

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**Навчально-науковий інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу**

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

_____ Оксана ТИМОЩУК

«__» _____ 2025 р.

Дипломна робота

на здобуття ступеня бакалавра

за освітньо-професійною програмою «Системний аналіз і управління»

спеціальності 124 «Системний аналіз»

на тему: «Фрактальні моделі часових рядів»

Виконала:

студентка IV курсу, групи КА-12

Бестужева Поліна Олександрівна _____

Керівник:

професор, доктор фіз.-мат. наук

Бондаренко Віктор Григорович _____

Консультант з економічного розділу:

доцент, к. е. н. Рощина Надія Василівна _____

Консультант з нормоконтролю:

к. фіз.-мат. н., Статкевич Віталій Михайлович _____

Рецензент:

доцент, к. фіз.-мат. н., Ільєнко Андрій Борисович _____

Засвідчую, що у цій дипломній роботі
немає запозичень з праць інших авторів
без відповідних посилань.

Студентка Бестужева П.О.

Київ – 2025 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Навчально-науковий інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу

Рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)

Спеціальність – 124 «Системний аналіз»

Освітньо-професійна програма «Системний аналіз і управління»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Оксана ТИМОЩУК

«__» _____ 2025 р.

ЗАВДАННЯ

на дипломну роботу студентці

Бестужевій Поліні Олександрівні

1. Тема роботи «Фрактальні моделі часових рядів», керівник роботи Бондаренко В.Г., професор, доктор фіз.-мат. наук, затверджені наказом по університету від «26» травня 2025 р. № 1759-с
2. Термін подання студентом роботи 11.06.2025
3. Вихідні дані до роботи: науково-методична література відповідно до теми роботи.
4. Зміст роботи: визначення методів моделювання та прогнозу фрактального броунівського руху, побудова оцінок дисперсії, статистики, однокрокового коефіцієнта кореляції траєкторій та дослідження їх збіжності за граничними теоремами.
5. Перелік ілюстративного матеріалу (із зазначенням плакатів, презентацій тощо): презентація.
6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Економічний	доцент, к. е. н., Рощина Н.В.		

7. Дата видачі завдання 14.04.2025

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломної роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Затвердження тематики бакалаврської дипломної роботи (БДР)	04.02.2025 – 20.02.2025	Виконано
2	Ознайомлення із структурою БДР згідно з Положенням про державну атестацію студентів НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського»	21.02.2025 – 04.03.2025	Виконано
3	Ознайомлення із ДСТУ 3008:2015	05.03.2025 – 11.03.2025	Виконано
4	Проведення перших досліджень за темою роботи, обговорення результатів із науковим керівником	12.03.2025 – 05.04.2025	Виконано
5	Завершення роботи над першим варіантом дипломної роботи	06.04.2025 – 15.04.2025	Виконано
6	Проведення роботи над експериментальною та практичною частиною дипломної роботи, аналіз результатів й написання програмної реалізації	16.04.2025 – 19.05.2025	Виконано
7	Виконання функційно-вартісного аналізу розробленого програмного продукту	20.05.2025 – 24.05.2025	Виконано
8	Підготовка презентації до захисту БДР	24.05.2025 – 02.06.2025	Виконано
9	Остаточне оформлення БДР та перевірка отриманих результатів	03.06.2025 – 15.06.2025	Виконано

Студентка

Поліна БЕСТУЖЕВА

Керівник

Віктор БОНДАРЕНКО

РЕФЕРАТ

Дипломна робота: 96 сторінок, 13 таблиць, 26 рисунків, 2 додатки, 27 джерел.

ФРАКТАЛЬНИЙ БРОУНІВСЬКИЙ РУХ, ПАРАМЕТР ХАРСТА, fBm, ARIMA, ПРОГНОЗУВАННЯ ЧАСОВИХ РЯДІВ, САМОПОДІБНІСТЬ, ПЕРСИСТЕНТНІСТЬ, АНТИПЕРСИСТЕНТНІСТЬ.

Об'єкт дослідження — фрактальний броунівський рух (fractal Brownian motion, fBm).

Предмет дослідження — методи моделювання та прогнозування часових рядів з довготривалою пам'яттю на основі fBm.

Мета роботи — дослідження математичних властивостей fBm та побудова ефективних методів прогнозування часових рядів з його використанням.

Методи дослідження — теорія стохастичних процесів, чисельне моделювання, аналіз коваріаційних структур, методи умовного математичного сподівання, ARIMA-моделювання, функціонально-вартісний аналіз.

У роботі досліджено математичні основи fBm, зокрема властивості самоподібності, інкрементної стаціонарності та гауссівської природи. Описано та проаналізовано три класичні методи моделювання fBm. Побудовано оцінки основних параметрів fBm, перевірено статистичні гіпотези на основі граничних теорем. Здійснено прогнозування fBm за допомогою методу умовного математичного сподівання та моделі ARIMA. Проведено оцінювання точності за критерієм MSE.

Програмну реалізацію fBm виконано в середовищі Google Colaboratory мовою програмування Python із використанням бібліотек FBM, NumPy, statsmodels, matplotlib та інших. Результати роботи можуть бути використані для аналізу, моделювання та прогнозування часових рядів у фінансовій, інженерній, гідрологічній та телекомунікаційній сферах.

ABSTRACT

Thesis: 96 pages, 13 tables, 26 figures, 2 appendices, 27 references.

FRACTIONAL BROWNIAN MOTION, HURST PARAMETER, fBm, ARIMA, TIME SERIES FORECASTING, SELF-SIMILARITY, PERSISTENCE, ANTIPERSISTENCE.

Object of research — fractional Brownian motion (fBm).

Subject of research — methods of modeling and forecasting long-memory time series based on fBm.

Purpose of the study — to investigate the mathematical properties of fBm and to develop effective methods for forecasting time series using this model.

Research methods — theory of stochastic processes, numerical simulation, covariance structure analysis, conditional expectation methods, ARIMA modeling, and functional-cost analysis.

The thesis examines the mathematical foundations of fractional Brownian motion, including properties such as self-similarity, increment stationarity, and Gaussian behavior. Three classical fBm simulation methods are described and implemented. A comparative analysis of these methods is conducted in terms of accuracy, complexity, and computational cost. Estimates of the main fBm parameters are constructed, and statistical hypotheses are tested based on limit theorems. Forecasting of fBm trajectories is carried out using the conditional expectation method and the ARIMA model. Forecasting accuracy is evaluated using the mean squared error (MSE) criterion.

The program implementation of fBm modeling was performed in the Google Colaboratory environment using the Python programming language and libraries such as FBM, NumPy, statsmodels, matplotlib, and others. The results of this work can be applied to the analysis, modeling, and forecasting of time series in the financial, engineering, hydrological, and telecommunication domains.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	8
ВСТУП.....	9
РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ МОДЕЛЮВАННЯ.....	11
1.1 Поняття часових рядів та їх класифікація.....	11
1.2 Властивості фрактального броунівського руху.....	14
1.3 Статистичні характеристики приростів fBm	17
1.4 Визначення методів моделювання fBm	18
1.4.1 метод Хоскінга.....	18
1.4.2 метод розкладу Чолеського	19
1.4.3 метод Девіса-Гарте.....	20
1.4.4 Порівняння методів та вибір кращого.....	22
1.5 Прогнозування фрактального броунівського руху.....	23
1.5.1 Теорія прогнозування методом умовного математичного сподівання.....	23
1.5.2 Теорія прогнозування за допомогою ARIMA.....	26
Висновки до розділу 1.....	26
РОЗДІЛ 2 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА РЕЗУЛЬТАТИ.....	28
2.1 Побудова оцінок параметрів фрактального броунівського руху.....	29
2.1.1 Антиперсистентна модель fBm при заданому параметрі Харста та різних об'ємах вибірки.....	29
2.1.2 Персистентна модель fBm при заданому параметрі Харста та різних об'ємах вибірки.....	33
2.1.3 Аналіз результатів консистентних оцінок.....	36
2.2 Побудова статистик фрактального броунівського руху та дослідження збіжності за граничними теоремами.....	37
2.3 Реалізація прогнозування фрактального броунівського руху.....	40
2.4 Порівняння методів прогнозу за точністю для різних fBm	47

Висновки до розділу 2.....	48
РОЗДІЛ 3 ФУНКЦІОНАЛЬНО-ВАРТІСНИЙ АНАЛІЗ ПРОДУКТУ.....	49
3.1 Постановка задачі проектування.....	50
3.2 Обґрунтування функцій програмного продукту.....	50
3.3 Обґрунтування системи параметрів ПП.....	53
3.4 Аналіз експертного оцінювання параметрів.....	56
3.5 Аналіз рівня якості варіантів реалізації функцій.....	60
3.6 Економічний аналіз варіантів розробки ПП.....	62
3.7 Вибір кращого варіанту ПП техніко-економічного рівня.....	67
Висновки до розділу 3.....	67
РОЗДІЛ 4 ІНФОРМАЦІЙНА БЕЗПЕКА ТА ОХОРОНА ПРАЦІ.....	69
4.1 Основні фактори ризику при роботі за ПК.....	69
4.2 Мінімізація навантаження та дотримання норм.....	70
4.3 Пожежна та інформаційна безпека.....	70
Висновки до розділу 4.....	72
ВИСНОВКИ.....	73
ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ.....	75
ДОДАТОК А КОДОВА РЕАЛІЗАЦІЯ.....	78
ДОДАТОК Б ПРЕЗЕНТАЦІЙНІ МАТЕРІАЛИ.....	85

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

1. fBm (fractional Brownian motion) – фрактальний броунівський рух.
2. H (Hurst) – параметр Харста, показує самоподібність процесу fBm, $H \in (0,1)$.
3. ARIMA (Autoregressive integrated moving average) – авторегресійна інтегрована модель ковзного середнього.
4. MSE (Mean Squared Error) – середньоквадратична помилка, міра точності прогнозу.
5. ПП – програмний продукт.
6. ПК – персональний комп'ютер.
7. ПЗ – програмне забезпечення.

ВСТУП

У сучасній теорії стохастичних процесів зростає зацікавленість до моделей, які виходять за межі традиційних понять та знань про незалежність та короткчасну взаємозалежність між спостереженнями. Однією з фундаментальних моделей, що дозволяє описувати поведінку таких явищ з довготривалою пам'яттю, є фрактальний броунівський рух (fractional Brownian motion, fBm). Він є розширеним класичним броунівським процесом, який вводить додатковий параметр опису самоподібності руху. Це параметр Харста, H , його показник лежить в межах від 0 до 1. Значення параметра H відображає ступінь автокореляції між приростами процесу fBm та визначає рівень довготривалої залежності часового ряду [1, 10, 14].

Процес fBm є гауссівським, з властивостями автомодельності та інкрементної стаціонарності. Така його поведінка дає можливість описувати складні часові структури, де класичні припущення щодо «рожевого шуму» та короткотривалості процесів не спрацьовують. Головною перевагою фрактального броунівського руху є здатність моделювати корельовані прирости на довгих часових проміжках, це в свою чергу забезпечує якісно новий рівень у розробці математичних моделей та побудові прогнозів для динамічних систем. Як наслідок, реалізація моделювання за допомогою fBm знайшла широке застосування у різноманітних прикладних галузях, наприклад, у телекомунікаціях, біомедичному моніторингу, гідрології, теорії трафіку даних тощо [1, 2, 10].

Разом з тим, практичне використання fBm має свої труднощі та задачі для вирішення. Зокрема, це ідентифікація та оцінка параметрів процесу, побудова реалізацій з урахуванням кореляційної структури, та створення прогнозу, який враховував би специфіку моделі. Методи прогнозування, що базуються на умовному математичному сподіванні, вимагають точного врахування характеристик коваріаційної матриці приростів. Це зумовлює

складність чисельної реалізації, але забезпечує високу точність при відповідному калібруванні [10, 14, 16].

Метою даної роботи є формалізація та узагальнення математичних засад фрактального броунівського руху, fBm. Були проведені дослідження щодо його статистичних властивостей, проаналізовані методи моделювання та реалізовані чисельні експерименти для перевірки асимптотичної поведінки статистик. Також розглянуто побудову прогнозу декількома способами з урахуванням властивостей довготривалої пам'яті fBm.

Здійснено порівняння підходів до прогнозування на основі методу умовного математичного сподівання та класичної моделі ARIMA, проведено оцінювання точності за відповідними критеріями (наприклад, показник точності MSE), і також обґрунтовано ефективність використання фрактальних моделей у задачах прогнозування.

Отримані результати можуть бути використані для подальших прикладних досліджень та для покращення математичних методів у теорії стохастичних процесів, зокрема, для аналізу часових рядів зі складною структурою залежностей. Теоретичні розробки та експериментальні перевірки будуть корисними при розробці програмного забезпечення для прогнозування різноманітних фінансово-економічних чи інженерних системах.

РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ МОДЕЛЮВАННЯ ЧАСОВИХ РЯДІВ

У цьому розділі розглядаються основні теоретико-математичні положення, які лежать в основі моделювання часових рядів із довготривалою пам'яттю. Особлива увага приділена опису фрактальному броунівському руху, fBm. Він є одним з універсальних підходів для опису поведінки складних стохастичних процесів з автокореляційною структурою.

Розділ містить класифікацію часових рядів, опис властивостей та параметрів fBm, таких як самоподібність, інкрементна стаціонарність і значення показника параметра Харста, H. Детально висвітлені статистичні характеристики приростів процесу, включно з дисперсією, коваріацією та кореляцією. Також наведені методи оцінювання цих характеристик.

Проведено дослідження щодо вибору кращого методу генерації процесу серед відомих алгоритмів, таких як метод Хоскінга, Чолеського та Девіда-Гарте.

Окремий підпункт присвячено методу побудови прогнозу на основі умовного математичного сподівання. Його теоретична основа є ефективною для передбачення поведінки часового рядів з довготривалою залежністю.

Наведені положення формують математичне підґрунтя для реалізації чисельних алгоритмів та подальшого аналізу практичних результатів роботи.

1.1 Поняття часових рядів та їх класифікація

Часовим рядом називають впорядковану послідовність числових спостережень. Вони зафіксовані у з певною періодичністю та характеризують поведінкову зміну певного явища у динаміці. Математично його можна представити у вигляді послідовності $\{X_t\}_{t=1}^T$ [25], де X_t – значення

спостережуваної змінної в момент часу t при T кількості моментів спостережень.

Дослідження та аналіз часових рядів здійснюється з метою виявлення закономірностей змін величин з часом, й також для побудови математичних моделей та прогнозування майбутніх змін. Їх застосування є дуже поширеним в [26] фінансах, телекомунікаціях, економіці, біомедичних дослідженнях, метеорології тощо.

Кожен ряд має свої властивості, залежно від його ознак стаціонарності можна виокремити наступну класифікацію, описану нижче.

1. Стаціонарний часовий ряд. У ньому середнє значення, дисперсія та автокореляційна функція не змінні в часі. Такі ряди описують стабільні у часі процеси без трендів або сезонності [25]. Для слабкої стаціонарності необхідні умови (1.1).

$$E[X_t] = \mu = \text{const}, D(X_t) = \sigma^2 = \text{const}, \text{cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h) \quad (1.1).$$

2. Нестационарний часовий ряд. Такі ряди мають змінні середнє значення, дисперсію або структуру кореляцій. Інакше кажучи це, ряди з трендом та сезонними коливаннями. Для їх моделювання часто використовують диференціювання або перетворення Бокса-Кокса [27].
3. Стохастичний ряд. Він описує реалізацію випадкових процесів, що мають шум. Аналізується за допомогою ймовірнісних методів [25].
4. Детерміністичний ряд. Має чіткі виражені аналітичні залежності між значеннями. Математично це може виглядати так $X_t = \alpha t + \beta$ або $X_t = A \sin(\omega t + \varphi)$.

Кожен часовий ряд має свою структуру. Тому ще однієї класифікацією рядів є опис за моделями, що це описують.

1. Лінійні моделі.

Авторегресійна модель AR [26]:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t \quad (1.2)$$

Модель ковзного середнього MA [26]:

$$X_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q} \quad (1.3)$$

Комбінації вище описаних моделей ARMA та ARIMA. Вони є ефективні при слабко стаціонарних рядах [26].

2. Моделі із сезонною компонентою, SARIMA. Такі моделі враховують повторювану структуру значень в спостереженнях.
3. Гібридні моделі, наприклад GARCH та нейронні мережі. Поєднують в собі лінійні та нелінійні структури.
4. Фрактальні моделі. Наприклад фрактальний броунівський рух, fBm [1, 25], та фрактальний гауссівський шум (fractal gaussian noise, fGn) [27]. Такі моделі описують процеси із довготривалою пам'яттю. У таких рядах автокореляція повільно спадає:

$$\rho(h) \sim h^{2H-2}, H \in (0,1) \quad (1.4)$$

Під час опису часових рядів неможливо не згадати про функцію автокореляції. Автокореляційна функція (autocorrelation function, ACF) є однією із важливих інструментів при їх аналізі. Завдяки графічному зображенню ACF можна виявити тренд, сезонність та тип моделі для подальшого дослідження часового ряду [26].

$$\rho(h) = \frac{cov(X_t, X_{t+h})}{D(X_t)} \quad (1.5)$$

Підсумовуючи, поняття часових рядів охоплюють широкий спектр типів і структур. Коректний їх аналіз дозволяє не лише формалізувати досліджувану зміну процесу в часі, але й здійснити точні та ефективні прогнози на основі відомих моделей.

1.2 Властивості фрактального броунівського руху

Фрактальний броунівський рух fBm, позначається як $B_H(t)$ при $t \geq 0$, - це стаціонарний, гауссівський випадковий процес із нульовим математичним сподіванням та параметром самоподібності $0 < H < 1$, параметр Харста H [1].

$$\begin{cases} B_H(0) = 0, & E[B_H(t)] = 0 \\ R(t, s) = E[B_H(t)B_H(s)] = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}) \end{cases} \quad (1.6)$$

при $0 < H < 1$, звідки $DB_H(t) = t^{2H}$.

Тобто n -вимірний розподіл визначається ймовірнісною щільністю [1]

$$p(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = p(t_1, \dots, t_n, x) = \text{sech} \left\{ -\frac{1}{2} (Q^{-1}x, x) \right\} \quad (1.7)$$

де кореляційна матриця Q складається з елементів $q_{jk} = R(t_j, t_k)$.

Якщо $H=0.5$, то fBm є стандартним вінерівським процесом: $B_{\frac{1}{2}}(t) = w(t)$.

Для значень показників параметра Харста $H < \frac{1}{2}$, послідовність приростів траєкторії fBm називають «рожевим шумом», і від'ємність коваріації означає швидко мінливість значень. Для такого фрактального броунівського процесу прийнята термінологія «антиперсистентний рух». Наприклад, серед практичних даних таку властивість мають фінансові вибірки.

А для значень показників параметра Харста, що відповідають $H > \frac{1}{2}$, послідовність приростів фрактального броунівського руху називається «чорним шумом», а процес характеризується довгою пам'яттю і є «персистентним». У практичній реалізації та застосуванні таку властивість персистентності мають дані, що описують фізичні процеси, наприклад, статистика сонячної активності.

На рисунку 1.1 покажемо різницю поведінки фрактального броунівського руху, fBm, із різними значеннями параметра Харста. Для порівняння візьмемо антиперсистентний рух із $H = 0.125$, персистентний процес $H=0.7$ та стандартний вінерівський з $H=0.5$.

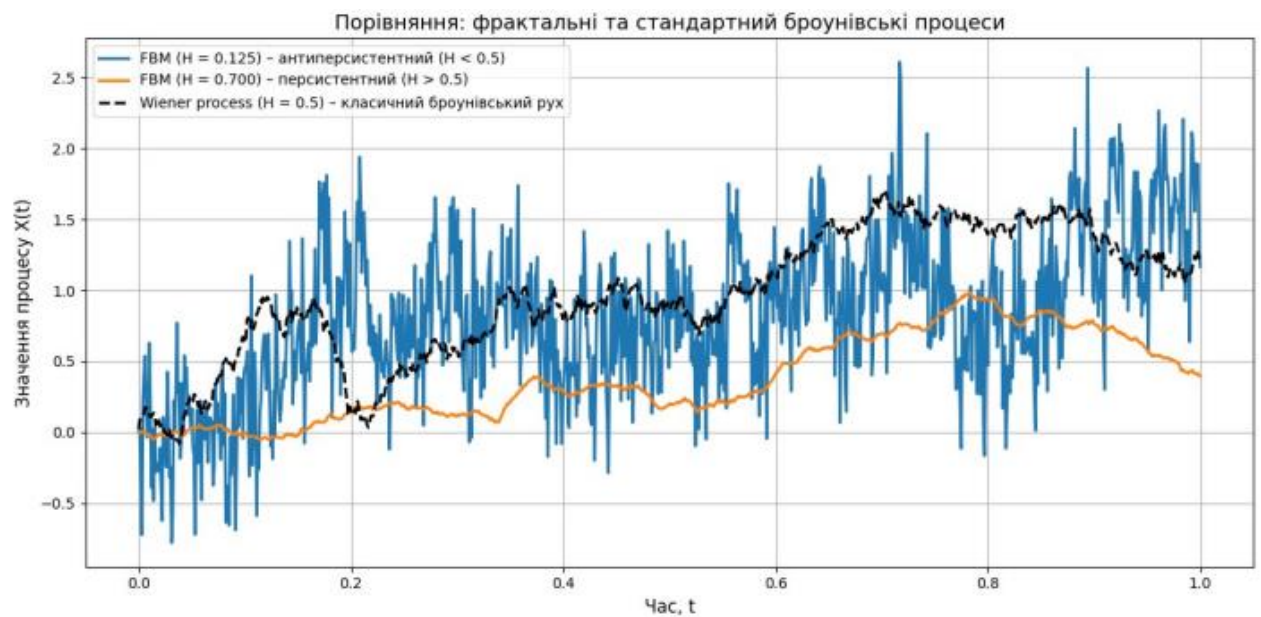


Рисунок 1.1 Порівняння траєкторій фрактального та стандартного броунівських процесів

Фрактальний броунівський рух має властивість до автомодельності, що означає збіг розподілу випадкових величин [1-3]:

$$B_H(\alpha t) \sim \alpha^H B_H(t), P\{B_H(\alpha t) < x\} = P\{\alpha^H B_H(t) < x\} = \Phi\left(\frac{x}{(\alpha t)^H}\right),$$

$$Law(B_H(\alpha t)) = Law(\alpha^H B_H(t)) \quad (1.8)$$

Прирости фрактального броунівського руху, fB_m , можна описати наступним чином [1-3]:

$$\xi_k = B_H(t + ks) - B_H(t + (k - 1)s), \quad k = \overline{1, n} \quad (1.9)$$

Вони описують випадковий гауссівський вектор $\xi \sim N(0; B)$, в якому елементи b_{jk} кореляційної матриці B мають наступний вигляд [1-3]:

$$b_{jk} = \frac{s^{2H}}{2} (|j - k + 1|^{2H} + |j - k - 1|^{2H} - 2|j - k|^{2H}) \quad (1.10)$$

З (1.10) можемо стверджувати, що послідовність стаціонарна $\{\xi_k\}$.

Спираючись на властивість самоподібності фрактального броунівського руху ми можемо використовувати його для оцінки статистичних даних. Проте перед цим нам треба оцінити дисперсію приростів s^{2H} та показник параметра Харста H , що можна зробити з рівності $p_1 = 2^{2H-1} - 1$ (1.11). Тут однокроковий коефіцієнт кореляції p_1 визначається із (1.9) і записується як:

$$p_1 = \frac{cov(\xi_k, \xi_{k+1})}{s^{2H}} \quad (1.12). \text{ Введемо позначення } cov(\xi_k, \xi_{k+1}) = \theta.$$

В роботі [1] доведена консистентність оцінок в середньоквадратичному сенсі для оцінки дисперсії приростів $\widehat{s^{2H}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k^2$ (1.13) та оцінки однокрокової коваріації $\hat{\theta} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \xi_{j+1}$.

Отримані результати дають підстави для перевірки статистичних гіпотез досліджуваних часових рядів.

1.3 Статистичні характеристики приростів fBm

В процесі дослідження даних часових рядів розглядаються також задачі оцінювання статистичних параметрів і перевірки гіпотез. При моделюванні фрактального броунівського руху важливою є задача ідентифікації даних. В роботах [7-9] та [12, 13] доведені граничні теореми для траєкторій фрактального броунівського руху, fBm.

Для значень процесу $B_H(ks)$ та приростів $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ див. (1.9) твердження теорем набувають еквівалентного статистичного вигляду A_n, B_n, D_n з такими граничними значеннями, де збіжність розуміється в середньоквадратичному сенсі $\eta_n \rightarrow \eta$, при $E(\eta_n \rightarrow \eta)^2 \rightarrow 0$ [1]:

$$A_n = \frac{1}{n} \frac{1}{s^{4H}} \sum_{k=1}^n B_H((k-1)s) \xi_k^3 \rightarrow -\frac{3}{2}, \quad H \in (0, \frac{1}{2}) \quad (1.15)$$

$$B_n = \frac{1}{n^{1+H}} \frac{1}{s^{5H}} \sum_{k=1}^n B_H((k-1)s)^2 \xi_k^3 \rightarrow 3\eta, \eta \sim N(0, \frac{1}{2H+2}), H \in (0, \frac{1}{2}) \quad (1.16)$$

$$D_n = \frac{1}{n^{2H}} \frac{1}{s^{4H}} \sum_{k=1}^n B_H((k-1)s) \xi_k^3 \rightarrow \frac{3}{2} \zeta^2, \zeta \sim N(0,1), H \in (\frac{1}{2}, 1) \quad (1.17)$$

$$F_n = \frac{1}{n^H} \frac{1}{s^{3H}} \sum_{k=1}^n \xi_k^3 \rightarrow 3\zeta, \quad H \in (\frac{1}{2}, 1) \quad (1.18)$$

При відомих значеннях показника параметра Харста H та дисперсії приростів s^{2H} співвідношення (1.15) – (1.18) можна використати для перевірки гіпотези T : «спостережувані дані є значеннями траєкторії фрактального броунівського руху, fBm».

Стандартний алгоритм перевірки гіпотези T (за двохстороннім критерієм) при відомому значенні показника Харста, H , наведено нижче.

1. Припускаємо, що гіпотеза T виконана.
2. Задаємо рівнем значущості α .
3. Порівнюємо значення статистики з табличними значенням β_1, β_2 , де $F(\beta_1) = \alpha, F(\beta_2) = 1 - \alpha$, F — гранична функція розподілу статистики.

Так, наприклад, для граничної функції розподілу статистики D_n ($H > 0,5$) $F(x) = 2\Phi\left(\sqrt{x\frac{2}{3}}\right) - 1$, де Φ — функція Лапласа, відповідає рівню значущості $\alpha = 0,05$ критичне значення $\beta_1 \approx 0, \beta_2 = 6$. Тоді гіпотеза T приймається, якщо $0 < D_n < 6$.

1.4 Визначення методів моделювання fBm

Для практичної реалізації траєкторій фрактального броунівського руху, fBm, існує декілька головних та найбільш вживаних алгоритмів генерації. Перш за все, вони відрізняються один від одного не лише точністю апроксимації, але й обчислювальними потужностями, затратами часу та пам'яті.

Найбільш вживаними є метод Хоскінга, метод розкладу Чолеського та метод Девіса–Гарте, їх особливості та поведінку розглянемо далі.

1.4.1 Метод Хоскінга

Метод Хоскінга полягає у рекурсивній побудові дробового гаусівського шуму $\{X_k\}$. Наступним кроком, після рекурсії гаусівського шуму, буде безпосередньо алгоритм інтеграції отриманих результатів для моделювання траєкторії фрактального броунівського руху.

Запишемо формулу рекурсії, яка базується на математичному сподіванні [10, с.13]:

$$E[X_k | X_0, \dots, X_{k-1}] = \sum_{j=0}^{k-1} \varphi_{k,j} X_j, \quad (1.19)$$

де коефіцієнти $\varphi_{k,j}$ обчислюємо на основі автоковаріаційної функції.

Відповідна формула [1]: $\gamma(k) = \frac{1}{2}(|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H})$ (1.20).

Цей метод має дуже високу точність, що і є головною його перевагою серед інших. Але значна часова складність при великому об'ємі даних та достатня складність реалізації $O(n^2)$ роблять його вразливим до похибок та неточностей [10, с.14].

1.4.2 Метод розкладу Чолеського

Ідея даного методу ґрунтується на розкладанні коваріаційної матриці Σ дробового гауссівського шуму. Опишемо його наступним чином [10, с.15]:

$$\Sigma_{ij} = \gamma(|i - j|), \text{ де } \gamma(k) = \frac{1}{2}(|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H}) \quad (1.21)$$

Наступним кроком ми будемо послідовності $X = LZ$, де L – трикутна матриця Чолеського розкладу, а $Z \sim N(0, I)$ [10, с. 14; 15, с. 12].

Після виконання попередніх двох дій, виконуємо часткову інтеграцію [10, с.15]:

$$B_H(k) = \sum_{i=1}^k X_i, \quad k = \overline{1, n} \quad (1.22)$$

Цей метод є точним для реалізації, проте одним із важливих його недоліків є надвисока обчислювана складність $O(n^3)$ [15, с. 12].

1.4.3 Метод Девіса-Гарте

Метод Девіса-Гарте бере за основу побудову циркулянтної матриці, розмірністю $2n \times 2n$ зі спектральними властивостями, які сумісні з коваріаційною функцією fBm [10, с.15].

Почнемо із визначення та розуміння природи циркулянтної матриці. Циркулянтна матриця – це особливий тип квадратної матриці, де кожен наступний рядок є циклічним зсувом попереднього.

Нехай перший рядок представляє собою вектор $c = [c_0, c_1, \dots, c_{n-1}]$, тоді матриця матиме наступний вигляд [10, с.16]:

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & & c_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_0 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Перейдемо безпосередньо до алгоритму реалізації методу Девіса-Гарте. Спочатку будуюмо вектор автоковаріації [1,10]:

$$r_k = \frac{1}{2}(|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H}), \quad k = \overline{0, n-1} \quad (1.24)$$

Наступним кроком формуємо розширений вектор, який і буде першим рядком циркулянтної матриці [10, с.16]:

$$c = [r_0, r_1, \dots, r_{n-1}, 0, r_{n-1}, \dots, r_1] \quad (1.25)$$

Формуємо циркулянтну матрицю C_{2n} розмірністю $2n \times 2n$, це забезпечить позитивну визначеність для спектру. Далі обчислюємо власне спектр цієї матриці, тобто її власні значення. Нам треба переконатися, що вони додатні, без цього неможливо буде в подальшому згенерувати нормальний вектор.

Далі виконуємо швидке перетворення Фур'є: $\lambda_k = FFT(c), \lambda_k \geq 0$ (1.26).

В результаті маємо комплексні гауссівські числа: $Z_k \sim N(0,1) + iN(0,1)$, після чого вихідні значення обчислюються як зворотне від перетворення Фур'є: $\sqrt{\lambda_k} \cdot Z_k$ [10, с. 17]. Отримані значення є дробовим гаусівським шумом.

Для отримання результатів вже безпосередньо fBm виконаємо інтегрування [10, с.16-17]:

$$B_H(k) = \sum_{i=1}^k X_i \quad (1.27)$$

Складність алгоритму становить $O(n \log(n))$, що забезпечує практичну придатність для великого об'єму даних. Незважаючи на те, що метод використовує циркулянтні структури, його точність підтверджена теоретично та чисельно [10, с. 17].

1.4.4 Порівняння методів та вибір кращого

Складемо таблицю порівнянь, де чітко покажемо основні особливості кожного з трьох вище описаних методів. Такий структурований підхід допоможе чітко обрати найбільш коректний метод для практичної частини моделювання фрактального броунівського руху. Результати порівнянь продемонстровано в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 Порівняння методів моделювання фрактального броунівського руху

Назва методу	Обчислюва на складність	Складність пам'яті	Переваги методу	Недоліки методу
Хоскінг	$O(n^2)$	$O(n)$	Рекурсивність та висока точність	повільний для великого об'єму даних
розклад Чолеського	$O(n^3)$	$O(n^2)$	Прямолінійність, достатня точність алгоритму	дуже затратний для виконання алгоритму
Девіс-Гарте	$O(n \log(n))$	$O(n)$	Висока швидкість, хороша ефективність й висока точність	через циклічність можливі похибки

Для виконання та проведення практичних досліджень у своїй роботі, буду використовувати метод Девіса-Гарте. Адже саме з його допомогою можна генерувати траєкторії фрактального броунівського руху, fBm , довільної довжини з доволі високою точністю. При цьому гарантуючи мінімальні витрати пам'яті.

Ще однією важливою його перевагою є чисельна стабільність за рахунок претворень Фур'є. Також цей метод має найнижчу обчислювальну складність серед інших розглянутих мною класичних методів моделювання фрактального броунівського руху (див. таблицю 1.1). Періодичні похибки не матимуть суттєвого впливу, адже в більшості вони нівелюватимуться за рахунок великого об'єму даних моделювання.

1.5 Прогнозування фрактального броунівського руху

Фрактальний броунівський рух, fBm , має не лише теоретичну цінність, але й широке прикладне значення, зокрема в задачах прогнозування часових рядів. Завдяки своєму гауссівському характеру та властивостям коваріаційної структури процесу, fBm застосовує класичні підходи оптимального прогнозування. Серед них можна виділити метод умовного математичного сподівання, який має оптимальні значення MSE.

Але даний метод не єдиний для розв'язку задач прогнозування. Для порівняння ефективності фрактальних моделей доцільно розглядати й альтернативні підходи. Зокрема авторегресійні моделі типу ARIMA. Вони традиційно використовуються для аналізу стаціонарних рядів. Застосування двох різних методів дозволить оцінити переваги моделі fBm у задачах з довготривалою залежністю між досліджуваними даними.

1.5.1 Теорія прогнозування методом умовного математичного сподівання

Побудова та реалізація прогнозу фрактального броунівського руху, fBm є важливим завданням в аналізі часових рядів. Гауссівська природа даного процесу дозволяє побудувати оптимальний прогноз, в контексті найменшого значення середньоквадратичної похибки, за допомогою умовного математичного сподівання [16].

Нехай ми маємо заданий набір дискретних спостережень $X_n = \{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\}$, де $X(t) = B_H(t)$ див. (1.1) [1, 16]. Задача полягає у побудові прогнозу $\tilde{X}(t_{n+k}) = E[X(t_{n+k})|X_n]$ на k кроків. Оскільки фрактально-броунівський рух є гауссівським процесом, то умовне математичне сподівання матиме лінійний вигляд і його можна описати наступним чином [16]:

$$\tilde{X}(t_{n+k}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i X(t_i) \quad (1.28)$$

Коефіцієнти λ_i визначимо як розв'язок системи [16, с.5]: $\lambda = \frac{r}{R_n}$ (1.29).

Тут матриця коваріацій між спостереженнями визначається як [16, с.4]:

$$R_n = [\text{cov}(X(t_i), X(t_j))]_{i,j=1}^n \quad (1.30).$$

Вектор коваріації між заданими і прогнозованими значеннями описується як [16, с.4]:

$$r = [\text{cov}(X(t_{n+k}), X(t_i))]_{i=1}^n \quad (1.31).$$

Після побудови всіх матриць прогноз обчислюється наступним чином [16, с.5]:

$$\tilde{X}(t_{n+k}) = r^T R_n^{-1} X_n \quad (1.32).$$

В роботі [16] запропоновано шлях побудови прогнозу одразу на кілька кроків уперед, k . Формульно ідею можна подати так:

$$\tilde{X}_r = C \cdot A^{-1} \cdot X_n \quad (1.33).$$

В формулі (1.33) вектор прогнозованих, шуканих, значень це $\tilde{X}_r \in R^r$, вектор спостережень $X_n \in R^n$, матриця коваріацій між відомими і шуканими значеннями $C \in R^{r \times n}$, і $A = R_n \in R^{n \times n}$.

Оцінюємо якість прогнозу за рахунок обрахунку середньоквадратичної похибки, MSE: $\delta^2 = \text{tr}(D - CA^{-1}C^T)$, $D \in R^{r \times r}$ – матриця коваріацій прогнозованих значень (1.34) [1], [16, с.6].

Метод прогнозування за допомогою умовного математичного сподівання має значні переваги над іншими завдяки доволі високій точності навіть при обмеженій кількості даних та своїй чисельній стабільності. Також цей метод демонструє перевагу над іншими варіантами лінійного прогнозування, зокрема завдяки зменшенні середньоквадратичної похибки при збереженні обчислювальної ефективності.

1.5.2 Теорія прогнозування за допомогою ARIMA

Одним з найпоширеніших підходів до прогнозування часових рядів є використання моделей типу ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average), які широко застосовуються для стаціонарних або приводимих до стаціонарності процесів [25].

Модель ARIMA(p,d,q) поєднує в собі одразу три різні компоненти, що робить її більш гнучкою. Вона описує авторегресійну частину порядку p – AR(p), порядок інтегрування $I(d)$ – визначає кількість диференціювань, необхідних для перетворення нестационарного ряду на стаціонарний та частину ковзного середнього порядку q – MA(q).

Опишемо загальний вигляд моделі формульно [25]:

$$\phi(B)(1 - B)^d X_t = \theta(B)\varepsilon_t \quad (1.35).$$

З (1.35) бачимо оператор зсуву – B ($BX_t = X_{t-1}$), поліном авторегресії – $\phi(B)$, поліном ковзного середнього – $\theta(B)$ та білий шум – ε_t .

Процедуру побудови моделі ARIMA можна розбити на п'ять основних кроків.

1. Перевірка вихідного ряду на стаціонарність. Це можна зробити або графічно, за допомогою побудови функції автокореляції ряду (див. формулу 1.5), або за допомогою тестів перевірки на стаціонарність (наприклад, тест Дікі-Фуллера).
2. Якщо ряд не стаціонарний, то диференціювати його до досягнення стаціонарності (параметр d).
3. Оцінка параметрів авторегресії (p) та ковзного середнього (q). Для цього варто використати графік функції автокореляції ACF (1.5) [26].
4. Калібрування моделі за допомогою методу максимальної правдоподібності.
5. За залишками (наприклад, за білим шумом ε_t) перевірка моделі на адекватність.

Прогнозування за допомогою моделі здійснюється рекурсивно, тобто послідовно, з використанням оцінених параметрів та вже відомих числових значеннях шуму й ряду [25]:

$$\hat{X}_{t+h} = E[X_{t+h}|X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots] \quad (1.36)$$

Моделі ARIMA демонструють гарні результати при аналізі фінансових та економічних часових рядів, тобто там де є короткострокова залежність. Вони погано справляються з даними, які мають довготривалу пам'ять. У таких випадках фрактальні моделі, зокрема fBm, можуть дати точніший результат [1].

Висновки до розділу 1

У першому розділі було розглянуто та описано математичну природу фрактального броунівського руху, fBm, як одного з базових процесів для моделювання та аналізу часових рядів. Математичні спостереження та визначення доводять, що fBm є стаціонарним та автомодельним, самоподібним гауссівським випадковим процесом, поведінка якого залежить від значення параметра Харста $H \in (0,1)$. Показник параметра Харста, H , описує рівень кореляції між приростами, визначає характер процесу й пам'ять приростів залежно від $H \leq 0.5$ або $H \geq 0.5$.

Окрему увагу виділено на розкриття статистичних характеристик та основних параметрів фрактального броунівського руху, fBm. Зокрема прирости моделі та їхню дисперсію, коваріацію й кореляцію. Надано та описано консистентні оцінки цих параметрів. Вони забезпечують можливість практичного використання фрактального броунівського руху у подальшому статистичному аналізі часових рядів.

Описано граничні теореми та пов'язані з ними статистики A_n, B_n, D_n, F_n . Їх наявність дозволяє перевіряти гіпотезу Т, про «належність спостережуваних даних до фрактального броунівського руху, fBm».

Були проаналізовані основні алгоритми чисельного моделювання фрактального броунівського руху, а саме методи Хоскінга, Чолеського та Девіса–Гарте. Побудована таблиця порівнянь їх переваг та недоліків. Для подальших досліджень було обрано метод Девіса–Гарте як оптимальний за критерієм швидкості, точності та ефективності обчислень.

Розглянуто теоретичні засади прогнозування fBm, що основані на умовному математичному сподіванні. Запропоновано матричний підхід до побудови прогнозу з мінімізацією середньоквадратичної похибки, MSE. Вона підтверджує теоретичну ефективність цього методу в умовах гауссівської природи процесу фрактального броунівського руху.

РОЗДІЛ 2 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

У цьому розділі показані результати чисельного моделювання та статистичного аналізу фрактального броунівського руху. Метою цих експериментів було підтвердження теоретичних властивостей fBm та оцінювання можливості прогнозування.

На основі реалізації траєкторій здійснено оцінювання основних характеристик процесу, а саме дисперсії приростів, коваріації приростів та параметра Харста. Додатково досліджено поведінку спеціальних статистик, що ґрунтуються на граничних теoreмах, A_n , B_n , D_n , F_n . Їхні значення дозволяють перевірити гіпотезу T «про фрактальну природу досліджуваних даних».

У завершальній частині розділу розглянуто побудову прогнозу на основі умовного математичного сподівання. Проведено порівняльний аналіз із спрогнозованими значеннями методом ARIMA. Виконано оцінювання точності за допомогою відповідних метрик, MSE.

Результати цього розділу дозволяють робити висновки щодо ефективності використання fBm для задач моделювання та прогнозування, а також оцінювати адекватність застосованих теоретичних підходів у різних практичних умовах.

2.1 Побудова оцінок параметрів фрактального броунівського руху

Для побудови консистентних оцінок зобразимо по 2 різні моделі антиперсистентного та персистентного фрактального броунівського руху, fBm , із заданими параметром Харста, H , відповідно $H < 0.5$ та $H > 0.5$, та на різних довжинах вибірок, n .

Для кращого розуміння та аналізу результатів траєкторії руху покажемо їх графічно.

2.1.1 Антиперсистентна модель fBm при заданому параметрі Харста та різних об'ємах вибірки

У програмному середовищі Google Colaboratory, скориставшись бібліотеками `fbm` та `matplotlib`, покажемо фрактальний броунівський рух $B_H(t)$ при $H=0.3$ та $n=124$ на рисунку 2.1.



Рисунок 2.1. Антиперсистентний фрактальний броунівський рух при $H=0.3$ та $n=124$

Наступним кроком, користуючись формулами (2.1)-(2.4) [1] для оцінки параметрів фрактального броунівського руху, визначимо консистентну оцінку дисперсії приросту $\widehat{s^{2H}}$

$$\widehat{s^{2H}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k^2 \quad (2.1)$$

Формула для обрахунку консистентної оцінки коваріацію приростів $\hat{\theta}$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} y_j y_{j+1} \quad (2.2)$$

Формула для обрахунку консистентної оцінки однокрокового коефіцієнта кореляції $\widehat{\rho_1}$ для приростів

$$\widehat{\rho_1} = \frac{\hat{\theta}}{\widehat{s^{2H}}} \quad (2.3)$$

Формула для обрахунку консистентної оцінки показника параметра Харста $\hat{H}$

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(\widehat{\rho_1} + 1)}{\ln 2} + 1 \right) \quad (2.4)$$

Після програмних обрахунків маємо результати, що показані на рисунку 2.2.

```
Оцінка дисперсії приростів (s^2H): 0.06291
Оцінка коваріації приростів: -0.01891
Оцінка однокрокового коефіцієнта кореляції приростів rho_1: -0.30066
Оцінка показника Харста H: 0.24204
```

Рисунок 2.2 Результати оцінок параметрів фрактального броунівського руху
при $H=0.3$ та $n=124$

Для наочності представлення результатів, побудуємо графік фрактального броунівського руху, де продемонструємо криву фрактального броунівського руху $B_H(t)$ для заданого параметра Харста (H_{true}) та спрогнозованого ($H_{\text{estimated}}$). Результати відображені на рисунку 2.3.



Рисунок 2.3 Графік порівняння fBm для заданого параметра Харста та спрогнозованого

Тепер проведемо новий експеримент, в якому показник параметра Харста залишимо без змін, $H=0.3$, а об'єм вибірки моделювання збільшимо, $n=1024$. Траєкторія нового антиперсистентного фрактального броунівського руху $B_H(t)$ показана на рисунку 2.4.



Рисунок 2.4 Антиперсистентний фрактальний броунівський рух при $H=0.3$ та $n=1024$

Далі застосуємо програмні обчислення формул (2.1)-(2.4) [1] для знаходження консистентних оцінок дисперсії приросту $\widehat{s^{2H}}$, коваріації приростів $\widehat{\theta}$, однокрокового коефіцієнта кореляції $\widehat{\rho_1}$ для приростів та параметра Харста $\widehat{H}$. Відповідні результати обрахунків продемонстровані на рисунку 2.5.

```
Оцінка дисперсії приростів (s^2H): 0.01545
Оцінка коваріації приростів: -0.00410
Оцінка однокрокового коефіцієнта кореляції приростів rho_1: -0.26516
Оцінка показника Харста H: 0.27775
```

Рисунок 2.5 Результати оцінок параметрів фрактального броунівського руху при $H=0.3$ та $n=1024$

Для наочності порівняння та розуміння результатів, побудуємо графік фрактального броунівського руху, де продемонструємо криву фрактального броунівського руху $B_H(t)$ для заданого параметра Харста (H_{true}) та спрогнозованого ($H_{estimated}$). Результати відображені на рисунку 2.6.



Рисунок 2.6 Графік порівняння fBm для заданого параметра Харста та спрогнозованого

2.1.2 Персистентна модель fBm при заданому параметрі Харста та різних об'ємах вибірки

Тепер дослідимо поведінку персистентних моделей фрактального броунівського руху, fBm. Тобто, нехай задане значення параметра Харста буде цього разу $H=0.8$, а об'єм вибірки задамо як $n=124$. Траєкторія руху $B_H(t)$ відображена на рисунку 2.7.



Рисунок 2.7 Персистентний фрактальний броунівський рух при $H=0.8$ та $n=124$

Застосуємо програмні обрахунки формул (2.1)-(2.4) [1] для знаходження консистентних оцінок дисперсії приросту $\hat{s}^{2H}$, коваріації приростів $\hat{\theta}$, однокрокового коефіцієнта кореляції $\hat{\rho}_1$ для приростів та параметра Харста $\hat{H}$. Відповідні результати обчислення зображені на рис.2.8.

Оцінка дисперсії приростів (s^{2H}): 0.00039
 Оцінка коваріації приростів: 0.00013
 Оцінка однокрокового коефіцієнта кореляції приростів ρ_{01} : 0.33653
 Оцінка показника Харста H : 0.70925

Рисунок 2.8 Результати оцінок параметрів фрактального броунівського руху при $H=0.8$ та $n=124$

Для наочності розуміння результатів, побудуємо графік фрактального броунівського руху, де продемонструємо криву фрактального броунівського руху $B_H(t)$ для заданого параметра Харста (H_{true}) та спрогнозованого ($H_{\text{estimated}}$). Результати відображені на рис. 2.9.



Рисунок 2.9 Графік порівняння fBm для заданого параметра Харста та спрогнозованого

Проведемо новий експеримент, в якому показник параметра Харста залишимо без змін, $H=0.8$, а об'єм вибірки моделювання збільшимо, $n=1024$. Траєкторія нового персистентного фрактального броунівського руху $B_H(t)$ показана на рис. 2.10.



Рисунок 2.10 Персистентний фрактальний броунівський рух при $H=0.8$ та $n=1024$

Далі застосуємо програмні обчислення формул (2.1)-(2.4) [1] для знаходження консистентних оцінок дисперсії приросту $\widehat{s^{2H}}$, коваріації приростів $\widehat{\theta}$, однокрокового коефіцієнта кореляції $\widehat{\rho_1}$ для приростів та параметра Харста $\widehat{H}$. Відповідні результати обрахунків продемонстровані на рисунку 2.11.

```
Оцінка дисперсії приростів (s^2H): 0.00001
Оцінка коваріації приростів: 0.00001
Оцінка однокрокового коефіцієнта кореляції приростів rho_1: 0.46086
Оцінка показника Харста H: 0.77341
```

Рисунок 2.11 Результати оцінок параметрів фрактального броунівського руху при $H=0.8$ та $n=1024$

Для наочності аналізу результатів, побудуємо графік фрактального броунівського руху, fBm, де продемонструємо криву фрактального броунівського руху $B_H(t)$ для заданого параметра Харста (H_{true}) та спрогнозованого ($H_{\text{estimated}}$). Результати відображені на рисунку 2.12.



Рисунок 2.12 Графік порівняння fBm для заданого параметра Харста та спрогнозованого

2.1.3 Аналіз результатів консистентних оцінок

Запишемо всі основні числа експериментів в таблицю для порівняння та детального розуміння результатів. Таблиця 2.1 дасть точне уявлення щодо аналізу траєкторій фрактального броунівського руху, в залежності від їх параметрів.

Таблиця 2.1 Загальна таблиця оцінок експериментів

№	Кількість точок n	Заданий показник Харста H	Оцінка дисперсії приростів $\widehat{s^{2H}}$	Оцінка коваріації приростів $\hat{\theta}$	Оцінка одно-крокового коефіцієнта кореляції приростів $\widehat{\rho_1}$	Оцінка показника Харста $\hat{H}$	Відносна похибка $H\%$
1	124	0.3	0.06291	-0.01891	-0.30066	0.24204	19.32%
2	1024	0.3	0.01545	-0.00410	-0.26516	0.27775	7.42%
3	124	0.8	0.00039	0.00013	0.33653	0.70925	11.34%
4	1024	0.8	0.00001	0.00001	0.46086	0.77341	3.32%

Еталонне значення однокрокового коефіцієнт кореляції вважатимемо, те, що обраховується за формулою із заданим показником Харста [1]:

$$\rho_1 = 2^{2H-1} + 1 \quad (2.5)$$

Таким чином для $H=0.3$ маємо еталонне $\rho_1 = -0.242$. З табл. 2.1 бачимо що найближче значення консистентної оцінки однокрокового коефіцієнта кореляції $\widehat{\rho_1}$ досягається при $H=0.3$ та $n=1024$.

Аналогічне зробимо дослідження для $H=0.8$. В цьому випадку еталонне $\rho_1 = 0.516$. З табл. 2..1 бачимо що найближче значення консистентної оцінки однокрокового коефіцієнта кореляції $\widehat{\rho}_1$ досягається при $H=0.8$ та $n=1024$.

Відносну похибку для оцінки показника Харста обчислимо наступним чином

$$H\% = \frac{|\hat{H} - H|}{H} \cdot 100\% \quad (2.6)$$

За результатами обрахунків, можна стверджувати, що чим більше даних для побудови фрактального броунівського руху, fBm , тим точніше ми матиме оцінки параметрів моделей.

2.2 Побудова статистик фрактального броунівського руху та дослідження збіжності за граничними теоремами

Актуальною задачею в процесі моделювання часових рядів є задача ідентифікації даних процесу $B_H(k_s)$. Зокрема, нехай прирости $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ утворюють стаціонарну послідовність, що приводить до гіпотези T : «спостереження $B_H(k_s)$ являють собою значення траєкторії фрактального броунівського руху, fBm ».

Необхідними умовами для виконання цієї гіпотези є співвідношення (2.1)-(2.4), доведені в джерелах [7-9], [12] .

Їх статистичний аналог виглядає наступним чином [1]:

$$A_n = \frac{1}{n} \frac{1}{s^{4H}} \sum_{k=1}^n B_H((k-1)s) \xi_k^3 \rightarrow -\frac{3}{2}, \quad H \in (0, \frac{1}{2}) \quad (2.7)$$

$$B_n = \frac{1}{n^{1+H}} \frac{1}{s^{5H}} \sum_{k=1}^n B_H((k-1)s)^2 \xi_k^3 \rightarrow 3\eta, \eta \sim N(0, \frac{1}{2H+2}), H \in (0, \frac{1}{2}) \quad (2.8)$$

$$D_n = \frac{1}{n^{2H}} \frac{1}{s^{4H}} \sum_{k=1}^n B_H((k-1)s) \xi_k^3 \rightarrow \frac{3}{2} \zeta^2, \zeta \sim N(0,1), H \in (\frac{1}{2}, 1) \quad (2.9)$$

$$F_n = \frac{1}{n^H} \frac{1}{s^{3H}} \sum_{k=1}^n \xi_k^3 \rightarrow 3\zeta, \quad H \in (\frac{1}{2}, 1) \quad (2.10)$$

В даному випадку збіжність розуміємо в середньоквадратичному сенсі

$$\eta_n \rightarrow \eta, \text{ при } E(\eta_n \rightarrow \eta)^2 \rightarrow 0.$$

При відомих значеннях параметра Харста H , та дисперсії приростів s^{2H} , співвідношення (2.7)-(2.10) дають змогу перевірити гіпотезу T : «спостережувані дані є реалізацією фрактального руху».

Застосуємо програмну реалізацію для обчислення статистик (2.7)-(2.10) для фрактального броунівського руху, fBm, де параметр Харста $H=0.3$ при різних значеннях n . Результати внесемо в табл. 2.2. Оскільки ми розглядаємо антиперсистентний рух, то наразі є можливими лише обчислення статистик A_n та B_n , оскільки $H = 0.3 \in (0, \frac{1}{2})$.

Таблиця 2.2 Статистики антиперсистентного fBm при $H=0.3$ та $\rho_1 = -0.242$
(див. підрозділ 2.1.3)

n	$\hat{\rho}_1$	$\hat{\theta}$	$\hat{A}_n$	$\hat{B}_n$	$0,537 \cdot B_n$
30	-0.35797	-0.06679	-2.377982	-0.141498	-0.076
50	-0.21548	-0.02153	-2.632159	2.262146	1.215
124	-0.25526	-0.01377	-1.815134	-2.353197	-1,264
1024	-0.23768	-0.00363	-1.566966	0.387886	0,208

Зробимо деякі додаткові обчислення для кращого розуміння результатів:

$$\frac{1}{3}B_n \rightarrow N\left(0; \frac{1}{2H+2}\right); A_n \rightarrow -\frac{3}{2}, \Rightarrow \hat{A}_n \rightarrow -1,5$$

$$B_n \rightarrow 3\eta, \eta \sim N\left(0; \frac{1}{2H+2}\right), D\eta = \frac{1}{2H+2}$$

$$\frac{\sqrt{2H+2}}{3}B_n \rightarrow N(0; 1), \quad \frac{1}{3}B_n \rightarrow N(0; 0,385), \quad 0,537B_n \rightarrow N(0; 1)$$

Тепер повторимо експеримент, але вже для персистентного руху fBm із заданим параметром Харста $H=0.8$ та декількох значень n . Результати внесемо в табл. 2.3. Оскільки цього разу ми розглядаємо персистентний рух, то тепер є можливими лише обчислення статистик D_n та F_n , оскільки $H = 0.8 \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Таблиця 2.3 Статистики персистентного fBm при $H=0.8$ та $\rho_1 = 0.516$

(див. підрозділ 2.1.3)

n	$\hat{\rho}_1$	$\hat{\theta}$	$\hat{D}_n$	$\frac{2}{3} \cdot \hat{D}_n$	$\hat{F}_n$	$\frac{1}{3} \cdot \hat{F}_n$
30	0.64092	0.00289	0.991419	0.661	-1.832791	-0.611
50	0.53503	0.00119	1.781436	1.188	3.125655	1.042
124	0.47895	0.00016	0.096938	0.065	-0.751384	-0,25
1024	0.50128	0.00001	0.432572	0.288	-1.480589	-0,49

Додаткові обрахунки меж статистик: $D_n \rightarrow \frac{3}{2}\zeta^2$, $\frac{2}{3}D_n \rightarrow \zeta^2, \zeta \sim N(0; 1)$,

$\frac{1}{3}F_n \rightarrow N(0; 1)$.

Аналізуючи результати обрахунків, ми можемо зробити висновки з отриманих даних, посиляючись на таблицю нормального розподілу

p -відсоткового відхилення для $\xi \sim N(0; 1): P\{|\xi| > \lambda\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$.

Перевіримо гіпотезу Т: «Досліджувані дані є реалізацією фрактального руху» та визначимо з якого об'єму вибірки можна перевірити гіпотезу на еталонному прикладі.

Стандартний алгоритм такої перевірки полягає в наступному: припускаємо, що гіпотеза Т виконана, задаємося рівнем значущості p та порівнюємо значення статистики з табличним значенням β , де $F(\beta)=1-p$ [1].

Так, для статистик $\frac{\sqrt{2H+2}}{3}B_n$ та $\frac{1}{3}F_n$, що прямують до $N(0,1)$, виберемо рівень значущості $p=0.05$. Відповідне значення $\lambda = \lambda_{0.05} = 1.9$ тобто гіпотеза приймається, якщо статистики $|0.537B_n| < 1.9$ для $H = 0.3$ та

$\left|\frac{1}{3}\hat{F}_n\right| < 1.9$ для $H = 0.8$. В даному випадку нерівності виконуються.

Статистика $\hat{D}_n$ $\frac{2}{3}\hat{D}_n$ (для $H = 0.8$) має граничну функцію розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, & x \geq 0 \end{cases} \quad \sqrt{\lambda_{0.05}} = 1.9, \lambda_{0.05} = 3.61$$

гіпотеза приймається, оскільки $\frac{2}{3}\hat{D}_n = 0.661$ або 1.188 або 0.065 або 0.288 .

Тобто, можна стверджувати, що незалежно від значення об'єму вибірки n , гіпотеза Т та статистики (2.7)-(2.10) правдиві для фрактального броунівського руху. Тобто спостережувані дані $B_H(ks)$ є значеннями траєкторії fBm, незалежно від їх кількості в експерименті.

2.3 Реалізація прогнозування фрактального броунівського руху

Прогнозування фрактального броунівського руху, fBm, за рахунок його гаусівського процесу, можна реалізувати за рахунок умовного математичного сподівання за відомими значеннями, і воно буде оптимальним в сенсі мінімуму середньоквадратичної похибки (MSE).

З роботи [16] маємо наступні формули для опису цього процесу:

$$E[B_H(t_{n+1})|B_H(t_0), \dots, B_H(t_n)] = c^T C^{-1} X \quad (2.11),$$

де коваріаційна матриця відомих значень описується як $C = C_{ij} = \text{cov}(B_H(t_i), B_H(t_j))$, вектор коваріації задається наступним чином $c = c_i = \text{cov}(B_H(t_{n+1}), B_H(t_i))$, а X – це вектор спостережень, тобто історія прогнозу.

Алгоритм цього процесу можна описати наступним чином:

1. Генерація реалізації фрактального броунівського руху, fBm , із заданим параметром Харста, H .
2. Створення коваріаційної матриці відомих значень C та вектора коваріації c .
3. Обчислення прогнозу кожної майбутньої точки як умовне математичне сподівання за формулою (2.11).
4. Графічне представлення реальних та прогнозованих значень.

Опираючись на алгоритм, реалізуємо цей процес програмно. Побудуємо прогноз фрактального броунівського руху, fBm , для різних показників параметра Харста, H , різний об'єм вибірки n , та на різну кількість спрогнозованих кроків k .

Результати обчислення середньоквадратичних похибок, MSE , кожного процесу покажемо в табл. 2.4. Графічне представлення траєкторій прогнозу наведемо на рис. 2.13-2.16.

Таблиця 2.4 MSE прогнозування fBm на основі умовного математичного сподівання

	n=100, k=10		n=1024, k=100	
	H=0.3	H=0.8	H=0.3	H=0.8
MSE	0.17815	0.01466	0.14195	0.00065



Рисунок 2.13 Траєкторія fBm при $H=0.3$, довжині $n=100$ прогноз на $k=10$ кроків



Рисунок 2.14 Траєкторія fBm при $H=0.3$, довжині $n=1024$ прогноз на $k=100$ кроків



Рисунок 2.15 Траєкторія fBm при $H=0.8$, довжині $n=100$ прогноз на $k=10$ кроків



Рисунок 2.16 Траєкторія fBm при $H=0.8$, довжині $n=1024$ прогноз на $k=100$ кроків

Проведемо новий експеримент в якому спробуємо побудувати прогноз фрактального броунівського руху, fBm, у просторі приростів з використанням ARIMA [1].

Алгоритм роботи програми виглядатиме наступним чином:

1. Будуємо класичну коваріаційну функцію фрактального броунівського руху за наступною формулою [1]:

$$\text{cov}(B_H(t), B_H(s)) = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}) \quad (2.12).$$

2. Створюємо коваріаційну матрицю розмірністю $(n + k + 1) \times (n + k + 1)$. Кожен її елемент обраховується як коваріація між точками t_i та t_j .
3. Генеруємо фрактальний броунівський рух, fBm, як гауссівський вектор.
4. Розраховуємо стаціонарні прирости fBm: $\Delta B_H(t_i) = B_H(t_i) - B_H(t_{i-1})$ [1].
5. Будуємо модель ARIMA, авторегресійну модель першого порядку.

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.13).$$

6. Здійснюємо безпосередньо власне прогнозу майбутніх приростів на k кроків.
7. Із приростів переходимо до траєкторії фрактального броунівського руху:

$$\hat{B}_H(t_{n+i}) = B_H(t_t) + \sum_{j=1}^i \Delta \hat{B}_H(t_{n+j}) \quad (2.14).$$

Результати обчислення середньоквадратичних похибок, MSE, кожного процесу покажемо в табл.2.5. Графічне представлення траєкторій прогнозу наведемо на рис. 2.17-2.20.

Таблиця 2.5 MSE прогнозування fBm на основі авторегресійної моделі
ARIMA першого порядку

	n=100, k=10		n=1024, k=100	
	H=0.3	H=0.8	H=0.3	H=0.8
MSE	0.19104	0.00052	0.03086	0.00169



Рис. 2.17 Траєкторія fBm при $H=0.3$, довжині $n=100$ прогноз на $k=10$ кроків



Рисунок 2.18 Траєкторія fBm при $H=0.3$, довжині $n=1024$ прогноз на $k=100$ кроків



Рисунок 2.19 Траєкторія fBm при $H=0.8$, довжині $n=100$ прогноз на $k=10$ кроків



Рисунок 2.20 Траєкторія fBm при $H=0.8$, довжині $n=1024$ прогноз на $k=100$ кроків

2.4 Порівняння методів прогнозу за точністю для різних fBm

Для порівняння методів прогнозу побудуємо зведену таблицю 2.6 із результатами. Поєднаємо таблиці 2.4 та 2.5, де введемо позначення MSE_1 – точність методу умовного математичного сподівання, а MSE_2 – точність методу ARIMA.

Таблиця 2.6 Зведена таблиця точності результатів прогнозування fBm

	n=100, k=10		n=1024, k=100	
	H=0.3	H=0.8	H=0.3	H=0.8
MSE_1	0.17815	0.01466	0.14195	0.00065
MSE_2	0.19104	0.00052	0.03086	0.00169

Підбиваючи підсумки, можна стверджувати, що при малому обсязі даних $n=100$ та при $H=0.3$ Метод умовного математичного сподівання демонструє трохи кращу точність (див. табл. 2.6), ніж ARIMA. Це пояснюється тим, що при $H<0.5$ прирости фрактального броунівського руху, fBm, слабо корельовані, й ARIMA не дає значного виграшу.

В той самий час при $H=0.8$ та $n=100$ метод ARIMA значно точніший ($MSE_2 = 0.00052$) порівняно з методом умовного математичного сподівання ($MSE_1 = 0.01466$). У цьому випадку прирости мають довгу пам'ять ($H>0.5$), і ARIMA добре адаптується до цієї структури.

При великих обсягах даних $n=1024$ та при $H=0.3$ Метод ARIMA дає набагато меншу похибку ($MSE_2 = 0.03086$), ніж метод умовного математичного сподівання ($MSE_1 = 0.14195$). Завдяки великому обсягу даних ARIMA точніше оцінює структуру шуму в приростах.

При $H=0.8$ та $n=1024$ метод умовного математичного сподівання точніший ($MSE_1 = 0.00065$) за ARIMA ($MSE_2 = 0.00169$). Це підтверджує теоретичну перевагу методу умовного математичного сподівання як

оптимального лінійного прогнозу для гауссівських процесів із сильною автокореляцією.

Висновки до розділу 2

У цьому розділі було проведено кілька експериментів з моделювання та дослідження фрактального броунівського руху, fBm , для різних значень параметра Харста та розмірів вибірки. На основі реалізацій траєкторій фрактального броунівського руху було побудовано консистентні оцінки дисперсії приростів, коваріації приростів, однокрокового коефіцієнта кореляції та самого параметра Харста. Виявлено, що збільшення розміру даних значно знижує відносну похибку оцінки, що підтверджує теоретичні властивості статистики.

Аналіз статистичних даних A_n , B_n , D_n , F_n на різних об'ємах вибірки показав збіжність до теоретичних значень за граничними теоремами на основі заданого параметра Харста. Таким чином, було підтверджено можливість реального використання ідеї про те, що спостережувані дані представляють із себе значення фрактального броунівського руху.

Також було спрогнозованого траєкторії фрактального броунівського руху, fBm , двома різними способами. Отримані результати та графіки процесів стверджують, що метод прогнозу та його точність напряму залежать від значення параметра Харста, H , та й від об'єму вибірки, n . Так, для персистентних процесів ($H > 0.5$) модель ARIMA продемонструвала вищу точність при невеликих n . Тоді як метод умовного математичного сподівання був ефективнішим для антиперсистентного процесу ($H < 0.5$) та для більших значень n . Ці практичні висновки узгоджуються з теоретичними властивостями обох підходів.

РОЗДІЛ 3 ФУНКЦІОНАЛЬНО-ВАРТІСНИЙ АНАЛІЗ ПРОДУКТУ

У цьому розділі проводиться оцінка ключових характеристик програмного продукту, реалізованого з метою моделювання фрактального броунівського руху, fBm та прогнозування часових рядів з довготривалою залежністю.

Під час проєктування програмного продукту, ПП, враховувались аспекти його функціональності, точності, ефективності реалізації та економічної доцільності. У розділі виконано аналіз кількох варіантів реалізації функціональних компонентів, таких як, генерація fBm, побудова прогнозу, візуалізація та обчислення похибок результату.

Для обґрунтування вибору найкращої конфігурації використовується апарат функціонально-вартісного аналізу (ФВА). Це методологія, що дозволяє визначити оптимальне співвідношення між споживчою цінністю програмного продукту та витратами на його створення. Такий аналіз є важливою складовою в процесі прийняття рішень щодо ефективності розробки, впровадження і подальшого використання програмного забезпечення в наукових та прикладних задачах.

Алгоритм функціонально-вартісного аналізу передбачає послідовне проходження наступних етапів:

- 1) формулювання цілей проєктування;
- 2) обґрунтування функцій майбутнього програмного продукту;
- 3) вибір ключових параметрів, здійснення експертного оцінювання;
- 4) аналіз рівня якості реалізацій;
- 5) економічне оцінювання витрат на реалізацію кожного з можливих варіантів;
- 6) обґрунтований вибір оптимальної реалізації за критерієм техніко-економічного рівня.

3.1 Постановка задачі проектування

У межах цієї роботи використовується функціонально-вартісний підхід для техніко-економічно аналізу доцільності створення програмного засобу, що реалізує моделювання та прогнозування fVm. Враховуючи вплив кожної функціональної складової на загальну ефективність продукту, формуються ключові технічні вимоги до його реалізації.

Перелік основних технічних характеристик, що висувається до програмного продукту, наведено вище.

1. Можливість роботи на стандартних персональних комп'ютерах без спеціалізованого обладнання.
2. Простота взаємодії з користувачем або дослідником, зрозуміла логіка інтерфейсу чи сценаріїв запуску.
3. Достатня швидкодія під час генерації реалізацій та виконання обчислень.
4. Легкість у налаштуванні, розширенні або оновленні функціоналу.
5. Обмеження витрат часу й ресурсів на впровадження і підтримку програми.

3.2 Обґрунтування функцій програмного продукту

Базова, інакше кажучи, загальна функція F_0 полягає у створенні програмного продукту, ПП. Який свою чергу реалізує процес моделювання та прогнозування на основі фрактального броунівського руху. На основі цієї головної функції, можна виокремити наступні складові функціональні підсистеми, підфункції, які забезпечують реалізацію ключових задач дослідження.

F_1 – вибір мови програмування для розробки ПП:

- а) Python;
- б) R.

F_2 – вибір середовища розробки ПП:

- а) Google Colaboratory;
- б) PyCharm.

F_3 – вибір реалізації алгоритмів обробки даних:

- а) використання існуючих бібліотек;
- б) написання функцій вручну.

Варіанти реалізації основних функцій покажемо на рисунку 3.1, де відображено морфологічну карту системи.

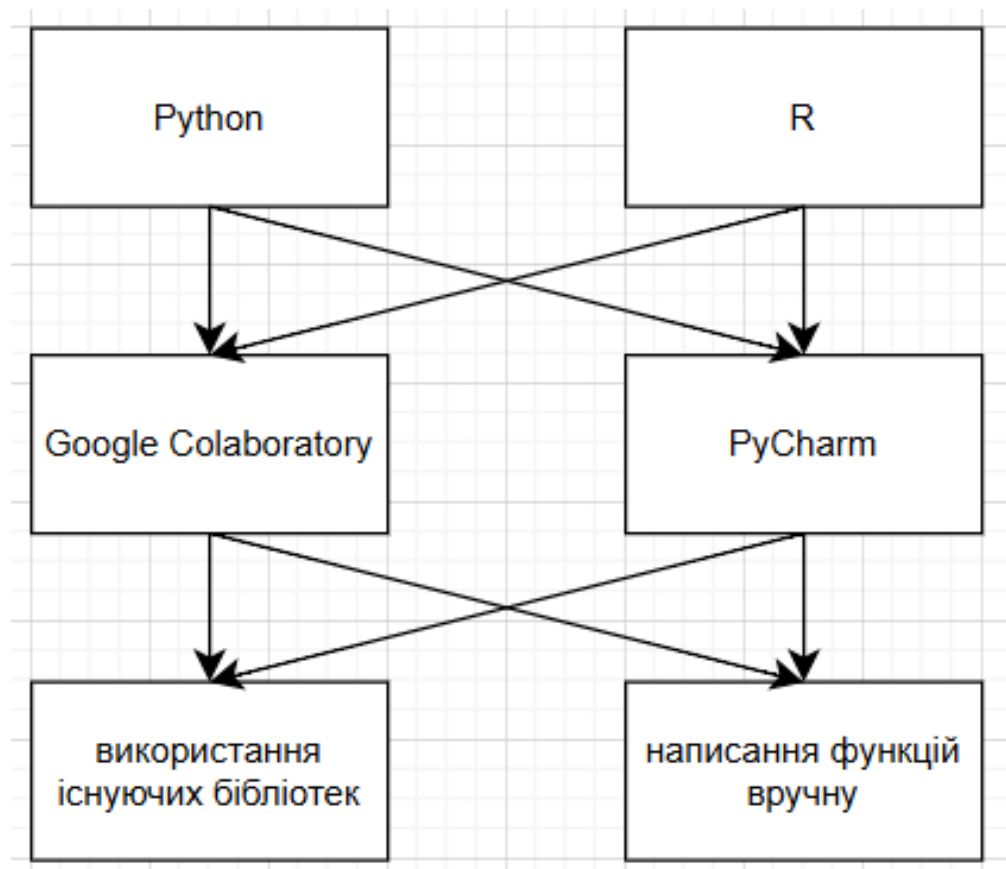


Рисунок 3.1 Морфологічна карта системи

Дана морфологічна карта відображає множину всіх можливих варіантів основних функцій. У таблиці 3.1 покажемо позитивно-негативну матрицю.

Таблиця 3.1 Позитивно-негативна матриця

Функції	Варіанти реалізації	Переваги	Недоліки
F_1	А	Простота синтаксису та велика кількість бібліотек для статистики та моделювання.	Менша швидкодія порівняно з компільованими мовами.
	Б	Простота в побудові графіків і аналізу часового ряду.	Вужче коло інструментів для програмної інтеграції.
F_2	А	Онлайн-доступ, не потребує встановлення та використання ресурсів GPU/TPU.	Потребує стабільного інтернет-з'єднання.
	Б	Широкі можливості дебагінгу та хороша інтеграція з середовищем GitHub.	Потрібне встановлення та налаштування та залучає більше ресурсів.
F_3	А	Швидке впровадження та перевірені й оптимізовані реалізації.	Не враховуються специфічні вимоги.
	Б	Повний контроль над алгоритмом та більша гнучкість.	Підвищена ймовірність помилок й висока трудомісткість.

Можна зробити висновки, що при розробці ПП деякі варіанти реалізації функцій треба відкинути. Бо вони не відповідають поставленим вимогам перед програмним продуктом. Ці варіанти відзначені у морфологічній карті.

Функція F_1 :

Віддаємо перевагу простоті синтаксису та великій кількості бібліотек для побудови статистик та моделювання. Тому функціонал варіанту Б відкидаємо, задля більших можливостей реалізації практичних завдань.

Функція F_2 :

У виборі середовища розробки зробимо акцент на онлайн-доступі та легкому використанні додаткових ресурсів GPU/TPU. Таким чином варіант Б у подальшому не розглядатимемо.

Функція F_3 :

Програма допускає обрання обох варіантів. Можливе використання як варіанту А, так і варіанту Б.

Таким чином, розглядаються наступні варіанти реалізації ПП:

$$F_1a - F_2a - F_3a$$

$$F_1a - F_2a - F_3b$$

Для оцінювання якості розглянутих функцій обрана система параметрів, яка описана нижче.

3.3 Обґрунтування системи параметрів ПП

Для розрахунку коефіцієнта технічного рівня обрана система параметрів, яка найбільш точно характеризує ефективність та функціональність програмної реалізації. Параметри обрано на підставі даних розглянутих вище.

Для характеристики ПП використаємо наступні параметри:

- X_1 обсяг оперативної пам'яті;
- X_2 середній час виконання одного циклу прогнозу;
- X_3 час обчислення статистичних параметрів;
- X_4 обсяг коду програмного продукту.

Числові значення параметрів вибираються на основі вимог замовника й умов, які характеризують експлуатацію програмного продукту. Це все відображено в таблиці 3.2. За її даними побудуємо графічні характеристики параметрів та покажемо це на рис. 3.2 –3.5.

Таблиця 3.2 Основні параметри програмного продукту

Назва параметра	Умовні позначення	Одиниці виміру	Значення параметра		
			гірші	середні	кращі
Обсяг пам'яті	X1	Мб	1024	512	256
Час прогнозу	X2	с	60	30	10
Час обчислення статистик	X3	с	20	10	5
Обсяг коду	X4	к-сть рядків	2500	1850	950

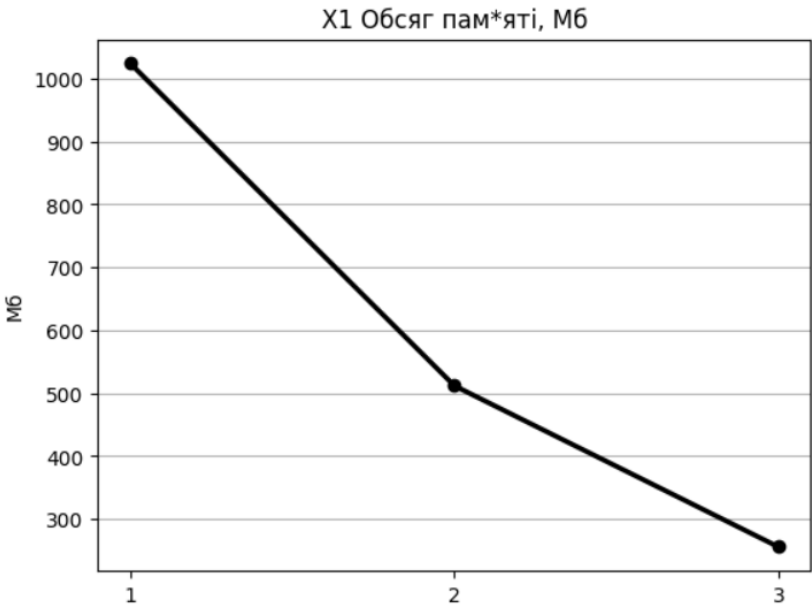


Рисунок 3.2 X1 – Обсяг оперативної пам'яті, Мб

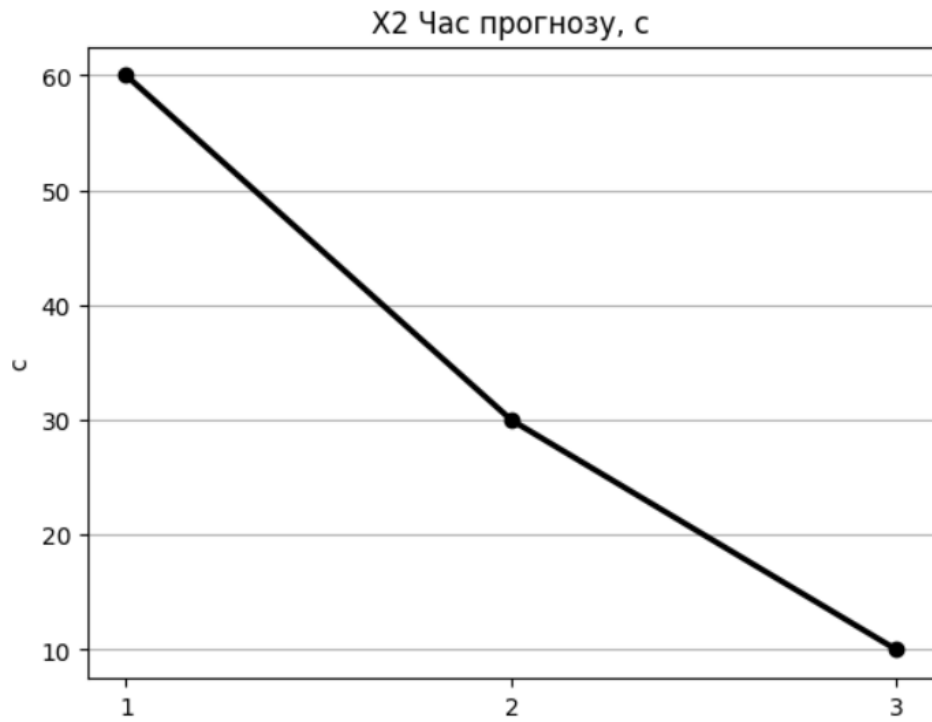


Рисунок 3.3 X2 – середній час виконання одного циклу прогнозу, с

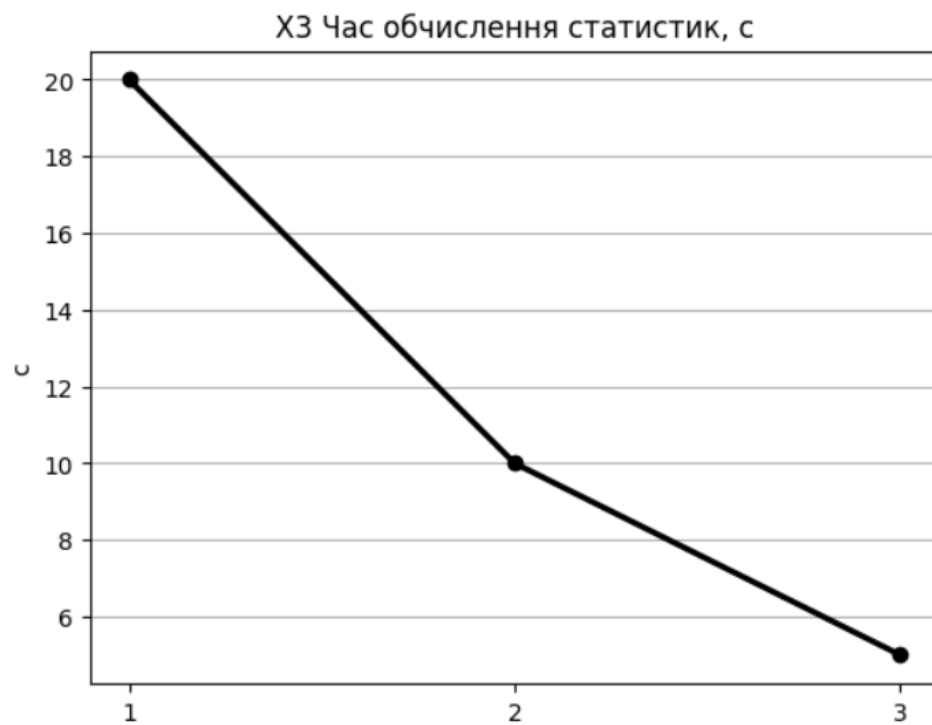


Рисунок 3.4 X3 – час обчислення статистичних параметрів, с

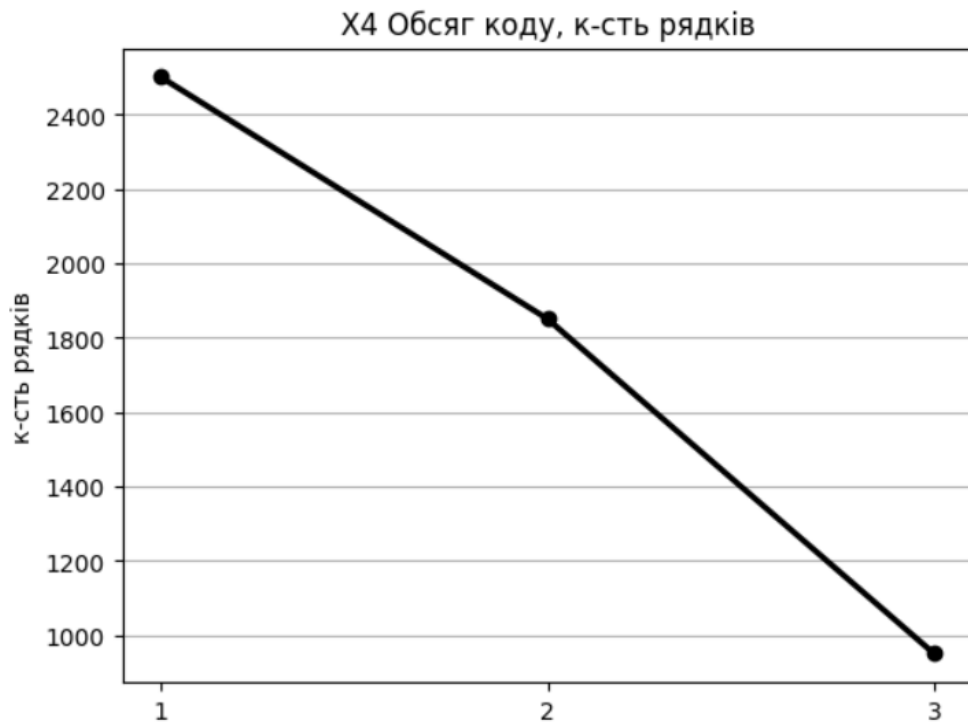


Рисунок 3.5 X4 – обсяг коду програмного продукту, к-сть рядків

3.4 Аналіз експертного оцінювання параметрів

Після ретельного обговорення та аналізу кожен експерт оцінює ступінь важливості окремих параметрів у контексті конкретної практичної задачі — моделювання та прогнозування фрактального броунівського руху, fBm.

Визначення значимості кожного параметра здійснюється за допомогою методу попарного порівняння. Оцінювання здійснюється експертною комісією, до складу якої входять 7 фахівців.

Процес встановлення коефіцієнтів значущості має наступний вигляд:

- присвоєння різних рангів для визначення рівня важливості параметра;
- перевірка коректності експертних оцінок для їх подальшого використання;
- оцінка пріоритетів параметрів за допомогою попарних порівнянь;
- обробка отриманих результатів і розрахунок коефіцієнтів значимості.

Підсумкові результати експертного ранжування представлені в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3 Результати ранжування параметрів

Позначення параметра	Назва параметра	Одиниці виміру	Ранг параметра за оцінкою експерта							Сума рангів R_i	Відхилення Δ_i	Δ_i^2
			1	2	3	4	5	6	7			
X1	Обсяг пам'яті	Мб	1	2	2	1	3	1	3	13	-4,5	20,25
X2	Час прогнозування	с	4	4	3	4	4	4	2	25	7,5	56,25
X3	Час обрахунку статистик	с	2	1	4	3	1	2	1	14	-3,5	12,25
X4	Обсяг коду	к-сть рядків	3	3	1	2	2	3	4	18	0,5	0,25
	Разом		10	10	10	10	10	10	10	70	0	89

Задля перевірки степені достовірності експертних оцінок, скористаємось наступними параметрами:

а) сума рангів кожного показника (по рядках):

$$R_i = \sum_{l=1}^N r_{il} = \frac{Nn(n+1)}{2} = 70 \quad (3.1)$$

де r_{il} - ранг i -го параметра, визначений j -м експертом; N — число експертів, n — кількість параметрів;

б) середня сума рангів (T):

$$T = \frac{1}{n} R_i = \frac{70}{4} = 17,5 \quad (3.2)$$

в) відхилення суми рангів кожного параметра $|R_i|$ від середньої суми рангів $|T|$ (таблиця 3.3):

$$\Delta_i = R_i - T \quad (3.3)$$

Сума відхилень за всіма параметрами має дорівнювати 0;

г) квадрат відхилень за кожним параметром (Δ_i^2) та загальну суму квадратів відхилень (таблиця 3.3):

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = 89 \quad (3.4)$$

д) коефіцієнт узгодженості (конкордації):

$$W = \frac{12S}{N^2(n^3 - n)} = 0.691 > W_n = 0,67 \quad (3.5)$$

Коефіцієнт конкордації може лежати в інтервалі $0 \leq W \leq 1$. У разі повної узгодженості поглядів експертів коефіцієнт $W = 1$. Чим більше розбіжностей між поглядами експертів, тим меншим буде значення W .

Розрахункове значення W порівнюють з нормативним W_n . Якщо $W \geq W_n$, визначеним даним можна довіряти, і вони придатні до використання.

У нашому випадку, ранжування можна вважати достовірним, тому що знайдений коефіцієнт узгодженості перевищує нормативний, котрий дорівнює $W_n = 0,67$ для програмного продукту.

Скориставшись результатами ранжирування, проведемо попарне порівняння всіх параметрів і результати занесемо у таблицю 3.4.

Використаємо такі значення коефіцієнтів переваги параметрів (X_{ij}), де X_i та X_j – параметри, які порівнюються між собою.

$$X_{ij} = \begin{cases} 1.5 & X_i > X_j; \\ 1.0 & X_i = X_j; \\ 0.5 & X_i < X_j, \end{cases} \quad (3.6)$$

Таблиця 3.4 Попарне порівняння параметрів

Параметри	Команда експертів							Кінцева оцінка	Числове значення
	1	2	3	4	5	6	7		
X1 і X2	<	<	<	<	<	<	<	<	0,5
X1 і X3	<	>	>	<	<	<	>	<	0,5
X1 і X4	<	<	<	<	<	<	<	>	0,5
X2 і X3	>	>	>	>	>	>	>	>	1,5
X2 і X4	<	>	<	<	>	<	<	<	0,5
X3 і X4	<	<	<	<	<	<	<	<	0,5

На основі числових даних X_{ij} (таблиця 3.4) складемо квадратну матрицю розрахунку вагомості параметрів $A = \|X_{ij}\|$ (таблиця 3.5).

Розрахунок вагомості (пріоритетності) кожного параметра K_{ei} , проводять за такими формулами:

$$K_{ei} = \frac{b_i}{\sum_{i=1}^n b_i} \quad (3.7)$$

$$b_j = \sum_{j=1}^n X_{ij} \quad (3.8)$$

Відносні оцінки розраховуються декілька разів доти, поки наступні значення не будуть незначно відрізнятись від попередніх (менше 5%).

На другому і наступних кроках відносні оцінки розраховуються так:

$$K_{ei} = \frac{b_i}{\sum_{i=1}^n b_i} \quad (3.9)$$

$$b_j = \sum_{j=1}^N X_{ij} b_j \quad (3.10)$$

де b_i — вагомість i -го параметра за результатами оцінок всіх експертів. Визначається як сума значень коефіцієнтів переваги (X_{ij}) даних усіма експертами по i -му параметру. Результати записуємо в таблицю 3.5.

Таблиця 3.5 Розрахунок вагомості параметрів

Параметри X_i	Параметри X_j				1 ітерація		2 ітерація		3 ітерація	
	X1	X2	X3	X4	b_i^0	K_{Bi}^0	b_i^1	K_{Bi}^1	b_i^2	K_{Bi}^2
X1	1	0,5	0,5	0,5	2,5	0,16	9,25	0,16	34,125	0,16
X2	1,5	1	1,5	0,5	4,5	0,28	16,25	0,28	59,125	0,28
X3	1,5	0,5	1	0,5	3,5	0,22	12,25	0,21	41,875	0,2
X4	1,5	1,5	1,5	1	5,5	0,34	21,25	0,35	77,875	0,36
Всього:					16	1	59	1	213	1

З таблиці 3.5 видно, що різниця значень коефіцієнтів вагомості дорівнює 2%, що менше 5%. Тому більша кількість ітерацій не потрібна.

3.5 Аналіз рівня якості варіантів реалізації функцій

Визначимо рівень якості кожного варіанту виконання основних функцій окремо.

Абсолютні значення наступних параметрів відповідають технічним вимогам умов функціонування даного ПП:

- X2 (Середній час виконання одного циклу прогнозу);
- X3 (Час обчислення статистичних параметрів);
- X4 (Обсяг коду програмного продукту).

Абсолютне значення параметра X1 (Обсяг оперативної пам'яті) обрано не найгіршим.

Коефіцієнт технічного рівня для кожного варіанта реалізації ПП обчислюємо наступним чином:

$$K_K(j) = \sum_{i=1}^n K_{\epsilon i} \cdot B_{i,j} \quad (3.11)$$

де n – кількість параметрів, $K_{\epsilon i}$ – коефіцієнт вагомості i -го параметра, B_i – оцінка i -го параметра в балах. Результати вносимо в таблицю 3.6.

Таблиця 3.6 Розрахунок показника якості варіантів реалізації основних функцій ПП

Основні функції	Варіант реалізації функції	Параметри	Абсолютне значення параметра	Бальна оцінка параметра	Коефіцієнт вагомості параметра	Коефіцієнт рівня якості
F1	А	X1	512	2	0,16	0,32
F2	А	X2	11	3	0,28	0,84
F3	А	X3	7	8	0,2	1,6
	Б	X4	1540	4	0,36	1,44

За даними таблиці 3.6 визначаємо рівень якості кожного з варіантів , користуючись формулою:

$$K_K = K_{TY}(F_{1k}) + K_{TY}(F_{2k}) + \dots + K_{TY}(F_{zk}) \quad (3.12)$$

Як видно з розрахунків, кращим є перший варіант, для якого коефіцієнт технічного рівня має найбільше значення.

$$K_{K1} = 0,32 + 0,84 + 1,6 = 2,76$$

$$K_{K2} = 0,32 + 0,84 + 1,44 = 2,6$$

3.6 Економічний аналіз варіантів розробки ПП

Для визначення вартості розробки ПП спочатку проведемо розрахунок трудомісткості.

Всі варіанти включають в себе два окремих завдання:

- а) розробка проекту програмного продукту;
- б) розробка програмної оболонки.

Завдання 1 за ступенем новизни відноситься до групи А, завдання 2 – до групи Б.

За складністю алгоритми, які використовуються в завданні 1 належать до групи 1; а в завданні 2 – до групи 3.

Проведемо розрахунок норм часу на розробку та програмування для кожного з завдань.

Загальна трудомісткість обчислюється як:

$$T_0 = T_p \cdot K_{\Pi} \cdot K_{СК} \cdot K_M \cdot K_{СТ} \cdot K_{СТ.М} \quad (3.13)$$

де T_p – трудомісткість розробки ПП;

K_{Π} – поправочний коефіцієнт;

$K_{СК}$ – коефіцієнт на складність вхідної інформації;

K_M – коефіцієнт рівня мови програмування;

$K_{СТ}$ – коефіцієнт використання стандартних модулів і прикладних програм;

$K_{СТ.М}$ – коефіцієнт стандартного математичного забезпечення.

Для першого завдання, виходячи із норм часу для завдань розрахункового характеру степеню новизни А та групи складності алгоритму 1, трудомісткість дорівнює: $T_p = 37$ людино-днів. Поправочний коефіцієнт, який враховує вид нормативно-довідкової інформації для першого завдання: $K_{\Pi} = 1.8$.

Поправочний коефіцієнт, який враховує складність контролю вхідної та вихідної інформації для всіх семи завдань рівний 1: $K_{СК} = 1$. Оскільки при розробці першого завдання використовуються стандартні модулі, врахуємо це за допомогою коефіцієнта $K_{СТ} = 0.9$. Тоді загальна трудомісткість програмування першого завдання дорівнює:

$$T_1 = 37 \cdot 1.8 \cdot 0.9 = 59,94 \text{ людино-днів.}$$

Проведемо аналогічні розрахунки для подальших завдань.

Для другого завдання (використовується алгоритм третьої групи складності, степінь новизни Б), тобто $T_p = 29$ людино-днів, $K_{П} = 0.9$, $K_{СК} = 1$, $K_{СТ} = 0.8$:

$$T_2 = 29 \cdot 0.9 \cdot 0.8 = 20.88 \text{ людино-днів.}$$

Складаємо трудомісткість відповідних завдань для кожного з обраних варіантів реалізації програми, щоб отримати їх трудомісткість:

$$T_I = (59,94 + 20.88 + 4.8 + 20.88) \cdot 8 = 852 \text{ людино-годин.}$$

$$T_{II} = (59,94 + 20.88 + 6.91 + 20.88) \cdot 8 = 868.88 \text{ людино-годин.}$$

Найбільш високу трудомісткість має варіант II.

В розробці беруть участь два програмісти з окладом 16000 грн., один аналітик в області даних з окладом 18000. Визначимо середню зарплату за годину за формулою:

$$СЧ = \frac{M}{T_m \cdot t} \text{ грн.} \quad (3.14)$$

де M – місячний оклад працівників;

T_m – кількість робочих днів тиждень;

t – кількість робочих годин в день.

$$C_{\text{ч}} = \frac{16000 + 16000 + 18000}{3 \cdot 21 \cdot 8} = 99.2 \text{ грн.}$$

Тоді, розраховуємо заробітну плату за формулою:

$$C_{\text{зп}} = C_{\text{ч}} \cdot T_i \cdot K_{\text{д}} \quad (3.15)$$

де $C_{\text{ч}}$ – величина погодинної оплати праці програміста;

T_i – трудомісткість відповідного завдання;

$K_{\text{д}}$ – норматив, який враховує додаткову заробітну плату.

Зарплата розробників за варіантами становить:

$$\text{I.} \quad C_{\text{зп}} = 99.2 \cdot 852 \cdot 1.2 = 101422.08 \text{ грн.}$$

$$\text{II.} \quad C_{\text{зп}} = 99.2 \cdot 868.88 \cdot 1.2 = 103431.5 \text{ грн.}$$

Відрахування на єдиний соціальний внесок становить 22%:

$$\text{I.} \quad C_{\text{вд}} = C_{\text{зп}} \cdot 0.22 = 101422.08 \cdot 0.22 = 22312.8 \text{ грн.}$$

$$\text{II.} \quad C_{\text{вд}} = C_{\text{зп}} \cdot 0.22 = 103431.5 \cdot 0.22 = 22754.93 \text{ грн.}$$

Тепер визначимо витрати на оплату однієї машино-години. ($C_{\text{м}}$). Так як одна ЕОМ обслуговує одного програміста з окладом 16000 грн., з коефіцієнтом зайнятості 0,2 то для однієї машини отримаємо:

$$C_{\text{г}} = 12 \cdot M \cdot K_3 = 12 \cdot 16000 \cdot 0.2 = 38400 \text{ грн.}$$

З урахуванням додаткової заробітної плати:

$$C_{\text{зп}} = C_{\text{г}} \cdot (1 + K_3) = 38400 \cdot (1 + 0.2) = 46080 \text{ грн.}$$

Відрахування на соціальний внесок:

$$C_{\text{вд}} = C_{\text{зп}} \cdot 0.22 = 46080 \cdot 0.22 = 10137.6 \text{ грн.}$$

Амортизаційні відрахування розраховуємо при амортизації 25% та вартості ЕОМ – 10000 грн.

$$C_A = K_{TM} \cdot K_A \cdot C_{ПР} = 1.4 \cdot 0.25 \cdot 10000 = 3500 \text{ грн.},$$

де K_{TM} – коефіцієнт, який враховує витрати на транспортування та монтаж приладу у користувача;

K_A – річна норма амортизації;

$C_{ПР}$ – договірна ціна приладу.

Витрати на ремонт та профілактику розраховуємо як:

$$C_P = K_{TM} \cdot C_{ПР} \cdot K_P = 1.4 \cdot 10000 \cdot 0.08 = 1120 \text{ грн.},$$

де K_P – відсоток витрат на поточні ремонти.

Ефективний годинний фонд часу ПК за рік розраховуємо за формулою:

$$T_{EF} = (D_K - D_B - D_C - D_P) \cdot t_z \cdot K_B = (365 - 104 - 12 - 16) \cdot 8 \cdot 0.36 = \\ = 671.04 \text{ години},$$

де D_K – календарна кількість днів у році;

D_B, D_C – відповідно кількість вихідних та святкових днів;

D_P – кількість днів планових ремонтів устаткування;

t – кількість робочих годин в день;

K_B – коефіцієнт використання приладу у часі протягом зміни.

Витрати на оплату електроенергії розраховуємо за формулою:

$$C_{EL} = T_{EF} \cdot N_C \cdot K_3 \cdot C_{ЕН} = 671.04 \cdot 0.4 \cdot 0.2 \cdot 9.43 = 506.23 \text{ грн.},$$

де N_C – середньо-споживча потужність приладу;

K_3 – коефіцієнтом зайнятості приладу;

$C_{ЕН}$ – тариф за 1 КВт-годин електроенергії.

Накладні витрати розраховуємо за формулою:

$$C_H = C_{\text{ПР}} \cdot 0.67 = 10000 \cdot 0.67 = 6700 \text{ грн.}$$

Тоді, річні експлуатаційні витрати будуть:

$$C_{\text{ЕКС}} = C_{\text{ЗП}} + C_{\text{ВІД}} + C_A + C_P + C_{\text{ЕЛ}} + C_H \quad (3.16)$$

$$C_{\text{ЕКС}} = 46080 + 10137.6 + 3500 + 1120 + 506.23 + 6700 = 68043.83 \text{ грн.}$$

Собівартість однієї машино-години ЕОМ дорівнюватиме:

$$C_{\text{М-Г}} = \frac{C_{\text{ЕКС}}}{T_{\text{ЕФ}}} = \frac{68043.83}{671.04} = 101.4 \text{ грн/год}$$

Оскільки в даному випадку всі роботи, які пов'язані з розробкою програмного продукту ведуться на ЕОМ, витрати на оплату машинного часу, в залежності від обраного варіанта реалізації, складає:

$$C_M = C_{\text{М-Г}} \cdot T \quad (3.17)$$

$$\text{I. } C_M = 101.4 \cdot 852 = 86392.8 \text{ грн.}$$

$$\text{II. } C_M = 101.4 \cdot 868,88 = 88104.432 \text{ грн.}$$

Накладні витрати складають 67% від заробітної плати:

$$C_H = C_{\text{ЗП}} \cdot 0.67 \quad (3.18)$$

$$\text{I. } C_H = 86392.8 \cdot 0.67 = 57883.2 \text{ грн.}$$

$$\text{II. } C_H = 88104.432 \cdot 0.67 = 59030 \text{ грн.}$$

Отже, вартість розробки ПП за варіантами становить:

$$C_{\text{ПП}} = C_{\text{ЗП}} + C_{\text{ВІД}} + C_M + C_H \quad (3.19)$$

$$\text{I. } C_{\text{ПП}} = 101422.08 + 22312.8 + 86392.8 + 57883.2 = 268010.88 \text{ грн.}$$

$$\text{II. } C_{\text{ПП}} = 103431.5 + 22754.93 + 88104.432 + 59030 = 273323.862 \text{ грн.}$$

3.7 Вибір кращого варіанту ПП техніко-економічного рівня

Розрахунок коефіцієнта техніко-економічного рівня здійснюється за формулою:

$$K_{\text{ТЕР}j} = \frac{K_{Kj}}{C_{\Phi j}} \quad (3.20)$$

Обрахунки:

$$K_{\text{ТЕР}1} = \frac{2.76}{268010.88} = 1.02981 \cdot 10^{-5}$$

$$K_{\text{ТЕР}2} = \frac{2.6}{273323.862} = 0.9512 \cdot 10^{-5}$$

З результатів обрахунків бачимо, що ефективнішим є перший варіант реалізації програми, де коефіцієнт техніко-економічного рівня:

$$K_{\text{ТЕР}1} = 1.02981 \cdot 10^{-5}.$$

Він має параметри:

- 1) вибір мови програмування для розробки ПП – Python;
- 2) вибір середовища розробки ПП – Google Colaboratory;
- 3) вибір реалізації алгоритмів обробки даних – використання бібліотек.

Такий варіант виконання програмного продукту дає користувачу зручне середовище для роботи, швидку реалізацію програми та доступний функціонал для проведення досліджень.

Висновки до розділу 3

У розділі було здійснено повноцінний функціонально-вартісний аналіз програмного продукту, призначеного для моделювання та прогнозування fV_m.

Визначені основні функціональні складові системи, описано їх призначення та проаналізовано можливі варіанти реалізації з урахуванням впливу відповідних чинників.

У ході аналізу було обґрунтовано вибір системи параметрів, за якими оцінюється якість реалізації програмного продукту. Також проведено експертне оцінювання варіантів реалізації функцій, розраховано рівень якості кожного з них та виконано техніко-економічне порівняння.

Опираючись на результати проведених розрахунків обрано найбільш доцільний варіант реалізації, який забезпечить оптимальне поєднання продуктивності, функціональності та ресурсної ефективності.

РОЗДІЛ 4 ОХОРОНА ПРАЦІ ТА ІНФОРМАЦІЙНА БЕЗПЕКА

Майже весь час при написанні дипломної роботи проводиться сидячи за персональним комп'ютером (ПК). Тим паче коли тематика вимагає програмного моделювання процесів, їх аналіз та побудову прогнозів.

Саме тому, існують потенційні ризики для фізичного та психоемоційного здоров'я користувача. Для мінімізації їх виникнення необхідно дотримуватися певних вимог інформаційної безпеки праці.

4.1 Основні фактори ризику при роботі за ПК

Під час експлуатації персональних електронних комп'ютерів людина піддається впливу низки несприятливих і небезпечних його виробничих елементів.

Серед них виділимо наступні важливі фактори:

- 1) електромагнітне випромінювання моніторів та системних блоків;
- 2) статичне напруження м'язів ший, спини та плечей;
- 3) інтенсивне зорове навантаження через дрібний текст, яскравість екрану;
- 4) неправильний мікроклімат у робочій кімнаті;
- 5) психоемоційне перевантаження через тривале розумове навантаження.

Усі ці фактори враховані в чинних нормативно-правових актах законодавства України, та повинні відповідати санітарно-гігієнічним, ергономічним і технічним вимогам [17-19].

4.2 Мінімізація навантаження та дотримання норм

Для забезпечення прийнятних умов праці та мінімальних ризиків користувачу ПК необхідно дотримуватися низки правил [18-20].

1. Комфортна організація робочого місця. Відстань від очей до екрана від 60 до 70 см. Бажана висота стола у діапазоні 70–75 см. Крісло з регуляцією висоти та кута нахилу спини.
2. Рекомендується використовувати комбіноване освітлення приміщення. Симбіоз природного та штучного світла допомагає уникати відблисків на екрані комп'ютера.
3. Мікроклімат середовища повинен підтримуватись у комфортних межах. Температура — 20-24 °С. Відносна вологість приміщення — 40-60 % [20].
4. Ефективний режим праці та відпочинку. Згідно з [18], необхідно робити перерви тривалістю 10–15 хв після кожних 50 хвилин безперервної роботи.
5. Заради профілактики зорового перевантаження рекомендована гімнастика для очей.

Дотримання цих рекомендацій знижує ризик професійних та фізичних захворювань і підвищує працеспроможність людини.

4.3 Пожежна та інформаційна безпека

Нижче наведено перелік основних причин виникнення пожеж при експлуатації комп'ютерного обладнання.

1. Перегрів елементів через засміченість або відсутність охолодження.
2. Коротке замикання у несправних подовжувачах і мережевих фільтрах.

3. Перевантаження електромережі через одночасне підключення багатьох пристроїв.
4. Використання несертифікованих блоків живлення та зарядних пристроїв.

Тому логічними будуть такі рекомендації та базові дії для запобігання пожеж, які засновані на передчасному виявленні проблеми або взагалі її уникнення. Перелік наведено нижче.

1. Щоденна перевірка справності обладнання.
2. Користування лише сертифікованим електричним устаткуванням.
3. Ніколи не залишати ввімкнені прилади без нагляду на довгий період часу.
4. Швидкодоступність у розміщенні вогнегасників, рубильників електроживлення, плану евакуації та іншого протипожежного інвентарю [19].

Актуальність інформаційної безпеки важко переоцінити в наші дні. Особливо в розрізі цифрової обробки даних, моделювання різних математичних процесів та зберігання результатів інтелектуальної праці.

Основними загрозами тут є втрата, викрадення та пошкодження інформаційних даних. Можна виокремити такі основні способи захисту:

- 1) парольний захист пристроїв і файлів;
- 2) шифрування архівів і документів, що містять проміжні або фінальні результати;
- 3) використання актуального антивірусного програмного забезпечення;
- 4) резервне копіювання на зовнішні носії інформації та у хмарні середовища;
- 5) дотримання авторського права та цитування [21–24].

Такі нескладні кроки допоможуть уникнути можливих проблем у майбутньому та захистять персональні дані, результати, висновки тощо.

Висновки до розділу 4

Таким чином, можна стверджувати, що виконання норм охорони праці та інформаційної безпеки при роботі з комп'ютером є важливими елементами безпечної професійної діяльності користувача. Комплекс заходів, який скерований на дотримання протипожежної безпеки, захисту інформації, правильної ергономіки робочого місця та профілактики м'язових перевантажень дозволяє забезпечити комфортні та безпечні умови праці.

А для досягнення ефективних результатів при роботі над будь-яким проєктом важливо не лише створити та показати якісно-математичні результати, але й захистити всі процеси та пов'язані з ними дані.

ВИСНОВКИ

У процесі написання кваліфікаційної роботи було досліджено математичні засади фрактального броунівського руху, fBm , та реалізовано комплексну чисельну модель для його аналізу й прогнозування часових рядів зі складною залежністю.

На основі теоретичного аналізу було узагальнено властивості fBm як гауссівського процесу з самоподібністю, стаціонарністю приростів і параметром Харста, що визначає ступінь автокореляції та тип довготривалої пам'яті. Розглянуто статистичні характеристики приростів, включаючи дисперсію, коваріацію та кореляцію, а також наведено консистентні оцінки цих параметрів. Описано статистики A_n , B_n , D_n , F_n , які дозволяють перевірити гіпотезу про належність даних до процесу fBm , та представлено методологію побудови прогнозу на основі умовного математичного сподівання та ARIMA.

Було реалізовано власну програму у Google Colaboratory для побудови траєкторій fBm , розрахунку статистик і реалізації моделей прогнозу. Проведено чисельні експерименти для різних значень параметра Харста і об'ємів вибірки, що дозволило перевірити граничні теореми та ефективність оцінок. Здійснено порівняння точності прогнозування двома методами. Практичні результати підтвердили, що точність прогнозу значною мірою залежить від значення параметра Харста.

Оцінено функціональні можливості й економічну доцільність реалізованого програмного засобу. Проведено експертне оцінювання параметрів реалізації і обґрунтовано вибір оптимального впровадження.

Також окреслено основні аспекти безпечної організації роботи користувача з програмою, включаючи вимоги до ергономіки, захисту інформації та дотримання норм охорони праці.

Результати дослідження підтверджують доцільність використання фрактального броунівського руху як інструменту для моделювання та прогнозування часових рядів і демонструють ефективність запропонованого підходу як у теоретичному, так і в практичному вимірах.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Бондаренко В.Г. Про деякі статистики фрактального броунівського руху. Системні дослідження та інформаційні технології. 2021. № 1. С. 131–138. ISSN 1681-6048. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2021.11.
2. Mishura Y. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1929. Berlin : Springer, 2008. 393 p. DOI: 10.1007/978-3-540-75873-0.
3. Biagini F., Hu Y., Øksendal B., Zhang T. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications. Berlin : Springer, 2013. 329 p. DOI: 10.1007/978-1-84628-797-8.
4. Mishura Y., Ralchenko K., Shevchenko G. Existence and uniqueness of a mild solution to the stochastic heat equation with white and fractional noises. Theoretical Probability and Mathematical Statistics. 2019. Vol. 98. P. 149–170. URL: <https://doi.org/10.1090/tpms/1068>
5. Kubilius K., Mishura Yu., Ralchenko K. Parameter estimation in fractional diffusion models. Bocconi & Springer Series, 2017. 380 p. DOI: 10.1007/978-3-319-71030-3.
6. Banna O., Mishura Yu., Ralchenko K., Shklyar S. Fractional Brownian motion. Approximations and projections. Wiley-ISTE, 2019. 288 p. DOI: 10.1002/9781119476771.
7. Nourdin I. Selected aspects of fractional Brownian motion. Springer, 2012. 124 p. DOI: 10.1007/978-88-470-2823-4.
8. Nourdin I. Asymptotic behavior of weighted quadratic and cubic variations of fractional Brownian motion. The Annals of Probability. 2008. Vol. 36, No. 6. P. 2159–2175. DOI: 10.1214/07-AOP38.
9. Nourdin I. Noncentral convergence of multiple integrals. The Annals of Probability. 2009. Vol. 37, No. 4. P. 1412–1426. DOI: 10.1214/08-AOP435.

10. Dieker T. Simulation of fractional Brownian motion : Master's thesis. University of Twente, Amsterdam, 2004. 77 p. URL: <https://www.columbia.edu/~ad3217/fbm/thesis.pdf>
11. Peltier R.F., Levy Vehel J. A new method for estimating the parameter of fractional Brownian motion. Rapport de recherche de l'INRIA, No. 2396. France, 1994. 27 p.
12. Gradinaru M., Nourdin I. Milstein's type schemes for fractional SDEs. Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques. 2009. Vol. 45, No. 4. P. 1085–1098. DOI: 10.1214/08-AIHP196.
13. Nourdin I., Nualart D., Tudor C. Central and non-central limit theorems for weighted power variations of fractional Brownian motion. Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques. 2010. Vol. 46, No. 4. P. 1055–1079. DOI: 10.1214/09-AIHP342.
14. Mandelbrot B.B., Van Ness J.W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. SIAM Review. 1968. Vol. 10, No. 4. P. 422–437. URL: <https://courses.physics.ucsd.edu/2016/Spring/physics235/Mandelbrot%20Van%20Ness.pdf>
15. Coeurjolly J.F. Simulation and identification of the fractional Brownian motion: a bibliographical and comparative study. Journal of Statistical Software. 2000. Vol. 5, No. 7. P. 1–53. URL: <https://www.jstatsoft.org/v05/i07>
16. Yujun Yu. On the optimal forecast with the fractional Brownian motion. SMU School of Economics. Research Collection School of Economics. 2024. URL: https://ink.library.smu.edu.sg/cgi/viewcontent.cgi?article=3750&context=soc_e_research
17. Закон України «Про охорону праці» : Закон від 14.10.1992 № 2694-XII. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2694-12>

18. СанПіН 3.3.2.007–98. Гігієнічні вимоги до персональних електронно-обчислювальних машин. Київ : МОЗ України, 1998. 20 с.
19. ДСТУ EN ISO 9241-5:2003. Вимоги до робочого місця та робочого середовища при офісній роботі за ВДТ. – [Чинний від 01.01.2004].
20. ДСанПіН 3.3.6.042-99. Державні санітарні правила для виробничих приміщень. Київ : МОЗ України, 1999. 28 с.
21. Закон України «Про інформацію» : Закон від 02.10.1992 № 2657-XII. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2657-12>
22. Закон України «Про захист персональних даних» : Закон від 01.06.2010 № 2297-VI. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2297-17>
23. Куценко О. В. Основи охорони праці : навч. посіб. Харків : ХНУРЕ, 2020. 198 с.
24. Гуляєв В. М. Охорона праці в галузі : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2021. 240 с.
25. Бідюк П. І., Романенко В. Д., Тимошук О. Л. Аналіз часових рядів : навч. посіб. Київ : НТУУ «КПІ», 2010. 160 с. URL: <https://ela.kpi.ua/items/256da52e-13da-4d07-8f25-9d9505496a2c>
26. Яровий А. Т., Страхов Є. М. Аналіз часових рядів : навч.-метод. посіб. Одеса : Освіта України, 2019. 110 с. URL: https://onu.edu.ua/pub/bank/userfiles/files/fmfit/nachalni_materiali/navch_m_at_111_mag/analiz_chasovykh_ryadiv.pdf
27. Білобородько О. І., Ємел'яненко Т. Г. Аналіз динамічних рядів : навч. посіб. Дніпро : РВВ ДНУ, 2014. 80 с. URL: http://repository.dnu.dp.ua:1100/upload/bb40e3dc379f6e0736d9d88c27a31188Biloborodko_TimeSeries.pdf

ДОДАТОК А КОДОВА РЕАЛІЗАЦІЯ

```

#model_fbm_parameters_statistics

!pip install fbm

import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from fbm import FBM
from scipy.stats import norm
from numpy.linalg import pinv

# Параметри моделі змінюються відповідно до умов побудови
n = 124 # кількість точок
H_true = 0.3 # реальне значення Харста
T = 1.0 # фінальний час

# Генерація FBM
fbm_sim = FBM(n=n, hurst=H_true, length=T, method='daviesharte')
t = np.linspace(0, T, n + 1)
B_H = fbm_sim.fbm()

# Візуалізація
plt.figure(figsize=(10, 4))
plt.plot(t, B_H, label=f'FBM (H={H_true})')
plt.title("Фрактальний броунівський рух")
plt.xlabel("Час")
plt.ylabel("B_H(t)")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

# Прирости fBm  $y_k = B_H(k \cdot s) - B_H((k-1) \cdot s)$ 
xi = np.diff(B_H)

# Значення процесу у точках  $(k-1)s$ 
B_vals = B_H[:-1]
# довжина одного інтервалу (кроку)

```

```

s = T / n

# Оцінка дисперсії ( $s^2H$ )
var_est = np.mean(xi ** 2)
# Оцінка коваріації приростів
cov_est = np.mean(xi[:-1] * xi[1:])
# Оцінка однокрокового коефіцієнта кореляції приростів rho_1
rho1 = cov_est / var_est

# Обернена формула для оцінки показника H
H_est = 0.5 + np.log(rho1 + 1)/np.log(4)

# Вивід
print(f"Оцінка дисперсії приростів ( $s^2H$ ): {var_est:.5f}")
print(f"Оцінка коваріації приростів: {cov_est:.5f}")
print(f"Оцінка однокрокового коефіцієнта кореляції приростів rho_1: {rho1:.5f}")
print(f"Оцінка показника Харста H: {H_est:.5f}")

# Генерація FBM для спрогнозованого H
fbm_sim = FBM(n=n, hurst=H_est, length=T, method='daviesharte')
t = np.linspace(0, T, n + 1)
B_H1 = fbm_sim.fbm()

sample = [B_H, B_H1]
labels = [f'FBM (H_true={H_true})', f'FBM (H_estimated={H_est:.5f})']

# Побудова графіка
plt.figure(figsize=(10, 4))

for i in range(len(sample)):
    plt.plot(t, sample[i], label=labels[i])

plt.title("Графік порівняння fBm для заданого H_true та спрогнозованого H_est")
plt.xlabel("Час t")
plt.ylabel("B_H(t)")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

# Перевірка діапазону H
if 0 < H_true < 0.5:

```

```

# Обчислення статистик A_n i B_n
A_n = (1 / (n * s**(4 * H_true))) * np.sum(B_vals * xi**3)
B_n = (1 / (n**(1 + H_true) * s**(5*H_true))) * np.sum((B_vals**2) *
xi**3)

# Теоретичні очікування
A_exp = -1.5 # для A_n
var_Bn = 1 / (2 * H_true + 2) # дисперсія для B_n
B_exp = 0

print("Оскільки  $H \in (0; 0.5)$ , обчислено статистики A_n та B_n.")
print("Статистики D_n та F_n не обчислюються для  $H < 0.5$ , бо їх гранична
поведінка визначена тільки для  $H > 0.5$ .")

# Формування таблиці
results = pd.DataFrame({
    "Статистика": ["A_n", "B_n"],
    "Значення": [A_n, B_n],
    "Теоретичне очікування": [A_exp, B_exp]
})

elif 0.5 < H_true < 1:
    # Обчислення статистик D_n i F_n
    D_n = (1 / (n**(2 * H_true) * s**(4 * H_true))) * np.sum(B_vals * xi**3)
    F_n = (1 / (n**(H_true) * s**(3 * H_true))) * np.sum(xi**3)

    # Теоретичні очікування
    D_exp = 1.5
    F_exp = 0

    print("Оскільки  $H \in (0.5; 1)$ , обчислено статистики D_n та F_n.")
    print("Статистики A_n та B_n не обчислюються для  $H > 0.5$ , бо їх гранична
поведінка визначена тільки для  $H < 0.5$ .")

    # Формування таблиці
    results = pd.DataFrame({
        "Статистика": ["D_n", "F_n"],
        "Значення": [D_n, F_n],
        "Теоретичне очікування": [D_exp, F_exp]
    })

else:
    print("Помилка: Значення H має бути в межах (0; 1).")
    print("Фрактальний броунівський рух визначений лише для  $H \in (0; 1)$ .")

```

```

Обчислення статистик неможливе.")
results = None

# Якщо є результати – вивести
if results is not None:
    print("\nРезультати обчислення статистик:")
    print(results)

# Побудова графіка
plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.bar(results["Статистика"], results["Значення"], color=["#a1c9f4",
"#ffb482", "#8de5a1", "#f6c4e1"])

# Горизонтальні лінії для кожної теоретичної величини
for idx, row in results.iterrows():
    plt.axhline(y=row["Теоретичне очікування"],
                linestyle='--',
                linewidth=1.5,
                label=f"Теоретичне {row['Статистика']} = {row['Теоретичне очікування']}")

# Заголовок, легенда і сітка
plt.title(f"Оцінки статистик для FBM (H_true = {H_true})")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

#forecast_fBm new colab
# UMS

# Параметри
H = 0.3
n = 100 # довжина історії змінюється відповідно до задачі
k = 10 # кількість прогнозованих точок задається вручну
T = 1.0
t = np.linspace(0, T, n + k + 1)

# Коваріаційна функція
def fbm_cov(t1, t2, H):
    return 0.5 * (np.abs(t1) ** (2 * H) + np.abs(t2) ** (2 * H) - np.abs(t1
-t2) ** (2 * H))

```

```

# Повна коваріаційна матриця (для генерації істинної реалізації FBM)
cov_full = np.fromfunction(lambda i, j: fbm_cov(t[i], t[j], H), (n + k + 1, n
+ k + 1), dtype=int)
true_fbm = np.random.multivariate_normal(np.zeros(n + k + 1), cov_full)

# Історичні значення та прогнозована частина
X_hist = true_fbm[:n + 1]
X_true_future = true_fbm[n + 1:]

# Коваріаційна матриця для умовного розподілу
C = cov_full[:n + 1, :n + 1]
inv_C = np.linalg.pinv(C)

forecast = []
stds = []

for step in range(1, k + 1):
    idx_pred = n + step
    c_vec = cov_full[idx_pred, :n + 1]

    mu_cond = c_vec @ inv_C @ X_hist # умовне математичне сподівання
    forecast.append(mu_cond)

    var_cond = cov_full[idx_pred, idx_pred] - c_vec @ inv_C @ c_vec.T #
    дисперсія похибки
    stds.append(np.sqrt(var_cond))

forecast = np.array(forecast)
stds = np.array(stds)

# Обчислення MSE
mse = np.mean((forecast - X_true_future) ** 2)
print(f"MSE прогнозу: {mse:.5f}")

# Візуалізація
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(t[:n + 1], X_hist, label='Історичні дані')
plt.plot(t[n + 1:], X_true_future, label='Істинне значення', color='green')
plt.plot(t[n + 1:], forecast, 'r--o', label='Прогноз (UMS)')
plt.fill_between(t[n + 1:], forecast - stds, forecast + stds, color='red',
alpha=0.3, label='±1 STD')

```

```

plt.xlabel('Час')
plt.ylabel('Значення FBM')
plt.title('Прогноз фрактального броунівського руху та довірчі межі')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()

#ARIMA

# Параметри
H = 0.3
n = 100
k = 10
T = 1.0
t = np.linspace(0, T, n + k + 1)

# Коваріаційна функція
def fbm_cov(t1, t2, H):
    return 0.5 * (np.abs(t1)**(2*H) + np.abs(t2)**(2*H) - np.abs(t1 -
t2)**(2*H))

# Створення коваріаційної матриці
cov = np.fromfunction(lambda i, j: fbm_cov(t[i], t[j], H), (n + k + 1, n + k +
1), dtype=int)

# Генерація FBM
fbm = np.random.multivariate_normal(np.zeros(n + k + 1), cov)

# Обчислення приростів (delta B_H)
increments = np.diff(fbm)

# Використовуємо тільки прирости відомої частини
train_increments = increments[:n]

# Побудова моделі ARIMA(p=1, d=0, q=0)
model = ARIMA(train_increments, order=(1, 0, 0))
model_fit = model.fit()

# Прогноз приростів на k кроків
forecast_increments = model_fit.forecast(steps=k)

```

```

# Відома остання точка FBM
last_known = fbm[n]

# Кумулятивна сума приростів → прогноз FBM
forecast_fbm = last_known + np.cumsum(forecast_increments)

# Істинні значення FBM
true_fbm_future = fbm[n+1:]

mse_increments = np.mean((forecast_fbm - true_fbm_future)**2)
print(f"MSE прогнозу у просторі приростів: {mse_increments:.5f}")

# Візуалізація
plt.figure(figsize=(10,5))
plt.plot(t[:n+1], fbm[:n+1], label='Історія')
plt.plot(t[n+1:], true_fbm_future, label='Справжнє майбутнє', color='green')
plt.plot(t[n+1:], forecast_fbm, 'r--o', label='Прогноз (ARIMA на приростах)')
plt.legend()
plt.title('Прогноз FBM у просторі приростів')
plt.xlabel('Час')
plt.ylabel('B_H(t)')
plt.grid(True)
plt.show()

```

ДОДАТОК Б ПРЕЗЕНТАЦІЙНІ МАТЕРІАЛИ

ФРАКТАЛЬНІ МОДЕЛІ ЧАСОВИХ РЯДІВ

Виконала:

студентка 4 курсу групи КА-12
Бестужева Поліна Олександрівна

Науковий керівник:

професор, доктор фіз.-мат. наук
Бондаренко Віктор Григорович



Київ - 2025

АКТУАЛЬНІСТЬ ДОСЛІДЖЕННЯ

- Фрактальний броунівський рух (**fBm**) — одна з небагатьох моделей, здатних описувати часові ряди з довготривалою пам'яттю, самоподібністю та нестандартною кореляційною структурою.
- Класичні моделі (наприклад, **ARIMA**) не завжди забезпечують адекватний опис складних залежностей у реальних даних, особливо з довгостроковими приростами.
- **fBm** дозволяє будувати лінійний прогноз з урахуванням властивостей процесу, що підвищує якість передбачення.
- Практична цінність роботи полягає в тому, що моделі на основі **fBm** застосовні у фінансовій, інженерній, гідрологічній та телекомунікаційній сферах.

ВСТУП

Об'єкт дослідження — фрактальний броунівський рух, fBm .

Предмет дослідження — методи моделювання та прогнозування часових рядів з довготривалою пам'яттю на основі fBm .

Мета роботи — дослідження математичних властивостей fBm та побудова ефективних методів прогнозування часових рядів з його використанням.

Програмну реалізацію fBm виконано в середовищі Google Colaboratory мовою програмування Python із використанням бібліотек FBM, NumPy, statsmodels, matplotlib та інших.

Результати роботи можуть бути використані для аналізу, моделювання та прогнозування часових рядів у фінансовій, інженерній, гідрологічній та телекомунікаційній сферах.



3

Постановка задачі дипломної роботи

1. Визначити методи моделювання фрактального броунівського руху.
2. Побудувати оцінки дисперсії та коваріації приростів й однокрокового коефіцієнта кореляції.
3. Побудувати статистики fBm та дослідити збіжність за граничними теоремами.
4. Побудувати прогноз фрактального броунівського руху.
5. Аналіз отриманих результатів та висновки з роботи.

4

Фрактальний броунівський рух - fBm

Фрактальний броунівський рух fBm, позначається як $B_H(t)$ при $t \geq 0$, - це стаціонарний, гауссівський випадковий процес із нульовим математичним сподіванням та параметром самоподібності $0 < H < 1$, параметер Харста H .

$$\begin{cases} B_H(0) = 0, & E[B_H(t)] = 0 \\ R(t, s) = E[B_H(t)B_H(s)] = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}) \end{cases}$$

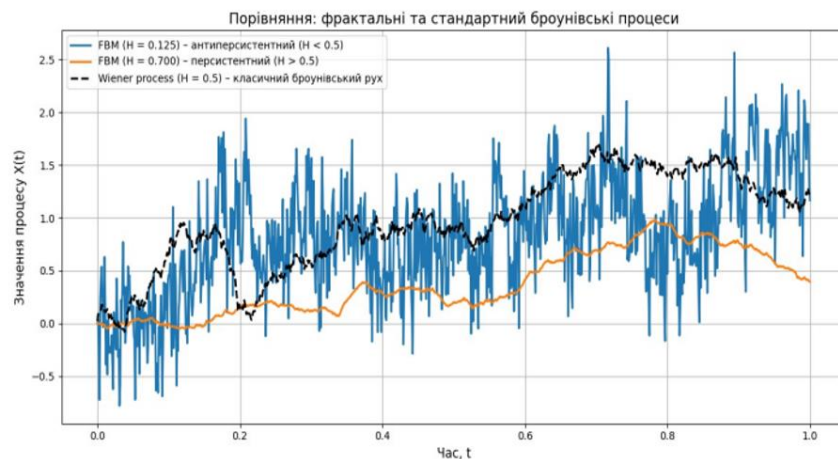
при $0 < H < 1$, звідки $DB_H(t) = t^{2H}$.

Якщо $H=0.5$, то fBm є стандартним вінерівським процесом: $B_{\frac{1}{2}}(t) = w(t)$.

5

Властивості фрактального броунівського руху

- При $H < \frac{1}{2}$ послідовність fBm називають «рожевим шумом». Це антиперсистентний процес, де прирости мають коротку пам'ять. Практичні дані: фінансові вибірки.
- При $H > \frac{1}{2}$ послідовність fBm називається «чорним шумом». Персистентний процес з довгою пам'яттю приростів. Практичні дані: статистика сонячної активності.



6

Методи моделювання fBm

Для практичної реалізації траєкторій фрактального броунівського руху, fBm, існує декілька головних та найбільш вживаних алгоритмів генерації.

Перш за все, вони відрізняються один від одного не лише точністю апроксимації, але й обчислювальними потужностями, затратами часу та пам'яті.

Найбільш вживаними є:

- 1) метод Хоскінга;
- 2) метод розкладу Чолеського;
- 3) метод Девіса-Гарте.

Їх особливості та поведінку розглянемо далі.



ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ

Таблиця 1 «Порівняння методів моделювання fBm»

Назва методу	Обчислюва на складність	Складність пам'яті	Переваги методу	Недоліки методу
Хоскінг	$O(n^2)$	$O(n)$	Рекурсивність та висока точність	повільний для великого об'єму даних
розклад Чолеського	$O(n^3)$	$O(n^2)$	Прямолінійність, достатня точність алгоритму	дуже затратний для виконання алгоритму
Девіс-Гарте	$O(n \log(n))$	$O(n)$	Висока швидкість, хороша ефективність й висока точність	через циклічність можливі похибки



Побудова консистентних оцінок параметрів fBm

Формула для обрахунку консистентної оцінки дисперсії приросту s^{2H}

$$s^{2H} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k^2$$

Формула для обрахунку консистентної оцінки коваріацію приростів $\hat{\theta}$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} y_j y_{j+1}$$

Формула для обрахунку консистентної оцінки однокрокового коефіцієнта кореляції $\hat{\rho}_1$ для приростів

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\hat{\theta}}{s^{2H}}$$

Формула для обрахунку консистентної оцінки показника параметра Харста $\hat{H}$

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(\hat{\rho}_1 + 1)}{\ln 2} + 1 \right)$$

9

Антиперсистентна модель fBm при заданому параметрі Харста $H = 0.3$ та різних об'ємах вибірки n

Оцінка дисперсії приростів (s^{2H}): 0.06291
 Оцінка коваріації приростів: -0.01891
 Оцінка однокрокового коефіцієнта кореляції приростів ρ_{01} : -0.30066
 Оцінка показника Харста H : 0.24204



Рис. 1 Результати консистентних оцінок параметрів fBm та графіки траєкторій при $n=124$

Оцінка дисперсії приростів (s^{2H}): 0.01545
 Оцінка коваріації приростів: -0.00410
 Оцінка однокрокового коефіцієнта кореляції приростів ρ_{01} : -0.26516
 Оцінка показника Харста H : 0.27775



Рис. 2 Результати консистентних оцінок параметрів fBm та графіки траєкторій при $n=1024$

10

Персистентна модель **fBm** при заданому параметрі Харста **H = 0.8** та різних об'ємах вибірки **n**

Оцінка дисперсії приростів (s^2H): 0.00039
Оцінка коваріації приростів: 0.00013
Оцінка однокрокового коефіцієнта кореляції приростів ρ_1 : 0.33653
Оцінка показника Харста H : 0.70925



Рис. 3 Результати консистентних оцінок параметрів **fBm** та графіки траєкторій при **n=124**

Оцінка дисперсії приростів (s^2H): 0.00001
Оцінка коваріації приростів: 0.00001
Оцінка однокрокового коефіцієнта кореляції приростів ρ_1 : 0.46086
Оцінка показника Харста H : 0.77341



Рис. 4 Результати консистентних оцінок параметрів **fBm** та графіки траєкторій при **n=1024**



АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ОЦІНОК

Еталонне значення однокрокового коефіцієнт кореляції обраховується за формулою із заданим показником Харста:

$$\rho_1 = 2^{2H-1} + 1$$

- для $H=0.3$ еталонне $\rho_1 = -0.242$. З таблиці 2 бачимо, що найближче значення досягається при $n=1024$.
- для $H=0.8$ еталонне $\rho_1 = 0.516$. З таблиці 2 бачимо, що найближче значення досягається при $n=1024$.

Таблиця 2 «Загальна таблиця оцінок експериментів»

№	Кількість точок n	Заданий показник Харста H	Оцінка дисперсії приростів s^2H	Оцінка коваріації приростів $\hat{\theta}$	Оцінка однокрокового коефіцієнта кореляції приростів $\hat{\rho}_1$	Оцінка показника Харста $\hat{H}$	Відносна похибка $H\%$
1	124	0.3	0.06291	-0.01891	-0.30066	0.24204	19.32%
2	1024	0.3	0.01545	-0.00410	-0.26516	0.27775	7.42%
3	124	0.8	0.00039	0.00013	0.33653	0.70925	11.34%
4	1024	0.8	0.00001	0.00001	0.46086	0.77341	3.32%



СТАТИСТИКИ ФРАКТАЛЬНОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

Актуальною задачею в процесі моделювання часових рядів є задача ідентифікації даних процесу $B_H(ks)$.

Зокрема, нехай прирости $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ утворюють стаціонарну послідовність, що приводить до гіпотези T : «спостереження $B_H(ks)$ являють собою значення траєкторії фрактального броунівського руху, $\mathbf{fBm}$ ».

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{1}{n} \frac{1}{s^{4H}} \sum_{k=1}^n B_H((k-1)s) \xi_k^3 \rightarrow -\frac{3}{2}, \quad H \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\
 B_n &= \frac{1}{n^{1+H}} \frac{1}{s^{5H}} \sum_{k=1}^n B_H((k-1)s)^2 \xi_k^3 \rightarrow 3\eta, \eta \sim N\left(0, \frac{1}{2H+2}\right), H \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\
 D_n &= \frac{1}{n^{2H}} \frac{1}{s^{4H}} \sum_{k=1}^n B_H((k-1)s) \xi_k^3 \rightarrow \frac{3}{2} \zeta^2, \zeta \sim N(0,1), H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\
 F_n &= \frac{1}{n^H} \frac{1}{s^{3H}} \sum_{k=1}^n \xi_k^3 \rightarrow 3\zeta, \quad H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)
 \end{aligned}$$

13

Обчислення статистик

Таблиця 3 «Статистики антиперсистентного $\mathbf{fBm}$ при $H=0.3$ та $\rho_1 = -0.242$ »

n	$\hat{\rho}_1$	$\hat{\theta}$	$\hat{A}_n$	$\hat{B}_n$	$0,537 \cdot B_n$
30	-0.35797	-0.06679	-2.377982	-0.141498	-0.076
50	-0.21548	-0.02153	-2.632159	2.262146	1.215
124	-0.25526	-0.01377	-1.815134	-2.353197	-1,264
1024	-0.23768	-0.00363	-1.566966	0.387886	0,208

Таблиця 4 «Статистики персистентного $\mathbf{fBm}$ при $H=0.8$ та $\rho_1 = 0.516$ »

n	$\hat{\rho}_1$	$\hat{\theta}$	$\hat{D}_n$	$\frac{2}{3} \cdot \hat{D}_n$	$\hat{F}_n$	$\frac{1}{3} \cdot \hat{F}_n$
30	0.64092	0.00289	0.991419	0.661	-1.832791	-0.611
50	0.53503	0.00119	1.781436	1.188	3.125655	1.042
124	0.47895	0.00016	0.096938	0.065	-0.751384	-0,25
1024	0.50128	0.00001	0.432572	0.288	-1.480589	-0,49

14

Перевірка гіпотези Т

Стандартний алгоритм такої перевірки полягає в наступному: припускаємо, що гіпотеза Т виконана, задаємося рівнем значущості p та порівнюємо значення статистики з табличним значенням β , де $F(\beta)=1-p$.

Так, для статистик $\frac{\sqrt{2H+2}}{3}B_n$ та $\frac{1}{3}F_n$, що прямують до $N(0,1)$, виберемо рівень значущості $p=0,05$. Відповідне значення $\lambda = \lambda_{0,05} = 1,9$ тобто гіпотеза приймається, якщо статистики $|0,537B_n| < 1,9$ для $H = 0,3$ та $|\frac{1}{3}\hat{F}_n| < 1,9$ для $H = 0,8$. В даному випадку нерівності виконуються.

Статистика $\hat{D}_n$ $\frac{2}{3}\hat{D}_n$ (для $H = 0,8$) має граничну функцію розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, & x \geq 0 \end{cases} \quad \sqrt{\lambda_{0,05}} = 1,9, \lambda_{0,05} = 3,61$$

гіпотеза приймається, оскільки $\frac{2}{3}\hat{D}_n = 0,661$ або $1,188$ або $0,065$ або $0,288$.

Тобто, можна стверджувати, що незалежно від значення об'єму вибірки n , гіпотеза Т та статистики правдиві для фрактального броунівського руху. Тобто спостережувані дані $B_H(k)$ є значеннями траєкторії fBm , незалежно від їх кількості в експерименті.

15

ПРОГНОЗУВАННЯ fBm методом УМОВНОГО МАТЕМАТИЧНОГО СПОДІВАННЯ

Маємо заданий набір дискретних спостережень $X_n = \{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\}$, де $X(t) = B_H(t)$.

Задача полягає у побудові прогнозу $\tilde{X}(t_{n+k}) = E[X(t_{n+k})|X_n]$ на k кроків.

Умовне математичне сподівання можна описати наступним чином: $\tilde{X}(t_{n+k}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i X(t_i)$.

Коефіцієнти λ_i визначимо як розв'язок системи $\lambda = \frac{r}{R_n}$.

Матриця коваріацій між спостереженнями $R_n = [cov(X(t_i), X(t_j))]_{i,j=1}^n$.

Вектор коваріації між заданими і прогнозованими значеннями: $r = [cov(X(t_{n+k}), X(t_i))]_{i=1}^n$.

Прогноз обчислюється наступним чином $\tilde{X}(t_{n+k}) = r^T R_n^{-1} X_n$.

Оцінюємо якість прогнозу за рахунок обрахунку середньоквадратичної похибки, MSE .

16

Графічне відображення прогнозу на довжині $n=1024$ на $k=100$ кроків

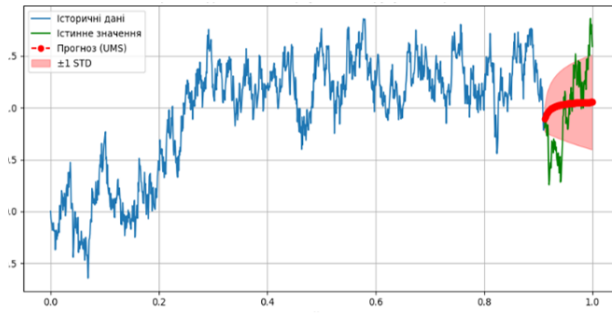


Рис. 5 Траєкторія fBm при $H=0.3$, довжині $n=1024$ прогноз на $k=100$ кроків

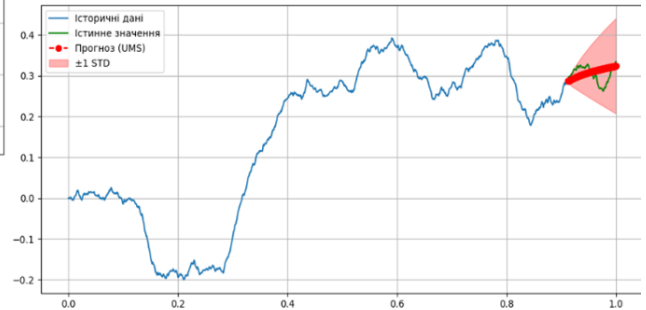


Рис. 6 Траєкторія fBm при $H=0.8$, довжині $n=1024$ прогноз на $k=100$ кроків

17

ПРОГНОЗУВАННЯ fBm методом **ARIMA**

Алгоритм побудови прогнозу:

1. Будемо класичну коваріаційну функцію фрактального броунівського руху.

$$\text{cov}(B_H(t), B_H(s)) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H})$$

2. Створюємо коваріаційну матрицю розмірністю $(n + k + 1) \times (n + k + 1)$. Кожен її елемент обраховується як коваріація між точками t_i та t_j .

3. Генеруємо фрактальний броунівський рух, fBm , як гауссівський вектор.

4. Розраховуємо стаціонарні прирости fBm : $\Delta B_H(t_i) = B_H(t_i) - B_H(t_{i-1})$.

5. Будемо модель ARIMA, авторегресійну модель першого порядку: $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$.

6. Здійснюємо безпосередньо власне прогнозу майбутніх приростів на k кроків.

7. Із приростів переходимо до траєкторії фрактального броунівського руху:

$$\hat{B}_H(t_{n+i}) = B_H(t_t) + \sum_{j=1}^i \Delta \hat{B}_H(t_{n+j}).$$

18

Графічне відображення прогнозу на довжині $n=1024$ на $k=100$ кроків

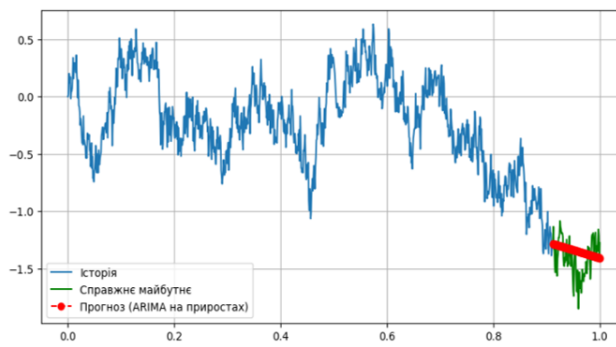


Рис. 7 Траєкторія fBm при $H=0.3$, довжині $n=1024$ прогноз на $k=100$ кроків



Рис. 8 Траєкторія fBm при $H=0.8$, довжині $n=1024$ прогноз на $k=100$ кроків

19

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ПРОГНОЗУ

Для оцінки та порівняння методів прогнозу побудуємо таблицю 5. В якій покажемо чисельні результати точності MSE_1 – методу умовного математичного сподівання, та MSE_2 – точність методу **ARIMA**.

Таблиця 5 «Порівняльна таблиця точності результатів прогнозу»

	n=100, k=10		n=1024, k=100	
	H=0.3	H=0.8	H=0.3	H=0.8
MSE_1	0.17815	0.01466	0.14195	0.00065
MSE_2	0.19104	0.00052	0.03086	0.00169

20

ВИСНОВКИ

- На основі теоретичного аналізу було узагальнено властивості fBm як гауссівського процесу з самоподібністю, стаціонарністю приростів і параметром Харста, що визначає ступінь автокореляції та тип довготривалої пам'яті.
- Розглянуто статистичні характеристики приростів, включаючи дисперсію, коваріацію та кореляцію, а також наведено консистентні оцінки цих параметрів.
- Описано статистики A_n, B_n, D_n, F_n , які дозволяють перевірити гіпотезу про належність даних до процесу fBm.
- Представлено методологію побудови прогнозу на основі умовного математичного сподівання та методом ARIMA.
- Результати дослідження підтверджують доцільність використання фрактального броунівського руху як інструменту для моделювання та прогнозування часових рядів і демонструють ефективність запропонованого підходу як у теоретичному, так і в практичному вимірах.

21

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Mishura Y. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1929. Berlin : Springer, 2008. 393 p. DOI: 10.1007/978-3-540-75873-0.
2. Biagini F., Hu Y., Øksendal B., Zhang T. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications. Berlin : Springer, 2013. 329 p. DOI: 10.1007/978-1-84628-797-8.
3. Mishura Y., Ralchenko K., Shevchenko G. Existence and uniqueness of a mild solution to the stochastic heat equation with white and fractional noises. Theoretical Probability and Mathematical Statistics. 2019. Vol. 98. P. 149–170. URL: <https://doi.org/10.1090/tpms/1068>
4. Dieker T. Simulation of fractional Brownian motion : Master's thesis. University of Twente, Amsterdam, 2004. 77 p. URL: <https://www.columbia.edu/~ad3217/fbm/thesis.pdf>
5. Yujun Yu. On the optimal forecast with the fractional Brownian motion. SMU School of Economics. Research Collection School of Economics. 2024. URL: https://ink.library.smu.edu.sg/cgi/viewcontent.cgi?article=3750&context=soe_research

22

Дякую за увагу!