НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

«На правах рукопису»
УДК 517.9

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
___________ М. Є. Дудкін
“23”березня 2018 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Метод усереднення в диференціальних рівняннях з повільно змінними параметрами»

Виконала: студентка VI курсу, групи ОМ-61м

Сердюк Віталія Віталіївна ________

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор,

Станжицький О. М. ________

Рецензент: доктор фізико-матемтичних наук, професор (КНУ ім. Шевченка),
Капустян О.В. ________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студентка _____________

(підпис)

Київ – 2018 року

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою

Спеціальність (спеціалізація) – 111 «Математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
__________ М. Є. Дудкін

«23»березня 2018 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Сердюк Віталії Віталіївні

1. Тема дисертації : Метод усереднення в диференціальних рівняннях з повільно змінними параметрами,

науковий керівник дисертації :д.ф.-м.н., проф. Станжицький О. М.,

затверджені наказом по університету від «23»березня 2018 р. №1016-с

2. Термін подання студентом дисертації 4 травня 2018 р.

3. Об’єкт дослідження : диференціальні рівняння з повільно змінними параметрами

4. Предмет дослідження : метод усереднення в диференціальних рівняннях з повільно змінними параметрами

5. Перелік завдань, які потрібно розробити

   1) Ознайомитися з літературою та визначити напрямки подальшого дослідження даної теми

2) Вивчити теорему М. М. Боголюбова
3) Отримання рівняння другого наближення для маятника з повільно змінними параметрами
4) Знаходження оцінки амплітуди коливання математичного маятника з повільно змінною довжиною

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу: 10 слайдів

7. Орієнтовний перелік публікацій : не передбачено

8. Дата видачі завдання 05 лютого 2018 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з літературою	05.02.18 – 03.03.18	виконано
2.	Ознайомлення та дослідження методу усереднення в диференціальних рівняннях з повільно змінними параметрами.	03.03.18 – 19.03.18	виконано
3.	Дослідження моделі математичного маятника з повільно змінною довжиною.	19.03.18 – 29.03.18	виконано
4.	Виведення рівняння другого наближення	29.03.18 – 09.04.18	виконано
5.	Знаходження оцінки параметра для рівняння другого наближення	09.04.18 – 23.04.18	виконано
6.	Оформлення роботи	23.04.18 – 04.05.18	виконано

Студент ____________ В.В.Сердюк

Науковий керівник дисертації ____________ О. М. Станжицький

Реферат

Магістерська дисертація містить 60 сторінок, складається з 2 розділів, 10 слайдів для проектора.

Дисертацію присвячено актуальній темі – застосуванню методу усереднення до диференціальних рівнянь з повільно змінними параметрами.

Мета дослідження – отримання рівнянь другого наближення та оцінки амплітуди коливань для рівняння математичного маятника з повільно змінною довжиною, в залежності від довжини маятника.

Об’єкт дослідження – математичний маятник з повільно змінною довжиною.

Предмет дослідження – метод усереднення в диференціальних рівняннях з повільно змінними параметрами.

Методи дослідження – теорема М.М. Боголюбова, метод усереднення в диференціальних рівняннях.

Наукова новизна – було виведене рівняння другого наближення та проведена оцінка амплітуди для рівняння маятника з повільно змінною довжиною.

Реферат

Магистерская диссертация содержит 60 страниц, состоит из 2 разделов, 10 слайдов для проектора.

Диссертация посвящена актуальной теме – применению метода усреднения к дифференциальным уравнениям с медленно меняющимися параметрами.

Цель исследования – получение уравнений второго приближения и оценки амплитуды колебаний для уравнения математического маятника с медленно изменяющейся длиной, в зависимости от длины маятника.

Объект исследования – математический маятник с медленно изменяющейся длиной.

Предмет исследования – метод усреднения в дифференциальных уравнениях с медленно меняющимися параметрами.

Методы исследования – теорема М.М. Боголюбова, метод усреднения в дифференциальных уравнениях.

Научная новизна – было выведено уравнение второго приближения и проведена оценка амплитуды для уравнения маятника с медленно изменяющейся длиной.

Abstract

The master's dissertation contains 60 pages, consists of 2 sections, contains 10 illustrations.

The dissertation is devoted to the actual topic – application of the method of averaging to differential equations with slowly variable parameters.

The purpose of the study is to obtain equations of the second approximation and estimate the amplitude of oscillations for the equation of a mathematical pendulum with a slowly varying length, depending on the length of the pendulum.

The object of the study is a mathematical pendulum with a slowly varying length.

Subject of research – the method of averaging in differential equations with slowly variable parameters.

Methods of study – Bogolyubov's theorem, method of averaging in differential equations.

Scientific novelty - the equation of the second approximation was deduced and an amplitude estimate for the equation of a pendulum with a slowly varying length was carried out.

Зміст

Вступ 8

Розділ 1. Метод усереднення в теорії диференціальних рівнянь. 10

1.1.Постановка задачі 10

1.3. Друге наближення 16

1.4.Побудова вищих наближень 24

1.5. Аналіз усереднених рівнянь 26

1.6 Розв'язок рівняння Ван-дер-Поля 29

1.7 Математичне обґрунтування методу усереднення М.М. Боголюбова 32

Розділ 2. Метод усереднення в диференціальних рівняннях з повільно змінними параметрами 41

2.1.Рівняння з повільно змінними параметрами 41

2.2.Приведення до стандартної форми 43

2.3.Побудова усереднених рівнянь в першому наближенні 45

2.4. Часткові випадки системи (2.1) – (2.3) 46

2.5. Системи рівнянь з повільно змінними параметрами 50

2.6.Теорема про оцінку похибки *m*-го наближення 52

2.7. Маятник з повільно змінною довжиною 54

2.8. Аналіз рівнянь першого наближення 56

2.9. Друге наближення і його оцінка 58

Висновки 61

Список використаної літератури 62

Вступ

Метод усереднення спочатку виник в небесній механіці і на першому етапі розвитку його пов'язано, здебільшого, із задачами небесної механіки, для розв'язку яких застосовувалися різні схеми усереднення (наприклад, схема Гауса, Фату, Делоне-Хілла та ін.). При цьому основний прийом методу усереднення полягав в тому, що перші частини складних диференціальних рівнянь, що описують коливання або обертання, замінялися "згладженими", усередненими функціями, що не містять явно часу t і швидко змінних параметрів системи. В результаті усереднені рівняння або точно інтегрувалися, або в якійсь мірі спрощувались, що дозволило отримати важливі висновки щодо досліджуваного руху як якісного, так і кількісного характеру. Однак в теорії нелінійних коливань метод усереднення довгий час залишався невідомим, хоча в окремих випадках в неявному вигляді використовувався вже давно. Так, наприклад, ще в 1835 р. М. В. Остроградський [1], розглядаючи нелінійне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = ax^3$$

отримував в першому наближенні рішення, що збігається з тим, яке виходить за допомогою методу усереднення. А ще раніше, в 1682 р. Ісаак Ньютон, досліджуючи рух маятника при наявності опору, знайшов формулу, яка визначала величину загасання малих коливань маятника при будь-якому законі опору середовища. Ця формула цілком збігається з першим наближенням, яке одержується за допомогою методу усереднення. В основі систематичного застосування методу усереднення для дослідження нелінійних коливальних процесів в радіо- і електротехніці, механіці лягли відомі роботи голландського вченого Ван-дер-Поля [2], який розробив досить ефективний спосіб вирішення нелінійних диференціальних рівнянь, що описують коливальний процес в системі з одним ступенем свободи. Завдяки своїй простоті і наочності, а також широкої популяризації Л.І. Мендельштатом і Н. Д. Папалексі[3] метод Ван-дер-Поля почав застосовуватися інженерами для дослідження коливальних процесів.

Разом з тим слід зазначити, що в формулюванні методу усереднення, даним Ван-дер-Полем, усереднені рівняння виводилися за допомогою далеко не строгих з математичної точки зору міркувань. Хоча цей метод і виявився плідним на першому етапі розвитку нелінійної механіки, проте він не міг повністю задовольнити ні запитам практики, ні мінімальним вимогам щодо переконливості і спільності висновків, які слід пред'являти до справжнього наближеного методу для того, щоб мати хоча б деяке уявлення про його точність і межах застосування. Правда, для окремого випадку диференціальних рівнянь з періодичними правими частинами деякі кроки в області математичного обґрунтування методу усереднення зроблені ще в 1928 р П. Фату і у 1934 р Л.І. Мендельштатом і Н. Д. Папалексі[3].

В дипломній роботі метод усереднення застосовується до дослідження диференціальних рівнянь з повільно змінними параметрами.

Розділ 1. Метод усереднення в теорії диференціальних рівнянь.

1.1.Постановка задачі

Розглянемо фундаментальні результати, отримані М. М. Боголюбовим [4] в напрямку створення суворої теорії методу усереднення, що включає алгоритм побудови усереднених рівнянь з будь-якою точністю і математичне обґрунтування. М. М. Боголюбов показав, що метод усереднення пов'язаний з існуванням деякої заміни змінних, що дозволяє виключати час t із правих частин рівнянь з будь-яким ступенем точності щодо малого параметра ε. Крім того, вказав, як будувати не тільки систему першого наближення (усереднену систему), а й усереднену систему рівнянь вищих наближень, рішення яких апроксимують рішення вихідної точної системи з точністю до величин, пропорційних вищих ступенів малого параметра ε.

Розглянемо нелінійні рівняння, припускаючи, що вони вже приведені до стандартної форми

$$\frac{dx_k}{dt} = \varepsilon X_k(t, x_1, x_2, \ . \ . \ . \ , x_n) \quad (k = 1,2, . . . , \mathrm{n}), \qquad (1.1)$$

де ε — малий додатній параметр, t — час, а функції $X_k(t, x_1, x_2, \ . \ . \ . \ , x_n)$ можуть бути подані у вигляді

$$X_k(t, x_1, x_2, \ . \ . \ . \ , x_n) = \sum_v e^{ivt} X_v(t, x_1, x_2, \ . \ . \ . \ , x_n)$$

$$(k = 1,2, . . . , \mathrm{n}) \qquad (1.2)$$

Перепозначимо сукупність n величин $x_1, x_2, \ . \ . \ . \ , x_n$ однією буквою x. Тоді рівняння (1.1) запишеться у векторній формі

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon\, \mathrm{X}(t, x). \qquad (1.3)$$

Тут x, X можна розглядати як точки n-мірного евклідового простору E_n. При цьому вираз (1.2) набуде вигляду

$$\mathrm{X}\,(t,x)=\sum_{\nu} e^{i\nu t}X_{\nu}(x). \tag{1.4}$$

Формули диференціювання складних функцій

$$\frac{dF_k(t,x_1,x_2,\ ...\ ,x_n)}{dt}=\frac{\partial F_k}{\partial t}+\sum_{q=1}^{n}\frac{\partial F_k}{\partial x_q}\cdot\frac{dx_q}{dt} \tag{1.5}$$

в прийнятих позначеннях можна записати в такий спосіб:

$$\frac{dF(t,x)}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)F(t,x) \tag{1.6}$$

де $\frac{dF}{dx}$ трактується як матриця

$$\left\|\frac{\partial F_k}{\partial x_q}\right\|,$$

прикладена до вектора $\frac{dx}{dt}$, і $\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — як операторний скалярний добуток

$$\sum_{q=1}^{n}\frac{dx_q}{dt}\bullet\frac{\partial}{\partial x_q}. \tag{1.7}$$

Нехай, надалі, $F(x,t)$ — сума виду

$$F\left(t,x\right)=\sum_{\nu}e^{i\nu t}F_{\nu}\left(x\right). \tag{1.8}$$

Введемо позначення

$$M_t\{F(t,x)\}=F_0(x),$$

$$\tilde{F}\left(t,x\right)=\sum_{\nu\neq 0}\frac{e^{i\nu t}}{i\nu}F_{\nu}\left(x\right), \tag{1.9}$$

$$\tilde{F}\left(t,x\right)=\sum_{\nu\neq 0}\frac{e^{i\nu t}}{\left(i\nu\right)^2}F_{\nu}\left(x\right)$$

і т. д., отримаємо тотожне

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial t}=\tilde{F},$$

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial t}=\ \mathrm{F}-\underset{t}{M}\,(\mathrm{F}). \tag{1.10}$$

Оператор $\sim$ будемо називати інтегруючим оператором, $\underset{t}{M}$ – оператором усереднення при постійних x або оператором усереднення, що містить час.

1.2. Перше наближення

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (1.3), де ε – малий додатній параметр і вирази $X(t, x)$як функції часу t представляються сумами (1.4). Форма наближеного розв'язку системи рівнянь (1.3) може бути знайдена, так як перші похідні $\frac{dx}{dt}$ пропорційні малому параметру, природно вважати x повільно змінними величинами. Тому представимо x як суперпозицію плавно змінного члена ꝫ і суми малих вібраційних членів і, через малість останніх, в правій частині рівняння (1.3) в першому наближенні покладемо $x = \xi$.

Враховуючи вираз (1.4),отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon \sum_{\nu} e^{i\nu t} X_{\nu}(\xi), \tag{1.11}$$

або

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon \sum_{\nu \neq 0} e^{i\nu t} X_{\nu}(\xi).$$

(1.12)

Сума, що стоїть в правій частині рівняння (1.12), складається з малих синусоїдальних коливних доданків. Вважаючи, що ці синусоїдальні коливальні члени викликають лише малі вібрації x біля ξ і не впливають на систематичні зміни x (відсутній резонанс I), нехтуючи ними, приходимо до рівнянь першого наближення

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) = \varepsilon \underset{t}{M}\{X(t, x)\}. \tag{1.13}$$

Для отримання другого наближення у виразі x необхідно взяти до уваги також і вібраційні члени; враховуючи в рівнянні (1.12) доданок $\varepsilon e^{i\nu t} X_{\nu}(\xi)$, що викликає в розв'язку x коливання виду

$$\frac{\varepsilon e^{i\nu t}}{i\nu} X_{\nu}(\xi),$$

приходимо до наближеного виразу

$$x=\xi+\varepsilon\sum_{v\neq 0}\frac{e^{ivt}}{iv}X_v\left(\xi\right)=\xi+\varepsilon\tilde{X}\left(t,x\right). \tag{1.14}$$

Підставляючи вираз (1.14) в рівняння (1.3), маємо

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X(t,\xi+\varepsilon\tilde{X}(t,\xi), \tag{1.15}$$

$\frac{dx}{dt}=\varepsilon \underset{t}{M}\{X(t,\xi+\varepsilon\tilde{X}(t,\xi))\}+$ малі синусоїдальні коливальні члени.

Звідси, нехтуючи впливом синусоїдальних коливальних членів на систематичні зміни ʒ, отримуємо рівняння другого наближення

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon \underset{t}{M}\{X(t,\xi+\varepsilon\tilde{X}(t,\xi))\},$$

або, з точністю до величин другого порядку малості включно відносно ε,

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon \underset{t}{M}\left\{X(t,\xi)+\varepsilon(\tilde{X}(t,ʒ)\frac{\partial}{\partial\xi})X(t,\xi)\right\}. \tag{1.16}$$

Всім цім міркуванням неважко придати цілком обґрунтовану форму і показати, що в дійсності, застосовуючи усереднення , в перетворених рівняннях нехтуючи величинами вищого порядку малості.

Для цього в рівнянні (1.3) зробимо заміну змінних за допомогою формул

$$x=\xi+\varepsilon\tilde{X}(t,x), \tag{1.17}$$

де ʒ будемо розглядати як нові невідомі.

Вираз (1.17) розглядають тут не як наближений розв'язок системи (1.3), а як формулу заміни змінних.

Диференціюючи вираз (1.17), маємо

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d\xi}{dt}+\varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt}+\varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial t}. \tag{1.18}$$

Враховуючи тотожні співвідношення (1.10) інтегруючого оператора, маємо

$$\frac{\partial X}{\partial t}=X(t,\xi)-X_0(\xi).$$

Підставляючи вирази (1.17) і (1.18) в рівняння (1.3), отримуємо

$$\frac{d\xi}{dt}+\varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt}+\varepsilon X(t,\xi)-\varepsilon X_0(\xi)=\varepsilon X\{t,\xi+\varepsilon\tilde{X}(t,\xi)\}$$

або

$$\left\{\mathrm{E} + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}\right\}\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon\left\{\mathrm{X}\left(t, \xi + \varepsilon X(t,\xi)\right) - X(t,\xi)\right\}, \qquad (1.19)$$

де E – одинична матриця.

Множачи співвідношення (1.19) зліва на вираз

$$\left\{E + \varepsilon\frac{\partial\bar{X}}{\partial\xi}\right\}^{-1}, \qquad (1.20)$$

для нових невідомих ξ , отримуємо рівняння

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon\left\{E + \varepsilon\frac{\partial\bar{X}}{\partial\xi}\right\}^{-1} X_0(\xi) + \left\{E + \varepsilon\frac{\partial\bar{X}}{\partial\xi}\right\}^{-1}\{X(t, \xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi) - X(t,\xi)\}. \; (1.21)$$

Далі, розкладаючи вираз (1.20) в ряд за ступенем параметра ε, маємо

$$\left\{E + \varepsilon\frac{\partial\tilde{\mathrm{X}}}{\partial\xi}\right\}^{-1} = \mathrm{E} - \varepsilon\frac{\partial\bar{X}}{\partial\xi} + \varepsilon^2. \; . \; . \; , \qquad (1.22)$$

де символ ε^m позначає величини порядку малості не нижче ε^m.

Беручи до уваги розклад (1.22), рівняння (1.21) можемо представити у вигляді

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2. \; . \; . \; , \qquad (1.23)$$

або, більш докладно

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2\frac{\partial\tilde{\mathrm{X}}}{\partial\xi}X_0(\xi) + \varepsilon^2\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi) + \varepsilon^3. \; . \; . \; . \qquad (1.24)$$

Нехтуючи в системі рівнянь (1.23) величинами другого порядку малості, отримаємо так зване рівняння першого наближення

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi). \qquad (1.25)$$

Якщо ξ задовольняють рівнянням (1.23) (точним рівнянням), права частина яких відрізняється від правої частини рівнянь першого наближення (1.25) на величини другого прядку малості, то вираз

$$x = \xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi) \qquad (1.26)$$

представляє точний розв'язок розглянутої системи рівнянь (1.3). Тому в якості першого наближення можемо прийняти

$$x = \xi, \tag{1.27}$$

взявши за ξ розв'язок рівняння першого наближення (1.25).

Вираз (1.26), в якому ξ задовольняє рівняння (1.25), будемо називати покращеним першим наближенням.

Підставляючи покращене перше наближення (1.26) в точне рівняння(1.3), неважко переконатися, що це наближення задовольняє його з точністю до величини другого порядку малості.

Повертаючись до рівняння (1.25), помітимо, що, згідно означенню оператора усереднення,

$$X_0(\xi) = \underset{t}{M}\{X(t, \xi)\},$$

і, відповідно, рівняння першого наближення можуть бути представлені у вигляді

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \underset{t}{M}\{X(t, \xi)\}. \tag{1.28}$$

Таким чином, рівняння першого наближення (1.28) виходить з точних рівнянь (1.3) шляхом усереднення останніх по явному часі t. При виконанні усереднення ξ трактуються як постійні.

1.3. Друге наближення

При побудові першого наближення шляхом заміни змінних (1.26) рівняння (1.3) були перетворені в рівняння (1.23)

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \ldots,$$

відмінних від рівнянь ,отриманих після усереднення правих частин точних рівнянь (1.3) на величини другого порядку малості відносно параметра ε. Таким чином, точні рівняння (1.23) відрізняються від усереднених рівнянь на величини другого порядку малості відносно параметра ε.

Для отримання другого наближення знайдемо заміну змінних, аналогічну заміні (1.26), перетворюючу змінну x в змінну ξ, яка задовольняє рівняння(точне)

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \mathrm{P}(\xi) + \varepsilon^3 \ldots \qquad (1.29)$$

Щоб прийти до цієї заміни змінних найбільш природним шляхом, знайдемо вираз

$$x = \Phi(t, \xi, \varepsilon), \qquad (1.30)$$

який для ξ, задовольняючи рівняння

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \mathrm{P}(\xi), \qquad (1.31)$$

задовольняло б рівняння (1.3) з точністю до величини порядку малості ε^3.

Так як при ξ, що визначена з рівняння першого наближення

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi),$$

вираз

$$x = \xi + \varepsilon \sum_{v \neq 0} \frac{e^{ivt}}{iv} X_v(\xi) = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi)$$

задовольняє рівняння (1.3) з точністю до величини порядку малості ε^2, то розв'язок рівняння (1.30) будемо шукати в формі

$$x = \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi) + \varepsilon^2 F(t, \xi), \tag{1.32}$$

де $F(t, \xi)$ представляється сумами

$$F(t, \xi) = \sum_{\mu} e^{i\mu t} F_{\mu}(\xi). \tag{1.33}$$

Підставляючи значення x згідно виразу (1.32) в праву частину системи (1.3), маємо

$$\xi X(t, x) = \varepsilon X\left(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}(t, \xi) + \varepsilon^2 P(t, \xi)\right) =$$

$$= \varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon^2 \left(\tilde{X}(t, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t, \xi) + \varepsilon^3 \ldots \tag{1.34}$$

З іншої сторони, диференціюючи вираз (1.32) і приймаючи при цьому до уваги рівняння (1.31) , знаходимо

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial \xi} =$$

$$= \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P(\xi) + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial t} + \varepsilon^3 \ldots ,$$

тобто

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, \xi) + \varepsilon^2 P(\xi) + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} X_0(\xi) + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial t} + \varepsilon^3 \ldots , \tag{1.35}$$

оскільки

$$\frac{\partial X}{\partial t} = X(t,\xi) – X_0(\xi).$$

Для того щоб праві частини виразів (1.34) і (1.35) були рівними з точністю до величини порядку малості ε^3, необхідно підібрати функції $P(\xi)$ і $F(t,\xi)$ так, щоб виконувалося співвідношення

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\right)X(t,\xi) – \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi}X_0(\xi) – P(\xi). \qquad (1.36)$$

Враховуючи те що

$$\tilde{X}(t,\xi) = \sum\nolimits_{v\neq 0}\frac{e^{ivt}}{iv}X_v(\xi)\,; \qquad X(t,\xi) = \sum\nolimits_v e^{ivt}X_v(\xi), \qquad (1.37)$$

можемо написати

$$\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\right)X(t,\xi) – \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi}X_0(\xi) =$$

$$= \sum_{v,v''(v'\neq 0)} v^{i(v'+v'')t}\frac{1}{iv'}\left(X_{v'}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\right)X_{v''}(t,\xi) -$$

$$-\sum_{v\neq 0}\frac{e^{ivt}}{iv}\cdot\frac{\partial X_v}{\partial \xi}X_0(\xi)$$

(1.38)

де сумування розповсюджується на всі параметри (v', v'') частот v, в сумах (1.37).

Вираз (1.38) можемо представити у вигляді суми

$$\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\right)X(t,\xi) – \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \xi}X_0(\xi) = \sum_{\substack{\mu \\ (\mu=v,v'+v'')}} e^{i\mu t}\Phi_\mu(\xi),$$

і співвідношення (1.36) буде виконуватись, якщо

$$P(\xi) = \Phi_0(\xi) = \underset{t}{M}\left\{\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi) - \frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi)\right\} =$$

$$= \underset{t}{M}\left\{\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\} \tag{1.39}$$

$$F(t,\xi) = \sum_{\mu\neq 0}\frac{e^{ivt}}{iv}\Phi_\mu(\xi) = \left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi) - \frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi).$$

В результаті, можемо стверджувати, що при ξ, яке визначене з рівняння

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon\underset{t}{M}\{X(t,\xi)\} + \varepsilon^2\underset{t}{M}\left\{\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\}, \tag{1.40}$$

вираз

$$x = \xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi) + \varepsilon^2\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi) - \varepsilon^2\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi) \tag{1.41}$$

задовольняє рівняння (1.3) з точністю до величини порядку ε^3.

Покажемо, що якщо розглядати отриманий вираз (1.41) не як наближений розв’язок рівняння (1.3), а як формулу заміни змінних, перетворюючу невідому x, яка визначена точним рівнянням (1.3), до нової невідомої ξ, то вона буде задовольняти рівняння вигляду

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon\underset{t}{M}\{X(t,\xi)\} + \varepsilon^2\underset{t}{M}\left\{\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\} + \varepsilon^3\ .\ .\ .\ , \tag{1.42}$$

яке відрізняється від рівняння (1.40) величинами, пропорційними ε^3.

Для цього продиференціюємо вираз (1.41). Приймаючи до уваги позначення (1.39), отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi} =$$

$$= \left(E + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi}. \qquad (1.43)$$

Але, згідно визначення інтегруючого оператора,

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial t} = \varepsilon X(t,\xi) - \varepsilon \underset{t}{M}\{X(t,\xi)\} +$$

$$+\varepsilon^2\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi) - \varepsilon^2\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi) - \underset{t}{M}\left\{\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\},$$

і тому із співвідношення (1.43) випливає

$$\frac{dx}{dt} = \left(E + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon X(t,\xi) + \varepsilon^2\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi) - \varepsilon^2\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi)$$

$$- \varepsilon X_0(\xi) - \varepsilon^2 \underset{t}{M}\left\{\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\}.$$

В силу рівняння (1.3) цей вираз повинен дорівнювати наступному:

$$\varepsilon X(t,x) = \varepsilon X\big(t,\xi + \varepsilon X(t,\xi) + \varepsilon^2 F(t,\xi)\big) =$$

$$= \varepsilon X(t,\xi) + \varepsilon^2\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi) + \varepsilon^3 \ldots \; .$$

Таким чином, змінна ξ задовольняє рівняння

$$\frac{d\xi}{dt} = \left(1 + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)^{-1}\left[\varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi) + \right.$$

$$\left. +\varepsilon^2 \underset{t}{M}\left\{\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi)\right\} + \varepsilon^3 \ldots\right] \; . \qquad (1.44)$$

Але очевидно, що

$$\left(\mathrm{E} + \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi} + \varepsilon^2\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)^{-1} = \mathrm{E} - \varepsilon\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi} + \varepsilon^2 \ldots \; ,$$

і тому рівняння (1.44) може бути представлене в формі

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \underset{t}{M} \left\{\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right) X(t,\xi)\right\} + \varepsilon^3 \ . \ . \ . \ ,$$

що співпадає з (1.42).

Таким чином, якщо ξ задовольняє рівняння (1.42), права частина якого відрізняється від правої частини рівняння (1.40) на величину порядку малості ε^3, то вираз (1.41) виражає точний розв'язок рівняння (1.3).

В якості другого наближення приймемо вираз

$$x = \xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi), \tag{1.45}$$

де ξ визначається рівнянням (1.40). За друге наближення приймемо покращену формулу першого наближення, в якій ξ задовольняє рівняння вже не першого, а другого наближення.

Вираз (1.41), в якому ξ визначено зрівняння (1.40), назвемо покращеним другим наближенням.

Покращене друге наближення задовольняє точне рівняння (1.3) з похибкою порядку малості ε^3.

Все сказане безпосередньо узагальнюється і на рівняння виду

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x) + \varepsilon^2 Y(t,x), \tag{1.46}$$

в яке входять члени другого порядку малості.

В такому випадку рівняння другого наближення прийме вигляд

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \underset{t}{M}\{X(t,\xi)\} + \varepsilon^2 \underset{t}{M}\{Y(t,\xi)\} + \underset{t}{M}\left\{\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right) X(t,\xi)\right\}, \tag{1.47}$$

і вираз другого наближення буде

$$x = \xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi).$$

Для покращеного другого наближення знаходимо

$$x = \xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi) + \varepsilon^2\tilde{Y}(t,\xi) + \varepsilon^2\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi) - \varepsilon^2\frac{\partial\tilde{X}}{\partial\xi}X_0(\xi). \qquad (1.49)$$

Помітимо, що

$$\underset{t}{M}\left\{\varepsilon X\left(t,\xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi)\right) + \varepsilon^2 Y(t,\xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi))\right\} =$$

$$= \underset{t}{M}\left\{\varepsilon X\left(t,\xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi)\right) + \varepsilon^2 Y(t,\xi)\right\} + \varepsilon^3\ldots =$$

$$= \underset{t}{M}\left\{\varepsilon X(t,\xi) + \varepsilon^2\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)X(t,\xi) + \varepsilon^2 Y(t,\xi)\right\} + \varepsilon^3\ldots, \qquad (1.50)$$

і тому рівняння (1.47) можна записати байдуже в якій формі:

або в вигляді

$$\frac{d\xi}{dt} = \underset{t}{M}\left\{\varepsilon X\left(t,\xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi)\right) + \varepsilon^2 Y(t,\xi)\right\}, \qquad (1.51)$$

або

$$\underset{t}{M}\left\{\varepsilon X\left(t,\xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi)\right) + \varepsilon^2 Y(t,\xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi))\right\} \qquad (1.52)$$

оскільки в рівняннях другого наближення члени порядку ε^3 не враховуються.

Таким чином, рівняння другого наближення можуть бути отримані безпосередньо із точних рівнянь (1.46), якщо в їх правій частині підставити замість x покращену форму першого наближення та усереднити по часу t, приймаючи в процесі усереднення змінні ξ як постійні, причому величини третього порядку малості можуть відкидатися.

Такий принцип усереднення може бути також сформульований наступним чином: рівняння другого наближення отримують усередненням точних рівнянь (1.46), в обидві частини яких підставлено покращене перше наближення, по явному часі. Рівняння другого наближення випливає з співвідношення

$$\underset{t}{M}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = \underset{t}{M}\{\varepsilon X(t,x) + \varepsilon^2 Y(t,x)\}, \tag{1.53}$$

де в обох частинах замість x стоїть $\xi + \tilde{X}(t,\xi)$, при цьому в процесі усереднення $\frac{d\xi}{dt}$ і ξ трактуються як постійні, і величини порядку малості ε^3 можуть не приймати до уваги.

1.4.Побудова вищих наближень

Нехай загальне рівняння в стандартній формі має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t,x) + \varepsilon^2 X_1(t,x) + \ldots + \varepsilon^m X_{m-1}(t,x), \qquad (1.54)$$

де $X_k(t,x)$ – деякі тригонометричні суми того ж типу, що й $X(t,x)$.

Для отримання m-наближення розглянемо вираз

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t,\xi) + \varepsilon^2 F_2(t,\xi) + \ldots + \varepsilon^m F_m(t,\xi), \qquad (1.55)$$

в якому $F_k(t,\xi)$ – суми виду

$$\sum_{\mu \neq 0} e^{i\mu t} F_{k\mu}(\xi)$$

і змінна ξ – розв'язок рівняння

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon P_1(\xi) + \varepsilon^2 P_2(\xi) + \ldots + \varepsilon^m P_m(\xi). \qquad (1.56)$$

Підставляючи вираз (1.55) в рівняння (1.54) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε до m-го порядку включно, підберемо $F_1(t,\xi), \ldots, F_m(t,\xi)$ і $P_1(\xi), \ldots, P_m(\xi)$ так, щоб вираз (1.55) задовольняв рівняння (1.54) з точністю до величини порядку малості ε^{m+1}.

В результаті отримаємо

$$P_1(\xi), = \underset{t}{M}\{X(t,\xi)\},$$

$$P_2(\xi) = \underset{t}{M}\left\{\left(\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\right) X(t,\xi) + X_1(t,\xi)\right\},$$

$$F_1(t,\xi) = \tilde{X}(t,\xi),$$

$$F_2(t,\xi) = (\tilde{X}(t,\xi)\frac{\partial}{\partial \xi} X(t,\xi) - \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi} \underset{t}{M}\{X(t,x) + \tilde{X}_1(t,\xi)\}.$$

Якщо тепер, визначив $F_1(t,\xi),\ .\ .\ .,F_m(t,\xi)$ і $P_1(\xi),\ .\ .\ .,P_m(\xi)$, розглядати вираз (1.55) як деяку формулу заміни змінних, перетворюючу невідому x в нову невідому ξ, то для цієї нової змінної отримаємо рівняння(точне!)

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon P_1(\xi) + \varepsilon^2 P_2(\xi) + \ .\ .\ . + \varepsilon^m P_m(\xi) + \varepsilon^{m+1} R(t,\xi,\varepsilon), \qquad (1.57)$$

права частина якого складається з «інтегрованої» частини та збурення $\varepsilon^{m+1}R(t,\xi,\varepsilon)$, що є величиною порядку ε^{m+1}. При цьому, якщо змінна ξ задовольняє рівняння (1.57), то вираз (1.55) представляє собою точний розв'язок рівняння (1.54).

Тому в якості m-го наближення розв'язку рівняння (1.54) може бути прийнято вираз

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t,\xi) + .\ .\ . + \varepsilon^{m-1} F_{m-1}(t,\xi), \qquad (1.58)$$

В якому ξ визначається рівнянням m-го наближення (1.56). Для такого ξ формула (1.55) представляє покращене m-наближення, яке задовольняє точне рівняння (1.54) з похибкою порядку ε^{m+1}.

Помітимо, що якщо відома формула покращеного m-наближення, то рівняння m-наближення можуть бути отримані з точних рівнянь (1.54) при підстановці в них цієї формули і в подальшому усередненні за допомогою оператора $\underset{t}{M}$.

На практиці в основному використовується перше та друге наближення. Вищі наближення використовуються зазвичай в загальнотеоретичних міркуваннях та аналізі якісних властивостей, для фактичної побудови рішень вони використовуються рідко через швидке зростання складності їх фактичних побудов.

1.5. Аналіз усереднених рівнянь

Отримані після усереднення наближені рівняння мають основну перевагу перед точними в тому, що не містять в правих частинах явного часу і є автономними. Разом з тим, вони все ж являються диференціальними, що накладає певне обмеження на можливості викладених методів.

Слід зауважити, що для більшості цікавих практичних задач усереднені рівняння являються набагато простішими в дослідженні. При цьому в більшості випадках, в яких загальний розв’язок усереднених систем не вдається отримати, можна знайти, принаймні, частинні розв’язки, наприклад відповідні встановленим стаціонарним процесам. Так, при n=1 рівняння першого наближення інтегрується в квадратурах , при n = 2 для дослідження може бути використана відома теорія Пуанкаре.

При будь-якому n, якщо $X_0(\xi)$ перетворюється в нуль в деякій точці $\xi = \xi_0$,

можемо розглядати «квазістатичний» розв’язок

$$x = \xi_0$$

рівняння першого наближення. Для дослідження стійкості цього розв’язку можна скласти для малих відхилень рівняння в варіаціях

$$\frac{d\delta\xi}{dt} = \varepsilon \frac{\partial X_0(\xi_0)}{\partial \xi} \delta\xi. \qquad (1.59)$$

Якщо всі дійсні частини коренів характеристичного рівняння

$$Det \left| Ep - \varepsilon \frac{\partial X_0(\xi_0)}{\partial \xi} \right| = 0 \qquad (1.60)$$

від’ємні , то розглянутий квазістатичний розв’язок являється стійким. Будь-який розв’язок усереднених рівнянь(рівнянь першого наближення), який виходить з початкових значень, достатньо близьких до ξ_0, при $t \to \infty$

експоненціально наближається до «квазістатичного» розв’язку. Якщо хоча б для одного з коренів характеристичного рівняння (1.50) дійсна частина додатна, маємо випадок нестійкості.

Може представити також критичний випадок, коли деякі або всі дійсні частини рівні нулю. Цей випадок іноді можна звести до одного з попередніх за допомогою розгляду вищих наближень.

Покращене перше наближення для розглянутого «квазістатичного» розв’язку

$$x = \xi_0 + \varepsilon\tilde{X}(t, \xi_0) \tag{1.61}$$

представляється у вигляді суми постійного члена ξ_0 і малих синусоїдальних коливань з амплітудою $\varepsilon X_v(\xi_0)$ і «зовнішніми» силами v. Вищі наближення виявили б також наявність членів з комбінаційними частотами, складеними з v.

За допомогою заміни змінних (1.55) рівняння (1.54) зводиться до рівняння (1.57), що складається з «інтегруючої» частини і збурення $\varepsilon^{m+1}R(t, \xi, \varepsilon)$, що є величиною порядку ε^{m+1}. При цьому якщо змінна ξ задовольняє рівняння (1.57), то вираз (1.55) являє собою точний розв’язок рівняння (1.54).

Розглянемо даний метод відносно границі, тобто в виразі (1.55) і рівнянні (1.57) спрямуємо m до нескінченності. Якщо ряди (1.55) сходяться, то система рівнянь (1.54) зведеться до «інтегруючої» системи

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon P(\xi, \varepsilon). \tag{1.62}$$

Однак такий розвиток методу виявляється неможливим: вже для систем з квазіперіодичними по t функціями $X(t, x, \varepsilon)$в формулах (1.55), як правило, з’являються малі дільники, і ряди, визначені функціями

$F_1(t,\xi), \ldots ,F_m(t,\xi),$ розходяться. Тому практичне застосування методу повинне визначатися асимптотичними властивостями для даного фіксованого m при $\varepsilon \to 0$. В загальному випадку потрібно, щоб при малому ε і фіксованому m вираз (1.55) давав би достатньо точне уявлення про розв'язок рівняння(1.54) для достатньо тривалого інтервалу часу. У зв'язку з виникненням вказаних труднощів далеко не завжди можна використовувати вираз (1.55) і рівняння (1.57) для дослідження якісних властивостей системи (1.54) на нескінченному інтервалі часу. Але ці труднощі можуть бути усунуті за допомогою деякої модернізації методу, в результаті якої виходить настільки швидка збіжність відповідних рядів, що малі дільники пригнічуються.

1.6 Розв'язок рівняння Ван-дер-Поля

В якості прикладу, що ілюструє застосування представленого методу, розглянемо класичне рівняння Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0, \tag{1.63}$$

яке шляхом введення нових змінних a, φ за допомогою формул заміни змінних

$$x = a\cos(t + \varphi),$$

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin(t + \varphi) \tag{1.64}$$

легко зводиться до системи рівнянь в стандартній формі

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon\left\{\frac{a}{2}\left(1 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{a}{2}\cos 2(t + \varphi) + \frac{a^8}{8}\cos 4\,(t + \varphi)\right\},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon\left\{\frac{a}{2}\left(1 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{a}{2}\sin 2(t + \varphi) - \frac{a^8}{8}\sin 4\,(t + \varphi)\right\}. \tag{1.65}$$

Зупинимося на побудові покращеного першого наближення і другого наближення.

Відповідно до викладеного, для покращеного першого наближення отримуємо

$$a = a_1 - \frac{\varepsilon a_1}{4}\sin 2(t + \varphi_1) + \frac{\varepsilon a_1^3}{32}\sin 4(t + \varphi_1),$$

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{\varepsilon}{4}\left(1 - \frac{a_1^2}{2}\right)\cos 2\,(t + \varphi_1) + \frac{\varepsilon a_1^2}{32}\cos 4(t + \varphi_1), \tag{1.66}$$

де a_1і φ_1визначаються з рівняння першого наближення в результаті усереднення правих частин системи (1.65)

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{\varepsilon a_1}{2}\left(1 - \frac{a_1^2}{4}\right),$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 0. \qquad (1.67)$$

Для стаціонарного режиму маємо

$$a(t) \to 2 \text{ при } t \to \infty,$$

і, отже, для установленого коливального режиму при $a_1 = 2$ із формул покращеного першого наближення (1.66) слідує

$$a = 2 - \frac{\varepsilon}{2}\sin 2(t + \varphi_1) + \frac{\varepsilon}{4}\sin 4(t + \varphi_1),$$

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{\varepsilon}{4}cos\, 2(t + \varphi_1) + \frac{\varepsilon}{8}\cos 4(t + \varphi_1). \qquad (1.68)$$

Підставляючи ці значення в першу формулу (1.64) маємо

$$x = \left[2 - \frac{\varepsilon}{2}\sin 2(t + \varphi_1) + \frac{\varepsilon}{4}\sin 4(t + \varphi_1)\right] cos(t + \varphi_1) + \frac{\varepsilon}{4}cos\, 2(t + \varphi_1) + + \frac{\varepsilon}{8}\cos 4(t + \varphi_1), \qquad (1.69)$$

або, нехтуючи членами другого порядку малості, після елементарних перетворень отримуємо покращене наближення для стаціонарного розв'язку у вигляді

$$x = 2\, cos(t + \varphi_1) - \frac{\varepsilon}{4}\sin 3(t + \varphi_1) \qquad (\varphi_1 = const.) \qquad (1.70)$$

У другому наближенні a і φ визначатимуться виразами (1.66), де a_1 і φ_1 повинні бути знайдені вже з рівняння другого наближення

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{\varepsilon a_1}{2}\left(1 - \frac{a_1^2}{4}\right),$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = -\varepsilon^2\left(\frac{1}{8} - \frac{a_1^2}{8} + \frac{7a_1^4}{256}\right). \qquad (1.71)$$

Для стаціонарного розв'язку в другому наближенні отримаємо

$$x = 2\, cos(t + \varphi_1) - \frac{\varepsilon}{4}\sin 3(t + \varphi_1),$$

де $\varphi_1 = -\frac{\varepsilon^2}{16} + const.$

1.7 Математичне обґрунтування методу усереднення М.М. Боголюбова

Задача математичного обґрунтування. Сформульований і розвинутий М. М. Боголюбовим метод усереднення в застосуванні до рівнянь в стандартній формі отримав в класичних роботах [3, 2] суворе математичне обґрунтування.

Це обґрунтування, як і обґрунтування методу Ван-дер-Поля, здебільшого зводиться до розв'язання наступних двох проблем:

1) пошук умов, за яких різниця між розв'язками точних і відповідних усереднених систем для достатньо малих значень параметра ε стає як завгодно малою на як завгодно великому, але все ж скінченному інтервалі часу;

2) встановлення відповідності між різними властивостями розв'язків, залежних від поведінки на нескінченному інтервалі часу, точних і усереднених рівнянь.

Зупинимося на першій проблемі, як більш простій.

Розглянемо систему рівнянь в стандартній формі

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \tag{1.72}$$

де x, X – точки n-мірного евклідового простору, а ε – малий додатній параметр , t – час.

Побудуємо для системи (1.72) відповідну усереднену систему

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi), \tag{1.73}$$

де

$$X_0(\xi) = \underset{t}{M}\{X(t, \xi)\}. \tag{1.74}$$

Перша проблема полягає в доведенні теореми, яка встановлює, що при вельми загальних умов різниця $|x(t)-\xi(t)|$ може бути зроблена як завгодно малою для достатньо малого ε > 0 на як завгодно великому інтервалі 0 < t <T. При цьому, так як $\xi(t)$ залежить від t через εt, то для того щоб протягом вказаного інтервалу часу $\xi(t)$ могло встигнути значно відійти від свого початкового значення, тобто щоб цей інтервал виявився достатньо тривалим з точки зору зміни $\xi(t)$, за T слідує брати величину порядку $\frac{L}{\varepsilon}$, де L може бути як завгодно великим при достатньо малому ε.

Перша основна теорема М. М. Боголюбова. Сформулюємо і наведемо доведення основної теореми про мализну різниці $x(t)-\xi(t)$ в першому наближенні.

Теорема [2]. Нехай функція $X(t,x)$ задовольняє умовам:

а) для деякої області D можна вказати такі додатні постійні M та λ, що для всіх дійсних значень $t \geq 0$ і для будь-яких точок x, x', x'' з цієї області виконуються нерівності

$$|X(t,x)\,| \leq M,\ \ |X(t,x')-X(t,x'')\,| \leq \lambda|x'-x''|; \qquad (1.75)$$

б) в цій області рівномірно відносно *x* існує границя

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t,x)dt = X_0(x). \qquad (1.76)$$

Тоді для будь-яких як завгодно малих ρ та η і як завгодно великому L можна співставити таке додатне ε_0 , що якщо ξ = ξ(t) – розв’язок рівняння

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi),$$

визначений на інтервалі 0 < t < ∞ і який лежить в області D разом зі своїм ρ-околом, то для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в інтервалі $0 < t < \frac{L}{\varepsilon}$ справедлива нерівність

$$|x(t) - \xi(t)| < \eta, \tag{1.77}$$

в якій $x = x(t)$ – розв'язок рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x),$$

який співпадає з $\xi(t)$ при $t = 0$.

Доведення. Зафіксуємо деяке додатне число a і побудуємо функцію

$$\Delta_a(x) = \begin{cases} A_a\left\{1 - \frac{|x|^2}{a^2}\right\}^2, |x| \le a, \\ 0, |x| > a; \end{cases} \tag{1.78}$$

додатна постійна A_a визначається із співвідношення

$$\int_{E_n} \Delta_a(x)dx = 1,$$

в якому інтегрування виконується по всьому розглянутому просторі E_n; dx це нескінченно малий елемент звичайного n-вимірного евклідового об'єму.

Очевидно, введена функція $\Delta_a(x)$ обмежена разом зі своїми частинними похідними до другого порядку включно.

Оскільки ця функція і її похідні тотожно рівні нулю для $|x| > a$, неважко переконатися, що інтеграл

$$\mathcal{I}_a = \int_{E_n} \left|\frac{\partial \Delta_a(x)}{\partial x}\right| dx \tag{1.79}$$

виявляється скінченним для будь-якого додатного a.

Помітивши це, розглянемо функцію

$$u(t,x) = \int_D \Delta_a(x-x')\left\{\int_0^t \left|X(t,x') - X_0(x')\right| dt\right\} dx'. \qquad (1.80)$$

Згідно з умовою б) можна побудувати таку монотонно спадну функцію $f(t)$, яка прямує до нуля при $t \to \infty$, так що у всій області D

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t |X(t,x) - X_0(x)| dt\right| \leq f(t)$$

(1.81)

Тому маємо

$$\left|u(t,x)\right| \leq tf(t)\int_D \Delta_a(x-x')dx' \leq tf(t)\int_{E_n} \Delta_a(x-x')dx' = tf(t)\int_{E_n} \Delta_a(x')dx'$$

тобто

$$|u(t,x)| \leq tf(t). \qquad (1.82)$$

Далі

$$\left|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right| \leq tf(t)\int_D \left|\frac{\partial \Delta_a(x-x')}{\partial x}\right| dx' \leq tf(t)\int_{E_n} \left|\frac{\partial \Delta_a(x)}{\partial x}\right| dx,$$

або, відповідно до виразу (1.79)

$$\left|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right| \leq tf(t)\, \mathcal{J}_a. \qquad (1.83)$$

З іншої сторони, завдяки умові а),

$$|X_0(x)| \leq \mathrm{M}, |X_0(x') - X_0(x'')| \leq \lambda|x' - x''|, \quad x, x', x'' \in D, \qquad (1.84)$$

і тому

$$|X(t,x') - X_0(x') - X(t,x) + X_0(x)| \leq 2\lambda|x' - x|, x, x', x'' \in D. \quad (1.85)$$

З виразу (1.80) слідує

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \int_D \Delta_a(x - x')\left\{X(t,x') - X_0(x')\right\} dx'.$$

Звідси, на підставі (1.85), переконуємося, що в області D справедлива нерівність

$$\left|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} - \left\{X(t,x) - X_0(x)\right\}\int_D \Delta_a(x - x')dx'\right| \leq 2\lambda a. \quad (1.86)$$

Але, згідно визначенню функції $\Delta_a(x)$, для будь-якої точки x, a-окіл якої належить D, маємо

$$\left|\int_D \Delta_a(x - x')dx'\right| = \int_{|x-x'|<a} \Delta_a(x - x')dx' = 1,$$

і, таким чином, із співвідношення (1.86) для таких точок слідує

$$\left|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} - X(t,x) + \mathrm{X}_0(x)\right| \leq 2\lambda a. \quad (1.87)$$

Зафіксуємо тепер число *a* так, щоб

$$a < \rho, a < \frac{\eta^*}{8\lambda L e^{\lambda L}}, \text{ де } \eta^* = \min(\eta, \rho), \quad (1.88)$$

та введемо функції

$$F(\varepsilon) = \sup_{|\tau| \leq L}\left|\tau f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right|, \Phi(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t tf(t)dt. \quad (1.89)$$

Очевидно маємо

$$F(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0, \Phi(t) \to 0, t \to \infty.$$

Тому можемо знайти настільки мале додатне ε_0, щоб для будь-якого додатного ε, що не перевищує ε_0, виконувалися нерівності

$$F(\varepsilon) < a, F(\varepsilon) < \left(\frac{\eta^*}{2}\right), \Phi\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) \leq \frac{\eta^*}{4L^2 e^{L\lambda}(\lambda + \mathcal{I}_a M)}. \tag{1.90}$$

Зробивши такий вибір величин ε_0 і a, розглянемо вираз

$$\bar{x} = \bar{x}(t) = \xi(t) + \varepsilon u\big(t, \xi(t)\big), \tag{1.91}$$

де $\xi(t)$ – розв'язок рівняння (1.73), який разом зі своїм ρ-околом належить області D.

Завдяки нерівностям (1.82) і (1.88) – (1.90), в інтервалі

$$0 < t < \frac{L}{\varepsilon} \tag{1.92}$$

маємо

$$|\varepsilon u(t, \xi)| \leq \varepsilon t f(t) \leq F(\varepsilon) < a < \rho. \tag{1.93}$$

Отже, в інтервалі (1.92) $\bar{x}(t) \in D$.

Далі,

$$\frac{d\bar{x}}{dt} - \varepsilon X(t, \bar{x}) = R, \tag{1.94}$$

де

$$R = \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \xi} \bullet \frac{\partial \xi}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon X\left(t, \xi + \varepsilon u\right) =$$

$$= \varepsilon \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - X\left(t, \xi\right) + X_0\left(\xi\right) \right\} + e^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} X_0\left(\xi\right) + \varepsilon \left\{ X\left(t, \xi\right) - X\left(t, \xi + \varepsilon u\right) \right\}.$$

Внаслідок нерівностей (1.82) – (1.84) і (1.87), отримуємо

$$|R| \leq 2\lambda a\varepsilon + \mathcal{I}_a M\varepsilon^2 tf(t) + \lambda\varepsilon^2 tf(t).$$

Таким чином, в розглянутому інтервалі(1.93)

$$\int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)} \left|R(\tau)\right| d\tau \leq e^{\varepsilon\lambda} \int_0^{\frac{L}{\varepsilon}} \left|R(\mathrm{t})\right| dt < \left\{2\lambda aL + (\mathcal{I}_a + \lambda)L^2 \Phi\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)\right\} e^{\lambda L},$$

або, згідно нерівностям (1.88) і (1.90),

$$\int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)} \left|R(\tau)\right| d\tau < \frac{\eta^*}{4} + \frac{\eta^*}{4} = \frac{\eta^*}{2},$$

так що

$$\int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)} \left|R(\tau)\right| d\tau < \frac{\eta^*}{2}, \int_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)} \left|R(\tau)\right| d\tau < \frac{\rho}{2}. \qquad (1.95)$$

Нехай, далі, $x = x(t)$ – розв’язок рівняння (1.72), для якого $x(0)=\xi(0)$. Тоді на інтервалі

$$0 < t < t^*, t^* \leq \frac{L}{\varepsilon}, \qquad (1.96)$$

в якому $x(t) \in D$, маємо

$$|X(t,x) - X(t,\bar{x})| \leq \lambda|x - \bar{x}|.$$

Звідси, завдяки співвідношення (1.94), маємо

$$\left|\frac{d(x-\bar{x})}{dt}\right| \leq \lambda\varepsilon|x - \bar{x}| + |R(t)|.$$

Оскільки різниця $x - \bar{x}$ анулюється при $t = 0$,

$$\left|x-\overline{x}\right| \le \int\limits_0^t e^{\varepsilon\lambda(t-\tau)} \left|R(\tau)\right| d\tau \,.$$

Тому на підставі (1.95) маємо, що на інтервалі (1.96) виконуються нерівності

$$|x-\bar{x}| < \frac{\eta}{2}, |x-\bar{x}| < \frac{\rho}{2},$$

з яких, внаслідок нерівностей (1.91) і (1.92), отримуємо

$$|x-\xi| < \tfrac{\eta}{2} + F(\varepsilon) < \eta, |x-\xi| < \tfrac{\rho}{2} + F(\varepsilon) < \rho. \qquad (1.97)$$

Покажемо тепер, що число t^* може бути взяте рівним $\frac{L}{\varepsilon}$.

Насправді, якщо цього зробити не можна, то нерівність

$$|x-\xi| < \rho \qquad (1.98)$$

не може виконуватися на всьому інтервалі $\left(0, \frac{L}{\varepsilon}\right)$, оскільки в останньому випадку мали б $x(t) \in D$ для будь-якого t з інтервалу $\left(0, \frac{L}{\varepsilon}\right)$. Але так як нерівність (1.98) виконується для досить малих t, то існує таке t_1, для якого на інтервалі $(0, t_1)$ ця нерівність виконується і, крім цього,

$$|x(t_1) - \xi(t_1)| > \rho - \delta, \qquad (1.99)$$

де за δ може бути взято будь-яке мале число. Візьмемо

$$\delta = \tfrac{1}{2}\left\{\tfrac{\rho}{2} - F(\varepsilon)\right\} \qquad (1.100)$$

і покладемо $t^* = t_1$, що можливо, оскільки на сегменті $[0, t_1]$ точка *x(t)* належить області D. Але тоді відповідно нерівності (1.97) отримаємо

$$|x(t_1) - \xi(t_1)| < \frac{\rho}{2} + F(\varepsilon) = \rho - 2\delta < \rho - \delta,$$

що суперечить нерівності (1.99).

Отже, можемо покласти $t^* = \frac{L}{\varepsilon}$, і нерівності виявляються справедливими на інтервалі $0 < t < \frac{L}{\varepsilon}$, що і завершує доведення теореми.

Якщо область D обмежена, то з умови теореми б) можна виключити вимогу рівномірності і сформулювати її як умову існування границі (1.76) в кожній точці цієї області.

Насправді, з огляду на умову а), функції

$$F_t(x) = \frac{1}{T}\int_0^T X(t,x)dt \tag{1.101}$$

задовольняють нерівність

$$|F_t(x') - F_t(x'')| \leq \lambda|x' - x''| \tag{1.102}$$

і, таким чином, їх послідовність при $T \to \infty$ рівномірно неперервна.

Але так як область D, будучи обмеженою, компактна, то будь-яка рівномірно неперервна послідовність, яка сходиться в кожній точці D, виявляється разом з тим і рівномірно збіжною.

Так як для будь-якої майже періодичної функції *f(t)* існує границя

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \tag{1.103}$$

то в разі обмеженості області D умова б) задовольняється, якщо для кожного x з D вираз $X(t,x)$ виявляється майже періодичною функцією змінної t.

Розділ 2. Метод усереднення в диференціальних рівняннях з повільно змінними параметрами

2.1.Рівняння з повільно змінними параметрами

Як відомо, дослідження нестаціонарних коливальних процесів в багатьох випадках призводить до розгляду диференціальних рівнянь, в яких деякі параметри – маса системи, жорсткість, частоти і амплітуди зовнішніх сил і т. д. – змінюються з часом. Якщо ці параметри змінюються повільно (порівняно з коливаннями), для отримання наближених розв'язків з успіхом можна скористатися методом усереднення.

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння з повільно змінними параметрами

$$\frac{d}{dt}\left[m(y)\frac{dx}{dt}\right] + c(y)x = \varepsilon F\left(y, \theta, x, \frac{dx}{dt}\right), \qquad (2.1)$$

де ε – малий додатних параметр, $\frac{d\theta}{dt} = v(y) > 0$, *m(y)* і *c(y)* – функції, додатні для будь-якого *y*; функція $F\left(y, \theta, x, \frac{dx}{dt}\right)$ періодична по θ з періодом 2π і може бути представлена у вигляді суми

$$F\left(y, \theta, x, \frac{dx}{dt}\right) = \sum_{n=-N}^{n=N} e^{in\theta} F_n\left(y, x, \frac{dx}{dt}\right), \qquad (2.2)$$

При цьому коефіцієнти $F_n\left(y, x, \frac{dx}{dt}\right) F_n\left(y, x, \frac{dx}{dt}\right) F_n\left(y, x, \frac{dx}{dt}\right)$ – деякі поліноми x і $\frac{dx}{dt}$.

Припустимо, що в рівнянні (2.1) параметр *y* повільно змінюється з часом, причому характер його зміни залежить від руху системи, яка описує рівняння (2.1).

Нехай повільно змінна величина *y* визначається рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f\left(y, \theta, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (2.3)$$

де $f\left(y, \theta, x, \frac{dx}{dt}\right)$ – періодична функція по θ з періодом 2π, яка також може бути представлена сумою типу (2.2).

2.2.Приведення до стандартної форми

Для застосування методу усереднення до системи рівнянь (2.1) – (2.3), насамперед, доцільно привести її до стандартної форми. Для цього припустимо, що в розглянутій системі відсутній резонанс, тобто при будь-яких y $v(y) \neq w(y)$, де $w(y) = \sqrt{\frac{c(y)}{m(y)}}$.

Тоді, переходячи в рівняннях (2.1), (2.3) до нових змінних a,φ і y відповідно до формул

$$x = a\, cos\psi,$$

$$\frac{dx}{dt} = -aw(y)\,\sin\psi, \tag{2.4}$$

$$y = y, \qquad \psi = \int w(y)dt + \varphi,$$

замість системи рівнянь (2.1) – (2.3) отримаємо систему рівнянь в стандартній формі

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{m(y)w(y)}\left\{a\frac{d[m(y)w(y]}{dy}f(y,\theta,a\cos\psi\,,-aw(y)\sin\psi)sin^2\psi + \right.$$

$$\left. +F(y,\theta,a\cos\psi,-aw(y)\sin\psi)\sin\psi\right\}, \tag{2.5}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\varepsilon}{m(y)w(y)}\left\{\frac{d[m(y)w(y]}{dy}f(y,\theta,a\cos\psi\,,-aw(y)\sin\psi)\sin\psi\cos\psi + \right.$$

$$\left. +\frac{1}{a}F(y,\theta,a\cos\psi,-aw(y)\sin\psi)\cos\psi\right\},$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon f(y,\theta,a\cos\psi,-aw(y)\sin\psi) \qquad (\psi = \int w(y)dt + \varphi).$$

Якщо ми розглядаємо поведінку системи в резонансній зоні: $w(y) \approx v(y)$ (для визначеності, в зоні основного резонансу), слідує ввести нові змінні a, ψ і y відповідно до формул

$$x = a\cos(\theta + \psi)$$

$$\frac{dx}{dt} = -aw(y)\sin(\theta + \psi), \tag{2.6}$$

$$y = y.$$

Після деяких простих перетворень прийдемо до системи рівнянь в стандартній формі

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{m(y)w(y)}\Big\{a\frac{d[m(y)w(y]}{dy}f(y, \theta, a\cos(\theta +$$
$$+\psi), -aw(y)sin\,(\theta + \psi)\;)sin^2(\theta + \psi) +$$
$$+F(y, \theta, a\;cos\,(\theta + \psi), -aw(y)\sin(\theta + \psi))\sin(\theta + \psi)\Big\},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon\Delta(y) - \frac{\varepsilon}{m(y)w(y)}\Big\{\frac{d[m(y)w(y]}{dy}f(y, \theta, a\cos(\theta + \psi), -aw(y)\sin(\theta +$$
$$+\psi))\sin(\theta + \psi)\cos(\theta + \psi) + \frac{1}{a}F(y, \theta, a\cos(\theta + \psi), -aw(y)\sin(\theta +$$
$$+\psi))\cos(\theta + \psi)\Big\}, \tag{2.7}$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon f(y, \theta, a\cos(\theta + \psi), -aw(y)\sin(\theta + \psi)) \qquad (\varepsilon\Delta(y) = w(y) - v(y)).$$

2.3.Побудова усереднених рівнянь в першому наближенні

Після приведення системи рівнянь (2.1) – (2.3) до стандартної форми для отримання усереднених рівнянь в першому, в другому і т. д. наближеннях можемо застосувати схему усереднення, детально викладену в Розділі 1. Так, наприклад, для отримання усереднених рівнянь в першому наближенні в резонансному випадку, усереднюючи праві частини системи (2.7) по θ, приходимо до системи диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(y, a, \psi), \quad \frac{d\psi}{dt} = w(y) - v(y) + \varepsilon B_1(y, a, \psi),$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon D_1(y, a, \psi), \tag{2.8}$$

де $w(y) = \sqrt{\frac{c(y)}{m(y)}}$, $\frac{d\theta}{dt} = v(y)$ і, крім того, введені позначення:

$$A_1(y, a, \psi) = \frac{-1}{2\pi m(y) w(y)} \Big\{ \int_0^{2\pi} F(y, \theta, a\cos(\psi + \theta), -aw(y)\sin(\psi + \\ +\theta))\sin(\psi + \theta) d\theta + \frac{d[m(y)w(y]}{dy} a \int_0^{2\pi} f(y, \theta, a\cos(\theta + \\ +\psi), -aw(y) sin(\theta + \psi))sin^2(\theta + \psi) d\theta \Big\},$$

$$B_1(y, a, \psi) = \frac{-1}{2\pi m(y) w(y)} \Big\{ \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} F(y, \theta, a\cos(\theta + \psi), -aw(y)\sin(\theta + \\ +\psi))\cos(\theta + \psi)\, d\theta + \frac{d[m(y)w(y]}{dy} a \int_0^{2\pi} f(y, \theta, a\cos(\theta + \\ +\psi), -aw(y) sin(\theta + \psi)) cos(\theta + \psi)\sin(\theta + \psi)\, d\theta \Big\},$$

$$D_1(y, a, \psi) = \frac{1}{2\pi} a \int_0^{2\pi} f(y, \theta, a\cos(\theta + \psi), -aw(y) sin(\theta + \psi)) d\theta.$$

2.4. Часткові випадки системи (2.1) – (2.3)

Розглянемо деякі часткові випадки системи (2.1) – (2.3), для яких інтегрування усередненої системи значно спрощується і навіть може бути зведено до квадратури.

Перш за все розглянемо випадок, коли в правій частині рівняння (2.3) маємо константу, для визначеності покладемо $f\left(y, \theta, x, \frac{dx}{dt}\right) = 1$. Тоді рівняння (2.1) набуде вигляду

$$\frac{d}{dt} = \left[m(\tau)\frac{dx}{dt}\right] + c(\tau)x = \varepsilon F\left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{2.10}$$

де $\tau = \varepsilon t$ – «повільний» час.

Вводячи нові змінні a і ψ за допомогою формул (для основного резонансу $w(\tau) \approx v(\tau)$)

$$x = a\cos(\theta + \psi),$$

$$\frac{dx}{dt} = -aw(\tau)\sin(\theta + \psi), \tag{2.11}$$

отримуємо рівняння в стандартній формі

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{m(\tau)w(\tau)}\left\{a\frac{d[m(\tau)w(\tau)]}{d\tau}sin^2(\theta + \psi) + \right.$$

$$\left. + F(\tau, \theta, a\,cos\,(\theta + \psi), -aw(\tau)\sin(\theta + \psi))\sin(\theta + \psi)\right\}, \tag{2.12}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \varepsilon\Delta(y) - \frac{\varepsilon}{m(\tau)w(\tau)}\left\{\frac{d[m(\tau)w(\tau)]}{d\tau}\sin(\theta + \psi)\,cos\,\,(\theta + \psi) + \frac{1}{a}F(\tau, \theta, a\cos(\theta + \right.$$

$$\left. +\psi), -aw(\tau)\sin(\theta + \psi))\cos(\theta + \psi)\right\},$$

де $\varepsilon\Delta(y) = w(\tau) - v(\tau)$.

Усереднюючи праві частини по θ, знаходимо

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau, a, \psi),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \varepsilon\Delta(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \psi) \;, \tag{2.13}$$

де $A_1(\tau, a, \psi)$ і $B_1(\tau, a, \psi)$ визначаються формулами (2.9).

Якщо в рівнянні (2.10) права частина задовольняє умові

$$F\left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt}\right) = F(\tau, x) \tag{2.14}$$

то усереднені рівняння (2.13) приймають вигляд

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon a}{2m(\tau)w(\tau)} \frac{d[m(\tau)w(\tau)]}{d\tau},$$

(2.15)

$$\frac{d\psi}{dt} = w(\tau) - \frac{\varepsilon}{2\pi m(\tau)w(\tau)a} \int_0^{2\pi} F(\tau, a\cos\psi)\cos\psi d\psi.$$

Система рівнянь (2.15) може бути проінтегрована до кінця. Дійсно, з першого рівняння знаходимо

$$a(\tau) = a_0 \sqrt{\frac{m(0)w(0)}{m(\tau)w(\tau)}}, \tag{2.16}$$

де a_0 – початкове значення амплітуди при t = 0. Підставляючи знайдене значення амплітуди в друге рівняння системи (2.15), отримуємо

$$\psi = \int_0^t w_e\left[a(\tau), \tau\right] dt, \tag{2.17}$$

де прийнято позначення

$$w_e\left[a(\tau),\tau\right]=$$

$$=w(\tau)-\frac{\varepsilon\left[m(0)w(0)\right]^{-\frac{1}{2}}}{2\pi\left[m(\tau)w(\tau)\right]^{\frac{1}{2}}a_0}\int_0^{2\pi}F\left(\tau,a_0\sqrt{\frac{m(0)w(0)}{m(\tau)w(\tau)}}\cos\psi\right)\cos\psi d\psi\ . \qquad (2.18)$$

Таким чином, коливання, які описуються рівнянням (2.10) за умови (2.14), в першому наближенні «синусоїдальні» з амплітудою, що повільно змінюється обернено пропорційні величині $\sqrt{m(\tau)w(\tau)}$, і фазою, що змінюється відповідно до формули (2.17).

Другий частковий випадок. Нехай

$$F\left(\tau,\theta,x,\frac{dx}{dt}\right)=F\left(\tau,\frac{dx}{dt}\right). \qquad (2.19)$$

Усереднені рівняння мають вигляд

$$\frac{da}{dt}=-\frac{\varepsilon a}{2m(\tau)w(\tau)}\bullet\frac{d\left[m(\tau)w(\tau)\right]}{d\tau}-$$
$$-\frac{\varepsilon}{2\pi m(\tau)w(\tau)}\int_0^{2\pi}F(\tau,-aw(\tau)\sin\psi)\sin\psi d\psi, \qquad (2.20)$$

$$\frac{d\psi}{dt}=w(\tau).$$

З другого рівняння одразу знаходимо закон зміни фази коливання

$$\psi=\int_0^t w(\tau)dt. \qquad (2.21)$$

Очевидно, частота коливання, що описується рівнянням (2.10) за умови (2.19), в першому наближенні не залежить від амплітуди коливань, а залежить від характеру повільної зміни часу і жорсткості системи. Якщо б маса і жорсткість були б постійними, то, як відомо, ми отримали б коливання, що називаються квазіізохронними, частота яких в першому наближенні постійна і не залежить від амплітуди, як в більшості нелінійних коливальних системах.

Розглянемо ще один частковий випадок, коли права частина рівняння (2.3) не залежить від вибору траєкторії (2.4), вздовж якої проводиться усереднення. Тоді третє рівняння системи (2.8) буде мати вигляд

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon \bar{f}(y), \tag{2.22}$$

$$\bar{f}(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y,\theta)d\theta. \tag{2.23}$$

З рівняння (2.22) знаходимо $y = y(\tau)$, після чого приходимо до рівняння (2.10).

2.5. Системи рівнянь з повільно змінними параметрами

Для спрощення будемо розглядати випадок, коли повільно змінні параметри в системі не залежать від вибору траєкторії збуреної системи.

Нехай коливальна система з N ступенями волі характеризується виразами для кінетичної і потенціальної енергій:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(\tau) q_i q_j, \quad V = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j}(\tau) q_i q_j, \tag{2.24}$$

де $a_{i,j}(\tau) = a_{j,i}(\tau),\ b_{i,j}(\tau) = b_{j,i}(\tau), \tau = \varepsilon t$ і узагальненими силами

$$\varepsilon Q_j(\tau, \theta, q_1, . . . \ , q_N, \dot{q}_1, . . . \ , \dot{q}_N, \varepsilon) \qquad (j = 1,2, \dots, N), \tag{2.25}$$

Тоді для вивчення коливального процесу отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{N} a_{i,j}(\tau) q_i\right\} + \sum_{i=1}^{N} b_{i,j}(\tau) q_i = \varepsilon Q_j(\tau, \theta, q_1, ..., q_N, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_N, \varepsilon) \tag{2.26}$$

$$(j = 1,2, \dots, N),$$

яка шляхом введення нових квазінормальних змінних $x_1, x_2, \dots, x_N$ відповідно формулам

$$q_i = \sum_{k=1}^{N} \varphi_i^{(k)}(\tau) x_k \qquad (i = 1,2, \dots, N), \tag{2.27}$$

де $\varphi_i^{(k)}(\tau)$ $(i, k = 1,2, \dots, N)$ – нормальні функції, які залежать від параметра τ і задовольняють умову ортогональності, може бути приведена до системи диференціальних рівнянь з повільно змінними параметрами

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + w_k^2(\tau)x_k = \frac{\varepsilon}{m_k(\tau)} X_k(\tau, \theta, x_1, ..., x_N, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_N, \varepsilon) \qquad (2.28)$$

$$(k = 1,2, \dots, N).$$

Система рівнянь (2.28) за допомогою заміни змінних може бути приведена до системи рівнянь в стандартній формі

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(\tau, \theta, x), \qquad (2.29)$$

де x, X – точки n-мірного евклідового простору, n = 2N.

Застосовуючи метод усереднення, можемо побудувати усереднені системи першого, другого та вищих наближень для системи рівнянь (2.29).

2.6.Теорема про оцінку похибки *m*-го наближення

Наведемо формулювання однієї з теорем про оцінку m-го наближення на скінченному інтервалі часу, що являється аналогом першої основної теореми М. М. Боголюбова для систем з повільно змінними параметрами.

Нехай для системи (2.29) побудова усереднена система m-го наближення

$$\frac{dx^{(m)}}{dt} = \varepsilon X^{(m)}\left(\tau, x^{(m)}\right). \qquad (2.30)$$

Тоді справедлива наступна теорема

Теорема [4]. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) квадратичні форми (2.24) додатньо визначені на будь-якому скінченному інтервалі $0 \leq \tau \leq L$;

2) функції $a_{ij}(\tau), b_{ij}(\tau), \nu(\tau), X_k(\tau, \theta, x_1, \ldots, x_N, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N, \varepsilon)$ $(i, j, k = 1,2, \ldots, N)$ *необмежено диференційовані при всіх скінченних значеннях своїх аргументів і достатньо малих ε;*

3) вирази $\frac{\partial^m X_k}{\partial \varepsilon^m}$ *є скінченними тригонометричними поліномами кута* θ;

4) на всьому інтервалі $0 \leq \tau \leq L$ *має місце нерівність*

$$A_1(\tau, a, \psi) \leq Ca + C_1, \qquad (2.31)$$

де C і C_1 – деякі постійні і

$$A_1\left(\tau, a, \psi\right) = \underset{\theta}{M}\left\{X(\tau, \theta, a\cos(\theta + \psi))\right\}. \qquad (2.32)$$

Тоді будь-якому як завгодно великому L і постійним M, S, можна співставити такі додатні ε_0, K_m, *що для всіх ε* $(0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0)$ *на інтервалі*

$0 \le t \le \frac{L}{\varepsilon}$ *буде виконуватися нерівність*

$$\left|x^{(m)}(t) - x(t)\right| < K_m \varepsilon^m, \tag{2.33}$$

в якій $x^{(m)}(t)$ *– розв'язок усередненої системи (2.30), а* $x(t)$ *– розв'язок системи(2.29), що задовольняє початкові умови*

$$x^{(m)}(0) = x(0), |x(0)| \le M.$$

Докладне доведення цієї теореми можна знайти в роботах [4, 5].

2.7. Маятник з повільно змінною довжиною

В якості прикладу розглянемо коливання математичного маятника постійної маси (у випадку змінної маси додаткових труднощів не виникне) за наявності малого затухання , пропорційного першому ступеню швидкості, і повільної зміни довжини [6]. Позначимо x кутом відхилення маятника від вертикального положення, g – прискорення сили тяжіння, m – маса маятника, $l = l(\tau)$ – повільно змінну довжину, 2n – коефіцієнт тертя, отримуємо диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt}\left[ml^2(\tau)\frac{dx}{dt}\right] + 2n\frac{d}{dt}[l(\tau)x] + mgl(\tau)\sin x = 0. \tag{2.34}$$

Для невеликих відхилень можемо $\sin x$ замінити першими двома членами розкладу в степеневий ряд, після чого рівняння (2.34) можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left[ml^2(\tau)\frac{dx}{dt}\right] + mgl(\tau) = \varepsilon F\left(\tau, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{2.35}$$

де формально

$$\varepsilon F\left(\tau, x, \frac{dx}{dt}\right) = \frac{mgl(\tau)}{6}x^3 - 2nl(\tau)\frac{dx}{dt} - 2\varepsilon n\frac{dl(\tau)}{d\tau}x. \tag{2.36}$$

В першому наближенні відповідно маємо

$$x = a\cos\psi, \tag{2.37}$$

де a і ψ повинні визначатися з системи рівнянь першого наближення:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{na}{ml(\tau)} - \frac{3\varepsilon l'(\tau)}{4l(\tau)}a, \\ \frac{d\psi}{dt} &= w(\tau) - \frac{w(\tau)a^2}{16}, \end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

де $w(\tau) = \sqrt{\frac{g}{l(\tau)}}$.

Інтегруючи перше рівняння системи (2.38) при початкових умовах $t = 0, a = a_0$, отримуємо вираз для a:

$$a = a_0 e^{-\frac{\varepsilon n_1}{m}\int_0^t \frac{dt}{l(\tau)}} \left[\frac{l(0)}{l(\tau)}\right]^{\frac{3}{4}} \tag{2.39}$$

Підставляючи це значення a в друге рівняння системи (2.38), знаходимо

$$\psi = \int_0^t w(\tau)\left[1 - \frac{a_0^2 e^{-\frac{2n}{m}\int_0^t \frac{dt}{l(\tau)}} \left[\frac{l(0)}{l(\tau)}\right]^{\frac{3}{2}}}{16}\right] dt. \tag{2.40}$$

2.8. Аналіз рівнянь першого наближення

Формули (2.39) і (2.40) дають можливість провести повний аналіз коливань маятника.

Якщо у формулах покласти $l = const$, то отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} a &= a_0 e^{-\frac{\lambda}{2}t}, \\ \psi &= w\left(t + \frac{a_0^2\left(e^{-\lambda t} - 1\right)}{16\lambda}\right) + \varphi \end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

де $\lambda = \frac{2n}{ml}, \varphi$ – початкове значення часу.

Припустимо тепер, що довжина маятника змінюється за лінійним законом $l(\tau) = l_0 + l_1\tau;\ l_0$ – значення довжини при $t = 0, \varepsilon l_1$ – швидкість зміни довжини маятника (для малого інтервалу часу завжди можна припустити з достатньою точністю, що довжина змінюється за лінійним законом). В цьому випадку для амплітуди і фази маємо вираз:

$$a = a_0\left(\frac{l_0}{l_0 + l_1\tau}\right)^{\frac{3}{4} + \frac{n}{ml_1\varepsilon}}, \tag{2.42}$$

$$\psi = \int_0^t \sqrt{\frac{g}{l_0 + l_1\tau}}\left[1 - \frac{a_0^2}{16}\left(\frac{l_0}{l_0 + l_1\tau}\right)^{\frac{3}{2} + \frac{2n}{ml_1\varepsilon}}\right]dt. \tag{2.43}$$

Відповідно формулі (2.45) амплітуда коливання при повільній зміні довжини маятника буде змінюватися не по експоненціальному закону, як при звичайному лінійному терті , а обернено пропорційне степеневій функції часу. При цьому очевидно, що при $n < 0, l_1 > 0$ і $\left|\frac{n}{ml_1\varepsilon}\right| < \frac{3}{4}$, і при $n > 0$ і $l_1 > 0$ коливання затухають.

Таким чином , повільне збільшення довжини маятника, як і слідувало очікувати, сприяє затуханню коливань. Якщо $l_1 > 0, n > 0$ і $\left|\frac{n}{ml_1\varepsilon}\right| < \frac{3}{4}$, то амплітуда зростає, а при $\left|\frac{n}{ml_1\varepsilon}\right| > \frac{3}{4}$ – спадає. За відсутності затухання ($n = 0$) амплітуда коливань зростає зі зменшенням довжини і спадає зі збільшенням довжини.

Аналогічний аналіз може бути проведений і для частоти коливань. Так, наприклад, за відсутності затухання миттєва частота зменшиться при збільшенні довжини маятника і збільшується при зменшенні довжини.

2.9. Друге наближення і його оцінка

Загальний розв'язок рівняння (2.1) представляється у вигляді розкладу:

$$x = \mathrm{a}\cos\psi + \varepsilon u_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(\tau, a, \psi) + \ldots, \qquad (2.44)$$

в якому $u_1(\tau, a, \psi)$, $u_2(\tau, a, \psi)$, . . . є періодичними функціями кута ψ з періодом 2π, а виличини a і ψ як функції часу визначаються наступними диференціальними рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a) + \ldots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= w(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a) + \ldots, \end{aligned}\right\} (2.45)$$

де $w(\tau) = \sqrt{\dfrac{k(\tau)}{m(\tau)}}$ – частота коливальної системи.

Для побудови другого наближення необхідно знайти умови відсутності першої гармоніки в функції $u_2(\tau, a, \psi)$ виразу для $A_2(\tau, a)$ і я $B_2(\tau, a)$.

Диференціюючи праву частину виразу (2.44) з урахуванням (2.45) і підставляючи в рівняння (2.1) отримаємо

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{A}_2(\tau, a) = -\frac{1}{2w(\tau)}\left[a\frac{\partial B_1}{\partial a}A_1 + \frac{\partial B_1}{\partial \tau} + 2A_1B_1 + \frac{a}{m(\tau)}\frac{dm(\tau)}{d\tau}B_1\right] - \\ &-\frac{1}{2\pi m(\tau)w(\tau)}\int_0^{2\pi} f_1(\tau, a, \psi)\sin\psi\, d\psi, \\ &\mathrm{B}_2(\tau, a) = -\frac{1}{2w(\tau)\mathrm{a}}\left[\frac{\partial A_1}{\partial a}A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \tau} - aB_1^2 + \frac{1}{m(\tau)}\frac{dm(\tau)}{d\tau}A_1\right] - \\ &-\frac{1}{2\pi m(\tau)w(\tau)\mathrm{a}}\int_0^{2\pi} f_1(\tau, a, \psi)\cos\psi\, d\psi, \end{aligned}\right\} \qquad (2.46)$$

і, отже, розв'язок рівняння (2.1) в другому наближенні буде:

$$x = \mathrm{a}\cos\psi + \varepsilon u_1(\tau, a, \psi). \qquad (2.47)$$

де a і ψ повинні бути визначені з рівняння другого наближення:

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau,a)+\varepsilon^2 A_2(\tau,a),\\ \frac{d\psi}{dt} &= w(\tau)+\varepsilon B_1(\tau,a)+\varepsilon^2 B_2(\tau,a),\end{aligned}\right\} \qquad (2.48)$$

Підрахуємо для даного прикладу коливання маятника з повільно змінною довжиною друге наближення.

Відповідно до формул (2.47) і (2.48) маємо :

$$x = a\cos\psi - \frac{a^3}{192}\cos 3\psi, \qquad (2.49)$$

де a і ψ повинні бути визначені з системи рівнянь другого наближення:

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= -\left(\frac{3l'(\tau)}{4l(\tau)}\varepsilon+\frac{n}{ml(\tau)}\right)\left(a+\frac{a^3}{16}\right),\\ \frac{d\psi}{dt} &= w(\tau)-\frac{w(\tau)a^2}{16}+\frac{1}{2w(\tau)}\left\{\frac{n^2}{m^2l^2(\tau)}+\frac{\varepsilon l'(\tau)n}{ml^2(\tau)}+\frac{5\varepsilon^2 l''(\tau)}{4l(\tau)}+\frac{5w^2(\tau)a^4}{2^9\cdot 3}-\frac{3\varepsilon^2 l'^2(\tau)}{16l^2(\tau)}\right\},\end{aligned}\right\} (2.50)$$

Із першого рівняння системи (2.50) отримуємо наступне співвідношення між a і t:

$$\frac{a}{\sqrt{16+a^2}} = \frac{a_0}{\sqrt{16+a_0^2}}\, e^{-\frac{n}{m}\int_0^t \frac{dt}{l(\tau)}} \left(\frac{l(0)}{l(\tau)}\right)^{\frac{3}{4}}. \qquad (2.51)$$

Виразивши з (2.51) значення a отримаємо:

$$a = \frac{4\sqrt{\dfrac{a_0}{\sqrt{16+a_0^2}}\, e^{-\frac{n}{m}\int_0^t \frac{dt}{l(\tau)}} \left(\dfrac{l(0)}{l(\tau)}\right)^{\frac{3}{4}}}}{\sqrt{1-\dfrac{a_0^2}{16+a_0^2}\, e^{-2\frac{n}{m}\int_0^t \frac{dt}{l(\tau)}} \left(\dfrac{l(0)}{l(\tau)}\right)^{\frac{3}{2}}}} \qquad (2.52)$$

Знайдемо оцінку для a, взявши для цього $l(\tau)$ на проміжку $l_{\min} \le l(\tau) \le l_{\max}$.

В ряді зроблених операцій отримаємо

$$\frac{a_0^2}{16+a_0^2} e^{-\frac{n}{m}\frac{\tau}{l_{\min}}} \frac{l(0)}{l_{\max}} \le a \le \frac{a_0^2}{16+a_0^2} e^{-\frac{n}{m}\frac{\tau}{l_{\max}}} \frac{l(0)}{l_{\min}}. \tag{2.53}$$

Висновки

В дипломній роботі було зроблено наступне :

1)описано метод усереднення диференціальних рівнянь з малим параметром;

2) приведена перша теорема Боголюбова обґрунтування методу усереднення;

3)метод усереднення застосовано до рівнянь з повільно змінними параметрами;

4) отримано перше та друге наближення для рівняння маятника;

5) проведено оцінку амплітуди в залежності від довжини маятника.

Список використаної літератури

1)Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике. – Сб. Ин-та строит. механики АН УССР, 1950, 14, с. 9 – 34.

2) Боголюбов Н. Н., Митропольський Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 3-е. Физматгиз, М.,1963.

3) Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Изд-во АН УССР, К., 1945.

4) Митропольский Ю. А. Медленные процессы в нелинейных колебательных системах со многими степенями свободи.– ПММ, 1950, 14, 2, с. 139 – 170.

5) Митропольский Ю. А. Проблемы асиптотической теории нестационарных колебаний. «Наука», М., 1964.

6) Митропольский Ю. А. Собственные колебания нелинейной системы с медленно меняющимися параметрами. – Сб. трудов Ин-та строит. механики АН УССР, 1949, 11, с. 107-114.