

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ: ЗБІРНИК ЗАДАЧ ЧАСТИНА 1

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Інтелектуальні сервіс-орієнтовані розподілені
обчислення»
спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»

Укладач: Ю. Є. Бохонов

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2024

УДК 517 (075.8) (076)

МЗ4

Укладач: *Бохонов Юрій Євгенович*, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензент *Легеза, В. П.*, д-р. техн. наук, проф.,
каф. програмного забезпечення комп'ютерних систем, КПІ ім. Ігоря
Сікорського

Відповідальний редактор *Каніовська, І. Ю.*, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
каф. ММСА ПСА, КПІ ім. Ігоря Сікорського

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 2 від 29.02.2024 р.)
за поданням вченої ради навчально-наукового інституту прикладного системного аналізу
(протокол № 2 від 26.02.2024 р.)*

Бохонов Ю. Є.

МЗ4 Математичний аналіз. Збірник задач. Частина 1 [Електронний ресурс] : збірн. задач.
для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Інтелектуальні сервіс-орієнтовані
розподілені обчислення» спец. 122 Комп'ютерні науки / КПІ ім. Ігоря Сікорського, уклад.
Ю. Є. Бохонов. - Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024.
– 47 с.

Містить задачі на знаходження точних меж для числових множин, знаходження 8 границь
послідовностей і функцій, похідних і диференціалів, областей монотонності функцій, їхні
екстремуми, області опуклості та точки перегину. Приділено увагу розкриттю різних
типів невизначеностей, похідних вищих порядків, формулі Тейлора та її застосування при
знаходження границь, дослідженню функцій засобами диференціального числення.
Призначений для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Інтелектуальні
сервіс-орієнтовані розподілені обчислення» спец. 122 Комп'ютерні науки. Буде також
корисний для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 124 «Системний аналіз».

УДК 517 (075.8) (076)

Реєстр. № НП 23/24-336. Обсяг 0,34 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024

ЗМІСТ	03
Вступ	04
I. Границі послідовностей та функцій.....	05
1. Метод математичної індукції	08
Задачі для самостійного розв'язання	08
2. Точні межі числових множин.....	09
Задачі для самостійного розв'язання	09
3. Числові послідовності та їхні границі	10
Задачі для самостійного розв'язання	11
4. Функції та їхні границі	15
Задачі для самостійного розв'язання	15
5. Символіка о-мале і О-велике	19
Задачі для самостійного розв'язання	20
6. Неперервність функції	22
Задачі для самостійного розв'язання	25
II. Диференціальне числення функцій однієї змінної	26
7. Диференціали і похідні	26
Задачі для самостійного розв'язання	29
8. Геометричний зміст похідної	32
Задачі для самостійного розв'язання	32
9. Диференціали	33
Задачі для самостійного розв'язання	33
10. Похідні і диференціали вищих порядків	33
Задачі для самостійного розв'язання	34
11. Монотонні функції. Деякі нерівності	36
Задачі для самостійного розв'язання	37
12. Опуклість	38
Задачі для самостійного розв'язання	39
13. Розкриття невизначеностей. Правила Лопітала	41
Задачі для самостійного розв'язання	41
14. Формула Тейлора	42
Задачі для самостійного розв'язання	43
15. Екстремум функцій	45
Задачі для самостійного розв'язання	45
16. Побудова графіків	46
Задачі для самостійного розв'язання	47

ВСТУП

У посібнику – збірнику задач «Математичний аналіз, Збірник задач, Частина 1», який призначено для виконання домашніх робіт, що відповідають змісту кредитного модуля І «Диференціальне числення функцій однієї змінної», містяться задачі на теми з математичного аналізу: знаходження точних верхніх і нижніх меж числових множин, з теорії границь числових послідовностей та функцій, диференціального числення функцій однієї змінної, дослідження функцій на екстремум, опуклість. Також наведено задачі підвищеної складності, що позначаються зірочками, на розв'язання рівнянь із застосуванням методів диференціального числення. Такі задачі можуть використовуватись при підготовці до студентських олімпіад з математики. До кожної теми додано необхідний теоретичний матеріал.

Збірник задач рекомендовано для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Інтелектуальні сервіс-орієнтовані розподілені обчислення» спеціальності 122 Комп'ютерні науки.

1. Границі послідовностей та функцій

Теоретичні відомості

Означення границі послідовності. Число a називається границею послідовності $\{a_n\} : a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon$.

Властивості границь послідовностей.

Нехай існують $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Тоді $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1). $\forall C = \text{const} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} C = C$

2). $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha a + \beta b$

3). $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ab$

4) Якщо $b_n \neq 0, b \neq 0$, тоді $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

5). Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ і $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$. Тоді $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

Зауваження. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, то все рівно, взагалі кажучи, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, тобто, строга нерівність може не зберігатись при переході до границі.

6). Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$ і $a_n \leq b_n \leq c_n$. Тоді $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$.

Будемо використовувати важливі границі:

1). $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a > 0$

2). $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3). Друга важлива границя: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718...$ (ірраціональне

трансцендентне число, що називається основою натурального логарифма).

Узагальнення другої важливої границі: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$

$$4). \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$$

$$5). \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = 1$$

$$6). \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^a - 1 \right) = a$$

Означення границі функції за Коші.

$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall 0 < |x - a| < \delta \mid f(x) - A| < \varepsilon$.

Слід зауважити, що функція може бути невизначеною у точці a , а сама ця точка повинна бути граничною для області визначення функції.

Слід зазначити, що границя функції має властивості, аналогічні властивостям 1)-6) для послідовностей.

Важливі границі для функцій.

$$1). \text{Перша важлива границя: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$2). \text{Друга важлива границя: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

$$3). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$4). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$5). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$$

Означення неперервності функції у точці.

Нехай точка a належить області визначення функції і $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Тоді кажуть, що функція неперервна в цій точці. Іншими словами, справедлива рівність $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right)$.

Композицією функцій f і g називається функція, що позначається $g \circ f$, значення якої знаходяться за формулою $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Неперервність композиції функцій. Нехай функція f неперервна в точці a , $f(a) = b$, функція g неперервна в точці b . Тоді їхня композиція неперервна в точці a .

Зауваження. Якщо відмовитись від умови неперервності функцій, а тільки вважати, що існує границя f в точці a , яка дорівнює b і існує границя g в цій точці, то, взагалі кажучи, границя композиції може не існувати.

Приклади розв'язання задач на границі послідовностей і функцій

Задача 1. Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (вказати $N(\varepsilon)$)

Доведення.

$$a_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2}, a = -\frac{1}{2},$$

$$\varepsilon > 0.$$

$$|a_n - a| = \left| \frac{1-2n^2}{2+4n^2} + \frac{1}{2} \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{2-4n^2+2+4n^2}{2(2+4n^2)} \right| < \varepsilon,$$

$$\frac{4}{2(2+4n^2)} < \varepsilon,$$

$$n > \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}},$$

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} \right]$$

при $\forall n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$, отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n^2}{2+4n^2} = -\frac{1}{2}$.

Задача 2. Границя степенєво-показникової функції.

Нехай $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty, \exists \lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x) - 1) = A$. Покажемо, як треба знаходити $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)}$.

Розв'язання. Використовуючи основну логарифмічну тотожність (а не другу важливу границю!), неперервність експоненційної функції, а також відому

важливу границю $\lim_{t \rightarrow a} \frac{\ln(1 + (t - a))}{t - a} = 1$, одержимо:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x)(f(x)-1) \frac{\ln(1+(f(x)-1))}{f(x)-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x)-1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(1+(f(x)-1))}{f(x)-1}} = e^A.$$

1. Метод математичної індукції

Задачі для самостійного розв'язання

Застосовуючи метод математичної індукції, довести наступні рівності і нерівності і твердження:

1.1. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1.2. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

1.3. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

1.4. Число $\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{8} + \dots + \arctg \frac{1}{2n^2} = \arctg \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$.

1.5. Число $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ ділиться на 19.

1.6. Число $n(2n^2 - 3n + 1)$ ділиться на 6.

1.6. Нехай числа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ одного знаку (або деякі дорівнюють нулю) і більші за -1 . Довести справедливості нерівності:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Наслідок. Має місце нерівність Бернуллі:

$$(1+x)^n \geq 1+nx, x > -1.$$

$$1.7. \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

$$1.8. \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

$$1.9. 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, n \geq 2.$$

$$1.10. \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

$$1.11. \left| \sin \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \sin x_k \quad \forall 0 \leq x_k \leq \pi, k = 1, 2, \dots, n.$$

$$1.12. (2n)! < 2^{2n} (n!)^2.$$

2. Точні межі числових множин

Для числових множин будемо використовувати наступні позначення. Нехай $X, Y, Z \subset \mathbb{R}^n$. Позначимо через $-X \subset \mathbb{R}^n$ множину чисел, протилежних до чисел з X ; $Z = X + Y$ - множина усіх сум чисел, де $x \in X, y \in Y$. Аналогічно $Z = XY$ множина усіх добутків чисел, де $x \in X, y \in Y$.

Задачі для самостійного розв'язання

Довести:

$$2.1. \inf(-X) = -\sup X.$$

$$2.2. \sup(-X) = -\inf(X).$$

$$2.3. \inf(X + Y) = \inf X + \inf Y.$$

$$2.4. \sup(X + Y) = \sup X + \sup Y.$$

Нехай у наступних задачах $X = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}, Y = \{y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$. Довести:

$$2.5. \inf(XY) = \inf X \inf Y.$$

$$2.6. \sup(XY) = \sup X \sup Y.$$

Далі вживаємо наступні позначення: $A \subset \mathbb{R}$, $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ - числові функції зі спільною областю визначення: $D(f) = D(g) = A$.

$$2.7. \text{Нехай } \forall x \in A \ f(x) \leq g(x). \text{ Довести, що } \sup_{x \in A} (f(x)) \leq \sup_{x \in A} (g(x)).$$

$$2.8. \sup_{x \in A} (f(x)) + \inf_{x \in A} (g(x)) \leq \sup_{x \in A} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in A} (f(x)) + \sup_{x \in A} (g(x)).$$

$$2.9. \sup_{x \in A} (f(x) + c) \leq \sup_{x \in A} (f(x)) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Використовуючи означення, довести:

$$2.10. \inf \left\{ \frac{3n^2 + 2n + 7}{2n^2 - 5n - 9}, n \geq 4 \right\} = \frac{3}{2}.$$

$$2.11. \sup \left\{ \frac{5n^2 - 7n + 11}{3n^2 + 8n - 10}, n \geq 2 \right\} = \frac{5}{3}.$$

3. Числові послідовності та їхні границі

Деякі теоретичні відомості.

Послідовність $x_n, n \in \mathbb{N}$, починаючи з номера $N = 3$, задано лінійним рекурентними співвідношеннями:

$$x_n = px_{n-1} + qx_{n-2} \quad \forall n \geq 3; x_1 = a, x_2 = b.$$

Характеристичним рівнянням даної послідовності називається алгебраїчне рівняння

$$\lambda^2 = p\lambda + q.$$

Воно може мати різні (прості) корені (дійсні чи комплексні) або кратний корінь в залежності від значень дискримінанта.

Довести, що у разі різних коренів λ_1, λ_2 формула загального члена рекурентної послідовності має вигляд:

$$x_n = \frac{(a\lambda_2 - b)\lambda_1^{n-1} - (a\lambda_1 - b)\lambda_2^{n-1}}{\lambda_2 - \lambda_1}, n \in \mathbb{N}.$$

У випадку кратних коренів $\lambda \triangleq \lambda_1 = \lambda_2 -$

$$x_n = (2a\lambda - b + n(b - a\lambda))\lambda^{n-2}, n \in \mathbb{N}.$$

Задачі для самостійного розв'язання

3.1. $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \forall n \geq 3; x_1 = x_2 = 1$ (послідовність Фібоначчі).

3.2. $x_1 = a, x_2 = b, x_n = x_{n-1} - \frac{1}{4}x_{n-2} \forall n \geq 3.$

3.3. $x_1 = 0, x_2 = 1, x_n = x_{n-1} - x_{n-2} \forall n \geq 3.$

3.4. Довести, що послідовність $x_n = \frac{2^n}{n!}$ строго спадає, починаючи з деякого номера.

3.5*. Нехай $a > 0$ і послідовність задано рекурентним співвідношенням: $x_1 = a, x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$. Дослідити, при яких значеннях a вона строго спадає, а при яких - строго зростає.

3.6. Довести необмеженість послідовностей а) $x_n = \frac{n^3 - 1000}{n^2 - 101}$, б) $x_n = n^{\cos \pi n}$.

3.7. Нехай $x_1 = 0, x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{n+1}$. Довести формулу для загального члена послідовності: $x_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n-1} k!$.

Описати поведінку послідовності, якщо вона задовольняє властивості:

3.8. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$

3.9. $\exists \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$

3.10. $\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \forall n > N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$

3.11. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \exists n > N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$

3.12. $\exists \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \exists n > N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$

$$3.13. \exists \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

$$3.14. \forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

Використовуючи означення, тобто, застосовуючи «мову $\varepsilon - N$ », довести, що послідовності мають наступні границі:

$$3.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{5n+7} = \frac{3}{5}.$$

$$3.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 7n - 2}{9n^2 + 5n + 7} = \frac{4}{9}.$$

$$3.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = 0.$$

3.18. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, |y_n| \leq M$. Довести, що існує границя послідовності $x_n y_n$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

3.19. Нехай послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ збіжна, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Довести, що існує границя послідовності $\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\}$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$.

Навести приклад розбіжної послідовності $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, для якої збіжна послідовність $\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\}$.

Знайти границі наступних послідовностей:

$$3.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{\sqrt{2n^2+7}}. \text{ Відповідь: } \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$3.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+5} + \sqrt{n+3}}{\sqrt{n^2+9} + n}. \text{ Відповідь: } \frac{1}{2}.$$

$$3.22. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}). \text{ Відповідь: } 0.$$

$$3.23. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}). \text{ Відповідь: } 0.$$

$$3.24. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n}), k \in \mathbb{N}, k \geq 2. \text{ Відповідь: } 0.$$

$$3.25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} - (-1)^n}. \text{ Відповідь: } -1.$$

$$3.26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{3^{n+1} + 5}. \text{ Відповідь: } 0.$$

$$3.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} + 3^{n+3}}{2^n + 3^n}. \text{ Відповідь: } 27.$$

$$3.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg(n^2 + 2n \cos n + 1)}{1 + \lg(n + 1)}. \text{ Відповідь: } 2.$$

$$3.29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg^2(10n)}{\lg^2(n)}. \text{ Відповідь: } 1.$$

$$3.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \lg^2(5n)}{\lg(10^n + n)}. \text{ Відповідь: } 1.$$

$$3.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}. \text{ Відповідь: } 1.$$

$$3.32. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} \right). \text{ Відповідь: } \frac{1}{2}.$$

$$3.33. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1) \cdot (n+2)} \right). \text{ Відповідь: } \frac{1}{4}.$$

$$3.34. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} \right). \text{ Відповідь: } \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$3.35. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - n + 1}{2n^2 + n + 1} \right)^{\frac{n^3}{1-n}}. \text{ Відповідь: } 0.$$

$$3.36. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n. \text{ Відповідь: } 0.$$

$$3.37. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}. \text{ Відповідь: } \infty.$$

$$3.38. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{c + \sqrt{c + \dots + \sqrt{c}}}, c > 0. \text{ Відповідь: } \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}.$$

Користуючись теоремою про існування обмеженої монотонної послідовності, довести існування границі кожної з наступних послідовностей:

$$3.39. x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

$$3.40. x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

Використовуючи критерій Коші, довести існування границь послідовностей:

$$3.41. x_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots + a_n q^n, |a_k| \leq M, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, |q| < 1.$$

$$3.42. x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

$$3.43. x_n = \frac{\sin 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\sin n!}{n(n+1)}.$$

$$3.44. x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

Знайти границю

$$3.45. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{pn} \right), p \in \mathbb{N}, p \geq 2. \text{ Відповідь: } \ln p.$$

Використовуючи правило Штольца, знайти границі послідовностей:

$$3.46. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}. \text{ Відповідь: } \frac{1}{p+1}.$$

$$3.47. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right). \text{ Відповідь: } \frac{1}{2}.$$

$$3.48. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 3^p + \dots + (2n-1)^p}{n^{p+1}}. \text{ Відповідь: } \frac{2^p}{p+1}.$$

Для послідовності $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ знайти $\sup\{x_n, n \in \mathbb{N}\}, \inf\{x_n, n \in \mathbb{N}\}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

3.49. $x_n = (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{3}{n}\right)$. Відповідь: $-\frac{7}{2}; 5; -2; 2$.

3.50. $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$. Відповідь: $-1; \frac{3}{2}; 5; 0; 1$.

3.51. $x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{\pi n}{2}$. Відповідь: $0; 2; 0; 2$.

3.52. $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2\pi n}{3}$. Відповідь: $-\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}; 1$.

3.53. $x_n = 1 + n \sin \frac{\pi n}{2}$. Відповідь: $-\infty; \infty; -\infty; \infty$.

3.54. $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Відповідь: $-4; 6; -4; 6$.

Довести нерівності:

3.55. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$.

3.56. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Нехай $x_n \geq 0, y_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$. Довести:

3.57. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$.

3.58. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$.

4. Функції та їхні границі

Задачі для самостійного розв'язання

Знайти області визначення $D(f)$ функції f :

4.01. $f(x) = \ln(1 - 2 \cos x)$.

4.02. $f(x) = \ln(x+2) + \ln(x-2)$. Відповідь: $x > 2$.

4.03. $f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x}$. Відповідь: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$.

4.04. $f(x) = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x}, x \in [0, 2\pi]$. Відповідь: $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

4.05. Знайти композиції $a) f(f(x)), b) f(f(f(x)))$ функції $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Відповідь: $a) -\frac{1-x}{x}, b) x (x \neq 0, x \neq 1)$.

4.06. Знайти композицію $f(f(\dots f(x)))$, яку взято n разів, функції

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Відповідь: $\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

4.07. Знайти $f(x)$, якщо $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}, |x| \geq 2$. Відповідь: $x^2 - 2 \left(|x| \geq \frac{5}{2}\right)$.

4.08. Знайти $f(x)$, якщо $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}, x > 0$. Відповідь: $\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x}$.

Користуючись означенням, тобто, мовою $\varepsilon - \delta$, довести:

4.09. а). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$, б). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \frac{1}{3}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} = 2$.

Знайти границі функцій.

4.10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$. 4.11. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1} \right)$.

4.12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$. 4.13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - x^{k+1} + x^k - nx + n - 1}{(x-1)^2}$.

4.14. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{n}{1-x^n} - \frac{k}{1-x^k} \right), n, k \in \mathbb{N}$. 4.15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}, m, n \in \mathbb{N}$.

4.16. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}, n \in \mathbb{N}$. 4.17. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$.

4.18. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}, a > 0$. 4.19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2} - (1+x)}{x}$.

$$4.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}. \quad 4.21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x}.$$

$$4.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} \right). \quad 4.23. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \right).$$

$$4.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{(x-a_1) \dots (x-a_n)} - x \right). \quad 4.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt{1+x^2} + x \right)^n - \left(\sqrt{1+x^2} - x \right)^n}{x}.$$

$$4.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}. \quad 4.27. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}, m, n \in \mathbb{N}.$$

$$4.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}. \quad 4.29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px}.$$

$$4.30. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right). \quad 4.31. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tga}}{x - a}.$$

$$4.32. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}.$$

$$4.33. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+2x) - 2\operatorname{tg}(a+x) + \operatorname{tga}}{x^2}. \quad 4.34. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}.$$

$$4.35. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}. \quad 4.36. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{1 - \cos x}.$$

$$4.37. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2}. \quad 4.38. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}. \quad 4.39. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

$$4.40. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}. \quad 4.41. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$4.42. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x. \quad 4.43. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$4.44. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}. \quad 4.45. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2 + e^{2x})}{\ln(3 + e^{2x})}.$$

$$4.46. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) + \ln(x-h) - 2\ln x}{h^2}. \quad 4.47. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)}{\sin bx}.$$

$$4.48. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}. \quad 4.49. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x \cos ax}{1 + \sin x \cos bx} \right)^{\operatorname{ctg}^3 x}.$$

$$4.50. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}}, a, b > 0. \quad 4.51. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2}, a, b > 0.$$

$$4.52. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^m} - b^{x^m}}{(a^x - b^x)^m}, a, b > 0, m \in \mathbb{N}. \quad 4.53. \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a}, a > 0.$$

$$4.54. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{sh^2 x}{\ln(ch 3x)}. \quad 4.55. \lim_{x \rightarrow a} \frac{shx - sha}{x - a}. \quad 4.56. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln chx}{\ln \cos x}.$$

$$4.57. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x}{h}. \quad 4.58. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} \right).$$

$$4.59. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right). \quad 4.60. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{\operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x)}.$$

Відповіді. 4.10: 2; 4.11: 1; 4.12: $\frac{p}{m}$; 4.13: $\frac{n^2 - 2k + n}{2}$; 4.14: $\frac{mn(n-m)}{2}$;

4.15: $\frac{mn(m-n)}{2}$; 4.16: $\frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}$; 4.17: $\frac{n(n+1)}{2}$; 4.18: $\frac{1}{\sqrt{2a}}$; 4.19: -2;

4.20: $\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$; 4.21: $\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}$; 4.22: $\frac{2}{3}$; 4.23: $-\frac{1}{4}$; 4.24: $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$;

4.25: 2^n ; 4.26: $\frac{\alpha}{\beta}$; 4.27: $(-1)^{m-n} \frac{m}{n}$; 4.28: $\frac{1}{2}$; 4.29: $\frac{1}{p}$; 4.30: $\frac{1}{2}$;

4.31: $\frac{1}{\cos^2 a}$; 4.32: $\frac{1}{2}$; 4.33: $\frac{2 \sin a}{\cos^2 a}$; 4.34: $\frac{1}{4}$; 4.35: 0; 4.36: 3;

$$\begin{aligned}
&4.37: e^3; 4.38: 1; 4.39: \sqrt{e}; 4.40: e^{\frac{3}{2}}; 4.41: e^{-2}; 4.42: e; 4.43: 1; 4.44: \frac{1}{5}; 4.45: \frac{5}{2}; \\
&4.46: -\frac{1}{x^2}; 4.47: \frac{2a}{b}; 4.48: \left(\frac{a}{b}\right)^2; 4.49: e^{\beta^2} - e^{\alpha^2}; 4.50: \frac{1}{\sqrt{ab}}; 4.51: \left(\ln \frac{a}{b}\right)^{-1}; \\
&4.52: \left(\ln \frac{a}{b}\right)^{1-m}; 4.53: \sqrt[3]{abc}; 4.54: \frac{2}{9}; 4.55: cha; 4.56: -1; 4.57: \frac{1}{1+x^2}; 4.58: 1; \\
&4.59: 1; 4.60: 2.
\end{aligned}$$

5. Символіка о-мале і О-велике

Теоретичні відомості

Означення Функція β називається нескінченно малою вищого порядку по відношенню до функції α в околі точки a , якщо $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$.

Записується це так: $\beta = o(\alpha)$. Треба підкреслити, що в цьому записі знак рівності читається не як «дорівнює», а « β є о-мале від α ».

Будь-яка нескінченно мала (без порівняння з якоюсь іншою) позначається $o(1)$. Таке позначення задовольняє (2.1.18), якщо знаменник тотожно дорівнює одиниці.

Приклад 1. $o(\alpha) + o(\alpha) = o(\alpha)$.

Мається на увазі, що є дві функції: $\beta = o(\alpha)$ і $\gamma = o(\alpha)$. Написана рівність означає, що $\beta + \gamma = o(\alpha)$. Доведення очевидне і випливає з властивості границі:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0, \lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x) + \gamma(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 0.$$

Приклад 2. $a = 0; 0 < b < c: x^c = o(x^b)$.

Дійсно, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^c}{x^b} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{c-b} = 0$.

Приклад 3. $a = \infty$; $b < c < 0$: $x^b = o(x^c)$.

Дійсно, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{x^c} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{c-b}} = 0$.

Означення Кажуть, що функція g є «О-велике» по відношенню до функції f в околі точки a , $g = O(f)$, якщо $\exists C > 0$ таке, що $|g(x)| \leq C|f(x)|$.

Приклад 1. $x \in [0, \infty)$; $0 < b < c$: $x^b = O(x^c)$.

Дійсно, в даному випадку $C = 1$ і $x^b \leq x^c$.

Означення 2.1.12. Кажуть, що функція g є « O^* -велике» по відношенню до функції f в околі точки a , $g = O^*(f)$, якщо $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = A, |A| < \infty$.

Означення. Кажуть, що f, g - еквівалентні функції в околі точки a , якщо

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$. Еквівалентність будемо позначати $g \sim f$.

Приклад. В околі нуля $\sin x \sim x$.

Задачі для самостійного розв'язання

Довести, що

5.01. $o(o(f(x))) = o(f(x))$. 5.02. $O(o(f(x))) = o(f(x))$.

5.03. $o(O(f(x))) = o(f(x))$. 5.04. $O(O(f(x))) = O(f(x))$.

5.05. $O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x))$.

Нехай $x \rightarrow 0, n > 0, C = \text{const}, C \neq 0$. Довести, що

$$5.06. CO(x^n) = O(x^n). \quad 5.07. O(O(f(x))) = O(f(x)).$$

$$5.08. O(x^n) + O(x^m) = O(x^n), n \leq m. \quad 5.09. O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m}).$$

Нехай $x \rightarrow \infty, n > 0$. Довести, що

$$5.10. CO(x^n) = O(x^n). \quad 5.11. O(x^n) + O(x^m) = O(x^n), n \geq m.$$

$$5.12. O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m}).$$

Нехай $x \rightarrow 0$. Довести асимптотичні властивості:

$$5.13. 2x - x^2 = O(x). \quad 5.14. x \sin \sqrt{x} = O(x^{\frac{3}{2}}).$$

$$5.15. x \sin \frac{1}{x} = O(|x|). \quad 5.16. \ln x = o\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right), \varepsilon > 0.$$

$$5.17. \arctg \frac{1}{x} = O(1). \quad 5.18. (1+x)^n = 1 + nx + o(x).$$

Нехай $x \rightarrow \infty$. Довести асимптотичні властивості:

$$5.19. 2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3). \quad 5.20. \frac{x+1}{x^2+1} = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$5.21. \frac{\arctg x}{1+x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right). \quad 5.22. \frac{x+1}{x^2+1} = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Нехай $x > 0$ досить велике. Довести нерівності:

$$5.23. x^2 + 10x + 100 < 0,001x^3. \quad 5.24. \ln^{1000} x < \sqrt{x}.$$

$$5.25. x^{10} e^x < e^{2x}.$$

Довести асимптотичну формулу при $x \rightarrow \infty$.

$$5.26. \sqrt{x^2 + px + q} = x + \frac{p}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Нехай $x \rightarrow 0$. Довести асимптотичні формули $f(x) = Cx^n + O(x^m)$, знайти C, m, n .

$$5.27. f(x) = 2x - 3x^3 + x^5. \quad \text{Відповідь: } 2x.$$

5.28. $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$. Відповідь: x .

5.29. $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$. Відповідь: $\frac{x^2}{2}$.

Нехай $x \rightarrow \infty$. Довести асимптотичні формули $f(x) = C\left(\frac{1}{x}\right)^n + O\left(\frac{1}{x}\right)^m$, знайти C, m, n .

5.30. $f(x) = \frac{x+1}{x^4+1}$. Відповідь: $\frac{1}{x^3}$.

5.31. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$. Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

5.32. $f(x) = \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$. Відповідь: $-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$.

5.33. $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$. Відповідь: $\frac{1}{x^2}$.

6. Неперервність функції

Теоретичні відомості

Означення. Функція називається неперервною в точці з області визначення, якщо її границя в цій точці дорівнює її значенню в цій точці:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Якщо в деякій точці така границя не існує або нескінченна, кажуть, що це точка розриву.

Неперервність деяких елементарних функцій

1). $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$.

2). $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0$.

3). $\lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$ ($x > 0$).

$$3). \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0.$$

$$4). \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0.$$

$$5). \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \operatorname{tg} x_0, x_0 \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Композиція відображень або складена функція

Означення композиції відображень. Нехай

$$D(f) = X, R(f) = f(X) = Y, D(g) = Y, R(g) = g(Y) = Z.$$

Отже, $X \ni x \rightarrow y = f(x) \rightarrow z = g(y) = g(f(x))$.

Відображення

$$X \ni x \rightarrow g(f(x)) \equiv (g \circ f)(x) = z$$

називається композицією відображень f і g .

Теорема. Нехай функції з означення 2.2.3 неперервні. Відповідно, у точках x_0 і $y_0 = f(x_0)$. Тоді їхня композиція $g \circ f$ неперервна в точці x_0 .

Теорема. Нехай функції з означення 2.2.3 неперервні. Відповідно, у точках x_0 і $y_0 = f(x_0)$. Тоді їхня композиція $g \circ f$ неперервна в точці x_0 .

Застереження! Нехай $y = f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Оскільки $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$ функція має

границю при $x \rightarrow 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$. Якщо продовжити цю функцію в точці

$x = 0$ її граничним значенням, тобто, використовуючи для продовженої функції те ж саме позначення, $f(0) = 0$, одержимо неперервну в точці 0

функцію. Нехай $z = g(y) = |\operatorname{sgn} y| = \begin{cases} 1, y \neq 0, \\ 0, y = 0. \end{cases}$ Очевидно,

$\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = \lim_{y \rightarrow 0} |\operatorname{sgn} y| = 1 \neq g(0) = 0$. Тобто, функція g не є неперервною в точці

$y = 0$. Розглянемо композицію цих функцій: $z = (g \circ f)(x) = \left| \operatorname{sgn} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) \right|$. В

довільному виколотому околі точки 0 функція $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ приймає

значення 0 нескінченну кількість разів, і нульові значення в тих самих точках

приймає композиція $(g \circ f)(x) = \left| \operatorname{sgn} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) \right|$. В інших точках вона приймає

значення 1 . Значить, не виконано умову критерію Коші, а це означає, що композиція не має границі в точці 0 .

Отже, існування границь кожної функції (якщо функції не є неперервними) ще не гарантує існування границі композиції в деякій точці.

Класифікація точок розриву

1. $x_0 \notin D(f)$ і існує скінченна границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Така точка x_0

називається точкою усувного розриву. В такій ситуації можна продовжити функцію в цій точці її граничним значенням, і це продовження F буде неперервною функцією в цій точці:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ A, & x = x_0. \end{cases}$$

Приклад: Функція $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ не визначена у точці 0 , і існує границя

функції в цій точці, Отже, $x = 0$ є усувною точкою розриву функції. При доповненні її граничним значенням в цій точці одержуємо неперервну

функцію:
$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

2. x_0 називається точкою розриву 1-го роду, якщо існують скінченні значення $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$, $f(x_0)$, і хоча б два з них нерівні.

Приклад: $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -1, x < 0. \end{cases}$

Функція неперервна в усіх точках дійсної прямої крім точки 0, і ця точка є точкою розриву 1-го роду.

3. x_0 називається точкою розриву 2-го роду, якщо або хоча б одна одностороння границя нескінченна, або не існує границі в цій точці.

Приклади: $f(x) = \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{1}{x} = \pm \infty$. 0 – точка розриву 2-го роду.

$f(x) = \sin \frac{1}{x}$. 0 – точка розриву 2-го роду, оскільки в цій точці функція не має границі.

Задачі для самостійного розв'язання

Дослідити на неперервність наступні функції. Знайти точки розриву, якщо вони існують, і визначити їхній тип.

6.01. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, x \neq 2, \\ A, x = 2. \end{cases}$. Відповідь: Неперервна при $A = 4$.

6.02. $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, x \neq -1$, а $f(-1)$ - довільне дійсне число.

6.03. $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}, x \neq 0$, а $f(0)$ - довільне дійсне число. Відповідь: $x = 0$ - точка розриву 1-го роду.

6.04. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$. 6.05. $f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}}$. Відповідь: $x = 0, x = 1$ - точка

усувного розриву, $x = -1$ - точка розриву 2-го роду.

6.06. $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$. Відповідь: $x = \frac{1}{n}, n \neq 0, n \in \mathbb{Z}$ - точка розриву 1-го роду, $x = 0$ - точка розриву 2-го роду.

Наступні функції не визначені у точці $x = 0$. Довизначити кожну з них у нулі так, щоб ця нова функція була неперервною у нулі.

6.07. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. Відповідь: $\frac{3}{2}$.

6.08. $f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$. Відповідь: 0.

6.09. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$. Відповідь: e .

6.10. $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}$. Відповідь: 0.

II. Диференціальне числення функцій однієї змінної

7. Диференціали і похідні

Теоретичні відомості

Означення Функція f називається диференційовною у внутрішній точці x_0 області визначення, якщо в її прирості $\Delta f(x_0)$ можна виділити лінійну частину відносно приросту аргументу Δx :

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha(x_0, \Delta x),$$

де $\alpha(x_0, \Delta x) = o(\Delta x)$, тобто, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = 0$.

Властивості диференціалів і похідних

$$d(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha df(x) + \beta dg(x),$$

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

$$d(fg)(x) = g(x)df(x) + f(x)dg(x),$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)},$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Формула диференціювання складеної функції або композиції двох функцій, які будемо вважати диференційовними у відповідних точках.

$$g'_x(f(x)) = g'_y(f(x))f'(x).$$

Означення 3.1.2. Похідною $f'(x_0)$ функції f у точці x_0 називається

$$\text{границя } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Диференціювання оберненої функції. Нехай функція $x = f(y)$ диференційовна у точці y . Тоді обернена до неї функція $y = f^{-1}(x)$ диференційовна у точці x і для її похідної справедлива формула:

$$\left(f^{-1}(x)\right)'_x = \frac{1}{f'_y(y)}.$$

Таблиця похідних

$$1). f(x) = C = \text{const} \Rightarrow f'(x) = C' = 0.$$

$$2). (x^a)' = ax^{a-1}.$$

$$3). (a^x)' = a^x \ln a.$$

$$\text{Частинний випадок: } (e^x)' = e^x.$$

$$4). \log'_a x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Частинний випадок: $\ln' x = \frac{1}{x}$.

$$5). \sin' x = \cos x, \quad \cos' x = -\sin x.$$

$$6). \operatorname{tg}' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \operatorname{ctg}' x = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\operatorname{ctg}' x = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$7). \operatorname{ch}' x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

$$\operatorname{sh}' x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

$$8). (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$9). (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{aresh} x)' = \frac{1}{\operatorname{sh}' y} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$10). (\operatorname{arech} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}' y} = \frac{1}{\operatorname{sh} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Приклад Знайти похідну функції $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$.

$$\left(f(x)^{g(x)} \right)' = \left(e^{g(x) \ln f(x)} \right)' = e^{g(x) \ln f(x)} (g(x) \ln f(x))' =$$

$$= f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + \frac{f'(x)g(x)}{f(x)} \right) =$$

$$= f(x)^{g(x)-1} (f(x)g'(x) \ln f(x) + f'(x)g(x)).$$

Задачі для самостійного розв'язання

Виходячи з означення, знайти похідні наступних функцій;

7.01. а). $f(x) = x^2$, б). $f(x) = x^3$, в). $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, г). $f(x) = \operatorname{tg} x$,

е). $f(x) = \arcsin x$, ф). $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

г). Знайти $f'(2)$, якщо $f(x) = x^2 \sin(x-2)$.

7.02. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні наступних функцій

а). $f(x) = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$, б). $f(x) = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$,

в). $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$, г). $f(x) = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$, е). $f(x) = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b, a, b > 0$.

ф). $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, г). $f(x) = \frac{3}{2}(1 - \sqrt[3]{1+x^2}) + 3\ln(1 + \sqrt[3]{1+x^2})$,

з). $f(x) = x(\sin \ln x - \cos \ln x)$, и). $f(x) = \arccos(\cos^2 x)$, ж). $f(x) = \arccos \sqrt{1-x^2}$.

к). $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$, л). $f(x) = (\ln x)^x x^{-\ln x}$.

Відповіді 7.02. а). $\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$. б). $2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9)$.

в). $\frac{2x^2}{1-x^6} \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$. г). $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

е). $f(x) = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b \left(\ln \frac{a}{b} - \frac{a-b}{x}\right)$. ф). $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. г). $\frac{2x}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}$.

h). $2\sin \ln x$. i). $\frac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$. j). $\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$. k). $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

l). $(\ln x)^{x-1} x^{-(1+\ln x)} (x - 2\ln^2 x + x \ln x \ln(\ln x))$.

7.03. Довести формулу $f(x) = \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$.

Знайти похідні від наступних функцій.

7.04.

a). $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$ b). $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leq 1; \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$

c). $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ d). $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0; \\ \ln(1+x), & x \geq 0. \end{cases}$

Знайти похідну y' , якщо

7.05. Знайти похідні від наступних функцій.

a). $y = f(x^2)$, b). $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$,

c). $y = f(e^x) e^{f(x)}$, d). $y = f(f(x))$.

Відповіді 7.05. a). $2x f'(x^2)$. b). $2x(f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x))$.

c). $e^{f(x)}(e^x f'(e^x) + f'(x) f(e^x))$. d). $f'(x) f'(f(x)) f'(f(f(x)))$.

7.06. Знайти похідну $f'(a)$, якщо $f(x) = (x-a)g(x)$, де $g(x)$ неперервна у точці a .

7.07. Довести, що функція $f(x) = |x-a|g(x)$, де $g(x)$ неперервна у точці a , не має похідної у точці a .

7.08. Для наступних функцій знайти ліву та праву похідні:

a). $f(x) = |x|$, b). $f(x) = [x] \sin \pi x$, c). $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$.

d). $f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Відповіді 7.08.

a). $f'(x-0) = f'(x+0) = \operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$; $f'(-0) = -1$, $f'(0) = 1$.

b). $f'(x-0) = f'(x+0) = \pi[x] \cos \pi x$, $n \notin \mathbb{Z}$,

$f'(n-0) = (-1)^n \pi(n-1)$, $f'(n+0) = \pi n (-1)^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

7.09. Знайти похідні функцій, що задані параметрично.

a). $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}$, $y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}$, b). $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$,

c). $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, d). $x = a(1 - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$,

e). $x = e^{2t} \cos^2 t$, $y = e^{2t} \sin^2 t$, f). $x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$,

Відповіді 7.09.

a). $x = \sqrt[6]{\frac{(1 - \sqrt{t})^4}{t(1 - \sqrt[3]{t})^3}}$. b). -1 . c). $-\frac{b}{a} \operatorname{ctg} x$. d). $\operatorname{ctg} \frac{t}{2}$. e). $\operatorname{tg} t \operatorname{tg} \left(t + \frac{\pi}{4} \right)$.

f). $\operatorname{sgn} t$.

7.10. Знайти похідні y' функцій, що задані неявно.

a). $y^2 = 2px$. b). $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, c). $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$,

d). $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, e). $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

Відповіді 7.10.

a). $\frac{p}{y}$. b). $-\frac{b^2 x}{a^2 y}$. c). $-\sqrt{\frac{y}{x}}$. d). $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. e). $\frac{x+y}{x-y}$.

8. Геометричний зміст похідної

Рівняння дотичної до графіку функції f у точці $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0);$$

рівняння нормалі в цій точці:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

Задачі для самостійного розв'язання

8.01. В яких точках кривої $y = 2 + x - x^2$ а) дотична до неї паралельна до осі Ox , б) паралельна бісектрисі першого-третього координатних кутів?

Відповіді. а). $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$. б). $(0, 2)$.

8.02. Під яким кутом крива $y = \ln x$ перетинає вісь Ox ?

Відповідь. а). $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

8.03. Під якими кутами перетинаються криві $y = x^2$ і $x = y^2$?

Відповідь. $\frac{\pi}{4}$.

8.04. Довести, що довжина відрізка дотичної до астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, a > 0$, розташованого між осями координат, є стала величина.

8.05. Написати рівняння дотичної та нормалі до кривої

$$x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}$$

а) у точці $t = 0$, б) у точці $t = 1$.

Відповіді. а). $y = x, y = -x$. б). $3x - y - 1; x + 3y - 3 = 0$. с). $y = -x, y = x$.

8.06. Написати рівняння дотичної до циклоїди

$x = a(1 - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ у точці t_0 .

Відповідь. $y = 2a + (x - at_0) \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}$.

8.07. Написати рівняння дотичної до а) еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ у точці $M_0(x_0, y_0)$.

Відповіді. а). $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$. б). $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

9. Диференціали

Задачі для самостійного розв'язання

9.1. Знайти диференціали функцій:

а). $d\left(\frac{1}{x}\right)$, б). $d\left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right)$. в). $d\left(\frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}\right)$. г). $d\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)\right)$.

Відповіді. а). $-\frac{dx}{x^2}$. б). $\frac{dx}{a^2 + x^2}$. в). $\frac{dx}{x^2 - a^2}$. г). $\frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$.

9.2. Заміняючи приріст функції диференціалом, знайти наближене значення функцій:

а). $\sqrt[3]{1,02}$, б). $\sin 29^\circ$, в). $\operatorname{arctg} 1,05$, г). $\lg 11$.

Відповіді. а). 1,007. б). 0,4849. в). 0,8104. г). 1,043.

9.3. Довести наближену формулу $\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a}; a > 0$.

10. Похідні і диференціали вищих порядків

$$f''(x) = (f'(x))';$$

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x) \right)';$$

$$d^2(f(x)) = d(df(x)), d^n(f(x)) = d(d^{n-1}f(x)).$$

Формула Лейбница:

$$(u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x).$$

Задачі для самостійного розв'язання

10.1. Знайти другі похідні y'' наступних функцій:

a). $y = x\sqrt{1+x^2}$. b). $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. c). $y = e^{-x^2}$. d). $y = (1+x^2)\operatorname{arctg}x$.

e). $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. f). $y = \ln f(x)$.

Відповіді 10.1.

a). $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. b). $\frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$. c). $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. d). $\frac{2x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg}x$.

e). $y = \frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$. f). $y = \frac{1}{x}$.

10.2. Знайти другі похідні наступних функцій. Виразити їх через похідні функцій $u(x)$ і $v(x)$.

a). $y = uv$, b). $y = \ln \frac{u}{v}$, c). $y = u^v$, d). $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$.

Відповіді 10.2.

a). $u''v + 2u'v' + uv''$, b). $\frac{uu'' - (u')^2}{u^2} - \frac{vv'' - (v')^2}{v^2}$,

c). $y = u^v \left(\left(v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right)^2 + v \frac{uu'' - (u')^2}{u^2} + \frac{2u'v' - (v')^2}{u} + uu'' \right)$.

$$d) \frac{(u^2 + v^2)(uu'' + vv'') + (u'v - uv')^2}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

10.3. Знайти похідні y'_x, y''_{x^2} наступних функцій, які задані параметрично:

a). $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3$, b). $x = a \cos t, y = a \sin t$,

c) $x = a(1 - \sin t), y = a(1 - \cos t)$, d) $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$,

e) $x = f'(t), y = tf'(t) - f(t)$.

Відповіді 10.3.

a). $y''_{x^2} = \frac{3}{4(1-t)}$. b). $y''_{x^2} = -\frac{1}{a \sin^3 t}$. c) $y''_{x^2} = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}$.

d) $y''_{x^2} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2} \cos^3 \left(t + \frac{\pi}{4} \right)}$. e) $y''_{x^2} = \frac{1}{f''(t)}$.

10.4. Знайти похідні вказаного порядку

a). $y = \frac{a}{x^m}$. Знайти y''' , b). $y = \sqrt{x}$. Знайти $y^{(10)}$, c) $y = \frac{x^2}{1-x}$. Знайти $y^{(8)}$,

d) $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$. Знайти $y^{(100)}$, e) $y = \frac{e^x}{x}$. Знайти $y^{(10)}$, f) $y = x \ln x$. Знайти $y^{(5)}$,

g) $y = \frac{\ln x}{x}$. Знайти $y^{(5)}$, h) $y = (3x^2 - 2x - 5)e^{2x}$. Знайти $y^{(10)}$,

i) $y = e^{ax} \cos(bx)$. Знайти $y^{(m)}, m \in \mathbb{N}$. j) $y = \cos ax \operatorname{ch} bx$. Знайти $y^{(m)}$.

Відповіді 10.4.

a). $y''' = -\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}}$. b). $y^{(10)} = -\frac{17!!}{2^{10} x^9 \sqrt{x}}$. c) $y = \frac{8!}{(1-x)^9}$.

$$\text{d) } y^{(100)} = \frac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}. \text{ e) } y^{(10)} = e^x \sum_{k=1}^{10} (-1)^k \frac{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (11-k)}{x^{k-1}}.$$

$$\text{f). g). } y^{(5)} = -\frac{6}{x^4}. \text{ g) } y^{(5)} = \frac{274}{x^6} - \frac{120}{x^6} \ln x. \text{ h) } y = 2^9 (6x^2 + 56x + 105) e^{2x}.$$

$$\text{i) } y = \sum_{k=0}^m a^{m-k} b^k C_m^k e^{ax} \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}k\right).$$

$$\text{j) } y = \sum_{k=0}^m a^k b^{m-k} C_m^k \left(\frac{1+(-1)^k}{2} cha x + \frac{1-(-1)^k}{2} sha x \right) e^{ax} \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}(m-k)\right).$$

10.5. Знайти похідні порядку $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{a). } y = \sin^2 x. \text{ b). } y = \sin^3 x. \text{ c). } y = \cos ax \cos bx. \text{ d). } y = \cos^4 x + \sin^4 x.$$

$$\text{e). } y = \cos ax + \sin bx.$$

Відповіді 10.5.

$$\text{a). } y^{(n)} = -2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right). \text{ b). } y^{(n)} = \frac{3}{4} \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) - \frac{3^n}{4} \sin\left(3x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

$$\text{c). } y^{(n)} = \frac{(a-b)^n}{2} \cos\left((a-b)x + \frac{\pi n}{2}\right) + \frac{(a+b)^n}{2} \cos\left((a+b)x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

$$\text{d). } y^{(n)} = 4^{n-1} \cos\left(4x + \frac{\pi n}{2}\right). \text{ e). } y = \cos ax + \sin bx.$$

$$y^{(n)} = a^n \cos\left(ax + \frac{\pi n}{2}\right) + b^n \sin\left(bx + \frac{\pi n}{2}\right).$$

11. Монотонні функції. Деякі нерівності

Означення. Нехай $x_1 < x_2 \in D(f)$. Функція називається монотонно неспадною (позначення $f \uparrow$), якщо $f(x_1) \leq f(x_2)$; функція називається монотонно незростаючою (позначення $f \downarrow$), якщо $f(x_1) \geq f(x_2)$; функція

називається строго монотонно зростаючою (позначення $f \uparrow\uparrow$), якщо $f(x_1) < f(x_2)$; функція називається строго монотонно спадною (позначення $f \downarrow\downarrow$), якщо $f(x_1) > f(x_2)$

Твердження. Неперервна функція здійснює взаємно однозначне відображення відрізка $[a, b]$ на деяку підмножину дійсної прямої тоді і тільки тоді, коли вона строго монотонна.

Твердження. Монотонна функція має двосторонні границі в кожній внутрішній точці своєї області визначення.

Твердження. Для строго монотонної функції $f: X \rightarrow Y = f(X)$ існує обернена функція $f^{-1}: Y \rightarrow X$, яка має такий самий характер монотонності, що і f .

Твердження. Обернена до строго монотонної неперервної функції неперервна функція.

Задачі для самостійного розв'язання

11.1. Знайти проміжки монотонності функцій:

a). $y = 2 + x - x^2$. b). $y = \frac{2x}{1+x^2}$. c). $y = \frac{x^2}{2^x}$. d). $y = \frac{\sqrt{x}}{x+100}, x \geq 0$.

e). $y = x^n e^{-x}, n > 0, x \geq 0$.

Відповіді 11.1. a). $f \uparrow \forall x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right), f \downarrow \forall x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

b). $f \downarrow \forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty), f \uparrow \forall x \in (-1, 1)$.

c). $f \downarrow \forall x \in (-\infty, 0), f \uparrow \forall x \in \left(0, \frac{2}{\ln 2}\right)$.

d). $f \uparrow \forall x \in (0, 100), f \downarrow \forall x \in (100, \infty)$.

e). $f \uparrow \forall x \in (0, n), f \downarrow \forall x \in (n, \infty)$.

11.2. Довести нерівності, застосовуючи формулу скінченних приростів.

a). $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$. b). $py^{p-1}(x - y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x - y)$, якщо $0 < y < x, p > 1$.

11.3. Довести нерівності:

a). $e^x > 1 + x, x \neq 0$. b). $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x, x > 0$.

c). $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x, x > 0$. d). $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

e). $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$. f). $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}, x > 0$.

11.4*. Дослідивши функцію $f(t) = t^3 + 2t^2 + 2t$ на монотонність, розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 + 2x = y, \\ y^3 + 2y^2 + 2y = z, \\ z^3 + 2z^2 + 2z = x. \end{cases}$$

Відповідь 11.4. $x = y = z = 0, x = y = z = -1$.

11.5*. Розв'язати рівняння: $x^{x^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$.

11.6*. Розв'язати рівняння $x^x + \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 4 + \sqrt{\frac{1}{2}}$. Вказівка: дослідити на монотонність функції в лівій частині і скористатись симетрією рівняння.

11.7*. Розв'язати рівняння $11^{\log_6(2x-1)} - 6^{\log_{11}(2x+4)} = 5$. Вказівка: зобразити праву частину у вигляді: $5 = 11^{\log_{11}(2x+4)} - 6^{\log_6(2x-1)}$ і звести до рівняння з монотонною функцією.

12. Опуклість

Теоретичні відомості

Означення Нехай $D(f)=[a,b]$, Функція називається опуклою (або опуклою униз), якщо для довільного проміжку $[x_1, x_2] \subset [a,b]$ і двох чисел $\theta_1, \theta_2 \geq 0, \theta_1 + \theta_2 = 1$ має місце нерівність (Ієнсена)

$$f(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2) \leq \theta_1 f(x_1) + \theta_2 f(x_2).$$

Функція називається угнутою (опуклою уверх), якщо при тих самих умовах має місце нерівність Ієнсена

$$f(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2) \geq \theta_1 f(x_1) + \theta_2 f(x_2).$$

Теорема. Нехай функція f неперервна на проміжку $[a,b]$ і має на ньому скінченну похідну. Для її опуклості униз необхідно і достатньо, щоб її похідна була неспадною.

Теорема. Для опуклості двічі диференційовної функції униз (угору) необхідно і достатньо, щоб її друга похідна на проміжку була невід'ємною (недодатною). Якщо ж $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), то цього достатньо для того, щоб функція була строго опуклою униз (угору).

Теорема. Диференційовна функція опукла униз тоді і тільки тоді, коли її графік лежить не нижче дотичної, що проведена в довільній його точці.

Для строгої опуклості униз необхідно і достатньо, щоб графік лежав вище довільної дотичної за виключенням точки дотику.

Означення. Нехай функція диференційовна в околі точки x_0 і при $x < x_0$ і $x > x_0$ вона має різні характери опуклості, то $M_0(x_0, f(x_0))$ називається точкою перегину графіку.

Задачі для самостійного розв'язання

12.1. Знайти проміжки опуклості наступних функцій:

а). $f(x) = 3x^2 - x^3$. б). $f(x) = \frac{a^2}{a^2 + x^2}$, $a > 0$. с). $f(x) = x + x^{\frac{5}{3}}$.

d). $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. e). $f(x) = x + \sin x$. f). $f(x) = \ln(1+x^2)$.

g). $f(x) = x^x$.

12.2. Дослідити на опуклість наступні функції на інтервалі $(0, \infty)$:

a). $f(x) = x^a$, $a > 1$. b). $f(x) = x^a$, $0 < a < 1$. c). $f(x) = e^x$.

d). $f(x) = e^x$. e). $f(x) = \ln x$. f). $f(x) = x \ln x$.

12.3*. Розв'язати рівняння $x^x = 1 + \ln x$. Вказівка: дослідити на опуклість функції в обох частинах рівняння.

Відповіді 12.1.

a). b). $\forall x \in (-\infty, 1)$ опуклість униз, $\forall x \in (1, \infty)$ опуклість угору; $x = 1$ - точка перегику.

b). $\forall |x| < \frac{a}{\sqrt{3}}$ опуклість угору, $\forall |x| > \frac{a}{\sqrt{3}}$ опуклість униз; $x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$ - точки перегику.

c). $\forall x \in (-\infty, 0)$ опуклість угору, $\forall x \in (0, \infty)$ опуклість униз; $x = 0$ - точки перегику.

d). Опуклість униз.

e). $\forall x \in (2\pi k, 2\pi(k+1))$ опуклість угору, $\forall x \in (2\pi(k+1), 2\pi(k+2))$ опуклість униз; $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ - точки перегику.

f). $\forall x \in (-1, 1)$ опуклість униз, $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ опуклість угору; $x = \pm 1$ - точка перегику.

g). Опуклість униз $x \in (0, \infty)$.

12.2. Дослідити на опуклість наступні функції на інтервалі $(0, \infty)$:

a). $f(x) = x^a$, $a > 1$. b). $f(x) = x^a$, $0 < a < 1$. c). $f(x) = e^x$.

d). $f(x) = e^{-x}$. e). $f(x) = \ln x$. f). $f(x) = x \ln x$.

Відповіді 12.2. a). Опуклість униз. b). Опуклість угору. c). Опуклість униз.

d). Опуклість униз. е). Опуклість угору. f). Опуклість униз.

13. Розкриття невизначеностей. Правила Лопіталя

Теоретичні відомості

Теорема. Нехай функції f і g визначені у виколотому околі точки $a: \mathring{B}_\delta(a)$.

Нехай $\exists f'(x), g'(x), g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathring{B}_\delta(a); \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$,

$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$ Тоді і $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = K$.

Теорема. Нехай функції f і g визначені на $[c, \infty), c > 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0; \exists f'(x), g'(x), g'(x) \neq 0$. Нехай існує границя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Тоді $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$.

Теорема. Нехай функції f і g визначені в околі точки $a: B_\delta(a)$. Нехай

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty, \exists f'(x), g'(x), g'(x) \neq 0, \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$.

Тоді $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = K$.

Задачі для самостійного розв'язання

13.1. Знайти границі функцій

Вказівка: в деяких прикладах спочатку треба зробити алгебраїчні перетворення, перейти до логарифмів виразів тощо.

a). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x}{x^2}$. b). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$. c). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan 4x - 12 \tan x}{3 \sin 4x - 12 \sin x}$.

$$d). \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}. e). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}. f). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}.$$

$$g). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}. h). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}. i). \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}.$$

$$j). \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right)^{\frac{1}{x^4}}. k). \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right). l). \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$m). \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x} \right)^{\frac{1}{x^2}}. n). \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}.$$

Відповіді 13.1. a). 1. b). 2. c). -2. d). $\frac{1}{3}$. e). $\frac{1}{6}$. f). $\frac{1}{2}$. g). 1. h). $\frac{1}{6} \ln a$. i). -2.

$$j). e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a - \ln^2 b)}. k). \frac{1}{2}. l). e^{\frac{1}{6}}. m). e^{-1}.$$

14. Формула Тейлора

Теоретичні відомості

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x).$$

Залишковий член формули Тейлора у формі Коші:

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n (x - x_0).$$

Залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа:

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Формула Тейлора з залишковим членом у формі Пеано:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Формула Тейлора (Маклорена) для деяких елементарних функцій з залишковим членом у формі Пеано

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$f(x) = (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

Задачі для самостійного розв'язання

14.1. Написати розклад за формулою Тейлора наступних функцій до членів вказаного порядку включно:

a). $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ до члена, що містить x^4 . Чому дорівнює $f^{(4)}(0)$?

b). $f(x) = \sqrt[m]{a^m + x}$ ($a > 0$) до члена, що містить x^2 .

c). $f(x) = \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$ до члена, що містить x^3 .

d). $f(x) = \sin(\sin x)$ до члена, що містить x^3 .

e). $f(x) = \operatorname{tg} x$ до члена, що містить x^5 .

f). $f(x) = \ln(\cos x)$ до члена, що містить x^6 .

Відповіді 14.1.

a). $f(x) = 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$. b). $f(x) = a + \frac{x}{ma^{m-1}} - \frac{(m-1)x^2}{2m^2a^{\frac{2}{m}-1}} + o(x^2)$.

c). $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + x^3 + o(x^3)$. d). $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

e). $f(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$. f). $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)$.

14.2. Використовуючи розклад за формулою Тейлора, знайти границі функцій:

$$\text{a). } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}. \text{ b). } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}. \text{ c). } \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}).$$

$$\text{d). } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}). \text{ e). } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right).$$

$$\text{f). } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right). \text{ g). } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5} \right). \text{ h). } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}.$$

$$\text{i). } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(tgx) - x}{x^3}. \text{ j). } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - ctgx \right). \text{ k). } \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right).$$

Відповіді 14.2.

$$\text{a). } -\frac{1}{12}. \text{ b). } \frac{1}{3}. \text{ c). } -\frac{1}{4}. \text{ d). } \frac{1}{3}. \text{ e). } \frac{1}{6}. \text{ f). } 0. \text{ g). } \frac{19}{90}. \text{ h). } \frac{1}{2}. \text{ i). } \frac{1}{2}. \text{ j). } \frac{1}{3}. \\ \text{k). } \frac{1}{2}.$$

14.3. При якому виборі коефіцієнтів a і b функція

$$f(x) = x - (a + b \cos x) \sin x$$

буде нескінченно малою порядку x^5 у околі нуля?

$$\text{Відповідь 14.3. } a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}.$$

14.4. Підібрати коефіцієнти a і b так, щоб у околі нуля мала місце асимптотична рівність

$$ctgx = \frac{1 + ax^2}{x + bx^3} + O(x^5).$$

Відповідь 14.4. $a = -\frac{2}{5}, b = -\frac{1}{15}$.

14.5. Підібрати коефіцієнти a, b, c, d так, щоб у околі нуля мала місце асимптотична рівність

$$e^x = \frac{1 + ax + bx^2}{1 + cx + dx^2} + O(x^5).$$

Відповідь 14.5. $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{12}, c = -\frac{1}{2}, d = \frac{1}{12}$.

15. Екстремум функцій

Теоретичні відомості

Нехай точка x_0 - підозрювана на екстремум, причому,

$$f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + (x - x_0)^n \alpha(x, x_0) = \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x, x_0) \right) (x - x_0)^n,$$

$$\alpha(x, x_0) = o(1).$$

нехай $n = 2k$. Якщо $f^{(2k)}(x_0) > 0$, то x_0 є точкою строгого локального мінімуму; якщо $f^{(2k)}(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$, це точка строгого локального максимуму.

Задачі для самостійного розв'язання

15.1. Дослідити на локальний екстремум наступні функції:

a). $f(x) = 2 + x - x^2$. b). $f(x) = x^m(1-x)^n$, $m, n \in \mathbb{N}$. c). $f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$.

d). $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$. e). $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$. f). $f(x) = x\sqrt[3]{x-1}$.

g). $f(x) = xe^{-x}$. h). $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$. i). $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.

Відповіді 15.1.

a). $x_{\max} = \frac{1}{2}, f_{\max} = \frac{9}{4}$.

b). $x_{\min} = 0, f_{\min} = 0 \forall m = 2k; x_{\max} = \frac{m}{m+n}, f_{\max} = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} \forall m = 2k+1, k \in \mathbb{N}$.

c). $x_{\min} = \frac{5-\sqrt{13}}{6}; x_{\max} = 1, y_{\max} = 0; x_{\min} = \frac{5+\sqrt{13}}{6}$. d). $x_{\min} = \frac{7}{5}$. e). $x_{\max} = 1$, мінімум

на границі: $x_{\min} = 0, x_{\min} = 2$. f). $x_{\min} = \frac{3}{4}$. g). $x_{\max} = 1$. h). $x_{\min} = 1, x_{\max} = 4e^{-2}$.

i). $x_{\min} = e^{-2}, x = +0$ - максимум на границі.

15.2. Знайти найменше і найбільше значення функції на відрізку:

a). $f(x) = 2^x, x \in [-1, 5]$. b). $f(x) = x^2 - 4x + 6, x \in [-3, 10]$.

c). $f(x) = |x^2 - 3x + 2|, x \in [-10, 10]$.

Відповіді 15.2.

a). $\frac{1}{2}; 32$. b). $2; 6$. c). $0; 132$.

15.3. Знайти точні верхні і нижні межі функцій на інтервалі $(0, \infty)$:

a). $f(x) = xe^{-0,01x}$. b). $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$. c). $f(x) = e^{-x^2} \cos(x^2)$.

Відповіді 15.3.

a). $0; \frac{100}{e}$. b). $0; \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})$. c). $-\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}; 1$.

15.4. Довести нерівність $\frac{2}{3} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \leq 2, x \in (-\infty, \infty)$.

15.5. Знайти мінімум функції $f(x) = \max\{2|x|; |x+1|\}$.

16. Побудова графіків

Теоретичні відомості

Схема дослідження функції

1). Знаходження області визначення функції $D(f)$.

2). Знаходження асимптот.

Якщо існує $a \notin D(f)$, знаходимо $K = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Якщо $K = \pm\infty$, робимо

висновок, що $x = a$ - вертикальна асимптота.

За формулами (5.2.1) знаходимо параметри похилих або горизонтальних асимптот, якщо вони існують. Треба відзначити, асимптоти можуть бути різні при $x \rightarrow +\infty$ і $x \rightarrow -\infty$.

3). Знаходження областей знакосталості і нулів функції.

4). Знаходження областей монотонності функції та дослідження на екстремум.

5). Дослідження на опуклість та знаходження точок перегину.

6). Для періодичних функцій знаходження періоду.

7). Для більш точної побудови графіку треба знайти односторонні похідні у скінченних особливих точках для визначення, під яким кутом графік входить у такі точки.

Задачі для самостійного розв'язання

16.1. Побудувати графіки функцій:

a). $f(x) = (x+1)(x-2)^2$. b). $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$. c). $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$.

d). $f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$. e). $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$. f). $f(x) = (1+x^2)e^{-x^2}$.

g). $f(x) = \sqrt{x^2+1} \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. h). $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

16.2. Побудувати криві, що задано параметрично:

a). $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3$. b). $x = \frac{t^2}{t-1}, y = \frac{t}{t^2-1}$. c). $x = t + e^{-t}, y = 2t + e^{-2t}$.

d). $x = a \cos 2t, y = a \cos 3t, a > 0$. e). $x = \cos^4 t, y = \sin^4 t$. f). $x = t \ln t, y = \frac{\ln t}{t}$.

16.3. Записавши рівняння кривих у параметричній формі, побудувати ці криві:

a). $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$. b). $x^3 + y^3 - 3axy = 0 (a > 0)$. c). $x^2 y^2 = x^3 - y^3$.

16.4. Побудувати графіки функцій, що задані у полярній формі:

a). $\rho = a \sin 3\varphi, a > 0$. b). $\rho = a + b \cos \varphi, 0 < a \leq b$. c). $\rho = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}, a > 0$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Математичний аналіз: Диференціальне числення функцій однієї змінної [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад. Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,63 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 165 с.
<https://campus.kpi.ua/tutor/index.php?mode=mob&show&irid=197938>
2. Математичний аналіз. Диференціальне числення функцій однієї змінної: Методичні вказівки до виконання розрахункових робіт [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки», освітньої програми «Інтелектуальні сервіс-орієнтовані розподілені обчислення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,38 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 74 с.
<https://ela.kpi.ua/handle/123456789/42337>
3. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: підруч. для студ. вищ. навч. закл. / А. Я. Дороговцев. – К.: "Либідь". 1993. 323 с.
4. Шкіль. М. І. Математичний аналіз: підручн. у 2-х ч. /М. І. Шкіль. – Київ: «Вища школа», 2005. – 447 с.
5. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П Дубовик., І. І. Юрик. - 4-те вид. - Київ: Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с.
6. Вища математика. Збірник задач: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін. – Київ: А.С.К., 2011. – 480 с.