

## АНАЛИЗ СИСТЕМ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С РЕДУЦИРОВАННЫМ НАБЛЮДАТЕЛЕМ СОСТОЯНИЯ

Толочко О.И., к.т.н., доц., Коцегуб П.Х., д.т.н., проф., Федоряк Р.В., асп.

Донецкий государственный технический университет

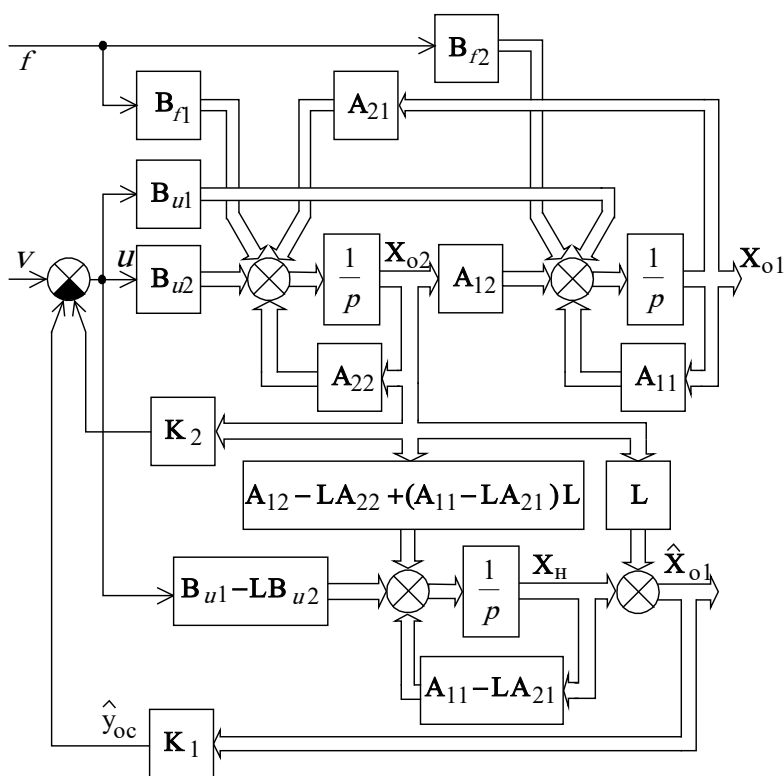


Рисунок 1.

Рассмотрим систему модального управления (СМУ) с редуцированным наблюдателем состояния (НС). При этом модальный регулятор (МР) замыкается по измеряемым переменным состояния объекта регулирования (ОР) и по восстановленным при помощи НС не измеряемым переменным состояния. На систему действуют измеряемый управляющий и не измеряемый возмущающий сигналы. Структурная схема такой системы в пространстве состояния показана на рис.1, где обозначены  $v$  – управляющее

воздействие,  $f$  – возмущающее воздействие,  $X_{o1}$  –  $m$ -мерный вектор не измеряемых переменных состояния объекта,  $\hat{X}_{o1}$  – его оценка редуцированным НС,  $X_{o2}$  –  $r$ -мерный вектор измеряемых переменных состояния объекта,  $\hat{y}_{oc} = K_{n1} \hat{X}_{o1}$  – оценка линейного функционала не измеряемых переменных состояния ОР,  $K_1 = [k_{11} \ k_{12} \ \dots \ k_{1m}]$ ,  $K_2 = [k_{21} \ k_{22} \ \dots \ k_{2r}]$  – коэффициенты передачи модального регулятора по векторам переменных,  $\hat{X}_{o1}$  и  $X_{o2}$  соответственно,  $L$  – коэффициенты матрицы корректирующих связей НС, размером  $m \times r$ .

Векторы  $K_1$  и  $K_2$  связаны с вектором коэффициентов модального регулятора СМУ без НС следующими соотношениями:

$$K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_m \mid k_{m+1} \ k_{m+2} \ \dots \ k_n] = [K_1 \mid K_2], \quad (1)$$

где  $n = m + r$  – порядок ОР.

В принципе некоторые или все коэффициенты вектора  $\mathbf{K}_2$  могут быть равны нулю. В этом случае речь уже идет не о модальном управлении, а о системе с произвольной структурой с единственным условием: линейная комбинация восстановленных наблюдателем переменных состояния поступает только на вход внешнего регулятора.

Система рис.1 описывается в пространстве состояний следующей системой уравнений:

$$p \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{o1} \\ \mathbf{X}_{o2} \\ \tilde{\mathbf{X}}_{o1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{B}_{u1}\mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_{u1}\mathbf{K}_2 & \mathbf{B}_{u1}\mathbf{K}_1 \\ \mathbf{A}_{21} - \mathbf{B}_{u2}\mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{B}_{u2}\mathbf{K}_2 & \mathbf{B}_{u2}\mathbf{K}_1 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{11} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{o1} \\ \mathbf{X}_{o2} \\ \tilde{\mathbf{X}}_{o1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{u1} \\ \mathbf{B}_{u2} \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{f1} \\ \mathbf{B}_{f2} \\ \mathbf{B}_{f1} - \mathbf{L}\mathbf{B}_{f2} \end{bmatrix} f, \quad (2)$$

где  $\tilde{\mathbf{X}}_{o1} = \mathbf{X}_{o1} - \hat{\mathbf{X}}_{o1}$  – ошибка оценивания наблюдателя.

Нетрудно показать, что

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{B}_{u1}\mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_{u1}\mathbf{K}_2 \\ \mathbf{A}_{21} - \mathbf{B}_{u2}\mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{B}_{u2}\mathbf{K}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{u1} \\ \mathbf{B}_{u2} \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{K}_1 \mid \mathbf{K}_2] = \mathbf{A} - \mathbf{B}_u \mathbf{K} = \mathbf{A}_{o3}, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{o3} = \mathbf{A} - \mathbf{B}_u \mathbf{K} \quad \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{u1} \\ \mathbf{B}_{u2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

– матрицы состояния объекта регулирования и СМУ, замкнутой по собственным переменным состояния (без НС), и вектор управления ОР соответственно.

Обозначим также

$$\mathbf{X}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{o1} \\ \mathbf{X}_{o2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{f1} \\ \mathbf{B}_{f2} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Подставляя выражения (3)-(5) в уравнение (2) и объединяя 2 верхние клетки 3-го столбца клеточной матрицы состояния, получаем его в более простой форме:

$$p \begin{bmatrix} \mathbf{X}_o \\ \tilde{\mathbf{X}}_{o1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{o3} & \mathbf{B}_u \mathbf{K}_1 \\ 0 & \mathbf{A}_{нз} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_o \\ \tilde{\mathbf{X}}_{o1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_u \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_f \\ \mathbf{B}_{f1} - \mathbf{L}\mathbf{B}_{f2} \end{bmatrix} f, \quad (6)$$

где  $\mathbf{A}_{нз} = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}$  – матрица состояния замкнутого наблюдателя.

Таким образом, матрица состояния СМУ с редуцированным НС приводится к такой же треугольной форме, как и для СМУ с НС полного порядка [1].

Из (6) следует, что характеристический полином СМУ с редуцированным НС  $G_3$  равен произведению характеристических полиномов СМУ без НС  $G_{o3}$  и НС  $G_{нз}$ :

$$G_3(p) = \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_3) = \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{o3}) \cdot \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{нз}) = G_{o3}(p) \cdot G_{нз}(p), \quad (7)$$

т.е. известное утверждение о раздельности и независимости собственных значений замкнутой системы и наблюдающего устройства справедливо не только для наблюдателей полного порядка, но и для редуцированных.

При анализе выражения (7) может возникнуть впечатление о том, что включение в систему наблюдателя снижает ее быстродействие. Однако на самом деле это не так, потому что в общем случае быстродействие и другие показатели качества переходных процессов зависят не только от полюсов передаточной функции (ПФ), но и от ее нулей. В связи с этим определим из (6) матричную ПФ исследуемой СМУ от управляющего и возмущающего воздействий до вектора состояния:

$$\mathbf{W}_x(p) = (p\mathbf{I} - \mathbf{A}_3)^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{03} & -\mathbf{B}_u \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{0} & p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{н3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_u & \mathbf{B}_f \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{f1} - \mathbf{L} \mathbf{B}_{f2} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Воспользовавшись формулой обращения клеточной матрицы [2], получим

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_x(p) &= \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{X}_o(p)}{\varphi(p)} & \frac{\mathbf{X}_o(p)}{f(p)} \\ \frac{\tilde{\mathbf{X}}_{o1}(p)}{\varphi(p)} & \frac{\tilde{\mathbf{X}}_{o1}(p)}{f(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{xv}(p) & \mathbf{W}_{xf}(p) \\ \mathbf{W}_{\tilde{x}v}(p) & \mathbf{W}_{\tilde{x}f}(p) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{03})^{-1} \mathbf{B}_u & (p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{03})^{-1} \mathbf{B}_f + (p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{03})^{-1} \mathbf{B}_u \cdot \mathbf{K}_1 (p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{н3})^{-1} (\mathbf{B}_{f1} - \mathbf{L} \mathbf{B}_{f2}) \\ \mathbf{0} & (p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{н3})^{-1} (\mathbf{B}_{f1} - \mathbf{L} \mathbf{B}_{f2}) \end{bmatrix}. \quad (9) \end{aligned}$$

Из (12) видно, что ПФ СМУ с НС от управляющего воздействия до переменных состояния объекта регулирования  $\mathbf{W}_{xu}(p)$  совпадает с соответствующей ПФ СМУ без НС  $\mathbf{W}_{xuo}(p)$  (см. схему рис.2):

$$\mathbf{W}_{xv}(p) = \frac{\mathbf{X}_o(p)}{\varphi(p)} = \mathbf{W}_{xvo}(p) = (p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{03})^{-1} \mathbf{B}_u = \frac{\text{Adj}(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{03}) \mathbf{B}_u}{\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{03})}, \quad (10)$$

а ошибки оценивания при обработке управляющего воздействия тождественно равны нулю. Сопоставляя характеристический полином ПФ (7) с полиномом (10), приходим к выводу, что передаточные функции СМУ с редуцированным НС полного порядка по управляющему воздействию содержат в числителе характеристический полином наблюдателя, который сокращается с таким же полиномом в знаменателе. Это свойство систем с редуцированным НС было замечено еще Н.Т. Кузовковым [1] при рассмотрении конкретных примеров, однако оно не было доказано в общем виде.

При обработке возмущающего воздействия поведение вектора ошибок оценивания  $\tilde{\mathbf{X}}_{o1}$  определяется передаточной функцией  $\mathbf{W}_{xfn}(p)$  замкнутого НС, к которому приложено возмущающее воздействие

$$\mathbf{W}_{\tilde{x}f}(p) = \tilde{\mathbf{X}}_{o1}(p) / f(p) = \mathbf{W}_{xfn}(p) = (p\mathbf{I} - \mathbf{A}_{н3})^{-1} (\mathbf{B}_{f1} - \mathbf{L} \mathbf{B}_{f2}), \quad (11)$$

а поведение координат объекта зависит как от параметров объекта, так и от параметров наблюдателя.

Анализируя правую верхнюю клетку матрицы (24), можно записать:

$$W_{xf}(p) = X_o(p) / f(p) = W_{xfo}(p) + W_{xvo}(p) \cdot W_{yoc\ f\hat{h}}(p) \quad (12)$$

где

$$W_{yoc\ f\hat{h}}(p) = \hat{y}_{oc}(p) / f(p) = K_1(pI - A_{нз})^{-1}(B_{f1} - LB_{f2}) = K_1 W_{xf\hat{h}}(p) \quad (13)$$

– передаточная функция замкнутого наблюдателя от приложенного к нему возмущающего воздействия до суммарного сигнала обратной связи внешнего регулятора по переменным состояния наблюдателя (см. рис.3).

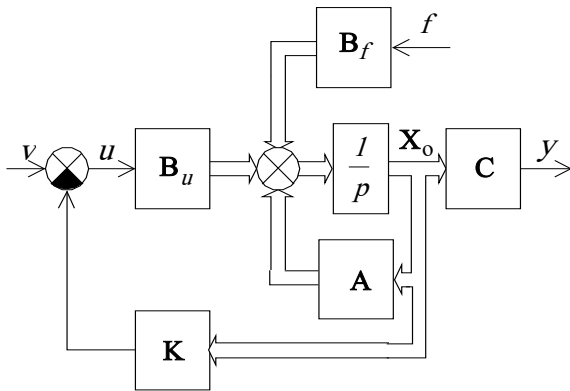


Рисунок 2

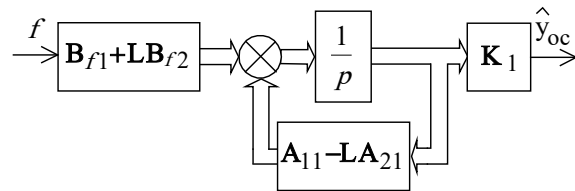


Рисунок 3

Следовательно, передаточные функции СМУ с НС полного порядка (рис.1) по возмущающему воздействию равна сумме соответствующей передаточной функции СМУ без НС (рис.2)

по возмущающему воздействию и произведения передаточной функции СМУ без НС по управляющему воздействию и передаточной функции замкнутого наблюдателя (рис.3) от возмущающего воздействия, приложенного к НС, до суммарного сигнала обратной связи модального регулятора по переменным состояния наблюдателя.

Следует отметить, что полученные результаты справедливы и в том случае, если управляющее и возмущающее воздействия являются не скалярными, а векторными сигналами.

#### Литература

1. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: “Машиностроение”, 1976. –184 с.
2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: “Наука”, 1970. – 664 с.

## ANALYSIS OF MODAL CONTROL SYSTEM WITH REDUCED STATE OBSERVER

Толочко О.И., к.т.н., доц., Коцегуб П.Х., д.т.н., проф., Федоряк Р.В., асп.

O. Tolochko, P. Kotsegub, R.Fedoryak.

Donetsk state technical university.