

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

РОБОТОТЕХНІКА ТА МЕХАТРОНІКА

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів, які навчаються за освітньою програмою
«Електромеханічні системи автоматизації, електропривод та електромобільність»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Робототехніка та мехатроніка: розрахунково-графічна робота [Електронний ресурс]: навчальний посібник для студ. спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: С.М. Пересада, Є.О. Ніконенко, О.Ю. Зінченко – Електронні текстові дані (1 файл: 2,1 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 115 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 6 від 25.02.2021р.)
за поданням Вченої ради факультету електроенерготехніки та автоматики
(протокол № 7 від 22.02.2021р.)*

Електронне мережне навчальне видання

РОБОТОТЕХНІКА ТА МЕХАТРОНІКА

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА

Укладачі	<i>Пересада Сергій Михайлович, докт. техн. наук, проф. Ніконенко Євген Олексійович, асп., асист. Зінченко Олексій Юрійович, студ.</i>
Відповідальний редактор	<i>Бур'ян С.О. канд. техн. наук, доц.</i>
Рецензент	<i>Чумак В.В. канд. техн. наук, доц., доцент кафедри електромеханіки факультету електроенерготехніки та автоматики КПІ ім. Ігоря Сікорського</i>

Навчальний посібник включає завдання та методичні матеріали щодо виконання та оформлення розрахунково-графічної роботи з дисципліни «Робототехніка та мехатроніка». Призначений для здобувачів ступеня бакалавра освітньою програмою «Електромеханічні системи автоматизації, електропривод та електромобільність» спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка».

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1 ПРОГРАМА РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ	6
1.1 Вихідні дані програми:	7
1.2 Структура маніпулятора та системи автоматичного програмування.....	8
1.3 Завдання на розрахунково-графічну роботу	9
1.4 Індивідуальні завдання	11
2 ПРОЕКТУВАННЯ ТРАЄКТОРІЇ РУХУ.....	12
2.1 Розрахунок відрізка	12
2.2 Розрахунок дуги	19
2.3 Розрахунок кола	22
3 КІНЕМАТИКА МАНІПУЛЯЦІЙНОЇ СИСТЕМИ. РІШЕННЯ ЗАДАЧ КІНЕМАТИКИ	24
3.1 Положення та орієнтація твердого тіла у просторі	24
3.2 Перетворення координат	27
3.3 Перетворення в однорідних координатах.....	30
3.4 Кінематичні моделі маніпулятора	33
3.4.1 Розімкнені кінематичні ланцюги.....	33
3.4.2 Метод Денавіта-Хартенберга.....	35
3.4.3 Застосування метода Денавіта-Хартенберга.....	38
3.4.4 Пряма задача кінематики для дволанкового маніпулятора.....	41
3.5 Обернена задача кінематики	43
3.6 Обернена швидкісна задача	47
3.7 Обернена задача прискорення	50
3.8 Перевірка розв’язку оберненої задачі кінематики.....	51
4 КЕРУВАННЯ МАНІПУЛЯТОРОМ.....	52
4.1 Математична модель маніпулятора з урахуванням приводних двигунів.....	52
4.1.1 Виведення динамічної моделі дволанкового маніпулятора	53
4.1.2 Розрахунок параметрів ланок	60

4.2 Алгоритм керування маніпулятором	61
4.2.1 Формулювання задачі керування	61
4.2.2 Струмове керування маніпулятором.....	61
4.2.3 Спрощення алгоритму керування	66
4.3 Синтез алгоритму асимптотичного відпрацювання траєкторій руху.....	71
5 СТРУКТУРА ПРОГРАМИ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО ПРОЕКТУВАННЯ.....	81
5.1 Блок розрахунку траєкторії руху.....	82
5.2 Блок розрахунку ліній траєкторії	83
6 СИСТЕМА АВТОМАТИЗОВАНОГО ПРОЕКТУВАННЯ ДВОЛАНКОВОГО МАНІПУЛЯТОРА.....	86
6.1 Керівництво по установці.....	86
6.2 Знайомство з програмою	86
6.3 Пункт “Новий проект”	88
6.4 Закладка “Траєкторія”	90
6.5 Закладка “Параметри маніпулятора”	91
6.6 Закладка “Параметри закону керування”	91
6.7 Опрацювання даних	92
6.8 Пункт “Зберегти дані”	93
6.9 Відображення даних	97
7 ПРИКЛАД ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ ВІДПРАЦЮВАННЯ ДВОЛАНКОВИМ МАНІПУЛЯТОРОМ ЗАДАНОЇ ФІГУРИ.....	99
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	112
Додаток А Варіанти завдань на розрахунково-графічну роботу	113
Додаток Б Вимоги до оформлення розрахунково-графічної роботи.....	115

ВСТУП

Дисципліна “Робототехніка та мехатроніка” є однією з ключових у підготовці бакалаврів за освітньою програмою “Електромеханічні системи автоматизації, електропривод та електромобільність”. Розрахунково-графічна робота об’єднує методи керування, які розглянуто в дисциплінах «Теорія автоматичного керування», а також знання щодо перетворення координат та вирішення прямої і зворотної задачі кінематики, які розглядаються в основному курсі дисципліни “Робототехніка та мехатроніка”.

Метою розрахунково-графічної роботи є застосування методів робастних систем для керування промисловими роботами в задачах відпрацювання заданих траєкторій руху, які формуються за рахунок розв’язку прямої і оберненої задачі кінематики методом Денавіта-Хартенберга. Всі етапи дослідження проводяться за допомогою розробленої системи автоматичного програмування, що дозволяє приділити більше уваги фізиці процесів регулювання координат, а не складанню складних моделюючих програм.

У результаті виконання розрахунково-графічної роботи студенти мають набути знань зі структури, методів керування та налаштування систем керування рухом, а також умінь синтезувати алгоритми керування маніпуляторами та проводити самостійні дослідження.

Розрахунково-графічна робота представлена у 26 варіантах, які надані у додатку А. Розв’язок задач слід супроводжувати необхідними поясненнями та математичними викладками. Вимоги до оформлення курсових робіт наведено у додатку Б.

1 ПРОГРАМА РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

Робота націлена на дослідження динамічних показників роботи дволанкового маніпулятора при відпрацюванні заданої фігури, зі знаходженням рішень задач кінематики і алгоритмізації руху для подальшого аналізу динамічної поведінки маніпулятора за допомогою системи автоматичного програмування руху (САПР) на основі програми “Manipulr.exe”.

Дволанковий маніпулятор має вигляд показаний на рис. 1.1. В точці O базова ланка маніпулятора жорстко з'єднана з основою.

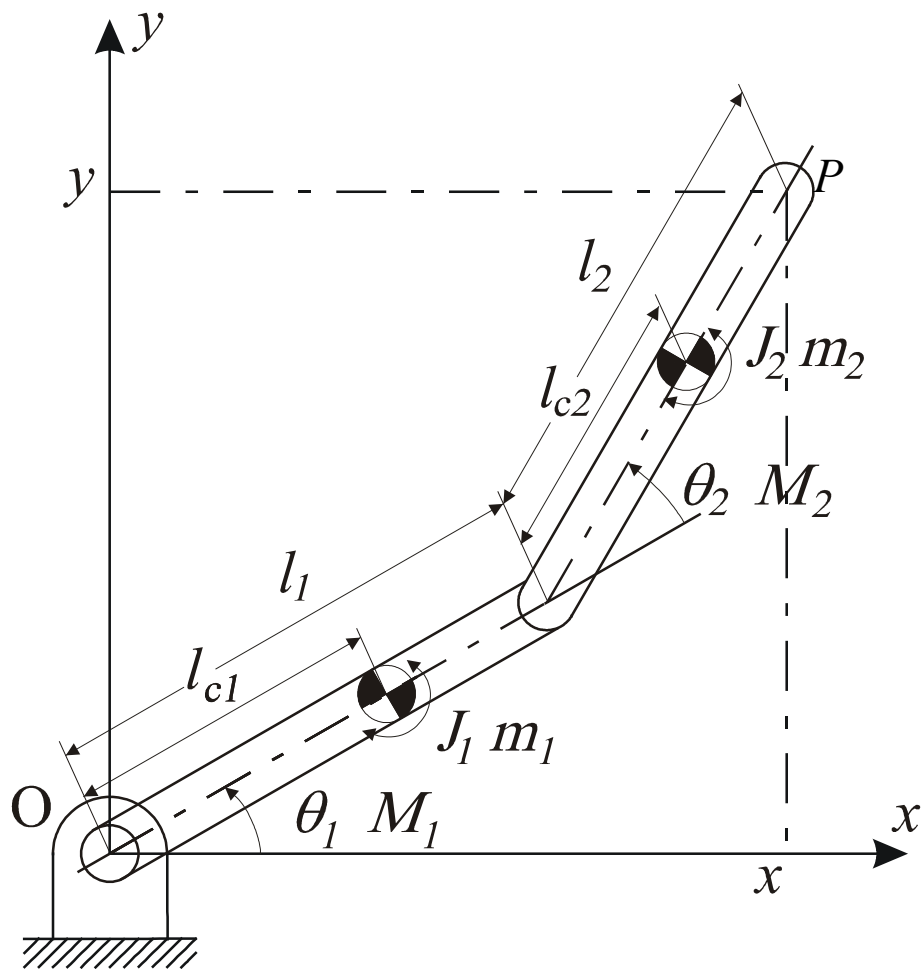


Рисунок 1.1 – Кінематична схема дволанкового маніпулятора

На рисунку позначено: l_1 та l_2 – довжини відповідно першої та другої ланок маніпулятора, l_{c1}, l_{c2} – відстань від початку першої та другої ланок до їх центрів мас відповідно, θ_1, θ_2 – узагальнені координати положення ланок; m_1, m_2 – маси ланок; J_1, J_2 – моменти інерції ланок відносно їх центрів мас,

M_1, M_2 – моменти приводних двигунів ланок, P – робочий орган, його координати в декартовій системі координат дорівнюють (x, y) .

Ланки маніпулятора представляють собою циліндри із зовнішнім діаметром D . Кожна ланка приводиться за допомогою двигуна постійного струму із збудженням від постійних магнітів через понижуючий редуктор.

Задача, яку розв'язує САПР: знаходить вектор керуючих моментів $\mathbf{M}(t)$, який є необхідним для формування такого закону зміни узагальнених координат, який забезпечив би асимптотичне відпрацювання робочим органом маніпулятора необхідної траєкторії руху; знайти вектор керуючої напруги приводних двигунів $\mathbf{u}(t)$, що забезпечив би генерування приводними двигунами такого моменту.

1.1 Вихідні дані програми:

1. Вимоги до траєкторії:

– давати оператору можливість задавати на відпрацювання робототехнічним модулем будь-якої траєкторії, що складається із прямолінійних відрізків, кіл та частин дуг;

– траєкторія для відпрацювання може знаходитися в будь-якій чверті координатної площини, розмір траєкторій – від 10 сантиметрів до 10 метрів;

– введення траєкторії здійснюється в діалоговому режимі на основі:

а) прямолінійного відрізка – задаються координати кінців,

б) дуги – задаються координати кінців дуги, радіус дуги, напрямок відпрацювання дуги;

в) кола – задаються координати центру обертання, радіус кола, напрямок відпрацювання кола;

– вихід на траєкторію та схід з неї здійснюється по прямолінійному відрізку, який задається координатами точки виходу на траєкторію.

2. Швидкість та прискорення руху:

- швидкість руху робочого органу маніпулятора по траєкторії, що відпрацьовується – 0.1... 5 м/с;
- швидкість руху робочого органу на ділянці виходу на траєкторію та сходу з траєкторії – 1... 20 м/с;
- закон зміни швидкості – трапецієвидний;
- максимальне прискорення обмежується (задається оператором).

3. При відпрацюванні траєкторії у точках з'єднання окремих відрізків чи дуг необхідно витримувати паузу, тривалість якої вводиться в САПР.

4. Параметри робота, такі як довжини ланок маніпулятора, момент інерції двигуна, передаточне число редуктора і т.д. пропонується “по-замовчуванню” та реалізовано можливість зміни цих параметрів.

5. Вважати, що ланки маніпулятора виготовлені із сталі (густина $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$) та мають круглий переріз.

6. Маса робочого органу та приводних двигунів маніпулятора вважати нехтовно малою порівняно з масою ланок.

1.2 Структура маніпулятора та системи автоматичного програмування

Узагальнена структурна схема системи автоматизованого проектування дволанкового маніпулятора, показана на рис. 1.2:

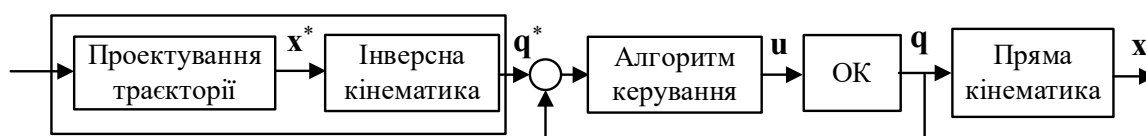


Рисунок 1.2 – Узагальнена структурна схема системи керування маніпулятором.

На рисунку позначено: \mathbf{x}^* – заданий вектор положення робочого органу (траєкторія), \mathbf{q}^* – заданий вектор узагальненого положення маніпулятора, \mathbf{u} – вектор керуючих приводними двигунами напруг, \mathbf{q} – вектор відпрацьованих узагальнених координат маніпулятора, \mathbf{x} – вектор відпрацьованих координат робочого органу маніпулятора.

На рисунку позначено наступні структурні елементи системи керування маніпулятором:

- **блок завдання траєкторії** – здійснює обчислення декартових та узагальнених координат;
- загальний регулятор системи – показаний блоком **“алгоритм керування”**;
- приводні двигуни з редуктором та маніпулятор – **“ОК”** (Об’єкт керування);
- кінематику механічної частини **маніпулятора**, що розв’язує пряму задачу кінематики.

До САПР вводяться параметри траєкторії, маніпулятора та закону керування. Ці дані програма обробляє і формує масив даних для всіх моментів часу, починаючи з моменту початку руху до зупинки з інтервалом рівним кроку інтегрування. Для кожної точки здійснюється обчислення вказаних параметрів: положення робочого органу, керуючі напруги приводних двигунів, узагальнені, реально-відпрацьовані узагальнені та декартові координати робочого органу. Програма здійснює обчислення з кроком рівним кроку інтегрування, а зберігає їх в пам’яті та на диску з кроком рівним одній мілісекунді.

Вимоги для роботи системи автоматичного програмування та деякі особливості. Розроблена САПР є програмою для ОС Windows, забезпечує простоту і надійність експлуатації та не вимагає затрат часу на додаткову підготовку спеціалістів. Всі дані САПР, що необхідні для проектування одного маніпулятора, складають проект. Всі дані проекту зберігаються в одній папці. Графічні дані зберігаються у формі, доступній для читання в пакеті MatLAB. Інформація про параметри проекту надана в текстовому виді. Вбудована контекстно-довідкова система містить інформацію про дану програму.

1.3 Завдання на розрахунково-графічну роботу

Варіанти програмної реалізації описаної процедури та задані фігури для відпрацювання та їх параметри наведені в Додатку А.

У роботі необхідно виконати:

1. Алгоритмізацію траєкторій руху по координатах $x(t)$ та $y(t)$ для заданої фігури відпрацювання. Побудувати отриману траєкторію $y(x)$.

2. Розв'язати пряму задачу кінематики методом Денавіта-Хартенберга.

3. Розв'язати обернену задачу кінематики та побудувати закони змін узагальнених координат маніпулятора, що необхідні для відпрацювання заданої фігури. Виконати перевірку отриманого рішення методом моделювання прямої задачі кінематики.

4. Розв'язати обернену швидкісну задачу та побудувати закони змін узагальнених швидкостей, що необхідні для відпрацювання заданої фігури.

5. Виконати дослідження динаміки відпрацювання маніпулятором заданих траєкторій, виконується в програмі "Manipulr.exe". Для цього необхідно виконати наступні дослідження:

а) В програмі "Manipulr.exe" вибрати довжини ланок маніпулятора таким чином, щоб маніпулятор працював близько до зони нечутливості (мінімальна довжина ланок така, щоб програма могла виконувати моделювання).

б) Провести моделювання маніпулятора для частоти власних недемпфованих коливань $\omega_0 = 50$ рад/с, коефіцієнт демпфування $\xi = 1$ і побудувати закони зміни наступних величин: $\theta_x^*(t)$ і $\theta_y^*(t)$, $\tilde{\theta}_x(t)$ і $\tilde{\theta}_y(t)$, $\omega_x^*(t)$ і $\omega_y^*(t)$, $\tilde{\omega}_x(t)$ і $\tilde{\omega}_y(t)$, $x^*(t)$ і $y^*(t)$, $\tilde{x}(t)$ і $\tilde{y}(t)$, $v_x^*(t)$ і $v_y^*(t)$.

в) Збільшити довжину ланок так, щоб зона нечутливості опинилася далі від фігури. Повторити п. а і б.

г) Змінити частоту власних недемпфованих коливань $\omega_0 = 100$ рад/с і повторити п. а – в.

д) Порівняти отримані графіки і зробити висновки.

6. Порівняти графіки отримані в п.5 і п. 1-4, зробити висновки.

При виконанні роботи прийняти наступні дані:

– ланки маніпулятора є суцільними циліндрами з зовнішнім діаметром $d = 0.02$ м;

– ланки маніпулятора виготовлені із сталі з густиною $\rho = 7800$ кг / м³;

– максимальна лінійна швидкість руху при відпрацювання траєкторії $v_{\max} = 1$ м/с, при виході на траєкторію $v_{\max} = 2$ м/с, максимальне значення прискорення $a_{\max} = 40$ м / с² ;

– тривалість витримки паузи у точках зламу траєкторії $t_{\text{pause}} = 0.2$ с.

Привила до оформлення роботи наведені в Додатку Б.

1.4 Індивідуальні завдання

1. Зменшити довжини ланок так, щоб наблизити зону виродженості маніпулятора на відстань до фігури. Дослідити поведінку узагальнених швидкостей у порівнянні з базовим випадком.

2. Виконати розрахунок траєкторії руху при обмеженості ривка на рівні 1000 м/с³.

3. Виконати розрахунок прямої задачі кінематики для триланкового маніпулятора.

2 ПРОЕКТУВАННЯ ТРАЄКТОРІЇ РУХУ

Проектування траєкторії руху в програмі виконує блок “проектування траєкторії” групи “завдання траєкторії”.

Система на кожний момент часу t , $t \in (0, t_{\text{повн}})$, де $t_{\text{повн}}$ – повний час відпрацювання траєкторії, розраховує точку траєкторії. При цьому обчислюються:

– вектор лінійних координат $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^T$, де $x(t)$ та $y(t)$ – абсциса та ордината робочого органу в момент часу t ;

– вектор лінійної швидкості $\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))^T$, де $v_x(t)$ та $v_y(t)$ – лінійна швидкість робочого органу вздовж осей абсцис та ординат відповідно в момент часу t ;

– вектор лінійного прискорення $\mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t))^T$ де $a_x(t)$ та $a_y(t)$ – лінійні прискорення робочого органу вздовж осей абсцис та ординат відповідно в момент часу t .

Вся траєкторія для відпрацювання задається у вигляді ліній трьох типів: відрізок, дуга і коло, які задаються координатами їх початку та кінця. Для дуги і кола також задаються радіус та напрямок обертання відносно центру дуги: “за” чи “проти” годинникової стрілки.

Для кожної лінії (у тому числі, і для відрізка виходу на траєкторію) задається максимальна лінійна швидкість руху. У тому випадку, коли на даній лінії не можливо досягнути заданої швидкості (через невелику відстань руху, велике значення заданої швидкості руху, занизьке або завелике прискорення чи через комбінації цих факторів), розрахунок припиняється з видачею відповідного повідомлення.

Розглянемо окремо процес розрахунку для кожного з типів ліній.

2.1 Розрахунок відрізка

Відрізок задається у вигляді, показаному на рис. 2.1.

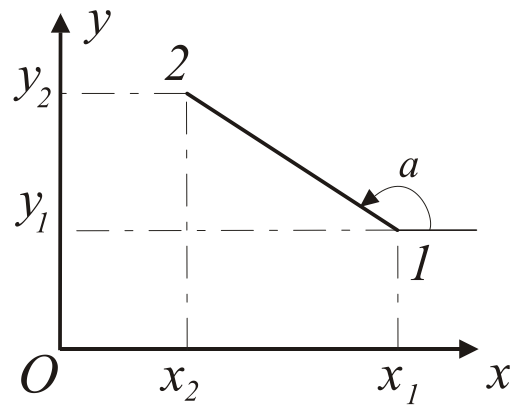


Рисунок 2.1 – Форма задавання відрізка

На рисунку показано: точка “1” з координатами (x_1, y_1) – точка початку відрізка, точка “2” з координатами (x_2, y_2) – точка кінця відрізка, α – кут нахилу відрізка до осі Ox .

Трапецоїдну тахограму швидкості із обмеженням ривка при відпрацюванні відрізка показано на рис. 2.2.

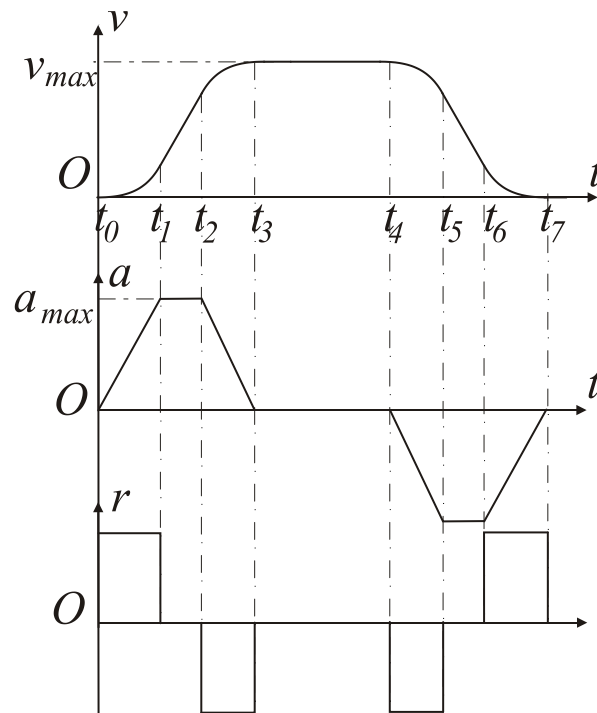


Рисунок 2.2 – Тахограма зміни модуля лінійної швидкості робочого органу

На рисунку інтервали часу визначені так, що: $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ – час наростання прискорення до усталеного значення, $\Delta t_2 = t_2 - t_1$ – час руху з

постійним прискоренням, $\Delta t_3 = t_3 - t_2 = \Delta t_1$ – час зменшення прискорення до нуля, $\Delta t_4 = t_4 - t_3$ – час руху з постійною швидкістю, аналогічно $\Delta t_5 = t_5 - t_4 = \Delta t_1$, $\Delta t_6 = t_6 - t_5 = \Delta t_2$, $\Delta t_7 = t_7 - t_6 = \Delta t_1$.

Інтервал часу Δt_1 визначається:

$$\Delta t_1 = a_{\max} / r. \quad (2.1)$$

Тут a_{\max} – максимальне прискорення, r – максимальний ривок, що розвиває робочий орган при прискоренні. Для визначення Δt_2 розглянемо ділянку руху з інтервалом часу $t \in (t_0; t_3)$. На цьому інтервалі робочий орган набирає швидкість від 0 до v_{\max} – максимального значення своєї лінійної швидкості. За час наростання прискорення до свого максимуму $t \in (t_0; t_1)$ робочий орган набере швидкість, що визначається рівнянням:

$$\Delta v_1 = r \frac{\Delta t_1^2}{2}. \quad (2.2)$$

Згідно (2.1) рівняння (2.2) запишеться у вигляді::

$$\Delta v_1 = a_{\max} \frac{\Delta t_1}{2}. \quad (2.3)$$

На таку ж величину збільшиться його швидкість на інтервалі $t \in (t_2; t_3)$. Таким чином, за час Δt_2 робочому органу залишається розігнатися до швидкості:

$$\Delta v_2 = v_{\max} - 2\Delta v_1 = v_{\max} - a_{\max} t_1. \quad (2.4)$$

Необхідний для цього час визначається:

$$\Delta t_2 = v_{\max} / a_{\max} - \Delta t_1. \quad (2.5)$$

Інтервал часу Δt_4 розраховується виходячи із заданого значення довжини відрізка, при фіксованих r , a_{\max} , v_{\max} .

Тривалість руху з постійною швидкістю визначається

$$\Delta t_4 = \Delta s_4 / v_{\max}, \quad (2.6)$$

де Δs_4 – відстань, яку проходить робочий орган з постійною швидкістю.

Необхідно знайти цю відстань. Вона дорівнює різниці повної довжини відрізка та того шляху, що буде пройдений при розгоні до усталеної швидкості та зупинці:

$$\Delta s_4 = s_{\text{Full}} - 2\Delta s_3, \quad (2.7)$$

де s_{Full} – повна довжина відрізка, знаходиться за теоремою Піфагора, Δs_3 – відстань, яку проходить робочий орган за час розгону до усталеної швидкості, вона також дорівнює тій відстані, яку проходить робочий орган при зупинці.

Для знаходження Δs_3 розглянемо тахограму $v(t)$ на інтервалі $t \in (t_0; t_3)$. Площа, обмежена кривою швидкості на цьому інтервалі, чисельно дорівнює відстані, яку проходить робочий орган при розгоні до максимальної швидкості.

Очевидно, що площі, обмежені на інтервалах $t \in (t_0, t_1)$ та $t \in (t_2, t_3)$ кривою $v(t)$ у сумі складають прямокутник висотою v_{\max} та шириною $\Delta t_1 = \Delta t_3$, площа обмежена на інтервалі (t_1, t_2) дорівнює половині площі прямокутника з тією ж висотою та шириною $\Delta t_2 = t_2 - t_1$. Таким чином, повний шлях при розгоні:

$$\Delta s_3 = v_{\max} \left(t_1 + \frac{\Delta t_2}{2} \right). \quad (2.8)$$

Знаючи тривалість усіх інтервалів, ми можемо визначити момент початку та закінчення кожного з них та записи та для кожного інтервалу рівняння руху.

Для визначення напрямку руху знаходимо кут нахилу, що утворює промінь, який виходить з початку відрізка та йде через його кінець, із додатнім напрямком осі абсцис:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right), \quad (2.9)$$

де $(x_1; y_1)$ – координати початку поточного відрізка, $(x_2; y_2)$ – координати кінця поточного відрізка.

Далі розкладемо значення ривку із врахуванням напрямку по осям координат: $r_x = r \cdot \cos(\alpha)$ – діє вздовж осі абсцис, $r_y = r \cdot \sin(\alpha)$ – діє вздовж осі ординат.

Для кожного з інтервалів руху запишемо рівняння руху. Їх виведення базується на рівняннях руху, відомих з курсу фізики:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + v_x(t_0)(t - t_0) + \frac{a_x(t_0)(t - t_0)^2}{2} + \frac{r_x(t - t_0)^3}{6} \\ y(t) &= y(t_0) + v_y(t_0)(t - t_0) + \frac{a_y(t_0)(t - t_0)^2}{2} + \frac{r_y(t - t_0)^3}{6} \\ v_x(t) &= v_x(t_0) + a_x(t_0)(t - t_0) + \frac{r_x(t - t_0)^2}{2}, \\ v_y(t) &= v_y(t_0) + a_y(t_0)(t - t_0) + \frac{r_y(t - t_0)^2}{2} \\ a_x(t) &= a_x(t_0) + r_x(t - t_0) \\ a_y(t) &= a_y(t_0) + r_y(t - t_0), \end{aligned} \quad (2.10)$$

де t – поточний момент часу, t_0 – момент початку руху на даному елементі траєкторії, $x(t)$ та $y(t)$ – залежність абсциси та ординати робочого органу від часу; $v_x(t)$ та $v_y(t)$ – залежність лінійної швидкості робочого органу вздовж відповідно осі абсцис та осі ординат від часу; $a_x(t)$ та $a_y(t)$ – аналогічно для лінійного прискорення РО.

Нехай dt – час руху на поточному інтервалі (наприклад, для першого інтервалу: $dt = t - t_0$). Тоді для інтервалу часу $t \in (t_0; t_1]$ (наростання прискорення до максимального значення):

$$\begin{aligned}
 a_x(t) &= a_x(t_0) + r_x dt, \\
 a_y(t) &= a_y(t_0) + r_y dt, \\
 v_x(t) &= v_x(t_0) + r_x dt^2 / 2, \\
 v_y(t) &= v_y(t_0) + r_y dt^2 / 2, \\
 x(t) &= x(t_0) + r_x dt^3 / 6, \\
 y(t) &= y(t_0) + r_y dt^3 / 6.
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

Для інтервалу часу $t \in (t_1; t_2]$ (рух з постійним прискоренням):

$$\begin{aligned}
 a_x(t) &= a_x(t_1), \\
 a_y(t) &= a_y(t_1), \\
 v_x(t) &= v_x(t_1) + a_x(t_1) dt, \\
 v_y(t) &= v_y(t_1) + a_y(t_1) dt, \\
 x(t) &= x(t_1) + v_x(t_1) dt + a_x(t_1) t^2 / 2, \\
 y(t) &= y(t_1) + v_y(t_1) dt + a_y(t_1) dt^2 / 2.
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Для інтервалу часу $t \in (t_2; t_3]$ (зменшення прискорення до нуля):

$$\begin{aligned}
 a_x(t) &= a_x(t_2) - r_x dt, \\
 a_y(t) &= a_y(t_2) - r_y dt, \\
 v_x(t) &= v_x(t_2) + a_x(t_2) dt - r_x dt^2 / 2, \\
 v_y(t) &= v_y(t_2) + a_y(t_2) dt - r_y dt^2 / 2, \\
 x(t) &= x(t_2) + v_x(t_2) dt + a_x(t_2) dt^2 / 2 - r_x dt^3 / 6, \\
 y(t) &= y(t_2) + v_y(t_2) dt + a_y(t_2) dt^2 / 2 - r_y dt^3 / 6.
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Для інтервалу часу $t \in (t_3; t_4]$ (рух з постійною швидкістю):

$$\begin{aligned}
a_x(t) &= 0, \\
a_y(t) &= 0, \\
v_x(t) &= v_x(t_3), \\
v_y(t) &= v_y(t_3), \\
x(t) &= x(t_3) + v_x(t_3)dt, \\
y(t) &= y(t_3) + v_y(t_3)dt.
\end{aligned}
\tag{2.14}$$

Для інтервалу часу $t \in (t_4; t_5]$ (початок гальмування, збільшення інтенсивності до максимального значення $|a| < 0$):

$$\begin{aligned}
a_x(t) &= -r_x dt, \\
a_y(t) &= -r_y dt, \\
v_x(t) &= v_x(t_4) - r_x dt^2 / 2, \\
v_y(t) &= v_y(t_4) - r_y dt^2 / 2, \\
x(t) &= x(t_4) + v_x(t_4)dt - r_x dt^3 / 6, \\
y(t) &= y(t_4) + v_y(t_4)dt - r_y dt^3 / 6.
\end{aligned}
\tag{2.15}$$

Для інтервалу часу $t \in (t_5; t_6]$ (гальмування з усталеною інтенсивністю):

$$\begin{aligned}
a_x(t) &= a_x(t_5), \\
a_y(t) &= a_y(t_5), \\
v_x(t) &= v_x(t_5) + a_x(t_5)dt, \\
v_y(t) &= v_y(t_5) + a_y(t_5)dt, \\
x(t) &= x(t_5) + v_x(t_5)dt + a_x(t_5)dt^2 / 2, \\
y(t) &= y(t_5) + v_y(t_5)dt + a_y(t_5)dt^2 / 2.
\end{aligned}
\tag{2.16}$$

Для інтервалу часу $t \in (t_6; t_7]$ (завершення гальмування):

$$\begin{aligned}
a_x(t) &= a_x(t_6) + r_x dt, \\
a_y(t) &= a_y(t_6) + r_y dt, \\
v_x(t) &= v_x(t_6) + a_x(t_6)dt + r_x dt^2 / 2, \\
v_y(t) &= v_y(t_6) + a_y(t_6)dt + r_y dt^2 / 2, \\
x(t) &= x(t_6) + v_x(t_6)dt + a_x(t_6)dt^2 / 2 + r_x dt^3 / 6, \\
y(t) &= y(t_6) + v_y(t_6)dt + a_y(t_6)dt^2 / 2 + r_y dt^3 / 6.
\end{aligned}
\tag{2.17}$$

Після зупинки, необхідно забезпечити витримку технологічної паузи тривалістю Δt_p , отже для $t \in (t_7; t_7 + \Delta t_p]$:

$$\begin{aligned}
a_x(t) &= 0, \\
a_y(t) &= 0, \\
v_x(t) &= 0, \\
v_y(t) &= 0, \\
x(t) &= x(t_7), \\
y(t) &= y(t_7).
\end{aligned}
\tag{2.18}$$

2.2 Розрахунок дуги

Параметри дуги задаються у вигляді, показаному на рис. 2.3. На рисунку показано: точка “1” з координатами (x_1, y_1) – точка початку дуги, точка “2” з координатами (x_2, y_2) – точка кінця дуги, φ_{beg} – початковий кут відпрацювання дуги – кут точки “1” дуги в полярній системі координат з центром в точці R – радіус дуги. Центр дуги знаходиться в точці C з координатами $C(C_x, C_y)$.

Розрахунок лінійних параметрів руху при відпрацюванні дуги проводиться аналогічно до випадку розрахунку відрізка. Вихідні рівняння руху аналогічні до рівнянь (2.10) і записані для кутових параметрів:

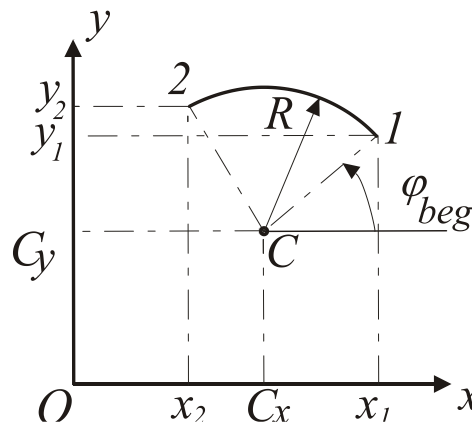


Рисунок 2.3 – Форма завдання дуги

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \omega(t_0)(t - t_0) + \frac{\varepsilon(t_0)(t - t_0)^2}{2} + \frac{p(t - t_0)^3}{6}, \quad (2.19)$$

$$\omega(t) = \omega(t_0) + \varepsilon(t_0)(t - t_0) + \frac{p(t - t_0)^2}{2}, \quad (2.20)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_0) + p(t - t_0), \quad (2.21)$$

де $\varphi(t)$ – кутове положення робочого органу в полярній системі координат відносно свого центру обертання, $\omega(t)$ – кутова швидкість робочого органу, $\varepsilon(t)$ – кутове прискорення, $p = r / R$ – кутовий ривок.

Тахограма зміни кутової швидкості $\omega(t)$, рис. 2.4, є аналогічною до тієї, що зображена на рис. 2.2, з тією відмінністю, що по осі абсцис відкладається кутова швидкість замість лінійної. Моменти $t_0 \dots t_7$ обчислюються за формулами описаними в п. 2.1, з різницею у тому, що всі лінійні параметри замінені відповідними кутовими.

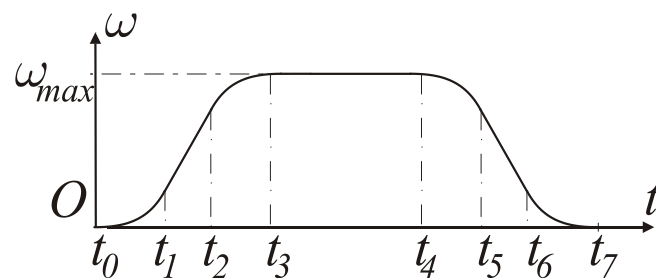


Рисунок 2.4 – Тахограма зміни модуля кутової швидкості робочого органу в полярних координатах

Рівняння руху на кожному з інтервалів можна записати так:

Для $t \in (t_0; t_1]$ (наростання прискорення):

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \varepsilon(t_0) + p dt, \\ \omega(t) &= \omega(t_0) + p dt^2 / 2, \\ \varphi(t) &= \varphi(t_0) + p dt^3 / 6.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Для $t \in (t_1; t_2]$ (наростання швидкості):

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \varepsilon(t_1), \\ \omega(t) &= \omega(t_1) + \varepsilon(t_1) dt, \\ \varphi(t) &= \varphi(t_1) + \omega(t_1) dt + \varepsilon(t_1) dt^2 / 2.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Для $t \in (t_2; t_3]$ (зняття прискорення):

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \varepsilon(t_2) - p dt, \\ \omega(t) &= \omega(t_2) + \varepsilon(t_2) dt - p dt^2 / 2, \\ \varphi(t) &= \varphi(t_2) + \omega(t_2) dt + \varepsilon(t_2) dt^2 / 2 - p dt^3 / 6.\end{aligned}\tag{2.24}$$

Для $t \in (t_3; t_4]$ (рівномірний рух):

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= 0, \\ \omega(t) &= \omega(t_3), \\ \varphi(t) &= \varphi(t_3) + \omega(t_3) dt.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Для $t \in (t_4; t_5]$ (початок гальмування):

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= -p dt, \\ \omega(t) &= \omega(t_4) - p dt^2 / 2, \\ \varphi(t) &= \varphi(t_4) + \omega(t_4) dt - p dt^3 / 6.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Для $t \in (t_5; t_6]$ (гальмування з усталеною інтенсивністю $|a| < 0$):

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t) &= \varepsilon(t_5), \\
\omega(t) &= \omega(t_5) + \varepsilon(t_5)dt, \\
\varphi(t) &= \varphi(t_5) + \omega(t_5)dt + \varepsilon(t_5)dt^2 / 2.
\end{aligned}
\tag{2.27}$$

Для $t \in (t_6; t_7]$ (завершення гальмування):

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t) &= e(t_6) + pdt, \\
\omega(t) &= \omega(t_6) + \varepsilon(t_6)dt + pdt^2 / 2, \\
\varphi(t) &= \varphi(t_6) + \omega(t_6)dt + \varepsilon(t_6)dt^2 / 2 + pdt^3 / 6.
\end{aligned}
\tag{2.28}$$

Для $t \in (t_7; t_7 + \Delta t_{\text{pause}}]$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t) &= 0, \\
\omega(t) &= 0, \\
\varphi(t) &= \varphi(t_7).
\end{aligned}
\tag{2.29}$$

По результатам рівнянь, отриманих із (2.19) – (2.21) обчислюють лінійні параметри руху робочого органу:

$$\begin{aligned}
x(t) &= C_x + R \cos(\varphi(t)) \\
y(t) &= C_y - R \sin(\varphi(t)) \\
v_x(t) &= -R\omega(t)\sin(\varphi(t)) \\
v_y(t) &= -R\omega(t)\cos(\varphi(t)) \\
a_x(t) &= -R\varepsilon(t)\sin(\varphi(t)) - R\omega^2(t)\cos(\varphi(t)) \\
a_y(t) &= -R\varepsilon(t)\cos(\varphi(t)) + R\omega^2(t)\sin(\varphi(t)).
\end{aligned}
\tag{2.30}$$

2.3 Розрахунок кола

Параметри кола задаються у вигляді, показаному на рис. 2.5. Точка 1 з координатами (x_1, y_1) на рисунку позначає точку початку відпрацювання кола. В цю ж точку робочий орган приходить після відпрацювання. φ_{beg} – позначає

початковий та кінцевий кут відпрацювання кола, точка $C(C_x, C_y)$ – центр кола, R – його радіус.

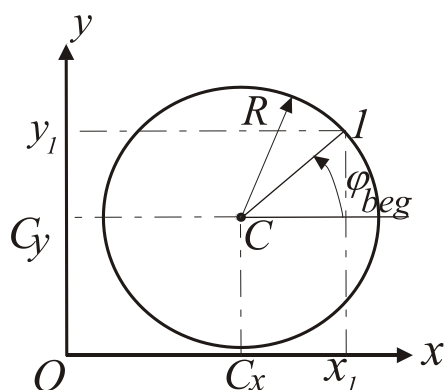


Рисунок 2.5 – Форма завдання кола

Обчислення параметрів руху відбувається аналогічно описаному в п.2.2 за умови того, що кут обертання дорівнює 2π радіан.

3 КІНЕМАТИКА МАНІПУЛЯЦІЙНОЇ СИСТЕМИ.

РІШЕННЯ ЗАДАЧ КІНЕМАТИКИ

Кінематика маніпуляційної системи – розв’язує обернену задачу кінематики, а саме: по заданих значеннях декартових координат знаходить:

– вектор узагальнених координат $\mathbf{q}(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t))^T$, де $\theta_1(t)$ та $\theta_2(t)$ залежності кутових координат відповідно першої та другої ланок маніпулятора від часу t ;

– вектор узагальнених швидкостей $\boldsymbol{\omega}(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t))^T$, де $\omega_1(t)$ та $\omega_2(t)$ залежності кутових швидкостей відповідно першої та другої ланок маніпулятора від часу t ;

– вектор узагальнених прискорень $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = (\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))^T$, де $\varepsilon_1(t)$ та $\varepsilon_2(t)$ залежності кутових швидкостей відповідно першої та другої ланок маніпулятора від часу t .

Розглянемо математичний апарат кінематики маніпуляційної системи.

3.1 Положення та орієнтація твердого тіла у просторі

Кінематика маніпулятора являє собою вивчення геометрії руху багатоланкового механізму, який при цьому розглядається як система зв’язаних твердих тіл. Кожне тверде тіло у просторі характеризується своїм положенням та орієнтацією. Положення твердого тіла представляє довільна точка, зафіксована відносно твердого тіла. Нехай $Oxyz$ буде система координат, зафіксована на основі, а O' – довільна точка твердого тіла, як показано на рис. 3.1. Тоді положення твердого тіла в системі координат $Oxyz$ характеризується вектором.

$$\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T. \quad (3.1)$$

Для визначення орієнтації твердого тіла в просторі зафіксуємо на ньому систему координат $O'x'y'z'$, яка рухається разом з твердим тілом. Тепер

орієнтація твердого тіла однозначно визначається напрямком координатних осей x', y', z' .

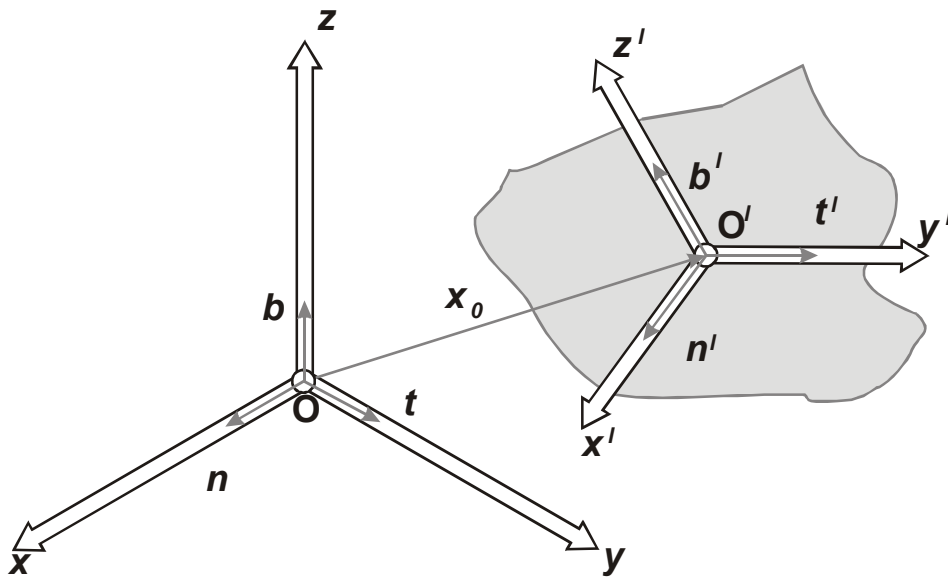


Рисунок 3.1 – Положення твердого тіла в системі координат $Oxyz$

Будемо вважати, що напрямок осей системи координат $Oxyz$ задано ортами $\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b}$, а системи $O'x'y'z'$ ортами $\mathbf{n}', \mathbf{t}', \mathbf{b}'$ відповідно. Проекції ортів $\mathbf{n}', \mathbf{t}', \mathbf{b}'$, отримані в системі координат $Oxyz$, чисельно характеризують взаємне розташування двох систем координат та відомі як направляючі косинуси. При цьому компоненти кожного із векторів $\mathbf{n}', \mathbf{t}', \mathbf{b}'$ представляють собою проекції на осі x, y, z , задані ортами $\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b}$. Для зручності об'єднаємо три вектори, що розглядаються, та представимо їх у вигляді матриці \mathbf{A} , розмірністю 3×3 :

$$\mathbf{A} = (\vec{\mathbf{n}}', \vec{\mathbf{t}}', \vec{\mathbf{b}}')^T. \quad (3.2)$$

Матриця \mathbf{A} повністю описує взаємну орієнтацію твердого тіла в базовій системі координат та називається матрицею направляючих косинусів або матрицею повороту. Структура даної матриці наступна:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{n}') & \cos(\mathbf{n}, \mathbf{t}') & \cos(\mathbf{n}, \mathbf{b}') \\ \cos(\mathbf{t}, \mathbf{n}') & \cos(\mathbf{t}, \mathbf{t}') & \cos(\mathbf{t}, \mathbf{b}') \\ \cos(\mathbf{b}, \mathbf{n}') & \cos(\mathbf{b}, \mathbf{t}') & \cos(\mathbf{b}, \mathbf{b}') \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Вектори-стовпчики матриці \mathbf{A} ортогональні одне одному, отже

$$\mathbf{n}^T \mathbf{t}' = 0, \quad \mathbf{t}'^T \mathbf{b}' = 0, \quad \mathbf{b}'^T \mathbf{n}' = 0, \quad (3.4)$$

і мають одиничну довжину

$$|\mathbf{n}'| = 1, \quad |\mathbf{t}'| = 1, \quad |\mathbf{b}'| = 1, \quad (3.5)$$

де $|\mathbf{a}|$ – означає Евклідову норму вектора \mathbf{a} .

Матриця, яка володіє властивостями (3.4) та (3.5) є ортогональною і для неї справедлива рівність

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T, \quad (3.6)$$

де знак “ -1 ” визначає обернену матрицю до матриці \mathbf{A} із умови $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, де \mathbf{I} – одинична матриця.

Розглянемо конструкцію, наведено на рис. 3.2.

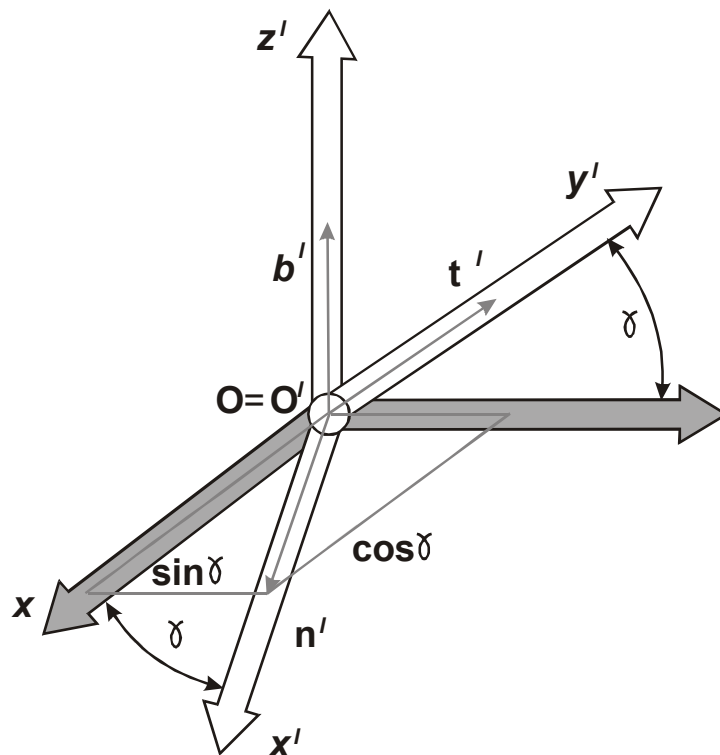


Рисунок 3.2 – Розташування систем координат із спільної віссю $z = z'$, повернуті одна відносно одної на кут γ

Бачимо, що початки координат O та O' , а також осі z та z' співпадають. Кут між осями x та x' позначимо γ . Необхідно знайти матрицю \mathbf{A}_γ . Із рис. 3.2 видно, що кожен із ортів \mathbf{n}' , \mathbf{t}' , \mathbf{b}' має наступні координати:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) \\ \sin(\gamma) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{t} = \begin{pmatrix} -\sin(\gamma) \\ \cos(\gamma) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

а отже матриця \mathbf{A}_γ дорівнює:

$$\mathbf{A}_\gamma = (\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

3.2 Перетворення координат

Із просторової геометрії відомо, що якщо початки координат O та O' знаходяться в одній точці, то координати довільної точки в двох системах відліку будуть зв'язані виразами:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}', \mathbf{x} = (x, y, z)^T, \mathbf{x}' = (x', y', z'), \quad (3.9)$$

де x, y, z – координати точки в системі відліку $Oxyz$, x', y', z' – в системі відліку $O'x'y'z'$.

Зворотне перетворення знаходиться у вигляді

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}. \quad (3.10)$$

Враховуючи ортогональність матриці \mathbf{A} (3.6), маємо:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}^T\mathbf{x}. \quad (3.11)$$

Таким чином, матриця направляючих косинусів $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T)$ визначає пряме (обернене) перетворення координат $O'x'y'z' \rightarrow Oxyz$, ($Oxyz \rightarrow O'x'y'z'$).

Обидві системи координат утворюють “праву” систему координат. Для випадку зображеному на рис. 3.2 на основі (3.9), (3.10) та (3.11) знаходимо пряме та обернене перетворення \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_\gamma \mathbf{x}', \quad (3.12)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}_\gamma^T \mathbf{x}, \quad (3.14)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Не важко помітити, що при повороті навколо осей Oy на кут β та Ox на кут α , отримаємо відповідно:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

При повороті навколо трьох осей матриця повороту дорівнює добутку окремих матриць:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\gamma \mathbf{A}_\beta \mathbf{A}_\alpha. \quad (3.18)$$

Послідовність матриць у добутку повинна відповідати послідовності поворотів.

У випадку коли початки координат O та O' не знаходяться в одній точці рівняння (3.16) застосовувати не можна.

Розглянемо рис. 3.3. Точка P довільна точка в просторі, її координати в системі відліку $Oxyz$ будуть $\mathbf{x} = (x \ y \ z)^T$, а в системі координат, зв'язаній з твердим тілом: $\mathbf{x}' = (x' \ y' \ z')^T$. Необхідно встановити відповідність між двома системами координат, тобто знайти перетворення координат між зафіксованою на основі системою відліку та системою, зв'язаною з твердим тілом.

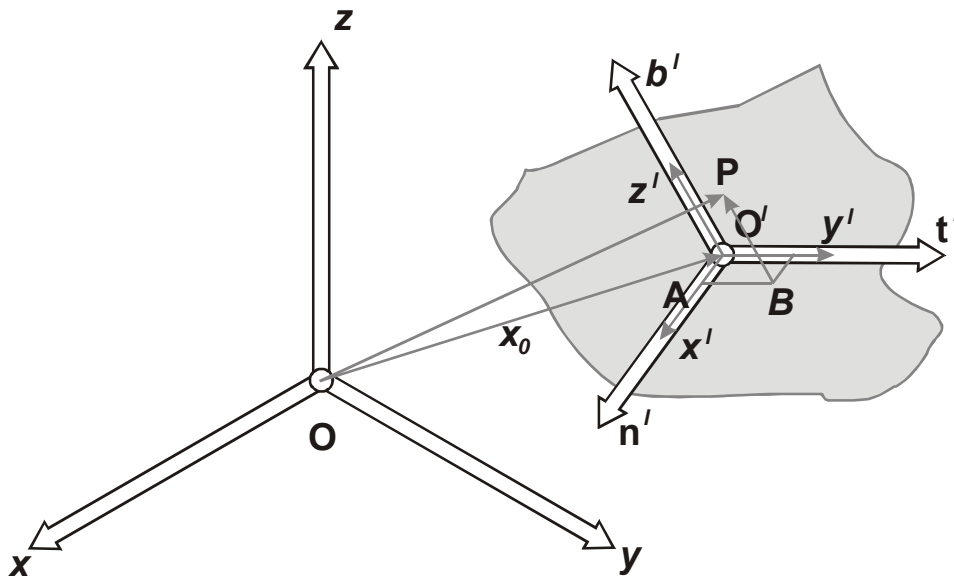


Рисунок 3.3 – Перетворення координат із системи зв'язаної з твердим тілом в систему $Oxyz$

З рис. 3.3 знаходимо:

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OO}' + \mathbf{O}'\mathbf{A} + \mathbf{AB} + \mathbf{BP}, \quad (3.19)$$

де $\mathbf{OP} = \mathbf{x}$, $\mathbf{OO}' = \mathbf{x}_0$. Оскільки вектор $\mathbf{O}'\mathbf{A}$, \mathbf{AB} , \mathbf{BP} паралельні ортам \mathbf{n}' , \mathbf{t}' , \mathbf{b}' відповідно та мають довжини x' , y' , z' , то вираз (3.19) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + x'\mathbf{n}' + y'\mathbf{t}' + z'\mathbf{b}', \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Рівняння (3.20) описує пряме перетворення координат $\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}$. Для знаходження оберненого перетворення необхідно помножити обидві частини рівняння (3.20) на \mathbf{A}^T

$$\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}', \quad (3.21)$$

звідки маємо:

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{A}^T \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^T \mathbf{x}. \quad (3.22)$$

Розкриємо фізичний зміст матриці \mathbf{A} . За її допомогою:

- встановлюється орієнтація системи координат $O'x'y'z'$ відносно $Oxyz$ вектори-стовпчики матриці \mathbf{A} являють собою направляючі косинуси кожної осі $O'x'y'z'$ спроектованої в $Oxyz$;
- здійснюється координатне перетворення із $O'x'y'z'$ в $Oxyz$;
- здійснюється обертання векторів у системі координат $Oxyz$.

3.3 Перетворення в однорідних координатах

Із формули (3.20) слідує, що перетворення координат включає паралельний перенос початку координат на \mathbf{x}_0 та подальший поворот. Більш просту форму запису (3.20) можна отримати шляхом переходу до так званих однорідних координат, при цьому як перенос, так і орієнтація задаються однією матрицею.

Для переходу до однорідних координат визначаються вектори розмірністю 4×1 , які отримуються шляхом введення додаткової компоненти, що дорівнює одиниці. Їх прийнято позначати тими ж літерами:

$$\mathbf{x} = (x, y, z, 1)^T, \quad \mathbf{x}' = (x', y', z', 1)^T. \quad (3.23)$$

Матриця перетворення $\tilde{\mathbf{A}}$ має розмірність 4×4 та формується наступним чином:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{O} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

де $\mathbf{O} = (0, 0, 0)$ – нульовий вектор-рядок.

Матриця направляючих косинусів \mathbf{A} доповнюється до матриці розмірністю 4×4 додаванням вектора \mathbf{x}_0 та введенням четвертого рядку із трьома нулями та одиницею.

Рівняння (3.20) при цьому запишеться так:

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}', \quad (3.25)$$

тобто

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{O} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Виконуючи множення матриці на вектор, отримаємо ті ж співвідношення, що і при використанні (3.20), доповнені тотожним співвідношенням $1=1$. Перетворення координат задане (3.26), називається однорідним перетворенням. Його перевага полягає у компактності запису та істотно проявляється при виконанні декількох послідовних перетворень.

Нехай $O"x"y"z"$ ще одна система координат, як показано на рис. 3.4, а x'' – координати точки P в цій системі координат, тоді:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_0' + \mathbf{A}'\mathbf{x}'', \quad (3.27)$$

де \mathbf{x}_0' та \mathbf{A}' представляють собою вектор та матрицю розмірністю 3×1 та 3×3 відповідно, зв'язані переходом від x'' до x' . Підставимо (3.27) в (3.20), отримаємо:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{x}_0' + \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}'\mathbf{x}''. \quad (3.28)$$

Із (3.28) видно, що при подвійному перетворення координат приходиться мати справу з трьома складовими правої частини і їх число буде зростати із збільшенням кількості послідовних переносів. У загальному випадку n

послідовних перетворень координат формують поліном n -го порядку, що складається із $(n + 1)$ членів.

Розглянемо n послідовних перетворень координат із системи відліку n назад до початкової системи координат. Позначимо $\tilde{\mathbf{A}}_i^{i-1}$ матрицю з розмірністю 4×4 , зв'язану з однорідним перетворенням від i -ї до $(i-1)$ -ї системи координат, тоді вектор \mathbf{x}_n в n -й системі відліку перетвориться в вектор \mathbf{x} початкової системи координат за допомогою перетворення:

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{A}}_1^0 \tilde{\mathbf{A}}_2^1 \dots \tilde{\mathbf{A}}_n^{n-1} \mathbf{x}_n. \quad (3.29)$$

Визначимо обернене однорідне перетворення. Із (3.25) знаходимо:

$$\mathbf{x}' = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{x}. \quad (3.30)$$

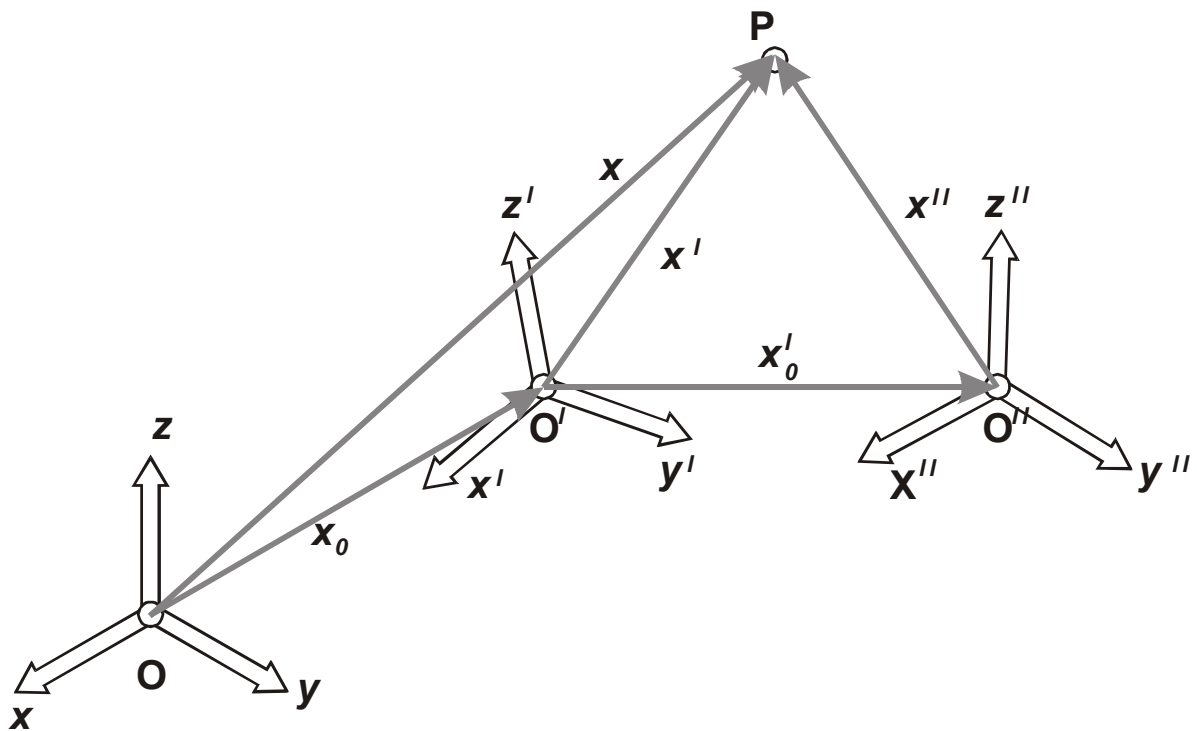


Рисунок 3.4 – Подвійне перетворення координат при знаходженні тіла у суб-підпорядкованій системі координат

З іншого боку, це ж перетворення виражене у формі (3.22), має вигляд:

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{A}^T \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^T \mathbf{x}. \quad (3.31)$$

Зіставляючи два останні вирази, знайдемо $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$. Неважко помітити, що \mathbf{x}_0 в (3.20) заміняється на $-\mathbf{A}^T \mathbf{x}_0$, в той же час як \mathbf{A} міняється на \mathbf{A}^T . Із врахуванням цього обернена матриця $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$, що є матрицею переходу від системи координат $Oxyz$ до системи координат $O'x'y'z'$, дорівнює:

$$\tilde{\mathbf{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T & -\mathbf{A}^T \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{O} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Отриманий результат перевіряється обчисленням $\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}$ та $\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{A}}^{-1}$, обидва добутки дорівнюють одиничній матриці \mathbf{I} .

Також як і для матриці \mathbf{A} , визначник матриці $\tilde{\mathbf{A}}$ дорівнює одиниці: $|\tilde{\mathbf{A}}| = 1$. Можна також встановити фізичний зміст вектора $-\mathbf{A}^T \mathbf{x}_0$: його компоненти представляють собою проекції вектора \mathbf{x}_0 на осі системи координат $O'x'y'z'$, як проілюстровано на рис. 3.3.

3.4 Кінематичні моделі маніпулятора

3.4.1 Розімкнені кінематичні ланцюги

Будемо використовувати розглянутий математичний апарат для моделювання кінематики маніпуляторів. За допомогою однорідного перетворення задається положення та орієнтація кожної ланки маніпулятора.

Маніпулятор, як багатоланковий механізм, представляє собою кінематичну структуру, що складається із з'єднання твердих тіл. На рис. 3.5 зображено маніпулятор, який представлений послідовним з'єднанням твердих тіл. Таке з'єднання називається розімкненим кінематичним ланцюгом. Більшість промислових роботів, що випускається, мають маніпулятори, які представляють собою розімкнені кінематичні ланцюги, які і будуть розглядатися далі.

Кожній ланці розімкнутого кінематичного ланцюга присвоюється значення від 0 до n , як показано на рис. 3.5. Базовій ланці, зазвичай зв'язаній з основою присвоюється номер 0, найбільш віддалена ланка має n -й номер.

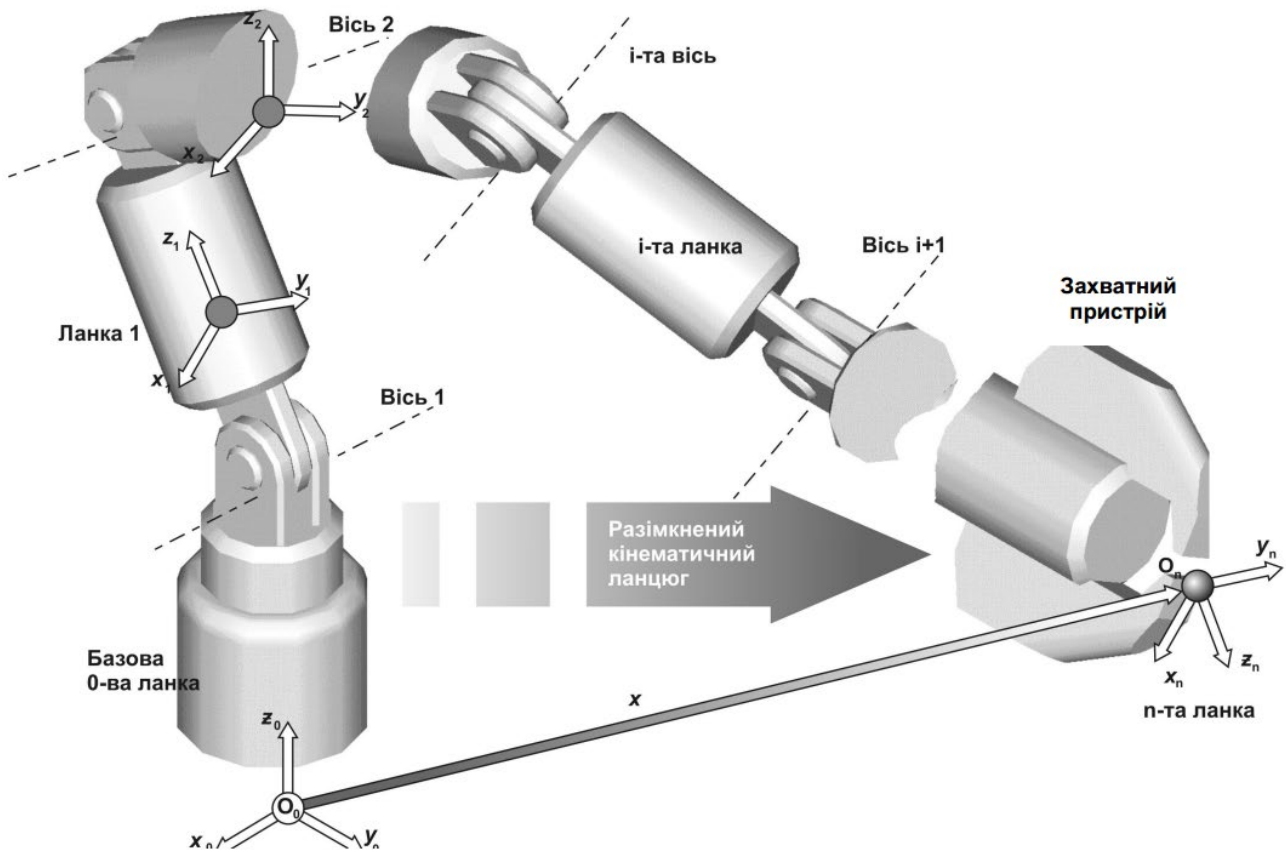


Рисунок 3.5 – Кінематична схема багатоланкового маніпулятора

З точки зору виконання поставленої задачі, нас буде цікавити рух робочого органу маніпулятора, тобто його n -ї ланки. З цією метою остання ланка зв'язана з системою координат $O_n x_n y_n z_n$. Початкова система координат $O_0 x_0 y_0 z_0$ зв'язана із основою, розглядання руху робочого органу маніпулятора будемо проводити в цій системі координат. Здійснюючи ряд послідовних перетворень, досягається аналітичний опис положення та орієнтації робочого органу відносно базової системи відліку $O_0 x_0 y_0 z_0$.

Як видно з рис. 3.5, в маніпуляторі, що містить n зчленувань, задіяно $(n+1)$ ланка. Зчленування, розташоване між $(i-1)$ -ю та i -ю ланками нумерується як i -те зчленування. Якщо в кожному із зчленувань встановлений свій приводний двигун, то рух робочого органу утворюється завдяки n кутовим (лінійним) переміщенням у кожному із n зчленувань. *Основна мета кінематичного аналізу* – знайти аналітичний взаємозв'язок між переміщеннями у зчленуваннях маніпулятора та координатами робочого органу.

3.4.2 Метод Денавіта-Хартенберга

Даний метод встановлює кінематичні співвідношення між парою взаємодіючих ланок з використанням мінімальної кількості параметрів.

На рис. 3.6 зображені i -та та $(i-1)$ -ша ланки, а також зв'язані з ними зчленування під номерами $(i-1)$, i та $(i+1)$.

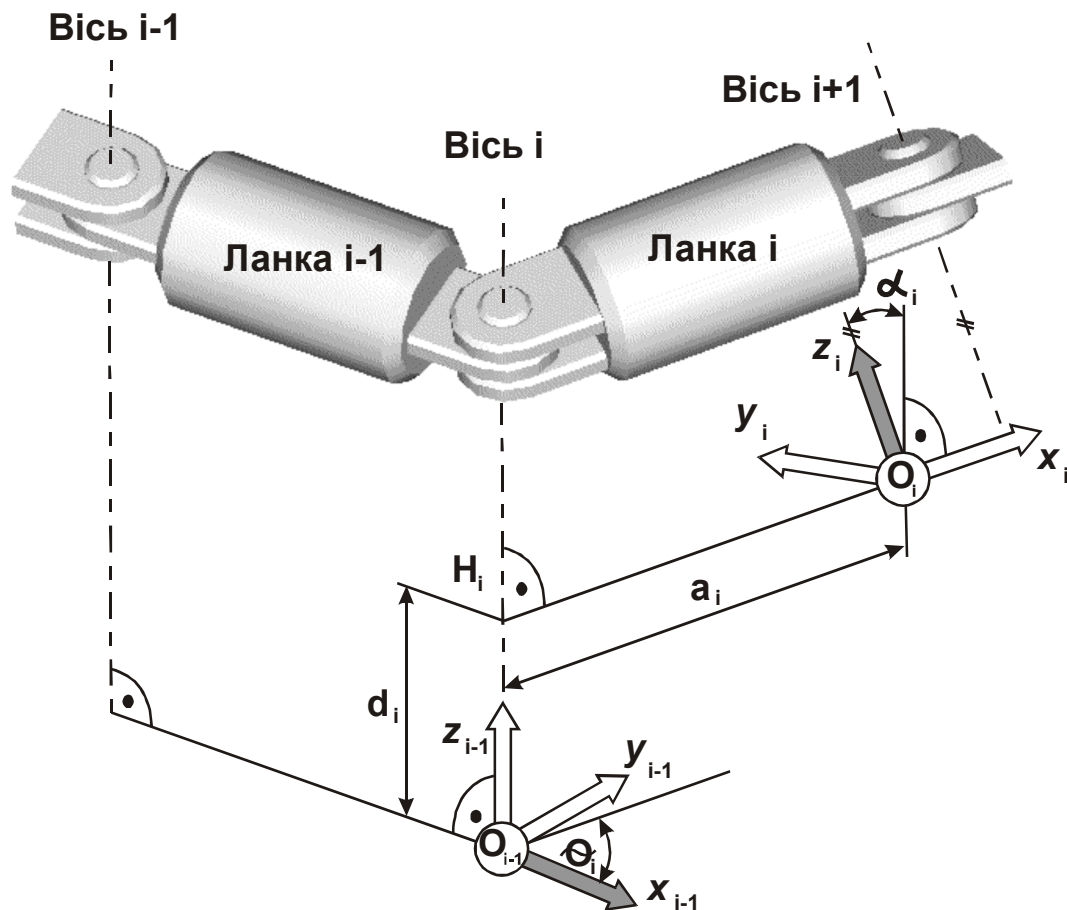


Рисунок 3.6 – Орієнтація систем координат суміжних ланок

Пряма $H_i O_i$ є спільною нормаллю до осей i -го та $(i+1)$ -го зчленувань. Як було показано раніше, взаємне розташування двох твердих тіл може бути визначено за допомогою двох систем координат, зв'язаних з цими тілами. Метод Денавіта-Хартенберга пропонує фіксацію i -го початку координат в точці перетину осі $(i+1)$ -го зчленування та спільної нормалі до осей $(i+1)$ -го та i -го зчленувань, як показано на рис. 3.6.

Помітимо, що початок координат i -ї ланки зв'язано із $(i+1)$ -м зчленуванням. Вісь x_i цієї системи координат направляється вздовж нормалі $H_i O_i$, у той час як вісь z_i – вздовж осі $(i+1)$ -го зчленування. Напрямок $O_i y_i$ обирається так, щоб система $O_i x_i y_i z_i$ та зв'язані з нею направляючі орти утворювали праву трійку векторів.

Взаємне положення двох систем координат $O_i x_i y_i z_i$ та $O_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ повністю характеризується чотирма параметрами: a_i – довжина спільної нормалі; d_i – відстань між початком координат O_{i-1} та точкою H_i ; α_i – кут між віссю i -го зчленування та віссю z_i , що визначається по правилу правого гвинта; θ_i – кут між віссю x_{i-1} та спільною нормаллю $H_i O_i$, що вимірюється навколо z_{i-1} за правилом правого гвинта.

Параметри a_i та α_i є постійними та визначаються геометрією ланки: a_i – довжина ланки, α_i – кут закрутки між двома осями зчленувань. Інші два параметри змінюються при русі ланок. Для зчленувань обертового типу змінним параметром є кут θ_i , що представляє собою кут повороту між i -ю та $(i-1)$ -ю ланками, в той час як параметр d_i постійний. У призматичних зчленуваннях навпаки, параметр d_i є змінюваним, а θ_i – постійним.

На рис. 3.7 зображені системи координат $O_i x_i y_i z_i$ та $O_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$, а також проміжна система відліку $H_i x_i' y_i' z_i'$, встановлена в точці H_i .

Нехай x_i , x' та x_{i-1} будуть чотиривимірні вектори в системах координат $O_i x_i y_i z_i$, $H_i x_i' y_i' z_i'$ та $O_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ відповідно. Із рис. 3.7 знаходимо перехід від x_i до x' :

$$x' = A_i^{np} x_i, \quad (3.33)$$

де

$$\mathbf{A}_i^{np} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

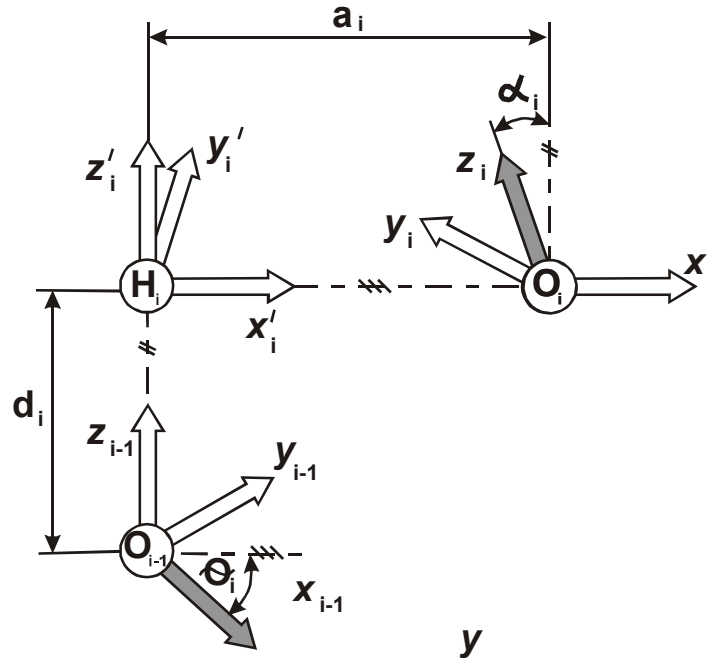


Рисунок 3.7 – Проміжна система координат для метода Денавіта-Хартенберга

Аналогічно перехід від \mathbf{x}' до \mathbf{x}_{i-1} задається виразом:

$$\mathbf{x}_{i-1} = \mathbf{A}_{np}^{i-1} \mathbf{x}', \quad (3.35)$$

де

$$\mathbf{A}_i^{np} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Об'єднавши рівняння (3.33) та (3.35), отримаємо

$$\mathbf{x}_i^{i-1} = \mathbf{A}_{np}^{i-1} \mathbf{A}_i^{np} \mathbf{x}_i = \mathbf{A}_i^{i-1} \mathbf{x}_i, \quad (3.37)$$

де

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Матриця A_i^{i-1} визначає положення та орієнтацію i -ї системи координат відносно $(i-1)$ -ї. Перші три вектори цієї матриці – стовпчики розмірністю 3×1 представляють собою направляючі косинуси координатних осей системи i , в той час як останній вектор – стовпчик 3×1 визначає положення початку координат O_i .

3.4.3 Застосування метода Денавіта-Хартенберга

Використовуючи розглянутий в попередньому розділі метод, знайдемо просторове положення робочого органу як функцію кутових переміщень у зчленуваннях маніпулятора.

Будемо вважати, що $q_i = \theta_i$ для обертального руху та $q_i = d_i$ для поступального руху.

У відповідності з (3.37) положення та орієнтація i -ї ланки відносно $(i-1)$ -ї описується як функція q_i за допомогою матриці $A_i^{i-1}(q_i)$ розмірністю 4×4 .

Застосовуючи n послідовних перетворень координат вздовж з'єднання $(n+1)$ ланок маніпулятора, як показано на рис. 3.8, отримаємо положення робочого органу відносно базової системи координат. У відповідності з (3.29) знайдемо матрицю послідовних перетворень:

$$T = A_1^0(q_1)A_2^1(q_2) \cdot \dots \cdot A_i^{i-1}(q_i) \cdot \dots \cdot A_n^{n-1}(q_n)q. \quad (3.39)$$

Рівняння (3.39) забезпечує функціональний взаємозв'язок між положенням та просторовою орієнтацією останньої ланки, а також кутовими переміщеннями у кожному із зчленувань маніпулятора (q_1, q_2, \dots, q_n) відносно базової системи координат $O_0x_0y_0z_0$, як показано на рис. 3.8.

Рівняння (3.39) задає так звану *задачу прямої кінематики*, що ґрунтується на знаходженні матриці T , яка визначає координати робочого органу маніпулятора та його орієнтацію відносно нерухомої системи координат, знаючи значення узагальнених координат q_i для всіх ланок.

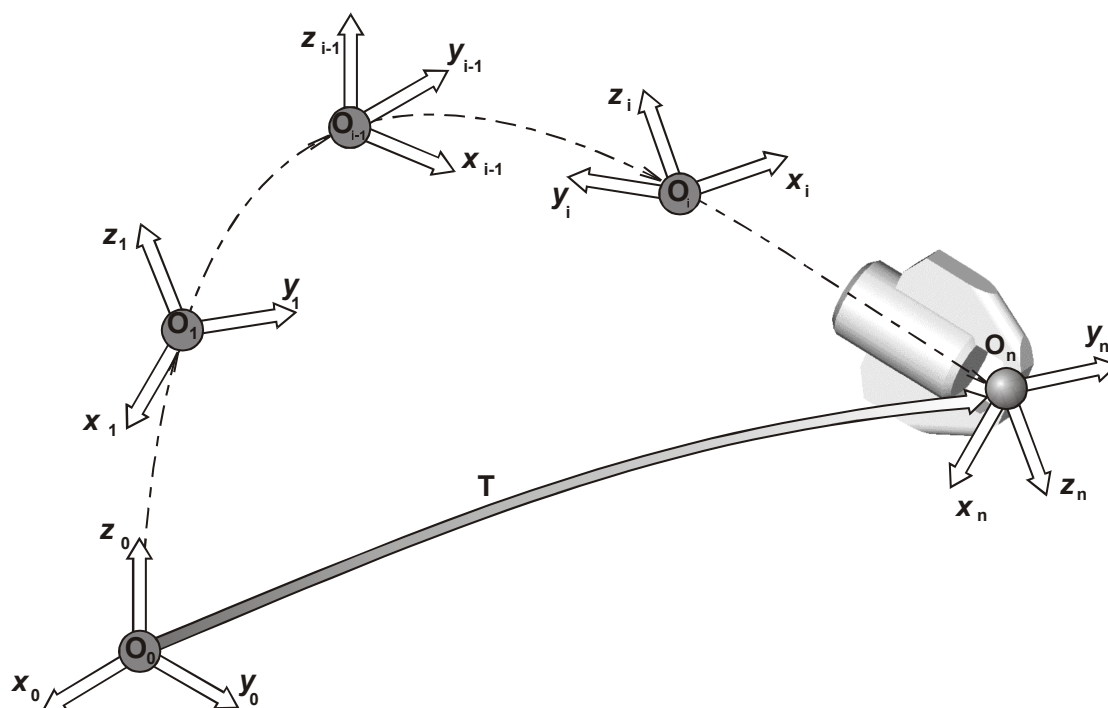


Рисунок 3.8 – Маніпулятор, що складається з послідовно з'єднаних n ланок

Існує декілька винятків із правил використання метода Денавіта-Хартенберга. Так, для кожної ланки необхідно знайти спільну нормаль до осей двох зчленувань. Але такої спільної нормалі для базової та останньої ланок не існує, оскільки вони мають лише по одному зчленування. Для цих двох ланок системи координат визначаються наступним чином.

У випадку останньої ланки початок системи координат може бути встановлено в будь-якій точці робочого органу, як показано на рис. 3.9. Орієнтація системи координат повинна бути вибрана таким чином, щоб вісь x_n перетинала вісь n -го зчленування, утворюючи правий кут. Кут α_n обирається довільно.

Для базової ланки основа системи координат $O_0x_0y_0z_0$ початок вибирається довільно на осі першого зчленування, як показано на рис. 3.10. Напрямок осі z_0 повинен бути паралельним осі зчленування, а орієнтація осей x_0 та y_0 довільна.

Існує також два винятки для проміжних ланок. У тому випадку, коли дві осі зчленувань проміжних ланок паралельні, спільна нормаль не єдина, тоді її

вибір довільний. За звичай обирається нормаль, що проходить через точку O_{i-1} (див. рис. 3.6), тоді відстань d_i стає рівною нулю.

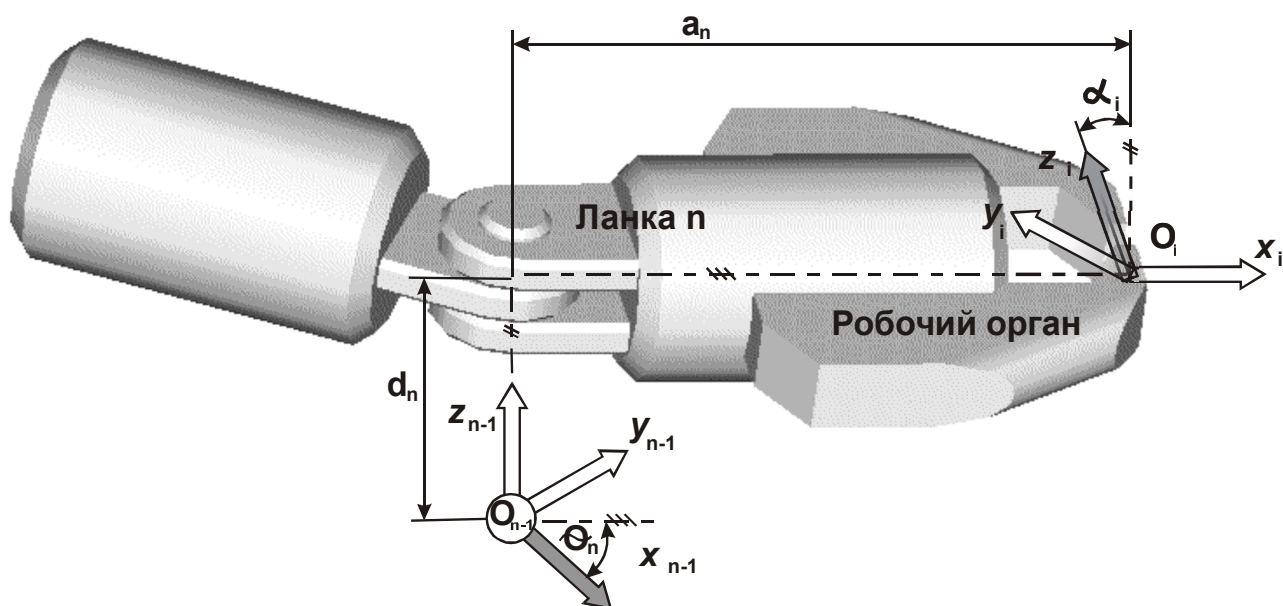


Рисунок 3.9 – Вибір орієнтації системи координат для останньої (n-ї) ланки

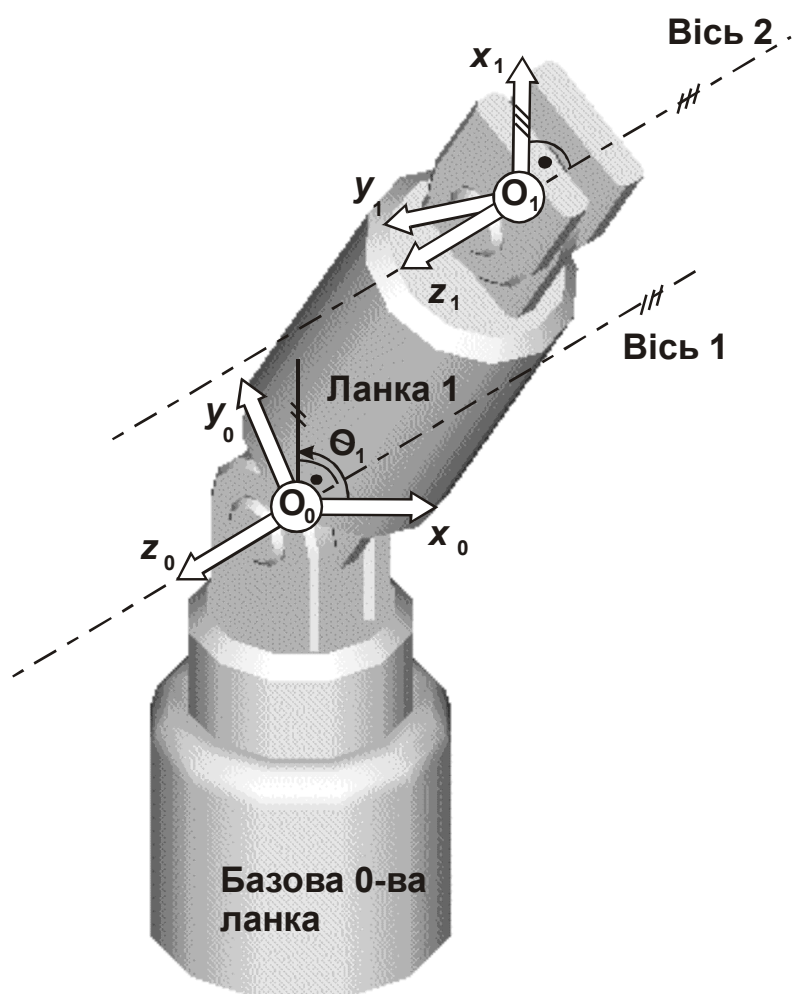


Рисунок 3.10 – Вибір орієнтації системи координат для базової ланки

Для призматичних зчленувань тільки напрямок осі є істотним, тому її розташування може бути вибраним довільно.

3.4.4 Пряма задача кінематики для дволанкового маніпулятора

Сформулюємо пряму задачу кінематики для дволанкового маніпулятора, кінематична схема якого зображена на рис. 3.11. Маніпулятор представляє собою розімкнений кінематичний ланцюг із двома ступенями свободи, що містить два зчленування, що обертаються. Маніпулятор повністю знаходиться в одній площині, що дає можливість стверджувати, що аплікати всіх ланок маніпулятора тотожно дорівнюють нулю:

$$\forall \mathbf{z} \equiv 0. \quad (3.40)$$

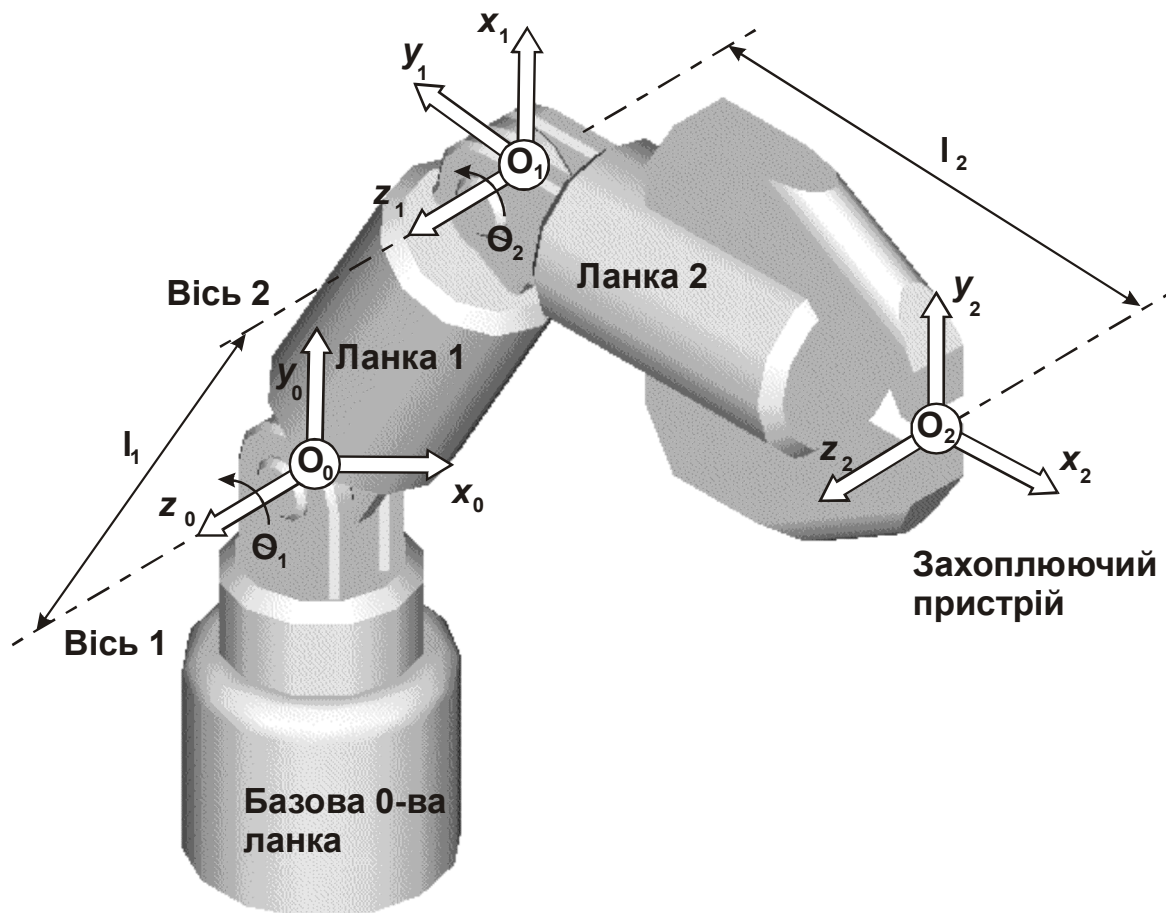


Рисунок 3.11 – Кінематична схема дволанкового маніпулятора

Пряма задача кінематики вирішує задачу знаходження координат робочого органу маніпулятора $\mathbf{x}_{PO} = (x_{PO} \ y_{PO})^T$, по заданим його узагальненим

координатам $\mathbf{q} = (\theta_1 \ \theta_2)^T$, де x_{PO} та y_{PO} абсциса та ордината робочого органу, θ_1 та θ_2 кутові положення першої та другої ланок маніпулятора.

У відповідності з методом Денавіта-Хартенберга на рис. 3.11 зафіксовані системи координат: $O_0x_0y_0z_0$ – зв’язана з базовою ланкою, $O_1x_1y_1z_1$ – зв’язана з першою ланкою та $O_2x_2y_2z_2$ – зв’язана з третьою ланкою. Кут θ_1 відраховується між осями x_0 та x_1 проти годинникової стрілки, кут θ_2 – між x_1 та x_2 . Параметри матриць перетворення \mathbf{A}_1^0 та \mathbf{A}_2^1 наведено у табл. 3.1.

Таблиця 3.1 – Параметри матриць перетворень

№ ланки (i)	α_i	a_i	d_i	q_i
1	0	l_1	0	θ_1
2	0	l_2	0	θ_2

Використовуючи дані таблиці, а також вираз (3.38) матриці перетворень \mathbf{A}_1^0 та \mathbf{A}_2^1 можна записати у вигляді:

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & l_1 \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & l_1 \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{A}_2^1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & l_2 \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & l_2 \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

У відповідності з (3.39) матриця перетворення \mathbf{T} буде мати вигляд:

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}_1^0 \cdot \mathbf{A}_2^1; \quad \mathbf{A}_1^0 = (a_{ij}^0); \quad \mathbf{A}_2^1 = (a_{ij}^1); \quad \mathbf{T} = (\tau_{ij}), \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Тоді координати робочого органу в базовій системі відліку можна визначити, розв’язавши рівняння:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} & \tau_{14} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} & \tau_{24} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} & \tau_{34} \\ \tau_{41} & \tau_{42} & \tau_{43} & \tau_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Оскільки координати робочого органу співпадають з початком другої системи координат O_2 , то вектор $\mathbf{x}_2 = (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$, тоді

$$x_0 = \tau_{14}; y_0 = \tau_{24}; z_0 = 0. \quad (3.44)$$

Із формули множення матриць $\tau_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^0 a_{kj}^1$ знайдемо:

$$\tau_{14} = \sum_{k=1}^4 a_{1k}^0 a_{k4}^1 = l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - l_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2), \quad (3.45)$$

$$\tau_{24} = \sum_{k=1}^4 a_{2k}^0 a_{k4}^1 = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_1). \quad (3.46)$$

Виконавши прості тригонометричні перетворення та підставивши у (3.44), отримаємо:

$$\begin{aligned} x_0 &= l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), \\ y_0 &= l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Можна зробити висновок, що рівняння (3.47) повністю розв'язує пряму задачу кінематики, до того ж, однозначно, тобто заданому вектору \mathbf{q}^* завжди відповідає єдиний вектор \mathbf{x}^* .

3.5 Обернена задача кінематики

Кінематичні рівняння, розглянуті у п.3.4, встановлюють взаємозв'язок між узагальненими координатами та просторовим положенням робочого органу маніпулятора. При керуванні роботом завжди необхідно вирішувати задачу, яким чином вивести робочий орган маніпулятора в задану точку простора,

тобто знайти значення узагальнених координат, яке забезпечить необхідне положення та орієнтацію робочого органу.

Ця задача є оберненою до попередньої і називається *оберненою задачею кінематики*. Задача прямої кінематики має єдине рішення для будь-якого набору узагальнених координат. Навпаки, фіксованому положенню робочого органу може відповідати сукупність узагальнених координат. Рішення задачі оберненої кінематики в загальному випадку зводиться до розв'язання системи нелінійних тригонометричних рівнянь з великою кількістю тригонометричних функцій. Тому отримання рішення в замкненій формі, яке б представляло собою обернену функцію рівнянь кінематики не завжди можливо.

Часто ефективне рішення задачі оберненої кінематики можливо знайти лише чисельними методами. Можуть також існувати області, які для даної конструкції маніпулятора недосяжні при будь-яких узагальнених координатах.

В загальному випадку для характеристики положення робочого органу кількість узагальнених координат робочого органу задається рівною шести: $m = 6$. Наприклад, три координати деякої точки робочого органу та три кути, що характеризують орієнтацію системи координат, жорстко зв'язаної із робочим органом, відносно базової системи відліку, жорстко зв'язаної з основою. Визначення вектора узагальнених координат $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$, n – кількість узагальнених координат, по заданим координатам робочого органу, можливо, якщо $n = m$ (умова необхідна, але не достатня).

При $n < m$ рішення у загальному вигляді відсутнє. Його можна отримати, якщо задати довільно лише n координат робочого органу або $(m - n)$ узагальнених координат.

При $n > m$ обернена задача розв'язується неоднозначно. В таких випадках маніпулятор має надлишкові ступені рухомості, які дозволяють маніпулятору працювати в середовищі з перепонами.

Для рішення оберненої задачі кінематики необхідно знайти вектор узагальнених координат \mathbf{q} , який гарантує положення робочого органу в точці, заданій вектором \mathbf{x}_{p0} .

Як уже було сказано раніше, рішення оберненої задачі досить часто здійснюється в чисельному вигляді. Але для випадку дволанкового маніпулятора існує рішення в аналітичній формі.

Координати робочого органу в базовій системі відліку визначаються як

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{T}(\theta_1, \theta_2)\mathbf{x}_2, \quad \mathbf{T} = \mathbf{A}_1^0(\theta_1)\mathbf{A}_2^1(\theta_2). \quad (3.48)$$

Помножимо ліву та праву частину рівняння (3.48) на $\{\mathbf{A}_1^0(\theta_1)\}^{-1}$, тоді

$$\{\mathbf{A}_1^0(\theta_1)\}^{-1}\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}_2^1(\theta_2)\mathbf{x}_2. \quad (3.49)$$

Слід звернути увагу на те, що ліва частина рівняння (3.49) залежить лише від узагальненої координати θ_1 , а права – лише від θ_2 . При цьому:

$$\{\mathbf{A}_1^0(\theta_1)\}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & 0 & -l_1 \\ -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Враховуючи (3.50), за умови $z_0 = 0$, у спрощеному виді вираз (3.49) має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_0 \cos(\theta_1) + y_0 \sin(\theta_1) - l_1 \\ -x_0 \cdot \sin(\theta_1) + y_0 \cos(\theta_1) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_2 \cos(\theta_2) \\ l_2 \sin(\theta_2) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

або у розгорнутому виді

$$\begin{aligned}x_0 \cos(\theta_1) + y_0 \sin(\theta_1) - l_1 &= l_2 \cos(\theta_2), \\ -x_0 \sin(\theta_1) + y_0 \cos(\theta_1) &= l_2 \sin(\theta_2).\end{aligned}\tag{3.52}$$

Перенесемо у першому рівнянні системи (3.52) l_1 в праву частину і піднесемо це рівняння до квадрату, отримаємо:

$$\begin{aligned}x_0^2 \cos^2(\theta_1) + y_0^2 \sin^2(\theta_1) + 2x_0 y_0 \cos(\theta_1) \sin(\theta_1) &= \\ = l_2^2 \cos^2(\theta_2) + l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2).\end{aligned}\tag{3.53}$$

Тепер піднесемо до квадрату друге рівняння системи (3.52):

$$x_0^2 \sin^2(\theta_1) + y_0^2 \cos^2(\theta_2) - 2x_0 y_0 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) = l_2^2 \sin^2(\theta_2).\tag{3.54}$$

Додамо отримані рівняння, враховуючи відому тригонометричну залежність $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$, отримаємо:

$$x_0^2 + y_0^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2).\tag{3.55}$$

З виразу (3.55) знаходимо θ_2 :

$$\theta_2 = \arccos\left(\frac{x_0^2 + y_0^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right).\tag{3.56}$$

Фактично рівняння (3.56) є рішенням оберненої задачі кінематики відносно узагальненої координати θ_2 . Для її рішення відносно θ_1 необхідно друге рівняння системи (3.52) поділити на перше, потім поділити чисельник та знаменник лівої частини рівняння на $\cos(\theta_1)$. Отримаємо:

$$\frac{-x_0 \operatorname{tg}(\theta_1) + y_0}{x_0 + y_0 \operatorname{tg}(\theta_1)} = \frac{l_2 \sin(\theta_2)}{l_2 \cos(\theta_2) + l_1}.\tag{3.57}$$

Зробивши прості перетворення, виділимо θ_1 і отримає

$$\theta_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{y_0(1_1 + 1_2 \cos(\theta_2)) - x_0 1_2 \sin(\theta_2)}{y_0(1_2 \sin(\theta_2)) + x_0(1_1 + 1_2 \cos(\theta_2))} \right). \quad (3.58)$$

Рівняння (3.58) є рішенням оберненої задачі кінематики відносно узагальненої координати θ_1 .

Вирази (3.56) та (3.58) вказують на те, що існує два рішення задачі оберненої кінематики в залежності від того, в якому квадранті вибрано значення θ_2 із (3.56).

Для знаходження залежностей узагальнених координат від часу необхідно в (3.56) та (3.58) підставити залежності $x(t)$ та $y(t)$, що отримані на етапі проектування траєкторії руху в розділі 2.

3.6 Обернена швидкісна задача

Наступним, після знаходження $\mathbf{q} = (\theta_1, \theta_2)^T$ із $\mathbf{x} = (x_0, y_0)$ в ході рішення задачі оберненої кінематики, кроком розрахунку маніпулятора є встановлення взаємозв'язку між швидкостями у зчленуваннях та швидкостями в робочому органі. Виходячи із рішення прямої задачі кінематики, можна помітити, що координати (x_0, y_0) є функціями одночасно двох змінних θ_1 та θ_2 , тобто

$$x_0 = f_x(\theta_1, \theta_2), y_0 = f_y(\theta_1, \theta_2). \quad (3.59)$$

Для знаходження відповідних швидкостей v_x та v_y необхідно мати елементарні прирости координат робочого органу дволанкового маніпулятора по функціональним змінним:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial f_x(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial f_x(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} d\theta_2, \\ dy &= \frac{\partial f_y(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial f_y(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} d\theta_2. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Визначивши вектори

$$d\mathbf{x} = (dx, dy)^T, d\mathbf{q} = (d\theta_1, d\theta_2)^T, \quad (3.61)$$

отримаємо:

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_x(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_y(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_y(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} d\mathbf{q}. \quad (3.62)$$

Матриця часткових похідних у виразі (3.62) традиційно називається **Якобіаном** маніпуляційної системи. Поділивши праві та ліві частини рівняння (3.52) на dt , візьмемо його похідну по часу, отримаємо рівняння, що встановлює взаємозв'язок між швидкостями у зчленуваннях та робочому органі:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{J} \frac{d\mathbf{q}}{dt} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \quad (3.63)$$

$$\text{де } \mathbf{v} = \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d\mathbf{y}}{dt} \right), \boldsymbol{\omega} = \left(\frac{d\theta_1}{dt}, \frac{d\theta_2}{dt} \right).$$

Слід звернути увагу, що якобіан представляє собою функціональну матрицю, в нашому випадку він залежить від конфігурації маніпулятора, тобто узагальнених координат θ_1 та θ_2 . При цьому, кожен вектор-стовпчик якобіана представляє собою швидкість робочого органу, яка генерується швидкістю в даному зчленуванні, при нерухомих інших зчленуваннях.

У тих точках, де якобіан дорівнює нулю, конфігурація маніпулятора буде виродженою.

Для дволанкового маніпулятора якобіан має вигляд:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -(l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

При розв'язанні оберненої швидкісної задачі кінематики необхідно розв'язати задачу визначення вектора швидкостей у зчленуваннях, тобто вектора узагальнених швидкостей, по заданому вектору лінійних та кутових прискорень робочого органу.

У випадку дволанкового маніпулятора ми маємо лінійну швидкість $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$. Для того, щоб знайти вектор керуючих моментів $\mathbf{M}(t)$, необхідного для відпрацювання заданої траєкторії, потрібно визначити:

$$\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{v}. \quad (3.65)$$

Рівняння (3.65) є *оберненою швидкісною задачею кінематики*. Питанням її розв'язання займається інверсна кінематика швидкісного руху. Головним обмеженням є те, що рівняння (3.65) має рішення тільки якщо $\det \mathbf{J} \neq 0$ для всіх \mathbf{q} . Якщо в будь-якій з точок якобіан вироджений, то в цій точці рух робочого органу із заданою швидкістю не може бути забезпечений ні при якому значенні швидкостей у зчленуваннях. А на можливість досягнення високих швидкостей накладає обмеження реальна можливість двигуна генерувати їх без перевантаження по струму та інших аварійних режимів двигуна.

Розв'яжемо рівняння (3.65) для дволанкового маніпулятора. Виходячи із (3.64) маємо:

$$\mathbf{J}^{-1} = -\frac{1}{l_1 l_2 \sin(\theta_2)} \begin{pmatrix} l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & -l_1 \sin(\theta_1) l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}. \quad (3.66)$$

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1 = \frac{1}{l_1 l_2 \sin(\theta_2)} (v_x l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + v_y l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)). \quad (3.67)$$

$$\omega_2 = \dot{\theta}_2 = \frac{-1}{l_1 l_2 \sin(\theta_2)} (v_x (l_1 \cdot \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) + v_y (l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2))). \quad (3.68)$$

Отже, для знаходження $\omega_1(t)$ та $\omega_2(t)$ необхідно знати $\theta_1(t)$ та $\theta_2(t)$ при русі із заданим графіком швидкості, тобто v_x та v_y .

В точках, де конфігурація маніпулятора буде наближатися до точки виродження – параметри ω_1, ω_2 будуть прямувати до нескінченності. По технологічним причинам вони не можуть бути відпрацьованими.

Для дволанкового маніпулятора єдиний параметр, що впливає на $\det \mathbf{J}$ є θ_2 . При $\theta_2 = 0, \pi, \dots, \pi n, n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ конфігурація маніпулятора – є виродженою. В даній роботі реалізований механізм програмного захисту від потрапляння маніпулятора в зону виродженості.

3.7 Обернена задача прискорення

Для реалізації алгоритму керування за методом локальних регуляторів необхідно встановити співвідношення також між кутовими прискореннями у зчленуваннях та лінійними прискореннями робочого органу.

Для вирішення цієї проблеми візьмемо похідну від кожного з рівнянь системи (3.67) та (3.68), спростивши отримаємо значення кутових прискорень функції лінійних положень, швидкостей, прискорень та кутових положень та швидкостей:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{l_1 l_2} \left[\frac{a_x f_{11} + a_y f_{12} + f'}{\sin(\theta_2)} - \frac{v_x f_{11} + v_y f_{12}}{\sin^2(\theta_2)} \cos(\theta_2) \omega_2 \right], \quad (3.69)$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{1}{l_1 l_2} \left[\frac{a_x f_{21} + a_y f_{22} + (v_y \cos(\theta_1) - v_x \sin(\theta_1)) l_1 \omega_1 + f'}{\sin(\theta_2)} - \frac{v_x f_{21} + v_y f_{22}}{\sin^2(\theta_2)} \cos(\theta_2) \omega_2 \right], \quad (3.70)$$

де $f_{11} = l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$, $f_{12} = l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$, $f_{21} = l_1 \cos(\theta_1) + f_{11}$,

$f_{22} = l_1 \sin(\theta_1) + f_{12}$; $f' = (v_y f_{11} - v_x f_{12})(\omega_1 + \omega_2)$.

Змінні a_x та a_y , що застосовуються у рівняннях (3.69) та (3.70) обчислюються у відповідності з системою (2.10).

3.8 Перевірка розв'язку оберненої задачі кінематики

Рішення зворотної задачі кінематики потребує перевірки за допомогою кінематичного рівняння (3.47). Така потреба виникає в зв'язку з неоднозначністю визначення зворотних тригонометричних функцій в (3.56) та (3.58).

Залежності $\theta_1(t)$ та $\theta_2(t)$ використовуються в (3.47) для розрахунку координат робочого органу $x(t)$, $y(t)$, на їх основі отримується первинна фігура відпрацювання.

4 КЕРУВАННЯ МАНІПУЛЯТОРОМ

4.1 Математична модель маніпулятора з урахуванням приводних двигунів

Проведемо аналіз динаміки маніпуляційної системи спочатку у загальному вигляді, а потім конкретно для дволанкового маніпулятора.

У загальному випадку в маніпуляційній системі існує декілька ступенів свободи, кожна з яких регулюється за допомогою свого приводного двигуна, тобто ми маємо багатокоординатну систему. Для зручності перейдемо до векторної форми запису рівнянь руху маніпулятора.

Рівняння динаміки маніпуляційної системи, що має n ступенів свободи, в векторній формі, яка є зручною для моделювання, у загальному випадку мають вигляд (за умови, що момент є керуючою дією для маніпуляційної системи):

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\left(\mathbf{M} - \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})\right),\end{aligned}\tag{4.1}$$

де $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_n)^T$ – вектор узагальнених координат,

$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} = (\omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_n)^T$ – вектор узагальнених швидкостей,

$\mathbf{M} = (M_1 \quad M_2 \quad \dots \quad M_n)^T$ – вектор приводних моментів,

$\mathbf{h} = (h_1 \quad h_2 \quad \dots \quad h_n)^T$ – вектор моментів відцентрових та коріолісових сил,

$\mathbf{G} = (G_1 \quad G_2 \quad \dots \quad G_n)^T$ – вектор моментів сил, що мають гравітаційне походження,

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} H_{11}(\boldsymbol{\theta}) & H_{12}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & H_{1n}(\boldsymbol{\theta}) \\ H_{21}(\boldsymbol{\theta}) & H_{22}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & H_{2n}(\boldsymbol{\theta}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{n1}(\boldsymbol{\theta}) & H_{n2}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & H_{nn}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} \quad \text{– матриця моментів інерції}$$

маніпулятора, вона має розмірність $n \times n$, завжди симетрична та позитивно

визначена: кінетична енергія системи $\frac{1}{2}\dot{\theta}^T \mathbf{H}(\theta)\dot{\theta} \geq 0$ завжди не менша нуля, тобто квадратична форма можлива лише при позитивній визначеності $\mathbf{H}(\theta)$. Це означає, що матрицю моментів інерції $\mathbf{H}(\theta)$ завжди можна інвертувати.

4.1.1 Виведення динамічної моделі дволанкового маніпулятора

Розглянемо більш детально структуру моделі маніпуляційної системи, а також кроки її отримання.

Для виводу рівнянь динаміки дволанкового маніпулятора використаємо рівняння Ейлера-Лагранжа (рівняння Лагранжа другого роду).

Запишемо рівняння Ейлера-Лагранжа в загальному вигляді:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial E_K}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial E_n}{\partial q_i} \right) = Q_i, \quad (4.2)$$

де E_K , E_n – повна кінетична і потенційна енергія системи відповідно;

q_i – узагальнені координати (в нашому випадку θ_1 і θ_2);

\dot{q}_i – узагальнені швидкості (в нашому випадку $\dot{\theta}_1$ і $\dot{\theta}_2$);

Q_i – узагальнені сили або моменти (в нашому випадку M_1 , M_2).

Перепишемо рівняння Ейлера-Лагранжа (4.2) у вигляді:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial E_K}{\partial q_i} \right) = - \left(\frac{\partial E_n}{\partial q_i} \right) + Q_i. \quad (4.3)$$

Відомо, що функція Лагранжа являє собою різницю повних кінетичної і потенційної енергії системи. Дволанковий маніпулятор виконує обертальний рух, тому для знаходження кінетичної енергії у розгляд приймається момент інерції J .

Для визначення моменту інерції J використаємо теорему Штейнера, яка має наступне формулювання:

Момент інерції відносно деякої осі дорівнює сумі моменту інерції відносно паралельної осі і маси, помноженої на квадрат відстані між ними, тобто:

$$J = J' + ml^2. \quad (4.4)$$

Також необхідно враховувати вплив сили Коріоліса, оскільки вона діє на тіло яке здійснює поступальний рух в системі координат, що обертається:

$$f_K = 2m[\vec{\omega} \times \vec{v}]. \quad (4.5)$$

На основі вищевикладеного знайдемо повну кінетичну енергію системи:

$$E_K = E_{K1} + E_{K2} + E_{K3} + E_{K4}, \quad (4.6)$$

де E_{K1} – власна кінетична енергія першої ланки;

E_{K2} – кінетична енергія другої ланки при обертанні першої ланки;

E_{K3} – кінетична енергія другої ланки при обертанні з власною швидкістю і нерухомою першою ланкою;

E_{K4} – кінетична енергія другої ланки при обертанні другої ланки при обертанні разом з першою ланкою.

Власна кінетична енергія першої ланки дорівнює:

$$E_{K1} = \frac{1}{2}(m_1 l_{c1}^2 + J_1) \dot{\theta}_1^2. \quad (4.7)$$

Кінетична енергія другої ланки при обертанні першої ланки:

$$E_{K2} = \frac{1}{2} [m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos \theta_2) + J_2] \dot{\theta}_1^2. \quad (4.8)$$

Кінетична енергія другої ланки при обертанні з власною швидкістю і нерухомою першою ланкою:

$$E_{K3} = \frac{1}{2} [m_2 l_{c2}^2 + J_2] \dot{\theta}_2^2. \quad (4.9)$$

Кінетична енергія другої ланки при обертанні другої ланки разом із першою ланкою:

$$E_{K4} = [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos \theta_2 + J_2] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2. \quad (4.10)$$

Перепишемо рівняння (4.6) з урахуванням (4.7) – (4.10):

$$E_K = \frac{1}{2} [(m_1 l_1^2 + J_1) + m_2 (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_{c2} \cos \theta_2) + J_2] \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} [m_2 l_{c2}^2 + J_2] \dot{\theta}_2^2 + [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos \theta_2 + J_2] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2. \quad (4.11)$$

Знайдемо часткові похідні від кінетичної енергії по $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$:

$$\frac{\partial E_K}{\partial \theta_1} = 0,$$

$$\frac{\partial E_K}{\partial \theta_2} = -(m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_2) \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2),$$

$$\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 l_{c1}^2 + J_1 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos \theta_2) + J_2) \dot{\theta}_1 + (m_2 l_{c2}^2 + J_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos \theta_2) \dot{\theta}_2,$$

$$\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\theta}_2} = (m_2 l_{c2}^2 + J_2) \dot{\theta}_2 + (m_2 l_{c2}^2 + J_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos \theta_2) \dot{\theta}_1,$$

Похідні по часу від $\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\theta}_1}$ і $\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\theta}_2}$ мають наступний вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = (m_1 l_{c1}^2 + J_1 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos \theta_2) + J_2) \ddot{\theta}_1 + \quad (4.12)$$

$$+ (m_2 l_{c2}^2 + J_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos \theta_2) \ddot{\theta}_2 - (2m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - (m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2^2,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = (m_2 l_{c2}^2 + J_2) \ddot{\theta}_2 + (m_2 l_{c2}^2 + J_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 - (m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2.$$

Тепер знайдемо повну потенційну енергію системи:

$$E_{\pi} = E_{\pi 1} + E_{\pi 2}, \quad (4.13)$$

де $E_{\pi 1}$ – потенційна енергія першої ланки; $E_{\pi 2}$ – потенційна енергія другої ланки;

Потенційна енергія першої ланки:

$$E_{\pi 1} = gm_1 l_{c1} \sin \theta_1. \quad (4.14)$$

Потенційна енергія другої ланки:

$$E_{\pi 2} = gm_2 (l_1 \sin \theta_1 + l_{c2} \sin(\theta_1 + \theta_2)), \quad (4.15)$$

де $g = 9.81$ – прискорення вільного падіння, яке діє вздовж від'ємного напрямку осі Oy .

Перепишемо рівняння (4.13) з урахуванням (4.14) і (4.15):

$$E_{\pi} = g [m_1 l_{c1} \sin \theta_1 + m_2 (l_1 \sin \theta_1 + l_{c2} \sin(\theta_1 + \theta_2))]. \quad (4.16)$$

Часткові похідні від потенційної енергії по θ_1, θ_2 записуються у вигляді:

$$\frac{\partial E_{\pi}}{\partial \theta_1} = g [m_1 l_{c1} \cos \theta_1 + m_2 (l_1 \cos \theta_1 + l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2))], \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial E_{\pi}}{\partial \theta_2} = gm_2 l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2). \quad (4.18)$$

Підставивши отримані складові кінетичної та потенційної енергії (4.12), (4.17), (4.18) у вихідне рівняння (4.2), з урахуванням математичних перетворень, отримаємо рівняння, що описують динаміку дволанкового маніпулятора:

$$\begin{aligned} M_1 = & [m_1 l_{c1}^2 + J_1 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos \theta_2) + J_2] \ddot{\theta}_1 + [m_2 l_{c2}^2 + J_2 + \\ & + m_2 l_1 l_{c2} \cos \theta_2] \ddot{\theta}_2 - [2m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_2] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - [m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_2] \theta_1 \dot{\theta}_2^2 + \\ & + g [m_1 l_{c1} \cos \theta_1 + m_2 (l_1 \cos \theta_1 + l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2))], \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$M_2 = [m_2 l_{c2}^2 + J_2] \ddot{\theta}_2 + [m_2 l_{c2}^2 + J_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos \theta_2] \ddot{\theta}_1 + [m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_2] \dot{\theta}_1^2 + gm_2 l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2). \quad (4.20)$$

Для спрощення отриманих виразів (4.19) і (4.20) введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} H_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + J_1 + m_2 (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_{c2} \cos \theta_2) + J_2, \\ H_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + J_2, \\ H_{12} &= m_2 l_2^2 + J_2 + l_1 l_{c2} m_2 \cos \theta_2, \\ h &= m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_2, \\ G_1 &= m_1 l_{c1} g \cos \theta_1 + m_2 g [l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \cos \theta_1], \\ G_2 &= gm_2 l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \quad (4.21)$$

З урахуванням введених позначень рівняння (4.19) і (4.20) остаточно набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} M_1 &= H_{11} \ddot{\theta}_1 + H_{12} \ddot{\theta}_2 - h \dot{\theta}_2^2 - 2h \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + G_1, \\ M_2 &= H_{22} \ddot{\theta}_2 + H_{12} \ddot{\theta}_1 + h \dot{\theta}_1^2 + G_2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Перепишемо (4.22) в наступному вигляді :

$$\begin{aligned} H_{11} \ddot{\theta}_1 + H_{12} \ddot{\theta}_2 &= M_1 + h \dot{\theta}_2^2 + 2h \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - G_1, \\ H_{22} \ddot{\theta}_2 + H_{12} \ddot{\theta}_1 &= M_2 - h \dot{\theta}_1^2 - G_2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ліві частини перепишемо в матричній формі і виконаємо заміну $\dot{\theta}_i = \omega_i$, де $i = 1, 2$:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 + h \omega_2^2 + 2h \omega_1 \omega_2 - G_1 \\ M_2 - h \omega_1^2 - G_2 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Тоді із (4.24) отримаємо рівняння динаміки дволанкового маніпулятора в векторній формі:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} M_1 + h\omega_2^2 + 2h\omega_1\omega_2 - G_1 \\ M_2 - h\omega_1^2 - G_2 \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

враховуючи, що

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{H_{11}H_{22} - H_{12}^2} \begin{bmatrix} H_{22} & -H_{12} \\ -H_{12} & H_{11} \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Діагональні елементи матриці в (4.26) – власні моменти інерції зчеплень, недіагональні – їх взаємні моменти інерції, які визначають взаємний вплив ланок при русі в прискореному режимі. Матриці H_{11} та H_{12} є величинами змінними і залежать від конфігурації маніпулятора в конкретний момент часу.

Тоді рівняння (4.25) в скалярному вигляді можуть бути представлені як

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \frac{1}{H_{11}H_{22} - H_{12}^2} \left(H_{22}(M_1 + h\omega_2^2 + 2h\omega_1\omega_2 - G_1) - H_{12}(M_2 - h\omega_1^2 - G_2) \right), \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1}{H_{11}H_{22} - H_{12}^2} \left(-H_{12}(M_1 + h\omega_2^2 + 2h\omega_1\omega_2 - G_1) + H_{11}(M_2 - h\omega_1^2 - G_2) \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Якщо i -та ланка зв'язана з приводним двигуном через редуктор із передаточним відношенням n_{pi} , $i=1,2$, то власні моменти інерції з урахуванням моментів інерції двигунів модифікуються,

$$\begin{aligned} H'_{11} &= H_{11} + n_1^2 J_{д1}, \\ H'_{22} &= H_{22} + n_2^2 J_{д2}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

де $J_{ди}$ – неприведений моменти інерції i -го приводного двигуна. У рівнянні перший доданок правої частини – H_{ii} – змінний і залежить від конфігурації маніпулятора, а другий – $(n_{pi}^2 \cdot J_{ди})$ – постійний.

Враховуючи, що H_{12} набагато менше порівняно із H_{11} і H_{22} , то його значенням можна знехтувати. Тобто вважаємо, що $H_{12} = 0$.

Тоді визначивши моменти збурення на валу кожного двигуна у вигляді

$$\begin{aligned} M_{B1} &= G_1 - h\omega_2^2 - 2h\omega_1\omega_2, \\ M_{B2} &= G_2 + h\omega_1^2, \end{aligned} \quad (4.29)$$

отримаємо рівняння динаміки дволанкового маніпулятора з урахуванням введених припущень

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \omega_1, \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2, \\ \dot{\omega}_1 &= \frac{1}{H_{11}}(M_1 - M_{B1}), \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1}{H_{22}}(M_2 - M_{B2}), \end{aligned} \quad (4.30)$$

де $H_{11} = m_1 l_{c1}^2 + J_1 + m_2(l_{c1}^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos\theta_2) + J_2 + n_1^2 J_{д1}$,

$H_{22} = m_2 l_{c2}^2 + J_2 + n_2^2 J_{д2}$, $M_1 = n_1 M_{д1}$, $M_2 = n_2 M_{д2}$.

Системою рівнянь (4.1) описується рух дволанкової маніпуляційної системи в кожен конкретний момент часу, входами системи є відповідні моменти приводних двигунів.

Наступним етапом синтезу САПР є створення приводних моментів, що забезпечують відпрацювання механічною частиною маніпулятора заданої дії із заданою точністю.

Рівняння динаміки системи (4.1) з урахуванням динаміки електричної частини ДПС у векторній формі мають вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{M} - \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})), \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{C}_f \mathbf{N} \mathbf{i}, \\ \dot{\mathbf{i}} &= \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{R} \mathbf{i} - \mathbf{C}_f \mathbf{N} \boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Для моделі (4.31) – (4.32) n -ланкового маніпулятора задані такі параметри: $\mathbf{C}_f = \text{diag}(c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$ – матриця конструктивних сталей

приводних двигунів, $\mathbf{N} = \text{diag}(n_1 \ n_2 \ \dots \ n_n)$ – матриця передаточних чисел редукторів приводних двигунів, $\mathbf{i} = (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n)^T$ та $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)^T$ – вектори відповідно струмів та напруг якорів приводних двигунів, $\mathbf{L} = \text{diag}(L_1 \ L_2 \ \dots \ L_n)$ та $\mathbf{R} = \text{diag}(R_1 \ R_2 \ \dots \ R_n)$ – матриця індуктивності та активних опорів якоря приводних двигунів.

4.1.2 Розрахунок параметрів ланок

Для розрахунку параметрів ланок спершу треба визначити довжину до найвіддаленішої точки траєкторії L , і тоді, в загальному випадку, визначити довжину кожної з ланок як

$$l_1 = l_2 = \frac{(1.1 \div 1.3)L}{2}. \quad (4.33)$$

Після чого можна визначити їх центри мас:

$$l_{c1} = \frac{l_1}{2}, \quad (4.34)$$

$$l_{c2} = \frac{l_2}{2}. \quad (4.35)$$

Маси ланок, що вважаються суцільними циліндрами визначаються:

$$m_1 = \frac{\pi \rho l_1 d^2}{4}, \quad (4.36)$$

$$m_2 = \frac{\pi \rho l_2 d^2}{4}, \quad (4.37)$$

а їх моменти інерції

$$J_1 = \frac{m_1}{4} \left(\frac{l_1}{2} + \frac{d^2}{4} \right), \quad (4.38)$$

$$J_2 = \frac{m_2}{4} \left(\frac{l_2}{2} + \frac{d^2}{4} \right), \quad (4.39)$$

де d – діаметр ланок.

4.2 Алгоритм керування маніпулятором

4.2.1 Формулювання задачі керування

При алгоритмів керування прийняті наступні допущення:

1. Параметри маніпулятора відомі та постійні.
2. Параметрами, що вимірюються є кутові положення, що задаються вектором \mathbf{q} , кутові швидкості, що задаються вектором $\mathbf{\omega}$ та струми, що задаються вектором \mathbf{i} .
3. Двигун постійного струму живиться від транзисторного перетворювача, який може розглядатися нами як ідеальний підсилювач.
4. В цих умовах необхідно синтезувати такий алгоритм керування двигунами постійного струму n -ланкового маніпулятора, заданий вектором \mathbf{u} , який би гарантував:
5. асимптотичне відпрацювання заданої траєкторії, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}, \quad (4.40)$$

де $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ – вектор похибки відпрацювання узагальнених координат маніпулятора:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*. \quad (4.41)$$

6. Лінійний характер динаміки похибок відпрацювання з показниками якості у відповідності до стандартних поліномів, що мають задані показники якості перехідних процесів;
7. Розв'язку процесів керування між ступенями свободи.

4.2.2 Струмове керування маніпулятором

Задача керування дволанковим маніпулятором при струмовому керуванні формулюється так – знайти вектор приводних моментів \mathbf{M} , який забезпечував би необхідний закон відпрацювання узагальнених координат \mathbf{q}^* (вектора кутового положення $\boldsymbol{\theta}^*$).

На рис. 4.1 показано функціональну схему електромеханічної системи керування маніпулятором, яка відповідає блокам “алгоритм керування” та “ОК”, зображеним на рис. 2.1.

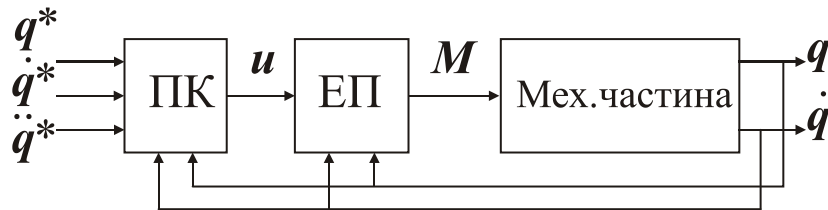


Рисунок 4.1 – Функціональна схема електромеханічного перетворення енергії в маніпуляційній системі

На рисунку позначено: “ПК” – пристрій керування, що виконує алгоритм керування, “ЕП” – електрична частина електроприводів, “Мех. частина” – механічна частина маніпулятора та двигунів, \mathbf{q}^* – заданий на відпрацювання вектор узагальнених координат, $\dot{\mathbf{q}}^*$ – заданий на відпрацювання вектор узагальнених швидкостей, $\ddot{\mathbf{q}}^* = \boldsymbol{\varepsilon}^*$ – заданий на відпрацювання вектор узагальнених прискорень, \mathbf{u} – вектор керуючих напруг, що прикладаються до приводних двигунів, \mathbf{M} – вектор приводних моментів, що генеруються двигунами, \mathbf{q} та $\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\omega}$ – вектори узагальнених координат та швидкостей, що відпрацьовані маніпулятором. Алгоритм керування закладений у блоці “ПК”.

Механічна частина маніпулятора та двигунів задається системою (4.31), електрична частина електроприводів – системою (4.32). Необхідно синтезувати алгоритм керування.

Пристрій керування структурно складається з наступних частин: регулятор положення, регулятор швидкості та регулятор струму.

Припустимо, що приводні двигуни живляться від ідеального джерела струму. Це дає змогу записати передавальну функцію контуру відпрацювання струму:

$$W(p) = \frac{\mathbf{i}(p)}{\mathbf{i}^*(p)} = 1.$$

Тоді ми можемо стверджувати, що реальні струми приводних двигунів дорівнюють заданим $\mathbf{i} = \mathbf{i}^*$.

Згідно першого рівняння системи (4.32), значення вектора моменту пропорційне значенню вектора струму і відпрацьовується без похибки. Підставивши це рівняння у друге рівняння системи (4.31), отримаємо систему:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\left(\mathbf{C}_f \mathbf{N} \mathbf{i} - \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})\right).\end{aligned}\tag{4.42}$$

Тепер ми можемо говорити про знаходження заданого вектору струму якоря приводних двигунів \mathbf{i}^* для реалізації такого закону керування швидкістю, щоб виконувалася умова:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) = \mathbf{0},\tag{4.43}$$

де $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ – вектор похибки відпрацювання кутового положення:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*,\tag{4.44}$$

$\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ – вектор похибки відпрацювання кутової швидкості:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^*,\tag{4.45}$$

Як відомо з теорії математичного аналізу, для асимптотичного відпрацювання узагальнених координат, необхідно виразити їх закони керування як функції заданих значень та похибок відпрацювання, а систему динаміки похибок відпрацювання представити у формі стандартної системи диференційних рівнянь. Наприклад, для системи другого порядку:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_1 - k_2 x_2,\end{aligned}\tag{4.46}$$

де k_1 та k_2 – довільні додатні коефіцієнти.

Система (4.46) при значеннях коефіцієнтів $(k_1, k_2) > 0$ – глобально асимптотично стійка, тобто виконується умова:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1, x_2) \rightarrow 0,$$

що призводить до виконання вимоги асимптотичного відпрацювання координат, похибки відпрацювання яких задані змінними x_1 та x_2 .

Знайдемо такі задані значення вектору моментів приводних двигунів \mathbf{M}^* та вектора струму \mathbf{i} , необхідного для генерування цих моментів, щоб похибки відпрацювання параметрів системи (4.42) $\boldsymbol{\theta}$ та $\boldsymbol{\omega}$, що регулюються, можна було представити у формі (4.46).

Розглянемо динаміку механічної частини системи, яка задана рівнянням (4.42). Похибка відпрацювання кутових координат (кутові швидкість та положення) визначена рівняннями (4.44) та (4.45). До системи керування стоїть вимога (4.43) відпрацювання узагальнених координат з нульовою похибкою.

Для виконання поставленої вимоги динаміка похибок повинна бути представлена у вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} &= \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left(\mathbf{C}_f \mathbf{N} \mathbf{i} - \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) \right) - \dot{\boldsymbol{\omega}}^*. \end{aligned} \quad (4.47)$$

З системи (4.47) відразу визначаємо закон керування, необхідний для виконання умови (4.43):

$$\mathbf{i} = (\mathbf{C}_f \mathbf{N})^{-1} \left(\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) \left(-\mathbf{K}_\omega \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{K}_\theta \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^* \right) \right), \quad (4.48)$$

де $\mathbf{K}_\theta = \text{diag}(k_{\theta 1}, k_{\theta 2}, \dots, k_{\theta n})$, $\mathbf{K}_\omega = \text{diag}(k_{\omega 1}, k_{\omega 2}, \dots, k_{\omega n})$ – позитивно визначені матриці коефіцієнтів зворотних зв'язків регуляторів положення та швидкості.

Похідна від заданого вектора кутової швидкості $\dot{\boldsymbol{\omega}}^*$ за визначенням дорівнює $\dot{\boldsymbol{\omega}}^* = \ddot{\boldsymbol{\theta}}^*$.

Після підстановки закону керування (4.48) в систему (4.47) отримаємо динаміку похибок у вигляді:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\theta}} &= \tilde{\omega}, \\ \dot{\tilde{\omega}} &= -\mathbf{K}_{\omega}\tilde{\omega} - \mathbf{K}_{\theta}\tilde{\theta}.\end{aligned}\tag{4.49}$$

Система (4.49) є глобально асимптотично стійкою для будь яких додатньо визначених матриць \mathbf{K}_{θ} та \mathbf{K}_{ω} , а отже задані вектори θ^* та ω^* відпрацьовуються з виконанням умов:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta} = \mathbf{0}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\omega} = \mathbf{0}.$$

Рівняння (4.48) представляє лінеаризуючий зворотнім зв'язком алгоритм керування струмом, який забезпечує умову асимптотичного відпрацювання швидкості (4.43).

Для компенсації параметричної невизначеності в закон керування вводиться інтеграл від похибки відпрацювання положення. Тоді закон керування набуває виду:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{\theta} &= \mathbf{K}_{\theta i}\tilde{\theta}, \\ \dot{i} &= (\mathbf{C}_f \mathbf{N})^{-1} \left(\mathbf{h}(\theta, \dot{\theta}) + \mathbf{G}(\theta) + \mathbf{H}(\theta) (-\mathbf{K}_{\omega}\tilde{\omega} - \mathbf{K}_{\theta}\tilde{\theta} - x_{\theta} + \dot{\omega}^*) \right).\end{aligned}$$

При цьому динаміка похибок відпрацювання буде мати вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\theta}} &= \tilde{\omega}, \\ \dot{\tilde{\omega}} &= -\mathbf{K}_{\omega}\tilde{\omega} - \mathbf{K}_{\theta}\tilde{\theta} - x_{\theta}, \\ \dot{x}_{\theta} &= \mathbf{K}_{\theta i}\tilde{\theta},\end{aligned}\tag{4.50}$$

$\mathbf{K}_{\theta i} = \text{diag}(k_{\theta i1}, k_{\theta i2}, \dots, k_{\theta in})$ – діагональна матриця коефіцієнтів підсилення інтегральної ланки регулятора положення.

Система (4.50) лінійна і завжди може бути спроектованою стійкою при додатньо визначених матрицях $\mathbf{K}_\theta > 0, \mathbf{K}_{\theta_i} > 0, \mathbf{K}_\omega > 0$, а отже виконується умова (4.43).

Структурну схему регулятора положення показано на рис. 4.2, на якому $W_{PC}(p)$ позначає регулятор струму.

У найпростішому варіанті, струмове керування реалізується ПІ-регулятором з великим коефіцієнтом підсилення:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{L}(-\mathbf{K}_i \tilde{\mathbf{i}} - \mathbf{x}_q), \\ \dot{\mathbf{x}}_q &= \mathbf{K}_{ii} \tilde{\mathbf{i}}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

де $\mathbf{K}_i = \text{diag}(k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{in})$ – позитивно визначено матриця коефіцієнтів зворотного зв'язку контуру струму, $\mathbf{K}_{ii} = \text{diag}(k_{ii1}, k_{ii2}, \dots, k_{iin})$ – позитивно визначена матриця коефіцієнтів підсилення інтегральної складової регулятора струму, $\tilde{\mathbf{i}} = \mathbf{i} - \mathbf{i}^*$ – похибка відпрацювання струму, \mathbf{i}^* – заданий закон зміни струму, що визначається за формулою (4.48).

Структурна схема регулятора струму показана на рис. 4.3.

4.2.3 Спрощення алгоритму керування

Для дволанкового маніпулятора маємо систему:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left(\mathbf{M} - \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) \right), \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{C}_f \mathbf{N} \mathbf{i}, \\ \dot{\mathbf{i}} &= \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{R} \mathbf{i} - \mathbf{C}_f \mathbf{N} \boldsymbol{\omega}), \end{aligned} \quad (4.53)$$

де $\mathbf{q} = \boldsymbol{\theta} = (\theta_1 \quad \theta_2)^T$ – вектор кутових положень першої та другої ланок,

$\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} = (\omega_1 \quad \omega_2)^T$ – вектор кутових швидкостей першої та другої ланок,

$\mathbf{M} = (\mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2)^T$ – вектор моментів приводних двигунів постійного струму,

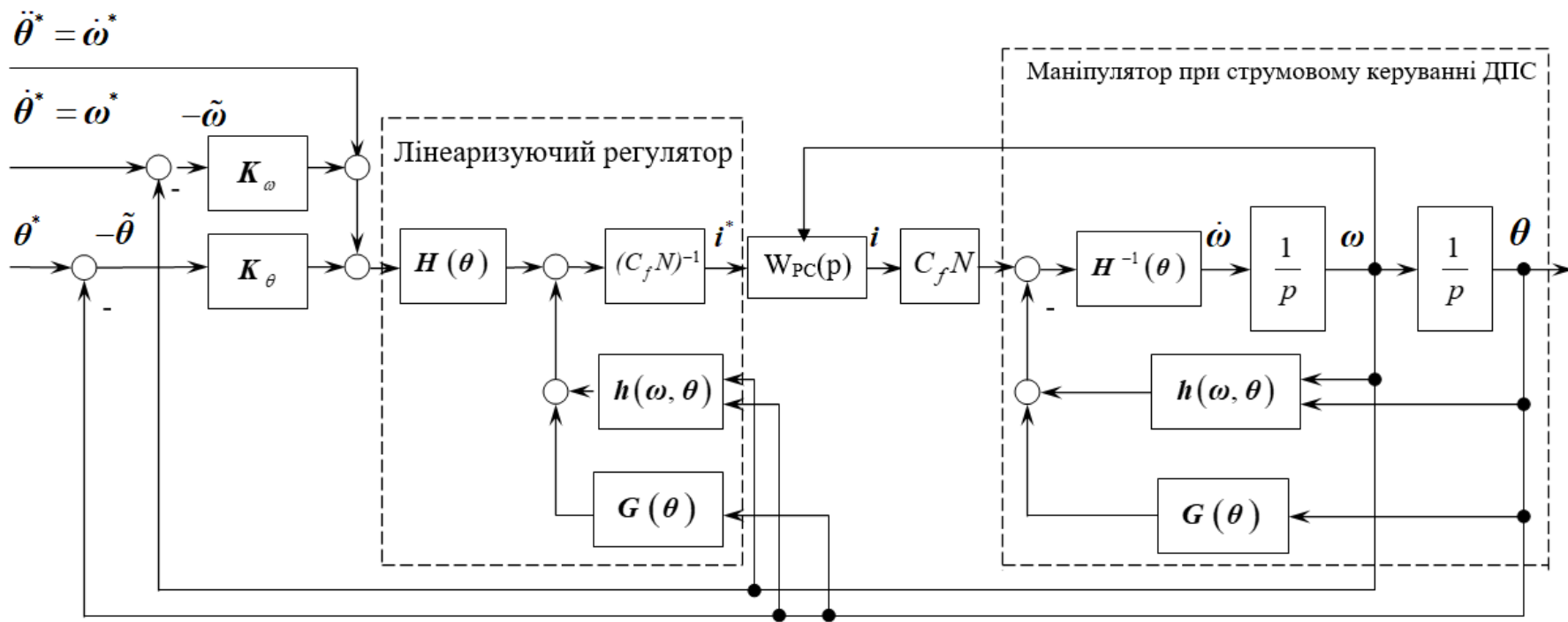


Рисунок 4.2 – Структурна схема регуляторів положення та швидкості для струмового керування

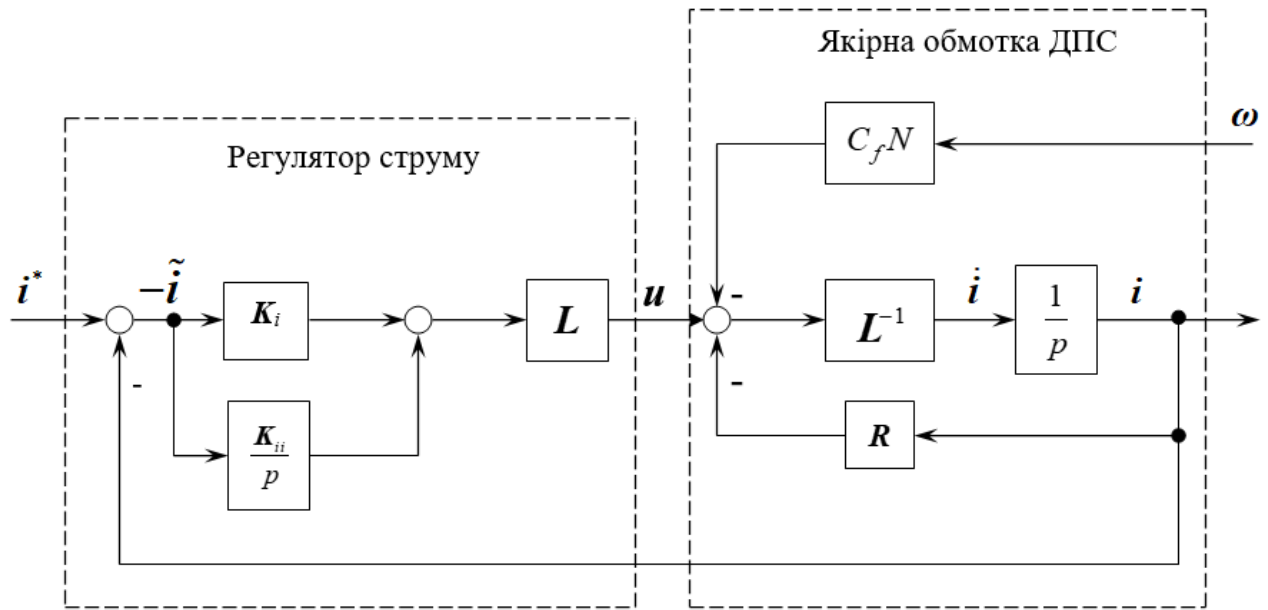


Рисунок 4.3 – Структурна схема регулятора струму для реалізації струмового керування

$\mathbf{h} = (h_1 \quad h_2)^T$ – вектор моментів відцентрових та коріолісових сил,

$\mathbf{G} = (G_1 \quad G_2)^T$ – вектор моментів сил, що мають гравітаційне походження,

$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} H_{11}(\boldsymbol{\theta}) & H_{12}(\boldsymbol{\theta}) \\ H_{21}(\boldsymbol{\theta}) & H_{22}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}$ – матриця моментів інерції маніпулятора,

$\mathbf{C}_f = \text{diag}(c_1 \quad c_2)$ – матриця конструктивних сталих приводних двигунів,

$\mathbf{N} = \text{diag}(n_1 \quad n_2)$ – матриця передаточних чисел редукторів приводних

двигунів, $\mathbf{i} = (i_1 \quad i_2)^T$ та $\mathbf{u} = (u_1 \quad u_2)^T$ – вектори відповідно струмів та

напруг якорів приводних двигунів, $\mathbf{L} = \text{diag}(L_1 \quad L_2)$ та $\mathbf{R} = \text{diag}(R_1 \quad R_2)$ –

матриця індуктивності та активних опорів якоря приводних двигунів.

Алгоритм керування маніпулятора представлений рівняннями:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^* &= (\mathbf{C}_f \mathbf{N})^{-1} \left[\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - \hat{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\theta}) (-\mathbf{K}_\theta \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{K}_\omega \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \ddot{\boldsymbol{\theta}}^*) \right], \\ \mathbf{u} &= \mathbf{L} (-\mathbf{K}_i \tilde{\mathbf{i}} - \mathbf{x}_q), \\ \dot{\mathbf{x}}_q &= \mathbf{K}_{ii} \tilde{\mathbf{i}}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

де $C(\theta, \dot{\theta}) = \hat{h}(\theta, \dot{\theta}) + \hat{G}(\theta)$. Тут і далі матриці та вектори, позначені символом “^”, є такими, що підставляються в алгоритм керування.

Закон керування (4.54) призводить до необхідності на кожному кроці інтегрування прораховувати динаміку маніпулятора в реальному масштабі часу, а враховуючи складність цих рівнянь та технологічні труднощі при вимірюванні та розрахунку деяких величин, лінеаризуючий алгоритм виявляється досить складним. При цьому, як правило, максимальний крок квантування по часу в стандартних роботах не перевищує 1 мс, а досить часто буває меншим.

Для того, щоб не зважаючи на вказану складність, все-таки реалізувати лінеаризуючий алгоритм, необхідно використовувати більш швидкодіючу та дорогу обчислювальну техніку.

Тому при рішенні кожної конкретної задачі необхідно встановити, при якій складності алгоритму керування можливо отримати необхідну якість регулювання. Враховуючи обчислювальну складність лінеаризуючого алгоритму, а також складність отримання всіх параметрів маніпулятора в реальному масштабі часу, необхідно вирішити, яким чином отримати достатню якість керування та допустимі похибки відпрацювання параметричних координат не реалізовуючи у повному обсягу лінеаризуючий алгоритм (або реалізовуючи його частково). Одним з підходів є спрощення алгоритму керування, розглянемо деякі варіанти спрощень.

1. Не враховуються нелінійні ефекти моделі маніпулятора:

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \mathbf{0}, \quad \bar{N}(\theta) = \text{diag}(J_1', J_2'),$$

де J_1' та J_2' – вибрана постійна частина коефіцієнтів \bar{N}_{11} та \bar{N}_{22} матриці \mathbf{N} , що знаходяться відповідно у межах $(\bar{N}_{11 \min}, \bar{N}_{11 \max})$ та $(\bar{N}_{22 \min}, \bar{N}_{22 \max})$.

Маніпулятор представляє собою сукупність не зв'язаних ланок з постійними моментами інерції.

При такому проектуванні отримати адекватну якість регулювання для усієї конфігурації маніпулятора – неможливо. Система керування розраховується виходячи із найгіршого випадку, що приводить до погіршення якості регулювання для всіх інших конфігурацій маніпулятора. Некомпенсована частина C буде давати похибку в усталеному режимі за рахунок дії ваги ланок. Цей варіант реалізації системи використовується для маніпуляторів з малими швидкостями руху, особливо якщо використовуються понижуючі редуктори з великим передаточним числом.

Як правило, у цьому випадку в алгоритм керування вводиться інтегральна складова від похибки регулювання узагальнених координат (4.50) з метою компенсації статичної похибки.

2. Не враховуються динамічні нелінійні ефекти, врахований статичний момент опору, що виникає під дією ваги ланок:

$$C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \hat{G}(\boldsymbol{\theta}), \quad \hat{H}(\boldsymbol{\theta}) = \text{diag}(J_1', J_2').$$

Таке проектування характерне тим, що в усталеному режимі система має нульову похибку відпрацювання.

3. Враховуються моменти інерції приводних двигунів:

$$C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \hat{G}(\boldsymbol{\theta}), \quad \hat{H}(\boldsymbol{\theta}) = \text{diag}(\bar{H}_{11}, \bar{H}_{22}).$$

При низьких швидкостях відпрацювання такий алгоритм, що враховує повний власний (змінний) момент інерції, дозволяє побудувати високоякісну систему керування, оскільки відцентрові та коріолісові ефекти із-за низьких швидкостей мало впливають на відпрацювання заданих координат.

Невраховані взаємні моменти інерції також проявляють малий вплив із-за низьких прискорень.

4. Розрахування матриці моментів інерції проводиться на етапі підготовки програми:

$$C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \hat{G}(\boldsymbol{\theta}^*), \quad \hat{H}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{H}(\boldsymbol{\theta}^*).$$

Реалізація цього варіанту можлива лише тоді, коли наперед відомо, що похибка регулювання буде малою, тобто значення $\boldsymbol{\theta}$ та $\boldsymbol{\theta}^*$ будуть мало відрізнятися. Програмно цей алгоритм реалізується значно простіше, ніж попередній, оскільки основна обчислювальна потужність знаходження матриці \hat{H} припадає на стадію підготовки програми та підготовки траєкторії.

Також можливі інші варіанти спрощень, що є комбінаціями вищеописаних.

У даній дипломній роботі реалізована повний лінеаризуючий зворотним зв'язком алгоритм керування, а також передбачені такі варіанти алгоритмів спрощень:

- задавання для матриці \hat{H} ненульовими лише діагональних елементів, тобто встановлення $H_{12} = H_{21} = 0$;
- відключення врахування відцентрових та коріолісових сил: $\mathbf{h} = \mathbf{0}$;
- відключення врахування сил гравітаційного походження $\mathbf{G} = \mathbf{0}$.

4.3 Синтез алгоритму асимптотичного відпрацювання траєкторій руху

В деяких випадках практичного застосування дволанкового маніпулятора (наприклад точіння гвинта для підводних воєнних човнів) необхідно забезпечити максимально високу точність відпрацювання траєкторії руху. Для розв'язання точної задачі керування дволанковим маніпулятором, необхідно синтезувати алгоритм керування, який би гарантував:

- асимптотично лінійну еквівалентну динаміку помилок відпрацювання механічних та електричних координат;
- грубість по відношенню до параметричної невизначеності динамічної моделі маніпулятора;
- каскадність алгоритму керування, що дозволяє простими засобами забезпечити обмеження фізичних координат електромеханічної системи.

Динаміка відпрацювання кутового положення представлена рівнянням:

$$\dot{\theta} = \omega. \quad (4.55)$$

Визначимо похибку відпрацювання: кутового положення:

$$\tilde{\theta} = \theta - \theta^*. \quad (4.56)$$

та похибку відпрацювання кутової швидкості:

$$\tilde{\omega} = \omega - \omega^*. \quad (4.57)$$

Продиференціюємо рівняння (4.56):

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\theta}^*.$$

Записавши рівняння (4.55) в похибках, отримаємо:

$$\dot{\tilde{\theta}} = \omega^* + \tilde{\omega} - \dot{\theta}^*. \quad (4.58)$$

Звідси, очевидно, закон заданого вектору швидкості буде:

$$\omega^* = -\mathbf{K}_\theta \tilde{\theta} + \dot{\theta}^*. \quad (4.59)$$

Підставивши рівняння (4.59) в (4.58) отримаємо рівняння динаміки похибки відпрацювання узагальненої координати θ :

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\mathbf{K}_\theta \tilde{\theta} + \tilde{\omega}, \quad (4.60)$$

де $\mathbf{K}_\theta = \text{diag}(k_{\theta 1}, k_{\theta 2}, \dots, k_{\theta n})$ – позитивно визначена матриця коефіцієнтів регуляторів кутового положення.

Рішення рівняння (4.60) при $\tilde{\omega} = 0$ представляється у вигляді

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)e^{-\mathbf{K}_\theta t}. \quad (4.61)$$

Похибка положення ланок зменшується по експоненційному закону з постійною часу рівною \mathbf{K}_θ . Очевидно, що якщо початкові умови нульові, тобто

початкова похибка дорівнює нулю $\tilde{\theta}(0) = 0$, то тоді в будь-який момент часу похибка відпрацювання кутового положення також дорівнює нулю:

$$\tilde{\theta}(t) \equiv 0, \quad \forall t > 0.$$

Рівняння (4.59) задає заданий закон керування кутовою швидкістю для виконання умови (4.40) асимптотичного відпрацювання узагальнених координат маніпулятора.

Знайдемо похідну від заданого вектору кутової швидкості, для цього продиференціюємо рівняння (4.59):

$$\dot{\omega}^* = -\mathbf{K}_0 \dot{\tilde{\theta}} + \ddot{\theta}^*. \quad (4.62)$$

З використанням (4.60), останнє рівняння запишеться у вигляді:

$$\dot{\omega}^* = \mathbf{K}_0^2 \tilde{\theta} - \mathbf{K}_0 \tilde{\omega} + \ddot{\theta}^*. \quad (4.63)$$

Динаміка відпрацювання кутового положення та швидкості задається системою (4.42).

Синтезуємо тепер регулятор швидкості, яка задається рівнянням (4.59) такий, щоб виконувалася умова асимптотичного відпрацювання кутової швидкості:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\omega} = 0, \quad (4.64)$$

де $\tilde{\omega}$ – похибка відпрацювання кутової швидкості визначається рівнянням (4.57).

Оскільки керування двигуном здійснюється напругою, то струм якоря приводних двигунів буде відпрацьовуватися з похибкою. Визначимо $\tilde{\mathbf{i}}$ – вектор похибки відпрацювання струму:

$$\tilde{\mathbf{i}} = \mathbf{i} - \mathbf{i}^*. \quad (4.65)$$

Запишемо бажану динаміку похибок відпрацювання системи (4.42):

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\theta}} &= -\mathbf{K}_\theta \tilde{\theta} + \tilde{\omega}, \\ \dot{\tilde{\omega}} &= \mathbf{H}^{-1}(\theta) \left(\mathbf{C}_f \mathbf{N} \dot{\mathbf{i}}^* - \mathbf{h}(\theta, \dot{\theta}) - \mathbf{G}(\theta) \right) + \mathbf{H}^{-1}(\theta) \mathbf{C}_f \mathbf{N} \tilde{\mathbf{i}}.\end{aligned}\quad (4.66)$$

Лінеаризуючий зворотнім зв'язком алгоритм відпрацювання узагальнених швидкостей, запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{M}}}_c &= \mathbf{K}_{\omega i} \cdot \tilde{\omega}, \\ \dot{\mathbf{i}}^* &= (\mathbf{C}_f \cdot \mathbf{N})^{-1} \left(\mathbf{h}(\theta, \dot{\theta}) + \mathbf{G}(\theta) + \mathbf{H}(\theta) (-\mathbf{K}_\omega \tilde{\omega} + \dot{\omega}^*) \right),\end{aligned}\quad (4.67)$$

де $\mathbf{K}_\omega = \text{diag}(k_{\omega 1}, k_{\omega 2}, \dots, k_{\omega n})$, $\mathbf{K}_{\omega i} = \text{diag}(k_{\omega i 1}, k_{\omega i 2}, \dots, k_{\omega i n})$ – позитивно визначені матриці коефіцієнтів пропорційною та інтегральної складових регулятора швидкості, похідна від заданого вектору кутових швидкостей задана рівнянням (4.62).

Підстановка закону (4.67) в друге рівняння системи (4.42) дасть динаміку похибок відпрацювання кутових координат та швидкості у вигляді:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\theta}} &= -\mathbf{K}_\theta \tilde{\theta} + \tilde{\omega}, \\ \dot{\hat{\mathbf{M}}}_c &= \mathbf{K}_{\omega i} \tilde{\omega}, \\ \dot{\tilde{\omega}} &= -\mathbf{K}_\omega \tilde{\omega} - \hat{\mathbf{M}}_c + \mathbf{H}^{-1}(\theta) \mathbf{C}_f \mathbf{N} \tilde{\mathbf{i}}.\end{aligned}\quad (4.68)$$

Завдяки дії лінеаризуючого алгоритму керування кутовим положенням (4.59) та кутовою швидкістю (4.67) система рівнянь (4.68) є лінійною при $\tilde{\mathbf{i}} = 0$ і асимптотично стійкою для усіх $\mathbf{K}_\theta > 0$, $\mathbf{K}_\omega > 0$, $\mathbf{K}_{\omega i} > 0$, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{\theta}, \tilde{\omega}, \hat{\mathbf{M}}_c) = \mathbf{0}.$$

Більш того, при $\tilde{\mathbf{i}} = \mathbf{0}$ динамічна поведінка похибок відпрацювання кожного ступеня вільності є розв'язаною

Похідна від заданого вектору струмів $\dot{\mathbf{i}}^*$, що задається (4.67), з використанням (4.66), може бути розрахована в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{i}}^* = & (\mathbf{C}_f \mathbf{N})^{-1} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\omega} \right) \ddot{\boldsymbol{\theta}}^* + \mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\boldsymbol{\theta}}^* + \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{q}} \right) \boldsymbol{\omega} + \right. \\ & + \left[- \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\omega} \right) (\mathbf{K}_\theta + \mathbf{K}_\omega) - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{K}_\omega \boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}_q \mathbf{K}_\omega^2 + \right. \\ & + \left. \left. \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{K}_\theta (\mathbf{K}_\theta + \mathbf{K}_\omega) \right] \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\omega} \right) \mathbf{K}_\theta^2 (\mathbf{K}_\theta - 1) \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\omega}} - \mathbf{H}(\mathbf{q}) (\mathbf{K}_\theta + \mathbf{K}_\omega) \right] \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{C}_f \mathbf{N} \tilde{\mathbf{i}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Знайдемо вектор керуючих напруг \mathbf{u} , що прикладаються до якірної обмотки двигунів постійного струму, котрий забезпечить асимптотичне відпрацювання заданого вектора струму $\dot{\mathbf{i}}^*$, що знаходиться за рівнянням (4.67), тобто такий закон керування напругою, щоб виконувалась умова:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{i}} = \mathbf{0}, \quad (4.70)$$

де $\tilde{\mathbf{i}}$ – вектор похибки відпрацювання струмів приводними двигунами, визначений у (4.65).

Динаміка контуру відпрацювання струму задана другим рівнянням системи (4.32), запишемо його у похибках:

$$\dot{\tilde{\mathbf{i}}} = \mathbf{L}^{-1} (\mathbf{u} - \mathbf{R} \dot{\mathbf{i}}^* - \mathbf{C}_f \mathbf{N} \boldsymbol{\omega}) - \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \tilde{\mathbf{i}} - \dot{\mathbf{i}}^*. \quad (4.71)$$

Алгоритм керування напругою для виконання умови (4.70) записується у вигляді:

$$\mathbf{u} = \mathbf{R} \dot{\mathbf{i}}^* + \mathbf{C}_f \mathbf{N} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{L} (\dot{\mathbf{i}}^* - \mathbf{K}_{il} \tilde{\mathbf{i}}), \quad (4.72)$$

де $\mathbf{K}_{il} = \text{diag}(K_{i1}, K_{i2}, \dots, K_{in})$ – позитивно визначена матриця коефіцієнтів регулятора струму.

Після підстановки (4.72) у (4.71), отримаємо рівняння динаміки похибки відпрацювання вектору струмів повинно мати вигляд:

$$\dot{\tilde{\mathbf{i}}} = -\mathbf{K}_i \tilde{\mathbf{i}}, \quad (4.73)$$

де $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_{i1} + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}$.

Похибка струмів приводних двигунів зменшується по експоненційному закону з постійною часу рівною \mathbf{K}_i . Якщо початкові умови нульові, тобто початкова похибка дорівнює нулю $\tilde{\mathbf{i}}(0) = 0$, то тоді в будь-який момент часу $\tilde{\mathbf{i}}(t) \equiv 0, \quad \forall t > 0$.

Рівняння (4.73) є глобально асимптотично стійким для будь-яких додатньо визначених коефіцієнтів підсилення зворотних зв'язків матриці \mathbf{K}_i . Це говорить про те, що алгоритм (4.72) здійснює керування вектором струму так, що виконується умова (4.70).

Для компенсації параметричних збурень, зумовлених параметричною невизначеністю, введемо інтегральну компоненту в закон керування (4.72):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_q &= \mathbf{K}_{ii} \tilde{\mathbf{i}}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{C}_f \mathbf{N}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{L}(\dot{\mathbf{i}}^* - \mathbf{K}_i \tilde{\mathbf{i}} - \mathbf{x}_q). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Тут $\mathbf{K}_{ii} = \text{diag}(k_{ii1}, k_{ii2}, \dots, k_{iin})$ – діагональна матриця коефіцієнтів підсилення інтегруючої ланки. Підставимо (4.74) в рівняння динаміки похибки відпрацювання струму (4.71), виконавши нескладні перетворення, отримаємо:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_q &= \mathbf{K}_{ii} \tilde{\mathbf{i}}, \\ \dot{\tilde{\mathbf{i}}} &= -\mathbf{K}_i \tilde{\mathbf{i}} - \mathbf{x}_q. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Рівняння (4.75) характеризує динаміку похибки відпрацювання струму при алгоритмі керування напругою, що має інтегральну компоненту.

Узагальнений алгоритм відпрацювання координат маніпулятора задається рівняннями (4.42) та другим рівнянням системи (4.32) і вміщує:

– алгоритм регулятора положення:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^* = -\mathbf{K}_\theta \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\theta}}^*,$$

– алгоритм регулятора швидкості:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{M}}}_c &= \mathbf{K}_{\omega i} \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \\ \dot{\mathbf{i}}^* &= (\mathbf{C}_f \mathbf{N})^{-1} \left(\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) \left(-\mathbf{K}_\omega \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \hat{\mathbf{M}}_c + \dot{\boldsymbol{\omega}}^* \right) \right), \end{aligned}$$

– алгоритм регулятора струму:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_q &= \mathbf{K}_{ii} \tilde{\mathbf{i}}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{R} \dot{\mathbf{i}}^* + \mathbf{C}_f \mathbf{N} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{L} \left(\dot{\mathbf{i}}^* - \mathbf{K}_i \tilde{\mathbf{i}} - \mathbf{x}_q \right). \end{aligned}$$

Похідні від заданого вектора швидкості задана рівнянням (4.63), від заданого вектора струму задана рівнянням (4.69).

Із врахуванням наведених законів керування кінцеві рівняння динаміки похибок відпрацювання узагальнених координат предстануть у вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} &= -\mathbf{K}_\theta \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \\ \dot{\hat{\mathbf{M}}}_c &= \mathbf{K}_{\omega i} \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \end{aligned} \tag{4.76}$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} &= -\mathbf{K}_\omega \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \hat{\mathbf{M}}_c + \mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{C}_f \mathbf{N} \tilde{\mathbf{i}}, \\ \dot{\mathbf{x}}_q &= \mathbf{K}_{ii} \tilde{\mathbf{i}}, \\ \dot{\tilde{\mathbf{i}}} &= -\mathbf{K}_i \tilde{\mathbf{i}} - \mathbf{x}_q. \end{aligned} \tag{4.77}$$

Рівняння (4.76) описують динамічну поведінку помилок відпрацювання координат механічної підсистеми, а рівняння (4.77) – електричної підсистеми двигунів постійного струму. Електрична підсистема (4.77) є лінійною, розв'язаною відносно механічної підсистеми і асимптотично стійкою для усіх

$\mathbf{K}_i > 0$; $\mathbf{K}_{ii} > 0$, а отже композитна система (4.76) – (4.77) є послідовним з'єднанням двох стійких систем. А оскільки матриця $(\mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{C}_f\mathbf{N})$ є обмеженою $\forall \boldsymbol{\theta}$, то послідовне з'єднання двох систем (4.76) та (4.77) є глобально асимптотично стійкими, тобто виконується умова:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X} = 0,$$

де $\mathbf{X} = (\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T, \hat{\mathbf{M}}_c^T, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T, \mathbf{x}_q^T, \tilde{\mathbf{i}}^T)^T$.

Система (4.76) – (4.77) є асимптотично лінійною, тобто після затухання помилок відпрацювання струмів згідно (4.77) при дії нульових початкових умов $\tilde{\mathbf{i}}(0)$ система (4.77) може розглядатися як лінійна. Вибір коефіцієнтів зворотних зв'язків, що задані матрицями $\mathbf{K}_\theta, \mathbf{K}_\omega, \mathbf{K}_{\omega i}, \mathbf{K}_i, \mathbf{K}_{ii}$, здійснюється стандартним шляхом вибору коефіцієнтів для багатоконтурних систем. Відмітимо, що система є стійкою для усіх позитивних значень цих коефіцієнтів.

При достатньо високих значеннях коефіцієнтів матриць \mathbf{K}_i та \mathbf{K}_{ii} похідну від заданого струму можна виключити і розглядати її як збурення. Тоді закон (4.74) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_q &= \mathbf{K}_{ii} \tilde{\mathbf{i}}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{R}\mathbf{i}^* + \mathbf{C}_f\mathbf{N}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{L}(-\mathbf{K}_i \tilde{\mathbf{i}} - \mathbf{x}_q). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Структурна схема системи керування маніпулятором, що містить інтегральну компоненту в алгоритмі формування керуючої напруги (4.78) показана на рис. 4.4 – регулятори положення та швидкості, на рис. 4.5 – регулятор струму та електромеханічна частина маніпулятора.

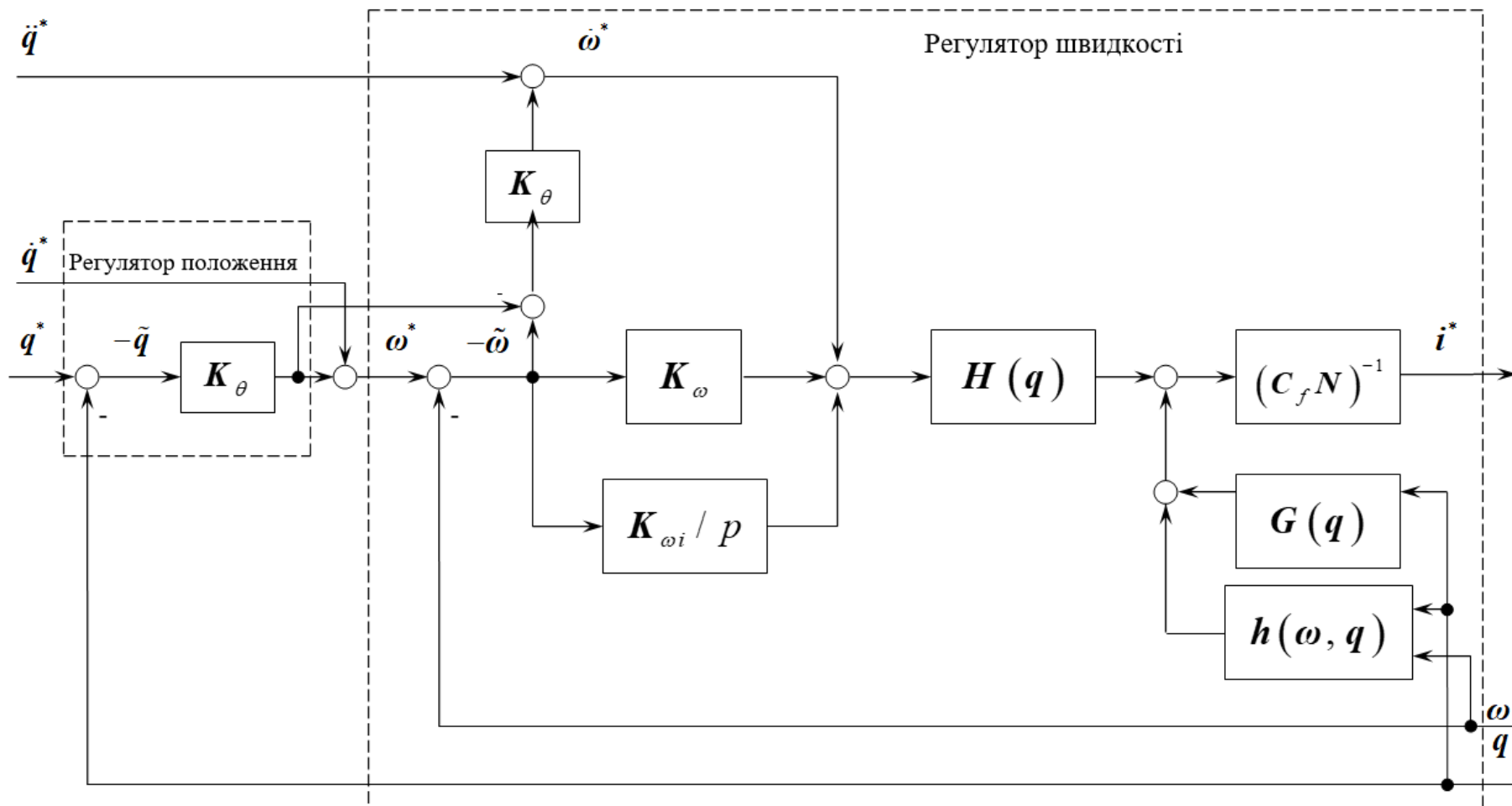


Рисунок 4.4 – Структурна схема регуляторів положення та швидкості

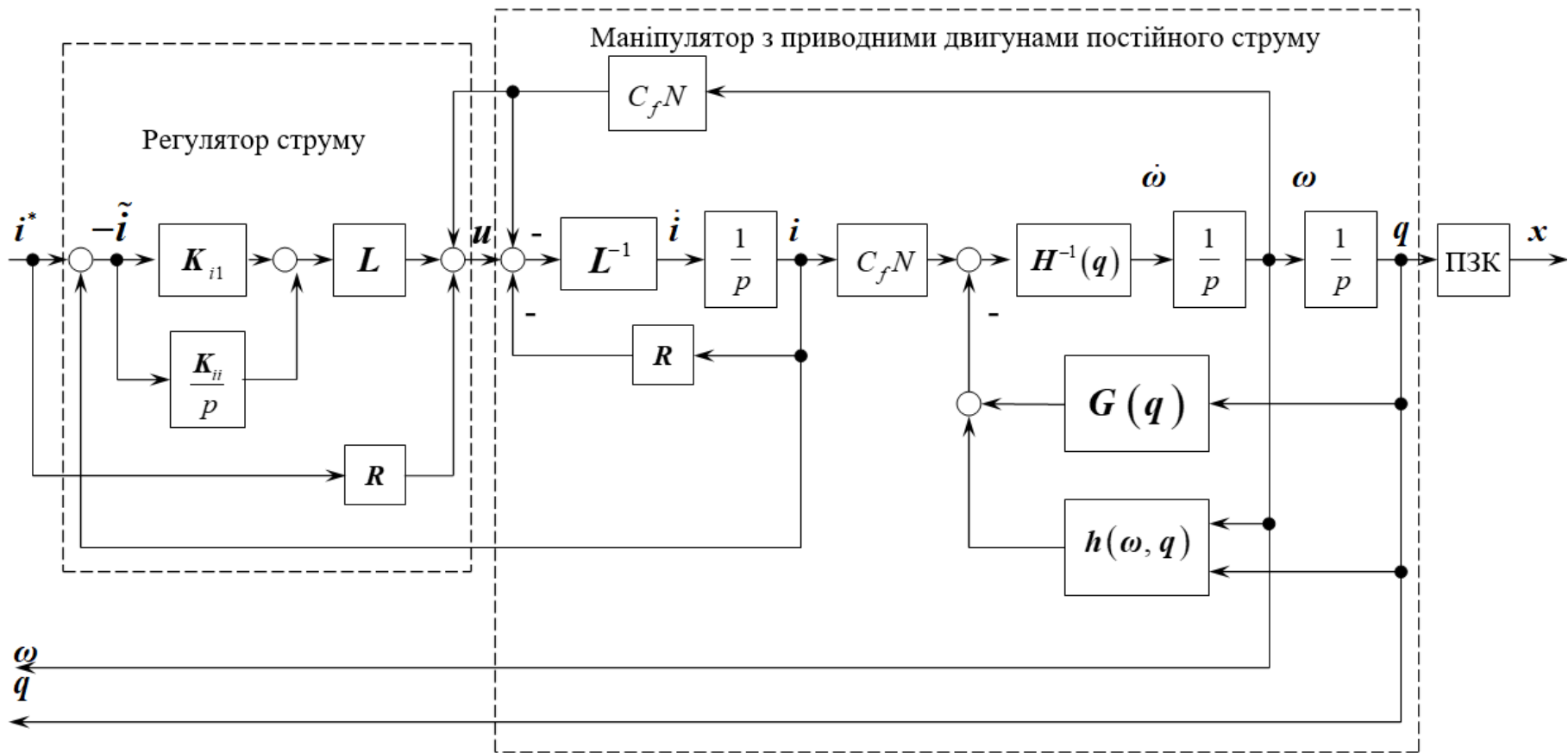


Рисунок 4.5 – Структурна схема регулятора струму та електромеханічної частини маніпулятора

5 СТРУКТУРА ПРОГРАМИ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО ПРОЕКТУВАННЯ

Розроблена система автоматизованого проектування “Manipulr” являє собою програму написану на мові програмування Visual C++ в пакеті Microsoft Visual Studio V6.0.

Структура програми задовольняє вимогам стандартних програм для операційної оболонки Windows. Основні виконавчі блоки системи та перелік функцій що ними виконуються наведено в табл. 5.1.

Таблиця 5.1 – Основні виконавчі блоки програми

№	Назва блоку	Функції блоку та його складових
1.	Блок ініціалізації програми.	Виділення пам'яті, створення головного вікна програми, ініціалізація загальних даних програми.
2.	Блок завдання параметрів проекту.	Блок введення траєкторії: організовує введення траєкторії на основі типових ліній, що задаються опорними точками.
		Блок введення параметрів маніпулятора та приводних двигунів: організовує завдання конструктивних параметрів.
		Блок введення параметрів закону керування: організовує введення максимальних значень швидкості, ривку, значень коефіцієнтів регуляторів, варіантів спрощення моделювання.
3.	Блок збереження даних проекту.	Організація введення імені файлу, в який будуть зберігатися дані, вибору даних для зберігання.
4.	Блок розрахунку траєкторії руху.	Блок обчислення заданої траєкторії руху: розрахунок заданих законів зміни декартових координат, лінійних швидкостей та прискорень робочого органу маніпулятора.

№	Назва блоку	Функції блоку та його складових
4.	Блок розрахунку траєкторії руху.	Блок обчислення узагальнених координат: розрахунок заданих законів змін узагальнених координат, швидкостей та прискорень.
		Блок розв'язання задачі керування: числове рішення задачі керування, моделювання поведінки приводних двигунів, маніпулятора, отримання відпрацьованих узагальнених та декартових координат руху.
5.	Відображення вікна звіту.	Створення вікна проекту, виведення у вікно проекту даних проекту.

Розглянемо більш детально блок розрахунку траєкторії.

5.1 Блок розрахунку траєкторії руху

Даний блок здійснює розрахунок законів зміни завдань на відпрацювання, узагальнених координат, керуючих дій та відпрацьованих координат.

Алгоритм роботи блоку такий:

1. Для кожної лінії траєкторії здійснюється розрахунок часових інтервалів $t_0..t_7$ згідно формул, наведених у розділі “4. Проектування траєкторії руху”. При цьому перевіряється можливість відпрацювання даної лінії із заданою швидкістю.

2. Обраховуються початкові значення для кожної змінної.

3. В циклі по кількості ліній для відпрацювання в залежності від типу лінії викликається відповідна процедура розрахунку лінії.

4. Після розрахунку усіх ліній траєкторії, кожна точка траєкторії перевіряється на знаходження поблизу зони виродженості.

Структурна схема блоку розрахунку траєкторії руху наведена на рис. 5.1.

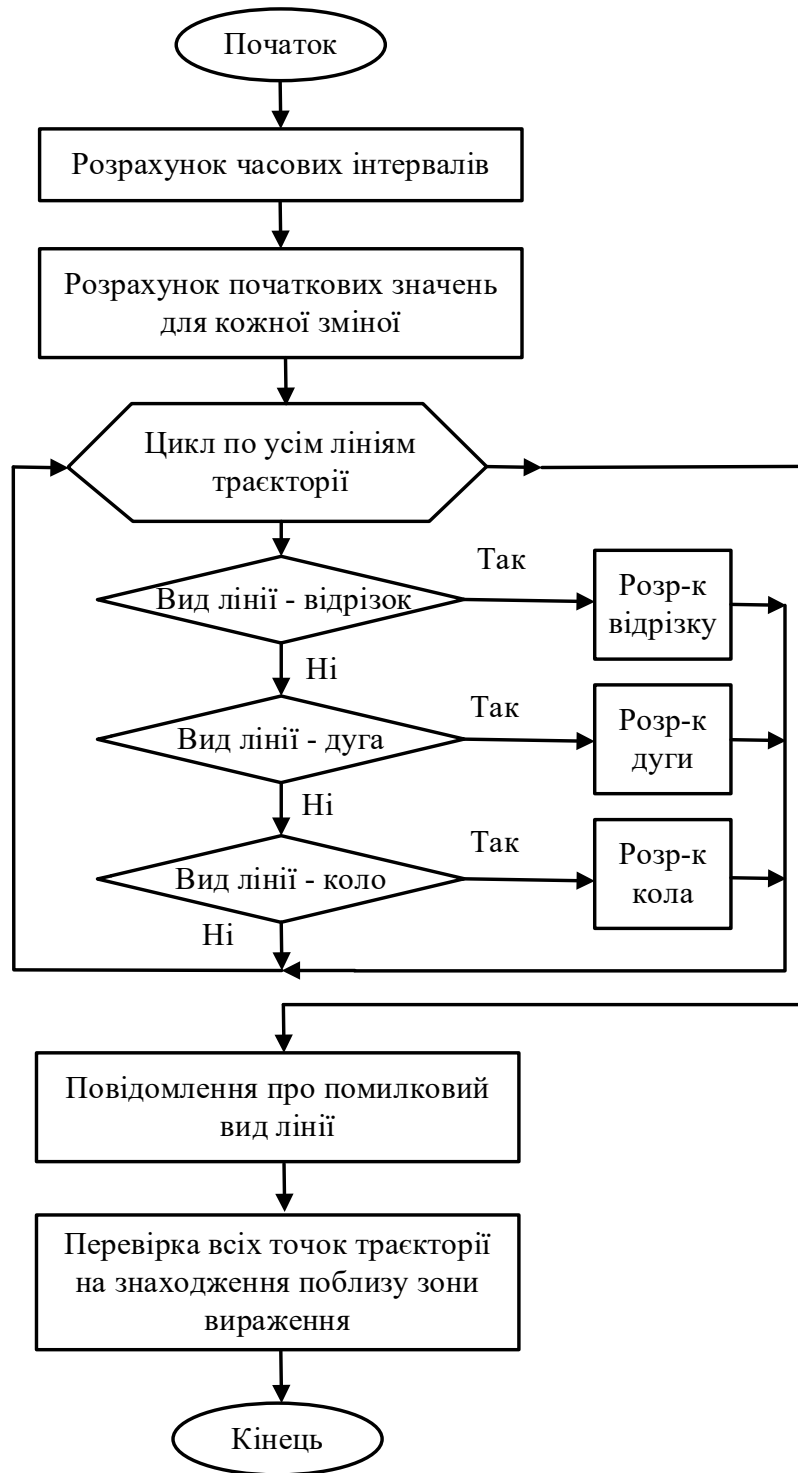


Рисунок 5.1 – Блок схема алгоритму розрахунку завдання

5.2 Блок розрахунку ліній траєкторії

Кожна лінія розбивається на ділянки фіксованих значень ривку, прискорення та швидкості. На кожному з цих інтервалів, тривалість якого обчислюється згідно формул, наведених у розділі 2, для кожної точки:

– знаходять задані значення – закони зміни декартових координат $x^*(t), y^*(t)$, лінійних швидкостей $v_x^*(t), v_y^*(t)$ та прискорень $a_x^*(t), a_y^*(t)$ робочого органу маніпулятора;

– знаходять задані значення узагальнених координат $\theta_1^*(t), \theta_2^*(t)$, $\omega_1^*(t), \omega_2^*(t)$, $\varepsilon_1^*(t), \varepsilon_2^*(t)$ на основі декартових;

– знаходять параметри керування $i_1^*(t), i_2^*(t)$ $u_1(t), u_2(t)$ та розраховують відпрацьовані значення параметрів руху $x(t), y(t)$, $v_x(t), v_y(t)$, $\theta_1(t), \theta_2(t)$, $\omega_1(t), \omega_2(t)$, $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$.

Для розрахунку такого елемента траєкторії, як відрізок, викликається функція CalcLine(...), для розрахунку дуги – CalcArc(...). Крапки у дужках означають параметри, що передаються до процедури обчислення параметрів траєкторії з викликаючого модуля: вказівник на дані про елемент траєкторії, поточний час, номер кроку розрахунку.

Розрахунок кола здійснюється як частковий випадок дуги, що має кут повороту рівним 2π радіан.

Структура даних процедур базується на формулах викладених у п. 2.1 та 2.2 для відрізка та дуги відповідно. Блок схема цих процедур показана на рис. 5.2.

Як можна бачити із лістингів, основним структурним елементом наведених процедур є блок розрахунку ділянку лінії з фіксованими значеннями ривку, прискорення та швидкості.

Спочатку здійснюється зберігання в проміжних змінних значень змінних, що відпрацьовуються на момент початку відпрацювання даної ділянки.

Далі в циклі, тривалість якого визначається інтервалом часу відпрацювання даної ділянки, викликається процедура збільшення кроку обчислення, до функцій якої належить зберігання значень, що обчислюються, за кожну мілісекунду відпрацювання, розраховуються задані декартові

параметри руху робочого органу, викликаються процедури рішення оберненої задачі кінематики та рішення задачі керування.

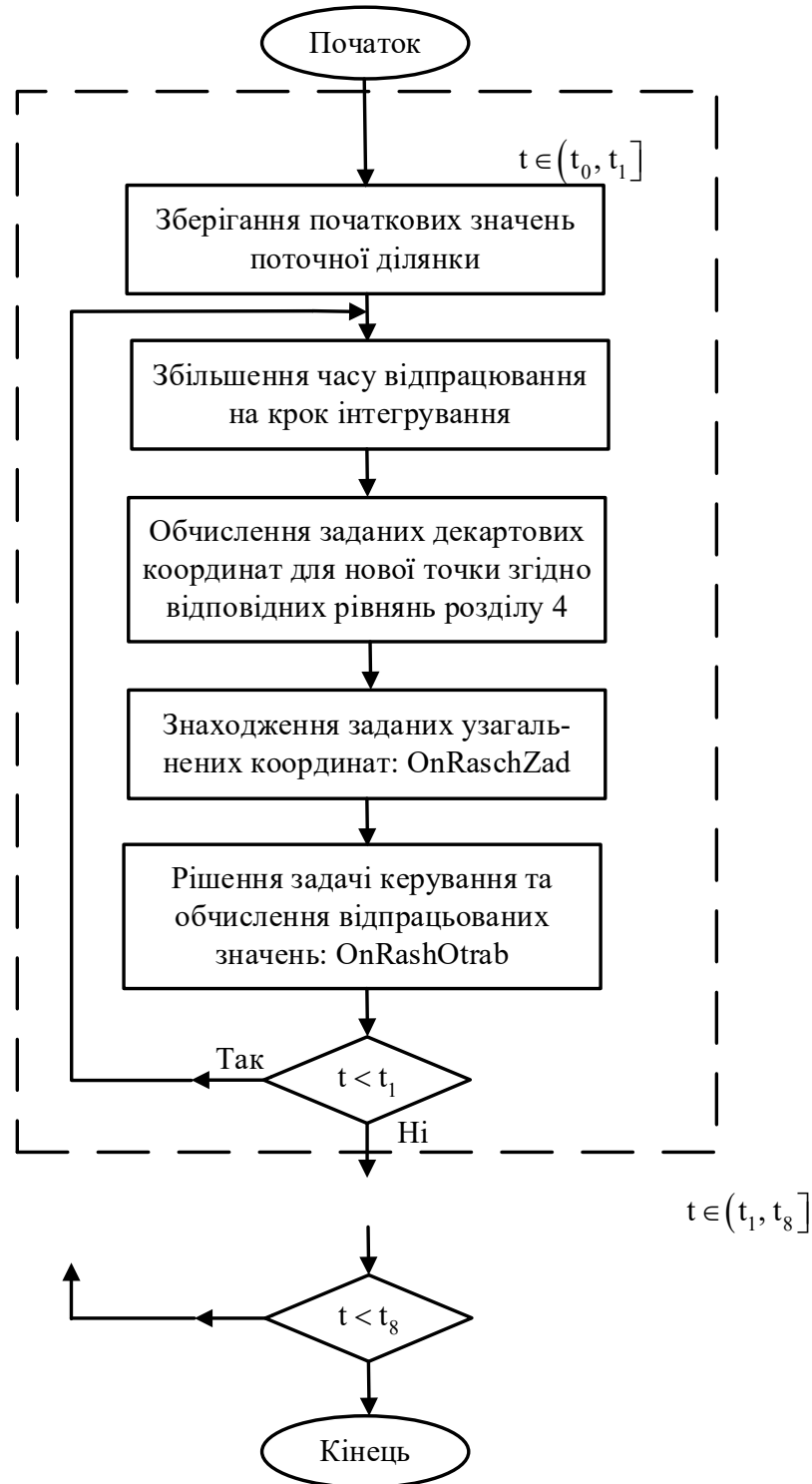


Рисунок 5.2 – Блок схема алгоритму розрахунку відрізка

6 СИСТЕМА АВТОМАТИЗОВАНОГО ПРОЕКТУВАННЯ ДВОЛАНКОВОГО МАНІПУЛЯТОРА

6.1 Керівництво по установці

Програма САПР дволанкового маніпулятора має наступні компоненти:

1. Файл “Manipulr.exe” – виконавчий файл програми.
2. Файли manipulr.cnt, manipulr.gid, manipulr.hlp – файли контекстної довідкової системи.

Для установки програми всі вищеназвані файли необхідно скопіювати до папки, в якій буде зберігатися програма (наприклад, “C:\Manipulr”).

6.2 Знайомство з програмою

Для запуску програми використовується файл “Manipulr.exe”. Для цього необхідно двічі натиснути на відповідний файл мишкою у папці розташування програми. Також для запуску можна створити ярлик програми, вказавши у полі “об’єкт” ярлику повний шлях до виконавчого файлу САПР.

Після запуску програми на екрані виникає вікно з порожньою рамкою, рядок меню, панель інструментів та рядок стану знизу (див рис. 6.1).

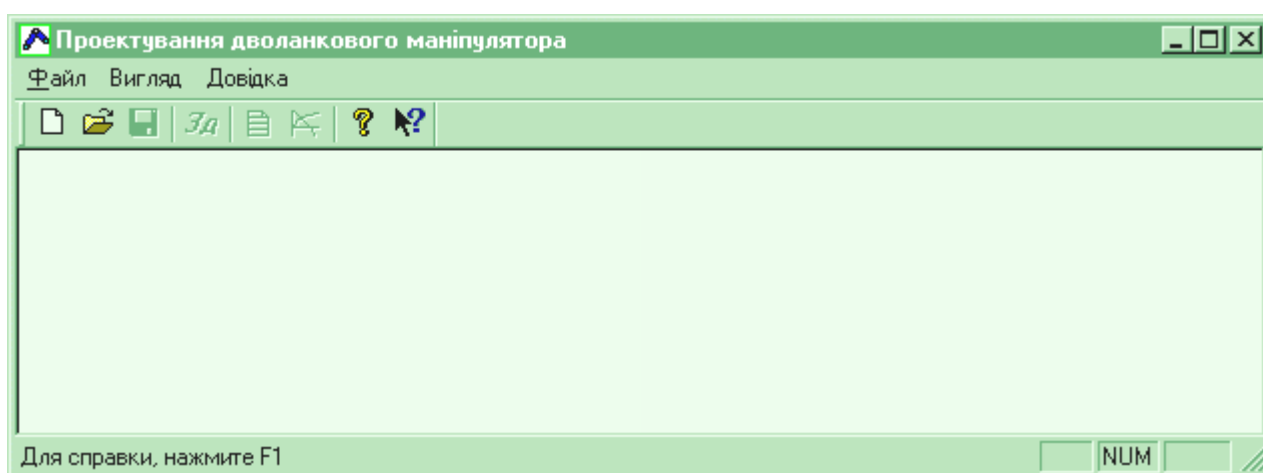


Рисунок 6.1 – Зовнішній вигляд основного вікна програми

Зовнішній вигляд панелі керування показаний на рис. 6.2. При наведенні курсору мишки на будь-яку кнопку панелі інструментів виплаває текст

підказки, що коментує дії, які викликає натиснення цієї кнопки. Внизу рамки на панелі стану показується більш повний текст пояснення.

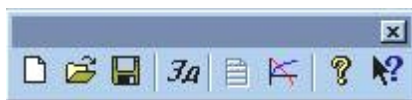


Рисунок 6.2 – Зовнішній вигляд панелі керування

На ній розташовані кнопки, наведемо їх опис зліва направо:

1. “Новий”: виконує функції меню “Файл” – “Новий проект..”: створення нового проекту.
2. “Відкрити”: “Файл” – “Відкрити..”: відкриває уже існуючий проект.
3. “Зберегти”: “Файл” – “Зберегти дані..”: збереження обраних даних для подальшого відображення.
4. “Завдання”: “Операції” – “Параметри проекту”: дозволяє змінювати дані проекту.
5. “Звіт”: “Вигляд” – “Показати звіт”, кнопка доступна лише тоді, коли на екрані відображена траєкторія (а не звіт).
6. “Траєкторія”: “Вигляд” – “Показати траєкторію”, кнопка доступна лише тоді, коли на екрані відображений звіт (а не траєкторія).
7. “Про програму”: “Довідка” – “Про програму”: надає інформацію про номер версії програми та автора..
8. “Довідка”: надає довідку про вибрану кнопку, пункт меню чи вікно.

Після запуску виконання програми на панелі виникають наступні кнопки:

1. “Файл” – дає можливість виконання наступних операцій: “новий проект”, “відкрити”, “закрити”, “зберегти дані”, “вихід”.
2. “Вигляд” – дає можливість показати або приховати елементи панелі керування, а також показати звіт або траєкторію:
 - пункт “Панель інструментів” – вмикає та вимикає панель інструментів, що містить значну частину кнопок швидкого доступу до деяких пунктів меню;
 - пункт “Панель стану” – вмикає та вимикає панель стану, яка відображає поточний стан проекту чи підказку до кнопки, над якою знаходиться курсор;

– пункт “Показати звіт” – по цій команді у головній рамці проекту відображається звіт про введені та розраховані дані проекту.

3. “Операції” – дає можливість змінити дані проекту і відключити автоматичний розрахунок.

4. “Довідка” – інформація про програму та обрані кнопки. Для створення нового проекту треба натиснути кнопку “Новий проект”.

6.3 Пункт “Новий проект”

Клавіша швидкого доступу: “Ctrl+N”.

Використовується для створення нового проекту на основі нових або вже існуючих даних. Всі файли, що використовуються в проекті зберігаються в папці проекту. Шлях до проекту складається з шляху до “exe”-файлу та імені проекту.

При виборі даного пункту меню (або при натисненні на панелі інструментів на кнопку “Новий проект”) буде відображено діалогове вікно “Створення нового проекту” (див. рис. 6.3).

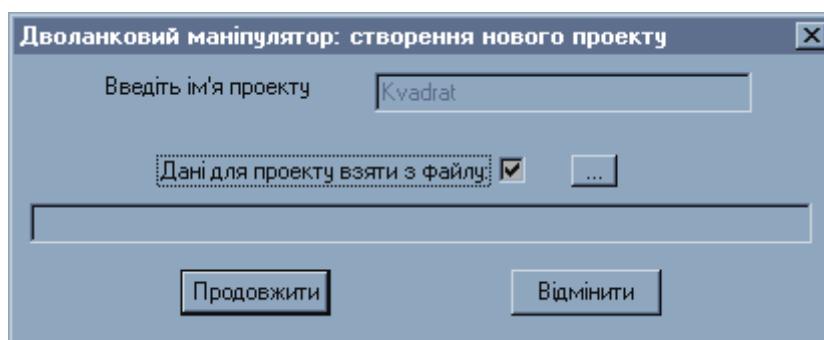


Рисунок 6.3 – Діалогове вікно “Створення нового проекту”

Для створення нового проекту з новими даними в цьому вікні необхідно ввести назву нового проекту та натиснути клавішу “Продовжити”. Якщо папка проекту, на момент створення нового проекту не існує, вона буде створена.

Щоб створити проект на основі існуючих даних, необхідно помітити галочкою вікно “Дані для проекту взяти з файлу”. По тому з’явиться кнопка “...”, при її натисненні з’явиться стандартне Windows-вікно відкриття файлу. В ньому необхідно вказати шлях до файлу, що містить дані проекту.

Далі на екрані з'явиться діалогове вікно для вводу параметрів проекту (подібне ж меню виводиться при натисненні на панелі “Завдання”), показане рис. 6.4. По закінченню вводу всі дані будуть збережені в папці, шлях до якої складається з шляху до “exe”-файлу програми та імені проекту, у файлі, ім'я якого співпадає з іменем проекту, та має розширення “.mnp”.

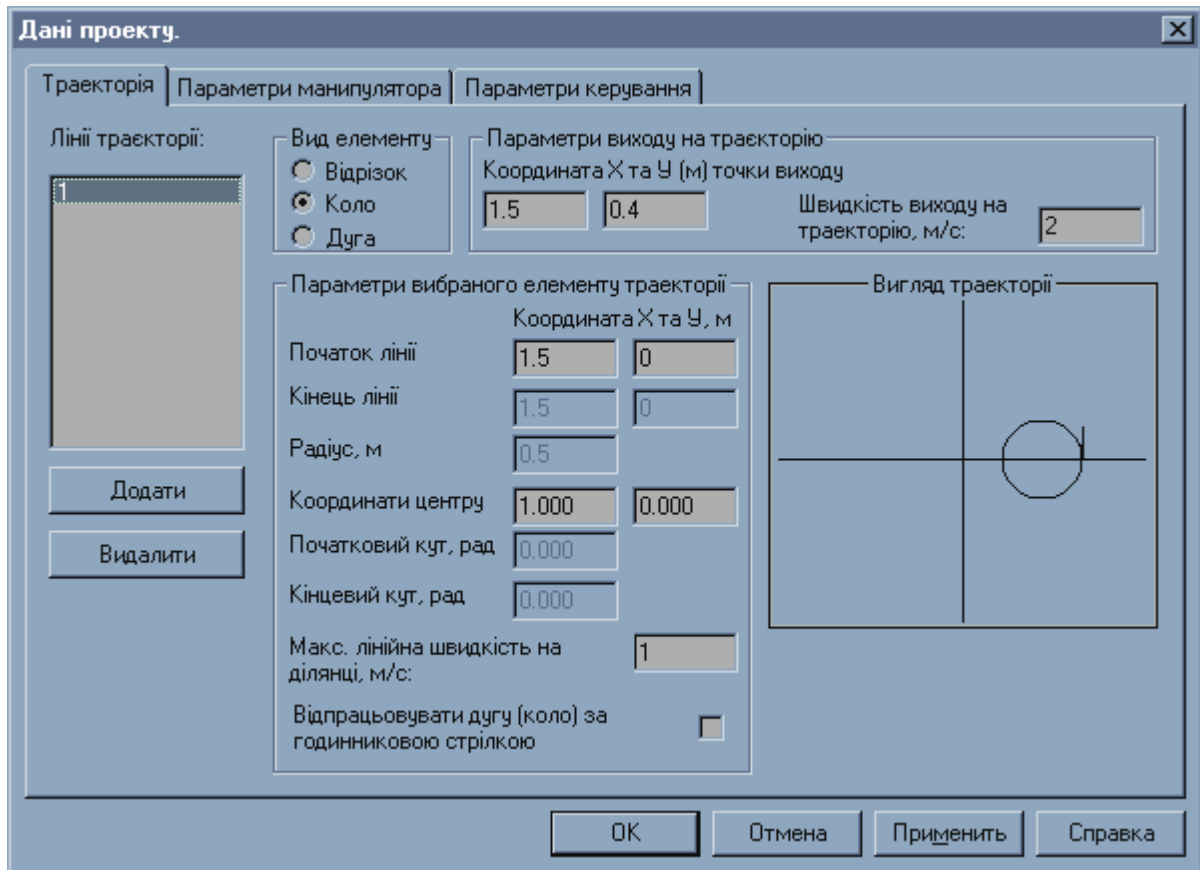


Рисунок 6.4 – Діалогове вікно "Дані проекту"

У верхній частині вікна ми можемо бачити назви трьох закладок цього вікна, на яких розділені по групам дані проекту.

У нижній кнопки операцій:

- “ОК” – закрити діалогове вікно із збереженням всіх введених даних;
- “Отмена” – відміна зміни даних проекту, закриття діалогового вікна без змін даних проекту;
- “Применить” – (доступна лише при зміні даних проекту) зберегти всі введені дані без закриття діалогового вікна, використовується в тому випадку, коли оператор не впевнений у необхідності подальших змін даних;

- “Справка” – викликає вікно довідки по даному діалоговому вікну.

6.4 Закладка “Траєкторія”

Дана сторінка діалогового вікна забезпечує редагування траєкторії, що відпрацьовується. У правій частині вікна схематично зображена задана траєкторія, яка змінюється в процесі введення нових даних в проект. Її масштаб залежить від суми довжин ланок.

Траєкторія розпочинається в “точці виходу на траєкторію”. Вихід на траєкторію здійснюється по прямолінійному відрізку, координати його початку та швидкість руху на відрізку задаються в рамці “Параметри виходу на траєкторію”. Координати кінця відрізка виходу на траєкторію задається точкою початку першого елемента траєкторії.

Схід з траєкторії здійснюється по прямолінійному відрізку з точки, що відповідає кінцевій точці останнього елемента траєкторії. Швидкість сходу з траєкторії відповідає швидкості виходу на неї.

Вся траєкторія складається із набору ліній.

Список доступних ліній показану у рамці “Лінії траєкторії”. Лінія, параметри якої відображені на закладці та можуть змінюватися, виділена курсором.

Для кожної лінії можна змінити її вид: відрізок, коло чи дуга. В залежності від виду елемента в рамці “Параметри вибраного елемента траєкторії” стають доступними параметри лінії:

- для **відрізка**: координати точки початку відрізка (лише для першого елемента траєкторії), координати точки кінця відрізка, максимальна лінійна швидкість руху на елементі;

- для **кола**: координати точки початку кола (лише для першого елемента траєкторії), координати центру кола, максимальна лінійна швидкість руху на елементі, напрямок руху по колу (за чи проти годинникової стрілки);

- для **дуги**: координати точки початку дуги (лише для першого елемента траєкторії), координати точки кінця дуги, радіус дуги, максимальна лінійна

швидкість руху на елементі, напрямок руху по дузі (за чи проти годинникової стрілки).

Кількість ліній можна збільшити. Для цього необхідно натиснути кнопку “Додати”. По цьому в список “Лінії траєкторії” додається нова лінія, яка має нульові параметри. Оператор повинен задати коректні значення усіх необхідних параметрів.

Для зменшення кількості ліній необхідно вибрати лінію для видалення у вікні “Лінії траєкторії” та натиснути кнопку “Видалити”.

Один із варіантів заповнення даної закладки показаний на рис. 6.4.

6.5 Закладка “Параметри маніпулятора”

На даній закладці можна змінити (ввести) такі параметри маніпулятора:

- довжини першої та другої ланок (м);
- діаметр ланки маніпулятора (м);
- густина матеріалу, з якого виготовлені ланки маніпулятора ($\text{кг} / \text{м}^3$);
- активний опір обмотки якоря приводних двигунів маніпулятора (Ом);
- індуктивність обмотки якоря (Гн);
- момент інерції двигуна ($\text{кг} \cdot \text{м}^2$);
- конструктивна стала приводного двигуна (C_f);
- передаточне число редуктора, що з’єднує двигун та ланку.

На рис. 6.5 показано один з варіантів заповнення параметрів маніпулятора.

6.6 Закладка “Параметри закону керування”

На даній закладці можна задати значення максимального ривку, максимальне прискорення, крок інтегрування (мс, або по іншому крок розрахунку траєкторії), тривалість паузи у точках з’єднання елементів траєкторії (с).

Також тут можна задати коефіцієнти, що використовуються при керуванні маніпулятором: $K_\theta, K_\omega, K_{\omega i}, K_i, K_{ii}$.

Дані проекту.

Траекторія | Параметри манипулятора | Параметри керування

Параметри траекторії задані таким чином, що максимальна сумарна довжина ланок повинна бути більшою від 2.152 м, а різниця довжин ланок повинна бути меншою 1.154 м.

Довжина ланки №1, м	1
Довжина ланки №2, м	1
Діаметр ланки манипулятора, м	0.2
Густина матеріалу, кг/м ³	7800
Опір обмотки якоря, Ом	1
Індуктивність обмотки якоря, Гн	0.01
Конструктивна постійна двигуна, Нм/А	10
Момент інерції двигуна, кг м ²	0.00025
Передаточне число редуктора	100

OK Отмена Применить Справка

Рисунок 6.5 – Закладка "Параметри манипулятора"

Для моделювання режиму керування струмом, на цій закладці можна встановити пташку “керування струмом”.

6.7 Опрацювання даних

Після введення всіх необхідних даних для САПР в папці з програмою (в нашому випадку “C:\Manipulr”) створена папка проекту. Її назва співпадає з назвою проекту (“C:\Manipulr\Test”). Всі вихідні дані проекту зберігаються в цій папці в файлі, основна частина якого також співпадає з назвою проекту, а його розширення “.mnp” (файл “test.mnp”).

Буде виконано розрахунок параметрів руху. В залежності від введених даних та обчислювальної потужності комп’ютера, на якому встановлена програма, процес розрахунку може займати від однієї-двох секунд до хвилини. Про протікання процесу обчислення свідчить курсор, що має вигляд пісочного годинника.

По закінченню обчислення, на екрані відображається звіт про введені та розраховані проекту. Звіт про проведені розрахунки може бути виведений також при виборі кнопки “Звіт”. Якщо в меню “Вигляд” вибрати пункт “Показати траєкторію”, замість звіту буде представлено схематично розраховану траєкторію.

При виведенні звіту демонструються наступні дані:

- координати точки виходу на траєкторію;
- кількість та опис усіх елементів траєкторії;
- довжини ланок, їх діаметр, густину матеріалу ланок;
- параметри закону керування: крок інтегрування, максимальне значення прискорення, час затримки у точках зламу траєкторії (у вузлах елементів траєкторії);
- значення коефіцієнтів матриць зворотних зв’язків;
- параметри приводних двигунів: активний та індуктивний опори обмотки якоря, неприведений момент інерції двигуна, конструкційна стала двигуна.

На рис. 6.6 показано один з можливих варіантів відображення вікна звіту.

6.8 Пункт “Зберегти дані”

В даному пункті зберігаються всі дані проекту, як введені оператором (вихідні), так і отримані в результаті обчислень для відображення в MatLAB.

При виборі даного пункту меню з’являється діалогове вікно “Збереження даних”, показано на Рис. 6.7. В текстове поле у верхній частині вікна необхідно ввести ім’я файла, в який будуть занесені дані. Далі необхідно вибрати одну з “радіо-кнопок”, яка визначає які саме дані будуть зберігатися. З даного вікна є можливість зберігати:

А) **дані проекту**: зберігаються всі вихідні дані проекту, а саме параметри траєкторії, маніпулятора і закону керування;

В) **одну змінну**: зберігається залежність розрахованого параметру від часу. Для зберігання обирається група, що містить необхідну змінну, а в групі – ім’я змінної, що буде зберігатися. Список змінних для зберігання:

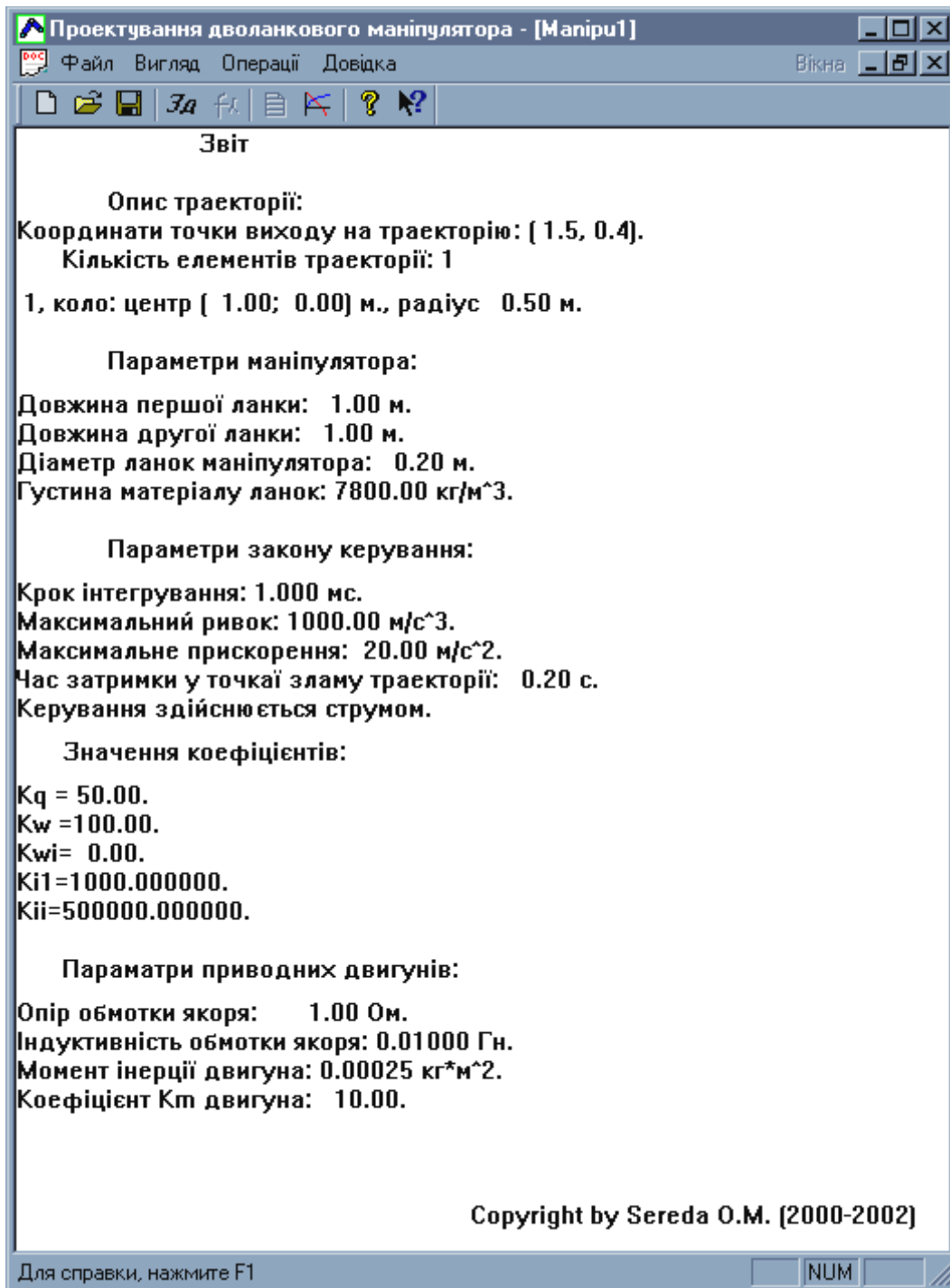


Рисунок 6.6 – Вікно звіту

- “Завдання в декартових координатах”: завдання на відпрацювання положення робочого органу $x^*(t)$, $y^*(t)$, $v_x^*(t)$, $v_y^*(t)$, $a_x^*(t)$, $a_y^*(t)$;
- “Завдання в узагальнених координатах”: завдання на відпрацювання узагальнених координат $\theta_1^*(t)$, $\theta_2^*(t)$, $\omega_1^*(t)$, $\omega_2^*(t)$, $\varepsilon_1^*(t)$, $\varepsilon_2^*(t)$ та задані струми приводних двигунів $i_1^*(t)$, $i_2^*(t)$;

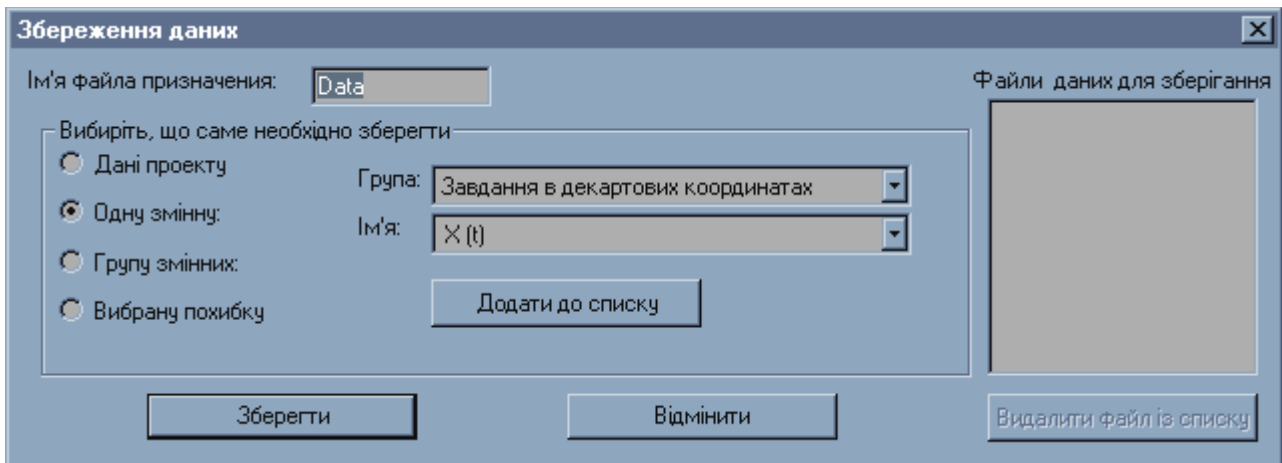


Рисунок 6.7 – Діалогове вікно “Збереження даних”

– “Відпрацювання в декартових координатах”: відпрацьовані значення положення робочого органу $x(t), y(t)$;

– “Відпрацювання в узагальнених координатах”: відпрацьовані значення узагальнених координат $\theta_1(t), \theta_2(t), \omega_1(t), \omega_2(t), \varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$;

– “Керування”: відпрацьовані струми приводних двигунів $i_1(t), i_2(t)$, керуюча напруга якоря приводного двигуна $u_1(t), u_2(t)$, оцінене значення статичного моменту $\hat{M}_{c1}(t), \hat{M}_{c2}(t)$;

Г) **групу змінних**: зберігається сукупність змінних, що належить вибраній групі:

– “декартові координати (завдання)”: $x^*(t), y^*(t)$;

– “лінійні швидкості (завдання)”: $v_x^*(t), v_y^*(t)$;

– “лінійні прискорення (завдання)”: $a_x^*(t), a_y^*(t)$;

– “кутові положення (завдання)”: $\theta_1^*(t), \theta_2^*(t)$;

– “кутові швидкості (завдання)”: $\omega_1^*(t), \omega_2^*(t)$;

– “кутові прискорення (завдання)”: $\varepsilon_1^*(t), \varepsilon_2^*(t)$;

– “струми (завдання)”: $i_1^*(t), i_2^*(t)$;

– “траєкторія (завдання)”: $y^*(x^*(t))$;

– “декартові координати (відпрацювання)”: $x(t), y(t)$;

- “кутові положення (відпрацювання)”: $\theta_1(t), \theta_2(t)$;
- “кутові швидкості (відпрацювання)”: $\omega_1(t), \omega_2(t)$;
- “кутові прискорення (відпрацювання)”: $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$;
- “струми (відпрацювання)”: $i_1(t), i_2(t)$;
- “траєкторія (відпрацювання)”: $y(x(t))$;
- “приводні напруги”: $u_1(t), u_2(t)$;
- “оцінка статичного моменту”: $\hat{M}_{c1}(t), \hat{M}_{c2}(t)$;

Д) **групу похибок**: зберігається вибрана група похибок відпрацювання:

- “похибка відпрацювання декартових координат”: $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$;
- “похибка відпрацювання узагальнених координат”: $\tilde{\theta}_1(t), \tilde{\theta}_2(t)$;
- “похибка відпрацювання узагальнених швидкостей”: $\tilde{\omega}_1(t), \tilde{\omega}_2(t)$;
- “похибка відпрацювання узагальнених прискорень”: $\tilde{\varepsilon}_1(t), \tilde{\varepsilon}_2(t)$;
- “похибка відпрацювання струмів”: $\tilde{i}_1(t), \tilde{i}_2(t)$.

Після того, як буде вибрано вид змінної для зберігання, необхідно натиснути кнопку “Зберегти”. Дані будуть занесені до файлу, діалогове вікно закриється.

Якщо ж існує необхідність зберігати 2-3 та більше залежностей для побудови графіків, можна скористуватися можливостями формування списку файлів, що зберігатимуться. Для цього необхідно вказати всі параметри для даних, що зберігаються, а саме: ім’я файлу, вид даних, групу та назву даних, що зберігаються. Далі необхідно натиснути клавішу “Додати до списку”. Після цього в лівій частині діалогового вікна, у рамці “Файли для зберігання”, з’явиться ім’я файлу, який представляє дані, що будуть зберігатися.

Аналогічно робиться з наступними даними, таким чином формуючи список файлів для зберігання. Максимальна кількість файлів, що можна зберегти за один прийом – 10 файлів.

Натиснувши на одному з імен, що вказані в списку, ви зможете переглянути, що саме буде зберігатися до цього файлу. Змінити дані, що будуть до нього заноситися неможливо.

Якщо ви припустилися помилки при введенні даних для файлу, ви повинні видалити його зі списку, вибравши вказаний файл та натиснувши потім кнопку “Видалити файл зі списку”.

6.9 Відображення даних

Використаємо дані при відпрацюванні програмою траєкторії заданою на рис. 6.4. Для перегляду чи друку даних, розрахованих програмою, потрібно виконати наступні дії:

1. В меню “Файл” натиснути пункт “Зберегти дані...”.

2. При цьому буде показано діалогове вікно “Збереження даних”. Вибираємо “радіо-кнопку” “Групу змінних”, а в якості групи вказується наприклад “Декартові координати (завдання)”. Ім’я файла “по замовчуванню” – “Data” (його розширення не показується, але воно буде “.m”) – нехай залишається без змін. Натиснемо кнопку “Зберегти”.

3. Тепер необхідно запустити програму “MatLAB”.

4. Запустимо компоненту пакету “MatLAB” “Path Browser”. На його панелі інструментів натиснемо кнопку “Add Path”. З’явиться діалогове вікно “Add to Path”. В комірці “Directory to add” вкажемо шлях до проекту (в нашому прикладі “C:\Manipulr\test”), натиснемо “ОК”. Таким чином, ми задали пакету шлях до файлів, що містять інформацію для відображення. Цю операцію необхідно здійснювати лише один раз для кожного проекту.

5. Закриємо вікно “Path Browser”, на запит про збереження змін відповімо “Так” (натиснувши відповідну кнопку).

6. Тепер у основному вікні “MatLAB” ведемо ім’я файлу, що містить збережені нами дані (“data”), див. рис. 6.8, натиснемо клавішу “Enter”. На екрані буде відображено графічну залежність вибраної змінної. Один з варіантів відображеного вікна показано на рис. 6.9.

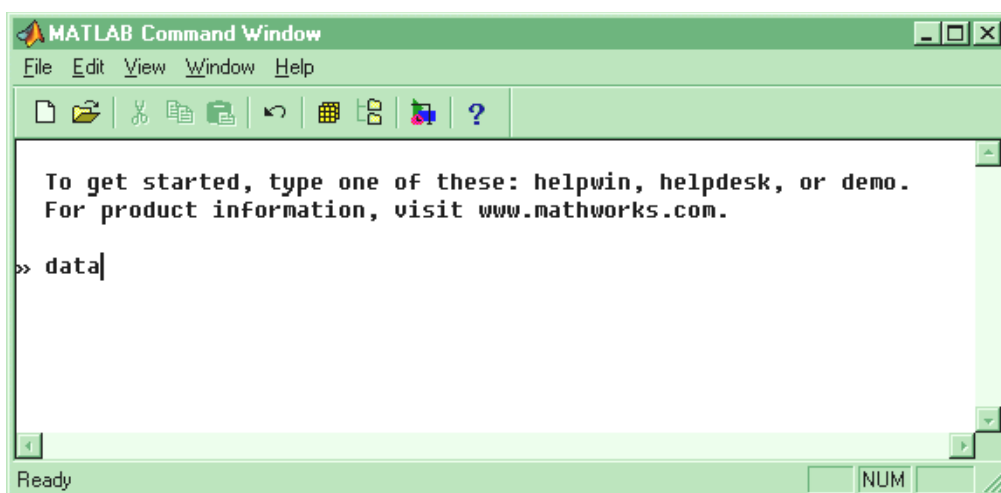


Рисунок 6.8 – Робота з даними в пакеті "MatLAB"

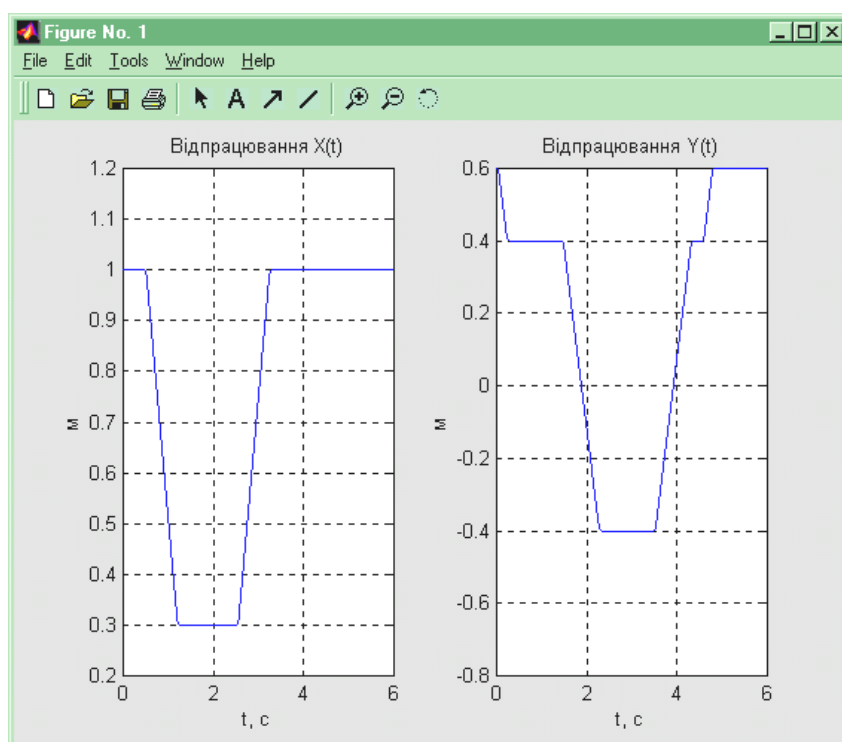


Рисунок 6.9 – Вікно з графіками розрахованих даних

У тому випадку, коли необхідно скоректувати вихідні дані, необхідно повернутися до програми "Manipulr", викликати діалогове вікно "Дані проекту" (див. п. 6.3). І з його допомогою змінити дані. По закритті вікна "Дані проекту" буде проведено перерахунок параметрів проекту. Для їх перегляду дані необхідно знову зберегти у файлі.

7 ПРИКЛАД ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ ВІДПРАЦЮВАННЯ ДВОЛАНКОВИМ МАНІПУЛЯТОРОМ ЗАДАНОЇ ФІГУРИ

Наведемо приклад моделювання маніпулятора для відпрацювання кола з використанням розглянутої САПР. Нехай траєкторія для відпрацювання задана на рис. 7.1. Траєкторія являє собою коло, що задане координатами його центру $(1.5, 0)$ м. та радіусом $R = 0.5$ м. Точка початку відпрацювання кола $x_1(2, 0)$ м, а точка виходу на траєкторію $x_0(2, 0.8)$ м.

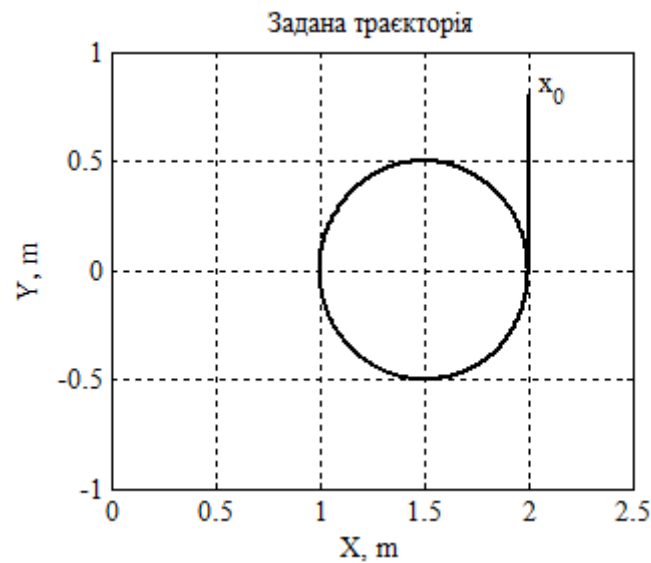


Рисунок 7.1 – Задана траєкторія кола

Необхідно провести наступні дослідження:

1. Відпрацювання траєкторії маніпулятором з мінімально-допустимою довжиною ланок (наприклад $l_1 = l_2 = 1.1$ м), що є поблизу зони нечутливості.

2. Відпрацювання траєкторії маніпулятором збільшеною довжиною ланок (наприклад $l_1 = l_2 = 1.4$ м), з більш віддаленою зоною нечутливості.

3. Для обох довжин ланок провести дослідження для двох значень частоти власних недефонованих коливань $\omega_0 = 50$ рад/с і $\omega_0 = 100$, коли коефіцієнти регуляторів визначаються: $K_0 = \omega_0$, $K_\omega = 2\omega_0\xi$, $K_{\omega i} = \omega_0^2$, $\xi = 1$.

4. Порівняти результати і зробити висновки.

Після запуску програми, необхідно створити новий проект.

Траєкторія, що пропонується по замовчуванню досить подібна до заданої, це також коло, але з іншими параметрами. На етапі введення даних траєкторії необхідно скорегувати дані вказані дані таким чином, щоб діалогове вікно “Траєкторія” набуло вигляду, який показаний на рис. 7.2.

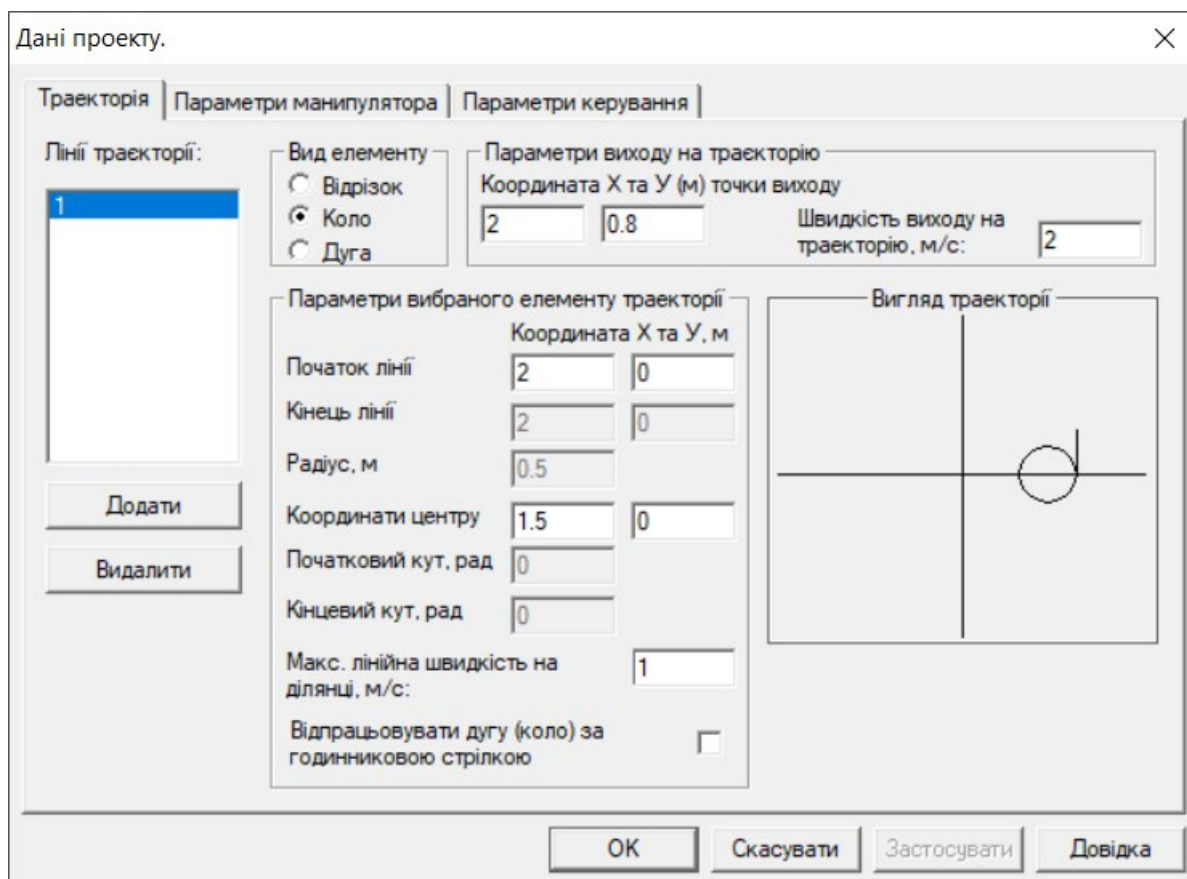


Рисунок 7.2 – Діалогове вікно “Траєкторія” із даними заданої траєкторії

Переходимо далі до введення параметрів манипулятора.

По замовчуванню запропоновані такі дані: довжина першої ланки $l_1 = 1$ м, довжина другої ланки $l_2 = 1$ м, діаметр ланки $d = 0.02$ м, густина матеріалу ланок $\rho = 7800$ кг/м³, опір обмотки якоря приводних двигунів $R = 1$ Ом, її індуктивність $L = 0.01$ Гн., конструктивна постійна двигунів $C_f = 1$ Нм/А, момент інерції двигуна $J = 0.0025$ кгм², передаточне число редуктора $n = 100$.

Вводимо наші параметри: $l_1 = l_2 = 1.1$ м або $l_1 = l_2 = 1.4$ м.

Переходимо далі до закладки введення параметрів керування.

По замовчуванню запропоновані такі дані: максимальне лінійне прискорення $a = 20 \text{ м/с}^2$, крок розрахунку 1 мс, тривалість паузи у точках зламу траєкторії 0.2 с; коефіцієнти: $K_\theta = 50$, $K_\omega = 100$, $K_{\omega_i} = 1000$, $K_i = 1000$, $K_{ii} = 500000$. Визначення вказаних коефіцієнтів наведено у розділі 5.2. “Синтез алгоритмів керування маніпулятором”.

Введемо наші дані: крок розрахунку рівним 0.01 мс, розраховуємо параметри коефіцієнтів регуляторів:

для $\omega_0 = 50 \text{ рад/с}$: $K_\theta = \omega_0 = 50$, $K_\omega = 2\omega_0\xi = 100$, $K_{\omega_i} = \omega_0^2 = 2500$;

для $\omega_0 = 100 \text{ рад/с}$: $K_\theta = \omega_0 = 100$, $K_\omega = 2\omega_0\xi = 200$, $K_{\omega_i} = \omega_0^2 = 10000$.

Натисніть кнопку “Готово”, щоб ввести вказані дані до проекту та провести розрахунок руху.

При розрахунку перевіряється проходження траєкторії поблизу зони нечутливості. Якщо деякі точки заданої траєкторії знаходяться поблизу зони виродженості, то виникне повідомлення про помилку.

Графік відпрацювання заданої траєкторії наведено на рис. 7.3.

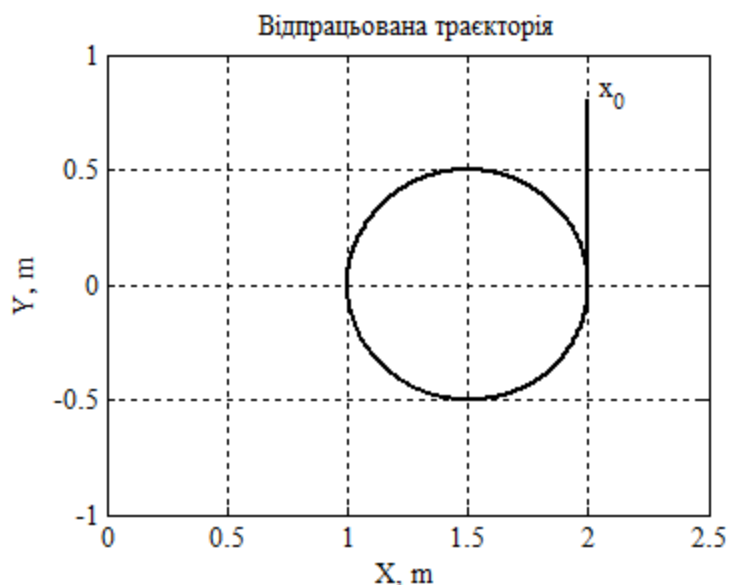


Рисунок 7.3 – Відпрацювання заданої траєкторії

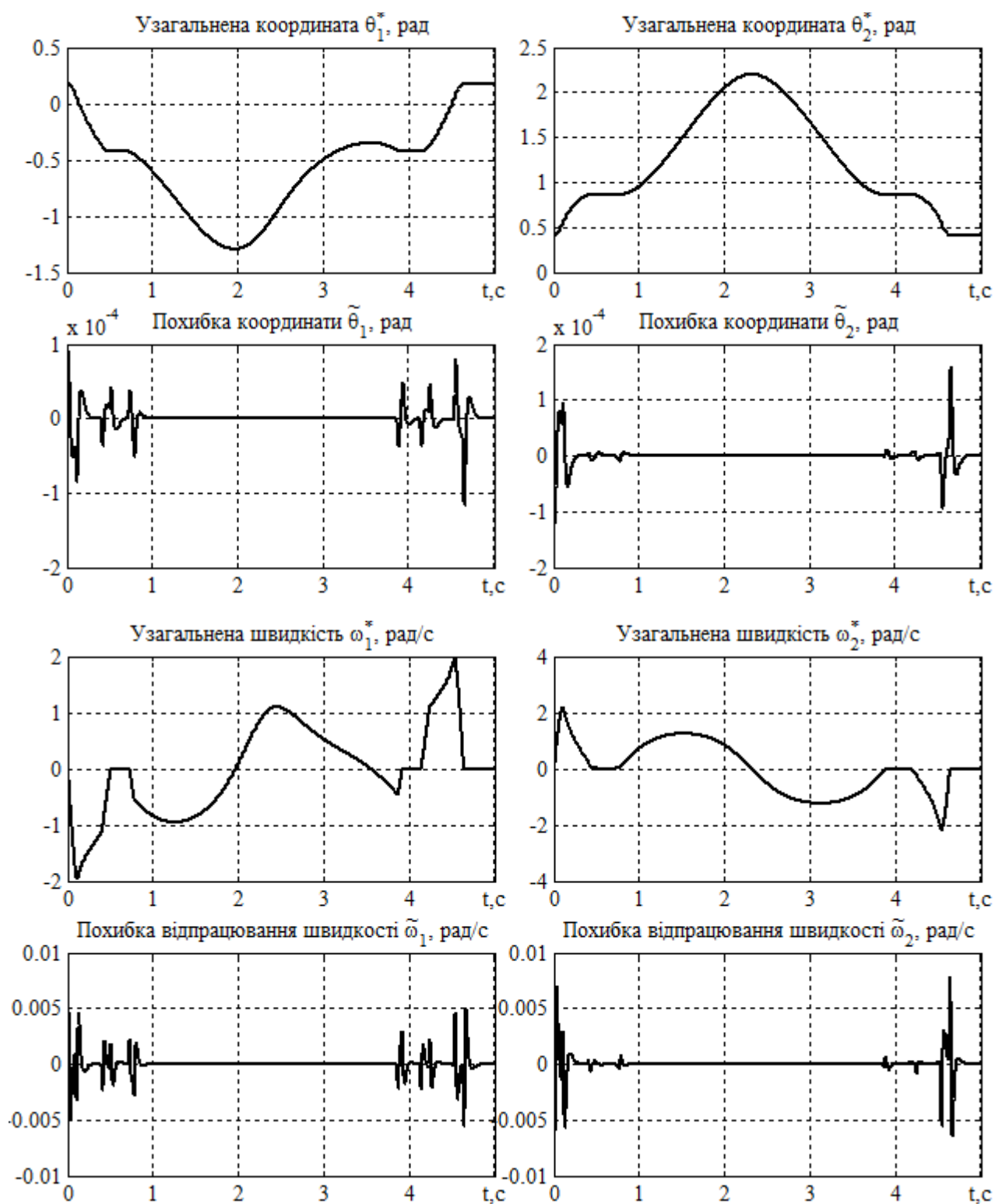
Графіки перехідних процесів для довжини ланок $l_1 = l_2 = 1.1 \text{ м}$ і $\omega_0 = 50 \text{ рад/с}$ наведено на рис. 7.4, для $l_1 = l_2 = 1.4 \text{ м}$ і $\omega_0 = 50 \text{ рад/с}$ – на

рис. 7.5, для $l_1 = l_2 = 1.1$ м і $\omega_0 = 100$ рад/с – на рис. 7.6, для $l_1 = l_2 = 1.4$ м і $\omega_0 = 100$ рад/с – на рис. 7.7 відповідно.

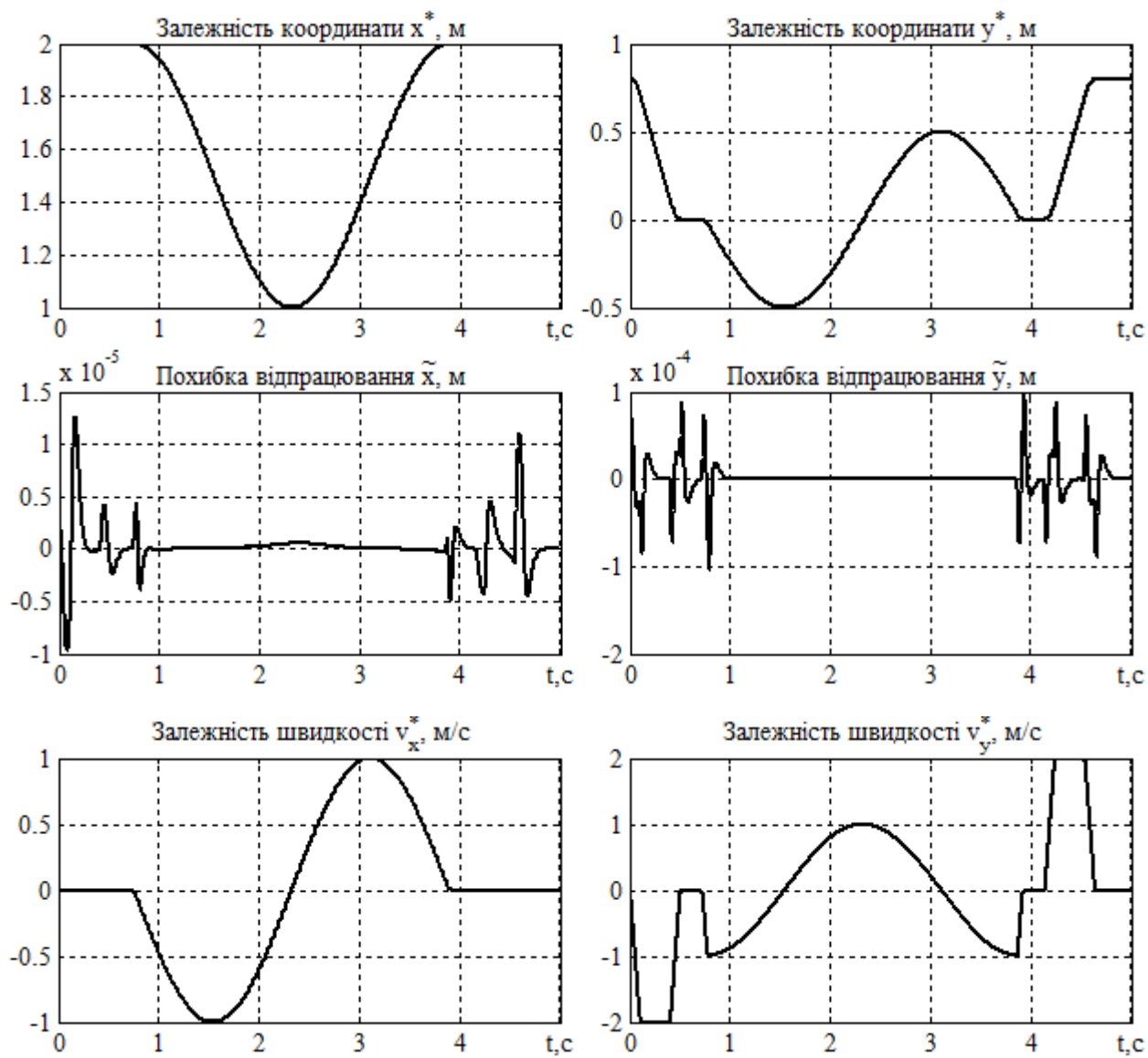
При порівнянні графіків з різними довжинами ланок, наприклад рис. 7.4 і рис. 7.5 або рис. 7.6 і рис. 7.7, можна помітити, що пікові значення похибок зменшуються значним чином на початку руху і в його кінці при збільшенні довжини ланок. Цей ефект пояснюється тим, що вихідна точка знаходиться поблизу зони виродження і з коротшими ланками проходження цієї ділянки ускладняється.

При аналізі графіків на вплив від частоти демпфування, похибка відпрацювання узагальнених координат зменшується майже в 5 раз при збільшенні частоти власних недемпфованих коливань. Відпрацювання узагальнених швидкостей покращується не дуже сильно, однак точність відпрацювання координат збільшується майже в 10 разів для координати $x(t)$ і майже в 5 разів для координати $y(t)$.

Висновки моделювання: збільшення довжини ланок впливає на роботу маніпулятора в зоні близькій до зони виродження, а точніше зменшує похибки відпрацювання координат в цій зоні. Збільшення частоти власних недемпфованих коливань дозволяє збільшити точність відпрацювання всієї траєкторії.

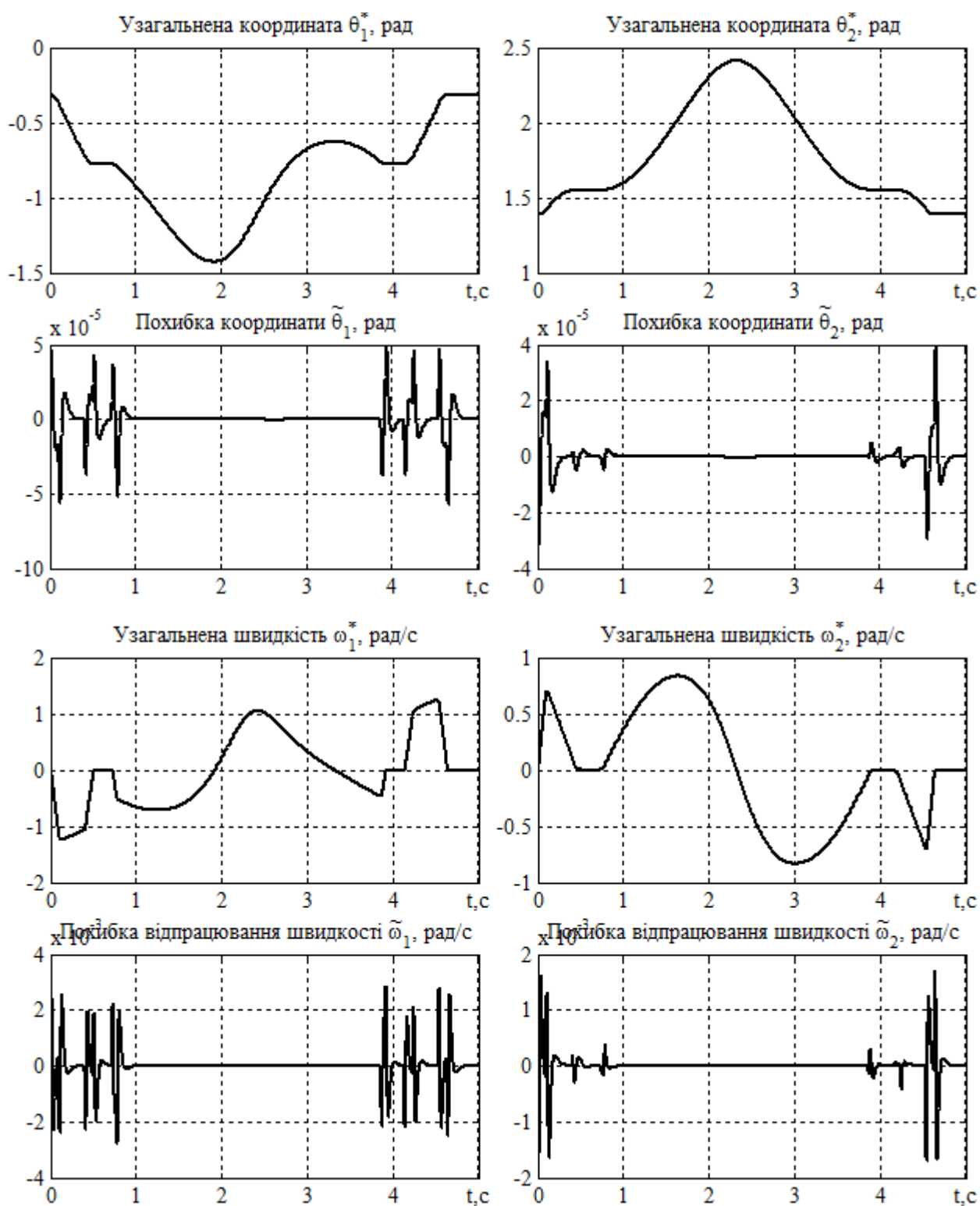


a)

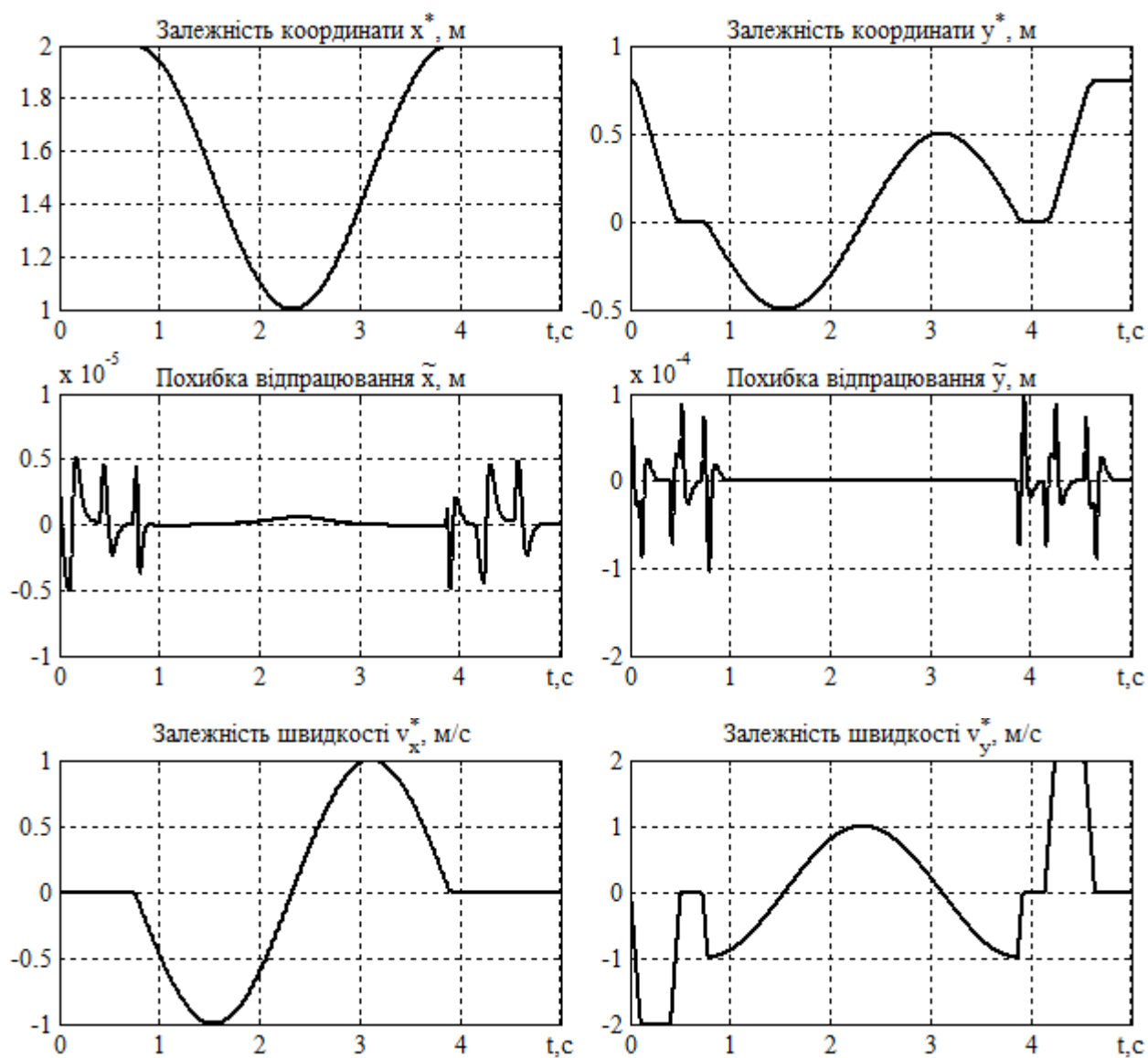


б)

Рисунок 7.4 – Графіки перехідних процесів при $l_1 = l_2 = 1.1$ м і $\omega_0 = 50$ рад/с

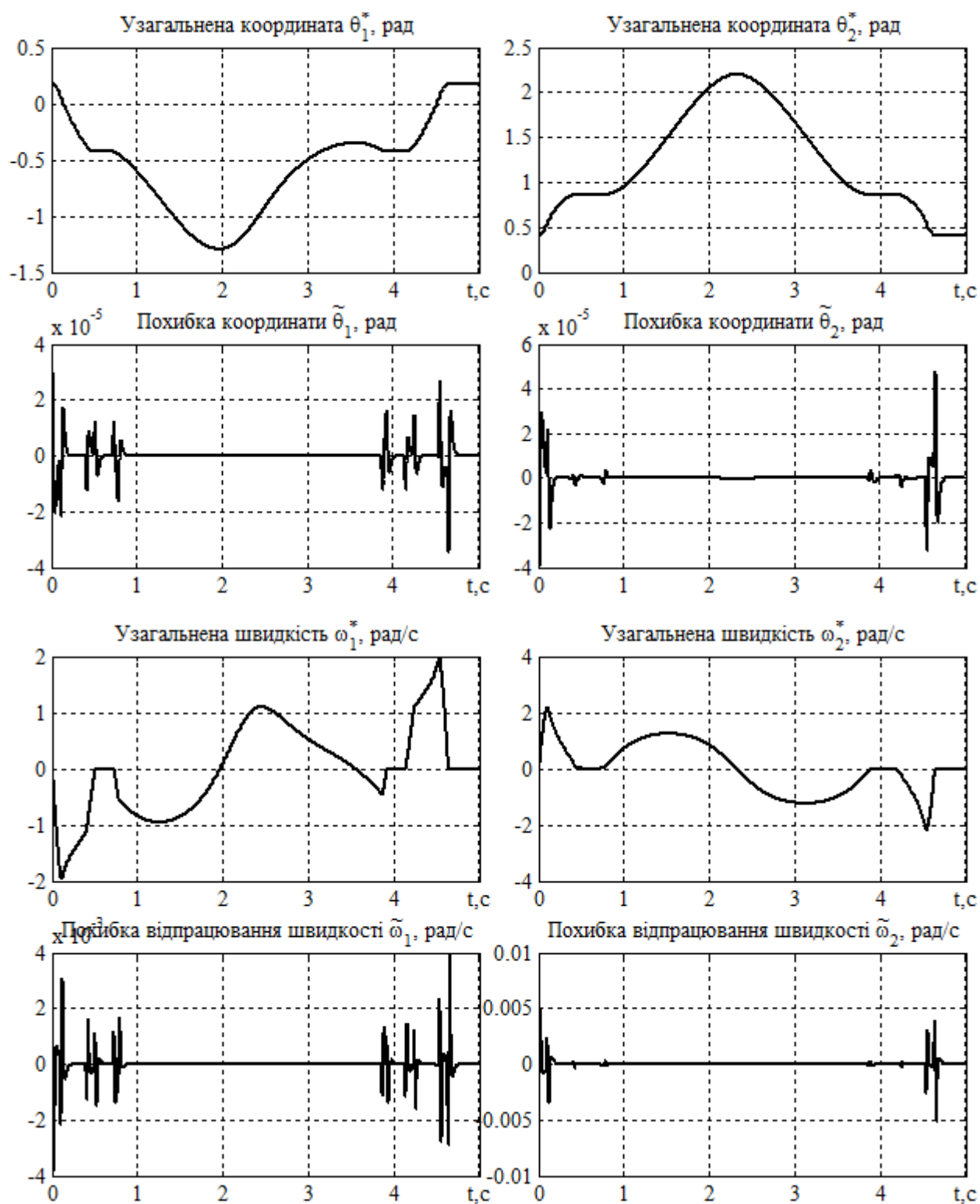


a)

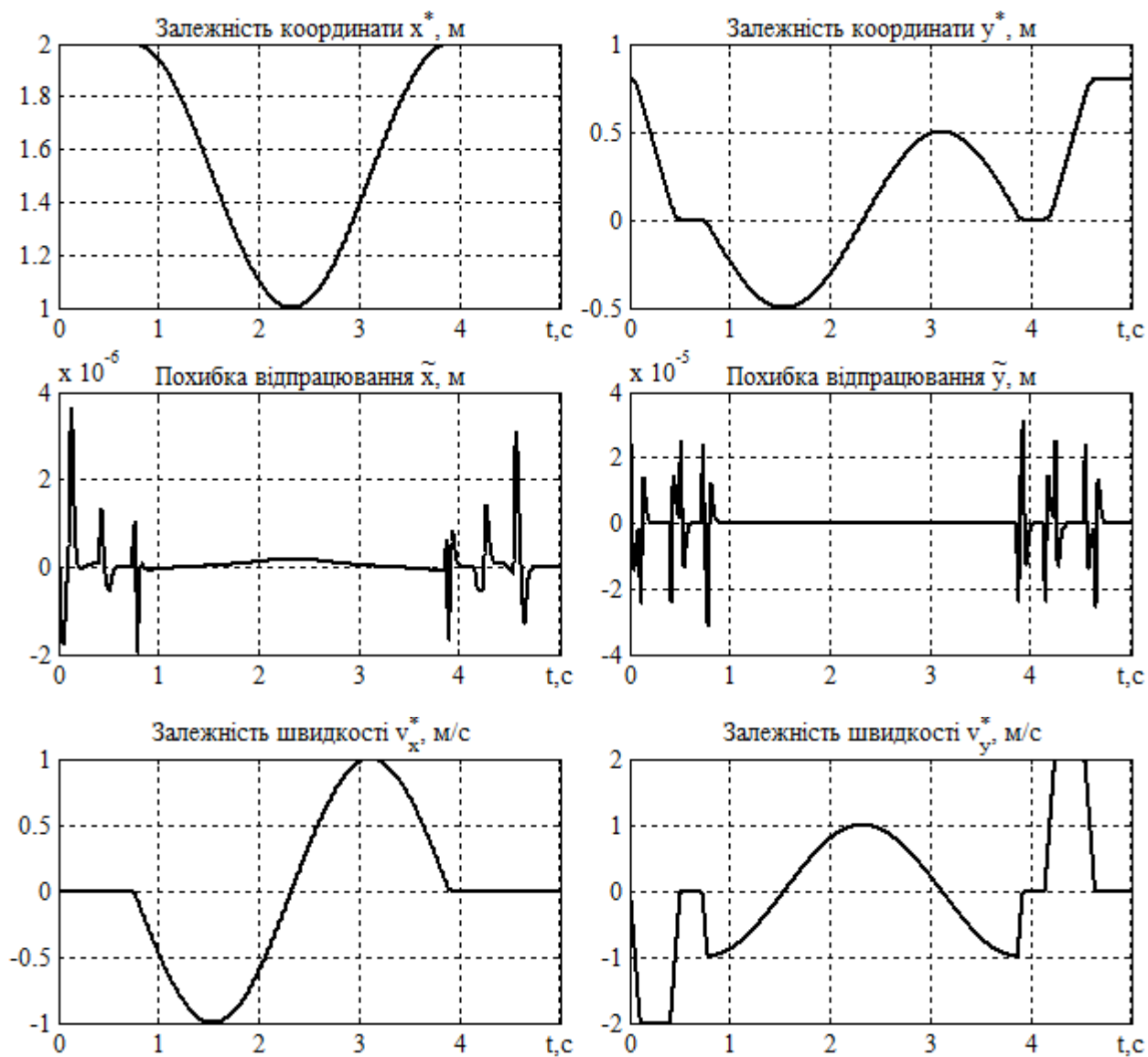


б)

Рисунок 7.5 – Графіки перехідних процесів при $l_1 = l_2 = 1.4$ м і $\omega_0 = 50$ рад/с

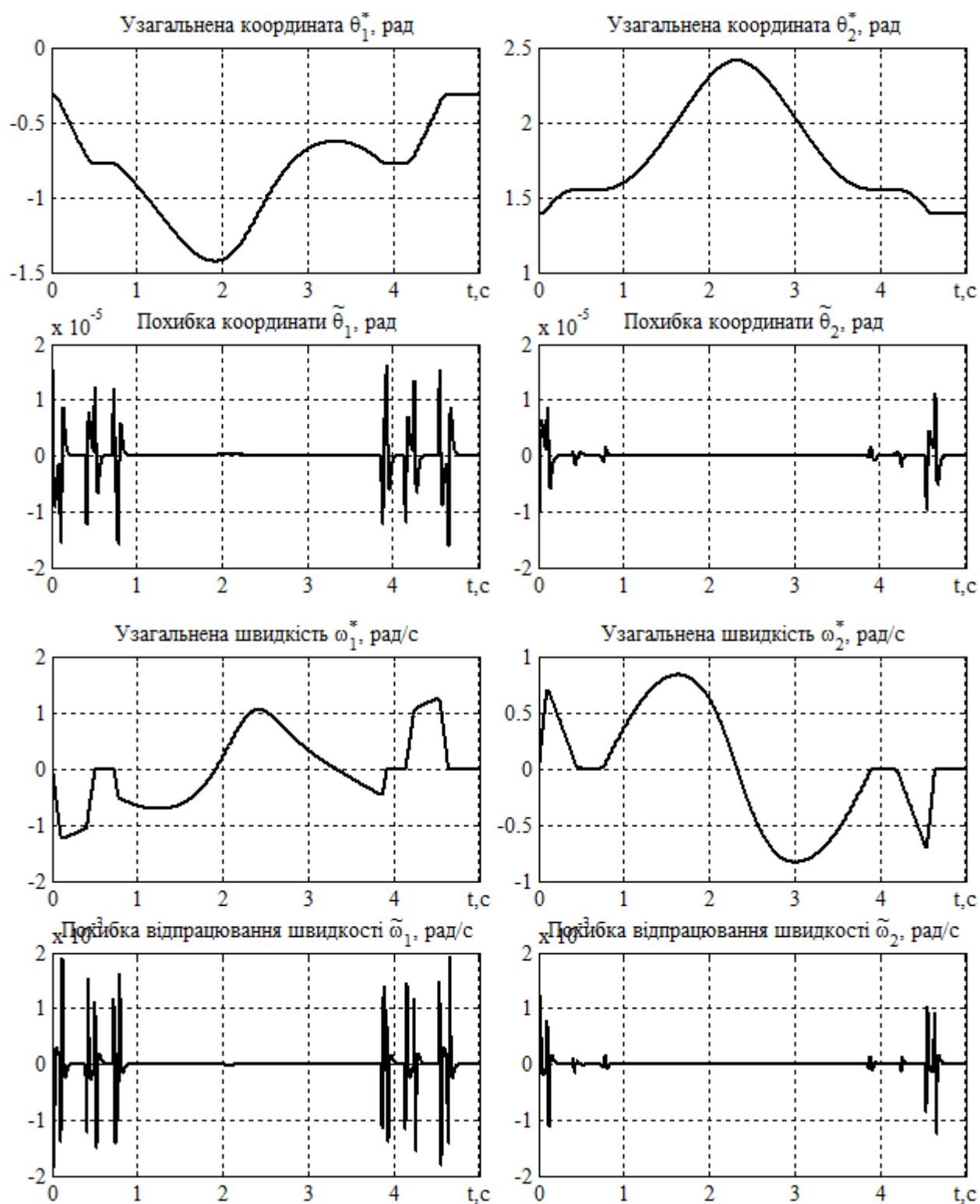


a)

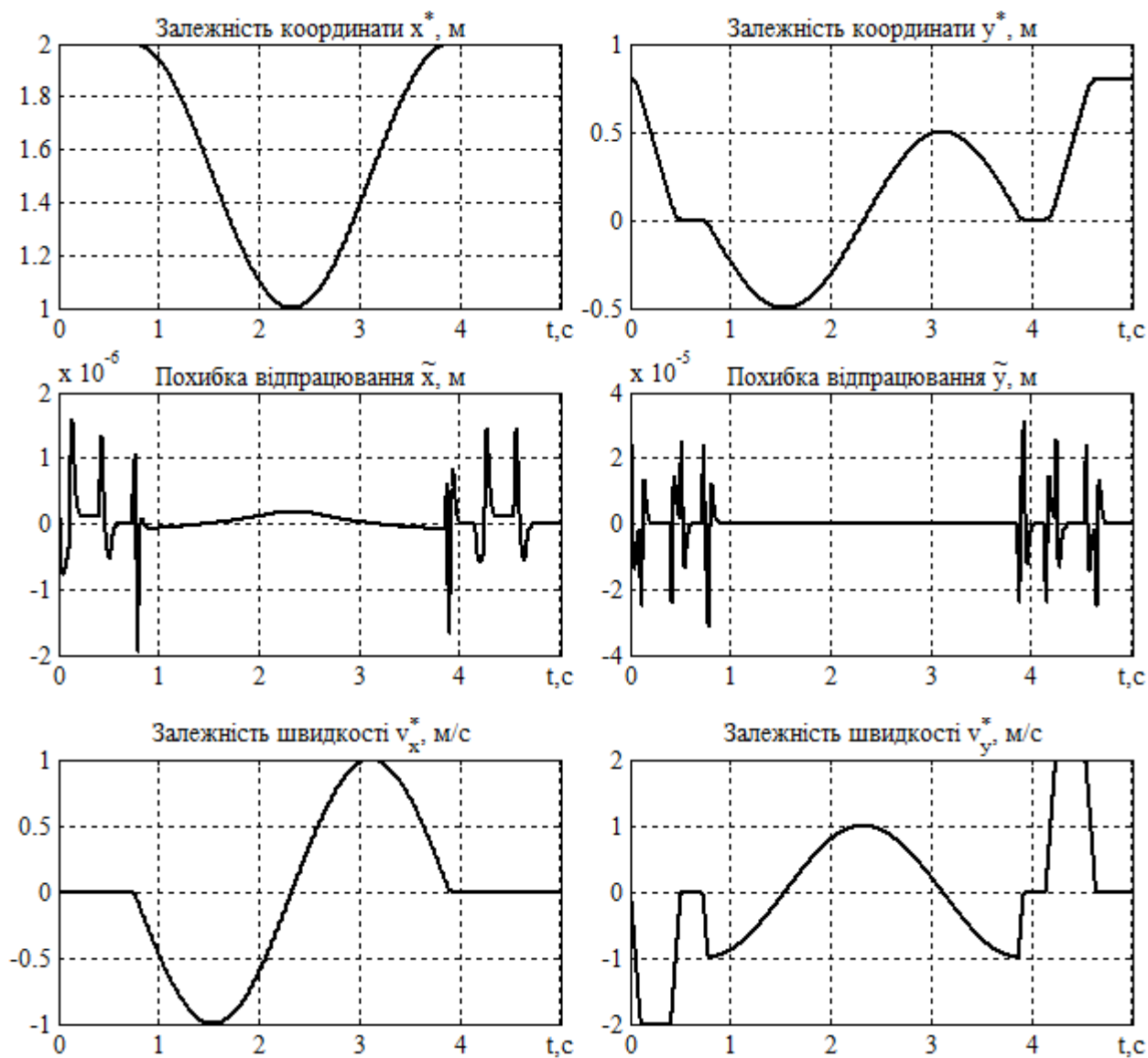


б)

Рисунок 7.6 – Графіки перехідних процесів при $l_1 = l_2 = 1.1$ м і $\omega_0 = 100$ рад/с



a)



б)

Рисунок 7.7 – Графіки перехідних процесів при $l_1 = l_2 = 1.4$ м і $\omega_0 = 100$ рад/с

Для полегшення процесу моделювання рекомендовано зберігати масиви даних для виводу в MATLAB з однаковими назвами, наприклад:

DataRefsim – задана траєкторії $y^*(x^*)$;

DataXY – масиви декартових координат $x^*(t)$ і $y^*(t)$;

DataVxy – масиви лінійних швидкостей $v_x^*(t)$ і $v_y^*(t)$;

DataTeTr – масиви узагальнених координат $\theta_x^*(t)$ і $\theta_y^*(t)$;

DataWr – масиви узагальнених швидкостей $\omega_x^*(t)$ і $\omega_y^*(t)$;

DataXYe – масиви похибок декартових координат $\tilde{x}(t)$ і $\tilde{y}(t)$;

DataTeTe – масиви похибок узагальнених координат $\tilde{\theta}_x(t)$ і $\tilde{\theta}_y(t)$;

DataWe – масиви похибок узагальнених швидкостей $\tilde{\omega}_x(t)$ і $\tilde{\omega}_y(t)$.

Можливі помилки при моделюванні. Важливо, що програма розраховує кожну лінію, включаючи лінію з точки виходу на траєкторію. Якщо початкові і кінцеві точки будь-якої лінії співпадають, то довжина такої ділянки рівна нулю і програма видасть помилку про неможливість її відпрацювання. Тому треба слідкувати, щоб не було відрізків нульової довжини, і точку виходу точки треба робити обов'язково на деякій відстані від фігури. Вибирати її можна довільно.

Розрахунок кожної лінії відбувається за траєкторією описаною в розділі 3, і якщо прискорення буде завелике для закорткої ділянки, для ділянки з низькою швидкістю (наприклад 1 м/с), програма видасть помилку про неможливість відпрацювання. Тому прискорення треба буде зменшити.

При визначенні довжини ланок на відстані близькій до зони нечутливості буде видаватися помилка. Треба збільшити довжину на стільки, щоб програма змогла виконати розрахунок.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Теорія адаптивного та робастного керування: курсова робота [Електронний ресурс]: навчальний посібник для студ. спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: С.М. Пересада, С.М. Ковбаса, Є.О. Ніконенко – Електронні текстові дані (1 файл: 3,4 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 118 с.
2. Зінченко О.Ю., Ніконенко Є.О., Пересада С.М., Серeda О.М., “Автоматизоване проектування системи програмного керування дволанковим маніпулятором”, Міжнародний науково-технічний журнал молодих учених, аспірантів і студентів "Сучасні проблеми електроенерготехніки та автоматики", КПІ імені Ігоря Сікорського, Київ, 2020.
3. Шахинпур М., Курс робототехніки, М.: “Мир”, 1990 – 528 с.
4. Робототехника и гибкие производственные системы: Проблемы создания гибких автоматических производств, И.М. Макаров, К.В. Фролов, П.Н. Белянин – М.: Наука, 1987 – 432 с.
5. Конспект лекцій: Пересада С.М., Серeda О.М. "Основи електромехатроніки", НТУУ “КПІ” – 2001, 42 с.
6. Конспект лекцій: Пересада С.М. "Основи робототехнічних устроїв", "Статика, динаміка и електропривод робототехнічних модулів", НТУУ «КПІ» – 2001, 58 с.
7. Механіка промислових роботів, 1, 2, 3 т., под редакцією К. В. Фролова, Е. І. Вороб'єва, – М. "Высшая школа" 1988.

Додаток А

Варіанти завдань на розрахунково-графічну роботу

Задана фігура на відпрацювання показана на рис. А.1 – рис. А.7.
Координати вершин фігур подано у таблицях А.1 – А.3.

У відповідності з номером варіанта необхідно вибрати вид фігури відпрацювання та координати її вершин.

Точка виходу на траєкторію обираються довільно.

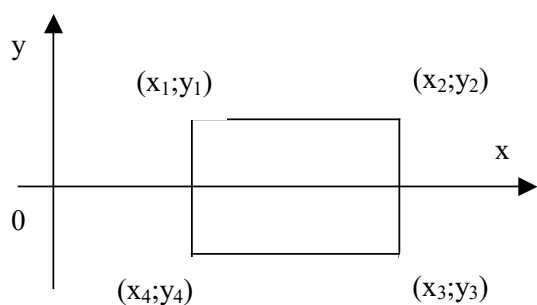


Рисунок А.1 – Варіанти №1-4

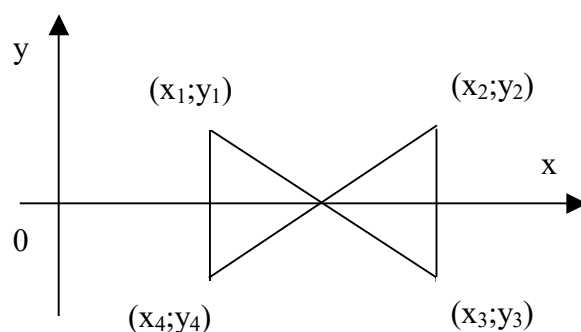


Рисунок А.2 – Варіанти №5-8

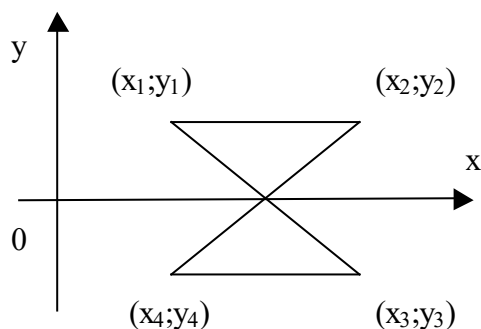


Рисунок А.3 – Варіанти №9-12

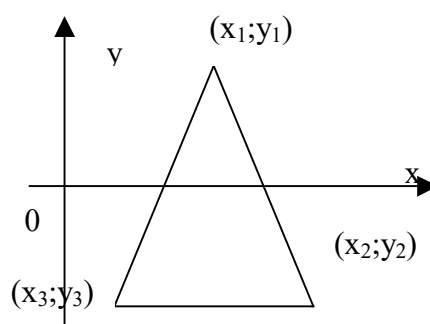


Рисунок А.4 – Варіант №13-16

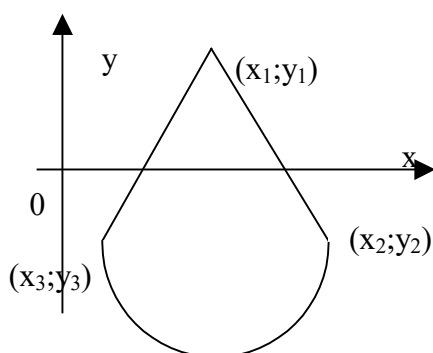


Рисунок А.5 – Варіант №17-20

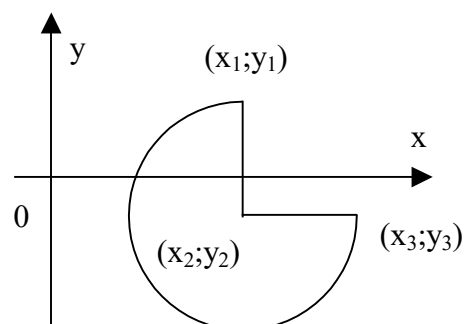


Рисунок А.6 – Варіанти №21-24

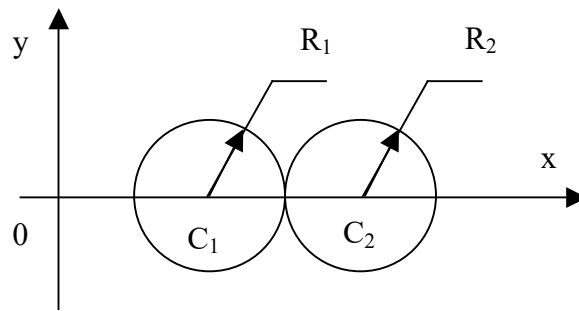


Рисунок А.7 – Варіант №25-26

Таблиця А.1 – Координат вершин фігур для варіантів № 1-12

№ варіанта	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4
1, 5, 9	0.3	0.4	1	0.4	1	-0.4	0.3	-0.4
2, 6, 10	-0.3	0.5	0.5	0.5	0.5	0.1	-0.3	0.1
3, 7, 11	0	1	1	1	1	-1	0	-1
4, 8, 12	-0.5	-0.5	0.5	-0.5	0.5	-1.5	-0.5	-1.5

Таблиця А.2 – Координат вершин фігур для варіантів № 13-24

№ варіанта	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
13, 17, 21	0.8	0.4	1	0	0,6	0
14, 18, 22	0.8	0.8	1	0.4	0.6	0.4
15, 19, 23	-0.3	0.4	0	0.7	0	0.1
16, 20, 24	1.5	0.5	1	0.5	1.5	0

Таблиця А.3 – Координат вершин фігур для варіантів № 25-26

№ варіанта	C_1		C_2		R_1	R_2
	x_1	y_1	x_2	y_2		
25	0.6	0	1.4	0	0,4	0,4
26	0.8	0	1.4	0	0.2	0.4

Додаток Б

Вимоги до оформлення розрахунково-графічної роботи

Розрахунково-графічна робота друкується на окремих листах формату А4 і підшиваються у папку або жорстко скріплюються.

Робота складається з наступних елементів:

- **Титульний аркуш** (зразок наведено у додатку Б);
- **Зміст** (перелік усіх пунктів роботи з вказаними сторінками);
- **Завдання до розрахунково-графічної роботи** (відповідно до свого варіанту);
- **Вступ** (формулюються актуальність роботи та її основні цілі);
- **Практична частина** (розв'язок задач з наведенням усіх проміжних розв'язків та необхідних пояснень);
- **Висновки** (які результати досягнуто, можливості їхнього використання у сучасних системах автоматизації);
- **Список використаної літератури.**

Текст роботи повинен бути набраний за такими вимогами: **шрифт** – Times New Roman, розмір – 14; **інтервал** – 1,5; **відступ першої строки** – 1,25; **вирівнювання** – по ширині тексту. Кожен пункт повинен починатися з нової сторінки, назва пункту – жирним, 14 шрифт, всі прописні. Після назви необхідно зробити один відступ.

Рисунки необхідно вставляти за допомогою Вставка→Об'єкт→Рисунок Microsoft Word та вирівнювати по центру. Дозволяється вставляти рисунки напряму з Microsoft Visio шляхом експорту. Такі рисунки повинні відкриватися для редагування, а не бути картинками. Розташовувати рисунки потрібно відразу після посилання на них з підписом та назвою. **Таблиці** підписуються зверху з відступом 1,25. Після таблиці необхідно зробити один відступ.

Всі формули необхідно робити у редакторі MathType 5.2 і вище 14-м шрифтом. Вирівнювати формули необхідно зробити по середині.

Сторінки роботи нумеруються справа зверху. Перша сторінка не нумерується, але враховується як перша.