МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

ПРАКТИКУМ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Вища математика: Елементи аналітичної геометрії: Практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальностей: 143 «Атомна енергетика», 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології»/КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: І. В. Веригіна, Т. О. Єрьоміна, О. А. Поварова – Електронні текстові дані (1 файл: 1,344 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 33 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол №7 від 13.05.2021 р.)
за поданням Вченої ради Фізико-математичного факультету (протокол № 3 від 22.03.2021 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ
ПРАКТИКУМ

Укладачі: *Веригіна Інга В'ячеславівна*, ст. викл.,
Єрьоміна Тетяна Олександрівна, канд. фіз-мат. наук, ст. викл.
Поварова Олена Андріївна, канд. фіз-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор *Дудкін М. Є.*, д-р фіз-мат. наук, проф.

Рецензент *Симчук Я. В.*, канд. фіз.-тех. наук, доц., КПІ ім. Ігоря Сікорського, кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Тематика методичних вказівок охоплює розділ «Елементи аналітичної геометрії» дисципліни «Вища математика», в якому вивчаються пряма на площині, площина і пряма в просторі. Розглянуто основні види рівнянь прямої на площині та в просторі, основні задачі про пряму на площині, про пряму у просторі та пряму і площину. Дана робота містить всі задачі, з якими найчастіше зустрічаються студенти при вивчені теми «Елементи аналітичної геометрії», всі розв'язки супроводжуються теоретичні відомостями та рисунками, якщо це потрібно. Головним завданням даного видання є показати студенту практичне застосування теоретичного матеріалу і пояснити як розв'язувати задачі з даної теми. Практикум складається з трьох параграфів, списку рекомендованої літератури та списку завдань для типового розрахунку.

§1. Пряма на площині

Наведемо ряд рівнянь прямої на площині і покажемо їх застосування для розв’язання різного виду задач.

1. <u>*Канонічне рівняння*</u>*. Запишемо рівняння прямої l, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно вектору $\vec{s} = (m;\ n)$. Вектор $\vec{s}$ називається напрямним вектором прямої l.*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \tag{1}$$

2. <u>*Параметричні рівняння прямої*</u>*.*

Прирівняємо (1) до параметра t, де $t \in R$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = t,$$

Розв’яжемо відносно x і y:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \end{cases} \tag{2}$$

(2) - параметричні рівняння прямої l.

3. <u>*Векторне рівняння прямої*</u>*.*

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t\vec{s}. \tag{3}$$

4. <u>*Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через задану точку.*</u>

Канонічне рівняння прямої (1) при m ≠ 0 можна записати у вигляді:

$$y - y_0 = \frac{n}{m}(x - x_0).$$

Відношення $\frac{n}{m} = k = tg\varphi$ називається кутовим коефіцієнтом, φ – кут між прямою і додатним напрямом осі Ox:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{4}$$

(4) – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$.

5. *<u>Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.</u>*

$$y = kx + b \tag{5}$$

(5) – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k, де b - довжина відрізка, що відтинає пряма на осі Oy.

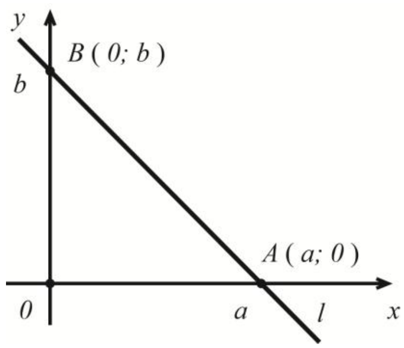
6. *<u>Рівняння прямої, що проходить через дві точки.</u>*

Нехай задано дві точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{6}$$

7. *<u>Рівняння прямої у відрізках на осях.</u>*

Візьмемо на координатних осях точки $A(a; 0)$ і $B(0; b)$.



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{7}$$

8. *<u>Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно заданому вектору</u>.*

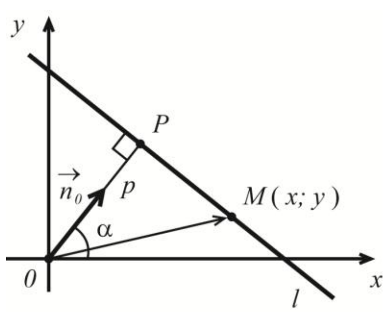
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{8}$$

(8) - рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно заданому вектору $\vec{n} = (A; B)$.

9. *<u>Загальне рівняння прямої</u>.*

$$Ax + By + C = 0 \tag{9}$$

10. *<u>Нормальне рівняння прямої.</u>*



Нехай задано пряму l, позначимо відстань від прямої l до початку координат $p = d(O; l)$, $\overrightarrow{n^\circ}$ - орт вектора нормалі,

$$\overrightarrow{n^\circ} = (\cos\alpha\,; \sin\alpha). \tag{10}$$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{11}$$

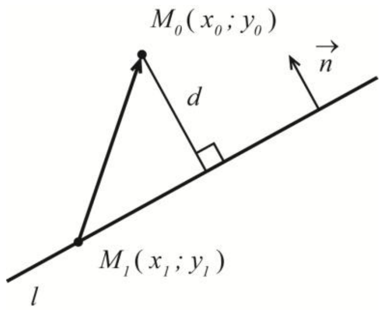
(11) – нормальне рівняння прямої l.

Зауваження. *Щоб загальне рівняння прямої l: $Ax + By + C = 0$ звести до нормального рівняння, потрібно домножити його на нормуючий множник*

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

Знак μ вибирається протилежним до знаку вільного члена C.

Задача 1. Нехай пряму l задано загальним рівнянням $x+2y-3=0$. Знайти відстань від деякої точки $M_0(1;-1)$ до прямої l.



Розв'язання. Із загального рівняння прямої знайдемо нормальний вектор:

$$\vec{n} = (1;2).$$

Візьмемо на прямій l довільну точку $M_1(1;1)$ і побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M_0}$:

$$\overrightarrow{M_1M_0} = (0;-2).$$

З рисунка видно, що відстань від точки M_0 до прямої l: $d = \left|\text{пр}_{\overrightarrow{n^\circ}}\, \overrightarrow{M_1M_0}\right|$. З геометричного змісту скалярного добутку випливає:

$$d = \left|\text{пр}_{\overrightarrow{n^\circ}}\, \overrightarrow{M_1M_0}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n^\circ}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}\right|}{\left|\overrightarrow{n^\circ}\right|} = \frac{|0-4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Висновок. *Для того щоб обчислити відстань від будь-якої точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої l заданої загальним рівнянням, потрібно звести рівняння прямої до нормального вигляду, домноживши його на нормуючий множник*

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{12}$$

Знак μ вибирається протилежним до знаку вільного члена C, і підставити координати точки:

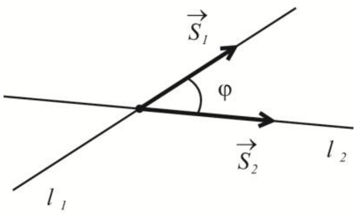
$$d(M_0;l) = \frac{|Ax_0+Bx_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{13}$$

Задача 2. Знайти кут між двома прямими l_1 і l_2 , що задані канонічними рівняннями:

$$l_1: \frac{x-1}{-5} = \frac{y+3}{1}; \qquad l_2: \frac{x}{-3} = \frac{y-2}{-2}.$$

Знайти кут між ними.

Розв'язання. Напрямні вектори відповідно:



$$\overrightarrow{s_1} = (-5; 1); \qquad \overrightarrow{s_2} = (-3; -2).$$

З рисунка видно, що кут між прямими l_1 і l_2, дорівнює куту між їх напрямними векторами:

$$\varphi = (\widehat{l_1; l_2}) = (\widehat{\overrightarrow{s_1}; \overrightarrow{s_2}}).$$

Обчислимо його, використовуючи означення скалярного добутку:

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2})}{|\overrightarrow{s_1}| \cdot |\overrightarrow{s_2}|} = \frac{15-2}{\sqrt{25+1} \cdot \sqrt{9+4}} = \frac{13}{\sqrt{2} \cdot 13} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, маємо два розв'язки:

$$\varphi = \pm arccos\frac{\sqrt{2}}{2} => \left[\begin{array}{l} \varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \\ \varphi_2 = \frac{7\pi}{4}. \end{array}\right.$$

Задача 3. Нехай прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями:

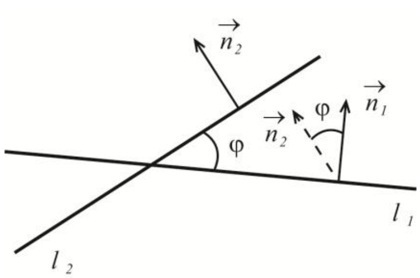
$$l_1: 3x - 2y + 7 = 0,$$

$$l_2: 2x + 3y - 3 = 0.$$

Знайти кут між ними.

Розв'язання. Нормальні вектори прямих l_1 і l_2 відповідно:

$$\overrightarrow{n_1} = (3; -2); \qquad \overrightarrow{n_2} = (2; 3).$$



З рисунка видно, що кут між прямими l_1 і l_2, дорівнює куту між їх нормальними векторами: $\varphi = (\widehat{l_1; l_2}) = (\widehat{\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2}})$ - як кути із взаємно перпендикулярними сторонами.

Обчислимо, використовуючи означення скалярного добутку:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{6-6}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}} = 0.$$

Отже, прямі l_1 і l_2 перпендикулярні.

З іншого боку перевірити перпендикулярність прямих можна, перевіряючи чи не перпендикулярні нормальні вектори прямих. Тобто якщо $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}) = 0$:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

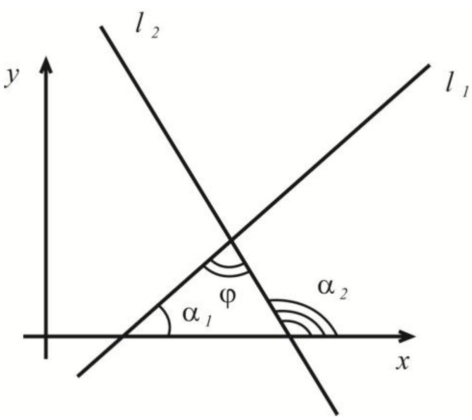
Дійсно $(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}) = 6 - 6 = 0$.

Задача 4. Знайти гострий кут між прямими l_1 і l_2 заданими рівняннями з кутовим коефіцієнтом:

$$l_1: y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}; \qquad l_2: y = -\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Розв'язання. Кутові коефіцієнти прямими l_1 і l_2 відповідно:

$$k_1 = \frac{3}{2} = tg\alpha_1; \qquad k_2 = -\frac{5}{2} = tg\alpha_2.$$



Кут між прямими l_1 і l_2, дорівнює різниці кутових коефіцієнтів: $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, тоді

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 \cdot tg\alpha_1} =$$

$$= \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} = \frac{-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}\left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{-4}{-\frac{11}{4}} = \frac{16}{11},$$

Отже, гострий кут між прямими l_1 і l_2:

$$\varphi = arctg\frac{16}{11}.$$

Кут φ - це кут між прямими l_1, l_2, і кут на який потрібно повернути пряму l_1 проти руху годинникової стрілки, щоб вона співпала з прямою l_2.

• *якщо $l_1 \parallel l_2$, тоді $\varphi = 0°$, тоді*

$$k_2 - k_1 = 0,$$

$$k_1 = k_2 \tag{14}$$

(14) – умова паралельності прямих l_1 і l_2.

• *якщо $l_1 \perp l_2$, тоді φ=90°, оскільки $tg\ 90° \nexists$:*

$$1 + k_1 k_2 = 0,$$

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \tag{15}$$

(15) – умова перпендикулярності прямих l_1 і l_2.

Задача 5. Задано вершини трикутника $A(4;1)$, $B(0;2)$, $C(-1;3)$.

Знайти:

1) відстань від точки A до сторони BC ;

2) точку A' симетричну точці A відносно ВС;

3) точку перетину медіан трикутника.

Розв'язання.

1) Складемо рівняння сторони ВС (пряма ℓ) у вигляді (6):

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2-3} \quad \Rightarrow \quad x + y - 2 = 0.$$

Знайдемо $k = -1$.

За формулою (13):

$$d(A, BC) = \frac{|4+1-2|}{\sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{17}}.$$

2) Нехай точка A' має координати x', y'. Оскільки точка A' розташована на одному перпендикулярі ℓ_1 до прямої BC і на тій самій відстані від неї, що й точка A, то точка перетину ℓ і ℓ_1 (позначимо її D) – середина відрізка AA', і, отже,

$$x_D = \frac{4+x'}{2}, \quad y_D = \frac{1+y'}{2} \;\Rightarrow\; x' = 2x_D - 4,\; y' = 2y_D - 1.$$

Щоб знайти x_D, y_D, треба спочатку скласти рівняння прямої ℓ_1.

За ознакою перпендикулярності прямих $x_1 = -\frac{1}{k} = \frac{-1}{-1} = 1$, отже, рівняння

$$x - 4 = y - 1 \;\Rightarrow\; x - y - 3 = 0.$$

Тепер визначимо координати точки D (точки перетину ℓ і ℓ_1) із системи рівнянь прямих ℓ і ℓ_1:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_D = \frac{5}{2}, \quad y_D = -\frac{1}{2}$$

і, нарешті, знайдемо A': $\quad x' = 2 \cdot \frac{5}{2} - 4 = 1; \quad y' = -2.$

3) Щоб знайти точку O_1 перетину медіан, використаємо наступну властивість: точка O_1 ділить медіану у відношенні 2:1, а саме

$$\lambda = \frac{AO_1}{O_1M_1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Спочатку знаходимо

$$x_{M_1} = \frac{x_B + x_C}{2} = -\frac{1}{2}; \quad y_{M_1} = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{5}{2},$$

а потім знайдемо x_{D_1}, y_{D_1}:

$$x_{D_1} = \frac{x_A + \lambda x_{M_1}}{1+\lambda} = \frac{4 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+2} = \frac{3}{3} = 1;$$

$$y_{D_1} = \frac{y_A + \lambda y_{M_1}}{1+\lambda} = \frac{1 + 2\cdot\frac{5}{2}}{1+2} = 2.$$

Задача 6. Точка $A(5;-1)-$ вершина квадрата, одна із сторін якого розташована на прямій $\ell: \ 4x-3y-7=0.$ Скласти рівняння прямих, на яких розташовані три інші сторони квадрата.

Розв'язання. Оскільки координати точки A не задовольняють рівняння прямої ℓ $(4\cdot 5-3(-1)-7\neq 0),$ то справді, за даними вершиною і стороною можна побудувати квадрат, хоча і не єдиний. Позначимо вершини квадрата $A,B,C,D.$ Нехай $\ell-$ сторона $DC.$ Відстань від A до DC за формулою (13): $d=\frac{|4\cdot 5-3(-1)-7|}{\sqrt{25}}=\frac{16}{5}.$

Складемо спочатку рівняння сторін AD і $AB.$ Оскільки $AD\perp DC$ і $AB \parallel DC,$ а $AD \parallel BC,$ то легко знайти кутові коефіцієнти сторін квадрата:

$$k_{AB} = k_{DC} = \frac{4}{3} \qquad \text{і} \qquad k_{AD} = k_{BC} = -\frac{3}{4}.$$

Тепер запишемо рівняння сторін у вигляді (4):

$AB: \ y+1=\frac{4}{3}(x-5);$

$AD: \ y+1=-\frac{3}{4}(x-5).$

Рівняння сторони BC запишемо у вигляді (5), куди входить одна невідома b:

$$y=-\frac{3}{4}x+b.$$

Внаслідок того, що відстань від точки A до сторін BC і DC $d=\frac{16}{5}$, за формулою (13) маємо:

$$\frac{|\,y_A+\frac{3}{4}x_A-b\,|}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=\frac{16}{5} \;\Rightarrow\; \frac{|-1+\frac{15}{4}-b\,|}{\frac{5}{4}}=\frac{16}{5} \;\Rightarrow\; \left|\frac{11}{4}-b\right|=4 \;\Rightarrow\; \frac{11}{4}-b=\pm 4 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left\{b_1=\frac{27}{4};\; b_2=-\frac{5}{4}\right\}.$$

Таким чином, розв'язок задачі не єдиний: сторона BC може лежати як на прямій $y=-\frac{3}{4}x+\frac{27}{4}$, так і на прямій $y=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$.

Задача 7. Серед прямих, що проходять через $P(3;0)$, знайти таку, відрізок якої, утворений внаслідок перетину з прямими

$$2x-y-2=0, \quad x+y+3=0,$$

поділяється точкою P навпіл.

Розв'язання. Нехай пряма ℓ перетинається із заданими прямими ℓ_1 і ℓ_2 відповідно в точках $A_1(x_1;y_1)$ і $A_2(x_2;y_2)$. Тоді оскільки точка P ділить A_1A_2 навпіл, то справджуються співвідношення

$$3=\frac{x_1+x_2}{2}; \qquad 0=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Таким чином, маємо поки що два рівняння з чотирма невідомими x_1, y_1, x_2, y_2. Складемо ще два рівняння. Виходячи з того, що $A_1 \in \ell_1$ і $A_2 \in \ell_2$, підставимо замість x, y у перше задане рівняння (ℓ_1) координати точки A_1, а в друге $(\ell_2)-$ координати точки A_2. Таким чином отримуємо систему чотирьох рівнянь з чотирма невідомими:

$$2y_1 - y_1 - 2 = 0, \qquad x_1 + x_2 = 6 \;\Rightarrow\; x_2 = 6 - x_1;$$

$$x_2 + y_2 + 3 = 0, \qquad y_2 = -y_1.$$

Обмежуючись знаходженням точки A_1, отримуємо:

$$\begin{cases} 2x_1 - y_1 = 2 \\ 6 - x_1 - y_1 + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2x_1 - 2 \\ y_1 = 9 - x_1 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 - 2 = 9 - x_1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{11}{3} \\ y_1 = \dfrac{16}{3} \end{cases}$$

Тепер запишемо рівняння шуканої прямої ℓ у вигляді (6) через координати точок P і A_1:

$$\frac{x-3}{\frac{11}{3}-3} = \frac{y-0}{\frac{16}{3}-0};$$

маємо рівняння прямої ℓ: $\quad x - 3 = \dfrac{y}{8} \;\Rightarrow\; 8x - y - 24 = 0.$

§2. Різні види рівнянь площини

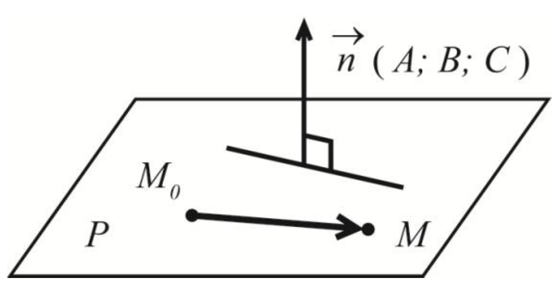
Знайдемо рівняння площини P, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B; C)$. Вектор $\vec{n}$ називається вектор нормалі площини P, або нормальним вектором.

1. <u>Рівняння площини, що проходить через точку перпендикулярно вектору.</u>

На площині P візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$ і побудуємо вектор

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0).$$

Оскільки точки M_0 і M належать площині P,



то $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$, *отже*

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (16)$$

(23) – рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\vec{n} = (A; B; C)$.

2. <u>*Загальне рівняння площини.*</u>

Розкриємо дужки в рівнянні (16) і зведемо подібні доданки

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0,$$

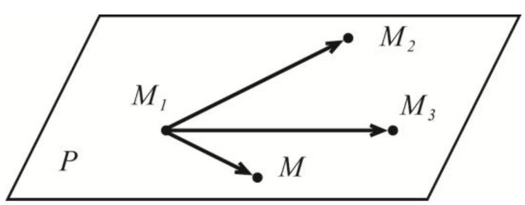
позначимо $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$:.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (17)$$

(17) - загальне рівняння площини.

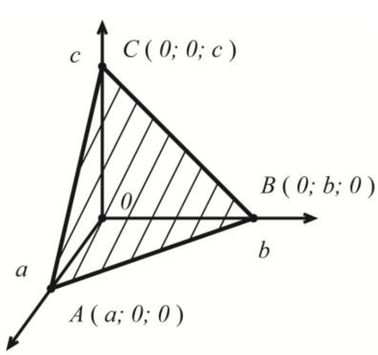
3. <u>*Рівняння площини, що проходить через три точки.*</u>

Нехай задано три точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, *що належать площині* P, *але не лежать на одній прямій.*



$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (18)$$

4. <u>*Рівняння площини у відрізках на осях.*</u>



Нехай площина P *проходить через точки, що лежать на осях координат:* $A(a; 0; 0)$; $B(0; b; 0)$; $C(0; 0; c)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (19)$$

5. <u>*Нормальне рівняння площини.*</u>

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (20)$$

(20) – нормальне рівняння площини, де

$$\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{n^\circ}, Ox}\right), \beta = \left(\widehat{\overrightarrow{n^\circ}, Oy}\right); \gamma = \left(\widehat{\overrightarrow{n^\circ}, Oz}\right),$$

$$\overrightarrow{n^\circ} = (\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma).$$

Зауваження 1. *Для того, щоб звести загальне рівняння площини P до нормального вигляду, потрібно домножити його на нормуючий множник:*

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

знак μ вибираємо протилежним до знаку вільного члена D рівняння (17).

Задача 1. Скласти рівняння площини, що проходить через три точки: $M_1(2;\ 1;\ 0)$, $M_2(3;\ 1;\ -1)$, $M_3(1;\ 1;\ 3)$.

Розв'язання. Використаємо формулу (18) для знаходження рівняння площини, що проходить через три точки. Отримаємо:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ (y-1)(1-3) = 0\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ \ y = 1-$ шукане рівняння площини.

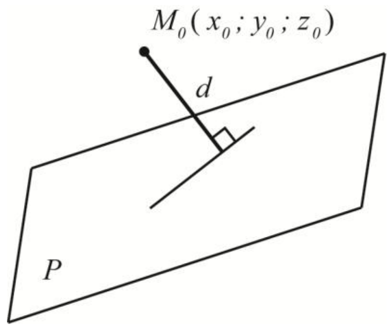
Задача 2. Площина P задана загальним рівнянням

$$2x - y + 2z + 3 = 0.$$

Знайти відстань від деякої точки $M_0(-2; -4; 3)$ до площини P.

Розв'язання. Із загального рівняння площини знайдемо її нормальний вектор:

$$\vec{n} = (2; -1; 2)$$



Візьмемо на площині P довільну точку $M_1(1; 3; -1)$ і побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M_0}$:

$$\overrightarrow{M_1M_0} = (-3; -7; 4).$$

Відстань від точки M_0 до площини P:

$$d = \left|\text{пр}_{\vec{n}}\ \overrightarrow{M_1M_0}\right|.$$

З геометричного змісту скалярного добутку випливає:

$$d = \left|\text{пр}_{\vec{n}}\ \overrightarrow{M_1M_0}\right| = \frac{\left|\vec{n}\ \cdot \overline{M_1M_0}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{|-6+7+8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3.$$

Висновок. *Для того щоб обчислити відстань від будь-якої точки* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *до* площини P *зада ної загальним рівнянням, потрібно звести рівняння площини до нормального вигляду, домноживши його на нормуючий множник*

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

знак μ вибирається протилежним до знаку вільного члена D, і підставити координати точки:

$$d(M_0; P) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Відхиленням точки від площини називається величина

$$\delta(M_0; P) = \frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

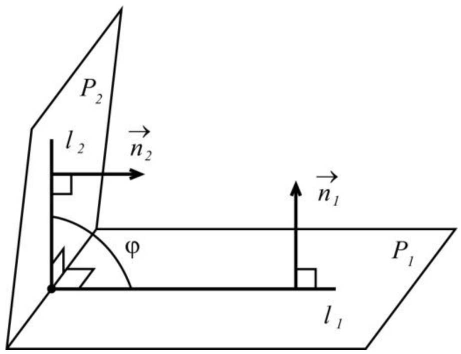
*Якщо точка M_0 і початок координат розташовані по різні сторони від площин*и *P, то відхилення точки від площини додатне $\delta(M_0; P) > 0$, якщо по одну сторону від площини, то відхилення точки від площин*и *P від'ємне $\delta(M_0; P) < 0$.*

Задача 3. Знайти кут між площинами, що здані загальними рівняннями:

$$x-2y+3z-1=0,$$

$$2x-2y+z=0.$$

Розв'язання. Нормальні вектори відповідно:



$$\overrightarrow{n_1} = (1; -2; 3),$$

$$\overrightarrow{n_2} = (2; -2; 1).$$

Двогранний кут між площинами P_1 і P_2 вимірюється лінійним кутом, який утворений між нормальними векторами цих площин $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$.

$$\varphi = \left(\widehat{P_1; P_2}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2}}\right).$$

Обчислимо кут, використовуючи означення скалярного добутку:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{2+4+3}{\sqrt{1+4+9}\cdot\sqrt{4+4+1}} = \frac{9}{3\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Отже, маємо два розв'язки:

$$\varphi = \pm arccos\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Задача 4. Скласти рівняння площини π, що проходить через точки

$A(1;-1;2)$ і $B(0;1;1)$;

1) паралельно вектору $\vec{a} = \{2;0;1\}$;

2) перпендикулярно до вектора $\vec{b} = \{0;1;2\}$;

3) на відстані $d=\sqrt{2}$ від точки $C(3;1;2)$.

Розв'язання. 1. Нехай точка $M(x;y;z) \in \pi$, умовою задачі $\vec{a}$ паралельно π, $\overrightarrow{AB} \in \pi$.

Оскільки $\overrightarrow{AB} = \{-1;2;-1\}$, то за умовою компланарності трьох векторів

Маємо мішаний добуток: $([\vec{AM}, \vec{a}] \cdot \vec{AB}) = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Обчислюючи визначник, отримаємо:

$$-2(x-1) + (y+1) + 4(z-2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad 2x - y - 4z + 5 = 0$ – рівняння площини π.

2. Оскільки $\vec{b}$ – вектор перпендикулярний до площини π, то використовуючи рівняння (16), отримаємо рівняння площини π:

$$0 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y+1) + 2 \cdot (z-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad y + 2z - 3 = 0.$$

3. Оскільки за умовою точка А $\in \pi$, запишемо рівняння площини π у вигляді (16):

$$A(x-1) + B(y+1) + C(z-2) = 0. \qquad (21)$$

Із трьох невідомих коефіцієнтів цього рівняння шуканими будуть два, бо третій (не нульовий) можна вважати за одиницю. Для їх знаходження треба мати два алгебраїчних рівняння, одне з яких отримаємо підстановкою в (21) замість x, y, z координат точки $B(0; 1; 1)$

$$A(-1) + 2B - C = 0 \quad \Rightarrow \quad A - 2B + C = 0. \qquad (22)$$

Нехай $A \neq 0.$ Тоді, взявши A за одиницю, із (22) маємо

$$C = 2B - 1.$$

Друге алгебраїчне рівняння з невідомими B і C треба скласти за умовою п.3 задачі: $d = \sqrt{2}$ і $C(3; 1; 2)$. Спочатку рівняння (21) площини π зведемо до нормального вигляду, домножимо на нормуючий множник:

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\frac{A(x_C-1)+B(y_C+1)+C(z_C-2)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0.$$

Отже, відстань $d(C;\pi)$ отримаємо, підставляючи координати точки $C(3;1;2)$.

$$d(C;\pi)=\frac{|A(x_C-1)+B(y_C+1)+C(z_C-2)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Звідки підстановкою $d=\sqrt{2}, \quad A=1, \quad C=2B-1$, отримаємо:

$$\sqrt{2}=\frac{|1(3-1)+B(1+1)+(2B-1)(2-2)|}{\sqrt{1+B^2+(2B-1)^2}} \quad \Rightarrow$$

домножимо на знаменник і піднесемо до квадрату ліву і праву частини рівняння:

$$\Rightarrow \quad 2[1+B^2+(2B-1)^2]=|2+2B+0|^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 5B^2-4B+2=2(1+2B+B^2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3B^2-8B=0 \quad \Rightarrow \quad \left\{B=0;\ B=\frac{8}{3}\right\}.$$

Таким чином, маємо два розв'язки задачі:

1. якщо $A=1; \quad B=0; \quad C=-1 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x-1-z+2=0 \quad \Rightarrow \quad x-z+1=0 \ - \ (\pi).$$

2. якщо $A=1; \quad B=\frac{8}{3}; \quad C=\frac{16}{3}-1=\frac{13}{3} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x-1+\frac{8}{3}(y+1)+\frac{13}{3}(z-2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3x+8y+13z-21=0 \ - \ (\pi).$$

Припустимо, що може існувати ще один розв'язок задачі, коли в рівнянні (21) коефіцієнт A дорівнює нулю. Тоді з (22) випливає $C=2B$ і, аналогічно

$$d=\frac{|B(1+1)+2B\cdot 0|}{\sqrt{B^2+4B^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\neq\sqrt{2},$$

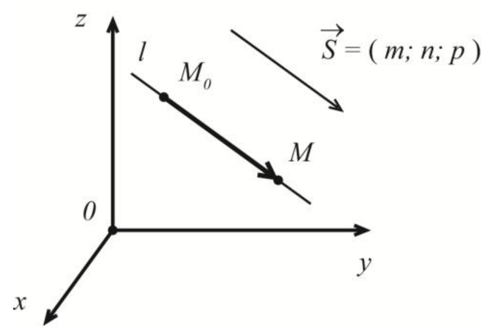
що суперечить умові задачі. Отже, дві площини задовольняють умову задачі:

$$x - z + 1 = 0 \quad \text{і} \quad 3x + 8y + 13z - 21 = 0.$$

§3. Рівняння прямої у просторі

Складемо рівняння прямої l*, що проходить через точку* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *паралельно вектору* $\vec{s} = (m; n; p)$*. Вектор* $\vec{s}$ *називається напрямним вектором прямої* l.

1. *<u>Канонічне рівняння прямої в просторі</u>.*



На прямій l *візьмемо довільну точку* $M(x; y; z)$*, тоді*

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0;\ y - y_0; z - z_0).$$

Оскільки, вектори $\overrightarrow{M_0M}$ *і* $\vec{s}$ *- колінеарні, їх відповідні координати пропорційні:*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \qquad (23)$$

(23) - канонічне рівняння прямої l *в просторі.*

2. *<u>Параметричні рівняння прямої в просторі</u>.*

Прирівняємо (23) до параметра t*, де* $t \in R$*:*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t,$$

Розв'яжемо відносно x *і* y*,* z *:*

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp \end{cases} \qquad (24)$$

(24) - параметричні рівняння прямої l в просторі.

3. *Векторне рівняння прямої в просторі.*

Якщо $\vec{r} = (x; y; z)$, $\overrightarrow{r_0} = (x_0;\ y_0; z_0)$, *векторне рівняння прямої l в просторі:*

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t\vec{s}. \tag{25}$$

4. *Рівняння прямої в просторі, що проходить через дві точки.*

Нехай задано дві точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ *і* $M_2(x_2; y_2; z_2)$. *Запишемо рівняння прямої, що проходить через ці точки:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{26}$$

5. *Загальне рівняння прямої в просторі.*

Пряма у просторі задається перетином двох непаралельних площин.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{27}$$

(27) – загальне рівняння прямої в просторі, де

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ - *рівняння площини* P_1,

$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$- *рівняння площини* P_2,

Площини P_1 *і* P_2 - *непаралельні. Нормальні вектори відповідно:*

$$\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1), \overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2).$$

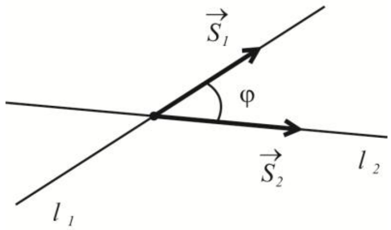
Направляючий вектор є векторним добутком нормальних векторів площин:

$$\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \left(\vec{i}\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \vec{j}\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \vec{k}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right).$$

Задача 1. Знайти кут між прямими l_1 і l_2, заданими канонічними рівняннями:

$$l_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}; \qquad l_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

Розв’язання. Напрямні вектори відповідно:



$$\overrightarrow{s_1} = \left(1; -1; \sqrt{2}\right); \qquad \overrightarrow{s_2} = \left(1; 1; \sqrt{2}\right).$$

З рисунка видно, що кут між прямими l_1 і l_2, дорівнює куту між їх напрямними векторами:

$$\varphi = \left(\widehat{l_1; l_2}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{s_1}; \overrightarrow{s_2}}\right).$$

Обчислимо його, використовуючи означення скалярного добутку:

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2})}{|\overrightarrow{s_1}| \cdot |\overrightarrow{s_2}|} = \frac{1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1+1+2} \cdot \sqrt{1+1+2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

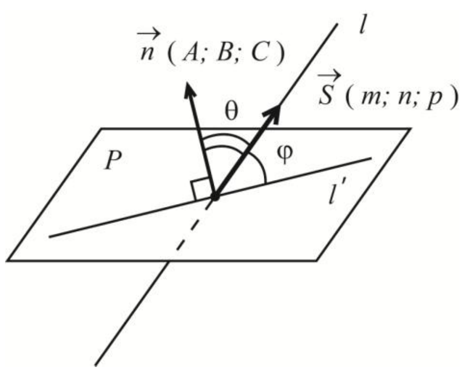
Отже, маємо два розв'язки:

$$\varphi = \pm arccos\frac{1}{2} => \left[\begin{array}{l} \varphi_1 = \dfrac{\pi}{3}, \\ \varphi_2 = \dfrac{5\pi}{3}. \end{array}\right.$$

Задача 2. Нехай пряма l задана канонічним рівнянням:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z-3}{-1},$$

а площина P – загальним рівнянням: $2x + z - 4 = 0$. Знайти кут між ними φ.



Розв'язання. Кут між прямою l і площиною P вимірюється кутом між прямою l і її проекцію l' на площину P . Позначимо $\theta = \left(\widehat{\vec{S}, \vec{n}}\right)$ - кут між напрямним вектором $\vec{s}$ прямої l та вектором нормалі $\vec{n}$ площини P , які мають координати відповідно:

$$\vec{s} = (3; 0; -1); \quad \vec{n} = (2; 0; -4).$$

За означення скалярного добутку випливає:

$$cos\theta = \frac{\vec{s} \cdot \vec{n}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|}$$

Оскільки,

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

то

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \frac{\vec{s}\cdot\vec{n}}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|} =$$

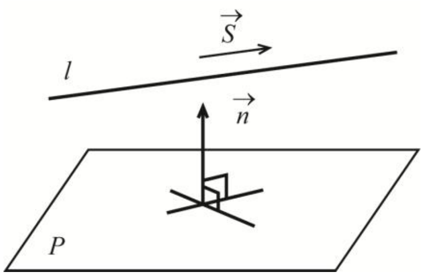
$$= \frac{6+0+4}{\sqrt{3^2+0^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+(-4)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, маємо два розв’язки:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4},$$
$$\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}.$$

Задача 3. При якому значенні m пряма

$$l\colon \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$$



паралельна площині P: $x - 3y + 6z + 7 = 0$?

Розв’язання. Якщо $l \parallel P \Leftrightarrow \vec{s}\perp\vec{n} \Leftrightarrow (\vec{s};\vec{n}) = 0$, де $\vec{s} = (3; m; -2)$, $\vec{n} = (1; -3; 6)$, тоді

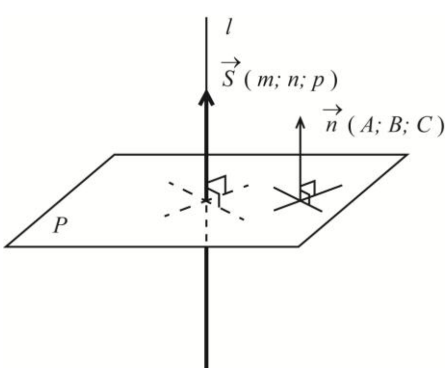
$$(\vec{s};\vec{n}) = 3 - 3m - 12 = 0$$

Отже, при $m = -3$ задана пряма і площина паралельні.

Задача 4. При яких значеннях n і C пряма

$$l\colon \frac{x-2}{n} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$$

перпендикулярна до площини P: $3x - 2y + Cz + 1 = 0$?



Розв’язання. Якщо $l\perp P \Leftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{n}$, то їх координати пропорційні. Оскільки

$$\vec{s} = (n; 4; -3), \vec{n} = (3; -2; C) \Leftrightarrow$$

$$\frac{n}{3} = \frac{4}{-2} = \frac{-3}{C}$$

$$\frac{n}{3} = -2 = \frac{-3}{C},$$

Отже, $n = 6, \mathrm{C} = -\frac{3}{2}$.

Задача 5. Нехай прямі l_1 і l_2 задані канонічними і параметричими рівняннями:

$$l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4};$$

$$l_2: \begin{cases} x = 7 + 3t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 1 - 2t. \end{cases}$$

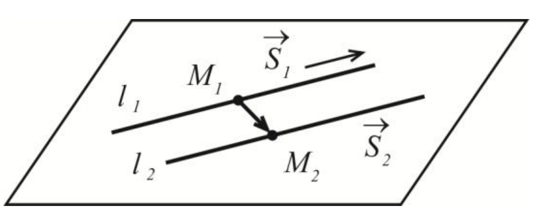
Довести, що l_1 і l_2 лежать в одній площині.

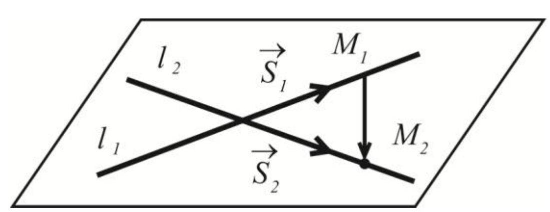
Розв'язання. Дві прямі у просторі можуть бути:

- паралельні,
- перетинатися,
- мимобіжними.

Дві паралельні прямі в просторі завжди лежать в одній площині. Дві прямі в просторі, що перетинаються завжди лежать в одній площині.

Розглянемо кожен з випадків більш детально.





На кожній прямій l_1 і l_2 візьмемо довільну точку $M_1(1; -2; 5)$ і $M_2(7; 2; 1)$ відповідно. Побудуємо вектор:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (6;\ 4;\ -4).$$

Напрямними векторами прямих l_1 і l_2 відповідно є вектори:

$$\overrightarrow{s_1} = (2; -3; 4); \qquad \overrightarrow{s_2} = (3; 2; -2).$$

Оскільки прямі лежать в одній площині, то вектори $\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{s_1}$ і $\overrightarrow{s_2}$– компланарні, отже, мішаний добуток цих векторів рівний нулю:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{S_2}\right) = \begin{vmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 36 + 48 - 16 - 36 + 16 - 48 = 0$$

Отже, рівність виконується, прямі лежать в одній площині, тобто вони не є мимобіжними. Визначимо тепер прямі паралельні чи перетинаються.

Напрямні вектори прямих не пропорційні, тому прямі не паралельні

$$\overrightarrow{s_1} \neq \lambda \overrightarrow{s_2},$$

при довільному $\lambda \in \boldsymbol{R}$.

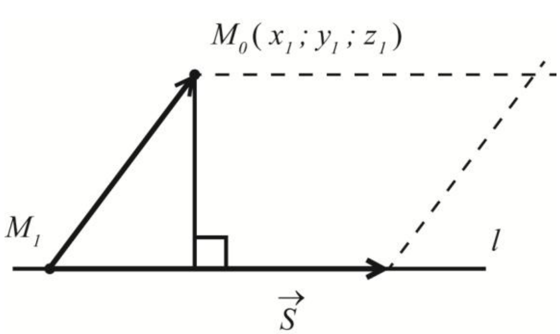
Отже прямі l_1 і l_2 перетинаються $\mathrm{l}_1 \cap l_2$.

Задача 6. Нехай пряма l задана канонічним рівнянням:

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2},$$

знайти відстань від деякої точки $M_0(2; 3; -1)$ до прямої l.

Розв'язання. На прямій l візьмемо довільну точку $M_1(5,0,-25)$ і побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M_0}$:



$\overrightarrow{M_1M_0} = (-3; 3; 24)$. Напрямний вектор $\vec{s}$ прямої l має координати

$$\vec{s} = (3; 2; -2).$$

Побудуємо паралелограм на векторах $\overrightarrow{M_1M_0}$ і $\vec{s}$.

З одного боку площа паралелограма обчислюється за формулою:

$$S_{\text{парал.}} = h \cdot |\vec{s}|,$$

де висота паралелограма h дорівнює відстані від точки M_0 до прямої l: $h = d(M_0, l)$.

З іншого боку з геометричного змісту векторного добутку випливає:

$$S = \left|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{s}\right|.$$

Об'єднаємо останні результати:

$$h = d(M_0, l) = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{s}\right|}{|\vec{s}|} = \frac{\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 24 \\ 3 & 2 & -2 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{9+4+4}} =$$

$$= \frac{\left|\vec{i}\begin{vmatrix} 3 & 24 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -3 & 24 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{17}} = \frac{\left|-54\vec{i} + 66\vec{j} - 15\vec{k}\right|}{\sqrt{17}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(-54)^2 + 66^2 + (-15)^2}}{\sqrt{17}} = \frac{21\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = 21.$$

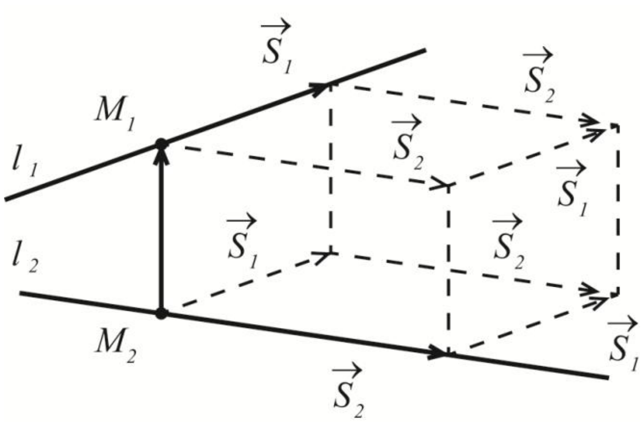
Задача 7. Нехай мимобіжні прямі l_1 і l_2 задані канонічними рівняннями:

$$l_1: \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}; \qquad l_2: \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}.$$

Знайти найкоротшу відстань між ними.

Розв'язання. Напрямними векторами прямих l_1 і l_2 відповідно є вектори:

$$\overrightarrow{S_1} = (3; 4; -2); \ \overrightarrow{S_2} = (6; -4; -1).$$



На кожній прямій l_1 і l_2 візьмемо довільну точкум $M_1(-7; -4; -3)$ і $M_2(21; -5; 2)$ відповідно. Отже, вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ має координати:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (28; \ -1; \ 5).$$

Припустимо, що вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{S_1}$ і $\overrightarrow{S_2}$ - некомпланарні. Побудуємо на них паралелепіпед. З одного боку об'єм паралелепіпеда

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h,$$

оскільки основа паралелепіпеда – це паралелограм, побудований на векторах $\overrightarrow{S_1}$ і $\overrightarrow{S_2}$, то використовуючи геометричний зміст векторного добутку його площа рівна:

$$S_{\text{осн}} = |\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}|.$$

Отже, об'єм:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = |\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}| \cdot h.$$

З іншого боку, використовуючи геометричний зміст мішаного добутку, об'єм паралелепіпеда дорівнює:

$$V_{\text{парал.}} = \left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \ \overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}\right|.$$

Об'єднаємо отримані результати:

$$|\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}| \cdot h = \left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \ \overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}\right|,$$

$$d(l_1, l_2) = h = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \ \overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}\right|}{|\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}|} = \frac{\left\|\begin{matrix} 28 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{matrix}\right\|} =$$

$$= \frac{|-112 + 12 + 60 - 120 - 3 - 224|}{\left|\vec{\imath}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}\right|} = \frac{387}{\sqrt{144 + 81 + 1296}} = \frac{43}{13} = 3\frac{4}{13}.$$

Задача 8. Знайти проекцію прямої, що проходить через точки $M_1(1; 2; 0)$ і $M_2(2; 3; 4)$, на площину Oxy.

Розв'язання. Напрямний вектор цієї прямої $\overrightarrow{M_1M_2} = (1;\ 1;\ 4)$. Канонічне рівняння прямої, що проходить через точку M_1 у напрямі $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}.$$

Перепишемо цю систему рівнянь у вигляді (27) таким чином:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} \\ \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+1=0, \\ 4y-z-8=0. \end{cases}$$

Перше рівняння цієї системи не має координати z, тобто описує площину, паралельну вісі Oz, і, отже, перпендикулярну до площини Oxy. Іншими словами, площина $x-y+1=0$ проектує розглядувану пряму на площину Oxy. Отже, шукана проекція прямої на площину Oxy (тобто на площину $z=0$) є лінією перетину двох площин: $z=0$ і $x-y+1=0$. З'ясуємо, як цю систему рівнянь записати в канонічному вигляді. Для цього треба визначити точку M_0 на цій прямій і напрямний вектор прямої $\vec{s}$.

Точка M_0 задовільняє рівняння двох площин: $z=0$ і $x-y+1=0$. Отже, $z_0=0$, $x_0-y_0+1=0$. Візьмемо довільно x_0, але найкраще тут $x_0=0$, отримаємо $y_0=1$. Отже, маємо $M_0(0;1;0)$.

Подамо $\vec{s}$ у вигляді векторного добутку $\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$

Оскільки $\vec{n}_1 = \{0;0;1\}$, $\vec{n}_2 = \{1;-1;0\}$, то

$$\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1,1,0)$$

Отже, шукана проекція лінії на площину $z=0$:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{0} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{0}.$$

Задача 9. Знайти точку A', симетричну точці $A(1;-1;3)$ відносно площини $3x-3y+2z-34=0$.

Розв'язання. Точки A і A' розташовані на одному перпендикулярі до площини на однаковій відстані від неї, але по різні боки. Відрізок AA' ділиться навпіл точкою K перетину площини і цього перпендикуляра і, отже, її координати знайдемо із системи рівнянь площини і перпендикуляра ℓ. Складемо параметричні рівняння (24) прямої ℓ, що проходить через A у напрямі $\vec{s} = (3;-3;2)$:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-3}{2} = t \Rightarrow x = 3t+1; \; y = -3t-1; \; z = 2t+3.$$

Знайдемо точку K як розв'язок отриманої системи рівнянь прямої ℓ і площини $3x-3y+2z-34=0.$ Підставимо в останнє рівняння отримані вирази $x(t), y(t), z(t)$ та знайдемо параметр t для точки K:

$$3(3t+1)-3(-3t-1)+2(2t+3)-34=0 \Rightarrow t=1.$$

Отже,

$$x_K = 3+1=4, \quad y_K = -3-1=-4, \quad z_K = 2+3=5.$$

Тоді отримаємо:

$$x_{A'} = 2x_K - x_A = 2\cdot 4 - 1 = 7;$$

$$y_{A'} = 2y_K - y_A = 2\cdot(-4)-(-1) = -7;$$

$$z_{A'} = 2z_K - z_A = 2\cdot 5 - 3 = 7.$$

Отже, шукана точка $A'(7;-7;7)$.

Завдання для типового розрахунку

Задані координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти:

1) довжину ребра A_1A_2;

2) площу грані $A_1A_2A_3$;

3) загальне рівняння площини $A_2A_3A_4$;

4) рівняння ребра A_1A_3;

5) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

6) двогранний кут між гранями $A_1A_2A_3$ і $A_2A_3A_4$;

7) відхилення точки A_4 від площини $A_1A_2A_3$;

8) рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на основу $A_1A_2A_3$;

9) загальні рівняння прямої A_2A_3;

10) кут між прямою A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$.

1. $A_1(-5;4;1)$, $A_2(3;-2;0)$, $A_3(7;-6;4)$, $A_4(-1;-1;5)$.

2. $A_1(-4;1;3)$, $A_2(0;2;3)$, $A_3(-1;5;2)$, $A_4(0;-4;1)$.

3. $A_1(1;-3;4)$, $A_2(0;-1;2)$, $A_3(7;2;-3)$, $A_4(-1;2;3)$.

4. $A_1(0;-3;1)$, $A_2(2;-3;-4)$, $A_3(-1;-1;2)$, $A_4(0;2;3)$.

5. $A_1(1;-2;3)$, $A_2(4;-3;-2)$, $A_3(4;5;-1)$, $A_4(0;1;-3)$.

6. $A_1(-1;2;-3)$, $A_2(5;-4;0)$, $A_3(-2;3;1)$, $A_4(0;-4;-2)$.

7. $A_1(-4;3;1)$, $A_2(0;1;-5)$, $A_3(2;4;3)$, $A_4(-5;3;1)$.

8. $A_1(-3;4;1)$, $A_2(5;-3;1)$, $A_3(-1;-2;-3)$, $A_4(-4;2;-3)$.

9. $A_1(1;3;6)$, $A_2(2;2;1)$, $A_3(-1;0;1)$, $A_4(-4;6;-3)$.

10. $A_1(0;-1;-1)$, $A_2(-2;3;5)$, $A_3(1;-5;-9)$, $A_4(-1;-6;3)$.

11. $A_1(7;2;4)$, $A_2(7;-1;-2)$, $A_3(3;3;1)$, $A_4(-4;2;1)$.

12. $A_1(2;3;1)$, $A_2(4;1;-2)$, $A_3(6;3;7)$, $A_4(7;5;-3)$.

13. $A_1(1;1;-1)$, $A_2(2;3;1)$, $A_3(3;2;1)$, $A_4(5;9;-8)$.

14. $A_1(1;2;0)$, $A_2(1;-1;2)$, $A_3(0;1;-1)$, $A_4(-3;0;1)$.

15. $A_1(-1;2;-3)$, $A_2(4;-1;0)$, $A_3(2;1;-2)$, $A_4(3;4;5)$.

16. $A_1(1;3;0)$, $A_2(4;-1;2)$, $A_3(3;0;1)$, $A_4(-4;3;5)$.

17. $A_1(-1;2;4)$, $A_2(-1;-2;-4)$, $A_3(3;0;-1)$, $A_4(7;-3;1)$.

18. $A_1(0;-3;1)$, $A_2(-4;1;2)$, $A_3(2;-1;5)$, $A_4(3;1;-4)$.

19. $A_1(1;3;0)$, $A_2(4;-1;2)$, $A_3(3;0;1)$, $A_4(-4;3;5)$.

20. $A_1(7;1;2)$, $A_2(-5;3;-2)$, $A_3(3;3;5)$, $A_4(4;5;-1)$.

21. $A_1(3;2;7)$, $A_2(1;3;2)$, $A_3(-2;1;2)$, $A_4(4;0;0)$.

22. $A_1(-2;1;0)$, $A_2(2;2;5)$, $A_3(3;1;2)$, $A_4(1;-2;1)$.

23. $A_1(-2;-1;-1)$, $A_2(0;3;2)$, $A_3(3;1;-4)$, $A_4(-4;7;3)$.

24. $A_1(-2;1;2)$, $A_2(4;0;0)$, $A_3(3;2;7)$, $A_4(1;3;2)$.

25. $A_1(1;3;2)$, $A_2(3;2;7)$, $A_3(4;0;0)$, $A_4(-2;1;2)$.

26. $A_1(3;1;-2)$, $A_2(1;-2;1)$, $A_3(-2;1;2)$, $A_4(4;0;0)$.

27. $A_1(3;10;-1)$, $A_2(-2;3;-5)$, $A_3(-6;0;-3)$, $A_4(1;-1;2)$.

28. $A_1(1;0;2)$, $A_2(1;2;-1)$, $A_3(2;-2;1)$, $A_4(2;1;0)$.

29. $A_1(1;2;-3)$, $A_2(1;0;1)$, $A_3(2;-1;6)$, $A_4(0;-5;-4)$.

30. $A_1(1;2;0)$, $A_2(1;-1;2)$, $A_3(0;1;-1)$, $A_4(-3;0;1)$.

31. $A_1(1;1;3)$, $A_2(2;0;3)$, $A_3(4;-1;0)$, $A_4(2;-3;-6)$.

32. $A_1(2;3;-1)$, $A_2(4;1;2)$, $A_3(6;3;-7)$, $A_4(-5;-4;-8)$.

33. $A_1(2;-1;1)$, $A_2(5;5;4)$, $A_3(3;2;-1)$, $A_4(4;1;3)$.

34. $A_1(2;1;-1)$, $A_2(3;0;1)$, $A_3(2;-1;3)$, $A_4(0;8;0)$.

35. $A_1(-1;1;-3)$, $A_2(0;0;-5)$, $A_3(3;1;0)$, $A_4(2;5;-8)$.

36. $A_1(4;2;5)$, $A_2(3;0;4)$, $A_3(0;0;3)$, $A_4(5;-2;-4)$.

37. $A_1(1;1;-1)$, $A_2(2;0;3)$, $A_3(3;4;0)$, $A_4(4;8;2)$.

38. $A_1(4;3;3)$, $A_2(2;-1;-1)$, $A_3(1;1;3)$, $A_4(-2;1;3)$.

39. $A_1(0;1;-2)$, $A_2(-1;4;2)$, $A_3(5;-3;3)$, $A_4(-4;1;8)$.

40. $A_1(2;1;-3)$, $A_2(3;0;0)$, $A_3(-1;2;3)$, $A_4(2;3;8)$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ І ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. I: Учеб. пособие для втузов.— 5-е изд., испр.— М.: Высш. шк., 1999.— 304 с.: ил.
2. *Клетеник Д.В.* Сбрник задач по аналитической геометрии. .— М.: Наука, главная редакция физ.-матюлитературы, 1969, - 254 с.
3. *Дубовик В.П., Юрик І.І.*Вища математика: Навч. посібн.— К.: А.С.К., 2006.— 648 с.: ил.
4. *Каплан И. А.* Практические занятия по высшей математике.Часть V.— 2-е изд.— Харьков, Издательство Харьковского университета, 1972.— 412 с.
5. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. 1 часть.— М.: Рольф, 2002.— 288 с.: ил.
6. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа. / под ред. *А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича*.— М.: Наука, Физматлит, 1981.— 464 с.

ЗМІСТ