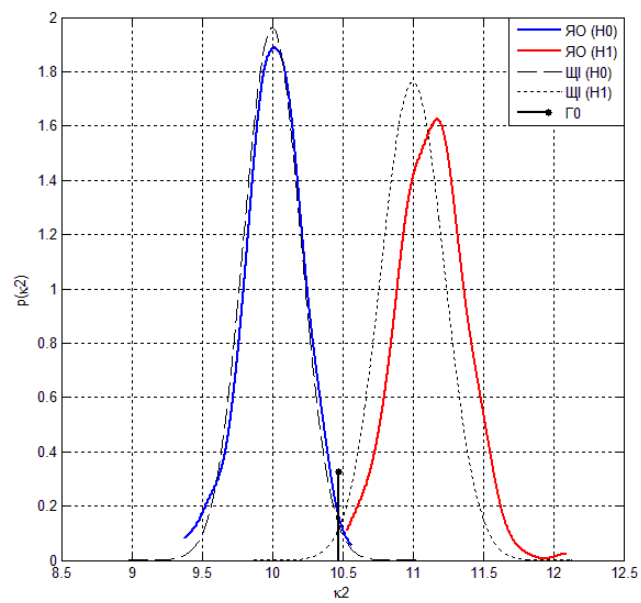


Рисунок 3.19 Теоретичні та експериментальні ЩІ оцінок $\hat{k}_2$. Форма імпульсу (3)

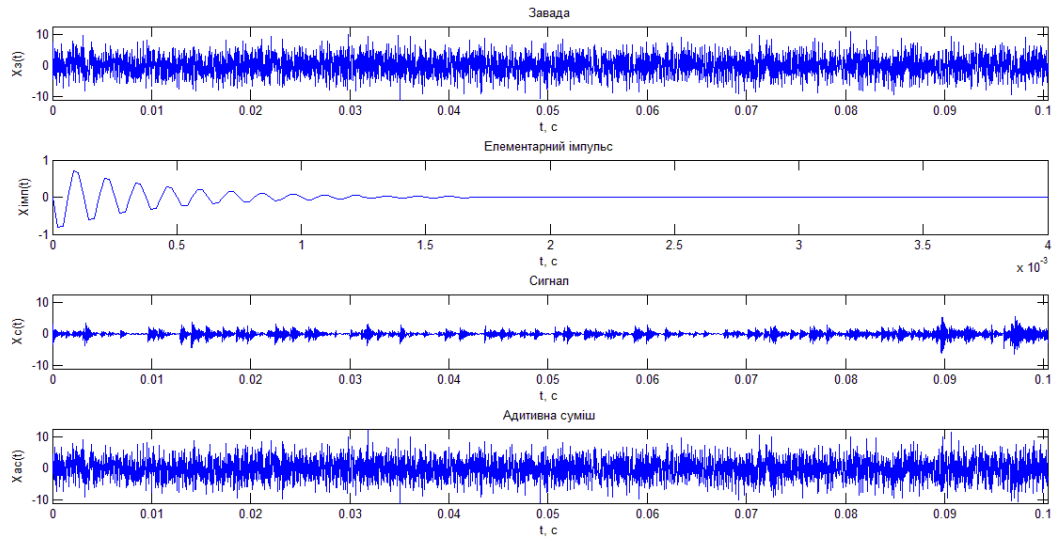


Рисунок 3.20 Реалізації. Форма імпульсу (4)

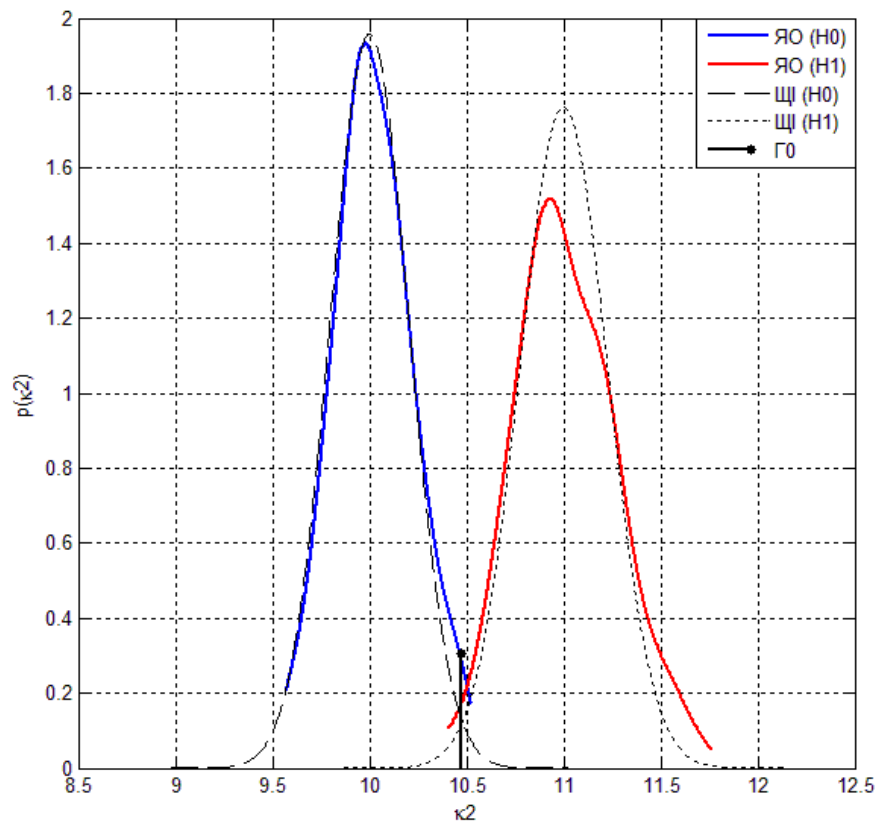


Рисунок 3.21 Теоретичні та експериментальні ЩІ оцінок $\hat{\kappa}_2$. Форма імпульсу (4)

Таблиця 3.17 Результати оцінювання кумулянтів. Сигнал – процес Бунімовича–Райса

Форма імпульсу	Оцінки та відносні помилки оцінювання для κ_s											
	$s = 2, k = 200$				$s = 3, k = 80$				$s = 4, k = 30$			
	κ_2	$\delta_{\kappa}, \%$	$\hat{P}_{\text{пв}}$	$\delta_{\text{пв}}, \%$	κ_3	$\delta_{\kappa}, \%$	$\hat{P}_{\text{пв}}$	$\delta_{\text{пв}}, \%$	κ_4	$\delta_{\kappa}, \%$	$\hat{P}_{\text{пв}}$	$\delta_{\text{пв}}, \%$
1	11,072	0,7	0,995	0,5	2,95	1,7	1	1,0	11,476	4,4	1	1,0
2	10,994	0,1	0,98	1,0	2,281	1,4	0,975	1,5	7,389	2,6	0,967	2,3
3	11,13	1,2	1	1,0	1,948	2,6	0,987	0,3	5,632	6,1	1	1,0
4	11,017	0,2	0,99	0,0	–	–	–	–	–	–	–	–

3.3 Метод двох кумулянтів

Існують випадки, коли для різних розподілів сигналів співпадають одне або більше значень кумулянтів або кумулянтних коефіцієнтів. Тоді для підвищення достовірності кумулянтного методу необхідно використовувати декілька кумулянтів або кумулянтних коефіцієнтів [10].

Використаємо пару кумулянтів κ_3 і κ_4 . У цьому випадку постановка задачі виглядає як перевірка двох гіпотез. Нульова гіпотеза $H_0: \kappa = \kappa_3 = (\kappa_{33}, \kappa_{43})$ – сигнал відсутній, альтернативна гіпотеза $H_1: \kappa = \kappa_{\text{ас}} = (\kappa_{3\text{ас}}, \kappa_{4\text{ас}})$ – сигнал наявний (адитивна суміш завади і сигналу).

Для методу двох кумулянтів, на відміну від методу одного кумулянта, замість порогового значення використовуються два еліпси розсіювання [34, 35], які відповідають кожній із гіпотез. При цьому є випадок невизначеності, коли не відбувається потрапляння пари кумулянтів у жодний із двох еліпсів.

3.3.1 Теоретична складова методу двох кумулянтів

Запишемо систему рівнянь еліпсів розсіювання для гіпотез H_0 і H_1 [6]:

$$\begin{aligned} Q_0(x, y) &= \lambda_{\alpha, 0}^2; \\ Q_1(x, y) &= \lambda_{\beta, 1}^2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

де

$$Q_0(x, y) = N \left[\frac{(x - \kappa_{33})^2}{c_{33}} - 2r_{3,4,3} \frac{(x - \kappa_{33})(y - \kappa_{43})}{\sqrt{c_{33}c_{43}}} + \frac{(y - \kappa_{43})^2}{c_{43}} \right];$$

$$Q_1(x, y) = N \left[\frac{(x - \kappa_{3ac})^2}{c_{3ac}} - 2r_{3,4,ac} \frac{(x - \kappa_{3ac})(y - \kappa_{4ac})}{\sqrt{c_{3ac}c_{4ac}}} + \frac{(y - \kappa_{4ac})^2}{c_{4ac}} \right],$$

де $r_{3,4,i}$ – коефіцієнт кореляції κ_{3i} і κ_{4i} .

При заданих імовірностях помилок першого та другого роду α і β відповідно $\lambda_{\alpha,0}$ і $\lambda_{\beta,1}$ знаходяться за формулами [6]

$$\lambda_{\alpha,0} = \sqrt{-2(1 - r_{3,4,3}) \ln \alpha};$$

$$\lambda_{\beta,1} = \sqrt{-2(1 - r_{3,4,ac}) \ln \beta}.$$
(3.20)

Коефіцієнти кореляції зазвичай знаходять шляхом оцінювання, в нашому випадку – методом комп'ютерного моделювання.

При вже відомих $r_{3,4,i}$, $\lambda_{\alpha,0}$ і $\lambda_{\beta,1}$ розв'язується чисельними методами система рівнянь (3.19), звідки знаходиться об'єми вибірок $N_{3,4}$, при яких обидва еліпси розсіювання дотикаються в точці $M_0(x_0, y_0)$.

При таких об'ємах вибірок імовірності помилок першого та другого роду визначаються відповідно [6]

$$P(H_1 | H_0) < \alpha, \quad P(H_0 | H_1) < \beta.$$

Потім необхідно підставити у рівняння (3.19) координати точки $M_0(x_0, y_0)$ та інші розраховані параметри, щоб знайти значення λ_i .

Отже, еліпси $Q_0(x, y) = \lambda_3^2$ і $Q_1(x, y) = \lambda_{ac}^2$ є розділяючими кривими для гіпотез H_0 і H_1 . Якщо значення вектора оцінок кумулянтів $\hat{\mathbf{k}} = (\hat{\kappa}_3, \hat{\kappa}_4)$ потрапляють в область $q(\lambda_3)$, що обмежена еліпсом $Q_0(x, y) = \lambda_3^2$, то приймається рішення про гіпотезу H_0 – сигнал відсутній, а якщо значення $\hat{\mathbf{k}} = (\hat{\kappa}_3, \hat{\kappa}_4)$ потрапляють в область $q(\lambda_{ac})$, обмежену еліпсом $Q_1(x, y) = \lambda_{ac}^2$, то приймається

рішення про гіпотезу H_0 – сигнал наявний. В інших випадках маємо невизначеність.

3.3.2 Перевірка методу двох кумулянтів на змодельованих адитивних сумішах

Перевірку методу проведемо для розподілів, які вже використовувались у цих дослідженнях. Оберемо стандартний нормальний розподіл завади та показниковий розподіл сигналу (табл. 3.2) та наведемо відповідні розрахунки для моделювання в табл. 3.18.

Таблиця 3.18 Розрахунки для моделювання

Сигнали	$M[\hat{\kappa}_3]$	$M[\hat{\kappa}_4]$	c_3	c_4
Завада	0	0	6	24
Адитивна суміш	0,0632	0,06	8,736	43,968

Для кожної гіпотези знайдемо коефіцієнт кореляції шляхом комп'ютерного моделювання завади та адитивної суміші об'ємом вибірки $N = 10^5$ і кількістю реалізацій $l = 500$. Маємо такі результати:

$$\hat{r}_{3,4,3} = -0,045; \quad \hat{r}_{3,4,ac} = 0,232;$$

$$\hat{\lambda}_{\alpha,0} = 3,032; \quad \hat{\lambda}_{\beta,1} = 2,952.$$

Розв'язуючи систему рівнянь (), знайдемо об'єм вибірки N , при якому еліпси дотикаються, та точку дотику $M_0(x_0, y_0)$ і занесемо результати в табл.

3.19. Для перевірки знайдемо λ_3 і λ_{ac} .

Сигнали	N	$M_0(x_0, y_0)$	λ_i
Завада	60529	(0,0286;0,0165)	3,025
Адитивна суміш			2,957

Неважко побачити, що порахований об'єм вибірки більший ніж окремо для κ_3 , але менший ніж окремо для κ_4 .

Тепер змодельюємо $k = 500$ реалізацій завад та адитивних сумішей з об'ємом вибірки $N = 60529$. Результати оцінювання нанесемо на вище розраховані та побудовані еліпси розсіювання для обох гіпотез. На рис. 3.22 виконується нульова гіпотеза – сигнал відсутній, а на рис. 3.23 виконується альтернативна – сигнал наявний.

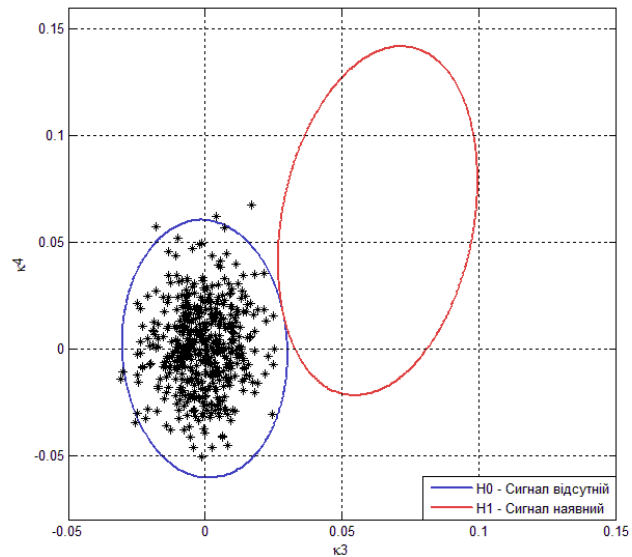


Рисунок 3.22 – Сигнал відсутній

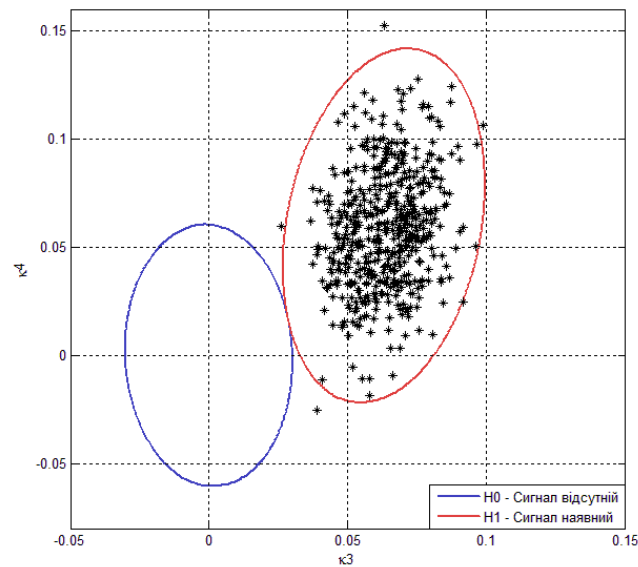


Рисунок 3.23 – Сигнал наявний

Висновки до розділу 3

У цьому розділі було описано постановки задач виявлення та розпізнавання. Вирішення цих задач відбувається шляхом прийняття однієї з двох гіпотез простих гіпотез про розподіл певних оцінок характеристик досліджуваної величини. В задачі виявлення: основна гіпотеза – сигнал відсутній, альтернативна гіпотеза – сигнал наявний. В задачі розпізнавання: основна гіпотеза – випадкова величина належить одному класу, альтернативна гіпотеза – іншому класу.

Розглянуто два види кумулянтних методів: метод одного кумулянта та метод двох кумулянтів. В деяких випадках використовуються кумулянтні коефіцієнти замість кумулянтів. Для обох методів характерне задання помилок оцінювання першого та другого роду. Параметри розподілів сигналу та завади використовуються як вхідні дані для розрахунку.

Для використання методу одного кумулянта необхідно знайти мінімальний об'єм вибірки та порогове значення, перебільшення кумулянтом якого свідчить про наявність сигналу (альтернативна гіпотеза).

Для методу двох кумулянтів розраховуються параметри еліпсів розсіювання для кожної з гіпотез. Мінімальний об'єм вибірки обирається так, щоб обидва еліпси мали одну точку дотику. Пара кумулянтів є координатами точки. При потраплянні цієї точки в площу, обмежену еліпсом, приймається одна з двох гіпотез, а за межами еліпсів маємо невизначеність.

Обидва методи перевірені на змодельованих адитивних сумішах завади та сигналу. Дослідження підтвердили, що обидва представлені методи придатні для виявлення сигналів на фоні завади.

Для методу одного кумулянта при основних максимальна відносна помилка вимірювання кумулянтів адитивних сумішей становить 1,3% для кумулянта третього порядку при показниковому розподілі сигналу, відносна помилка експериментальної ІПВ знаходиться в межах 0,6%. Для сигналу, який представлений процесом Бунімовича–Райса з різними формами елементарних імпульсів: максимальна відносна помилка вимірювання кумулянтів адитивних сумішей

становить 6,1% для кумулянта четвертого порядка при экспоненциальной форме импульса, относительная погрешность экспериментальной ППВ находится в пределах 2,3%.

4 КУМУЛЯНТНИЙ АНАЛІЗ ЗАПИСІВ МУЗИЧНИХ ІНСТРУМЕНТІВ

4.1 Постановка експерименту – обладнання та музичні інструменти, вихідні дані для вимірювань

Проведені дослідження з моделями сигналів показали, що кумулянтні методи дійсно дають змогу виявляти та розрізняти різні акустичні сигнали. Їхні позитивні результати дали поштовх для проведення наступних досліджень, в яких фігурують реальні акустичні сигнали.

Враховуючи те, що на сьогоднішній день стрімко розвиваються та вдосконалюються системи виявлення та розпізнавання мовленнєвих та музичних сигналів, для вимірювання кумулянтів і кумулянтних коефіцієнтів у реальних акустичних сигналах обрано музичні сигнали.

Для цього дослідження обрано три основні групи музичних інструментів за способом утворення акустичних коливань: струнні, духові та ударні. Також до досліджуваних музичних сигналів увійшло вокальне виконання – сольний спів.

Групу струнних інструментів представляє клавішний інструмент – фортепіано «Червоний жовтень» 1954 року випуску, групу духових – труба 1969 року випуску, групу ударних – тибетська чаша, вокальне виконання – Антон Березницький (баритон).

Для запису та обробки музичних сигналів обрано таке обладнання: звукова карта Steinberg UR22C (32 біт / 192 кГц), мікрофон ST-M01 (конденсаторний, кардіоїда), програмний пакет Steinberg Cubase 5. Блок-схема комплексу, який використовувався у дослідженнях зображено на рис. 4.1.



Рисунок 4.2 Запис фортепіано

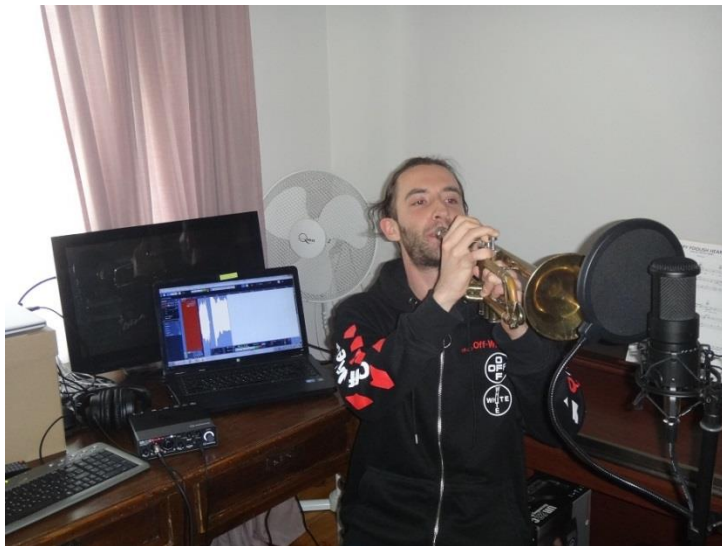


Рисунок 4.3 Запис труби



Рисунок 4.4 Запис тибетської чаші



Рисунок 4.5 Запис вокалу

4.2 Обробка записів. Вимірювання кумулянтів і кумулянтних коефіцієнтів

Всього зроблено кількість записів $k = 50$ відтворень однієї ноти для кожного з інструментів. Типовий вигляд сигналів представлено на рис. 4.6.

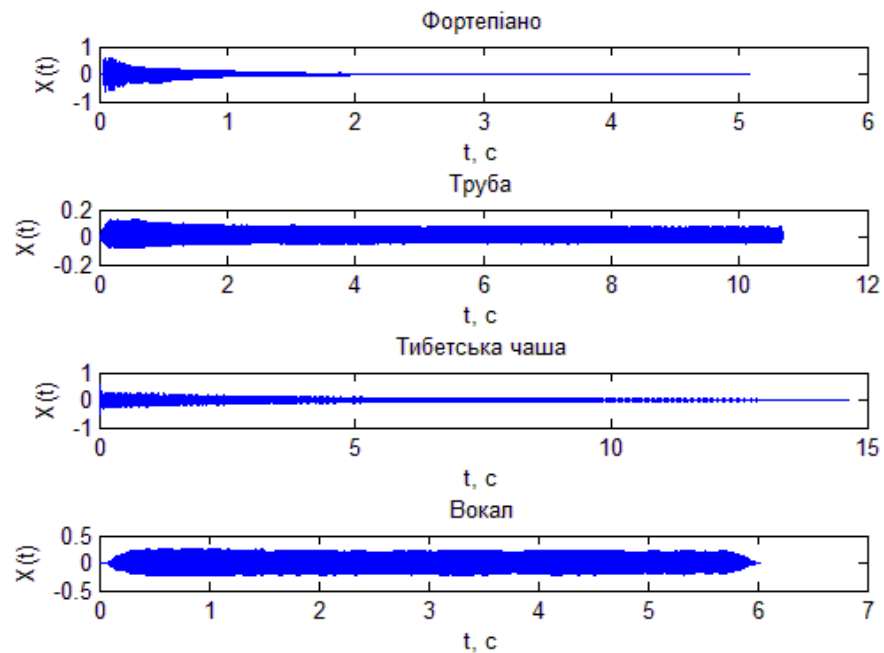


Рисунок 4.6 Часове представлення записаних музичних сигналів

Для вибору проміжку запису для вимірювання кумулянтів і кумулянтних коефіцієнтів використовувалась ADSR-обвідна сигналу (рис. 4.7), що розподіляє музичний сигнал на такі області:

- 1) Attack (Атака) – час, за який гучність ноти досягає свого максимального рівня;
- 2) Decay (Спадання) – час, за який відбувається перехід від максимального рівня до рівня затримки;
- 3) Sustain (Затримка) – час утримання ноти, для області характерний постійний рівень гучності;
- 4) Release (Згасання) – час, за який гучність згасає до нуля після того, як нота вже не утримується.

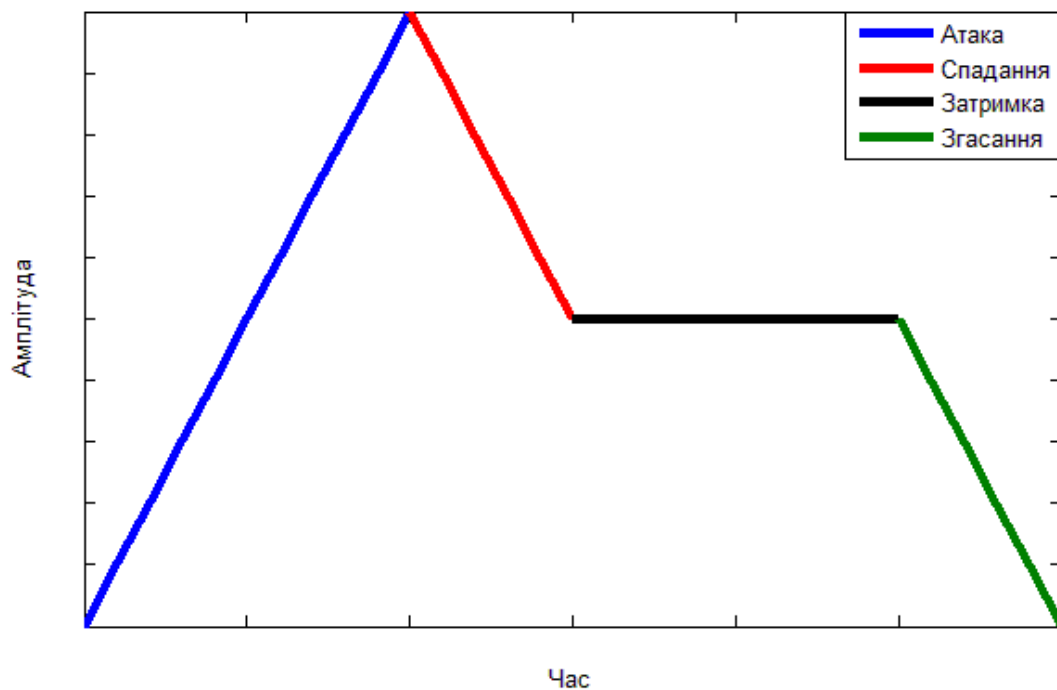


Рисунок 4.7 ADSR-обвідна сигналу

Вимірювання проводились в області Затримки (Sustain), оскільки саме в ній спостерігається умовна стаціонарність досліджуваного процесу. Області Затримки для записаних сигналів представлені на рис. 4.8.

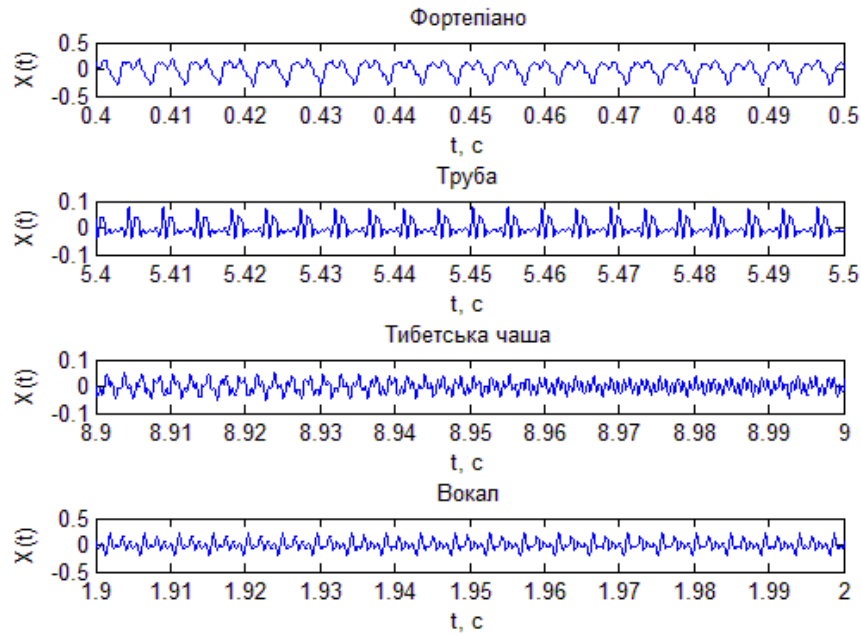


Рисунок 4.8 Затримка (Sustain) типових музичних сигналів

Для якісних результатів і можливості порівняння для всіх інструментів обрано тривалість фрагменту запису в області Затримки $t_{\text{зап}} = 2$ с, звідки об'єм досліджуваної вибірки $N_{\text{зап}} = 1,92 \cdot 10^5$. Порядок об'єму вибірки співпадає з попередніми дослідженнями на моделях.

Для всіх $k = 50$ частин записів музичних сигналів зроблено оцінки кумулянтів κ_s порядків $s = \overline{1,4}$ та кумулянтних коефіцієнтів γ_s порядків $s = \overline{3,4}$. Середні значення вищезазначених кумулянтів і кумулянтних коефіцієнтів наведені в табл. 4.2

Таблиця 4.2 Оцінки кумулянтів і кумулянтних коефіцієнтів типових музичних сигналів

Джерело сигналу		$\hat{\kappa}_1^{\text{сер}} \cdot 10^{-7}$	$\hat{\kappa}_2^{\text{сер}} \cdot 10^{-3}$	$\hat{\kappa}_3^{\text{сер}}$	$\hat{\kappa}_4^{\text{сер}}$	$\hat{\gamma}_3^{\text{сер}} \cdot 10^{-2}$	$\hat{\gamma}_4^{\text{сер}} \cdot 10^{-2}$
1	Фортепіано	-6,33	1,08	$3,97 \cdot 10^{-6}$	$7,99 \cdot 10^{-7}$	8,06	53,47
2	Труба	-2,09	3,2	$1,35 \cdot 10^{-4}$	$7,11 \cdot 10^{-6}$	70,26	48,62
3	Тибетська чаша	-1,75	63,42	$3,01 \cdot 10^{-7}$	$-2,54 \cdot 10^{-7}$	1,61	-51,95
4	Вокал	1,49	26,78	$1 \cdot 10^{-3}$	$-1,87 \cdot 10^{-4}$	22,69	-12,5

4.3 Результати експерименту

Результати вимірювань кумулянтів і кумулянтних коефіцієнтів показали, що найбільш значущими для розрізнення сигналів є коефіцієнти асиметрії γ_3 та ексцесу γ_4 . Оскільки ці коефіцієнти нормовані по дисперсії, результати їхнього вимірювання можна порівняти для сигналів різної гучності.

По-перше, одразу кидається у вічі, що представлені музичні сигнали мають негауссівський розподіл, оскільки коефіцієнти асиметрії та ексцесу відмінні від нуля.

По-друге, за результатами вимірювань можна побачити, що для сигналів труби та вокалу коефіцієнти асиметрії відрізняються приблизно на один порядок від сигналів фортепіано та тибетської чаші. У свою чергу коефіцієнти ексцесу для фортепіано та труби додатні, а для тибетської чаші та вокалу – від’ємні. На рис. 4.9 наочно представлено результати вимірювань у вигляді $\gamma_4(\gamma_3)$.

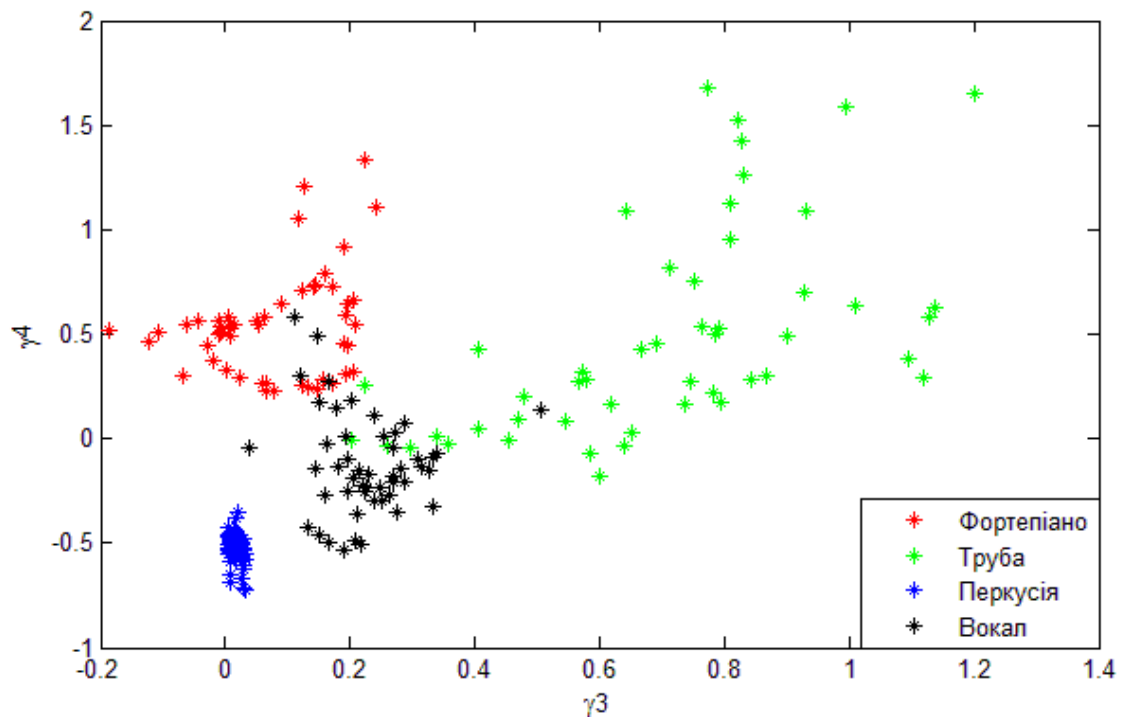


Рисунок 4.9 Коефіцієнти асиметрії та ексцесу

Дивлячись на рис. 4.9 стає очевидно, що виміряні коефіцієнти асиметрії та ексцесу для кожного виду сигналів утворюють окремі області. Щоб унаочнити результати та виокремити ці області, побудуємо еліпси розсіювання $\gamma_4(\gamma_3)$ для всіх чотирьох джерел музичних сигналів.

На рис. 4.10–4.11 наведено побудовані еліпси розсіювання для кожної з областей з різною точністю – $\pm\sigma$ і $\pm 2\sigma$ відповідно (з імовірністю потрапляння 0,6826 та 0,9544 відповідно).

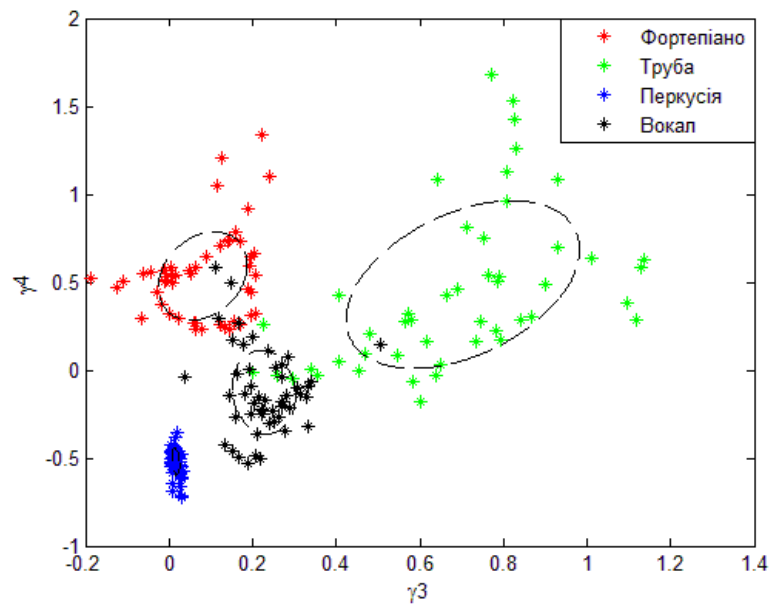


Рисунок 4.10 Еліпси розсіювання $\pm\sigma$

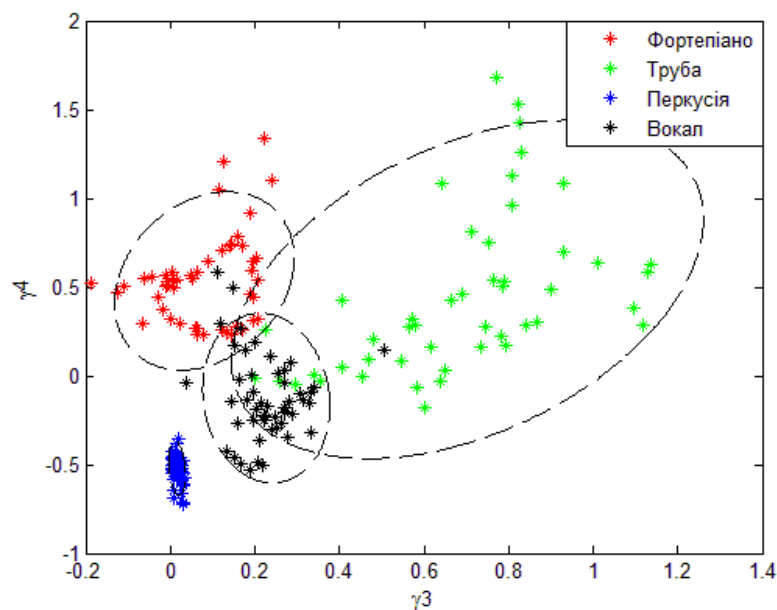


Рисунок 4.11 Еліпси розсіювання $\pm 2\sigma$

Найбільша кучність результатів вимірювання спостерігається для сигналів перкусії, а найбільший розкид значень – для сигналів труби. Також спостерігається перетин еліпсів розсіювання для сигналів фортепіано, труби та вокалу на рис. 4.11. Найбільше перекривання спостерігається для пар кумулянтних коефіцієнтів труби та вокалу. Цю ситуацію можна поліпшити збільшенням кількості записів для зменшення розсіювання оцінок.

Висновки до розділу 4

В цьому розділі описано дослідження типових сигналів музичних інструментів. Записи зроблені для таких груп інструментів: клавішні – фортепіано, духові – труба, перкусія – тибетська чаша. Також четвертим музичним сигналом обрано вокал.

Результати вимірювань кумулянтів і кумулянтних коефіцієнтів в області Затримки (Sustain) показали, що найбільш значущими ймовірнісними характеристиками для розрізнення цих сигналів є коефіцієнти асиметрії та ексцесу.

Пари кумулянтних коефіцієнтів для кожного виду сигналу утворюють окремі області розсіювання, для описання яких використано еліпси розсіювання.

Проведені дослідження показали, що музичні сигнали мають відмінні від гауссівського розподіли. Вимірювання пар кумулянтних коефіцієнтів асиметрії та ексцесу дає можливість розрізняти музичні сигнали методом двох кумулянтних коефіцієнтів із використанням еліпсів розсіювання.

Подальші дослідження потребують обробки більшої кількості записів музичних сигналів для більшої кількості видів музичних інструментів.

ВИСНОВКИ

Під час виконання цієї роботи було опрацьовано наукові джерела стосовно обраної теми. Розглянуто методи розпізнавання образів, які застосовуються в автоматизованих системах розпізнавання. Оскільки ці методи виявились достатньо складними в реалізації та практичному застосування і досліджувані сигнали мають негауссівський розподіл миттєвих значень, для проведення цих досліджень було обрано кумулянтні методи.

Після розкриття сутності статистичної обробки акустичних сигналів, було досліджено змодельовані сигнали, які є процесами Бунімовича–Райса. Оцінено кумулянти порядків з першого по четвертий та кумулянтні коефіцієнти – коефіцієнти асиметрії та ексцесу змодельованих сигналів. Відносна помилка оцінювання не перевищує 7%.

Представлено теоретичний опис методів одного та двох кумулянтів та наведено відповідні розрахункові формули для використання цих методів. Задачі виявлення та розпізнавання розв'язуються шляхом прийняття рішення про одну з двох гіпотез відносно значень кумулянтів. Для обох методів характерне знаходження мінімального об'єму вибірки досліджуваної реалізації та задання імовірностей помилок першого та другого роду та імовірності правильного виявлення. Метод одного кумулянта потребує розрахунку порогового значення, а метод двох – розрахунку еліпсів розсіювання.

Було проведено дослідження змодельованих акустичних сумішей завад і сигналів із використанням кумулянтних методів. Розподіл миттєвих значень завади – гауссівський. Сигнали представлені випадковими процесами з типовими розподілами миттєвих значень (гауссівським, рівномірним та показниковим) та процесами Бунімовича–Райса з прямокутною, пилкоподібною, експоненціальною та експоненціально-синусоїдальною формою елементарних імпульсів.

Результати моделювання адитивних сумішей представлено графічно у вигляді часових представлень завад, сигналів та адитивних сумішей. Результати оцінювання кумулянтів представлені графіками ядерних оцінок у співставленні

з теоретичними щільностями імовірностей. Для адитивних сумішей з типовими розподілами сигналів: відносна помилка оцінювання кумулянтів знаходиться в межах 1,3%, відносна помилка знаходження імовірності правильного виявлення – 0,6%, з сигналами – процесами Бунімовича–Райса: максимальна відносна помилка оцінювання кумулянтів становить 6,1%, відносна помилка знаходження імовірності правильного виявлення – 2,3%.

Проведено експериментальні дослідження типових музичних сигналів: клавішних, духових, перкусії та вокалу. Вимірювання кумулянтів і кумулянтних коефіцієнтів здійснено для 50 записів кожного виду інструменту в області Затримки (Sustain). Тривалість фрагментів записів становить 2 секунди, об'єм досліджуваних вибірок – $1,92 \cdot 10^5$, кумулянти порядків з першого по четвертий, кумулянтні коефіцієнти – коефіцієнти асиметрії та ексцесу.

Найбільш інформативними характеристиками виявились коефіцієнти асиметрії та ексцесу. Результати оцінювання представлені у вигляді пари цих кумулянтних коефіцієнтів і одразу свідчать про те, що досліджувані сигнали мають відмінний від гауссівського розподіл миттєвих значень. Пари коефіцієнтів утворюють окремі області, які відповідають різним видам музичних сигналів. Побудовано еліпси розсіювання з імовірністю потрапляння 0,6826 та 0,9544. Найбільша кучність спостерігається для перкусії, найбільший розкид – для духових інструментів.

Результати дослідження доводять, що методом двох кумулянтних коефіцієнтів можна розрізняти музичні сигнали за групами джерел цих сигналів. Рекомендуються подальші дослідження музичних сигналів з використанням кумулянтних методів з розширенням різноманіття музичних сигналів. Для покращення результатів рекомендується збільшення об'єму досліджуваної вибірки шляхом збільшення часу дискретизації. Також рекомендується збільшити кількість досліджуваних записів для зменшення розкиду результатів оцінювання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов: Пер. с англ. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 368 с.
2. Фомин Я.А., Тарловский Г.Р. Статистическая теория распознавания образов. – М.: Радио и связь, 1986. – 264 с.
3. Meffert B., Hochmuth O. Werkzeuge der Signalverarbeitung: Grundlagen, Anwendungsbeispiele, Übungsaufgaben. – Berlin: Open-Access-Publikationsserver der Humboldt-Universität zu Berlin, 2019. – 320 S.
4. Апаратно-програмне забезпечення моніторингу об'єктів генерування, транспортування та споживання теплової енергії: Монографія / За ред. В.П. Бабака. – К.: Інститут технічної теплофізики НАН України, 2016. – 298 с.
5. Неразрушающий контроль / Под общ. ред. В.В. Ключева В. В. Т. 7 : В 2 кн. Кн. 1 : В.И. Иванов, И.Э. Власов. Метод акустической эмиссии. Кн. 2: Ф.Я. Балицкий, А.В. Барков, Н.А. Баркова и др. Вибродиагностика. – 2-е изд., испр. – М.: Машиностроение, 2006. – 829 с.
6. Красильников А.И., Берегун В.С., Полобюк Т.А. Кумулянтные методы в задачах шумовой диагностики теплоэнергетического оборудования / Под общ. ред. А.И. Красильникова. – К.: Освіта України, 2019. – 228 с.
7. Бабак С.В., Мыслович М.В., Сысак Р.М. Статистическая диагностика электротехнического оборудования. – К.: Інститут електродинаміки НАН України, 2015. – 456 с.
8. Tschoepe C., Wolff M. Anwendungen der akustischen Mustererkennung // 24. Konferenz Elektronische Sprachsignalverarbeitung. – 2013. – S. 205–210.
9. Schneider W., Rösler H. Untersuchung der Klarinette und der Flöte im Hinblick auf chaotisches Verhalten // Didaktik der Physik - Physikalisches Institut der Universität Erlangen-Nürnberg. – 1990. – S. 99–113.

10. Пилипенко К.П., Продеус А.Н. Использование кумулянтных коэффициентов для определения пола диктора // Электроника и связь. – 2012. – № 1 (66). – С. 13–17.
11. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. – М.: Советское радио, 1978. – 376 с.
12. Берегун В.С., Красильников О.І. Аналіз кумулянтних методів шумової діагностики теплоенергетичного обладнання // 9-а Національна науково-технічна конференція «Неруйнівний контроль та технічна діагностика – UkrNDT-2019» (19–21 листопада 2019 року): Матеріали конференції. – К.: УТ НКТД, 2019. – С. 168–173.
13. Берегун В.С. Застосування кумулянтних коефіцієнтів акустичних сигналів в задачах контролю та діагностики // «КОНСОНАНС–2017», акустичний симпозіум (Київ, 2–3 жовтня 2017 р.): Збірник праць. – К.: Інститут гідромеханіки НАН України. – С. 41–47.
14. Берегун В.С., Гармаш О.В., Красильников А.И. Среднеквадратические ошибки оценок кумулянтных коэффициентов пятого и шестого порядков // Электронное моделирование. – 2014. – Т. 36, № 1. – С. 17–28.
15. Березницький А.Є. Виявлення шумового сигналу в адитивній суміші на основі кумулянта другого порядку // Електронна та Акустична Інженерія. – 2021. – Т. 4, № 2. DOI: <https://doi.org/10.20535/2617-0965.eae.227817>
16. Бабак В.П., Берегун В.С., Красильников А.И., Полобюк Т.А. Имитационное моделирование шумовых сигналов, возникающих при работе теплоэнергетического оборудования // Научни известия на НТСМ. – 2013. – № 2 (139). – С. 124–128.
17. Вапник В.Н., Червоненкис А.Я. Теория распознавания образов (статистические проблемы обучения). – М.: Наука, 1974. – 416 с.
18. Васильева И.К., Ельцов П.Е. Методы распознавания образов: учебное пособие по лабораторному практикуму. – Харьков: Национальный аэрокосмический университет "Харьковский авиационный институт", 2008. – 56 с.

19. Герасимович А.И., Матвеева Я.И. Математическая статистика. – Мн: Вышэйшая школа, 1978. – 200 с.
20. Леман Э. Проверка статистических гипотез: Пер. с англ. Ю.В. Прохорова. – М.: Наука, 1964. – 500 с.
21. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.
22. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – 3-е изд., перераб. и доп. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 758 с.
23. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений: Пер. с англ. В.В. Сазонова, А.Н. Ширяева; Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Наука, 1966. – 588 с.
24. Берегун В.С., Горовецька Т.А., Красильников О.І. Статистичний аналіз шумів колінних суглобів // Акустичний вісник. – 2011. – Т. 14, № 2. – С. 3–15.
25. Красильников О.І., Берегун В.С., Гармаш О.В., Полобюк Т.А. Система для акустичного діагностування вузлів теплоенергетичного обладнання // Системи обробки інформації: збірник наукових праць. – Х.: Харківський університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, 2015. – Вип. 6 (131). – С. 107–110.
26. Берегун В.С., Красильников А.И., Полобюк Т.А. Анализ влияния фильтрации на чувствительность кумулянтного метода обнаружения акустических сигналов утечки // Промислова теплотехніка. – 2018. – Т. 40, № 2. – С. 78–83. DOI: <https://doi.org/10.31472/ihe.2.2018.11>
27. Игнатов В.А. Теория информации и передачи сигналов. – М.: Советское радио, 1979. – 280 с.
28. Krasil'nikov A.I., Beregun V.S. Applications of the orthogonal representation method for determining the probability densities of typical models of fluctuation signals // Radioelectronics and Communications Systems. – 2011. – Vol. 54, No. 11. – P. 592–599.
29. Берегун В.С., Красильников О.І. Розрізнення процесів Бунімовича–Райса на основі коефіцієнтів асиметрії та ексцесу // VIII Міжнародна науково-

практична конференція «Обробка сигналів і негауссівських процесів», присвячена пам'яті професора Ю.П. Кунченка (Черкаси, 25–26 травня 2021 року): Тези доповідей. – Ч: ЧДТУ, 2021. – С. 82–84.

30. Krasil'nikov A.I., Beregun V.S. Analysis of Estimation Error of Skewness and Kurtosis of Bunimovich-Rice Processes with Exponentially Power Waveform of Pulses // Radioelectronics and Communications Systems. – 2020. – Vol. 63, No. 8. – P. 430–440. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0735272720080051>
31. Иглин С.П. Теория вероятностей и математическая статистика на базе MATLAB. – Харьков: НТУ "ХПИ", 2006. – 612 с.
32. Дьяконов В.П. MATLAB и SIMULINK для радиоинженеров. – М.: ДМК Пресс, 2011. – 976 с.
33. Берегун В.С., Красильников А.И. Аппроксимация плотности вероятности отрезками рядов по ортогональным полиномам. – К.: Освита України, 2019. – 190 с.
34. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высшая школа, 2001. – 575 с.
35. Гнеденко Б.В. Курс теорії ймовірностей. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. – 464 с.