

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Факультет менеджменту та маркетингу
Кафедра математичного моделювання економічних систем

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ТА ТЕОРІЯ ІГОР В ЕКОНОМІЦІ

Методичні вказівки
до виконання курсової роботи

освітнього ступеня	бакалавр
галузь знань	0305 Економіка та підприємництво
напрямок підготовки	6.030502 Економічна кібернетика

КИЇВ – 2016

Оптимальне керування та теорія ігор в економіці: методичні вказівки щодо виконання курсової роботи для студентів галузі знань 0305 – «Економіка та підприємництво» напряму підготовки 6.030502 «Економічна кібернетика» усіх форм навчання / Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»; [уклад. В.О. Капустян, І.О. Пишнограєв]. – Київ: НТУУ «КПІ», 2016. – 25 с.

*Гриф надано Вченою радою ФММ
(Протокол № 4 від 28.11.2016 р.)*

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ТА ТЕОРІЯ ІГОР В ЕКОНОМІЦІ

Методичні вказівки до виконання курсової роботи

для студентів всіх форм навчання

освітнього ступеня “бакалавр”

галузь знань
напрямок підготовки

0305 Економіка та підприємництво
6.030502 Економічна кібернетика

Укладачі:

Капустян Володимир Омелянович, д.ф.-м.н., проф.,
Пишнограєв Іван Олександрович, асистент

Відповідальний редактор: к.ф.-м.н., доц. Пасенченко Ю.А.

Рецензент: д.ф.-м.н., проф. Касьянов П.О.

ЗМІСТ

1. Мета і завдання курсової роботи.....	4
2. Структура і обсяг курсової роботи.....	7
3. Зміст основних частин курсової роботи.....	8
4. Правила оформлення курсової роботи.....	11
5. Захист курсової роботи.....	14
6. Додатки.....	16

1. Мета і завдання курсової роботи

Метою підготовки курсової роботи є поглиблення студентом теоретичних і практичних знань з дисципліни «Оптимальне керування та теорія ігор в економіці» та їх систематизація; набуття досвіду самостійного аналізу праць вітчизняних та зарубіжних фахівців, вивчення та аналіз питань, пов'язаних з різними аспектами теорії оптимального керування та ігор; методики та інструментарію їх розв'язання та аналізу; вироблення умінь застосовувати їх для вирішення конкретних економічних задач.

Виконання курсової роботи з курсу «Оптимальне керування та теорія ігор в економіці» та її захист є формою контролю рівня знань студентів з цієї дисципліни.

Працюючи над курсовою роботою, студент повинен:

- використовувати набуті у процесі навчання знання для розв'язання конкретної проблеми шляхом побудови та застосування кількісних та аналітичних методів, інформаційних систем;
- працювати з науковими статтями, монографіями, з методичними та інструктивними матеріалами, статистичною інформацією, критично аналізувати та виявляти їхні позитивні та негативні сторони;
- узагальнювати та аналізувати фактичний матеріал, виявляючи існуючі тенденції та суттєві чинники щодо цілей дослідження;
- застосовувати сучасний інструментарій та наукову методику дослідження з використанням відповідних математичних методів, інформаційних засобів і технологій;
- уміти на основі відомих динамічних моделей економічних систем формулювати неокласичну (екстремальну) задачу та розв'язувати її засобами теорії оптимального керування та теорії ігор.

Курсова робота є результатом самостійної роботи студента за виданою темою. Вона має відрізнятися логічно-послідовним викладом матеріалу, стислістю і точністю формувань, практичною спрямованістю рекомендацій, чіткістю висновків

Результати конкретного курсового дослідження виносяться на

прилюдний захист перед комісією. Такий підхід забезпечує не лише добре володіння підготовленим матеріалом, а й виробляє вміння відстоювати свої переконання, наукові погляди. Під час захисту курсової роботи студенти вчаться стисло й доступно викладати основні результати свого дослідження, виробляти в собі навички публічного виступу й ведення наукової полеміки.

Знання та навички здобуті при виконанні курсової роботи можуть бути використані студентами в подальшій науково-дослідній роботі, при виконанні дипломної роботи та в практичній діяльності.

У процесі підготовки та написанні курсової роботи виділяють такі етапи:

- вибір, обґрунтування та затвердження теми дослідження (протягом двох тижнів з початку семестру чи після проведення установки щодо курсової роботи);
- складання студентом плану курсової роботи та погодження його із викладачем (протягом трьох тижнів з початку семестру чи після проведення установки щодо курсової роботи);
- підбір та вивчення спеціальної літератури;
- формування студентом інформаційної бази для виконання курсової роботи;
- виконання й оформлення курсової роботи;
- подання курсової роботи на кафедру для перевірки (не пізніше, ніж за два тижні до дати захисту курсової роботи);
- за потреби доопрацювання курсової роботи відповідно до рекомендацій та зауважень викладача (лектора);
- захист курсової роботи перед комісією.

В процесі підготовки та написання курсової роботи студент може отримувати консультації у викладача (лектора) відповідно до графіку проведення консультацій працівників кафедри.

Студент має виконати курсову роботу згідно з графіком та вчасно подати її на кафедру. Курсові роботи, подані на кафедру з порушенням встановлених графіком кроків без поважних причин не розглядаються і повертаються студентам.

Орієнтована тематика курсових робіт наведена у Додатку А.

Студентам видаються теми курсових робіт із переліку, рекомендованого кафедрою.

Після визначення тем студенту видається завдання на курсову роботу (Додаток Б), відповідно до якого студент складає план роботи і приступає до його виконання.

В деяких випадках складати план курсової роботи доречно після підбору та вивчення літературних джерел та формування масиву вхідної інформації, шляхом погоження такого порядку з викладачем (лектором).

Складений студентом план курсової роботи погоджується з викладачем. До плану курсової роботи можна вносити зміни, але їх обов'язково треба погоджувати з викладачем (лектором).

2. Структура і обсяг курсової роботи

Курсова робота як оригінальне теоретико-прикладне дослідження повинна мати певну логіку побудови, послідовність, завершеність.

Рекомендується така структура курсової роботи:

Титульний лист (додаток В)

Зміст

Вступ

Розділ 1. Теоретичні відомості

Розділ 2. Розв'язання математичної задачі

2.1. Постановка задачі

2.2. Підхід до аналітичного розв'язання

2.3. Дискретизація вихідної задачі

Розділ 3. Розв'язання економічної задачі

3.1. Постановка задачі

3.2. Розв'язання задачі

Висновки та пропозиції.

Список використаної літератури.

Додатки.

Загальний обсяг курсової роботи – близько 25 сторінок друкованого тексту, не враховуючи списку літератури і додатків.

Курсова робота складається із текстової частини, графіків, рисунків, таблиць, додатків, форм вхідних і вихідних документів, структурних схем, програм тощо.

Мова курсової роботи – державна, стиль – науковий.

3. Зміст основних частин курсової роботи

Кожний розділ слід починати з нової сторінки, нумерувати сторінки у правому верхньому кутку (на титульній сторінці номер не ставиться). Рекомендована література представлена у Додатку Г.

ЗМІСТ включає найменування всіх розділів, підрозділів і пунктів (якщо вони мають найменування) із зазначенням сторінок, з яких починається викладання матеріалу розділу чи пункту.

ВСТУП. У ньому необхідно наголосити на актуальності розробленої теми, її важливості. Зазначити мету, завдання, об'єкт дослідження, основні джерела інформації та методи дослідження, ступінь розробки проблем вітчизняними та зарубіжними вченими.

Найбільш важлива частина вступу - визначення мети та завдань дослідження. Мету дослідження визначають на основі актуальності теми та з визначенням кінцевого результату роботи. Вона формулюється лаконічно, одним реченням і повинна впливати з теми роботи. Оскільки мета - це поняття ширше, ніж завдання, тут часто вживаються означення комплексний, всебічний (комплексне дослідження, всебічне вивчення). Формулювання завдань не повинні повторювати іншими словами мету дослідження. Завдання потрібно не лише правильно й чітко сформулювати, а й поставити їх у певному порядку, так, щоб була зрозуміла програма дослідження.

Об'єкт дослідження - частина об'єктивної реальності, процес або явище, що породжує проблемну ситуацію і обране для вивчення (економічна проблема). Як правило, об'єкт визначають як коло конкретних суспільних відносин, що буде досліджуватись у роботі.

У вступі подається перелік методів дослідження не відірвано від змісту роботи, а саме коротко та змістовно визначаючи, що саме досліджувалось тим чи іншим методом. Це дає змогу пересвідчитись в логічності та прийнятності вибору саме цих методів.

Інформаційною базою дослідження слугують усі види інформації, які використовувалися при написанні курсової роботи (закони, підзаконні акти, наукові публікації, аналітичні матеріали, статистичні щорічники, звітність

підприємств тощо).

Обсяг вступу не повинен перевищувати трьох сторінок.

РОЗДІЛ 1. Теоретичні засади дослідження передбачають розкриття стану напрацювань з обраної теми. Слід подати критичний огляд літературних джерел, викласти основні теоретичні та методичні положення теми, проблемні питання, дискусійні та невирішені аспекти, сформулювати власне ставлення автора до них. Важливе місце аналізу визначених проблем, використовуваних у наступних частинах роботи. Автор має продемонструвати свою обізнаність з методами аналізу. Обсяг першого розділу не повинен перевищувати десятих сторінок.

РОЗДІЛ 2. В розділі приведена математична постановка поставленої задачі. Визначається, якими методами вона буде розв'язана.

Спочатку повністю надається перелік завдань та математична модель, що обумовлюються варіантом курсової роботи. У вигляді завдань можуть бути задачі оптимального керування чи диференційні ігри.

Наступним кроком автор представляє певні математичні викладки, які характеризують особливості отриманого завдання. Наприклад, для задач оптимального керування необхідно навести принцип максимуму Понтрягіна чи рівняння Беллмана.

Останнім етапом проводиться дискретизація вихідної моделі для застосування чисельних алгоритмів її розв'язання. Скорочений приклад дискретизації для систем диференціальних рівнянь з фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії наведено у Додатку Д.

Обсяг другого розділу не повинен перевищувати 10 сторінок

РОЗДІЛ 3. В цьому розділі для запропонованої в завданні моделі приводиться її економічна інтерпретація. Тобто задача розглядається не в загальному вигляді, а з заданими функціями, що мають певний зміст. На основі результатів розділу 2 проводиться дискретизація моделі економічної задачі та виконується її розв'язання за допомогою математичних пакетів чи написаною програмою на будь-якій мові програмування. Приклад розв'язання задачі та перевірка умов оптимальності наведені у Додатку Є.

Обсяг третього розділу не повинен перевищувати 10 сторінок.

У **ВИСНОВКАХ ТА ПРОПОЗИЦІЯХ** треба викласти у вигляді коротких тез основні положення виконаної роботи. Ознайомлення з текстом висновків має сформулювати в читача уявлення про ступінь реалізації автором курсової роботи поставленої мети і завдань. Обсяг висновків – 1-2 с.

У **СПИСКУ ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ** необхідно зібрати у повному обсязі інформацію із законодавчих, нормативних документів, статистичних збірників. Проаналізувати спеціальну літературу, internet – ресурси, періодичні видання. Зібраний матеріал систематизується відповідно до плану курсової роботи. У списку використаних джерел рекомендується включати до 15 найменувань.

ДОДАТКИ. Кожний додаток, наведений у роботі, повинен мати свій порядковий номер і посилання на нього в тексті. У додатках розміщуються громіздкі таблиці допоміжного характеру, блок-схеми, зразки анкет соціологічного опитування, інформаційні матеріали, які становлять базу аналітичних досліджень згідно з обраною темою. Крім того, у додатки можна включати документи *підприємства*, інструкції, ілюстрації допоміжного характеру тощо, на які, якщо необхідно, в роботі наводяться посилання.

4. Правила оформлення курсової роботи

Роботу оформляють згідно з держстандартом України ДСТУ 3008-95 «Документація. Звіти у сфері науки і техніки. Структура і правила оформлення», а саме:

Друк тексту - лист білого паперу А4 (210x297 мм); комп'ютерний набір: шрифт Times New Roman, розмір шрифту – 14, інтервал – 1.5; параметри сторінки: ліве поле – 20мм, праве - 10мм, верхнє – 20 мм, нижнє – 20 мм.

Ілюстративний матеріал (схеми, діаграми, графіки тощо) слід подавати безпосередньо після посилання на нього в тексті, де він згаданий вперше, або на наступній сторінці і позначати словом «Рисунок _», «Таблиця _» і т.п., нумерувати послідовно. Номер рисунка та його назву розміщують під рисунком. Нумерацію рисунків і таблиць наводять арабськими цифрами без знака №. Сторінки курсової роботи, на яких наведено ілюстративний матеріал, включають до загальної нумерації сторінок. Таблиця має містити: дані, необхідні для вивчення певного явища; загальний та внутрішні заголовки. Загальний заголовок таблиці стисло характеризує її зміст, а також період, за який наведено дані. Внутрішні заголовки зазначають, які показники аналізуються у відповідних рядках і графах таблиці, в яких одиницях виміру. Таблиці нумерують послідовно (за винятком тих, що розміщені у додатках) у межах розділу. У разі перенесення таблиці на іншу сторінку, пишуть «Продовження табл. _». Кількість ілюстрацій у курсовій роботі визначається її змістом і доцільно для надання тексту зрозумілості та конкретності.

Формули нумеруються послідовно за текстом роботи; номер формули пишуть у круглих дужках на цьому ж рядку з правого боку сторінки; пояснення значень символів, числових коефіцієнтів розміщують безпосередньо під формулою у тій послідовності, в якій вони наведені у формулі, та кожне з нового рядка. Перший рядок пояснення починається зі слова «де» без двокрапки. Формули слід розміщувати у тексті на окремому

рядку, залишаючи між ними не менше одного вільного рядка.

Першоджерела формул зазначаються у квадратних дужках.

При оформленні курсової роботи слід також дотримуватися вимог держстандарту України ДСТУ БА.2.-4-4-99 (ГОСТ 21.101-97) «Основні вимоги до робочої документації».

Титульну сторінку, яка є першою сторінкою курсової роботи, включають до загальної нумерації сторінок, але не нумерують. Нумерацію наступних сторінок подають арабськими цифрами, які проставляють у правому верхньому куті.

Зміст складається з усіх частин курсової роботи та номерів їх початкових сторінок. Його розміщують після титульної сторінки і нумерують як другу сторінку.

Кожна частина курсової роботи повинна мати заголовок відповідно до плану роботи. Відстань між заголовком і текстом дорівнює трьом інтервалам основного тексту.

На додатки, які містяться у курсовій роботі, мають бути посилання у текстовій частині роботи. Додаток повинен мати заголовок, надрукований угорі малими літерами з першої великої симетрично відносно тексту сторінки. З правого боку рядка малими літерами з першої великої друкується слово «Додаток _» і велика літера, що позначає додаток.

Посилання на використану *літературу* слід наводити у квадратних дужках, наприклад [X, с.N] , де X – порядковий номер літературного джерела у списку, N – сторінка цитованого джерела.

Список використаних джерел слід розміщувати у такій послідовності: спочатку (у хронологічному порядку) Закони України, далі – Укази Президента України, постанови Кабінету Міністрів України, за ними літературні джерела в алфавітному порядку: монографії, підручники, посібники, брошури, журнальні та газетні статті. У кінці списку наводять іншомовні та електронні джерела інформації. Дані про книги обов'язково містять прізвище та ініціали автора, заголовок, місце видання, видавництво,

рік видання, кількість сторінок. Дані про журнальні або газетні статті – прізвище та ініціали автора, заголовок, назву періодичного видання, серію, рік випуску, номер видання, сторінки.

У списку використаних джерел наукові праці записуються тією мовою, якою вони видані.

Список оформлюється відповідно до вимог держстандартів: «Библиографическое описание документа. Общие требования и правила к составлению». ГОСТ 7.1-84 та «Скорочення слів в укр. мові у бібліографічному описі. Загальні вимоги та правила». ДСТУ 3582-97.

5. захист курсової роботи

Студент має виконати курсову роботу і подати її на кафедру у термін, передбачений графіком навчального процесу, але не пізніше 10 днів до захисту.

Спочатку виконана курсова робота реєструється на кафедрі та передається викладачу. Викладач перевіряє роботу. Якщо робота не відповідає темі, завданню та вимогам до курсової роботи, викладач повертає роботу з позначкою «на доопрацювання». У такому разі викладач не допускає студента до захисту та встановлює терміни усунення недоліків. Тільки після доопрацювання, з урахуванням зауважень, викладач допускає роботу до захисту.

Захист курсової роботи проводиться комісією передбаченою розпорядженням по кафедрі. При захисті курсової роботи студент має продемонструвати глибокі знання з досліджуваної теми, вміти чітко викладати власні думки, використовувати ілюстративний матеріал, аргументовано відповідати на питання.

Оцінювання курсової роботи здійснюється за національною шкалою (відмінно, добре, задовільно, незадовільно) та за шкалою ECTS (A, B, C, D, E, FX). На оцінку впливають глибина, змістовність і манера захисту, тобто якість розробленої роботи та її оформлення. Позитивна оцінка заноситься до залікової книжки.

Рейтингова оцінка з курсової роботи матиме дві складові. Перша (стартова) характеризує роботу студента з курсового проектування та її результат – якість пояснювальної записки та графічного матеріалу. Друга складова характеризує якість захисту студентом курсового проекту. Розмір шкали першої складової дорівнює 40 балів, а другій складової – 60 балів.

Система рейтингових балів

1. Стартова складова (r_1):

- своєчасність виконання графіку роботи – 5-3 балів;
- сучасність та обґрунтування прийнятих рішень – 12-7 балів;

- правильність застосування методів аналізу і розрахунку – 10-6 балів;
- якість оформлення, виконання вимог нормативних документів – 6-4 балів;
- якість графічного матеріалу і дотримання вимог ДСТУ – 7-4 балів.

2. Складова захисту курсової роботи (r_2):

- ступінь володіння матеріалом – 10-6 балів;
- повнота аналізу можливих варіантів – 15-9 балів;
- ступінь обґрунтування прийнятих рішень – 20-12 балів;
- вміння захищати свою думку – 15-9 балів.

Сума стартових балів і балів за екзаменаційну контрольну роботу переводиться до екзаменаційної оцінки згідно з таблицею:

Бали $R = r_1 + r_2$	ECTS-оцінка	Екзаменаційна оцінка
95-100	A	відмінно
85-94	B	добре
75-84	C	
65-74	D	задовільно
60-64	E	
Менше 60	Fx	незадовільно
не зарахована робота, або $r_C < 25$	F	не допущено

Захищені курсові роботи передаються на кафедру, де вони зберігаються згідно з вимогами до такого виду документів.

Студент, який без поважної причини не подав курсової роботи у зазначений термін або не захистив її, вважається таким, що має академічну заборгованість. При отриманні незадовільної оцінки студент за рішенням комісії виконує курсову роботу за новою темою або переопрацьовує попередню роботу у термін, визначений деканом факультету («Положення про організацію навчального процесу в НТУУ «КПІ», 2004 р., ст.21).

Підсумки захистів курсових робіт обговорюються на засіданнях кафедри математичного моделювання економічних систем.

**Орієнтовна тематика курсових робіт з дисципліни «Оптимальне керування та теорія ігор в економіці»
для студентів напряму підготовки 6.030502 (шрифт групи – УК) всіх форм навчання**

1. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з фіксованим часом і фіксованими крайовими умовами.
2. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з нефіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії.
3. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з нефіксованим часом і фіксованими крайовими умовами.
4. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з запізненням по аргументу та з фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії.
5. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з запізненням по аргументу та з фіксованим часом і фіксованими крайовими умовами.
6. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з запізненням по аргументу та з нефіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії.
7. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з запізненням по аргументу та з нефіксованим часом і фіксованими крайовими умовами.
8. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з інтегральним запізненням по аргументу та фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії.
9. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з інтегральним запізненням по аргументу та фіксованим часом і фіксованими крайовими умовами.
10. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з інтегральним запізненням по аргументу та нефіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії.
11. Принцип максимуму Понтрягіна для систем диференціальних рівнянь з інтегральним запізненням по аргументу та нефіксованим часом і фіксованими крайовими умовами.
12. Синтез оптимального керування для систем диференціальних рівнянь з фіксованим часом.
13. Синтез оптимального керування для систем диференціальних рівнянь з нефіксованим часом.
14. Синтез оптимального керування для систем диференціальних рівнянь з запізненням по аргументу та фіксованим часом.
15. Синтез оптимального керування для систем диференціальних рівнянь з запізненням по аргументу та нефіксованим часом.
16. Синтез оптимального керування для систем диференціальних рівнянь з інтегральним запізненням по аргументу та фіксованим часом.
17. Синтез оптимального керування для систем диференціальних рівнянь з інтегральним запізненням по аргументу та нефіксованим часом.
18. Стратегії колективної раціональності в диференціальній грі двох осіб для системи рівнянь.
19. Гарантовані стратегії в диференціальній грі двох осіб для системи рівнянь.
20. Рівноважні за Нешем стратегії в диференціальній грі двох осіб для системи рівнянь.
21. Рівноважні за Берже стратегії в диференціальній грі двох осіб для системи рівнянь.
22. Гарантоване оптимальне керування для систем диференціальних рівнянь з фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії.
23. Гарантоване оптимальне керування для систем диференціальних рівнянь з фіксованим часом і фіксованими крайовими умовами.
24. Гарантоване оптимальне керування для систем диференціальних рівнянь з

нефіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії.

25. Гарантоване оптимальне керування для систем диференціальних рівнянь з нефіксованим часом і фіксованими крайовими умовами.

26. Гарантоване оптимальне керування для систем диференціальних рівнянь з запізненням по аргументу та з фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії.

27. Гарантоване оптимальне керування для систем диференціальних рівнянь з запізненням по аргументу та з фіксованим часом і фіксованими крайовими умовами.

28. Гарантоване оптимальне керування для систем диференціальних рівнянь з запізненням по аргументу та з нефіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії.

29. Гарантоване оптимальне керування для систем диференціальних рівнянь з запізненням по аргументу та з нефіксованим часом і фіксованими крайовими умовами.

**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**

кафедра *математичного моделювання економічних систем*
дисципліна *оптимальне керування та теорія ігор в економіці*
напрямок підготовки *6.030502 «Економічна кібернетика»*, курс ___ група ___
форма навчання _____

Завдання на курсову роботу студента

/Прізвище, Ім'я та по Батькові/

1. Тема роботи _____
/назва теми/

2. Строк здачі студентом закінченої роботи _____ 20__ р.

3. План _____

4. Дата видачі завдання _____ 20__ р.

Студент _____

підпис

Керівник _____

підпис

Прізвище, ім'я та по-батькові

«___» _____ 20__ р.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
факультет менеджменту та маркетингу
кафедра математичного моделювання економічних систем

КУРСОВА РОБОТА

з дисципліни «Оптимальне керування та теорія ігор в економіці»

на тему: _____ / *назва теми* / _____ .

Студента(ки) _____ курсу , групи _____

форми навчання _____ факультету _____

/ Прізвище, Ім'я та по Батькові /

Керівник _____

/ науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали /

КИЇВ - 2016

Список рекомендованой литературы

1. Вентцель Е.С. Элементы теории игр. – М.: Гос. изд. физ.-матем. лит., 1961.
2. Егоров А.И. Основы теории управления. – М.: Физматлит, 2004.
3. Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 2002.
4. Жуковский В.И., Чикрий А.А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. – К.: Наукова думка, 1994.
5. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986.
6. Шикин Е.В., Чкартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении. – М.: КДУ, 2009.
7. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тимохов В.М. Сборник задач по оптимизации. – М.: Наука, 1984.
8. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М. Наука, 1980.
9. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.: Наука, 1985.
10. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: Изд. „Дело и сервис”, 2009.
11. Охріменко М.Г., Дзюбан І.Ю. Дослідження операцій. – К.: Центр навч. літ., 2006.
12. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: Изд. „Дело и сервис”, 2009.

Дискретизація моделі для системи диференціальних рівнянь з фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії

Нехай вектор $\mathbf{x}(t) \in R^n$ задовільняє задачі

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t),$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

де $t \in [0, T]$, \mathbf{f} – вектор-функція, \mathbf{x}_0 – заданий вектор, $\mathbf{u}(t)$ – вектор обмежених керувань.

Необхідно знайти таке керування $\mathbf{u}(t) \leq \mathbf{l}$, для якого функціонал набуває свого мінімуму

$$I(\mathbf{u}) = \int_0^T f_o(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt + F(\mathbf{x}(T)).$$

Перейдемо до дискретизації моделі. Розіб'ємо часовий інтервал на N частин. Тоді використовуючи для інтеграла формули правих прямокутників, а для похідної різницеву схему, отримаємо наступний вигляд задачі:

$$I(\mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{N-1} f_o(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i) \Delta t + F(\mathbf{x}^N) \rightarrow \min$$

$$\mathbf{x}^{i+1} - \mathbf{x}^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i) \Delta t, i = \overline{0..(N-1)},$$

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}_0, \Delta t = \frac{T}{N},$$

$$|u_j^i| \leq l_j, i = \overline{0..(N-1)}, j = \overline{1..M},$$

де M – розмірність вектору керувань, l_j – деякі задані додатні числа.

Після чого отримуємо задачу нелінійної оптимізації з обмеженнями у вигляді рівностей та нерівностей.

Приклад розв'язання економічної задачі оптимального керування

Розглянемо односекторну модель оптимального економічного росту

$$\max_{c(t)} \int_0^T e^{-\delta t} u(c(t)) dt,$$

$$\frac{dk(t)}{dt} = f(k(t)) - (\mu + \nu)k(t) - c(t), k(0) = k_0,$$

$$0 < cn \leq c(t) \leq f(k),$$

де $k(t)$ – фондоозброєність (фазова змінна), $c(t)$ – величина споживання (керування), μ – частина вибувших за рік виробничих фондів $[0;1]$, ν – річний темп приросту числа зайнятих $[-1;1]$, δ – параметр дисконтування корисності, k_0 – початкове значення фондоозброєності, cn – нижня границя споживання, $u()$ – функція корисності, $f()$ – неокласична виробнича функція, T – кінцевий момент часу.

Економічний зміст задачі оптимального керування полягає у максимізації загальної корисності споживання в односекторній моделі економічного росту при умові, що найближче споживання більш важливе.

Покладемо в моделі наступні позначення:

$$u(c(t)) = \ln(c(t) - 5);$$

$$cn = 200, k(0) = 1000, \mu + \nu = 0.1, T = 100, \delta = 1;$$

$$f(k(t)) = 10 * k(t)^{\frac{2}{3}}.$$

Таким чином, дана модель має вигляд диференційного рівняння з фіксованим часом та вільним правим кінце траєкторії. Використаємо її дискретизацію відповідно до Додатку Д та розв'яжемо задачу оптимального керування у вигляді задачі математичного програмування в середовищі Wolfram Mathematica.

```

n = 150; (*кількість інтервалів*)

ft = 100; (*кінцевий час*)
fk = Array[kap, n + 1, 0]; (*фондоозброєність*)
fu = Array[uc, n + 1, 0]; (*споживання*)
cn = 10; (*нижня границя споживання*)
dt = ft / n;
fun[o_] := 10 o2/3; (*виробнича функція*)
ogr = kap[0] == 1000; (*початкове значення фондоозброєності*)
(*визначення обмежень нерівностей*)
kk = 0;
While[kk ≤ n, ogr = ogr && uc[kk] ≤ fun[kap[kk]] && uc[kk] ≥ cn && kap[kk] ≥ 0;
  kk++];
(*визначення обмежень рівностей, виходячи з дискретизації*)
m = 0;
While[m ≤ (n - 1),
  ogr = ogr && (kap[m + 1] - kap[m]) == (fun[kap[m]] - 0.1 * kap[m] - uc[m]) * dt; m++];
(*визначення цільової функції *)
funm = Log[uc[0] - 5] * dt;
l = 0;
While[l ≤ (n - 1), funm = funm + e-1+l*dt * Log[uc[l] - 5] * dt; l++];
(*Пошук максимуму*)
res = FindMaximum[{funm, ogr}, Union[fk, fu]]

```

Розв'язок виглядає наступним чином:

```

{13.9924, {kap[0] → 1000., kap[1] → 933.333, kap[2] → 871.111, kap[3] → 813.037, kap[4] → 758.835, kap[5] → 708.246, kap[6] → 661.029,
kap[7] → 616.961, kap[8] → 575.83, kap[9] → 537.441, kap[10] → 501.612, kap[11] → 468.171, kap[12] → 436.96, kap[13] → 407.83,
kap[14] → 380.641, kap[15] → 355.266, kap[16] → 331.583, kap[17] → 309.481, kap[18] → 288.858, kap[19] → 269.626, kap[20] → 251.716,
kap[21] → 235.101, kap[22] → 219.843, kap[23] → 206.2, kap[24] → 194.792, kap[25] → 186.675, kap[26] → 183.06, kap[27] → 184.872,
kap[28] → 192.44, kap[29] → 205.144, kap[30] → 221.233, kap[31] → 238.429, kap[32] → 254.992, kap[33] → 270.114, kap[34] → 283.616,
kap[35] → 295.591, kap[36] → 306.212, kap[37] → 315.657, kap[38] → 324.087, kap[39] → 331.636, kap[40] → 338.417, kap[41] → 344.526,
kap[42] → 350.043, kap[43] → 355.036, kap[44] → 359.562, kap[45] → 363.672, kap[46] → 367.409, kap[47] → 370.811, kap[48] → 373.911,
kap[49] → 376.739, kap[50] → 379.321, kap[51] → 381.68, kap[52] → 383.837, kap[53] → 385.81, kap[54] → 387.617, kap[55] → 389.273,
kap[56] → 390.79, kap[57] → 392.182, kap[58] → 393.459, kap[59] → 394.631, kap[60] → 395.708, kap[61] → 396.697, kap[62] → 397.606,
kap[63] → 398.443, kap[64] → 399.213, kap[65] → 399.921, kap[66] → 400.574, kap[67] → 401.175, kap[68] → 401.729, kap[69] → 402.239,
kap[70] → 402.71, kap[71] → 403.145, kap[72] → 403.546, kap[73] → 403.916, kap[74] → 404.258, kap[75] → 404.574, kap[76] → 404.866,
kap[77] → 405.136, kap[78] → 405.385, kap[79] → 405.616, kap[80] → 405.83, kap[81] → 406.028, kap[82] → 406.211, kap[83] → 406.381,
kap[84] → 406.538, kap[85] → 406.683, kap[86] → 406.819, kap[87] → 406.944, kap[88] → 407.06, kap[89] → 407.168, kap[90] → 407.269,
kap[91] → 407.362, kap[92] → 407.449, kap[93] → 407.53, kap[94] → 407.606, kap[95] → 407.676, kap[96] → 407.742, kap[97] → 407.804,
kap[98] → 407.863, kap[99] → 407.918, kap[100] → 407.97, kap[101] → 408.02, kap[102] → 408.067, kap[103] → 408.114, kap[104] → 408.158,
kap[105] → 408.203, kap[106] → 408.246, kap[107] → 408.291, kap[108] → 408.335, kap[109] → 408.382, kap[110] → 408.43,
kap[111] → 408.482, kap[112] → 408.537, kap[113] → 408.597, kap[114] → 408.663, kap[115] → 408.736, kap[116] → 408.818,
kap[117] → 408.911, kap[118] → 409.016, kap[119] → 409.136, kap[120] → 409.274, kap[121] → 409.432, kap[122] → 409.614,
kap[123] → 409.825, kap[124] → 410.07, kap[125] → 410.354, kap[126] → 410.684, kap[127] → 411.069, kap[128] → 411.516,
kap[129] → 412.039, kap[130] → 412.649, kap[131] → 413.362, kap[132] → 414.196, kap[133] → 415.173, kap[134] → 416.321,
kap[135] → 417.669, kap[136] → 419.258, kap[137] → 421.134, kap[138] → 423.356, kap[139] → 425.997, kap[140] → 429.15,
kap[141] → 432.932, kap[142] → 437.5, kap[143] → 443.061, kap[144] → 449.896, kap[145] → 458.407, kap[146] → 469.18, kap[147] → 483.116,
kap[148] → 501.691, kap[149] → 527.517, kap[150] → 565.708, uc[0] → 1000., uc[1] → 955.046, uc[2] → 912.114, uc[3] → 871.111,
uc[4] → 831.952, uc[5] → 794.552, uc[6] → 758.835, uc[7] → 724.722, uc[8] → 692.144, uc[9] → 661.029, uc[10] → 631.314,
uc[11] → 602.934, uc[12] → 575.83, uc[13] → 549.944, uc[14] → 525.222, uc[15] → 501.611, uc[16] → 479.06, uc[17] → 457.519,
uc[18] → 436.937, uc[19] → 417.26, uc[20] → 398.415, uc[21] → 380.299, uc[22] → 362.738, uc[23] → 345.52, uc[24] → 328.729,
uc[25] → 313.39, uc[26] → 301.38, uc[27] → 294.689, uc[28] → 295.029, uc[29] → 303.192, uc[30] → 317.878, uc[31] → 335.825,
uc[32] → 353.936, uc[33] → 370.598, uc[34] → 385.35, uc[35] → 398.249, uc[36] → 409.517, uc[37] → 419.391, uc[38] → 428.087,
uc[39] → 435.781, uc[40] → 442.62, uc[41] → 448.724, uc[42] → 454.192, uc[43] → 459.104, uc[44] → 463.528, uc[45] → 467.522,
uc[46] → 471.136, uc[47] → 474.409, uc[48] → 477.381, uc[49] → 480.081, uc[50] → 482.537, uc[51] → 484.775, uc[52] → 486.814,
uc[53] → 488.676, uc[54] → 490.376, uc[55] → 491.93, uc[56] → 493.352, uc[57] → 494.653, uc[58] → 495.844, uc[59] → 496.936,
uc[60] → 497.938, uc[61] → 498.857, uc[62] → 499.7, uc[63] → 500.475, uc[64] → 501.187, uc[65] → 501.841, uc[66] → 502.444,
uc[67] → 502.998, uc[68] → 503.508, uc[69] → 503.977, uc[70] → 504.41, uc[71] → 504.809, uc[72] → 505.177, uc[73] → 505.516,
uc[74] → 505.83, uc[75] → 506.119, uc[76] → 506.386, uc[77] → 506.632, uc[78] → 506.86, uc[79] → 507.071, uc[80] → 507.266,
uc[81] → 507.446, uc[82] → 507.613, uc[83] → 507.768, uc[84] → 507.911, uc[85] → 508.043, uc[86] → 508.166, uc[87] → 508.279,
uc[88] → 508.385, uc[89] → 508.483, uc[90] → 508.574, uc[91] → 508.658, uc[92] → 508.736, uc[93] → 508.809, uc[94] → 508.877,
uc[95] → 508.94, uc[96] → 508.999, uc[97] → 509.054, uc[98] → 509.106, uc[99] → 509.154, uc[100] → 509.199, uc[101] → 509.242,
uc[102] → 509.283, uc[103] → 509.321, uc[104] → 509.358, uc[105] → 509.394, uc[106] → 509.429, uc[107] → 509.463, uc[108] → 509.496,
uc[109] → 509.53, uc[110] → 509.565, uc[111] → 509.6, uc[112] → 509.637, uc[113] → 509.676, uc[114] → 509.718, uc[115] → 509.763,
uc[116] → 509.813, uc[117] → 509.868, uc[118] → 509.929, uc[119] → 509.999, uc[120] → 510.078, uc[121] → 510.167, uc[122] → 510.27,
uc[123] → 510.388, uc[124] → 510.524, uc[125] → 510.681, uc[126] → 510.863, uc[127] → 511.074, uc[128] → 511.319, uc[129] → 511.604,
uc[130] → 511.934, uc[131] → 512.319, uc[132] → 512.767, uc[133] → 513.289, uc[134] → 513.897, uc[135] → 514.605, uc[136] → 515.431,
uc[137] → 516.395, uc[138] → 517.519, uc[139] → 518.83, uc[140] → 520.359, uc[141] → 522.141, uc[142] → 524.215, uc[143] → 526.618,
uc[144] → 529.384, uc[145] → 532.522, uc[146] → 535.978, uc[147] → 539.523, uc[148] → 542.472, uc[149] → 542.827, uc[150] → 543.651}}

```

Підрахувавши значення критерію для різних n отримаємо

N	300	200	150	100
max	10,35	12,1557	13,9924	17,7577

Але при $n < 150$ ми маємо незадовільну похибку роботи алгоритму. Тому обираємо для подальших досліджень $n = 150$.

Навіть більше, на рис. 1 і рис. 2 представлені графіки фондоозброєння і споживання для $n = 150$ та $n = 300$ відповідно, на яких видно, що розв'язки відрізняються тільки при $t > 18$ (така ж поведінка і при інших довжинах інтервалів).

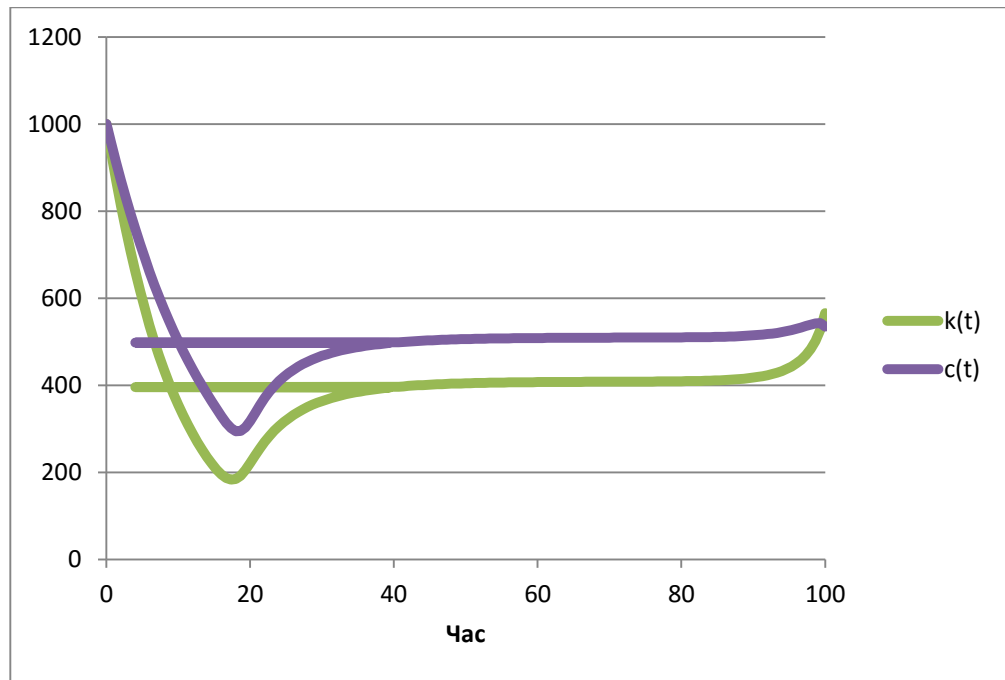


Рис. 1 Розв'язок при $n=150$

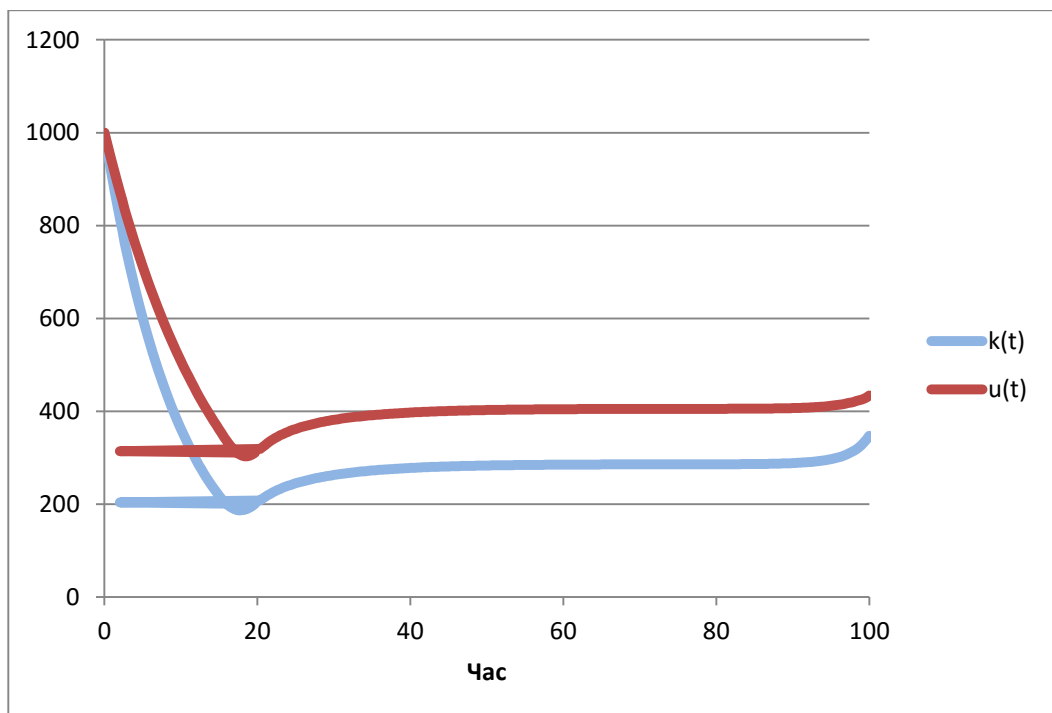


Рис. 2 Розв'язок при $n=300$

Побудуємо тепер умови оптимальності для економічної задачі.

Гамільтоніан матиме наступний вигляд:

$$H(k, c, \psi_0, \psi) = \psi_0 e^{-t} \ln(c(t) - 5) + \psi(t)(10 * k(t)^{\frac{2}{3}} - 0.1k(t) - c(t)).$$

Звідси, отримаємо спряжену задачу

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial k} = -\psi \left(\frac{20}{3} * k(t)^{-\frac{1}{3}} - 0.1 \right).$$

З останнього диференційного рівняння знаходимо, що

$$\psi(t) = C e^{-\left(\frac{20}{3} * \int_0^t k(t)^{-\frac{1}{3}} dt - 0.1t\right)},$$

і з умов трансверсальності

$$\psi(T) = 0.$$

Перевіримо умову $\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_0 \frac{e^{-t}}{c(t)-5} - C e^{-\left(\frac{20}{3} * \int_0^t k(t)^{-\frac{1}{3}} dt - 0.1t\right)} = 0.$

Підставляючи в неї значення отриманого розв'язку, рівність виконується з похибкою 0.001. А тому знайдене на рис. 1 керування є оптимальним.