

НЕЛІНІЙНІ ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ КАНАТА З ВАНТАЖЕМ

В статье рассматриваются линейные и нелинейные колебания каната башенного крана с учетом факторов геометрической нелинейности и вертикального гармонического перемещения точки подвеса груза с учётом сил вязкого трения.

In the article the linear and nonlinear vibrations of rope of a towering crane are examined taking into account the factors of geometrical non-linearity and vertical harmonic moving of suspension point of load taking into account forces of viscid friction.

Велетенський розмах будівництва у світі вимагає постійного вдосконалення засобів механізації будівельних робіт, серед яких важливе місце займають вантажо-підіймальні машини. У процесі експлуатації такі конструкції, як правило, зазнають інтенсивних вібраційних навантажень. І це визначає необхідність проводити дослідження їх коливань. Такі коливання створюють пряму загрозу міцності елементів конструкцій підіймно-транспортних машин. Коливання здатні порушити нормальні умови експлуатації і вже неодноразово приводили до аварій і катастроф. Тому тільки з врахуванням коливань можна обрати оптимальні параметри конструкції та режими роботи машини, віддалені наскільки це можливо від критичних режимів, які є небезпечними. З проведеного аналізу сучасних методів розрахунку канатів підіймальних машин на динамічні навантаження було відмічено, що розрахунки проводяться тільки в лінійній постановці. Дослідження лінеаризованих систем хоча і дає змогу зробити корисні висновки про властивості коливань каната з вантажем, але не дає повної характеристики реальних коливальних процесів. Зокрема, застосовуючи лінійний підхід, неможливо знайти амплітуду параметричних коливань, пояснити виникнення субгармонічних і супергармонічних коливань [1]. При підйомі вантажу на висоту більш ніж 60 метрів задача коливань каната з вантажем є суттєво геометрично нелінійною. Тому в даній роботі розглядаються параметричні коливання каната баштового крана (рис.1) в нелінійній постановці з урахуванням вязкого тертя, що є актуальною задачею. Вважаємо, що при роботі баштового крана точка підвісу каната здійснює переносний рух за законом $y_e = B \cos \omega t$.

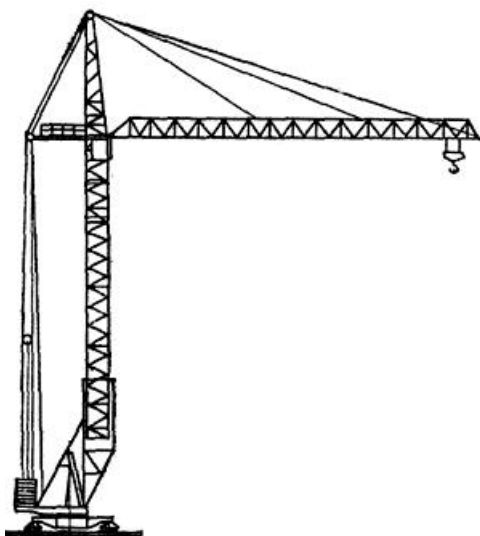


Рис. 1. Баштовий кран коливальної системи

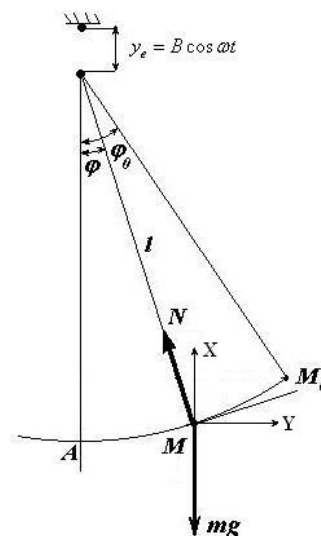


Рис. 2. Модель кінематичного збудження

Для складання диференціального рівняння руху вантажу скористаємося методом Д'Аламбера. Спроектуємо всі сили, що діють на вантаж на нерухомі вісі XOY (рис.2).

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -N \sin \varphi, \\ m\ddot{y} = N \cos \varphi - mg. \end{cases} \quad (1)$$

Виразимо з системи (1) силу натягу в тросі:

$$N = -\frac{m\ddot{x}}{\sin \varphi}. \quad (2)$$

Тоді:

$$m\ddot{y} = -\frac{m\ddot{x}}{\sin \varphi} \cos \varphi - mg. \quad (3)$$

або

$$m\ddot{y} \sin \varphi + m\ddot{x} \cos \varphi + mg \sin \varphi = 0. \quad (4)$$

Точка підвісу здійснює вертикальний переносний гармонічний рух виду $y_e = B \cos \omega t$.

Координати положення вантажу виразимо через кут відхилення φ тросу від вертикалі та зміщення точки відхилення y_e .

$$\begin{cases} x = l \sin \varphi, \\ y = l - l \cos \varphi + y_e. \end{cases} \quad (5)$$

Продиференціюємо двічі останню систему рівнянь.

$$\begin{cases} \ddot{x} = l(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi), \\ \ddot{y} = l(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) - B\omega^2 \cos \omega t. \end{cases} \quad (6)$$

Підставимо (6) в (3), враховуючи, що кут $\varphi < 5^\circ$ ($\cos \varphi \approx 1$, $\sin \varphi \approx \varphi$, $\dot{\varphi}^2 = 0$):

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} - \frac{B\omega^2}{l} \cos \omega t\right) \varphi = 0. \quad (7)$$

Обозначимо $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ та $2\mu = \frac{B\omega^2}{l\omega_0^2}$ та підставимо у (7).

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 (1 - 2\mu \cos \omega t) \varphi = 0, \quad (8)$$

де ω_0^2 - квадрат власної частоти, μ - коефіцієнт параметричного збудження.

Отримали рівняння Мат'є.

Розрізняють три основні задачі параметричних коливань: лінійну, нелінійну та перехідний процес (дослідження стійкості). Розглянемо ці задачі окремо.

а) Лінійна задача при гармонічному параметричному збудженні.

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 (1 - 2\mu \cos \omega t) \varphi = 0.$$

Перейдемо до безрозмірного часу згідно з підстановкою $2\tau = \omega t$. Тоді матимемо рівняння Мат'є у вигляді

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + (a + 2b \cos 2\tau) \varphi = 0, \quad (9)$$

де введені позначення $a = 4 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$, $b = -a\mu = -2 \frac{B}{l}$.

Поведінка розв'язків рівняння Мат'є у вигляді (8) або (9) залежить від значень параметрів a , μ або параметрів a , b , за якими з діаграми Айнса-Стретта (рис.3) визначаються області нестійкості (параметричний резонанс) чи області стійкості (відповідають затухаючим коливанням).

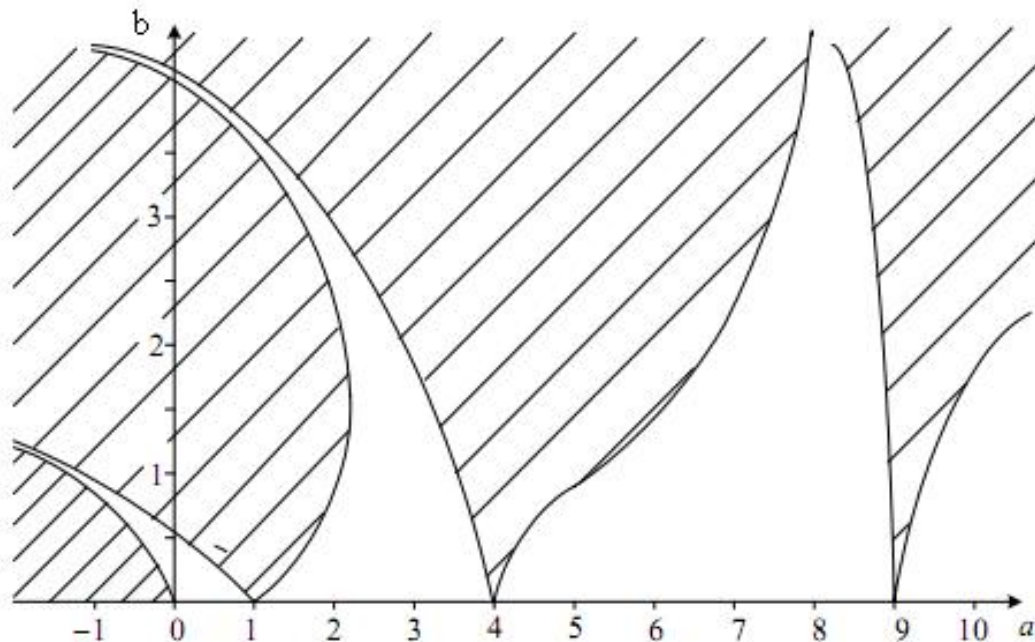


Рис. 3 Діаграма Айнса-Стретта

Візьмемо такі вихідні дані канату: $m_g^H = 10$ т - нормативна вантажність,
 $v = 0,3$ м/с – швидкість підймання вантажу,
 $H = 60$ м – максимальна висота підняття. Для крана вантажністю 10 т вибираємо простий поліспаст кратністю $u = 3$.

Коефіцієнт корисної дії (ККД) поліспаста:

$$\eta_n = \frac{(1 - \eta_{\text{бл}}^u) \eta_{\text{бл}}}{u(1 - \eta_{\text{бл}})} = \frac{(1 - 0,99^3) 0,99}{3(1 - 0,99)} = 0,98 \quad (10)$$

де $\eta_{\text{бл}} = 0,99$ - ККД блока.

Загальний ККД ситеми:

$$\eta_{\text{с-ми}} = \eta_n \eta_{\text{бл}} = 0,98 \cdot 0,99 = 0,97. \quad (11)$$

$G = mg = 100000$ Н – вага вантажу.

Максимальне зусилля у вітці каната:

$$F = \frac{G}{z \eta_{\text{с-ми}}} = \frac{100000}{4 \cdot 0,97} = 25773,2 \text{ Н}. \quad (12)$$

$z = 4$ - кількість віток каната, на яких висить вантаж.

Необхідний канат з розривною силою:

$$F_p \geq F n_k = 25773,2 \cdot 5,5 = 141752,6 \text{ Н}. \quad (13)$$

За дод. 1 [2] вибираємо вантажний канат 17,5-Г-I-H-1570 конструкції 6х25.

Робоча довжина каната, який намотується на барабан під час підймання вантажу:

$$l_p = Hu = 60 \cdot 3 = 180 \text{ м}. \quad (14)$$

Проведемо розрахунки для визначення зон нестійкої поведінки в пакеті MathCAD.

Значення параметра В знайдемо з нерівності

$$\frac{B\omega^2}{2l\omega_0^2} \ll 0,5 \quad [1] \quad (15)$$

Результати обчислень представлені в таблиці 1 (жирним шрифтом виділені зони нестійкої поведінки).

Таблиця.1

Результати обчислень

l, м	$\frac{\omega_0}{\omega}$						
	0,33	0,45	0,5	0,55	0,6	1	1,5
60	0,017	0,023	0,033	0,033	0,033	0,033	0,333
55	0,018	0,025	0,036	0,036	0,036	0,036	0,364
50	0,02	0,028	0,04	0,04	0,04	0,04	0,4
45	0,022	0,031	0,044	0,044	0,044	0,044	0,444
40	0,025	0,035	0,05	0,05	0,05	0,05	0,5
35	0,029	0,04	0,057	0,057	0,057	0,057	0,571
30	0,033	0,047	0,067	0,067	0,067	0,067	0,667
25	0,04	0,056	0,08	0,08	0,08	0,08	0,8
20	0,05	0,07	0,1	0,1	0,1	0,1	1
15	0,067	0,093	0,133	0,133	0,133	0,133	1,333
10	0,1	0,14	0,2	0,2	0,2	0,2	2
5	0,2	0,28	0,4	0,4	0,4	0,4	4
4	0,25	0,35	0,5	0,5	0,5	0,5	5
3	0,333	0,467	0,667	0,667	0,667	0,667	6,667
2	0,5	0,7	1	1	1	1	10
1	1	1,4	2	2	2	2	20

б) нелінійна задача.

Якщо в розкладі для $\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$ обмежитись двома членами та знехтувати добутком

малих величин μ та $\gamma = \frac{\omega_0^3}{3!}$, то отримаємо рівняння параметричних коливань вантажу з кубічною характеристикою відновлювальної сили:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2(1 - 2\mu \cos \omega t)\varphi - \gamma\varphi^3 = 0. \quad (16)$$

При розв'язанні задачі в лінійній постановці ($\gamma = 0$) знаходять тільки області нестійкості (параметричного резонансу). Побудуємо амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) головного параметричного резонансу в нелінійному випадку ($\gamma \neq 0$) за відсутності тертя ($h = 0$).

Згідно з методом гармонічного балансу розв'язок рівняння (16) з урахуванням згаданих припущень шукаємо в першому наближенні у вигляді

$$\varphi = A \cos\left(\frac{\omega t}{2} + \theta\right) = A \cos \psi. \quad (17)$$

Враховуючи, що $\cos^3 \psi = \frac{1}{4}(3 \cos \psi + \cos 3\psi)$, матимемо:

$$\cos \omega t = \cos 2(\psi - \theta) = \cos 2\psi \cos 2\theta + \sin 2\psi \sin 2\theta. \quad (18)$$

$$\cos \omega t \cos \psi = \cos \frac{2\theta}{2} (\cos \psi + \cos 3\psi) + \sin \frac{2\theta}{2} (\sin \psi + \sin 3\psi).$$

Підставимо (17) в (16) та врахуємо (18).

$$\begin{aligned}
 & -A\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \cos \psi + \omega_0^2 (1 - 2\mu \cos 2\psi \cos 2\theta + \sin 2\psi \sin 2\theta) A \cos \psi - \gamma A^3 \left(\frac{3}{4} \cos \psi + \frac{1}{4} \cos 3\psi\right) = 0. \\
 (19) \quad & -A\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \cos \psi + \omega_0^2 \left(A \cos \psi - 2\mu \cos \frac{2\theta}{2} (\cos \psi + \cos 3\psi) + \sin \frac{2\theta}{2} (\sin \psi + \sin 3\psi)\right) - \\
 & -\gamma A^3 \left(\frac{3}{4} \cos \psi + \frac{1}{4} \cos 3\psi\right) = 0.
 \end{aligned} \quad (20)$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\cos \psi$ і $\sin \psi$ до нуля.

$$-A\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2 A - \omega_0^2 \mu A \cos 2\theta - \frac{3}{4} \gamma A^3 = 0. \quad (21)$$

$$-\omega_0^2 \mu A \sin 2\theta = 0. \quad (22)$$

З рівняння (22) знаходимо, що $\theta = 0$.

Тоді:

$$A^2 = \frac{4}{3} \frac{\omega_0^2}{\gamma} \left[-\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^2 + 1 - \mu \right]. \quad (23)$$

За допомогою обчислювального пакету MathCAD побудуємо амплітудно-частотну характеристику, використовуючи вираз (23).

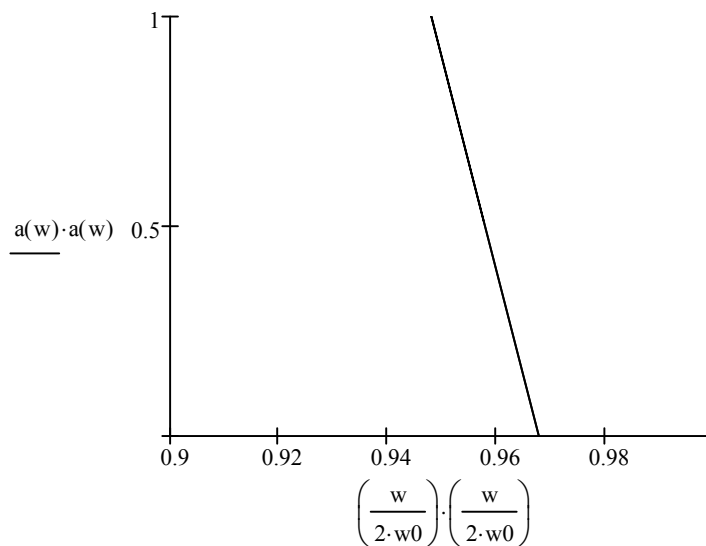


Рис. 4 АЧХ нелінійної параметричної задачі (23) у першому наближенні

Якщо розв'язок рівняння (16) шукати у вигляді

$$\varphi = A \sin\left(\frac{\omega t}{2} + \theta\right) = A \sin \psi, \text{ то}$$

аналогічно отримуємо:

$$A^2 = \frac{4}{3} \frac{\omega_0^2}{\gamma} \left[-\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^2 + 1 + \mu \right]. \quad (24)$$

Таким чином, з аналізу формул (23) та (24) бачимо, що нелінійність системи обмежує амплітуду параметричного резонансу, величина якої змінюється від величини розладу $\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^2$. В лінійному випадку

амплітуда необмежена.

в) вплив тертя на параметричні коливання вантажу на тросі.

Рівняння параметричних коливань з урахуванням в'язкого тертя має вигляд

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + \omega_0^2 (1 - 2\mu \cos \omega t) \varphi - \gamma \varphi^3 = 0, \quad (25)$$

де $h = \frac{\beta}{2}$ - коефіцієнт демпфірування, β - гістерезисний коефіцієнт несинфазного відхилення від закону Гука при в'язкому терті.

Підставимо $\varphi = A \cos\left(\frac{\omega t}{2} + \theta\right) = A \cos \psi$ у рівняння (25) та прирівняємо коефіцієнти при $\cos \psi$ і $\sin \psi$ до нуля. Отримаємо баланси амплітудних значень відповідно активних і реактивних сил, віднесених до m.

$$-A\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \cos \psi - 2Ah\left(\frac{\omega}{2}\right) \sin \psi + \omega_0^2 \left(A \cos \psi - 2\mu A \left(\cos \frac{2\theta}{2} (\cos \psi + \cos 3\psi) + \sin \frac{2\theta}{2} (\sin \psi + \sin 3\psi) \right) \right) - \gamma A^3 \left(\frac{3}{4} \cos \psi + \frac{1}{4} \cos 3\psi \right) = 0. \quad (26)$$

$$-A\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + \omega_0^2 A - \omega_0^2 \mu A \cos 2\theta - \frac{3}{4} \gamma A^3 = 0. \quad (27)$$

$$-h\omega A - \omega_0^2 \mu A \sin 2\theta = 0. \quad (28)$$

Перепишемо рівняння (27) і (28) у вигляді

$$\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \gamma A^2 = \omega_0^2 \mu \cos 2\theta. \quad (29)$$

$$-h\omega = \omega_0^2 \mu \sin 2\theta. \quad (30)$$

Піднісши рівняння (29) та (30) до квадрату та просумувавши результат, отримаємо:

$$\left[\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \gamma A^2 \right]^2 + h^2 \omega^2 = \omega_0^4 \mu^2. \quad (31)$$

Виразимо амплітуду субгармонічних коливань.

$$\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \gamma A^2 = \sqrt{\omega_0^4 \mu^2 - h^2 \omega^2}. \quad (32)$$

$$\frac{3}{4} \gamma A^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - \sqrt{\omega_0^4 \mu^2 - h^2 \omega^2}. \quad (33)$$

$$A^2 = \frac{4}{3\gamma} \left[\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - \sqrt{\omega_0^4 \mu^2 - h^2 \omega^2} \right] = \frac{4\omega_0^2}{3\gamma} \left[-\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^2 + 1 \mp \sqrt{\mu^2 - \frac{h^2 \omega^2}{\omega_0^4}} \right]. \quad (34)$$

Фаза субгармонічних параметричних коливань дорівнює

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{h\omega}{\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \gamma A^2}. \quad (35)$$

З рівняння (34) випливає, що при $\gamma = 0$ амплітуда $A^2 \rightarrow \infty$. Таким чином лінійне тертя не обмежує амплітуду параметричних коливань.

Рівняння (34) – це рівняння двох гілок амплітудної кривої. Знак «-» перед радикалом відноситься до лівої гілки, а «+» - до правої.

Висновки по роботі:

1. Лінійна задача дає змогу визначити області нестійкості, але не дає визначити амплітуду усталених параметричних коливань.
2. Лінійне тертя не обмежує амплітуду параметричних коливань лінійної системи, а лише звужує область нестійкості та підвищує поріг параметричного збудження (див. рис. 4, рис. 5).
3. Нелінійність відновлювальної сили обмежує амплітуду параметричних коливань і спричиняє нахил скелетної лінії та АЧХ ліворуч при «м'якій» її характеристиці або праворуч при «жорсткій» (див. рис. 6).

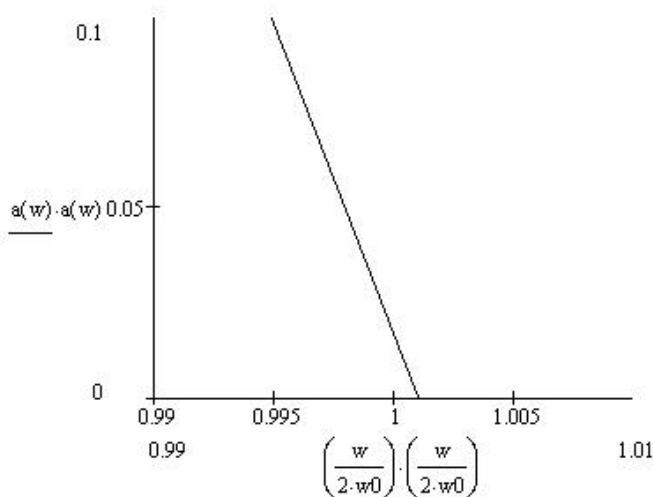


Рис.5 АЧХ нелінійної параметричної задачі (24) у першому наближенні

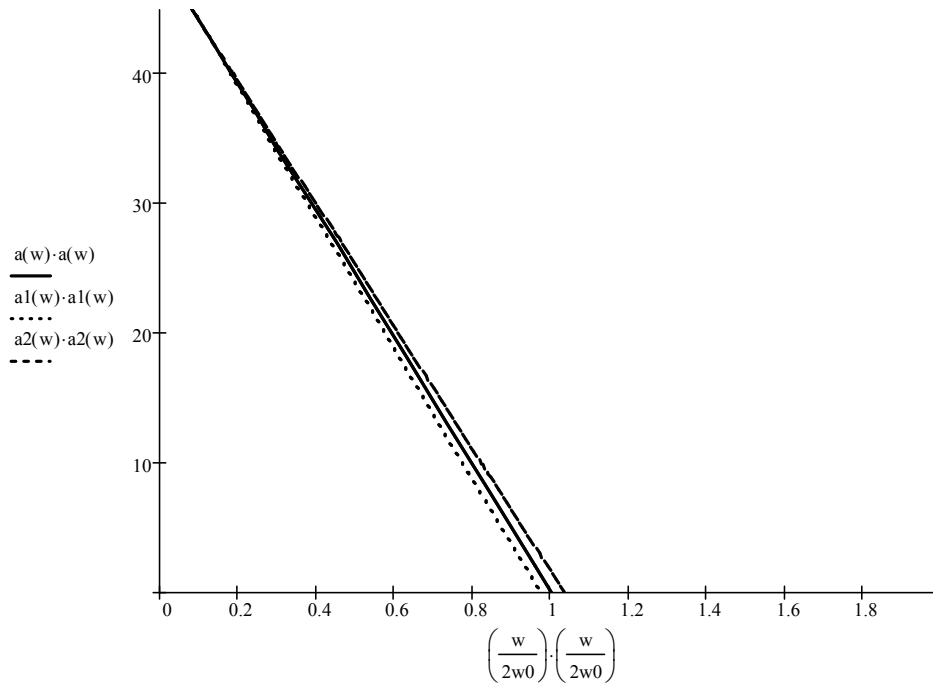


Рис. 6 АЧХ нелінійної параметричної задачі з врахування впливу тертя

4. Нелінійне тертя разом з нелінійністю відновлювальної сили визначає естремальну (максимально можливу) амплітуду коливань (замикає ліву і праву гілки АЧХ) при $\mu^2 = \frac{h^2 \omega^2}{\omega_0^4}$. За останньої рівності можна визначити значення абсциси максимально можливої амплітуди, а з формули $A^2 = \frac{4\omega_0^2}{3\gamma} \left[-\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^2 + 1 \mp \sqrt{\omega_0^4 \mu^2 - h^2 \omega^2} \right]$ - значення квадрата цієї амплітуди.

5. Рекомендується висоти до 5 метрів при $\omega_0 = (0.45, 0.55, 0.6)\omega$ проходити з меншою швидкістю підйому для уникнення зон нестійкої поведінки вантажу.

Список літератури

1. Василенко М.В., Алексейчук О.М. Теорія коливань і стійкість руху: Підручник. – К. Вища шк., 2004. – 525с.: іл.
2. Підйомно-транспортні машини: Розрахунки підймальних і транспортувальних машин: Підручник / В.С. Бондарєв, О.І. Дубинець, М.П. Колісник та ін. – К.: Вища шк., 2009. – 734 с.