

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**С.М. Шолохов, І.І. Самборський, Ю.О. Головін**

# **ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ОБРОБКИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ**

**Навчальний посібник**

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для здобувачів ступеня доктор філософії  
за освітньо-науковою програмою «Спеціальні системи електронних комунікацій»  
спеціальністю 172 Електронні комунікації та радіотехніка

Електронне мережне навчальне видання

Київ  
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО  
2024

УДК 519.2  
Ш71

Автори: *Шолохов Сергій Миколайович*, к.т.н., доцент  
*Самборський Іван Іванович*, к.т.н., с.н.с.  
*Головін Юрій Олександрович*, к.т.н., доцент

Рецензенти: *Павленко П.М.*, д.т.н., професор, Заслужений діяч науки і техніки України, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, Національний авіаційний університет  
*Кононов О.А.*, д.т.н., доцент, Державний науково-дослідний інститут авіації

Відповідальний редактор *Мазор С.Ю.*, к.т.н.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 4 від 01.02.2024 р.)  
за поданням вченої ради Інституту спеціального зв'язку та захисту інформації  
(протокол № 4 від 22.11.2023 р.)*

**Шолохов С.М.**  
Теоретичні основи планування експерименту та обробки експериментальних даних [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня доктор філософії за освітньо-науковою програмою «Спеціальні системи електронних комунікацій» спеціальністю 172 Електронні комунікації та радіотехніка / С.М. Шолохов, І.І. Самборський, Ю.О. Головін ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. - Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. 159 с.

Навчальний посібник містить основи сучасних методологічних підходів до постановки та обробки результатів експериментальних досліджень і математичних методів, які застосовуються при плануванні та проведенні експерименту. Розглянуто основні поняття математичної статистики. Викладено методи планування експерименту з використанням оптимізаційних моделей.

Навчальний посібник розроблено відповідно до силабусу навчальної дисципліни «Планування експерименту та обробка експериментальних даних», призначений для здобувачів ступеня доктор філософії за освітньо-науковою програмою «Спеціальні системи електронних комунікацій» спеціальністю 172 Електронні комунікації та радіотехніка, а також буде корисним для здобувачів вищої освіти ступеня магістр за освітньою програмою «Спеціальні системи електронних комунікацій» спеціальності 172 Електронні комунікації та радіотехніка.

УДК 519.2

Реєстр. № НП 23/24-261. Обсяг 6,8 авт. арк.  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056  
<https://kpi.ua>  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© С.М. Шолохов, І.І. Самборський, Ю.О. Головін, 2024  
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024

## ЗМІСТ

<b>ПЕРЕДМОВА</b> .....	6
<b>ВСТУП</b> .....	7
<b>РОЗДІЛ 1. ОСНОВИ АНАЛІЗУ РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ</b> ...	9
1.1. Випадкові величини. Класифікація помилок вимірювань. Абсолютна і відносна похибка.....	9
1.2. Оцінка похибок функцій наближених аргументів .....	12
1.3. Розподіл випадкових величин. Функція розподілу і щільність розподілу випадкової величини .....	15
1.4. Числові характеристики випадкової величини. Властивості математичного сподівання і дисперсії. Нормована випадкова величина. Квантили .....	21
1.5. Генеральна та вибіркова сукупність. Статистичний розподіл та емпірична функція розподілу вибірки.....	25
1.6. Статистичні оцінки параметрів розподілу .....	35
1.7. Оцінювання невідомих параметрів розподілу вибірки. Метод максимальної правдоподібності .....	44
1.8. Оцінювання математичного сподівання і дисперсії нормально розподіленої випадкової величини. Дисперсія середнього серії вимірювань	46
1.9. Оцінювання випадкової і сумарної помилки опосередкованих вимірювань .....	49
1.10. Перевірка однорідності результатів вимірювань .....	52
Контрольні запитання та завдання .....	53
<b>РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ПЕРЕВІРКИ СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ ПРИ ОБРОБЦІ РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ</b> .....	55
2.1. Статистична гіпотеза .....	55
2.2. Помилки першого і другого роду .....	56
2.3. Статистичний критерій .....	56
2.4. Критична область. Область прийняття гіпотези .....	57
2.5. Відшукання правосторонньої критичної області .....	58
2.6. Потужність критерію .....	59
2.7. Порівняння двох дисперсій нормальних генеральних сукупностей. Розподіл Фішера .....	60
2.8. Визначення дисперсії за поточними вимірами. Порівняння декількох дисперсій .....	64
2.9. Порівняння двох середніх. Розрахунок середньозваженого значення ...	67
2.10. Порівняння вибіркового розподілу та розподілу генеральної сукупності. Критерії згоди Пірсона і Колмогорова .....	69
Контрольні запитання та завдання.....	71
<b>РОЗДІЛ 3. ДОВІРЧИЙ ІНТЕРВАЛ І ДОВІРЧА ЙМОВІРНІСТЬ ПРИ ОБРОБЦІ РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ</b> .....	73
3.1. Довірчий інтервал і довірча ймовірність. Рівень значущості .....	73

3.2. Побудова довірчого інтервалу для математичного сподівання безпосередньо вимірюваної величини. Розподіл Стюдента .....	75
3.3. Оцінювання дисперсії нормально розподіленої випадкової величини ...	77
3.4. Оцінка довірчого інтервалу для шуканої функції .....	79
Контрольні запитання та завдання .....	81
<b>РОЗДІЛ 4. ОСНОВИ КОРЕЛЯЦІЙНОГО АНАЛІЗУ</b> .....	82
4.1. Системи випадкових величин. Функція і щільність розподілу системи двох випадкових величин. Умовні закони розподілу .....	82
4.2. Стохастичний зв'язок. Коваріація. Коефіцієнт кореляції. Регресія .....	84
4.3. Вибіркове рівняння регресії .....	88
4.4. Вибірковий коефіцієнт кореляції. Перевірка гіпотези про відсутність кореляції .....	91
4.5. Метод множинної кореляції .....	93
Контрольні запитання та завдання .....	95
<b>РОЗДІЛ 5. ОСНОВИ РЕГРЕСІЙНОГО АНАЛІЗУ</b> .....	97
5.1. Наближена регресія. Метод найменших квадратів .....	97
5.2. Лінійна регресія від одного параметра .....	99
5.3. Регресійний аналіз .....	100
5.4. Оцінка тісноти нелінійної зв'язку .....	104
5.5. Апроксимація. Параболічна регресія .....	104
5.6. Знаходження параметрів відбіркового рівняння прямої лінійної регресії за групованими даними .....	106
Контрольні запитання та завдання .....	107
<b>РОЗДІЛ 6. ОСНОВИ ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ</b> .....	109
6.1. Задачі дисперсійного аналізу. Однофакторний дисперсійний аналіз ....	110
6.2. Двофакторний дисперсійний аналіз .....	113
6.3. Планування експерименту при дисперсійному аналізі .....	117
Контрольні запитання та завдання .....	120
<b>РОЗДІЛ 7. ОСНОВИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУВАННЯ ФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ</b> .....	122
7.1. Постановка задачі при плануванні екстремальних експериментів .....	122
7.2. Повний факторний експеримент типу $2^2$ : матриця планування, розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії .....	123
7.3. Матриця планування повного факторного експерименту типу $2^3$ .....	126
7.4. Перевірка значення коефіцієнтів і адекватності рівняння регресії, отриманих при обробці результатів повного факторного експерименту $2^2$ та $2^3$ .....	127
7.5. Дробовий факторний експеримент. Плани типу $2^{k-1}$ .....	131
7.6. Оптимізація методом крутого сходження по поверхні відгуку .....	134
7.7. Опис функції відгуку в області, близькій до екстремуму. Композиційні плани Бокса-Уілсона .....	136
7.8. Ортогональні плани другого порядку. Розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії .....	139

7.9. Метод послідовного симплекс-планування .....	142
Контрольні запитання та завдання .....	146
<b>АЛФАВІТНИЙ ПОКАЗЧИК.....</b>	<b>149</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....</b>	<b>151</b>
<b>ДОДАТКИ.....</b>	<b>152</b>

## ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник призначений для вивчення теоретичних основ обробки даних та планування експерименту здобувачами вищої освіти рівнів доктор філософії та магістр, що навчаються за спеціальністю: 172 “Електронні комунікації та радіотехніка”. Цей посібник також буде корисним і для здобувачів вказаних рівнів вищої освіти, які навчаються за спеціальністю 122 “Комп’ютерні науки”.

Розглянуто основні поняття математичної статистики: генеральна сукупність і випадкова вибірка, оцінки генеральних параметрів і їх властивості, методи перевірки статистичних гіпотез і побудова довірчих інтервалів для генерального середнього та дисперсії.

Для отримання оцінок генеральних параметрів використовується метод максимальної правдоподібності. Вказані способи оцінки випадкової і сумарної похибки непрямих вимірювань. Представлені методи перевірки однорідності двох і більше вибірових дисперсій, порівняння середніх і розрахунку середньозваженого значення величини.

Розглянуті основні методи кореляційного і регресійного аналізів, які широко застосовуваних при обробці результатів вимірювань. Введено поняття про стохастичний зв’язок між випадковими величинами і коефіцієнт кореляції, що характеризує тісноту лінійної залежності між ними. Коефіцієнти поліноміальних залежностей визначаються методом найменших квадратів, який розглядається як окремий випадок методу максимальної правдоподібності при нормальному розподілі випадкових величин. Використання поліноміальних моделей дозволяє поліпшувати апроксимацію експериментальних даних, підвищуючи порядок поліномів.

Представлені основи дисперсійного аналізу, що використовує властивість адитивності дисперсії досліджуваної випадкової величини, що дає можливість розкласти її на окремі складові, обумовлені впливом незалежних факторів або їх взаємодій.

Викладено методи планування експерименту з використанням оптимізаційних моделей. Показано, що вибір плану експерименту визначається завданням дослідження.

Розглянуті лінійні моделі, які використовуються в методі крутого сходження по поверхні відгуку. Відмічено, що для досягнення екстремуму може бути також використаний метод симплекс-планування. Для опису області, близької до екстремуму, запропоновано застосовувати композиційні плани другого порядку. Розглянуто основні положення та методи обробки результатів для однофакторного та двофакторного дисперсійного аналізів; метод планування експерименту за схемою латинського квадрату для трьохфакторного аналізу.

Викладений в посібнику матеріал умовно систематизовано за темами відповідного силабусу навчальної дисципліни “Основи обробки даних та планування експерименту” та являє собою теоретичну основу для розгляду

практичних питань і завдань, що виникають при плануванні, проведенні експериментів та обробці отриманих при цьому результатів.

## ВСТУП

Завданням усіх наукових експериментів, які проводяться для всебічного дослідження природних явищ із метою подальшого втілення їх специфічних аспектів у технічні пристрої, у тому числі і сучасні електронні комунікаційні засоби, є всебічне вивчення будь-яких властивостей реального об'єкта досліджень для створення його адекватної моделі. Для цього проводяться вимірювання (або оцінювання), як правило, низки фізичних величин із подальшою обробкою отриманих експериментальних даних. Експериментальні результати завжди містять похибки, пов'язані з тим, що будь-які вимірювання супроводжуються дією і взаємодією великої кількості різноманітних і не завжди всебічно прогнозованих факторів. Кінцевою метою будь-якого дослідження є не тільки уявлення найкращої (оптимальної), на думку вченого-експериментатора, оцінки вимірюваної величини, але і максимально достовірної оцінки похибки вимірювань.

Будь-який вимірювальний пристрій фізичних величин можна розглядати у вигляді об'єкта (рис. В.1), для якого  $x_1, \dots, x_k$  – вхідні вимірювані (як правило контрольовані і регульовані) параметри;  $w_1, \dots, w_L$  – неконтрольовані параметри, які змінюються випадковим чином (так званий “шум” досліджуваного об'єкта);  $y_1, \dots, y_m$  – вихідні параметри.

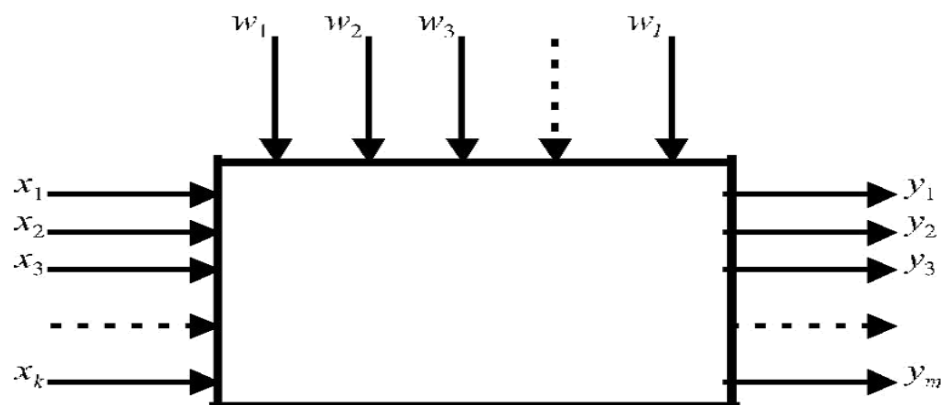


Рис. В.1. - Структурна схема експериментально досліджуваного об'єкта

Параметри  $x_1, \dots, x_k$  називають основними, оскільки вони визначають умови експерименту. Результат обробки залежить не тільки від основних параметрів, а й від “шуму” об'єкта. Його вплив носить випадковий характер. Тому природно розглядати і результат експерименту, і похибки вимірювання як випадкові величини, які описуються ймовірнісними законами, і застосовувати для обліку дії випадкових чинників теорію ймовірностей.

Вплив випадкових помилок на результат вимірювання можна кількісно оцінити за допомогою математичної статистики – науки, що займається застосуванням ймовірнісних методів для вирішення завдань у різних областях наук, зокрема в задачах обробки результатів експериментів.

Сучасна електронна промисловість випускає понад тисячу різних найменувань цифрових електронних комунікаційних виробів, вченими розробляються сотні нових технологічних процесів створення цих засобів. Експериментальне вивчення механізмів протікання всіх цих процесів неможливе. Але задачі оптимізації та синергетичного управління цими процесами необхідно вирішувати. Для цих цілей успішно застосовуються експериментально-статистичні методи, за допомогою яких складається математична модель об'єкта і при невідомому апіорі механізмі протікання в об'єкті процесів вивчається залежність відгуку системи на зміни основних параметрів.

Математичною моделлю об'єкта служить функція відгуку, що зв'язує вихідний параметр, який характеризує результати експерименту, зі змінними, котрі варіюють при проведенні дослідів:  $y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k)$ .

Незалежні змінні  $x_1, x_2, \dots, x_k$  називають *факторами*, простір з координатами  $x_1, x_2, \dots, x_k$  – *факторний простір*, а геометричне зображення функції відгуку в факторному просторі – *поверхнею відгуку*.

Ефективність експериментів в основному залежить від методів їх проведення. Пасивний експеримент є традиційним методом, коли ставиться велика серія дослідів із почерговим варіюванням кожної із змінних. Обробка дослідних даних проводиться статистичними методами. Такий підхід дозволяє оптимізувати процедуру обробки і аналізу експерименту.

Використовуючи активний (спланований) експеримент, можна досягти значно більшого – оптимізувати і стадію постановки експерименту. *Під плануванням експерименту розуміють оптимальне керування експериментом в умовах неповної інформації про механізм процесу.*

Розвиток цієї концепції пов'язаний із роботами Р. Фішера, головна ідея яких полягає в роздільній оцінці ефектів у багатфакторній ситуації. Широко застосовується при плануванні експерименту методологія пошуку оптимальних умов його організації, теоретичні основи якої почали свій розвиток із фундаментальних робіт відомих вчених Бокса та Уїлсона.

## РОЗДІЛ 1. ОСНОВИ АНАЛІЗУ РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ

### 1.1 Випадкові величини. Класифікація помилок вимірювань.

#### Абсолютна і відносна похибка

Під *випадковою величиною* розуміють таку величину, яка в результаті випробувань приймає значення, і, виходячи з умов проведення досліджень, *передбачити її значення принципово не можливо*.

Випадкова величина має цілий набір допустимих значень, але в результаті кожного окремого досліду приймає лише якесь конкретне (одне з можливих значень). На відміну від не випадкових величин, що змінюють своє значення тільки при зміні умов досліду, випадкова величина може набувати різних значень навіть при незмінному комплексі основних факторів.

Розрізняють *дискретні і неперервні* випадкові величини. Із можливими значеннями дискретних величин можна заздалегідь визначитись. Значення неперервної випадкової величини не можуть бути заздалегідь передбачені, але вони знаходяться у деякому інтервалі значень. Набір допустимих значень сам по собі не завжди у повному обсязі характеризує випадкову величину. Щоб її повністю охарактеризувати, необхідно не тільки вказати, які значення вона може приймати, але і як часто це відбувається в процесі проведення досліджень.

Акцентуємо особливу увагу на тому, що кожен результат вимірювання – *випадкова величина*. Відхилення результату реального вимірювання від істинного значення величини називається *помилкою вимірювання*. (“Помилка” в науковому сенсі означає *неминучу похибку*, яка супроводжує всі виміри). Жодну фізичну величину (напругу, силу струму, частоту сигналу, довжину, час, температуру тощо) неможливо виміряти із чіткою і повною визначеністю. Найкращий результат, на який можна сподіватися, – це звести помилки вимірювань (оцінювань значень результату вимірювання) до можливого мінімуму і надійно розрахувати їх величини.

Розрізняють помилки вимірювань трьох видів:

1. *Грубі помилки* виникають внаслідок порушення основних (базових) умов вимірювання. Результат, який містить грубу помилку, суттєво відрізняється за величиною від результатів інших вимірів. На цьому ґрунтуються основні підходи для виключення грубих помилок.

2. *Систематичні помилки* постійні (незмінні) при усіх вимірюваннях або змінюються за певним законом. Їх виявлення вимагає проведення спеціальних досліджень. Такі помилки завжди прагнуть звести до мінімуму, а при необхідності вони зазвичай враховуються введенням відповідних поправок у отримані результати вимірювань.

3. *Випадкові помилки* – помилки вимірювання, що залишаються після усунення всіх виявлених грубих і систематичних помилок. Вони викликані великою кількістю таких можливих факторів, ефекти дії яких настільки незначні, що їх не можна виділити окремо (але це можливо при використанні засобів

вимірювання відповідних класів). При цьому розподіл випадкових помилок зазвичай симетричний відносно «нульової осі» (помилки, протилежні за знаком, але рівні за абсолютною величиною, зустрічаються досить часто).

Коректний спосіб представлення результатів будь-якого вимірювання полягає в тому, що експериментатор вказує свою найкращу оцінку вимірюваної величини і інтервал, в якому вона лежить. Щоб охарактеризувати відхилення наближеного значення деякої величини від її справжнього значення, вводять поняття абсолютної і відносної похибок, відволікаючись від конкретного джерела похибок.

Розглянемо більш детально це теоретичне положення.

Нехай  $A$  – точне значення досліджуваної величини,  $a$  – її найкраща експериментальна оцінка (зазвичай середнє арифметичне значення результатів усіх проведених вимірювань).

Під *абсолютною помилкою* (або *похибкою*) величини  $a$  розуміють абсолютне значення різниці між цими значеннями:

$$\delta = |A - a| = |\Delta a|, \quad (1.1)$$

або

$$A = a \pm \delta. \quad (1.2)$$

Тобто, *гранична абсолютна похибка* визначається, як

$$\delta_{\text{гр}} \geq |A - a|, \quad (1.3)$$

або

$$\delta_{\text{гр}} \geq \delta. \quad (1.4)$$

При цьому

$$(a + \delta_{\text{гр}}) \geq A \quad \text{та} \quad A \geq (a - \delta_{\text{гр}}), \quad (1.5)$$

тобто, справжнє значення величини, яку необхідно знайти, завідомо буде лежати у межах

$$a - \delta_{\text{гр}} \leq A \leq a + \delta_{\text{гр}}. \quad (1.6)$$

Для характеристики *відносної точності вимірювань*, яка залежить від значення вимірюваної величини, вводиться *відносна похибка*:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{|A|}, \quad (1.7)$$

$$\varepsilon|A| = \delta. \quad (1.8)$$

За аналогією з абсолютною похибкою вводиться також поняття *граничної відносної похибки*:

$$\varepsilon_{\text{гр}} \geq \frac{\delta}{|A|}, \quad (1.9)$$

або

$$\varepsilon_{\text{гр}}|A| \geq \delta. \quad (1.10)$$

Тоді

$$\varepsilon_{\text{гр}} = \frac{\delta_{\text{гр}}}{|A|}, \quad (1.11)$$

або

$$\varepsilon_{\text{гр}} |A| = \delta_{\text{гр}}. \quad (1.12)$$

У наведені вище формули входить невідома величина  $A$ , що робить неможливим чисельне визначення похибки. Для її визначення практично роблять таким чином: так як у більшості випадків абсолютна похибка набагато менша самої вимірюваної величини, тобто  $\delta \ll |A|$  та  $\delta \ll |a|$ . Тоді звідси  $A \approx a$ , і для таких досить точних вимірювань можна записати:

$$\varepsilon|a| \approx \delta, \quad \text{та} \quad \varepsilon_{\text{гр}}|a| \approx \delta_{\text{гр}}.$$

Тоді, з урахуванням зроблених раніше визначень абсолютної і відносної похибок, отримуємо

$$A = a \pm \delta = a \left(1 \pm \frac{\delta}{a}\right) \approx a(1 \pm \varepsilon), \quad \text{або} \quad A \approx a(1 \pm \varepsilon_{\text{гр}}). \quad (1.13)$$

Відносна похибка на відміну від абсолютної є величиною безрозмірною і для більшості вимірювань являє собою мале число, тому її часто приводять у відсотках.

## 1.2. Оцінка похибок функцій наближених аргументів

Вимірювання поділяють на *прямі* і *непрямі*. У випадку прямих вимірювань величина визначається безпосередньо, а при непрямих - вона задається деякою функцією від безпосередньо вимірюваних величин.

Переважає більшість параметрів процесів, особливо в електронних комунікаціях, визначаються у результаті непрямих вимірювань, похибка яких залежить від похибок безпосередньо вимірюваних величин, які в подальшому використовуються в розрахунках.

Припустимо, що деякі величини  $X_1, X_2, \dots, X_n$  отримані в результаті вимірювань із абсолютними похибками  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  і виміряні значення використовуються для обчислення функції:

$$Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (1.14)$$

Вочевидь, що похибки наближених аргументів повинні привести до похибки в значенні функції, яку шукаємо. Це можна записати в наступному вигляді:

$$Z + \Delta z = f(X_1 + \Delta x_1, X_2 + \Delta x_2, \dots, X_n + \Delta x_n), \quad (1.15)$$

де  $\Delta z$  – абсолютна похибка функції  $Z$ .

Розкладемо праву частину рівняння (1.15) в ряд Тейлора:

$$Z + \Delta z = f(X_1 + X_2, \dots, X_n) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \Delta x_i^2 + \dots \quad (1.16)$$

Якщо припустити, що вимірювання достатньо точні, так що величини  $\Delta x_i$  достатньо малі в порівнянні зі значеннями аргументів  $X_i$ , то у виразі (1.16) можна відкинути всі члени, що містять абсолютні похибки аргументів у другому та вищих ступенях.

Тоді

$$Z + \Delta z \approx f(X_1, X_2, \dots, X_n) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Delta x_i. \quad (1.17)$$

З урахуванням (1.14) отримуємо вираз для обчислення абсолютної похибки функції  $Z$ .

$$\Delta z \approx \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Delta x_i. \quad (1.18)$$

Вираз для граничної абсолютної похибки функції  $n$  змінних записується в наступному вигляді:

$$\delta_{\text{гр}} \approx \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \delta_i, \quad (1.19)$$

тобто, гранична абсолютна похибка функції незалежних змінних дорівнює сумі частинних похідних цієї функції, помножених на відповідні абсолютні похибки аргументів.

У практичних розрахунках значення частинних похідних беруть у точках, відповідних вимірювань значення  $x_i$  або середнього арифметичного значення  $x_i$ , якщо проводились серії вимірювань.

У математичній статистиці приймається такий підхід, якщо абсолютні похибки аргументів незалежні і випадкові, то найкращою оцінкою похибки функції (1.14) буде квадратична сума її частинних похідних, помножених на відповідні похибки аргументів. Математичний вираз для граничної абсолютної похибки функції  $n$  змінних має вид:

$$\delta_{\text{гр}} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2}. \quad (1.20)$$

Формули (1.19) і (1.20) є основними для практичних розрахунків. Із них можна вивести формули для розрахунків похибок непрямих вимірювань для можливих випадків, використання яких на практиці буває набагато зручнішим:

1. *Виміряна величина множиться на точне число.* Якщо величина  $X$  виміряна з похибкою  $\Delta x$  і використовується для обчислення  $Z = BX$ , в якому  $B$  – точне число, то абсолютна похибка  $Z$  дорівнює

$$|\Delta z| = |B| \cdot |\Delta x|. \quad (1.21)$$

2. *Похибка в сумах і різницях.* Якщо величини  $X_1, X_2, \dots, X_n$  виміряні з малими похибками  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  і виміряні значення використовуються для обчислення функції  $Z = (X_1 + \dots + X_m) - (X_k + \dots + X_n)$ , а похибки аргументів незалежні і випадкові, то похибка  $Z$  дорівнює квадратичній сумі вихідних похибок

$$|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2 + (\Delta x_k)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}; \quad (1.22)$$

у будь-якому випадку вона ніколи не більше, ніж їх звичайна сума

$$|\Delta z| \leq |\Delta x_1| + \dots + |\Delta x_m| + |\Delta x_k| + \dots + |\Delta x_n|. \quad (1.23)$$

3. *Похибки в добутках і частках.* Якщо величини  $X_1, X_2, \dots, X_n$  виміряні з малими похибками  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  і виміряні значення використовуються для обчислення функції

$$Z = \frac{X_1 \times \dots \times X_m}{X_k \times \dots \times X_n},$$

а похибки аргументів незалежні і випадкові, то відносна похибка  $Z$  дорівнює квадратичній сумі вихідних відносних похибок

$$\frac{|\Delta z|}{|z|} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta x_m}{x_m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_k}{x_k}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta x_n}{x_n}\right)^2}, \quad (1.24)$$

у будь-якому випадку вона ніколи не більше, ніж їх звичайна сума

$$\left| \frac{\Delta z}{z} \right| \leq \left| \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \dots + \left| \frac{\Delta x_m}{x_m} \right| + \left| \frac{\Delta x_k}{x_k} \right| + \dots + \left| \frac{\Delta x_n}{x_n} \right|. \quad (1.25)$$

4. *Похибка в довільній функції однієї змінної.* Якщо величина  $X$  виміряна з похибкою  $\Delta x$  і використовується для обчислення функції  $Z = f(X)$ , то абсолютна похибка  $Z$  дорівнює

$$|\Delta z| = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| |\Delta x|. \quad (1.26)$$

5. *Похибка в степеневій функції.* Якщо величина  $X$  виміряна з похибкою  $\Delta x$  і використовується для обчислення ступеневої функції  $Z = X^m$  (де  $m$  – фіксоване відоме число), відносна похибка  $Z$  в  $m$  разів більша, ніж  $X$

$$\left| \frac{\Delta z}{z} \right| = |m| \times \frac{\Delta x}{|x|}. \quad (1.27)$$

Користуючись формулами (1.21) – (1.27), можна практично вирішити всі можливі завдання обчислення похибок у разі непрямих вимірювань. Будь-який розрахунок може бути представлений як послідовність певних кроків. Кожен із цих кроків включає один із наступних видів операцій, а саме:

- 1) Знаходження сум і різниць.
- 2) Розрахунок добутків і часток.
- 3) Обчислення функції однієї змінної (даний метод називають “крок за кроком”).

Однак у разі, коли рівняння для обчислення функції  $Z$  включає одну і ту ж величину більш ніж один раз (наприклад, двічі  $X_1$ ), то деякі з помилок можуть

взаємно компенсуватися і в результаті розрахунків помилки методом “крок за кроком” може привести до переоцінки кінцевої похибки.

Тому в подібних випадках рекомендується користуватися загальними формулами (1.19) і (1.20).

### 1.3. Розподіл випадкових величин. Функція розподілу і щільність розподілу випадкової величини

Нехай дискретна фізична величина  $X$  може приймати в результаті експерименту такі значення  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Відношення числа експериментальних дослідів  $m_i$ , у результаті яких величина  $X$  приймає значення  $x_i$ , до загального числа проведених дослідів  $n$  називається *частотою появи події*  $X = x_i$ . Частота ( $m_i/n$ ) є випадковою величиною і змінюється в залежності від кількості проведених дослідів. Однак при великій кількості дослідів (коли  $n \rightarrow \infty$ ) вона стабілізується біля деякого значення  $p_i$ , яке називають *ймовірністю події*  $X = x_i$  (статистичне визначення):

$$p_i = P(X = x_i) \approx (m_i/n). \quad (1.28)$$

Вочевидь, що сума ймовірностей реалізації всіх можливих значень випадкової величини дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Дискретну випадкову величину можна повністю задати *ймовірнісним рядом*, вказавши ймовірність  $p_i$  для кожного значення  $x_i$ :

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_n$
$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\dots$	$p_n$

*Законом розподілу* випадкової величини називають будь-яке відношення, яке встановлює зв'язок між можливим значенням випадкової величини і відповідним їй значенням ймовірності.

Ймовірнісний ряд є одним з видів законів розподілу випадкової величини.

Розподіл неперервної випадкової величини неможливо задати ймовірнісним рядом, оскільки кількість значень, яке вона може приймати, таке велике, що для більшості з них ймовірність прийняття цих значень дорівнює нулю.

Тому для неперервних фізичних величин розглядається можливість того, що в результаті досліду значення випадкової величини потрапить у певний

інтервал. Зручно користуватися ймовірністю події  $X \leq x$ , де  $x$  – довільне дійсне число.

$$P(X \leq x) = F(x). \quad (1.30)$$

Ця ймовірність є функцією від  $x$  і називається *функцією розподілу* випадкової величини  $X$ . Вигляд розподілення функції можна задати розподілом як неперервної, так і дискретної випадкової величини (рис. 1.1).  $F(x)$  є неспадною

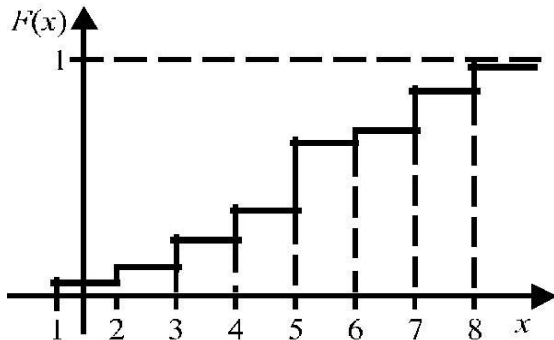


Рис. 1.1 – Функція розподілу дискретної випадкової величини

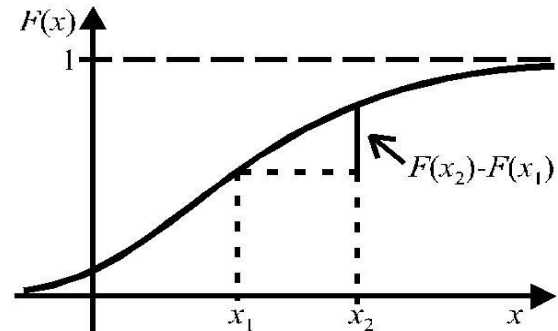


Рис. 1.2 – Функція розподілу неперервної випадкової величини

функцією, тобто якщо  $x_1 \leq x_2$ , то  $F(x_1) \leq F(x_2)$  (рис. 1.2). Ордината кривої  $F(x)$ , що відповідає точці  $x_i$ , являє собою ймовірність того, що випадкова величина при випробуванні буде такою, що  $X \leq x_i$ .

Тоді ймовірність того, що значення випадкової величини буде лежати в інтервалі від  $x_1$  до  $x_2$ , дорівнює:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1). \quad (1.31)$$

Значення  $F(x)$  при граничних значеннях аргументу дорівнює:

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1.$$

Слід зазначити, що функція розподілу дискретної випадкової величини завжди є розривна функція. Скачки відходять у точках, що відповідають можливим значенням цієї величини, та є рівноможливими для усіх значень.

Для неперервної випадкової величини найбільш часто використовується похідна функції розподілу – *щільність розподілу* випадкової величини  $X$ .

Якщо функція  $F(x)$  неперервна і диференційована, то

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (1.32)$$

Задання функції  $f(x)$  також повністю визначає випадкову величину.

Щільність розподілу є невід'ємною функцією (рис. 1.3).

Площа, обмежена віссю  $x$ , прямими  $x = x_1$  і  $x = x_2$  та кривою щільності розподілу, дорівнює ймовірності того, що випадкова величина прийме значення з інтервалу  $(x_1 \div x_2)$ :

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1). \quad (1.33)$$

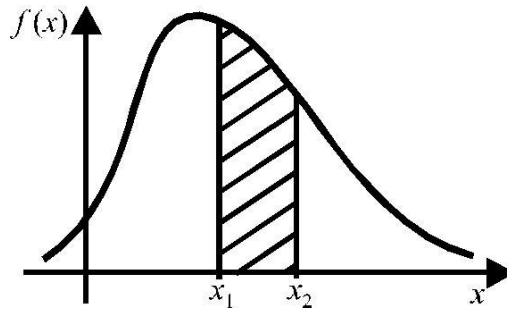


Рис. 1.3 – Щільність розподілу неперервної випадкової величини

Тоді

$$F(x) = P(-\infty \leq X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (1.34)$$

Оскільки потрапляння випадкової величини в інтервал  $-\infty \leq X \leq +\infty$  є подія вірогідна, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \quad (1.35)$$

### **Нормальне і стандартне розподілення випадкової величини. Функція Лапласа. Питання про абсолютне відхилення**

Неперервна випадкова величина  $X$  називається розподіленою за нормальним законом, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - M(X))^2}{2\sigma_x^2}\right), \quad (1.36)$$

де  $M(X)$  і  $\sigma_x^2$  – математичне сподівання і дисперсія випадкової величини  $X$ .

Функція розподілу розраховується згідно виразу:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(x - M(X))^2}{2\sigma_x^2}\right) dx. \quad (1.37)$$

Нормальний розподіл теоретично розроблений найбільш повно і найчастіше використовується на практиці.

В основному велика кількість подій відбувається випадково внаслідок впливу на них значної кількості незалежних (або слабо залежних) збурень, і у таких явищ закон розподілу близький до нормального.

Встановлено, що *нормальний розподіл* містить мінімум інформації про випадкову величину в порівнянні з будь-яким іншим розподілом із тією самою дисперсією.

Отже, заміна деякого розподілу еквівалентним нормальним розподілом не може призвести до переоцінки точності спостережень, що широко використовується на практиці.

Графік щільності нормального розподілу називається *нормальною кривою*, або *кривою Гауса* (рис.1.4).

Нормальний розподіл нормованої випадкової величини називається *стандартним*. Функція стандартного розподілу має такий вигляд:

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx. \quad (1.38)$$

Графік функції  $F_0(x)$  стандартного розподілу представлений на рис. 1.5.

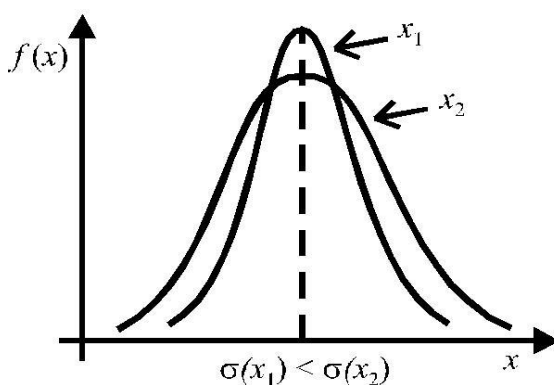


Рис. 1.4 – Крива Гауса

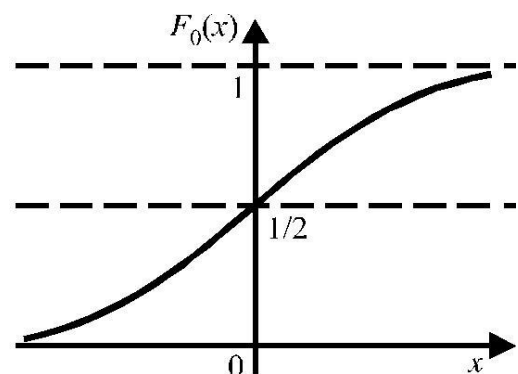


Рис. 1.5 – Графік функції  $F_0(x)$  стандартного розподілу

Ймовірність того, що значення нормованої випадкової величини будуть лежати в інтервалі від  $X_{01}$  до  $X_{02}$ , дорівнює

$$P(x_{01} \leq X_0 \leq x_{02}) = F_0(x_{02}) - F_0(x_{01}). \quad (1.39)$$

Функція

$$\Phi(x) = F_0(x) - \frac{1}{2} \quad (1.40)$$

називається *функцією Лапласа*:

$$\Phi(x) = F_0(x) - \frac{1}{2} = F_0(x) - F_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx. \quad (1.41)$$

Значення функції Лапласа, як правило, табульовані (див. додатки).

Функція Лапласа є непарною функцією, тобто  $\Phi(x) = -\Phi(-x)$ , таким чином таблиця значень  $\Phi(x)$  складена лише для  $x > 0$ .

Тоді для нормованої випадкової величини маємо:

$$\begin{aligned} P(x_{01} \leq X_0 \leq x_{02}) &= F_0(x_{02}) - F_0(x_{01}) = \\ &= \Phi(x_{02}) - \frac{1}{2} - \left(\Phi(x_{01}) - \frac{1}{2}\right) = \Phi(x_{02}) - \Phi(x_{01}). \end{aligned} \quad (1.42)$$

А у загальному випадку (1.40) представимо

$$\begin{aligned} P(x_{01} \leq X_0 \leq x_{02}) &= P\left(\frac{x_1 - M(X)}{\sigma_x} \leq X_0 \leq \frac{x_2 - M(X)}{\sigma_x}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{x_2 - M(X)}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - M(X)}{\sigma_x}\right). \end{aligned}$$

У багатьох практичних завданнях  $x_1$  і  $x_2$  симетричні відносно математичного сподівання, зокрема в задачі про абсолютне відхилення. *Абсолютним відхиленням* є величина, що дорівнює

$$|\Delta x| = |x - M(X)|.$$

Потрібно знайти ймовірність того, що абсолютне відхилення випадкової величини не перевищить деякого заданого числа  $\delta$ :

$$P(|\Delta x| \leq \delta) = P(M(X) - \delta \leq X \leq M(X) + \delta). \quad (1.43)$$

Тоді для нормально розподіленої випадкової величини з параметрами  $M(X)$  та  $\sigma_x$  справедливе рівняння

$$P(|\Delta x| \leq \delta) = P(M(X) - \delta \leq X \leq M(X) + \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_x}\right). \quad (1.44)$$

Зокрема, для нормованої випадкової величини

$$P(|\Delta x_0| \leq \delta) = P(-\delta \leq X_0 \leq +\delta) = 2\Phi(\delta). \quad (1.45)$$

Позначивши  $\frac{\delta}{\sigma_x} = t$ , з виразу (1.44) отримуємо

$$P(|\Delta x| \leq t\sigma_x) = 2\Phi(t). \quad (1.46)$$

Звідки

$$\begin{aligned} P(|\Delta x| \leq \sigma_x) &= 2\Phi(1) = 0.6826, \\ P(|\Delta x| \leq 2\sigma_x) &= 2\Phi(2) = 0.9544, \\ P(|\Delta x| \leq 3\sigma_x) &= 2\Phi(3) = 0.9973 \end{aligned}$$

Таким чином, відхилення що більше, ніж потрійний стандарт (потрійне стандартне відхилення), практично неможливе. На практиці часто величини  $2\sigma_x$  (або  $3\sigma_x$ ) вважають максимально допустимої помилкою і *відкидають результати вимірювань*, для яких величина відхилення перевищує це значення, так як вважається що вони містять грубі помилки.

Нормальному розподілу також притаманна властивість *лінійності*: якщо незалежні випадкові величини  $X_1$  і  $X_2$  нормально розподілені, то для довільних чисел  $\alpha$  і  $\beta$  величина

$$Y = \alpha X_1 + \beta X_2, \quad (1.47)$$

також нормально розподілена, причому з властивостей математичного сподівання та дисперсії випливає, що

$$M(Y) = \alpha M(X_1) + \beta M(X_2), \quad (1.48)$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{\alpha^2 \sigma^2(X_1) + \beta^2 \sigma^2(X_2)}. \quad (1.49)$$

#### 1.4. Числові характеристики випадкової величини. Властивості математичного сподівання і дисперсії. Нормована випадкова величина. Квантилі

Замість повного визначення випадкової величини у вигляді законів розподілу ймовірностей у прикладних задачах обробки результатів експерименту її часто визначають за допомогою числових характеристик – дійсних чисел. Вони виражають характерні особливості випадкової величини та називають *моментами випадкової величини*.

Найчастіше в додатках до операцій математичної статистики використовують математичне сподівання (характеристику положення значень випадкової величини на числовій осі) і дисперсію (або середнє квадратичне відхилення), що визначає характер розкиду значень випадкової величини.

*Математичне сподівання* (генеральне середнє) випадкової величини (*початковий момент першого порядку*) прийнято позначати  $M(X)$ ,  $m_x$  або  $m$ . Математичне сподівання визначається для дискретної і неперервної випадкової величини відповідно таким чином

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad (1.50)$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (1.51)$$

Для випадкових величин математичне сподівання є теоретичною величиною, до якої наближається середнє значення  $x$  випадкової величини  $X$  у разі проведення великої кількості експериментальних випробувань.

Властивості математичного сподівання:

1. Якщо  $C$  – постійне число (невипадкова величина), то

$$M(C) = C, \quad (1.52)$$

$$M(CX) = C M(X). \quad (1.53)$$

2. Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань цих випадкових величин:

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n). \quad (1.54)$$

3. Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку математичних сподівань множників:

$$M(X_1 X_2 \dots X_n) = M(X_1) M(X_2) \dots M(X_n). \quad (1.55)$$

Випадкові величини називаються *незалежними*, якщо кожна з них має самостійний розподіл, який не залежить від можливих значень інших величин.

4. Якщо випадкова величина  $Z$  є деякою нелінійною функцією  $n$  незалежних випадкових величин

$$Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

яка незначно змінюється в невеликих інтервалах зміни аргументів, то

$$M(Z) = f(M(X_1), M(X_2), \dots, M(X_n)). \quad (1.56)$$

*Дисперсією* (другим центральним моментом) випадкової величини називається *математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання*, тобто

$$D(X) = M([X - M(X)]^2). \quad (1.57)$$

Для дискретної і неперервної випадкових величин дисперсія визначається відповідно наступним чином:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - M(X)]^2 p_i, \quad (1.58)$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx. \quad (1.59)$$

Передбачаються і інші позначення для дисперсії, а саме:  $D_x$ ,  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma^2(X)$ .

*Дисперсія* відіграє важливу роль при статистичних розрахунках і являє собою *міру розсіювання значень  $x$  близько до їх математичного сподівання*. Корінь квадратний із другого центрального моменту називається *середнім квадратичним відхиленням (стандартним відхиленням, або стандартом)*:

$$\sigma_x = \sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (1.60)$$

Розглянемо властивості дисперсії, а саме:

1. Якщо  $C$  – постійне число (невипадкова величина), то

$$D(C) = \sigma^2(C) = 0,$$

$$D(CX) = \sigma^2(CX) = C^2\sigma^2(X). \quad (1.61)$$

2. Дисперсія випадкової величини дорівнює математичному сподіванню квадрата випадкової величини мінус квадрат її математичного сподівання:

$$D(X) = \sigma^2(X) = M(X^2) - M(X)^2. \quad (1.62)$$

3. Дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n). \quad (1.63)$$

Вираз (1.63) називають *законом додавання дисперсій*.

Слід зазначити, що закон додавання справедливий для дисперсій випадкових величин  $D(X)$ , але не для середніх квадратичних відхилень  $\sigma(X)$ .

4. Якщо випадкова величина  $Z$  є нелінійною функцією  $n$  незалежних випадкових величин

$$Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

яка незначно змінюється в невеликих інтервалах зміни аргументів, то її дисперсія приблизно дорівнює

$$D(Z) = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^2 D(X_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^2 D(X_2) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n}\right)^2 D(X_n). \quad (1.64)$$

Вираз (1.64) називають *законом накопичення помилок*, і він часто використовується в теорії помилок для визначення випадкової помилки функції за значеннями випадкових помилок аргументів.

Третій центральний момент, розділений на  $\sigma_x^3$ , називають *коефіцієнтом асиметрії* щільності розподілу:

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} = \frac{1}{\sigma_x^3} \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^3 f(x) dx. \quad (1.65)$$

На рис.1.6 наведені приклади щільності розподілу з однаковими математичним сподіванням і дисперсією, але з різними коефіцієнтами асиметрії.

Якщо у випадкової величини  $X$  існують перший і другий моменти, то можна побудувати *нормовану випадкову величину*:

$$X_0 = \frac{X - M(X)}{\sigma(X)}, \quad (1.66)$$

для якої

$$M(X_0) = 0, \quad D(X_0) = 1. \quad (1.67)$$

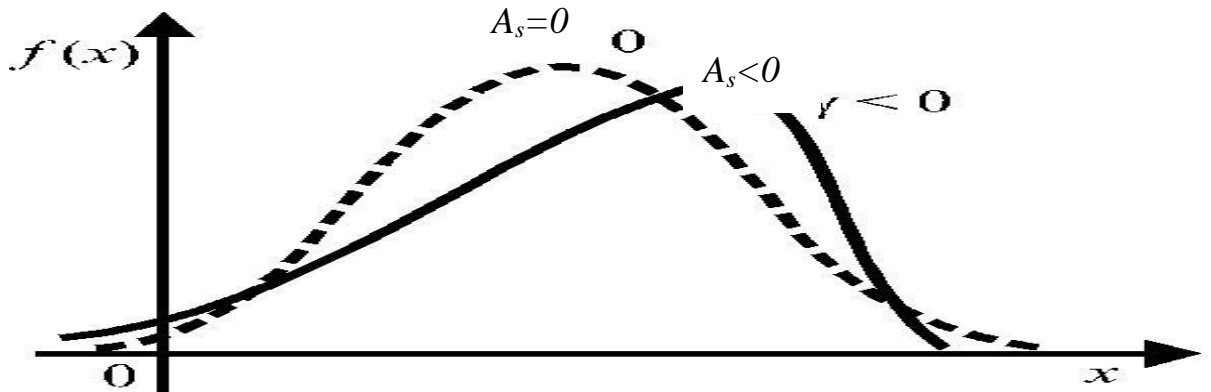


Рис. 1.6 – Щільність розподілу з нульовим і ненульовим коефіцієнтами асиметрії

Доведемо, що для нормованої випадкової величини справедливі твердження:

$$M(X_0) = M\left(\frac{X - M(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{M(X - M(X))}{\sigma(X)} = \frac{1}{\sigma(X)}(M(X) - M(X)) = 0.$$

$$D(X_0) = D\left(\frac{X - M(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma_x^2} D(X - M(X)) = \frac{1}{\sigma_x^2} (D(X) - 0) = \frac{D(X)}{\sigma_x^2} = 1.$$

Існують наступні співвідношення між функціями розподілу, що відповідають нормованій  $X_0$  та ненормованій  $X$  величинам:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma(X)} f_1(x_0) = \frac{1}{\sigma(X)} f_1\left(\frac{x - M(X)}{\sigma(X)}\right), \quad (1.68)$$

$$f_1(x_0) = \sigma(X) f(x) = \sigma(X) f(M(X) + \sigma(X)x_0), \quad (1.69)$$

$$F(x) = F_1(x_0) = F_1\left(\frac{x - M(X)}{\sigma(X)}\right), \quad (1.70)$$

$$F_1(x_0) = F(x) = F(M(X) + \sigma(X)x_0). \quad (1.71)$$

Розглянуті вище вирази є спільними (інтегральними) характеристиками розподілу випадкової величини.

Друга група параметрів характеризує окремі значення функції розподілення. До них відносяться *квантилі*.

*Кванті́ль* – значення, яке задана випадкова величина не перевищує з фіксованою ймовірністю. *Квантиль*  $x_\beta$  розподілу випадкової величини  $X$  з функцією розподілу  $F(x)$  називається рішенням рівняння  $F(x_\beta) = \beta$ , тобто таке значення випадкової величини, що  $P(X \leq x_\beta) = \beta$ . Найбільш важливе значення має квантиль  $x_{1/2}$ , що називають *медіаною* розподілу (рис. 1.7).

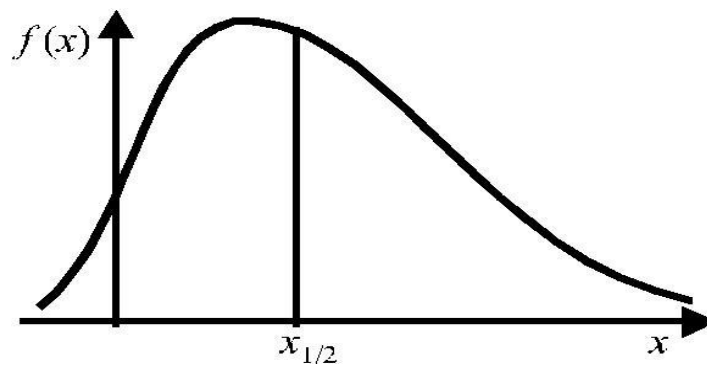


Рис. 1.7 – Медіана розподілу

Ордината медіани навпіл розділяє площу між кривою щільності ймовірності і віссю абсцис. Якщо розподіл симетричний, то  $x_{1/2} = M(X)$ .

### **1.5. Генеральна та вибіркова сукупність. Статистичний розподіл та емпірична функція розподілу вибірки**

Явище статистичної стійкості результатів спостережень має місце лише при дуже великому (як правило – нескінченно великому) числі вимірювань. У переважній кількості експериментів досліднику доводиться мати справу лише з обмеженою, зазвичай невеликою, кількістю спостережень. У відповідності із законом випадковості деякі величини, що визначені за малим числом спостережень, у загальному випадку можуть не збігатися з тими ж величинами, обчисленими за великим числом спостережень, які виконані в тих же умовах.

Тому в математичній статистиці вводять поняття *абстрактної генеральної сукупності*. Вона складається з усіх допустимих значень випадкової величини і вибірки. Ця вибірка представляє собою сукупність обмеженого числа значень, отриманих у результаті дослідів. Відповідно до цього розрізняють вибіркові характеристики випадкової величини, які знайдені за обмеженим числом спостережень і залежні від цього числа, і відповідні їм характеристики генеральної сукупності. При цьому вибіркові характеристики розглядаються як оцінки відповідних характеристик генеральної сукупності.

Нехай потрібно вивчити сукупність однорідних об'єктів відносно деякої якісної або кількісної ознаки, яка характеризує ці об'єкти. Наприклад, якщо є партія деталей, то якісною ознакою може служити стандартність деталі, а кількісним – контрольований розмір деталі. Іноді проводять суцільне обстеження, тобто досліджують кожний із об'єктів сукупності щодо ознак, якими цікавляться. На практиці, однак, суцільне обстеження застосовують порівняно рідко. Наприклад, якщо сукупність містить дуже велике число об'єктів, то провести суцільне обстеження фізично неможливо. Якщо обстеження об'єкта пов'язане з його знищенням (пошкодженням, руйнуванням) або вимагає великих матеріальних витрат, то проводити суцільне обстеження практично не доцільно. У таких випадках навмання відбирають з усієї сукупності обмежену кількість об'єктів і піддають їх вивченню.

*Вибірковою сукупністю* або просто *вибіркою* називають сукупність випадково відібраних для обстеження об'єктів.

*Генеральною сукупністю* називають сукупність об'єктів, з яких проводиться вибірка.

*Обсягом сукупності* (вибіркової або генеральної) називають кількість об'єктів цієї сукупності. Наприклад, якщо з 1000 деталей відібрано для обстеження 100 деталей, то обсяг генеральної сукупності  $N = 1000$ , а обсяг вибірки  $n = 100$ .

**Зауваження.** Часто генеральна сукупність містить кінцеве число об'єктів. Однак якщо це число досить велике, то іноді в цілях спрощення обчислень або для полегшення теоретичних висновків, допускають, що генеральна сукупність складається з незліченної кількості об'єктів. Таке припущення виправдовується тим, що збільшення обсягу генеральної сукупності (достатньо великого обсягу) практично не позначається на результатах обробки даних вибірки.

### **Повторна та неповторна вибірки. Репрезентативна вибірка**

При складанні вибірки можна користуватися двома способами: після того як об'єкт відібраний і над ним проведено спостереження, він може бути повернений або не повернений у генеральну сукупність. У відповідності зі сказаним вибірки поділяють на повторні і неповторні.

*Повторною* називають вибірку, при якій відібраний об'єкт (перед відбором наступного) повертається в генеральну сукупність.

*Безповторною* називають вибірку, при якій відібраний об'єкт у генеральну сукупність не повертається. На практиці звичайно користуються безповторним випадковим відбором.

Для того, щоб за даними вибірки можна було досить впевнено судити про цікаву для нас ознаку генеральної сукупності, необхідно, щоб об'єкти вибірки правильно його представляли. Іншими словами, вибірка повинна правильно представляти пропорції генеральної сукупності. Цю вимогу коротко

формулюють так: **вибірка повинна бути репрезентативною (представницькою).**

Можна стверджувати, що вибірка буде репрезентативною, якщо її здійснити випадково: кожен об'єкт вибірки випадково відібрано із генеральної сукупності, тобто всі об'єкти мають однакову ймовірність потрапити до вибірки. Якщо обсяг генеральної сукупності достатньо великий, а вибірка складає лише незначну частину цієї сукупності, то відмінність між повторною і неповторною вибірками зникає в граничному випадку, коли розглядається нескінченна генеральна сукупність, а вибірка має кінцевий обсяг, ця відмінність зникає.

### Способи відбору варіантів вибірки

На практиці застосовуються різні способи відбору. Принципово ці способи можна розділити на два види:

1. Відбір, що не вимагає розчленування генеральної сукупності на частини. Сюди відносяться:

- а) простий випадковий неповторний відбір;
- б) простий випадковий повторний відбір.

2. Відбір, при якому генеральна сукупність розбивається на частини. Сюди відносяться:

- а) типовий відбір;
- б) механічний;
- в) серійний відбір.

**Простим випадковим** називають такий відбір, при якому об'єкти беруть по одному з усієї генеральної сукупності. Здійснити простий відбір можна різними способами. Наприклад, для витягування об'єктів із генеральної сукупності обсягу  $N$  чинять так: виписують номери від 1 до  $N$  на картках, які ретельно перемішують, і навмання виймають одну картку; об'єкт, що має однаковий номер із витягнутою карткою, піддають обстеженню; потім картку повертають у пачку і процес повторюють, тобто картки перемішують, навмання виймають одну з них і т.д. Так чинять  $n$  разів; у результаті отримують просту випадкову повторну вибірку обсягом  $n$ . Якщо витягнуті картки не повертати назад, то вибірка є простою випадковою неповторною.

При великому обсязі генеральної сукупності описаний процес виявляється дуже трудомістким. У цьому випадку користуються готовими таблицями «випадкових чисел», в яких числа розташовані в випадковому порядку. Для того, щоб відібрати, наприклад, 50 об'єктів із пронумерованої генеральної сукупності, відкривають будь-яку сторінку таблиці випадкових чисел і виписують послідовно 50 чисел; у вибірку потрапляють ті об'єкти, номери яких збігаються із виписаними випадковими числами. Якби виявилось, що випадкове число таблиці перевищує число  $N$ , то таке випадкове число пропускають. При здійсненні неповторної вибірки, випадкові числа таблиці, які вже зустрічалися раніше, слід також пропустити.

**Типовим** називають відбір, при якому об'єкти відбираються не з усієї генеральної сукупності, а з кожної її «типової» частини. Наприклад, якщо деталі виготовляють на декількох верстатах, то відбір роблять не з усієї сукупності деталей, вироблених усіма верстатами, а з продукції кожного верстата окремо. Типовим відбором користуються тоді, коли обстежувана ознака помітно коливається в різних типових частинах генеральної сукупності. Наприклад, якщо продукція виготовляється на декількох верстатах, серед яких є незначно зношені, то тут типовий відбір доцільний.

**Механічним** називають відбір, при якому генеральну сукупність «механічно» ділять на стільки груп, скільки об'єктів повинно увійти у вибірку, а з кожної групи відбирають один об'єкт. Наприклад, якщо потрібно відібрати 20% виготовлених верстатом деталей, то відбирають кожну п'яту деталь; якщо потрібно відібрати 5% деталей, то відбирають кожну двадцяту деталь. Слід зазначити, що іноді механічний відбір може не забезпечити репрезентативності усієї вибірки. Наприклад, якщо відбирають кожен двадцятий обточений валик, причому відразу ж після відбору проводять заміну різця, то відібраними виявляться всі валики, обточені затупленими різцями. У такому випадку слід усунути співпадаючий ритм відбору з ритмом заміни різця, для чого треба відбирати, скажімо, кожен десятий валик із двадцяти обточених.

**Серійним** називають відбір, при якому об'єкти відбирають із генеральної сукупності не по одному, а партіями («серіями»), які піддаються суцільному дослідженню. Наприклад, якщо деталі виготовляються великою групою верстатів-автоматів, то піддають суцільному обстеженню продукцію тільки декількох верстатів. Серійним відбором користуються тоді, коли досліджувана ознака коливається в різних серіях.

Підкреслимо, що на практиці часто застосовується комбінований відбір, при якому поєднуються зазначені вище способи. Наприклад, іноді розбивають генеральну сукупність на серії однакового обсягу, потім простим випадковим відбором вибирають кілька серій і, нарешті, з кожної серії простим випадковим відбором «витягують» окремі об'єкти.

### Статистичний розподіл вибірки

Нехай із генеральної сукупності взята вибірка, причому  $x_1$  спостерігалось  $n_1$  раз,  $x_2 - n_2$ , раз,  $x_k - n_k$  раз та  $\sum n_i = n$  – обсяг вибірки. Спостережувані значення  $x_i$  називають *варіантами*, а послідовність варіантів, записаних у порядку зростання, – *варіаційним рядом*. Кількість спостережень називають частотами, а їх відношення до обсягу вибірки  $n_i/n = W_i$  – відносними частотами.

*Статистичним розподілом вибірки* називають перелік варіантів і відповідних їм частот або відносних частот. Статистичний розподіл можна задати також у вигляді послідовності інтервалів і відповідних їм частот (в якості частоти, що відповідає інтервалу, беруть суму частот, що потрапили в цей інтервал).

Зауважимо, що в теорії ймовірностей під розподілом розуміють відповідність між можливими значеннями випадкової величини і їх ймовірностями, а в математичній статистиці – відповідність між спостережуваними варіантами і їх частотами, або відносними частотами.

**Приклад.** Задано розподіл частот вибірки обсягом  $n = 20$ :

$x_i$	2	6	12
$n_i$	3	10	7

Написати розподіл відносних частот.

**Розв'язання.** Знайдемо відносні частоти, для чого поділимо частоти на обсяг вибірки:

$$W_1 = 3/20 = 0,15; W_2 = 10/20 = 0,50; W_3 = 7/20 = 0,35.$$

Запишемо розподіл відносних частот:

$x_i$	2	6	12
$W_i$	0,15	0,50	0,35

$$\text{Контроль: } 0,15 + 0,50 + 0,35 = 1.$$

### Емпірична функція розподілу

Нагадаємо, що функція  $F(x)$  випадкової величини  $X$  визначається рівністю  $F(x) = P(X < x)$ . Її називають *теоретичною функцією розподілу* випадкової величини  $X$  або функцією розподілу генеральної сукупності.

Нехай відомий статистичний розподіл частот кількісної ознаки  $X$ . Зафіксуємо довільне дійсне число  $x$  і позначимо через  $n_x$  кількість елементів вибірки, які менші за  $x$ :  $n_x$  – кількість спостережень, при яких спостерігалось значення ознаки, що менше за  $x$ ;  $n$  – загальна кількість спостережень (обсяг вибірки). Зрозуміло, що відносна частота події дорівнює  $W_x = n_x/n$  (де  $X < x$ ). Якщо  $x$  змінюється, то, взагалі кажучи, змінюється і відносна частота, тобто відносна частота  $n_x/n$  є функцією від  $x$ . Так як ця функція знаходиться емпіричним (дослідним) шляхом, то її називають *емпіричною функцією розподілу* випадкової величини  $X$ .

*Емпіричною функцією розподілу* (функцією розподілу вибірки) називають функцію  $F^*(x)$ , що визначає для кожного значення  $x$  відносну частоту події  $X < x$ .

Отже, за визначенням,

$$F^*(x) = n_x/n,$$

де  $n_x$  – кількість варіант, менших за  $x$ ;

$n$  – обсяг вибірки.

Таким чином, для того щоб знайти, наприклад,  $F^*(x_2)$ , треба кількість варіант, менших за  $x_2$ , поділити на обсяг вибірки:

$$F^*(x_2) = n_{x_2}/n$$

На відміну від *емпіричної функції розподілу вибірки*, функцію розподілу  $F(x)$  генеральної сукупності називають *теоретичною функцією розподілу*. Різниця між емпіричної і теоретичної функціями полягає у тому, що теоретична функція  $F(x)$  визначає ймовірність події  $X < x$ , а емпірична функція  $F^*(x)$  визначає відносну частоту цієї ж події. За *теоремою Бернуллі*, відносна частота події  $X < x$ , тобто  $F^*(x)$  прагне до ймовірності  $F(x)$  цієї події. Іншими словами, при великих  $n$  значення функцій  $F^*(x)$  та  $F(x)$  мало чим відрізняються одне від другого в тому сенсі, що  $\lim P[|F(x) - F^*(x)| < \varepsilon] = 1$  ( $\varepsilon > 0, n \rightarrow \infty$ ). Вже звідси випливає доцільність використання емпіричної функції розподілу вибірки для наближеного представлення теоретичної (інтегральної) функції розподілу генеральної сукупності. Такий висновок підтверджується ще тим, що  $F^*(x)$  притаманні усі властивості  $F(x)$ . Дійсно, з визначення функції  $F^*(x)$  випливають такі її властивості:

- 1) значення емпіричної функції належать відрізку  $[0, 1]$ ;
- 2)  $F^*(x)$  – не спадна функція;
- 3) якщо  $x_l$  – найменша варіанта, то  $F^*(x) = 0$  при  $x < x_l$ ; якщо  $x_k$  – найбільша варіанта, то  $F^*(x) = 1$  при  $x > x_k$ .

Отже емпірична функція розподілу вибірки використовується для оцінки теоретичної функції розподілу генеральної сукупності (рис. 1.8).

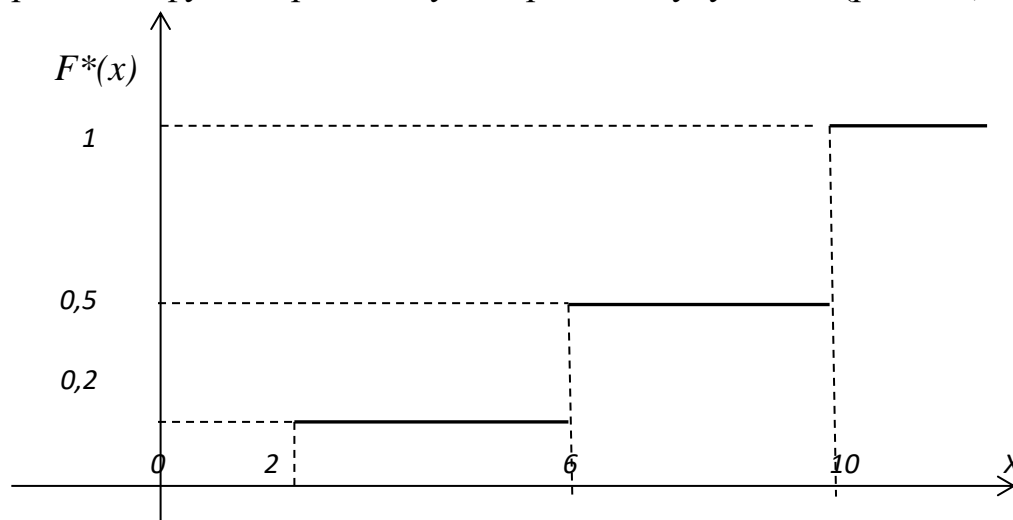


Рис. 1.8. - Графік емпіричної функції

**Приклад.** Побудувати емпіричну функцію за даним розподілом вибірки:

Варіанти	$x_i$	2	6	10
Частоти	$n_i$	12	18	30

*Розв'язання.* Знайдемо обсяг вибірки:  $n = 12 + 18 + 30 = 60$ . Найменша варіанта дорівнює 2, отже,  $F^*(x) = 0$  при  $x \leq 2$ .

Значення  $X < 6$ , а саме  $x_1 = 2$ , спостерігалось 12 разів, отже,  $F^*(x) = 12/60 = 0,2$  при  $2 < x \leq 6$ .

Значення  $X < 10$ , а саме  $x_1 = 2$  та  $x_2 = 6$ , спостерігається  $12+18 = 30$  разів, отже,  $F^*(x) = 30/60 = 0,5$  при  $6 < x \leq 10$ .

Так як  $x_3 = 10$  – це найбільша варіанта, то  $F^*(x) = 1$  при  $x > 10$ .

Шукана емпірична функція має такий вигляд:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2, \\ 0,2 & \text{при } 2 < x \leq 6, \\ 0,5 & \text{при } 6 < x \leq 10, \\ 1 & \text{при } x > 10. \end{cases}$$

### Полігон та гістограма частот

Для наочності накреслимо різні графіки статистичного розподілу і, зокрема, полігон і гістограму.

*Полігоном частот* називають ламану, відрізки якої з'єднують точки  $(x_1; n_1)$ ,  $(x_2; n_2)$ , ...,  $(x_k; n_k)$ . Для побудови полігону частот на осі абсцис відкладають варіанти  $x_i$ , а на осі ординат – відповідні їм частоти  $n_i$ . Точки  $(x_i; n_i)$  з'єднують відрізками прямих і отримують полігон частот.

*Полігоном відносних частот* називають ламану, відрізки якої з'єднують точки  $(x_1; W_1)$ ,  $(x_2; W_2)$ , ...,  $(x_k; W_k)$ . Для побудови полігону відносних частот на осі абсцис відкладають варіанти  $x_i$ , а на осі ординат – відповідні їм відносні частоти  $W_i$ . Точки  $(x_i; W_i)$  з'єднують відрізками прямих і отримують полігон відносних частот.

На рис. 1.9 зображено полігон відносних частот запропонованого розподілу:

$X$	1,5	3,5	5,5	7,5
$W$	0,1	0,2	0,4	0,3

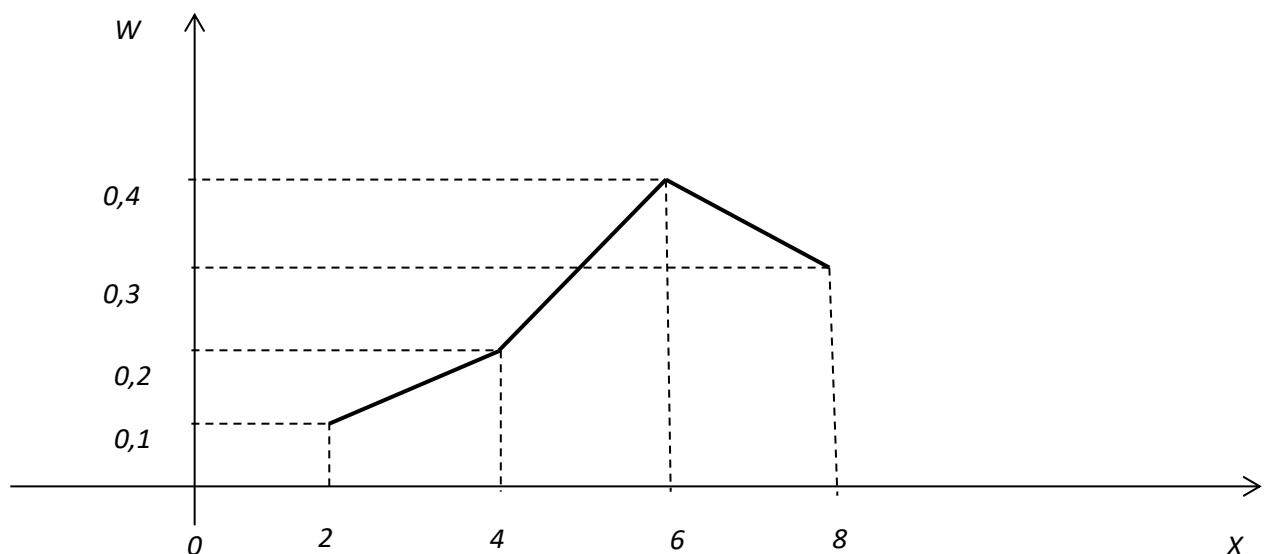


Рис. 1.9. - Полігон відносних частот.

У разі неперервної ознаки доцільно будувати *гістограму*, для чого інтервал, в якому розміщені усі значення ознак, що спостерігають, розбивають на декілька часткових інтервалів довжиною  $h$  і знаходять для кожного часткового інтервалу  $n_i$  – суму частот варіант, які потрапили в  $i$ -й інтервал.

*Гістограмою частот* називають ступінчасту фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких служать часткові інтервали довжиною  $h$ , а висоти дорівнюють відношенню  $n_i/h$  – *щільність частоти*.

Для побудови гістограми частот на осі абсцис відкладають часткові інтервали, а над ними проводять відрізки, паралельні осі абсцис на відстані  $n_i/h$ . Площа  $i$ -го часткового прямокутника дорівнює  $hn_i/h = n_i$  – сумі частот варіант  $i$ -го інтервалу. Отже, площа гістограми частот дорівнює сумі всіх частот, тобто обсягу вибірки  $n$ .

*Гістограмою відносних частот* називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких служать часткові інтервали довжиною  $h$ , а висоти дорівнюють відношенню  $W_i/h$  – *щільність відносної частоти*.

Для побудови гістограми відносних частот на осі абсцис відкладають часткові інтервали, а над ними проводять відрізки, паралельні осі абсцис на відстані  $W_i/h$ . Площа  $i$ -го часткового прямокутника дорівнює  $hW_i/h = W_i$  – відносної частоти варіант, що потрапили в  $i$ -й інтервал. Отже, площа гістограми відносних частот дорівнює сумі всіх відносних частот, тобто одиниці.

Припустимо, що в результаті експерименту отримана вибірка із значень  $x_1, x_2, \dots, x_n$  випадкової величини  $X$ . Позначимо через  $n_x$  число вибірових значень, розташованих лівіше  $x$  – деякої точки числової осі  $X$ . Відношення  $(n_x/n)$  (де  $n$  – загальна кількість значень випадкової величини  $X$ ) є частиною появи значень  $X$ , менших  $x$ , і є функцією від  $x$ . Ця функція, що отримується за вибіркою, називається емпіричною, або вибірковою функцією розподілу (на відміну від розподілу генеральної сукупності) і розраховується як

$$F_n^*(x) = P(X < x) = \frac{n_x}{n} \quad (1.73)$$

Доведено, що з ймовірністю, яка дорівнює 1, при  $n \rightarrow \infty$  максимальна відмінність між функціями розподілу випадкової величини  $F_n^*(x)$  і  $F(x)$  прямує до нуля. На практиці це означає, що при достатньо великій вибірці функцію розподілу генеральної сукупності наближено можна замінити вибірковою функцією розподілу.

Нехай  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  (упорядкована за величиною вибірка, або варіаційний ряд). Усі елементи вибірки мають однакову ймовірність, Вона дорівнює  $1/n$ .

Тому

$$F_n^*(x) = 0 \quad \text{при } x < x_1,$$

$$F_n^*(x) = n_x / n \quad \text{при } x_l \leq x < x_n, \text{ де } n = 1, 2, \dots, k$$

$$F_n^*(x) = 1 \quad \text{при } x \geq x_n.$$

Графік  $F_n^*(x)$  представлений на рис. 1.9. Всі елементи вибірки є точками розриву цієї функції. У точці розриву  $x = x_k$  функція стрибком переходить від значення  $(k - 1)/n$  до значення  $k/n$ , яке залишається незмінним у наступному інтервалі.

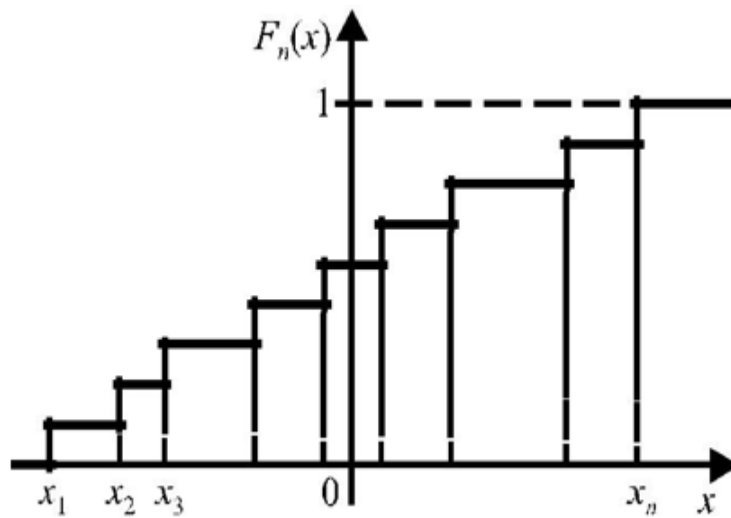


Рис. 1.9 – Вибіркова функція розподілу

При обробці вибірок зазвичай використовують метод “згрупованих даних”: вибірка обсягу  $n$  перетворюється в статистичний ряд.

Весь діапазон значень випадкової величини від  $x_{min}$  до  $x_{max}$  розділяється на  $k$  рівних інтервалів ( $n = 1, 2, \dots, k$ ). Кількість інтервалів можна вибрати довільно або за емпіричними формулами, наприклад:

$$k = 1 + 1.39 \ln n \quad k = \sqrt[3]{10n}, \quad (1.74)$$

з округленням до найближчого цілого числа. Довжина інтервалу дорівнює

$$h = \frac{(x_{max} - x_{min})}{k} = \frac{R}{k}. \quad (1.75)$$

Кількість елементів вибірки, що потрапили в  $k$ -інтервал, позначимо через  $n_k$ .

Величина

$$p_k^* = \frac{n_k}{n} \quad (1.76)$$

визначає відносну частоту потрапляння випадкової величини в  $k$ -інтервал. Всі точки, що потрапили в  $k$ -інтервал, відповідають його середньому значенню:

$$x_k^* = \frac{(x_{k-1} + x_k)}{2} \quad (1.77)$$

Статистичний ряд доцільно інтерпретувати у вигляді табл. 1.1.

Таблиця 1.1 - Інтерпретація статистичного ряду

Інтервал	Довжина інтервалу		Середина інтервалу	Кількість елементів в інтервалі	Відносна частота
1	$(x_{min}, x_1)$		$x_1^*$	$n_1$	$p_1^*$
2	$(x_1, x_2)$		$x_2^*$	$n_2$	$p_2^*$
...	...		...	...	...
$k$	$(x_{k-1}, x_{max})$		$x_k^*$	$n_k$	$p_k^*$
$\Sigma$				$n$	1

Графік, побудований за даними табл. 1. 1, називається гістограмою емпіричного або вибіркового розподілу (рис. 1.10).

На рис. 1.10 наведено графік функції  $F_n(x)$ , побудований за згрупованими даними.

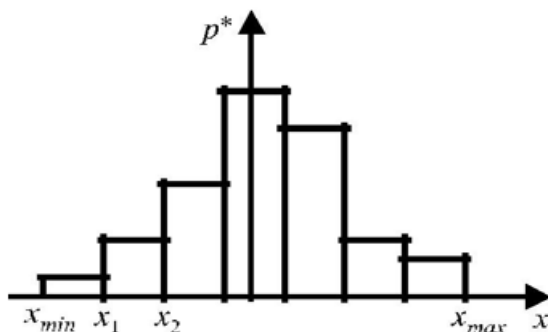


Рис. 1.10 – Гістограма розподілу

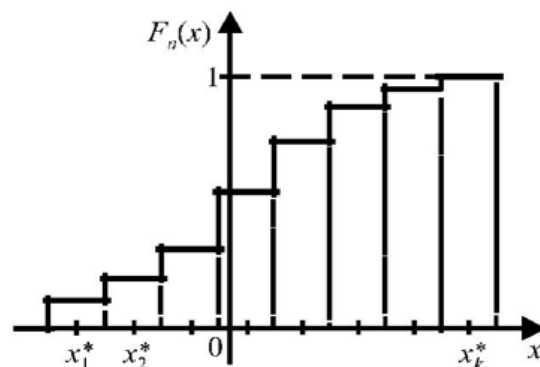


Рис. 1.11 – Графік функції  $F_n(x)$ , побудований за згрупованими даними

При обробці результатів спостережень зазвичай одразу не отримують емпіричну функцію розподілу. Але навіть найпростіший аналіз умов організації та проведення дослідження дозволяє з достатньою впевненістю визначати тип невідомої функції розподілу. Остаточне уточнення невідомої функції розподілу зводиться до визначення деяких числових параметрів розподілу. За вибіркою можуть бути розраховані вибіркові статистичні характеристики (вибіркове середнє, дисперсія тощо). Вони і будуть оцінками відповідних генеральних параметрів.

Оцінка  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  називається зміщеною, якщо із збільшенням обсягу вибірки  $n$  вона прагне (по ймовірності) до оцінюваного параметру  $\theta$ . Емпіричні (вибіркові) моменти є змістовними оцінками теоретичних моментів.

Оцінка  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  називається незміщеною, якщо її математичне сподівання при будь-якому обсязі вибірки дорівнює оцінюваному параметру, тобто  $M[\theta^*] = \theta$ .

Важливою характеристикою оцінок генеральних параметрів являється також їх *ефективність*, яка для різних незміщених оцінок одного і того ж параметра при фіксованому обсязі вибірок обернено пропорційна дисперсіям цих оцінок.

## 1.6. Статистичні оцінки параметрів розподілу

Нехай маємо вибірку, значення кількісної ознаки  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , що отримані в результаті  $n$  спостережень. Спостерігаючи  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , як незалежні випадкові величини  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , можна констатувати, що знайти статистичну оцінку невідомого параметру теоретичного розподілу означає знайти функцію від випадкової величини, яка і надає наближене значення для оцінки параметру. Наприклад, для оцінки математичного сподівання нормального розподілу використовують *середнє арифметичне значення* ознаки, що спостерігається:

$$X_{cp} = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n.$$

Отже, *статистичною оцінкою невідомого параметру теоретичного розподілу називають функцію від випадкової величини, що спостерігається.*

### Незсунені, ефективні та змістовні оцінки

Нехай  $\theta^*$  – статистична оцінка невідомого параметру  $\theta$  теоретичного розподілу. Припустимо, що за вибіркою обсягом  $n$  знайдена оцінка  $\theta^*_1$ . Повторимо дослід, тобто візьмемо ще одну вибірку із генеральної сукупності такого ж обсягу та знайдемо оцінку  $\theta^*_2$ . Повторюючи дослід багато разів, отримаємо значення  $\theta^*_1, \theta^*_2, \dots, \theta^*_n$ , які будуть відмінні одне від одного. Таким чином, оцінку  $\theta^*$  можна розглядати як випадкову величину, а значення  $\theta^*_1, \theta^*_2, \dots, \theta^*_n$ , – як її можливі значення.

Припустимо, що оцінка  $\theta^*$  надає наближене значення  $\theta$  з надлишком; тоді кожне значення за даними вибірок  $\theta^*_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) буде більше дійсного значення  $\theta$ . Зрозуміло, що в такому випадку і математичне сподівання (середнє арифметичне значення) випадкової величини  $\theta^*$  буде більше ніж  $\theta$ , тобто  $M(\theta^*) > \theta$ . Якщо випадкова величина  $\theta^*$  надає оцінку з недостатчею, то  $M(\theta^*) < \theta$ .

Таким чином, використання статистичної оцінки, математичне сподівання якої не дорівнює параметру, що оцінюється, призведе до систематичних помилок (одного знаку). По цій причині необхідно вимагати, щоб математичне сподівання оцінки  $\theta^*$  дорівнювало б оцінюваному параметру. Хоч дотримання цієї вимоги не усуне помилок (одні значення  $\theta^*$  більші, а інші менші за  $\theta$ ), однак помилки

різних знаків будуть зустрічатися однаково часто. Іншими словами, дотримання вимоги  $M(\theta^*) = \theta$  – гарантує від отримання систематичних помилок.

*Незсуненою* називають статистичну оцінку  $\theta^*$ , математичне сподівання якої дорівнює параметру  $\theta$ , що оцінюється, за любим обсягом вибірки:

$$M(\theta^*) = \theta.$$

*Зсуненою* називають статистичну оцінку  $\theta^*$ , математичне сподівання якої не дорівнює параметру  $\theta$ , що оцінюється, за любим обсягом вибірки.

*Ефективною* називається статистична оцінка, яка (за заданим обсягом вибірки) має найменшу можливу дисперсію.

*Змістовною* називають статистичну оцінку, яка при  $n \rightarrow \infty$  по ймовірності прагне до оцінюваного параметру:  $\lim P[|\theta^* - \theta| < \varepsilon] = 1$  ( $\varepsilon > 0, n \rightarrow \infty$ ).

## Генеральна середня

Нехай вивчається дискретна генеральна сукупність відносно кількісної ознаки  $X$ . *Генеральною середньою*  $X_{\text{ср}}$  називають середнє арифметичне значення ознаки генеральної сукупності. Якщо всі значення  $x_1, x_2, \dots, x_N$  ознаки генеральної сукупності обсягом  $N$  різні, то

$$X_{\text{ср}} = (x_1 + x_2 + \dots + x_N)/N.$$

Якщо значення ознаки  $x_1, x_2, \dots, x_k$  мають відповідні частоти  $N_1, N_2, \dots, N_k$ , а  $N_1 + N_2 + \dots + N_k = N$ , то

$$X_{\text{ср}} = (x_1 N_1 + x_2 N_2 + \dots + x_k N_k)/N,$$

або  $X_{\text{ср}} = (\sum x_i N_i)/N$ , де  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Тобто генеральна середня є середня вагова значень ознаки із вагою, що дорівнює відповідним частотам.

*Зауваження.* Нехай генеральна сукупність обсягом  $N$  містить об'єкти з різними значеннями ознаки  $X$ , що дорівнюють  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Із цієї сукупності на вдачу виймається один об'єкт. Ймовірність того, що буде вийнято об'єкт зі значенням ознаки, наприклад  $x_1$ , вочевидь, дорівнює  $1/N$ . Із цією ж ймовірністю може бути вийнято і будь який інший об'єкт. Таким чином, величину ознаки  $X$  можна розглядати як випадкову величину, можливі значення якої  $x_1, x_2, \dots, x_N$  мають однакові ймовірності, що дорівнюють  $1/N$ .

Знайдемо математичне сподівання  $M(X)$ :

$$M(X) = x_1 1/N + x_2 1/N + \dots + x_N 1/N = X_{\text{ср}}.$$

Якщо розглядати ознаку  $X$  генеральної сукупності як випадкову величину, то математичне сподівання ознаки дорівнює генеральній середній цієї ознаки:

$$M(X) = X_{\text{ср}}.$$

## Вибіркова середня

Нехай для вивчення генеральної сукупності відносно кількісної ознаки  $X$  взята вибірка обсягом  $n$ .

Вибірковою середньою  $X_{в\text{ }cp}$  називають середнє арифметичне значення ознаки вибіркової сукупності.

Якщо усі значення  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ознаки вибірки  $n$  обсягом різні, то

$$X_{в\text{ }cp} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n.$$

Якщо значення ознаки  $x_1, x_2, \dots, x_k$  мають відповідні частоти  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , а  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ , то

$$X_{в\text{ }cp} = (x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k)/n,$$

або  $X_{в\text{ }cp} = (\sum x_i n_i)/n$ , де  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Тобто вибіркова середня є середня вагова значень ознаки із вагою, що дорівнює відповідним частотам.

### Оцінка генеральної середньої через вибірку середню

Нехай із генеральної сукупності (у результаті незалежних спостережень над кількісною ознакою  $X$ ) береться повторна вибірка обсягом  $n$  із значеннями  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Генеральна середня  $X_{г\text{ }cp}$  невідома і необхідно оцінити її за даними вибірки. У якості оцінки генеральної середньої приймають вибірку середню:

$$X_{в\text{ }cp} = (x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k)/n.$$

Переконаємося, що  $X_{в\text{ }cp}$  – незміщена оцінка, тобто покажемо, що математичне сподівання цієї оцінки дорівнює  $X_{г\text{ }cp}$ . Будемо розглядати  $X_{в\text{ }cp}$  як випадкову величину та  $x_1, x_2, \dots, x_n$  як незалежні однаково розподілені випадкові величини  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Оскільки ці величини однаково розподілені, то вони мають однакові числові характеристики, наприклад однакове математичне сподівання.

Математичне сподівання середнього арифметичного однаково розподілених випадкових величин дорівнює математичному сподіванню кожної із цих величин:

$$M(X_{в\text{ }cp}) = M[(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n].$$

$$M(X) = X_{г\text{ }cp}, \text{ а звідси } M(X_{в\text{ }cp}) = X_{г\text{ }cp}$$

Таким чином, вибіркова середня є незміщеною оцінкою генеральної середньої. При збільшенні обсягу вибірки вибіркова середня прагне по ймовірності до генеральної середньої, а це свідчить про те, що вибіркова середня є змістовною оцінкою генеральної середньої.

Близькість вибіркових середніх до генеральних не залежить від відношення обсягу вибірки до обсягу генеральної сукупності, а залежить лише від обсягу вибірки: *чим обсяг вибірки більший, тим менше вибіркова середня відмінна від генеральної.*

Наприклад, якщо із однієї сукупності відібрано 1% об'єктів, а із другої – 4% об'єктів, причому обсяг першої вибірки виявився більшим, ніж другої, то перша вибіркова середня буде менше відрізнятися від відповідної генеральної середньої, ніж друга.

*Зауваження.* Ми припускали вибірку повторюваною. Але отримані висновки можуть використовуватись і для без повторюваної вибірки, якщо її обсяг значно менший за обсяг генеральної сукупності. Це положення часто використовується на практиці.

### Групова і загальна середні

Припустимо, що всі значення кількісної ознаки  $X$  сукупності, байдуже якої, генеральної або вибіркової, розбиті на декілька груп. Розглядаючи кожну з груп, як самостійну сукупність, можна знайти її середню арифметичну.

*Групову середню* називають середнє арифметичне значень ознаки, які належать групі.

Тепер доцільно ввести спеціальний термін для середньої всієї сукупності.

*Загальною середньою*  $X_{cp}$  називають середнє арифметичне значень ознаки, які належать всій сукупності.

Знаючи групові середні і обсяги груп, можна знайти загальну середню: *загальна середня дорівнює середній арифметичній групових середніх, що зважена за обсягами груп.*

**Приклад.** Знайти загальну середню сукупності, яка складається із двох груп:

Група	1		2	
Значення ознаки	1	6	1	5
Частота	10	15	20	30
Обсяг	10+15=25		20+30=50	

*Розв'язання.* Знайдемо групові середні

$$X_{1cp} = (10 \times 1 + 15 \times 6) / 25 = 4;$$

$$X_{2cp} = (20 \times 1 + 30 \times 5) / 50 = 3,4.$$

Знайдемо загальну середню по груповим середнім:

$$X_{cp} = (25 \times 4 + 50 \times 3,4) / (25 + 50) = 3,6.$$

### Відхилення від загальної середньої

Розглянемо сукупність, байдуже яку, генеральну або вибірку, значень кількісної ознаки  $X$  обсягу  $n$ :

Значення ознаки	$x_1$	$x_2$	$x_k$
Частоти	$n_1$	$n_2$	$n_k$

При цьому  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ , де  $i = 1, 2, \dots, k$ . Знайдемо загальну середню:

$$\left( \sum_{i=1}^k x_i n_i \right) / n = X_{cp}.$$

Звідси

$$\sum_{i=1}^k x_i n_i = n X_{cp}.$$

Відхиленням називають різницю  $(x_i - X_{cp})$  між значенням ознаки і загальною середньою.

**Теорема.** Сума добутків відхилень на відповідні частоти дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^k n_i (x_i - X_{cp}) = 0.$$

### Генеральна дисперсія

Для того, щоб охарактеризувати розсіювання значень кількісної ознаки  $X$  генеральної сукупності навколо свого середнього значення, запроваджують зведену характеристику – генеральну дисперсію.

Генеральною дисперсією  $D_G$  називають середнє арифметичне квадратів відхилень значень ознаки генеральної сукупності від їх середнього значення  $X_{cp}$ .

Якщо всі значення  $x_1, x_2, \dots, x_N$  ознаки генеральної сукупності обсягу  $N$  різні, то

$$D_G = \left( \sum_{i=1}^N (x_i - X_{Gcp})^2 \right) / N.$$

Якщо значення ознаки  $x_1, x_2, \dots, x_k$  мають відповідні частоти  $N_1, N_2, \dots, N_k$ , а  $N_1 + N_2 + \dots + N_k = N$ , то

$$D_G = \left( \sum_{i=1}^k N_i (x_i - X_{Gcp})^2 \right) / N.$$

Тобто генеральна дисперсія є середнє зважене квадратів відхилення з вагами, рівними відповідним частотами.

**Приклад.** Генеральна сукупність задана таблицею розподілення:

$x_i$	2	4	5	6
$N_i$	8	9	10	3

Знайти генеральну дисперсію.

*Розв'язання.* Спочатку визначимо обсяг генеральної сукупності

$N = 8 + 9 + 10 + 3 = 30$ . Тепер знайдемо генеральну середню:

$$X_{Gcp} = (8 \times 2 + 9 \times 4 + 10 \times 5 + 3 \times 6) / (8 + 9 + 10 + 3) = 120 / 30 = 4.$$

Звідси генеральна дисперсія:

$$D_G = (8(2 - 4)^2 + 9(4 - 4)^2 + 10(5 - 4)^2 + 3(6 - 4)^2) / 30 = 54 / 30 = 1,8.$$

Крім дисперсії для характеристики розсіювання значень ознаки генеральної сукупності навколо свого середнього значення використовують

середнє квадратичне відхилення. *Генеральним середнім квадратичним відхиленням* називають квадратний корінь із генеральної дисперсії:

$$\sigma_{\Gamma} = \sqrt{D_{\Gamma}}.$$

### Вибіркова дисперсія

Для того щоб охарактеризувати розсіяння значень кількісної ознаки  $X$  вибірки навколо свого середнього значення  $X_{в\text{ср}}$ , запроваджують зведену характеристику – вибіркову дисперсію. *Вибірковою дисперсією*  $D_{в}$  називають середнє арифметичне квадратів відхилень значень ознаки від його середнього значення  $X_{в\text{ср}}$ .

Якщо всі значення  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ознаки генеральної сукупності обсягу  $n$  різні, то

$$D_{в} = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - X_{в\text{ср}})^2 \right) / n.$$

Якщо значення ознаки  $x_1, x_2, \dots, x_k$  мають відповідні частоти  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , а  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ , то

$$D_{в} = \left( \sum_{i=1}^k n_i (x_i - X_{в\text{ср}})^2 \right) / n.$$

Тобто вибіркова дисперсія є середнє зважене квадратів відхилень з вагами, рівними відповідним частотам.

**Приклад.** Вибіркова сукупність задана таблицею розподілення:

$x_i$	1	2	3	4
$N_i$	20	15	10	5

Знайти вибіркову дисперсію.

*Розв'язання.* Спочатку визначимо обсяг вибірки  $n = 20 + 15 + 10 + 5 = 50$ .

Тепер знайдемо вибіркову середню:

$$X_{в\text{ср}} = (20 \times 1 + 15 \times 2 + 10 \times 3 + 5 \times 4) / (20 + 15 + 10 + 5) = 100 / 50 = 2.$$

Звідси вибіркова дисперсія:

$$D_{в} = (20(1 - 2)^2 + 15(2 - 2)^2 + 10(3 - 2)^2 + 5(4 - 2)^2) / 50 = 50 / 50 = 1.$$

Крім дисперсії для характеристики розсіювання значень ознаки вибіркової сукупності навколо свого середнього значення використовують середнє квадратичне відхилення.

*Вибірковим середнім квадратичним відхиленням* називають квадратний корінь із вибіркової дисперсії.

$$\sigma_{в} = \sqrt{D_{в}}.$$

## Формула для обчислення дисперсії

Обчислення дисперсії, байдуже якої, вибіркової або генеральної, можна спростити, використовуючи наступну теорему:

**Теорема.** Дисперсія дорівнює середній квадратів значень ознаки мінус квадрат загальної середньої:

$$D = X_{cp}^2 - [X_{cp}]^2.$$

*Доведення.* Справедливість теореми витікає із перетворень:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\sum n_i(x_i - x_{cp})^2}{n} = \frac{\sum n_i(x_i^2 - 2x_i x_{cp} + [x_{cp}]^2)}{n} \\ &= \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - 2x_{cp} \frac{\sum n_i x_i}{n} + [x_{cp}]^2 \frac{\sum n_i}{n} = \\ &= x_{cp}^2 - 2x_{cp} \cdot x_{cp} + [x_{cp}]^2 = x_{cp}^2 - [x_{cp}]^2. \end{aligned}$$

Отже,

$$D = X_{cp}^2 - [X_{cp}]^2, \quad \text{де } X_{cp} = (\sum n_i x_i)/n, \quad X_{cp}^2 = (\sum n_i x_i^2)/n.$$

**Приклад.** Знайти дисперсію за даним розподілом

$x_i$	1	2	3	4
$n_i$	20	15	10	5

*Розв'язання.* Знайдемо загальну середню та середню квадратів значень ознаки:

$$X_{cp} = \frac{20 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2, \quad X_{cp}^2 = \frac{20 \cdot 1^2 + 15 \cdot 2^2 + 10 \cdot 3^2 + 5 \cdot 4^2}{50} = 5.$$

Шукана дисперсія дорівнює:

$$D = X_{cp}^2 - [X_{cp}]^2 = 5 - 2^2 = 1.$$

## Групова, міжгрупова та загальна дисперсії

Припустимо, що усі значення кількісної ознаки  $X$  сукупності, байдуже – генеральної або вибіркової, розбиті на  $k$  груп. Розглядаючи кожну групу як самостійну сукупність, можна знайти групову середню та дисперсію значень ознаки, що належать групі відносно групової середньої.

*Груповою дисперсією* називають дисперсію значень ознаки, що належать групі, відносно групової середньої

$$D_{jгр} = \left( \sum_{i=1}^k n_i (x_i - x_{jcp})^2 \right) / N_j.$$

де  $n_i$  – частота значення  $x_i$  ;

$j$  – номер групи;

$x_{jcp}$  – групова середня групи  $j$ ;

$N_j = \sum n_i$  – обсяг групи  $j$  .

**Приклад 1.** Знайти групові дисперсії сукупності, що складається із двох наступних груп:

Група	1			2	
Значення ознаки ( $x_i$ )	2	4	5	3	8
Частота ( $n_i$ )	1	7	2	2	3
Обсяг ( $N_j$ )	1+7+2=10			2+3=5	

*Розв'язання.* Знайдемо групові середні:

$$x_{1\text{cp}} = (2 \times 1 + 4 \times 7 + 5 \times 2) / 10 = 4. \quad x_{2\text{cp}} = (3 \times 2 + 8 \times 3) / 5 = 6.$$

Знайдемо шукані групові дисперсії:

$$D_{\text{гр1}} = (1(2 - 4)^2 + 7(4 - 4)^2 + 2(5 - 4)^2) / 10 = 0,6; \quad D_{\text{гр2}} = (2(3 - 6)^2 + 3(8 - 6)^2) / 5 = 6.$$

*Внутрішньо груповою дисперсією* називають середню арифметичну дисперсію, що враховує ваговий внесок за обсягом груп:

$$D_{\text{вгр}} = \left( \sum_{j=1}^k N_j D_{j\text{гр}} \right) / n.$$

де  $N_j$  – обсяг групи  $j$ ;  $n = \sum_{j=1}^k N_j$  – обсяг усієї сукупності.

**Приклад 2.** Знайти внутрішньо групову дисперсію за даними прикладу 1.

*Розв'язання.* Шукана внутрішньо групову дисперсію дорівнює

$$D_{\text{вгр}} = (N_1 D_{\text{гр1}} + N_2 D_{\text{гр2}}) / n = (10 \times 0,6 + 5 \times 6) / 15 = 12/5 = 2,4.$$

Знаючи групові середні та загальну середню, можна знайти дисперсію групових середніх відносно загальної середньої.

*Міжгруповою дисперсією* називають дисперсію групових середніх відносно загальної середньої:

$$D_{\text{мгр}} = \left( \sum_{j=1}^k N_j (x_{j\text{cp}} - x_{\text{cp}})^2 \right) / n.$$

де  $x_j$  – групова середня групи  $j$ ;  $N_j$  – обсяг групи  $j$ ;  $x_{\text{cp}}$  – загальна середня;  $n = \sum_{j=1}^k N_j$  – обсяг усієї сукупності.

**Приклад 3.** Знайти між групову дисперсію за даними прикладу 1.

*Розв'язання.* Знайдемо загальну середню:

$$x_{\text{cp}} = \sum n_i x_i / \sum n_i = ((2 \times 1 + 4 \times 7 + 5 \times 2 + 3 \times 2 + 8 \times 3) / 15 = 14/3.$$

Використаємо розраховані раніше значення  $x_{1\text{cp}} = 4$ ,  $x_{2\text{cp}} = 6$  та знайдемо шукану міжгрупову дисперсію:

$$D_{\text{мгр}} = (N_1 (x_{1\text{cp}} - x_{\text{cp}})^2 + N_2 (x_{2\text{cp}} - x_{\text{cp}})^2) / n = (10(4 - 14/3)^2 + 5(6 - 14/3)^2) / 15 = 8/9.$$

*Загальною дисперсією* називають дисперсію значень ознаки усієї сукупності відносно загальної середньої:

$$D_{\text{заг}} = (\sum n_i (x_i - x_{\text{cp}})^2) / n,$$

де  $n_i$  – частота значень  $x_i$ ;  $x_{cp}$  – загальна середня;  $n$  – обсяг усієї сукупності.

**Приклад 4.** Знайти загальну дисперсію за даними прикладу 1.

*Розв'язання.* Знайдемо загальну дисперсію, беручи до уваги, що  $x_{cp} = 14/3$ :

$$D_{заг} = (1(2 - 14/3)^2 + 7(4 - 14/3)^2 + 2(5 - 14/3)^2 + 2(3 - 14/3)^2 + 3(8 - 14/3)^2)/15 = 148/45.$$

*Теорема додавання дисперсій.* Загальна дисперсія дорівнює сумі внутрішньої групової та міжгрупової дисперсій:  $D_{заг} = D_{вгр} + D_{мгр} = 12/5 + 8/9 = 146/45$ .

### Оцінка генеральної дисперсії по виправленій вибірковій

Нехай із генеральної сукупності в результаті  $n$  незалежних спостережень над кількісною ознакою  $X$  вибрана повторна вибірка обсягу  $n$ :

Значення ознаки	$x_1,$	$x_2,$	...	$x_k$
Частота	$n_1,$	$n_2,$	...	$n_k$

При цьому  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ .

Потрібно за даними вибірки оцінити (приблизно знайти) невідому генеральну дисперсію  $D_{\Gamma}$ . Якщо в якості оцінки генеральної дисперсії прийняти вибіркову дисперсію, то ця оцінка буде приводити до систематичних помилок, даючи занижене значення генеральної дисперсії. Пояснюється це тим, що як можна довести, вибіркова дисперсія є зміщеною оцінкою  $D_{\Gamma}$ , іншими словами, математичне сподівання вибіркової дисперсії не дорівнює оцінюючій генеральній дисперсії, а дорівнює

$$M[D_B] = \frac{n-1}{n} D_{\Gamma}.$$

Легко "виправити" вибіркову дисперсію так, щоб її математичне сподівання дорівнювалося генеральній дисперсії. Достатньо для цього помножити  $D_B$  на  $n/(n-1)$ .

Зробивши це, отримаємо *виправлену дисперсію*, яку позначимо через  $s^2$ :

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - x_{вср})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - x_{вср})^2}{n-1}$$

Виправлена дисперсія, звісно, є *незміщеною* оцінкою генеральної дисперсії. Дійсно,

$$M[s^2] = M\left[\frac{n}{n-1} D_B\right] = \frac{n}{n-1} M[D_B] = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} D_{\Gamma} = D_{\Gamma}.$$

Отже, в якості оцінки генеральної дисперсії приймають виправлену дисперсію

$$s^2 = \left( \sum_{i=1}^k n_i (x_i - x_{cp})^2 \right) / (n - 1)$$

Для оцінки ж середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності використовують "виправлене" середнє квадратичне відхилення, яке дорівнює квадратному кореню з виправленої дисперсії.

$$s = \sqrt{\sum n_i (x_i - x_{cp})^2 / (n - 1)}.$$

Підкреслимо, що  $s$  не являє собою незміщену оцінку. Щоб показати цей факт, ми написали і будемо писати далі так: *"виправлене" середнє квадратичне відхилення*.

**Зауваження.** Порівнюючи формули

$$D_e = \sum n_i (x_i - x_{всп})^2 / n \quad \text{та} \quad s^2 = \sum n_i (x_i - x_{всп})^2 / (n - 1)$$

можна побачити, що вони відрізняються лише знаменниками. Вочевидь, при достатньо великих значеннях  $n$  обсягу вибірки, вибіркова та виправлена вибіркова дисперсії будуть відрізнятися дуже мало. На практиці користуються виправленою дисперсією, якщо  $n < 30$  (приблизно).

### **1.7. Оцінювання невідомих параметрів розподілу вибірки. Метод максимальної правдоподібності**

Для отримання точкових оцінок розподілу вибірки використовують різні методи. На практиці широке застосовується отримав *метод максимальної правдоподібності*.

Сутність методу полягає в знаходженні таких оцінок невідомих параметрів, для яких функція правдоподібності при випадковій вибірці обсягу  $n$  набуватиме максимального значення.

Розглянемо математичну інтерпретацію цього методу.

Нехай щільність розподілу випадкової величини  $X$  задається функцією  $f(x, \theta)$ , де  $\theta$  – невідомий параметр, що входить у закон розподілу.

У результаті експериментальних досліджень отримана вибірка значень  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Оточимо кожну точку  $x_i$  колом діаметром  $\delta$ . Тоді ймовірність потрапляння точки  $x_i$  в інтервал  $[(x_i - \frac{\delta}{2}), (x_i + \frac{\delta}{2})]$  приблизно дорівнює  $f(x, \theta)\delta$ . Якщо виконано  $n$  спостережень, то ймовірність того, що одночасно перше спостереження потрапить у перший інтервал, друге – у другий і так далі, є ймовірність спільного здійснення всіх цих незалежних подій і дорівнює

$$\begin{aligned} P(x, \theta) &= f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n, \theta) \cdot \delta^n = \\ &= f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n) \cdot \delta^n. \end{aligned}$$

Так як подія із ймовірністю  $P$  здійснилася насправді при першому ж випробуванні, то природно припустити, що їй відповідає максимальна ймовірність. Тому для оцінки слід взяти те значення  $\theta^*$  із області допустимих значень параметру  $\theta$ , для якого ця ймовірність приймає найбільше можливе значення.

Тоді коренем рівняння буде

$$\left| \frac{\partial P(x, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta^*} = 0. \quad (1.78)$$

Достатньою умовою максимуму є виконання нерівності

$$\frac{\partial^2 P(x, \theta)}{\partial \theta^2} < 0. \quad (1.79)$$

Рішення простіше отримати, якщо перейти до такої функції

$$L(x, \theta) = \ln \frac{P(x, \theta)}{\delta^n} = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \theta). \quad (1.80)$$

яка називається *функцією правдоподібності*.

Ймовірність  $P$  і функція  $L$  мають максимуми при одних і тих же значеннях визначених параметрів, а саме

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln P = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial \theta}, \quad P > 0. \quad (1.81)$$

У загальному випадку, коли потрібно оцінити одночасно декілька параметрів одновимірного, або багатовимірного розподілу, формулювання принципу максимальної правдоподібності зберігається. При цьому необхідно знайти таку сукупність допустимих значень параметрів  $\theta_1^*$ ,  $\theta_2^*$ , ...,  $\theta_k^*$ , яка дозволяє обернути функцію правдоподібності до максимуму.

Знайдемо методом максимальної правдоподібності оцінку параметра  $\lambda$  - показникового розподілу за вибіркою  $x_1, x_2, \dots, x_n$  із щільністю

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad 0 \leq x < \infty. \quad (1.82)$$

Функція правдоподібності прийме наступний вигляд:

$$L = \sum_{i=1}^n \ln \exp(-\lambda x_i) = n \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \lambda x_i. \quad (1.83)$$

Тоді

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0, \quad (1.84)$$

$$\lambda^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}}, \quad (1.85)$$

де  $\bar{x}$  – вибіркове середнє.

### 1.8. Оцінювання математичного сподівання і дисперсії нормально розподіленої випадкової величини. Дисперсія середнього серії вимірювань

Нехай розподіл випадкової величини  $X$  підпорядкований нормальному закону

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-M(X))^2}{2\sigma_x^2}\right) = \frac{1}{(2\pi\sigma_x^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(x-M(X))^2}{2\sigma_x^2}\right).$$

Тоді ймовірність спільної появи  $n$  незалежних подій  $X = x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) розраховується за виразом

$$P(x, M(X), \sigma_x^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma_x^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2\right) \delta^n. \quad (1.86)$$

і функція правдоподібності

$$L(x, M(X), \sigma_x^2) = \ln \frac{P}{\delta^n} = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma_x^2 - \frac{1}{2\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2. \quad (1.87)$$

Продиференціюємо (1.87) за  $M(X)$

$$\frac{\partial L}{\partial M(X)} = \frac{2}{2\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2. \quad (1.88)$$

Оскільки  $1/\sigma^2 \neq 0$ , то

$$\sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 = 0.$$

Тоді оцінка математичного сподівання дорівнює

$$M(X)^* = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (1.89)$$

де  $\bar{x}$  – середнє арифметичне вибірки (серії вимірювань).

Відмітимо, що для вибіркового середнього зберігаються всі властивості математичного сподівання.

Наприклад, якщо  $Z$  - нелінійна функція  $n$  незалежних випадкових величин

$$Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

то її вибіркоче середнє наближено виражається залежністю

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n).$$

Диференціюючи функцію правдоподібності (1.87) за  $\sigma^2$ , отримуємо

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_x^2} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{2(\sigma_x^2)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 = 0, \quad (1.90)$$

$$-\frac{1}{\sigma_x^2} \left[ n - \frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 \right] = 0. \quad (1.91)$$

Оскільки  $1/(2\sigma_x^2) \neq 0$ , то

$$n - \frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 = 0, \quad (1.92)$$

звідки знаходимо оцінку  $s^2$  для дисперсії випадкової величини:

$$(\sigma_x^2)^* = s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (1.93)$$

Відомо, що метод максимальної правдоподібності, як правило, завжди призводить до змістовних, хоча іноді і зміщених, оцінок, які мають найменшу можливу дисперсію при необмеженому зростанні обсягу вибірки. Так, вибіркоче дисперсія  $s^2$  виявляється зміщеною оцінкою генеральної дисперсії

$$M[s^2] = \frac{n-1}{n} \sigma_x^2. \quad (1.94)$$

Для отримання незміщеної оцінки необхідно дисперсію  $\sigma^2$  помножити на величину  $n/(n-1)$

$$S^2 = \sigma^2 \frac{n}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \quad (1.95)$$

Зменшення знаменника в (1.95) на одиницю безпосередньо пов'язано з тим, що величина  $\bar{x}$ , щодо якої беруться відхилення, сама залежить від елементів

вибірки. Кожна величина, що залежить від елементів вибірки і входить у формулу вибіркової дисперсії, називається зв'язком.

Акцентуємо увагу, що знаменник вибіркової дисперсії завжди дорівнює різниці між обсягом вибірки  $n$  і числом зв'язків ( $l$ ), накладених на цю вибірку.

При цьому різниця

$$f = n - l \quad (1.96)$$

називається кількістю ступенів вільності вибірки.

У практичних обчисленнях для вибіркової дисперсії  $S^2$  часто більш зручна математична залежність, що отримується з (1.95) шляхом відповідних простих арифметичних перетворень:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n-1} \quad (1.97)$$

Отже, для нормально розподіленої випадкової величини отримують за вибіркою наступні оцінки генеральних параметрів розподілення:

- середнє арифметичне  $\bar{x}$  для математичного сподівання  $M(X)$ ;

- вибіркoву дисперсію  $S^2$  для генеральної дисперсії  $\sigma^2$ .

Визначимо дисперсію середнього арифметичного через дисперсію одиничного спостереження, скориставшись властивостями дисперсії.

Якщо  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – незалежні випадкові величини,  $c_1, c_2, \dots, c_n$  – не випадкові величини, а функція  $Z$  розраховується як

$$Z = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n, \quad (1.98)$$

то дисперсія функції  $Z$  визначається наступним чином:

$$\sigma^2(Z) = c_1^2 \sigma^2(x_1) + c_2^2 \sigma^2(x_2) + \dots + c_n^2 \sigma^2(x_n). \quad (1.99)$$

Нехай у результаті однієї серії дослідів отримана вибірка  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Якщо провести кілька серій подібних спостережень, то в загальному випадку будуть отримані інші сукупності значень випадкової величини  $X$ :  $x_1', x_2', \dots, x_n'$ ;  $x_1'', x_2'', \dots, x_n''$ . Тому значення  $x_1, x_2, \dots, x_n$  у серії із  $n$  спостережень можна розглядати як випадкові величини з деякими дисперсіями  $\sigma^2(x_1), \sigma^2(x_2), \dots, \sigma^2(x_n)$ . Оскільки ці випадкові величини виникають при вимірюванні однієї і тієї ж випадкової величини  $X$ , то дисперсії їх доцільно вважати однаковими:

$$\sigma^2(x_1) = \sigma^2(x_2) = \dots = \sigma^2(x_n) = \sigma^2. \quad (1.100)$$

Застосуємо тепер (1.95) для випадку, коли  $Z$  є середнім арифметичним (у цьому випадку  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 1/n$ ):

$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} [\sigma^2(x_1) + \sigma^2(x_2) + \dots + \sigma^2(x_n)] = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad (1.101)$$

З (1.101) випливає, що дисперсія середнього в  $n$  разів менше дисперсії одиничного вимірювання, тому для стандартного відхилення

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (1.102)$$

Якщо прийняти  $\sigma(\bar{x})$  в якості міри випадкової помилки середнього для вибірки, то збільшення числа паралельних визначень однієї і тієї ж величини знижує величину випадкової помилки. Цю властивість випадкової величини використовують на практиці для підвищення точності результатів вимірювань.

Так як властивості генеральних дисперсій зберігаються і для їх оцінок – вибіркових дисперсій, то

$$S^2(z) = c_1^2 S^2(x_1) + c_2^2 S^2(x_2) + \dots + c_n^2 S^2(x_n), \quad (1.103)$$

$$S^2(\bar{x}) = \frac{S^2(x)}{n}, \quad S(\bar{x}) = \frac{S(x)}{\sqrt{n}}, \quad (1.104)$$

де  $S^2$  – вибіркова дисперсія;

$S$  – вибіркове відхилення.

### **1.9. Оцінювання випадкової і сумарної помилки опосередкованих вимірювань**

У загальному вигляді приклад опосередкованих вимірювань формулюється наступним чином, а саме: є відома функція декількох аргументів  $Z = F(X_1, X_2, \dots, X_k)$ , причому безпосередньо експериментально вимірюються випадкові величини  $X_1, X_2, \dots, X_k$ . При строгому статистичному аналізі випадкової помилки функції  $Z$  необхідно знайти закон розподілу функції за відомим законом розподілу аргументів, що пов'язано з великими обчислювальними труднощами. Через це сувору оцінку помилки опосередкованих вимірювань здійснити важко і практично недоцільно. Тому використовуються спрощені підходи, які значно полегшують розрахунки і разом з тим дають задовільні для практичних цілей результати.

Розглянемо спочатку випадок, коли  $Z$  є відомою функцією тільки одного параметра  $X$ :  $Z = f(X)$ . Введемо припущення про те, що в невеликих інтервалах зміни нормально розподіленого аргументу функція цього аргументу також підпорядковується нормальному закону розподілу.

Нехай  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – результати  $n$  вимірювань величини  $X$ . Для кожного з  $x_i$  можна знайти відповідне значення  $z_i$ , потім обчислити середнє  $\bar{z}$  і вибіркову

дисперсію  $s^2(Z)$  з кількістю ступенів вільності  $f = n - 1$ .

Тоді відповідно до попередньо викладеного маємо

$$\delta_{\text{вип}}(Z) = s(\bar{z})t_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{s(Z)}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad (1.105)$$

При обліку тільки випадкової помилки результат вимірювань функції слід записати так:

$$Z = \bar{z} \pm \delta_{\text{вип}}(Z) = \bar{z} \pm \frac{s(Z)}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}. \quad (1.106)$$

Якщо  $f(X)$  є складною функцією і кожен раз обчислення величини  $z_i$  за значенням  $x_i$  трудомістке, то можна визначити спочатку величини  $\bar{x}$  і  $s(X)$ , а потім перерахувати їх у відповідні величини  $\bar{z}$  і  $s(Z)$  за допомогою наближених формул:

$$\bar{z} = f(\bar{x}), \quad (1.107)$$

$$s(Z) = \left| \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{X=\bar{x}} s(X). \quad (1.108)$$

Для випадку, коли  $Z$  є відомою функцією декількох аргументів, використовуємо наступні припущення:

- 1) Випадкові величини  $X_1, X_2, \dots, X_k$  незалежні.
- 2) У невеликих інтервалах зміни аргументів функція  $Z$  розподілена нормально.
- 3) Вибіркова дисперсія величини  $z$  дорівнює відповідній генеральній

$$s^2(\bar{z}) = \sigma^2(\bar{z}). \quad (1.109)$$

Оцінка випадкової помилки функції проводиться в наступному порядку. Знаходимо середнє функції:

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k), \quad (1.110)$$

де  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$  – середні за вибірками відповідних аргументів. Потім за законом накопичення помилок оцінюємо вибіркову дисперсію

$$s^2(\bar{z}) = \sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial f}{\partial X_j} \right)_{X_j=\bar{x}_j} s^2(\bar{x}_j). \quad (1.111)$$

Тоді величина випадкової помилки функції визначається таким чином:

$$\delta_{\text{вип}}(Z) = U_{1-\frac{\alpha}{2}}(\bar{z}), \quad (1.112)$$

де  $U_{1-\frac{\alpha}{2}}$  – квантиль стандартного нормального розподілу, згідно таблиць визначення його значень дорівнює значенню 1,96 для рівня значущості  $\alpha = 0,05$ .

При обліку тільки випадкової помилки для довірчої ймовірності  $\gamma = 0,95$  результат вимірювань функції декількох аргументів слід записати так:

$$Z = \bar{z} \pm \delta_{\text{вип}}(Z) = \bar{z} \pm U_{1-\frac{\alpha}{2}} s(\bar{z}) = \bar{z} \pm 1.96 s(\bar{z}) \approx \bar{z} \pm 2s(\bar{z}). \quad (1.113)$$

Випадкову помилку опосередкованих вимірювань можна оцінити також, скориставшись формулами розрахунку похибок функцій приближених аргументів для випадку, коли похибки аргументу незалежні і випадкові:

$$\delta_{\text{вип}}(Z) \approx 2s(\bar{z}) = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \Delta x_j\right)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2 (2s(\bar{x}_j))^2}, \quad (1.114)$$

при цьому в якості абсолютної похибки аргументів слід використовувати подвійне значення середньоквадратичних відхилень їх середніх

$$\Delta x_j = 2s(\bar{x}_j). \quad (1.115)$$

У загальному випадку при поданні результатів вимірювань необхідно враховувати не тільки випадкову, але і систематичну помилку методики або приладу вимірювання. Припускаючи, що ці два типи помилки взаємозалежні, сумарна помилка вимірювань дорівнює:

$$\delta_{\text{сум}} = \delta_{\text{сист}} + \delta_{\text{вип}}. \quad (1.116)$$

Систематичні помилки є величинами, незалежними від числа вимірювань, і визначаються специфікою використовуваної апаратури і методом вимірювань. Так, наприклад, за допомогою ртутного термометра не можна виміряти температуру з точністю, більше  $0,01^{\circ}\text{C}$  (рідко  $0,005^{\circ}\text{C}$ ); значення еталонного опору електричному струмові може бути виміряно з точністю  $0,1\%$  або  $0,01\%$ ; тощо.

Якщо і джерела, і величини систематичних помилок визначені, то їх вплив на кінцевий результат опосередкованих вимірювань для функції кількох аргументів можна оцінити як граничну абсолютну похибку за формулою

$$\delta_{\text{сист}} = \delta_{\text{гр}} \approx \sum_{j=1}^k \left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| |\Delta x_j|. \quad (1.117)$$

Величина систематичної помилки обмежує кількість правильних

значущих цифр при поданні результатів експерименту.

З урахуванням систематичної помилки результат будь-якого вимірювання слід записувати наступним чином:

$$Z = \bar{z} \pm \delta_{\text{сум}} = \bar{z} \pm (\delta_{\text{сист}} + \delta_{\text{вип}}). \quad (1.118)$$

### 1.10. Перевірка однорідності результатів вимірювань

Грубі вимірювання є результатом поломки приладу, або недогляду експериментатора за процесом його проведення. При цьому результат, який містить грубу помилку, суттєво відрізняється за величиною. На цьому засновані статистичні критерії оцінки і виключення результатів, отриманих при «грубих» вимірах. Наявність грубої помилки у вибірці порушує характер розподілу випадкової величини, змінює його параметри, тобто порушується однорідність спостережень.

Отже, виявлення грубих помилок можна трактувати як перевірку однорідності спостережень, тобто перевірку гіпотези про те, що всі елементи вибірки отримані з однієї і тієї ж генеральної сукупності.

Нехай є вибірка  $x_1, x_2, \dots, x_n$  значень нормально розподіленої випадкової величини  $X$ . Позначимо через  $x_{\max}$  (або  $x_{\min}$ ) найбільший (або найменший) результат вимірювань. Величини

$$v = \frac{x_{\max} - \bar{x}}{s \sqrt{\frac{n-1}{n}}} \quad (1.119)$$

$$v' = \frac{\bar{x} - x_{\min}}{s \sqrt{\frac{n-1}{n}}} \quad (1.120)$$

мають спеціальний розподіл, що залежить тільки від кількості ступенів вільності  $f = n - 2$ .

Величина  $x_{\max}$  ( $x_{\min}$ ) виключається з вибірки як грубий вимір (на рівні значення  $\alpha$ ), якщо визначене за формулами значення  $v$  або  $v'$  виявиться більше табличного.

Якщо сумнів викликають два або три елементи вибірки, обирають такий спосіб. Для всіх сумнівних елементів обчислюють  $v(v')$ , і дослідження починається з елемента, що має найменше значення  $v(v')$ . Решта сумнівні елементи з вибірки виключаються. Для цієї зменшеної вибірки обчислюють  $\bar{x}$ ,  $s$  і нове значення  $v(v')$  для досліджуваного елемента. Якщо досліджуваний елемент є результатом грубого виміру, тоді ще з більшими підставами можна вважати грубими раніше виключені елементи. Якщо досліджуваний елемент не є грубим виміром, його приєднують до вибірки і починають досліджувати наступний за

величиною  $v$  ( $v'$ ) елемент вибірки. При цьому знову обчислюючи нові значення  $\bar{x}$ ,  $s$ , і т.д.

### Контрольні запитання та завдання

1. Яку величину називають випадковою? Дайте визначення дискретної випадкової величини.
2. Що таке закон розподілу дискретної випадкової величини?
3. Які форми запису закону розподілу дискретної випадкової величини Ви знаєте?
4. Що таке варіаційний ряд?
5. Що собою представляє функція розподілу дискретної випадкової величини?
6. Дайте визначення неперервної випадкової величини.
7. Які існують форми представлення закону розподілу неперервної випадкової величини?
8. Сформулюйте визначення щільності розподілу ймовірності неперервної випадкової величини. Властивості функції щільності.
9. Наведіть визначення та формули для розрахунку математичного сподівання випадкової величини.
10. Наведіть формули для визначення дисперсії випадкової величини.
11. Що характеризує середнє квадратичне відхилення?
12. Дайте визначення генеральної та вибіркової сукупності.
13. Які способи відбору до вибірки Ви знаєте? Навести приклади.
14. Що таке варіаційний ряд?
15. Наведіть приклад статистичного розподілу вибірки. Знайдіть обсяг вибірки.
16. Що таке статистична оцінка невідомого параметра генеральної сукупності?
17. Запишіть формули для знаходження вибіркової середньої та дисперсії вибірки.
18. Запишіть формули для знаходження генеральної середньої та генеральної дисперсії.
19. Поясніть, чи може значення дисперсії дорівнювати значенню стандартного відхилення.
20. Які фактори повинні братися до уваги при виборі кількості інтервалів гістограми?
21. Дайте визначення генеральної та вибіркової сукупностей.
22. Чому дорівнює площа всіх прямокутників у гістограмі частот?
23. Чому дорівнює площа одного прямокутника в гістограмі частот?
24. Поясніть порядок оцінювання невідомих параметрів розподілу вибірки.
25. У чому полягає сутність методу максимальної правдоподібності?
26. Як перевірити однорідності результатів вимірювань?

27. Поясніть поняття - повторна та безповторна вибірки.
28. Що таке репрезентативна вибірка?
29. Що таке зсунена, незсунена, ефективна та змістовна статистична оцінка?
30. Поясніть порядок оцінювання випадкової та сумарної помилки опосередкованих вимірювань.

## РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ПЕРЕВІРКИ СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ ПРИ ОБРОБЦІ РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ

### 2.1. Статистична гіпотеза

Доволі часто необхідно знати закон розподілу генеральної сукупності. Проте, якщо закон розподілу невідомий, але існує передбачення, що він має певний визначений вид (наприклад  $A$ ), висувають гіпотезу: генеральна сукупність розподілена за законом  $A$ . Таким чином у цій гіпотезі мова йде про вид передбаченого розподілу.

Можливий випадок, коли закон розподілу відомий, а його параметри невідомі. Якщо є умови передбачити, що невідомий параметр  $\theta$  дорівнює певному значенню  $\theta_0$ , то висувають гіпотезу:  $\theta = \theta_0$ . Таким чином у цій гіпотезі мова йде про передбачену величину параметру одного відомого розподілу.

Можливі і інші гіпотези: про рівність параметрів двох або декількох розподілень, про незалежність вибірок та багато іншого.

*Статистичною* називають *гіпотезу* про вид невідомого розподілу, або про параметри відомих розподілень.

Приклади типів статистичних гіпотез:

- генеральна сукупність розподілена за законом Пуассона (або нормальним законом розподілу);
- дисперсії двох нормальних сукупностей рівні між собою.

Статистичні гіпотези першого типу називають *непараметричними*, а другого типу – *параметричними*.

У першій гіпотезі зроблено передбачення про вид невідомого розподілу, а в другому – про параметри двох відомих розподілів.

Поряд із висунутою гіпотезою розглядають і протилежну їй гіпотезу. Якщо висунута гіпотеза буде відхилена, то має місце протилежна гіпотеза. По цій причині ці гіпотезі слід розрізняти.

*Нульовою* (основною) називають гіпотезу  $H_0$ .

*Конкуруючою* (альтернативною) називають гіпотезу  $H_1$ , яка протилежна нульовій.

**Приклад.** Нульова гіпотеза передбачає, що математичне сподівання нормального розподілу дорівнює  $a = 10$ , тоді конкуруюча гіпотеза, може передбачати, що  $a \neq 10$ . Коротко можна записати так:  $H_0: a = 10; H_1: a \neq 10$ .

Розрізняють гіпотези, що містять одне або більше одного передбачень.

*Простою* називають гіпотезу, що містить тільки одне передбачення. Наприклад, якщо  $\lambda$  – параметр показникового розподілу, то  $H_0: \lambda = 5$  – проста гіпотеза  $H_0$ : математичне сподівання  $a = 3$  (при цьому  $\sigma$  відома) нормального розподілу – проста.

*Складною* називають гіпотезу, яка складається із зліченої або незліченої кількості простих гіпотез. Наприклад, складна гіпотеза  $H_0: \lambda > 5$  складається із незліченої множини простих гіпотез виду  $H_i: \lambda = b_i$ , де  $b_i$  – будь-яке число, що

більше за 5. Гіпотеза  $H_0$ : математичне сподівання  $a = 3$  ( $\sigma$  невідома) нормального розподілу – складна.

## 2.2. Помилки першого та другого роду

Висунута гіпотеза може бути вірною або невірною, тому виникає необхідність її перевірки. Оскільки перевірку виконують статистичними методами, її називають *статистичною*. У підсумку статистичної перевірки гіпотези в двох випадках може бути прийняте невірне рішення, тобто можуть бути отримані помилки двох родів.

*Помилка першого роду* - це така, коли буде відхилена правильна гіпотеза. Ймовірність зробити помилку першого роду прийнято позначати через літеру  $\alpha$ , її ще називають *рівнем значущості*. Наприклад, якщо прийнято рівень значущості  $\alpha=0,05$ , то це свідчить, що у п'яти випадках із ста маємо ризик отримати помилку першого роду (тобто відхилити правильну гіпотезу).

*Помилка другого роду* - це така, коли буде прийнята неправильна гіпотеза.

Підкреслимо, що в наслідки цих помилок можуть бути різними. Наприклад, якщо відхилене правильне рішення («зупинити будівництво дому»), то ця помилка першого роду призведе до матеріальних втрат; якщо ж прийнято неправильне рішення («продовжувати будівництво дому, не беручи до уваги можливість його руйнування»), то ця помилка другого роду може призвести до загибелі людей. Можна також навести приклади, коли помилка першого роду призведе до більш тяжких наслідків, ніж помилка другого роду.

## 2.3. Статистичний критерій

Для перевірки нульової гіпотези використовують спеціально обрану випадкову величину, точне або приблизне розподілення якої відоме. Цю величину позначають через літеру  $U$  або  $Z$ , якщо вона розподілена за нормальним законом;  $T$  – за законом Стьюдента;  $\chi^2$  – за законом хи-квадрат. Оскільки у цьому параграфі вид розподілення не буде братися до уваги, позначимо цю величину через літеру  $K$ .

*Статистичним критерієм* (або просто критерієм) називають випадкову величину  $K$ , що використовується для перевірки нульової гіпотези.

Наприклад, якщо перевіряють гіпотезу про рівність дисперсій нормальних генеральних сукупностей, то в якості критерію  $K$  обирають відношення виправлених вибірових дисперсій:

$$K = F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Ця величина випадкова, тому що в різних експериментах дисперсії приймають різні, наперед невідомі значення, та розподілена за законом Фішера – Снедекора.

Для перевірки гіпотези за даними вибірок розраховують часткові значення величин, що визначають критерій, і таким чином отримують часткові (спостережені) значення критерію.

*Спостереженими (емпіричними) значеннями  $K_{\text{спост}}$*  називають значення критерію, що розрахований за вибірками.

Наприклад, якщо за двома вибірками знайдені виправлені вибіркові дисперсії  $s_1^2=20$  та  $s_2^2=5$ , то спостережені значення критерію:  $K_{\text{спост}} = F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{20}{5} = 4$ .

## 2.4. Критична область. Область прийняття гіпотези

Після вибору визначеного критерію множину усіх його можливих значень розбивають на дві неперехресні підмножини: одна з них вміщує значення критерію, при якому нульова гіпотеза відхиляється, а друга – при якій вона приймається.

*Критичною областю* називають сукупність значень критерію, при яких нульову гіпотезу відхиляють.

*Областю прийняття гіпотези (областю допустимих значень)* називають сукупність значень критерію, при яких гіпотезу приймають.

Основний принцип перевірки статистичних гіпотез можна сформулювати так: якщо спостережене значення критерію належить критичній області – гіпотезу відхиляють, якщо спостережене значення критерію належить області прийняття гіпотези – гіпотезу приймають.

Оскільки критерій  $K$  – одномірна випадкова величина, усі її можливі значення належать деякому інтервалу.

Тому критична область та область прийняття гіпотези також є інтервалами, а це свідчить про те, що є точки, які їх розділяють.

*Критичними точками  $k_{\text{кр}}$*  називають точки, що відокремлюють критичну область від області прийняття гіпотези.

Розрізняють односторонню (правосторонню або лівосторонню) та двосторонню критичні області.

Односторонньою *правосторонньою* називають критичну область, що визначається нерівністю:  $K > k_{\text{кр}}$ , де  $k_{\text{кр}}$  – позитивне число.

Односторонньою *лівосторонньою* називають критичну область, що визначається нерівністю:  $K < k_{\text{кр}}$ , де  $k_{\text{кр}}$  – від’ємне число.

*Двосторонньою* називають критичну область, що визначається нерівностями:  $K < k_1$ ,  $K > k_2$ , де  $k_2 > k_1$ .

Зокрема, якщо критичні точки симетричні відносно нуля, двостороння критична область визначається нерівностями (при  $k_{\text{кр}} > 0$ ):  $K < -k_{\text{кр}}$ ,  $K > k_{\text{кр}}$  або  $|K| > k_{\text{кр}}$ .

## 2.5. Відшукування правосторонньої критичної області

Правостороння критична область визначається нерівністю  $K > k_{кр}$ , де  $k_{кр} > 0$ . Бачимо, що для відшукування правосторонньої критичної області достатньо знайти критичну точку. Розглянемо підхід, як це практично реалізувати.

Для її знаходження задаються достатньо малою ймовірністю – рівнем значущості  $\alpha$ . Після цього шукають критичну точку  $k_{кр}$ , виходячи з вимоги, щоб при умові вірності нульової гіпотези ймовірність того, що критерій  $K$  прийме значення більше за  $k_{кр}$ , була б рівна прийнятому рівню значущості:

$$P(K > k_{кр}) = \alpha.$$

Для кожного критерію використовують відповідні таблиці, за якими і знаходять критичну точку, що задовольняє цю вимогу.

*Зауваження 1.* Коли критична точка знайдена, за даними вибірок розраховують значення критерію, що спостерігають, і якщо вийде, що  $K_{спост.} > k_{кр}$ , то нульову гіпотезу відхиляють, а якщо  $K_{спост.} < k_{кр}$ , то немає потреби, щоб відхилити нульову гіпотезу.

*Пояснення.* Чому правостороння критична область була визначена, виходячи з умови, щоб при вірності нульової гіпотези виповнювалося відношення:

$$P(K > k_{кр}) = \alpha? \quad (2.1)$$

Оскільки ймовірність події  $K > k_{кр}$  мала ( $\alpha$  – мала ймовірність), така подія при вірності нульової гіпотези, в силу принципу практичної неможливості малоїмовірних подій, в єдиному випробуванні не повинно настати. Якщо ж це відбулося, то це можна пояснити тим, що нульова гіпотеза невірна, і тому вона повинна бути відхилена. Таким чином, вимоги (2.1) визначають такі значення критерію, при яких нульова гіпотеза відхиляється, а ці значення і визначають правосторонню критичну область.

*Зауваження 2.* Значення критерію, що спостерігають, можуть виявитися більшим за  $k_{кр}$  не тому, що нульова гіпотеза невірна, а за іншими причинами (малий обсяг вибірки, недоліки методи випробувань тощо). У цьому випадку, відхиливши вірну нульову гіпотезу, роблять помилку першого роду. Ймовірність цієї помилки дорівнює рівню значущості  $\alpha$ . Тому, виконуючи умови (2.1), ми з ймовірністю  $\alpha$  ризикуємо зробити помилку першого роду.

Доречи зауважимо, що в інструкціях по контролю за якістю продукції ймовірність признати неякісною партію нормальних виробів називають «ризиком виробника», а ймовірність прийняти неякісну партію виробів – «ризиком споживача».

*Зауваження 3.* Хай нульова гіпотеза прийнята: буде помилкою думати, що таким чином вона доказана. Дійсно, відомо, що один приклад, який підтверджує вірність деякого спільного твердження, ще не є його доказом. Тому вірним буде стверджувати, що «дані спостережень співпадають із нульовою гіпотезою і, таким чином, не дозволяють її відхилити».

На практиці для більшої впевненості прийняття гіпотези її перевіряють іншими способами або повторюють випробування, суттєво збільшивши обсяг вибірки.

Відхиляють гіпотезу більш категорично, ніж приймають її. Дійсно, відомо, що достатньо надати один приклад, що є протиріччям загальному твердженню, щоб це твердження відхилити. Якщо виявилось, що значення критерію, який спостерігають, належить критичній області, то цей факт і є прикладом того, що виступає у протиріччя з нульовою гіпотезою, що і дозволяє її відхилити.

Відшукання лівосторонньої та двосторонньої критичних областей (як і для правосторонньої) починають із встановлення відповідних критичних точок.

Лівостороння критична область визначається нерівністю  $K < k_{кр}$ , де  $k_{кр} < 0$ .

Лівостороння критична область була визначена виходячи з умови, щоб при вірності нульової гіпотези виповнювалося співвідношення:  $P(K < k_{кр}) = \alpha$ .

Двосторонньою називають критичну область, що визначається нерівностями  $K < k_1$ ,  $K > k_2$ . Критичні точки знаходять виходячи з вимоги, щоб при вірності нульової гіпотези сума ймовірностей того, що критерій буде мати значення, що менше за  $k_1$  або більше за  $k_2$ , дорівнювала прийнятому рівню значущості:

$$P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha. \quad (2.2)$$

Якщо критерій симетричний відносно нуля, то  $P(K < -k_{кр}) = P(K > k_{кр})$ . Тому отримуємо  $P(K > k_{кр}) = \alpha/2$ .

## 2.6. Потужність критерію

До цього моменту, ми знаходили критичну область, виходячи з вимог, що ймовірність потрапляння у неї критерію дорівнювала  $\alpha$  за умови, що гіпотеза вірна. Виявляється, доцільно ввести ймовірність потрапляння критерію в критичну область за умови, що нульова гіпотеза невірна і, таким чином, вірна конкуруюча гіпотеза.

*Потужністю* критерію називають ймовірність потрапляння критерію в критичну область за умови, що вірна конкуруюча гіпотеза. Іншими словами, *потужність* критерію є ймовірність того, що нульова гіпотеза буде відхилена, якщо вірна конкуруюча гіпотеза.

Нехай для перевірки гіпотези прийнятий визначений рівень значущості та вибірка має фіксований обсяг. Розглянемо підхід, як вибрати критичну область. Покажемо, що її доцільно визначити так, щоб потужність критерію була максимальною. Попередньо пересвідчимося, що якщо ймовірність помилки другого роду (прийняти невірну гіпотезу) дорівнює  $\beta$ , то потужність дорівнює  $1 - \beta$ . Дійсно, якщо  $\beta$  – ймовірність помилки другого роду, тобто подія «прийнята нульова гіпотеза, при цьому вірна конкуруюча», то потужність критерію дорівнює  $1 - \beta$ .

Хай потужність  $1 - \beta$  зростає; тому зменшується ймовірність  $\beta$  зробити помилку другого роду. Таким чином, чим потужність більша, тим ймовірність помилки другого роду менша.

Таким чином, якщо рівень значущості вже визначено, то критичну область слід будувати так, щоб потужність критерію була максимальною. Виконання цієї умови повинно забезпечити мінімальну помилку другого роду, що є дуже бажаним.

*Зауваження 1.* Оскільки ймовірність події «помилка другого роду допущена» дорівнює  $\beta$ , то ймовірність протилежної події «помилка другого роду не допущена» дорівнює  $1 - \beta$ , тобто потужності критерію. Звідси, потужність критерію є ймовірність того, що не буде допущена помилка другого роду.

*Зауваження 2.* Відомо, що чим менше ймовірність помилок першого та другого роду, тим критична область буде «краще». Однак, при заданому обсязі вибірки зменшити одночасно  $\alpha$  та  $\beta$  неможливо; якщо зменшити  $\alpha$ , то  $\beta$  буде зростати. Наприклад, якщо прийняти що  $\alpha=0$ , то будуть прийматися усі гіпотези, у тому числі і невірні, тобто зростає ймовірність  $\beta$  помилки другого роду.

Як же обрати  $\alpha$ ? Відповідь на це питання залежить від «тяжкості наслідків» помилок для кожної конкретної задачі. Наприклад, якщо помилка першого роду призведе до більших втрат, а другого роду – до малих, то слід прийнято по можливості як найменше значення  $\alpha$ .

Якщо  $\alpha$  вже обрано, то користуючись теоремою Неймана-Пірсона, можна побудувати критичну область, для якої  $\beta$  буде мінімальною, а значить потужність критерію максимальною.

*Зауваження 3.* Єдиний спосіб одночасного зменшення ймовірностей помилок першого та другого роду є у збільшенні обсягу вибірок.

## **2.7. Порівняння двох дисперсій нормальних генеральних сукупностей. Розподіл Фішера**

На практиці задача порівняння дисперсій виникає, якщо треба порівняти точність вимірювальних приладів, інструментів, або самих методів вимірювання. Вочевидь кращим буде той прилад, який забезпечує найменше розсіяння результатів вимірювань, тобто найменшу дисперсію.

Хай генеральні сукупності  $X$  та  $Y$  розподілені нормально. За незалежними вибірками з обсягами, що дорівнюють відносно  $n_1$  та  $n_2$ , знайдені виправлені дисперсії  $s^2_X$  та  $s^2_Y$ . Необхідно за виправленими дисперсіями при заданому рівні значущості  $\alpha$  перевірити нульову гіпотезу  $H_0: D(X) = D(Y)$ .

Так як виправлені дисперсії є незміщеними оцінками генеральних дисперсій, тобто  $M[s^2_X] = M[s^2_Y]$ , то нульову гіпотезу можна записати так:

$$H_0: M[s^2_X] = M[s^2_Y]. \quad (2.3)$$

Таким чином, необхідно перевірити, що математичні сподівання виправлених вибірових дисперсій рівні між собою. Така задача ставиться тому, що зазвичай виправлені дисперсії виявляються різними. Виникає питання: суттєво чи ні різняться виправлені дисперсії?

Якщо виявиться, що нульова гіпотеза вірна, тобто генеральні дисперсії однакові, то різниця між виправленими дисперсіями не значна та є наслідком випадкових причин, наприклад випадковим відбором об'єктів вибірки.

Наприклад, якщо різниця між виправленими вибіровими дисперсіями результатів вимірів, що виконані двома приладами, виявилася не значуща, то ці прилади мають однакову точність. Якщо виявиться, що нульова гіпотеза відхилена, тобто генеральні дисперсії неоднакові, то різниця між виправленими дисперсіями значуща і це не може бути наслідком випадкових причин, а є наслідком того, що самі генеральні дисперсії мають різні значення.

Так, наприклад, якщо різниця між виправленими вибіровими дисперсіями результатів вимірів, які виконані двома приладами, виявилася значуща, то ці прилади мають різну точність. В якості критерію перевірки нульової гіпотези про рівність генеральних дисперсій виберемо відношення більшої за значенням виправленої вибірової дисперсії до меншої, тобто випадкову величину:  $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ .

Щільність  $F$ -розподілу визначається за виразом

$$\varphi(F) = \frac{\Gamma(\frac{f_1+f_2}{2})}{\Gamma(\frac{f_1}{2})\Gamma(\frac{f_2}{2})} \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{\frac{f_1}{2}} \frac{F^{(f_1-2)/2}}{(1+\frac{f_1}{f_2}F)^{(f_1+f_2)/2}}, \quad 0 \leq F \leq \infty, \quad (2.4)$$

де  $\Gamma(f)$  – гамма-функція.

Розподіл Фішера залежить тільки від кількості ступенів вільності  $f_1$  і  $f_2$ .

На рис.2.1 наведені криві щільності ймовірності  $F$ -розподілу для деяких значень  $f_1$  і  $f_2$ .

Криві мають асиметричну форму.

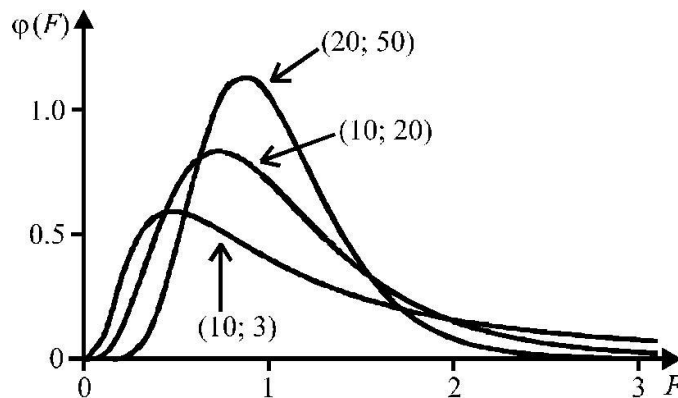


Рис. 2.1 – Щільність  $F$ -розподілу

На рис. 2.1 наведені квантилі  $F_{1-\alpha}$  (критерії Фішера) для рівня значущості  $\alpha = 0,05$ . Для визначення квантилів  $F_\alpha$  використовується співвідношення:

$$F_\alpha(f_1, f_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(f_2, f_1)}. \quad (2.5)$$

Величина  $F$  за умов вірності нульової гіпотези має розподіл Фішера-Снедекора зі ступенями свободи  $k_1 = n_1 - 1$  та  $k_2 = n_2 - 1$ , де  $n_1$  – обсяг вибірки, за якою розрахована більша дисперсія,  $n_2$  – обсяг вибірки, за якою розрахована менша дисперсія. Нагадаємо, що розподіл Фішера-Снедекора залежить лише від кількості ступенів свободи та не залежить від інших параметрів.

Критична область будується в залежності від вигляду конкуруючої гіпотези.

*Випадок 1.* Нульова гіпотеза  $H_0: D(X) = D(Y)$ . Конкуруюча (альтернативна) гіпотеза  $H_1: D(X) > D(Y)$ .

У цьому випадку будуємо односторонню, а саме правосторонню критичну область. Виходимо з вимоги, щоб ймовірність потрапляння критерію  $F$  в цю область при вірності нульової гіпотези дорівнювала би прийнятому рівню значущості:

$$P[F > F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)] = \alpha. \quad (2.6)$$

Критичну точку  $F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)$  знаходять за таблицею критичних точок розподілу Фішера-Снедекора і тоді правостороння критична область визначається нерівністю  $F > F_{кр}$ , а область прийняття нульової гіпотези – нерівністю  $F < F_{кр}$ .

Задамо через  $F_{спост}$  відношення більшої виправленої дисперсії до меншої, що розраховані за даними спостережень та сформулюємо правила перевірки нульової гіпотези.

**Правило 1.** Для того, щоб при заданому рівні значущості перевірити нульову гіпотезу  $H_0: D(X) = D(Y)$  про рівність генеральних дисперсій нормальних сукупностей при конкуруючій гіпотезі  $H_1: D(X) > D(Y)$ , треба розрахувати відношення більшої виправленої дисперсії до меншої, тобто  $F_{спост} = \frac{s_6^2}{s_M^2}$ , а по таблиці критичних точок розподілу Фішера-Снедекора за значенням заданого рівня значущості  $\alpha$  та кількості ступенів свободи  $(k_1, k_2)$  знаходять критичну точку  $F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)$ . Якщо  $F_{спост} < F_{кр}$  – немає причин відхиляти нульову гіпотезу. Якщо  $F_{спост} > F_{кр}$  – нульову гіпотезу відхиляють.

**Приклад.** За двома незалежними вибірками обсягом  $n_1 = 12$  та  $n_2 = 15$ , що взяті з нормальних генеральних сукупностей  $X$  та  $Y$ , знайдені виправлені вибіркові дисперсії  $s_X^2 = 11,41$  та  $s_Y^2 = 6,52$ . При рівні значущості  $0,05$  перевірити нульову гіпотезу  $H_0: D(X) = D(Y)$  про рівність генеральних дисперсій при конкуруючій гіпотезі  $H_1: D(X) > D(Y)$ .

*Розв'язання (випадок 1).* Знайдемо відношення більшої виправленої дисперсії до меншої:

$$F_{\text{спост}} = \frac{s_6^2}{s_M^2} = 11,41/6,52 = 1,75.$$

Конкуруюча гіпотеза має вигляд  $D(X) > D(Y)$ , тому критична область – правостороння.

При рівні значущості  $\alpha=0,05$  та кількості ступенів свободи  $k_1 = 12 - 1 = 11$  і  $k_2 = 15 - 1 = 14$  знаходимо критичну точку  $F_{кр}(0,05; 11; 14) = 2,56$ .

Так як  $F_{\text{спост}} < F_{кр}$  – немає причин відхилити нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій.

*Розв'язання (випадок 2).* Нульова гіпотеза  $H_0: D(X) = D(Y)$ . Конкуруюча гіпотеза  $H_1: D(X) \neq D(Y)$ .

В цьому випадку будують двосторонню критичну область, виходячи з умови, щоб ймовірність потрапляння критерію в цю область при передумові вірності нульової гіпотези дорівнювала би прийнятому рівню значущості  $\alpha$ .

Як обрати границі критичної області? Виявляється, що найбільша потужність (ймовірність потрапляння критерію в критичну область при вірності конкуруючої гіпотези) досягається тоді, коли ймовірність потрапляння критерію в кожний із двох інтервалів критичної області дорівнює  $\alpha/2$ .

Таким чином, якщо позначити через  $F_1$  ліву межу критичної області та через  $F_2$  – праву, то повинно мати місце співвідношення:

$$P(F < F_1) = \alpha/2, \quad P(F > F_2) = \alpha/2.$$

Бачимо, що достатньо знайти критичні точки, щоб знайти саму критичну область:  $F < F_1, F > F_2$ , а також область прийняття нульової гіпотези:  $F_1 < F < F_2$ .

Як практично знайти критичні точки? Праву критичну точку  $F_2 = F_{кр}(\alpha/2; k_1; k_2)$  знаходять безпосередньо за таблицею критичних точок розподілу Фішера-Снедекора за рівнем значущості  $\alpha/2$  та ступенями свободи  $k_1$  та  $k_2$ .

Однак, лівих критичних точок ця таблиця не містить і тому знайти  $F_1$  безпосередньо за таблицею неможливо. Існує спосіб, що дозволяє подолати цю перешкоду. Акцентуємо увагу на тому, як забезпечити потрапляння критерію  $F$  у двосторонню критичну область із ймовірністю, яка дорівнює прийнятому рівню значущості  $\alpha$ .

Виявляється, що достатньо знайти праву критичну область  $F_2$  за умови рівня значущості, що вдвічі менший заданого. Тоді не тільки ймовірність потрапляння критерію в «праву частину» критичної області (тобто правіше  $F_2$ ) дорівнює  $\alpha/2$ , але і ймовірність потрапляння цього критерію в «ліву частину» критичної області (тобто правіше  $F_1$ ) також дорівнює  $\alpha/2$ . Так як ці події несумісні, то ймовірність потрапляння критерію в усю двосторонню критичну область буде дорівнювати  $\alpha = \alpha/2 + \alpha/2$ .

Таким чином, у випадку конкуруючої гіпотези  $H_1: D(X) \neq D(Y)$  достатньо знайти критичну точку  $F_2 = F_{кр}(\alpha/2; k_1; k_2)$ .

**Правило 2.** Для того щоб при заданому рівні значущості  $\alpha$  перевірити нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій нормально розподілених сукупностей при конкуруючій гіпотезі  $H_1: D(X) \neq D(Y)$  необхідно розрахувати

відношення більшої виправленої дисперсії до меншої, тобто  $F_{\text{спост}} = \frac{s_0^2}{s_M^2}$  та за таблицею критичних точок розподілу Фішера-Снедекора за рівнем значущості  $\alpha/2$  (вдвічі меншим за заданий) та кількості ступенів свободи  $k_1$  і  $k_2$  знаходять критичну точку  $F_2 = F_{\text{кр}}(\alpha/2; k_1; k_2)$ .

Якщо  $F_{\text{спост}} < F_{\text{кр}}$  – немає причин відхилити нульову гіпотезу.

Якщо  $F_{\text{спост}} > F_{\text{кр}}$  – нульову гіпотезу відхиляють.

**Приклад 2.** За двома незалежними вибірками обсягом  $n_1 = 10$  та  $n_2 = 18$ , що взяті з нормальних генеральних сукупностей  $X$  та  $Y$ , знайдені виправлені вибіркові дисперсії  $s_X^2 = 1,233$  та  $s_Y^2 = 0,41$ . При рівні значущості  $\alpha = 0,1$  перевірити нульову гіпотезу  $H_0: D(X) = D(Y)$  про рівність генеральних дисперсій при конкуруючій гіпотезі  $H_1: D(X) \neq D(Y)$ .

*Розв'язання.* Знайдемо відношення більшої виправленої дисперсії до меншої:  $F_{\text{спост}} = \frac{s_0^2}{s_M^2} = 1,23/0,41 = 3,0$ . Конкуруюча гіпотеза має вигляд  $D(X) \neq D(Y)$ , тому критична область – двостороння.

За відповідними таблицями, при рівні значущості  $\alpha/2 = 0,1/2 = 0,05$  (тобто вдвічі меншим за заданий) та кількості ступенів свободи  $k_1 = 10 - 1 = 9$  і  $k_2 = 18 - 1 = 17$  знаходимо критичну точку  $F_{\text{кр}}(0,05; 9; 17) = 2,5$ .

Так як  $F_{\text{спост}} > F_{\text{кр}}$  – нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій відхиляємо. Іншими словами, вибіркові виправлені дисперсії різняться значимо. Наприклад, якщо б розглянуті дисперсії характеризували б точність двох методів вимірювання, то слід віддати перевагу тому методу, який має меншу дисперсію, а саме - 0,41.

## 2.8. Визначення дисперсії за поточними вимірами. Порівняння декількох дисперсій

Математичне сподівання і дисперсія генеральної сукупності оцінюються середнім і дисперсією вибірки тим точніше, чим більший обсяг вибірки. При цьому середнє характеризує результат вимірювань, а дисперсія – точність цього результату (дисперсія відтворюваності).

Якщо зроблено  $n$  паралельних дослідів (проведених при незмінному комплексі основних факторів) і отримана вибірка  $y_1, y_2, \dots, y_n$  значень вимірюваної величини, то дисперсія відтворюваності дорівнює

$$S_{\text{відтв}}^2 = \frac{\sum_{u=1}^n (y_u - \bar{y})^2}{n-1}, \quad \text{де } \bar{y} = \frac{\sum_{u=1}^n y_u}{n}, \quad (2.7)$$

і помилка досліду (помилка відтворюваності)

$$S_{\text{відтв}} = \sqrt{S_{\text{відтв}}^2}. \quad (2.8)$$

Для оцінки точності застосовуваної методики можна поставити спеціальну серію дослідів, багато разів повторюючи вимір для одного і того ж об'єкта дослідження.

Однак більш надійним методом є визначення помилки відтворюваності за поточними вимірами. Припустимо, що виконуються вимірювання деякої фізичної величини для  $k$  досліджуваних зразків. При цьому для кожного зразка робиться різне число паралельних дослідів:  $n_1, n_2, \dots, n_k$ . Часткові дисперсії для кожної вибірки позначимо як  $s_1^2, s_2^2, \dots, s_k^2$ . Кількість ступенів вільності часткових дисперсій дорівнюють:  $f_1 = n_1 - 1, f_2 = n_2 - 1, \dots, f_k = n_k - 1$ . Загальна дисперсія відтворюваності всіх дослідів буде дорівнювати середньозваженому значенню часткових дисперсій (ваговими значеннями обирають ступені вільності):

$$s_{\text{відтв}}^2 = \frac{f_1 s_1^2 + f_2 s_2^2 + \dots + f_k s_k^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_k} = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2 + \dots + (n_k - 1)s_k^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_k - k}. \quad (2.9)$$

Кількість ступенів вільності загальної дисперсії дорівнює загальній кількості вимірювань без урахування кількості зв'язків, які використовуються для визначення  $k$  середніх:

$$f_{\text{відтв}} = n_1 + n_2 + \dots + n_k - k = \sum_{j=1}^k n_j - k. \quad (2.10)$$

Якщо кількість дослідів для кожного зразка однакова ( $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$ ), то

$$s_{\text{відтв}}^2 = \frac{(n-1)(s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_k^2)}{nk - k} = \frac{(n-1) \sum_{j=1}^k s_j^2}{k(n-1)} = \frac{\sum_{j=1}^k s_j^2}{k}. \quad (2.11)$$

Акцентуємо особливу увагу на тому, що при однаковій кількості паралельних дослідів загальна дисперсія відтворюваності дорівнює середньо арифметичному значенню часткових дисперсій. Кількість ступенів вільності дорівнює:  $f_{\text{відтв}} = k(n - 1)$ . Кількість ступенів вільності у загальній дисперсії відтворюваності набагато більше, ніж у кожній дисперсії окремо. Тому загальна дисперсія відтворюваності набагато точніше оцінює дисперсію генеральної сукупності.

При обчисленні дисперсії відтворюваності за поточними вимірами можна об'єднувати між собою тільки ті результати, які можна розглядати як вибірки із генеральних сукупностей із рівними дисперсіями.

Отже, при визначенні оцінки дисперсії за поточними вимірами

$$s_{\text{ВідТВ}}^2 = \frac{f_1 s_1^2 + f_2 s_2^2 + \dots + f_k s_k^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_k} = \frac{\sum_{j=1}^k f_j s_j^2}{f_{\text{ВідТВ}}}, \quad (2.12)$$

приймається нульова гіпотеза рівності відповідних генеральних дисперсій. Перевірити цю гіпотезу для вибірок різного обсягу можна за критерієм Бартлета. Учений Бартлет показав, що в умовах нульової гіпотези відношення  $B/C$ , де

$$B = f_{\text{ВідТВ}} \ln s_{\text{ВідТВ}}^2 - \sum_{j=1}^k f_j \ln s_j^2, \quad (2.13)$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left( \sum_{j=1}^k \frac{1}{f_j} - \frac{1}{f_{\text{ВідТВ}}} \right) \quad (2.14)$$

розподілене приблизно як  $\chi^2$  із  $(k-1)$  ступенями вільності, якщо всі  $f_j > 2$ .

Гіпотеза рівності генеральних дисперсій приймається, якщо при обраному рівні значущості  $\alpha$

$$\frac{B}{C} \leq \chi_{1-\alpha}^2. \quad (2.15)$$

Різницю між вибірковими дисперсіями можна вважати незначною, а самі вибіркові дисперсії – однорідними.

Так як завжди  $C > 1$ , то при  $B \leq \chi_{1-\alpha}^2$  нульову гіпотезу слід прийняти; якщо ж  $B > \chi_{1-\alpha}^2$ , то критерій Бартлета обчислюють повністю.

Якщо вибіркові дисперсії отримані за вибірками однакових обсягів ( $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$ ), то для їх порівняння використовують більш зручний і точніший підхід, а саме критерій Кохрена.

Кохрен досліджував розподіл відношення максимальної вибіркової дисперсії до суми всіх дисперсій

$$G = \frac{s_{\max}^2}{\sum_{j=1}^k s_j^2}. \quad (2.16)$$

Розподіл випадкової величини  $G$  залежить тільки від кількості підсумовуваних дисперсій  $k$  та кількості ступенів вільності  $f = n - 1$ , з яким визначена кожна дисперсія.

Якщо знайдене за вибірковими дисперсіями значення критеріями Кохрена виявиться меншим за табличне значення

$$G < G_{1-\alpha}(k, f), \quad (2.17)$$

то розбіжність між дисперсіями слід вважати випадковою при обраному рівні значущості. Якщо при цьому визначається оцінка для дисперсії відтворюваності,

то однорідні дисперсії можна усереднити.

## 2.9. Порівняння двох середніх. Розрахунок середньозваженого значення

Для порівняння між собою двох середніх, отриманих за вибірками з нормально розподілених генеральних сукупностей, застосовується критерій Стьюдента.

Нехай задані дві випадкові вибірки обсягами  $n_1$  та  $n_2$ . Перша вибірка взята з нормально розподіленої сукупності з параметрами  $M(X) = m_x$  і  $D(X) = \sigma_x^2$ , друга – з сукупності з параметрами  $M(Y) = m_y$  і  $D(Y) = \sigma_y^2$ . За вибірками отримані оцінки для цих параметрів:  $\bar{x}$ ,  $s_x^2$  та  $\bar{y}$ ,  $s_y^2$ .

Потрібно перевірити нульову гіпотезу:  $m_x = m_y$  за умови  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$ .

Однорідність дисперсії  $s_x^2$  і  $s_y^2$  перевіряється за критерієм Фішера. Розглянемо випадкову величину

$$z = \bar{x} - \bar{y} \quad (2.18)$$

За властивості лінійності (рівняння 2.16 – 2.18) величина  $z$  розподілена нормально з параметрами

$$m_z = m_x - m_y, \quad (2.19)$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2} = \sigma^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right). \quad (2.20)$$

Визначимо нормовану випадкову величину

$$\frac{z - m_z}{\sigma_z} = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (m_x - m_y)}{\sigma \sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)}}. \quad (2.21)$$

При зміні генерального стандарту вибіркового отримаємо величину, що описується розподілом Стьюдента

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (m_x - m_y)}{s \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \quad (2.22)$$

з кількістю ступенів вільності  $f = n_1 + n_2 - 2$ . В якості вибіркового стандарту використовується помилка дослідів, яка розраховується

$$s = \sqrt{\frac{f_1 s_1^2 + f_2 s_2^2}{f_1 + f_2}} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}. \quad (2.23)$$

При довірчій ймовірності  $\beta = 1 - \alpha$  отримуємо двосторонню оцінку для різниці ( $m_x - m_y$ )

$$\begin{aligned} \bar{x} - \bar{y} - t_{1-\alpha/2} s \sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)} &\leq m_x - m_y \\ &\leq \bar{x} - \bar{y} + t_{1-\alpha/2} s \sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

або односторонні оцінки

$$m_x - m_y \leq \bar{x} - \bar{y} + t_{1-\alpha} s \sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)}, \quad (2.25)$$

$$m_x - m_y \geq \bar{x} - \bar{y} - t_{1-\alpha} s \sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)}. \quad (2.26)$$

В умовах врахування нульової гіпотези  $m_x = m_y$  і нерівностей (2.24) – (2.26) обирають критерій перевірки цієї гіпотези. Нульова гіпотеза відкидається при двосторонньому критерії, якщо

$$|\bar{x} - \bar{y}| > t_{1-\alpha/2} s \sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)}, \quad (2.27)$$

і при односторонньому критерії, якщо

$$|\bar{x} - \bar{y}| > t_{1-\alpha} s \sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)}. \quad (2.28)$$

У тому випадку якщо вибіркові середні є оцінками одного і того ж математичного сподівання, а вибіркові дисперсії однорідні, то отримані вибірки можна об'єднати в одну серію і розрахувати для неї загальні середнє і дисперсію.

Наведеними критеріями не можна користуватися, якщо вибіркові дисперсії неоднорідні (тобто  $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ ). Для цього випадку існує кілька наближених критеріїв для порівняння двох середніх.

При  $n_1 = n_2 = n$  можна скористатися наближеним  $t$ -критерієм, а саме:

$$t \cong \frac{(\bar{x} - \bar{y})\sqrt{n}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \quad (2.29)$$

з кількістю ступенів вільності  $f = \frac{n-1}{c^2 - (1-c)^2}$ , де  $c = \frac{s_x^2}{s_x^2 + s_y^2}$ .

Якщо кількість ступенів вільності для дисперсії  $s_x^2$  дорівнює  $f_1 = n_1 - 1$ , а для дисперсії  $s_y^2 - f_2 = n_2 - 1$ , то можна користуватися іншим наближеним критерієм. Обчислимо величину

$$T = \frac{v_1 t_{1-\alpha/2}(f_1) + v_2 t_{1-\alpha/2}(f_2)}{\sqrt{v_1 + v_2}}, \quad (2.30)$$

де  $v_1 = s_x^2/n_1$  і  $v_2 = s_y^2/n_2$ . Нульова гіпотеза відхиляється, якщо  $|\bar{x} - \bar{y}| > T$ .

Сформульований критерій є двостороннім, він перетворюється в односторонній при заміні  $\alpha/2$  на  $\alpha$ .

При порівнянні декількох середніх можна використовувати  $t$ -критерій, проводячи порівняння попарно. Якщо вибіркові середні оцінюють одне й те саме математичне сподівання, то для отримання єдиної найкращої оцінки зазвичай використовується середньозважене значення.

Нехай незалежним чином отримано  $k$  оцінок ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) деякої величини  $X$ :

$$\bar{x}_j \pm \frac{s(x_j)}{\sqrt{n_j}} t_{1-\alpha/2}(f_j) = \bar{x}_j \pm \Delta x_j. \quad (2.31)$$

Визначимо внесок результату, що отриманий у кожній серії дослідів

$$w_j = 1/\Delta x_j^2. \quad \dots\dots\dots(2.32)$$

Тоді середньозважене значення (найкраща оцінка для  $X$ ) дорівнює

$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^k w_j \bar{x}_j}{\sum_{j=1}^k w_j}, \quad (2.33)$$

а її похибка визначається формулою

$$\Delta \bar{X} = \sqrt{1/\sum_{j=1}^k w_j}. \quad (2.34)$$

## 2.10 Порівняння вибіркового розподілу та розподілу генеральної сукупності. Критерії згоди Пірсона і Колмогорова

*Гіпотезу про нормальність* досліджуваного розподілу в математичній статистиці називають *основною гіпотезою*. Перевірку цієї гіпотези за вибіркою проводять за допомогою критеріїв згоди. Критерії згоди дозволяють визначити ймовірність того, що при гіпотетичному законі розподілу відхилення, яке спостерігається в даній вибірці, викликається випадковими причинами, а не помилкою в гіпотезі. Якщо ця ймовірність велика, то відхилення від

гіпотетичного закону розподілу слід визнати випадковим і вважати, що гіпотеза про передбачуваний закон розподілу не відхиляється. Критерій згоди дозволяє лише стверджувати, що гіпотеза не суперечить дослідним даним, якщо ймовірність спостережуваного відхилення від гіпотетичного закону велика. Найчастіше використовується один із двох критеріїв згоди: критерій Пірсона (критерій  $\chi^2$ ) і критерій Колмогорова.

*Критерій згоди Пірсона.* Для застосування критерію  $\chi^2$  весь діапазон зміни випадкової величини у вибірці обсягу  $n$  розбивається на  $k$  інтервалів (як правило, від 8 до 20). Кількість елементів вибірки, що потрапили в  $i$ -інтервал, позначимо через  $n_i$ . Побудована за цими даними гістограма вибіркового розподілу служить підставою для вибору типу закону розподілу.

Параметри цього розподілу можуть бути знайдені або з теоретичних міркувань або знаходженням їх оцінок за вибіркою. На підставі прийнятого закону розподілу обчислюються ймовірності  $p_i$  попадання випадкової величини  $X$  в  $i$ -інтервал. Величина, що характеризує відхилення вибіркового розподілу від передбачуваного, визначається формулою

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}, \quad (2.35)$$

де  $k$  – кількість інтервалів;  
 $n$  – обсяг вибірки.

Сума (2.35) має наближено  $\chi^2$ -розподілення з  $f = (k - c - 1)$  ступенями вільності, де  $c$  – кількість параметрів гіпотетичного закону розподілу, що визначаються за вибіркою. Для нормального розподілу  $c = 2$ , якщо  $\mu$  і  $\sigma$  визначаються за даною вибіркою.

Гіпотеза про прийнятий тип закону розподілу приймається на обраному рівні значущості  $\alpha$ , якщо  $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2$ , де  $\chi_{1-\alpha}^2$  – квантиль розподілу Пірсона для даного  $\alpha$  і кількості ступенів вільності  $f$ . В іншому випадку робиться висновок про те, що гіпотеза не узгоджується з вибірковою розподілом.

При використанні критерію  $\chi^2$  бажано, щоб обсяг вибірки був достатньо великим:  $n \geq 50 \div 150$ , а кількість елементів  $n_i \geq 5 \div 8$ . Ймовірність  $p_i$  для нормального закону розподілу можна визначити за формулою

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{a - \bar{x}}{s}\right). \quad (2.36)$$

При підрахунку теоретичних ймовірностей  $p_i$  вважається, що крайній лівий інтервал простягається до  $-\infty$ ; крайній правий до  $+\infty$ .

*Критерій згоди Колмогорова.* Для застосування цього критерію необхідно визначити найбільше абсолютне відхилення вибіркової функції розподілу  $F_n(x)$  від генеральної  $F(x)$ :

$$D = \max|F_n(x) - F(x)|. \quad (2.37)$$

Потім необхідно обчислити величину  $\lambda$ :

$$\lambda = D\sqrt{n}. \quad (2.38)$$

Якщо  $\lambda < \lambda_{1-\alpha}$ , то гіпотеза про збіг теоретичного закону розподілу  $F(x)$  з вибірковою  $F_n(x)$  не відхиляється. При  $\lambda \geq \lambda_{1-\alpha}$  гіпотеза відхиляється (або вважається сумнівною). Рівень значущості при застосуванні критерію Колмогорова обирають зазвичай в діапазоні (0,2 ... 0,3).

Для нормального розподілу  $F(x)$  визначається за формулою

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right) \quad (2.39)$$

У разі вибірок невеликого обсягу ( $n < 20$ ) для перевірки гіпотези про закон розподілу можна використовувати прості критерії, які ґрунтуються на порівнянні генеральних параметрів розподілу і їх оцінок, отриманих за вибіркою.

### Контрольні запитання та завдання

1. Яку гіпотезу називають статистичною ?
2. Які типи статистичних гіпотез ви знаєте?
3. Яку гіпотезу називають нульовою (основною)?
4. Яку гіпотезу називають конкуруючою (альтернативною)?
5. Яку гіпотезу називають простою?
6. Яку гіпотезу називають складною?
7. Що таке помилка першого роду?
8. Що таке помилка другого роду?
9. Що називають рівнем значущості?
10. Що таке статистичний критерій?
11. Які значення статистичного критерію називають спостереженими (емпіричними) значеннями?
12. Що називають критичною областю?
13. Що називають областю прийняття гіпотези (областю допустимих значень)?
14. Що називають критичними точками?
15. Які розрізняють критичні області?
16. Що називають потужністю критерію?
17. Що таке ймовірність помилки другого роду?
18. Яка методика перевірки непараметричних статистичних гіпотез?
19. У чому полягає сутність перевірки непараметричних статистичних гіпотез за критерієм згоди Пірсона?
20. Який порядок перевірки статистичних непараметричних гіпотез за критерієм згоди Колмогорова?

21. Наведіть порядок порівняння двох дисперсій нормальних генеральних сукупностей.
22. Наведіть вираз для щільності розподілу Фішера
23. У чому полягає сутність перевірки статистичних параметричних гіпотез?
24. Який порядок відшукування правосторонньої критичної області?
25. Який порядок відшукування лівосторонньої критичної області?
26. Який порядок відшукування двосторонньої критичної області?
27. Як визначити квантиль розподілу Фішера- за умови фіксованого значення помилки першого роду?
28. За яких умов розподіл Фішера-Снедекора застосовується для перевірки статистичних параметричних гіпотез?
29. Сформулюйте правила перевірки нульової статистичної гіпотези при застосуванні розподілу Фішера-Снедекора?
30. Як визначити спостережне значення критерію при перевірці статистичних параметричних гіпотез по рівність дисперсій нормальних генеральних сукупностей?
31. Який порядок визначення дисперсії за поточними вимірами?
32. Що таке помилка відтворюваності?
32. Який порядок застосування для перевірки статистичних гіпотез по рівність декількох дисперсій генеральних сукупностей критерію Бартлета?
33. Який порядок перевірки статистичних параметричних гіпотез по рівність між собою двох середніх, отриманих за вибірками з нормально розподілених генеральних сукупностей за критерієм Стьюдента?

## РОЗДІЛ 3. ДОВІРЧІЙ ІНТЕРВАЛ І ДОВІРЧА ЙМОВІРНІСТЬ ПРИ ОБРОБЦІ РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ

### 3.1. Довірчий інтервал і довірча ймовірність. Рівень значущості

Вибіркові параметри розподілу результатів експерименту, які визначаються за серією вимірювань, є випадковими величинами. Тому і їх відхилення від генеральних параметрів також будуть випадковими.

Оцінка цих відхилень носить ймовірнісний характер. Тоді при статистичному аналізі можна лише вказати ймовірність тієї чи іншої похибки.

Нехай для генерального параметру  $\theta$  із дослідження отримана незміщена оцінка  $\theta^*$ . Призначимо досить велику ймовірність  $\gamma$  (таку, що подію з ймовірністю  $\gamma$  можна вважати практично вірогідною) і знайдемо таке значення  $\delta = f(\gamma)$ , для якого

$$P(|\theta^* - \theta| \leq \delta) = \gamma. \quad (3.1)$$

Діапазон практично можливих значень помилки, що виникає при заміні  $\theta$  на  $\theta^*$ , буде  $\pm\delta$ . Більші за абсолютною величиною помилки будуть з'являтися тільки з малою ймовірністю

$$\alpha = 1 - \gamma, \quad (3.2)$$

названою рівнем значущості. Інакше вираз (3.1) можна інтерпретувати як ймовірність того, що істинне значення параметра  $\theta$  лежить у межах

$$\theta^* - \delta \leq \theta \leq \theta^* + \delta. \quad (3.3)$$

Ймовірність  $\gamma$  називається довірчою ймовірністю і характеризує надійність отриманої оцінки. Інтервал  $\theta^* \pm \delta$  називаються довірчим інтервалом. Межі інтервалу  $\theta' = \theta^* - \delta$  і  $\theta'' = \theta^* + \delta$  називаються довірчими межами. Довірчий інтервал при даній довірчій ймовірності визначає точність оцінки ( $\delta$ ).

Величина довірчого інтервалу залежить від довірчої ймовірності, з якою гарантується перебування параметра  $\theta$  всередині довірчого інтервалу: чим більше величина  $\gamma$ , тим більше довірчий інтервал (і більше величина  $\delta$ ). Збільшення числа дослідів проявляється в скороченні довірчого інтервалу при постійній довірчій ймовірності або в підвищенні довірчої ймовірності при збереженні довірчого інтервалу.

На практиці, як правило, зазвичай фіксують значення довірчої ймовірності (0,9; 0,95 або 0,99) і потім визначають довірчий інтервал.

При побудові довірчого інтервалу вирішується задача про абсолютне відхилення:

$$P(|\theta^* - \theta| \leq \delta) = P(|\Delta\theta| \leq \delta) = F(\delta) - F(-\delta) = \int_{-\delta}^{\delta} f(\theta) d\theta = \gamma \quad (3.4).$$

Таким чином, якби був відомий закон розподілу оцінки  $\theta^*$ , завдання визначення довірчого інтервалу вирішувалася б дуже просто.

Розглянемо побудову довірчого інтервалу для математичного сподівання нормально розподіленої випадкової величини  $x$  із відомим генеральним стандартом  $\sigma$  за вибіркою обсягом  $n$ . Найкращою оцінкою для математичного сподівання  $M(X)$  є середнє вибірки  $\bar{x}$  зі стандартним відхиленням середнього

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}.$$

Використовуючи функцію Лапласа, отримуємо

$$P(|\bar{x} - M(X)| \leq \delta) = \gamma = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma(\bar{x})}\right). \quad (3.5)$$

Задавшись довірчою ймовірністю  $\gamma$ , визначимо по таблиці значення функції Лапласа  $\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma(\bar{x})}\right) = \Phi(t)$ . Тоді довірчий інтервал для математичного сподівання набуває вигляду

$$\bar{x} - t\sigma(\bar{x}) \leq M(X) \leq \bar{x} + t\sigma(\bar{x}), \quad (3.6)$$

або

$$\bar{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq M(X) \leq \bar{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (3.7)$$

З (3.7) видно, що зменшення довірчого інтервалу обернено пропорційно кореню квадратному з числа дослідів.

Знання генеральної дисперсії дозволяє оцінювати математичне сподівання навіть по одному спостереженню. Якщо для нормально розподіленої випадкової величини  $x$  у результаті експерименту отримано значення  $x_1$ , то довірчий інтервал для математичного сподівання при визначеному рівні  $\gamma$  має вигляд

$$x_1 - \sigma U_{1-\alpha/2} \leq m_x \leq x_1 + \sigma U_{1-\alpha/2}, \quad (3.8)$$

де  $U_{1-\alpha/2}$  – квантиль стандартного нормального розподілу.

Закон розподілу оцінки  $\theta^*$  залежить від закону розподілу величини  $x$  і, зокрема, від параметра  $\theta$ . Щоб обійти це ускладнення, в математичній статистиці застосовують два методи, а саме :

-наближений: при  $n \geq 50$  замінюють у виразі для  $\delta$  невідомі параметри їх оцінками, наприклад:  $t = \delta/\sigma(\bar{x}) \approx \delta/s(\bar{x})$ ;

-від випадкової величини  $\theta^*$  переходять до іншої випадкової величини  $\vartheta^*$ , закон розподілу якої не залежить від оцінюваного параметра  $\theta$ , а залежить лише від обсягу вибірки  $n$  і від виду закону розподілу величини  $X$ .

Такого роду величини найбільш детально описуються для нормального розподілу випадкових величин.

В якості довірчих меж  $\vartheta'$  і  $\vartheta''$  зазвичай використовуються симетричні квантилі

$$\vartheta_{(1-\gamma)/2} \leq \vartheta^* \leq \vartheta_{(1+\gamma)/2}, \quad (3.9)$$

або з урахуванням (3.2)

$$\vartheta_{\alpha/2} \leq \vartheta^* \leq \vartheta_{1-\alpha/2}. \quad (3.10)$$

### 3.2. Побудова довірчого інтервалу для математичного сподівання безпосередньо вимірюваної величини. Розподіл Стюдента

При відсутності грубих і систематичних помилок математичне сподівання випадкової величини збігається з істинним результатом спостережень. Найлегше оцінити математичне сподівання при відомій дисперсії генеральної сукупності (вирази 3.6 – 3.8). Однак значення  $\sigma^2$  неможна отримати із спостережень, її можна тільки оцінити за допомогою вибіркової дисперсії  $s^2$ . Помилка від цієї заміни буде тим менше, чим більше обсяг вибірки  $n$ . На практиці цю похибку не враховують при  $n \geq 50$  і у формулі (3.7) для довірчого інтервалу генеральний параметр  $\sigma$  замінюють вибірковим стандартом  $s$ . Надалі приймемо, що спостережувана випадкова величина має нормальний розподіл.

При невеликих обсягах вибірок для побудови довірчого інтервалу математичного сподівання використовують розподіл Стюдента, або  $t$ -розподіл.

Розподіл Стюдента має випадкова величина  $t$ .

$$t = \frac{\bar{x} - M(X)}{s_x} \times \sqrt{n} \quad (3.11)$$

із щільністю ймовірності

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi f}} \frac{\Gamma(\frac{f+1}{2})}{\Gamma(\frac{f}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^{-\left(\frac{f+1}{2}\right)}, \quad (3.12)$$

де  $\Gamma(f)$  – гамма-функція Ейлера:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{z-1} dy, \quad (3.13)$$

а  $f$  – кількість ступенів вільності вибірки.

Якщо дисперсія  $s^2$  і середнє  $\bar{x}$  визначаються по одній і тій самій вибірці, то  $f = n - 1$ .

Розподіл Стюдента залежить тільки від кількості ступенів вільності  $f$ , за якими визначена вибіркова дисперсія.

На рис. 3.1 наведені графіки щільності  $t$ -розподілу для декількох кількостей ступенів вільності  $f$  і нормальна крива.

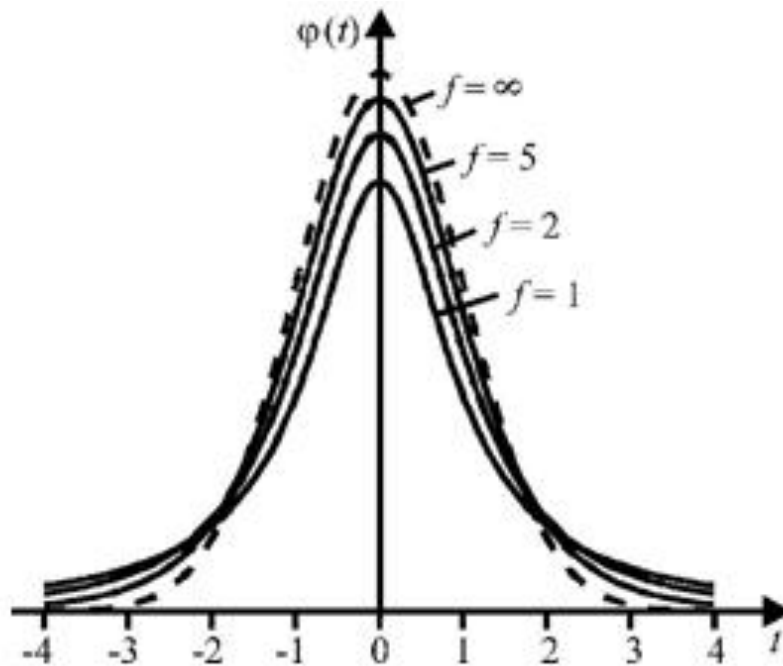


Рис. 3.1 – Щільність розподілу Стюдента

Криві  $t$ -розподілу по своїй формі нагадують нормальну криву, але при малих  $f$  вони повільніше зближаються із віссю абсцис при  $t \rightarrow \infty$ .

При  $f \rightarrow \infty$ ,  $s^2 \rightarrow \sigma^2$ , тому через це розподіл Стюдента буде наближений (відповідатиме) нормальному розподілу.

Ймовірність того, що випадкова величина потрапить в інтервал  $(t_{\alpha/2}; t_{1-\alpha/2})$ , визначається виразом

$$P(t_{\alpha/2} \leq t \leq t_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha = \gamma. \quad (3.14)$$

Розподіл Стюдента симетричний відносно нуля, тому

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = -t_{1-\frac{\alpha}{2}}. \quad (3.15)$$

Враховуючи симетрію  $t$ -розподілу, часто користуються позначенням  $t_\alpha(f)$ , де  $f$  – кількість ступенів свободи,  $\alpha$  – рівень значущості, тобто ймовірність того, що  $t$  знаходиться за межами інтервалу  $(t_{\alpha/2}; t_{1-\alpha/2})$ . Підставляючи в (3.14) вираз (3.11) для  $t$  з урахуванням (3.15), отримуємо нерівність

$$-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{x}-M(X)}{S_x} \sqrt{n} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}. \quad (3.16)$$

Тоді після перетворень маємо

$$\bar{x} - \frac{S_x}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq M(X) \leq \bar{x} + \frac{S_x}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}. \quad (3.17)$$

Значення квантилей  $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$  для різних значень ступенів вільності  $f$  і рівнів значущості  $\alpha$ , як правило, табулюються для зручності їх знаходження. Вираз (3.17) означає, що інтервал із довірчими межами

$$\left( \bar{x} - s(\bar{x}) t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \div \left( \bar{x} + s(\bar{x}) t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \quad (3.18)$$

накриває з ймовірністю  $\gamma$  генеральне середнє вимірюваної величини. Величина довірчого інтервалу (3.18) визначає надійність середнього вибірки.

Величину

$$s(\bar{x}) t_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}} = \delta_{\text{вип}}, \quad (3.19)$$

тобто половину довірчого інтервалу, називають *випадковою помилкою*.

З урахуванням тільки випадкової помилки результат вимірювань деякої величини потрібно записувати так:

$$X = \bar{x} \pm \delta_{\text{вип}} = \bar{x} \pm \frac{S_x}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}. \quad (3.20)$$

### 3.3. Оцінювання дисперсії нормально розподіленої випадкової величини

Дисперсію генеральної сукупності  $\sigma^2$  нормальної розподіленої випадкової величини можна оцінити, якщо відомий розподіл її оцінки – вибіркова дисперсія  $s^2$ . Розподіл вибіркової дисперсії можна отримати за допомогою розподілу Пірсона або  $\chi^2$  – розподілу.

Нехай є вибірка  $n$  незалежних спостережень  $x_1, x_2, \dots, x_n$  за нормально розподіленою випадковою величиною. Можна показати, що сума

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2 \quad (5.21)$$

має розподіл із  $f = n - 1$  ступенями вільності.

Щільність  $\chi^2$  розподілу залежить тільки від кількості ступенів вільності  $f$ :

$$\varphi(\chi^2) = \frac{1}{\Gamma(\frac{f}{2}) 2^{f/2}} (\chi^2)^{\frac{f-2}{2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}}, \quad 0 \leq \chi^2 \leq \infty, \quad (3.22)$$

де  $\Gamma(f)$  – гамма-функція.

На рис. 3.2 наведені криві щільності ймовірності  $\chi^2$  – розподілу при деяких значеннях  $f$ . Криві асиметричні, ступінь асиметрії зменшується зі збільшенням  $f$ .

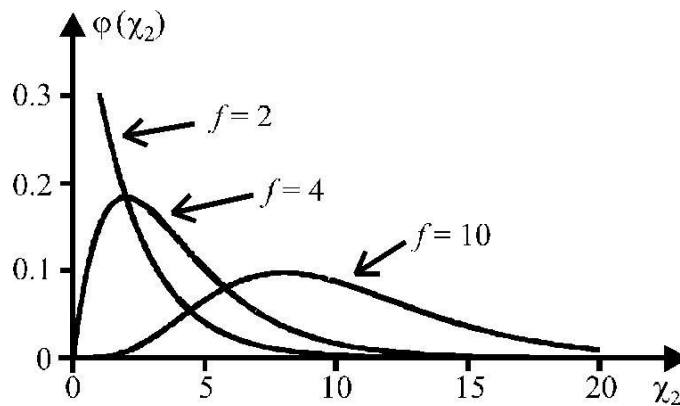


Рис. 3.2 – Щільність  $\chi^2$  – розподілу

При довірчій ймовірності  $\gamma = 1 - \alpha$  двостороння довірча оцінка для  $\chi^2$ -розподілу має вигляд

$$\chi^2_{\alpha/2} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2} \quad (3.23)$$

односторонні оцінки мають вигляд

$$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}, \quad \chi^2 \geq \chi^2_{\alpha}. \quad (3.24)$$

Квантилі  $\chi^2_{1-\alpha}$  при різних  $\alpha$  і  $f$  табульовані та знаходяться з відповідних таблиць.

Оскільки вибіркова дисперсія визначається за формулою

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{f}, \quad (3.25)$$

то з урахуванням (3.24) маємо:

$$\chi^2 = f s^2 / \sigma^2. \quad (3.26)$$

Підставляючи (3.26) в (3.23) і вирішуючи отриману нерівність відносно  $\sigma^2$ , отримаємо довірчі двосторонні границі для генеральної дисперсії:

$$\chi^2_{\alpha/2} \leq f \frac{s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{1-\alpha/2}, \quad (3.27)$$

$$\frac{f s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{f s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \quad (3.28)$$

Аналогічно отримуються односторонні довірчі оцінки:

$$\sigma^2 \leq f s^2 / \chi^2_{\alpha}, \quad \sigma^2 \geq f s^2 / \chi^2_{1-\alpha}. \quad (3.29)$$

Із ростом кількості ступенів вільності асиметрія кривих  $\chi^2$  – розподілу зменшується, відповідно зменшується і асиметрія довірчих границь.

Покажемо, що при  $n \geq 30$  вибіркового стандарту  $s$  розподілений наближено нормально з математичним сподіванням  $M(s)=\sigma$  і середньоквадратичною помилкою

$$\sigma_s = \frac{\sigma}{\sqrt{2f}}. \quad (3.30)$$

Невідомий генеральний стандарт в (3.30) при  $n \geq 30$  замінюють вибірковою

$$\sigma_s \approx \frac{s}{\sqrt{2f}}. \quad (3.31)$$

Тоді довірчі границі для генерального стандарту визначаються нерівністю

$$s - \left( \frac{s}{\sqrt{2f}} \right) U_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \sigma \leq s + \left( \frac{s}{\sqrt{2f}} \right) U_{1-\frac{\alpha}{2}}. \quad (3.32)$$

### 3.4. Оцінка довірчого інтервалу для шуканої функції

На практиці часто виникає необхідність в оцінці точок, які різко виділяються із загальної лінійної закономірності. Подібну оцінку легко зробити, побудувавши довірчий інтервал (“коридор помилок”) шуканої функції.

Під “коридором помилок” розуміють межі, відлічувані по обидві сторони від отриманої прямої і такі, що показують межі, в яких повинні лежати експериментальні точки. Точки, що лежать за межами цього коридору, слід признати помилковими і виключити із загальної вибірки.

Скористаємося критерієм Стьюдента і розглянемо величину:

$$t = \frac{\hat{y} - m_{y/x}}{s(\hat{y})}, \quad (3.33)$$

де  $m_{y/x} = M(y/x)$  – умовне математичне сподівання  $Y$  при заданому  $X$ ;

$s(\hat{y})$  – вибіркове середньоквадратичне відхилення, яке відповідає вибірковій дисперсії

$$s^2(\hat{y}) = s^2(b_0) + (x^2 - 2x\bar{x})s^2(b_1) \quad (3.34)$$

з кількістю ступенів вільності  $f = nm - 2$ , якщо середньоквадратичні відхилення коефіцієнтів розраховуються на основі середньозваженої дисперсії  $s^2$ , яка визначається за формулою (3.34), і  $f = n - 2$ , якщо  $s^2 = s_{ад}^2$ .

Тоді межі “коридору помилок” для довільного значення аргументу  $x$  визначаються наступним виразом:

$$M(y/x) = m_{y/x} = \hat{y}(x) \pm t_{1-\alpha/2} s(\hat{y}), \quad (3.35)$$

де  $t_{1-\alpha/2}$  – квантиль  $t$  – розподілення для кількості ступенів вільності  $f$  і обраного рівня значущості  $\alpha$  (зазвичай 0,05).

Процедура виділення із загальної сукупності точок, що містять грубі помилки, полягає в наступному. Спочатку методом найменших квадратів обробляються всі отримані експериментальні дані, не відкидаючи жодної точки. Далі за (3.35) для кожної ординати (при кожному заданому значенні  $x$ ) визначається довірчий інтервал при обраній довірчій ймовірності.

Якщо виявляється, що одна або кілька точок при цьому випадають із розрахованих для них інтервалів і величина відхилення перевищує систематичну похибку вимірювання, то їх слід визнати помилковими і виключити із розгляду. Потім весь розрахунок коефіцієнтів, їх випадкових помилок і коридору помилок рекурсивно повторюється заново.

## Контрольні запитання та завдання

1. Що називається статистичною оцінкою? Які вимоги ставляться до оцінки?
2. Надайте визначення довірчого інтервалу
3. Поясніть зміст довірчої ймовірності.
4. Наведіть геометричну трактовку довірчого інтервалу і довірчої ймовірності.
5. Як впливає застосування інтервального оцінювання на надійність оцінки?
6. Які оцінки називаються точковими, а які – інтервальними?
7. Що називається надійністю оцінки? Які значення зазвичай вона набуває?
8. Що називається рівнем значущості оцінки? Як він пов'язаний із точністю оцінки?
9. Як побудувати довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання нормально розподіленої ознаки генеральної сукупності? Від чого залежить його вигляд?
10. Як визначається довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення?
11. Від яких величин залежить точність оцінки математичного сподівання?
12. Запишіть довірчий інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення нормально розподіленої кількісної ознаки  $X$ .
13. Що таке "коридор помилок"?
14. Поясніть, як впливає на точність оцінювання математичного сподівання і дисперсії генеральної сукупності обсяг вибірки.
15. Поясніть порядок оцінювання дисперсії нормально розподіленої випадкової величини.
16. Поясніть особливості використання розподілу Стюдента для побудови довірчого інтервалу математичного сподівання безпосередньо вимірюваної величини.
17. Поясніть сутність гамма-функції Ейлера.
18. Наведіть аналітичний вираз та поясніть властивості розподілу Стюдента.

## РОЗДІЛ 4. ОСНОВИ КОРЕЛЯЦІЙНОГО АНАЛІЗУ

### 4.1 Системи випадкових величин. Функція і щільність розподілу системи двох випадкових величин. Умовні закони розподілу

На практиці найчастіше доводиться мати справу з експериментами, результатом яких є не одна випадкова величина, а дві і більше. Ці результати, як правило, утворюють систему. Властивості цієї системи випадкових величин не обмежуються лише властивостями величин, що в неї входять. Вони визначаються також взаємозв'язком або кореляціями (залежностями) цих випадкових величин. Інформація про кожен випадкову величину, що входить у цю систему, міститься в її законі розподілу. Розглянемо систему з двох випадкових величин  $X$  і  $Y$ . Функцією розподілу такої системи називається ймовірність спільного виконання двох нерівностей:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y). \quad (4.1)$$

Щільність розподілу системи  $f(x, y)$  визначається як друга змішана похідна  $F(x, y)$ :

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (4.2)$$

Ймовірність потрапляння точки  $(X, Y)$  у довільну область  $D$  дорівнює:

$$P[(X, Y) \in D] = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (4.3)$$

Властивості щільності розподілу:

1) вона є неубутною функцією:

$$f(x, y) \geq 0; \quad (4.4)$$

2) ймовірність потрапляння випадкової точки на усю координатну площину дорівнює ймовірності вірогідної події:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1; \quad (4.5)$$

3) функція розподілу подається через щільність розподілу як:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy; \quad (4.6)$$

4) щільність розподілу кожної з випадкових величин можна отримати таким чином:

$$F_1(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy, \quad (4.7)$$

$$f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad (4.8)$$

$$f_2(y) = \frac{dF_2(y)}{dy} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (4.9)$$

Щоб повністю охарактеризувати систему (а саме, отримати її закон розподілу), крім розподілу кожної величини, що входить до системи, необхідно знати і зв'язок між цими величинами. Ця залежність характеризується за допомогою умовних законів розподілу.

Умовним законом розподілу величини  $Y$ , що входить до системи  $(X, Y)$ , називається її закон розподілу за умови, що інша випадкова величина  $X$  прийняла певне значення  $x$ . Умовна функція розподілу позначається  $F(y/x)$ , щільність розподілу позначається  $f(y/x)$ . Для умовних щільностей розподілів справедлива теорема множення законів розподілу:

$$f(x, y) = f_1(x)f(y/x), \quad (4.10)$$

$$f(x, y) = f_2(y)f(x/y). \quad (4.11)$$

Тоді :

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy}, \quad (4.12)$$

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx}. \quad (4.13)$$

## 4.2 Стохастичний зв'язок. Коваріація. Коефіцієнт кореляції. Регресія

У багатьох задачах потрібно встановити та оцінити залежність випадкової величини  $Y$ , що визначається, від однієї або декількох інших величин. Розглянемо спочатку залежність  $Y$  від одної випадкової (або не випадкової) величини  $X$ .

Дві випадкові величини можуть бути пов'язані функціональною залежністю, або залежністю іншого роду (вона називається *статистичною*), або бути *незалежними*.

Суворо функціональна залежність реалізується дуже рідко, тому що обидві величини або одна з них піддані ще дії випадкових факторів, а серед них можуть бути і спільні для обох величин (під «спільними» тут розуміють такі фактори, які впливають і на  $Y$ , і на  $X$ ), у цьому випадку виникає *статистична залежність*.

*Статистичною* називають залежність, при якій зміна однієї із величин спричиняє зміну розподілення іншої. Наприклад, статистична залежність виявляється в тому, що при зміні однієї із величин змінюється середнє значення іншої. У цьому випадку *статистичну залежність* називають *кореляційною*.

На відміну від *функціонального* зв'язку при *стохастичному* зв'язку лише зі зміною величини  $X$  величина  $Y$  має тенденцію змінюватися.

Наприклад, якщо  $Y$  залежить від випадкових факторів  $Z_1, Z_2, V_1, V_2$ , а  $X$  залежить від випадкових факторів  $Z_1, Z_2, U_1$ , то між  $Y$  та  $X$  існує статистична залежність, тому що серед випадкових факторів є спільні, а саме  $Z_1, Z_2$ .

Розглянемо приклад випадкової величини  $Y$ , яка не пов'язана з величиною  $X$  функціонально, а пов'язана кореляційно. Хай  $Y$  – врожай зерна,  $X$  – кількість добрив. З однакових площ землі при рівній кількості внесених добрив отримують різні врожаї, тобто  $Y$  не є функцією від  $X$ . Це пояснюється впливом випадкових факторів (опаді, температура повітря та ін.) разом з цим, як показують досліди, середній врожай є функцією від кількості добрив, тобто  $Y$  пов'язана з величиною  $X$  кореляційною залежністю.

*Умовні середні.*

У якості оцінок умовних математичних сподівань обирають умовні середні, що отримують за даними спостережень (вибірка).

*Умовною середньою*  $y_{xcp}$  називають середнє арифметичне значень  $Y$ , що спостерігають при  $X = x$ .

**Приклад.** Якщо при  $x_1=2$  величина  $Y$  отримує значення  $y_1=5, y_2=6, y_3=10$ , то умовне середнє  $y_{xcp}=(5+6+10)/3=7$ .

*Умовною середньою*  $x_{ycp}$  називають середнє арифметичне значень  $X$ , що спостерігають при  $Y = y$ .

По мірі збільшення тісноти стохастичної залежності вона усе більш наближається до функціональної, а в межі відповідає їй. Крайня протилежність функціонального зв'язку – повна незалежність випадкових величин.

Якщо випадкові величини незалежні, то згідно з теоремою множення (4.10 та 4.11) отримуємо:

$$f(y/x) = f_2(y) \text{ та } f(x/y) = f_1(x), \quad (4.14)$$

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y). \quad (4.15)$$

Умову (4.15) можна використати як необхідний і достатній критерій незалежності двох випадкових величин, якщо відома щільність розподілу системи і випадкових величин, що в неї входять.

При невідомому законі розподілу цієї системи для оцінки тісноти стохастичного зв'язку найчастіше використовується коефіцієнт кореляції. Дисперсія суми двох випадкових величин  $X$  і  $Y$  дорівнює:

$$\begin{aligned} D\{X + Y\} &= M\{[X + Y - M(X + Y)]^2\} = \\ &= M\{[X - M(X) + Y - M(Y)]^2\} = \\ &= M[X - M(X)]^2 + 2M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\} + \\ &+ M[Y - M(Y)]^2 = D(X) + 2M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\} + D(Y). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Якщо  $X$  і  $Y$  незалежні, то  $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ .

Тоді залежність між  $X$  і  $Y$  існує, якщо

$$M([X - M(X)][Y - M(Y)]) \neq 0. \quad (4.17)$$

Величина (4.17) називається *кореляційним моментом*, або *коваріацією* ( $cov\{XY\}$ ) випадкових величин. Вона характеризує не тільки залежність величин, але і їх розсіяння.

Із (4.17) витікає, що якщо одна з величин мало відхиляється від свого математичного сподівання, то коваріація буде мала навіть при тісному стохастичному зв'язку.

Щоб уникнути цього, для характеристики зв'язку використовують безрозмірну величину, що називається *коефіцієнтом кореляції*:

$$r_{xy} = \frac{cov_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{M([X - M(X)][Y - M(Y)])}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (4.18)$$

де  $\sigma_x$  і  $\sigma_y$  – стандартні відхилення  $X$  і  $Y$ .

Випадкові величини, для яких коваріація (а значить, і коефіцієнт кореляції) дорівнює нулю, називаються *некорельованими*. Рівність нулю коефіцієнта кореляції не завжди означає, що випадкові величини  $X$  і  $Y$  незалежні: зв'язок може проявлятися в моментах більш високого порядку (в порівнянні з математичним

сподіванням). Тільки у разі нормального розподілу при  $r_{xy} = 0$  зв'язок між випадковими величинами однозначно відсутній.

Щільність нормального розподілу системи двох випадкових величин задається наступною формулою:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)} \times \left[\frac{(x-M(X))^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-M(X))(y-M(Y))}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-M(Y))^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}, \quad (4.19)$$

де  $r$  – коефіцієнт кореляції.

Якщо  $X$  і  $Y$  некорельовані (тобто  $r = 0$ ), то з (4.19) витікає, що:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-M(X))^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-M(Y))^2}{\sigma_y^2}\right]\right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x-M(X))^2}{2\sigma_x^2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left[-\frac{(y-M(Y))^2}{2\sigma_y^2}\right] = f_1(x)f_2(y), \end{aligned} \quad (4.20)$$

тобто нормально розподілені випадкові величини  $X$  і  $Y$  не лише некорельовані, але і незалежні.

Коефіцієнт кореляції має такі властивості:

- 1) величина  $r_{xy}$  не змінюється від додавання до  $X$  і  $Y$  невинпадкових доданків;
- 2) величина  $r_{xy}$  не змінюється від множення  $X$  і  $Y$  на додатні числа;
- 3) якщо одну з величин, не змінюючи іншу, помножити на  $(-1)$ , то на  $(-1)$  множитиметься і коефіцієнт кореляції.

Тоді, якщо від початкових величин перейти до нормованих

$$X_0 = \frac{X - M(X)}{\sigma_x}, \quad Y_0 = \frac{Y - M(Y)}{\sigma_y},$$

величина  $r_{xy}$  не змінюється:  $r_{x_0 y_0} = r_{xy}$ . З (4.16) і (4.18) слідує, що

$$\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2r_{xy}\sqrt{\sigma^2(X)\sigma^2(Y)}. \quad (4.21)$$

Для нормованих величин  $\sigma^2(X_0) = \sigma^2(Y_0) = 1$ , тоді

$$\sigma^2(X_0 + Y_0) = 2 + 2r_{xy}. \quad (4.22)$$

Аналогічно у разі різниці  $(X - Y)$  можна отримати

$$\sigma^2(X_0 - Y_0) = 2 - 2r_{xy}. \quad (4.23)$$

За визначенням дисперсії

$$\sigma^2(X_0 + Y_0) \geq 0 \quad \text{та} \quad \sigma^2(X_0 - Y_0) \geq 0,$$

отже

$$2 + 2r_{xy} \geq 0, 2 - 2r_{xy} \geq 0, r_{xy} \geq -1, r_{xy} \leq 1, -1 \leq r_{xy} \leq 1. \quad (4.24)$$

При  $r_{xy} = \pm 1$  маємо лінійні функціональні залежності виду  $y = b_0 + b_1x$ , при цьому якщо  $r_{xy} = 1$ , то  $b_1 > 0$ ; якщо  $r_{xy} = -1$ , то  $b_1 < 0$ . Якщо між величинами  $X$  і  $Y$  є довільний стохастичний зв'язок, то  $-1 < r_{xy} < 1$ .

При  $r_{xy} > 0$  маємо позитивний кореляційний зв'язок між  $X$  та  $Y$ , а якщо  $r_{xy} < 0$ , то кореляційний зв'язок негативний.

Необхідно враховувати, що коефіцієнт кореляції характеризує не будь-яку залежність, а тільки лінійну.

Для нормально розподіленої системи двох випадкових величин можна довести, що:

$$\begin{aligned} f(y/x) &= \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \\ &= \frac{1}{\sigma_y \sqrt{1 - r^2} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2(1 - r^2)} \left( \frac{(y - M(Y))}{\sigma_y} - \frac{r(x - M(X))}{\sigma_x} \right)^2 \right] = (4.25) \\ &= \frac{1}{\sigma_y \sqrt{1 - r^2} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2(1 - r^2) \sigma_y^2} \left( (y - M(Y)) - r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - M(X)) \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Умовна щільність розподілу величини  $Y$  відповідає щільності нормального розподілу з математичним сподіванням

$$M(Y/X) = M(Y) + r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - M(X)) \quad (4.26)$$

і середньоквадратичним відхиленням

$$\sigma_{y/x} = \sigma_y \sqrt{1 - r^2}. \quad (4.27)$$

Величина  $M(Y/X)$  називається умовним математичним сподіванням величини  $Y$  при цьому  $X$ .

Лінійна залежність (4.26) називається регресією  $Y$  на  $X$ .  
За аналогією

$$M(X/Y) = M(X) + r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (x - M(Y)) \quad (4.28)$$

є регресією  $X$  на  $Y$ .

Лінії регресії співпадають тільки за наявності лінійної функціональної залежності. З (4.26) і (4.28) видно, що для незалежних  $X$  і  $Y$  лінії регресії паралельні координатним вісям.

### 4.3. Вибіркове рівняння регресії

Умовне математичне сподівання  $M(Y/x) = f(x)$  є функцією від  $x$ , яку називають функцією регресії.

$y_{xcp} = f^*(x)$  – називають вибірковою функцією регресії  $Y$  на  $X$ , функцію  $f^*(x)$  називають вибірковою регресією  $Y$  на  $X$ .

Нехай досліджується система кількісних ознак  $(X, Y)$  у результаті  $n$  незалежних дослідів отримано  $n$  пар чисел  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ .

Знайдемо за даними спостережень вибіркоче рівняння прямої лінії середньоквадратичної регресії. Для визначеності будемо шукати рівняння регресії  $Y$  на  $X$ :

$$y_{cp} = k \times x + b.$$

Оскільки різні значення  $x$  ознаки  $X$  та відповідні їм значення  $y$  ознаки  $Y$  спостерігалися по одному разу, то групувати дані немає сенсу. Також немає необхідності використовувати поняття умовної середньої, оскільки шукане рівняння можна записати так:

$$y = \rho_{yx} \times x + b.$$

Кутовий коефіцієнт прямої лінії регресії  $Y$  на  $X$  називають *вибірковою коефіцієнтом регресії*  $Y$  на  $X$  та позначають  $\rho_{yx}$ .

Будемо шукати вибіркоче рівняння прямої лінії регресії  $Y$  на  $X$  виду:

$$Y = \rho_{yx} \times x + b.$$

Підберемо параметри  $\rho_{yx}$  та  $b$  так, щоб точки  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , що отримані за даними спостережень, на площині  $xOy$  лежали якомога ближче до прямої  $Y = \rho_{yx} \times x + b$ . Тобто щоб сума квадратів відхилень  $(|Y_i - y_i|^2)$  була мінімальною, де  $Y_i$  – розрахована за рівнянням  $Y = \rho_{yx} \times x + b$  ордината, що відповідає значенню  $x_i$ , а  $y_i$  – ордината, що спостерігається та відповідає значенню  $x_i$ .

У цьому полягає сутність *методу найменших квадратів*. Так як кожне відхилення залежить від шуканих параметрів, то і сума квадратів відхилень є функція  $F$  цих параметрів:

$$F(\rho_{yx}, b) = \sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2,$$

або

$$F(\rho_{yx}, b) = \sum_{i=1}^n (\rho_{yx} x_i + b - y_i)^2.$$

Щоб знайти мінімум прирівняємо до нуля відповідні часткові похідні:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = 2 \sum_{i=1}^n (\rho_{yx} x_i + b - y_i) x_i = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (\rho_{yx} x_i + b - y_i) = 0.$$

Виконавши елементарні спрощення, отримуємо систему двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \rho_{yx} + \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \rho_{yx} + n b = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, знайдемо шукані параметри:

$$\rho_{yx} = \frac{(n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i)}{(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2)}; \quad b = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i)}{(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2)}.$$

**Приклад.** Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії  $Y$  на  $X$  за даними вибірки  $n=5$ :

$x_i$	1,0	1,5	3,0	4,5	5,0
$y_i$	1,25	1,4	1,5	1,75	2,25

**Розв'язання.** Складемо розрахункову таблицю.

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$
1,0	1,25	1,0	1,25
1,5	1,4	2,25	2,1
3,0	1,5	9,0	4,5
4,5	1,75	20,25	7,875
5,0	2,25	25,0	11,25
$\sum x_i=15$	$\sum y_i=8,15$	$\sum x_i^2=57,5$	$\sum x_i y_i=26,975$

Знайдемо шукані параметри, для чого використаємо формули:

$$\rho_{yx} = (5 \times 26,975 - 15 \times 8,15) / (5 \times 57,5 - 15^2) = 0,202;$$

$$b = (57,5 \times 8,15 - 15 \times 26,975) / (5 \times 57,5 - 15^2) = 1,024.$$

Запишемо шукане рівняння регресії:

$$Y = 0,202x + 1,024.$$

Для того щоб отримати уявлення, наскільки добре розраховані по цим формулам дані  $Y_i$  співпадають із даними  $y_i$ , що спостерігалися, знайдемо відхилення  $Y_i - y_i$ . Результати розрахунків відхилень наведено у цій таблиці:

$X_i$	$Y_i$	$y_i$	$Y_i - y_i$
1,0	1,226	1,25	- 0,024
1,5	1,327	1,4	- 0,073
3,0	1,63	1,5	0,13
4,5	1,933	1,75	0,183
5,0	2,034	2,25	- 0,216

Як бачимо з таблиці, не всі відхилення достатньо малі. Це свідчить про те, що була виконана мала кількість спостережень, а саме:  $n=5$ .

### Кореляційна таблиця

При більшій кількості спостережень одне й теж значення  $x$  може повторюватися  $n_x$  разів, а одне й теж значення  $y$  повторюватися  $n_y$  разів, одна і та ж пара чисел  $(x; y)$  може спостерігатися  $n_{xy}$  разів. Тому дані спостережень групують, тобто підраховують частоти  $n_x, n_y, n_{xy}$ . А усі згруповані дані записують у вигляді таблиці, яку називають *кореляційною*.

У першій строчці таблиці вказані значення ознаки  $X - (10; 20; 30; 40)$ , а в першому стовпчику -  $Y - (0,4; 0,6; 0,8)$ . На перехресті строк та стовбців знаходимо частоти  $n_{xy}$  значень пар ознак, що спостерігають. Наприклад, частота 5 вказує, що пара чисел  $(10; 0,4)$  спостерігається 5 разів. Усі частоти розміщені у прямокутнику, сторони якого виділені. Відсутність значення свідчить про те, що відповідна пара чисел не спостерігалася, наприклад  $(20; 0,4)$ .

В останньому стовбці записані суми частот строк. Наприклад, сума частот першої строки дорівнює 26. Це число вказує на те, що значення ознаки  $Y=0,4$  спостерігалася 26 разів.

В останній строчці записані суми частот стовбців. Наприклад, число 8 вказує на те, що значення ознаки  $X = 10$  спостерігалася 8 разів.

Y	X				$n_y$
	10	20	30	40	
0,4	5	–	7	14	26
0,6	–	2	6	4	12
0,8	3	19	–	–	22
$n_x$	8	21	13	18	$n=60$

У клітині, що розташована в нижньому правому куті таблиці, розміщена сума усіх частот (загальна кількість усіх спостережень  $n$ ). Вочевидь,  $\sum n_x = \sum n_y = n$ . В нашому випадку:

$$\sum n_x = 8 + 21 + 13 + 18 = 60; \quad \sum n_y = 26 + 12 + 22 = 60.$$

#### 4.4. Вибірковий коефіцієнт кореляції. Перевірка гіпотези про відсутність кореляції

При обробці результатів більшості фізичних вимірювань виникає завдання опису залежності між досліджуваними випадковими величинами.

Для експериментального вивчення залежності між двома випадковими величинами  $X$  і  $Y$  проводять  $n$  незалежних дослідів. При цьому у кожному із них отримують пару значень  $(x_i, y_i)$ , де  $i = 1, 2, \dots, n$ . Про наявність або відсутність кореляції між  $X$  і  $Y$  можна у повному обсязі оцінити по виду поля кореляції, якщо нанести точки  $(x_i, y_i)$  на координатну площину.

Для кількісної оцінки тісноти зв'язку слугує вибірковий коефіцієнт кореляції. Як було встановлено раніше, змістовними і незміщеними оцінками для математичних сподівань  $M(X)$  і  $M(Y)$  слугують вибіркові середні  $\bar{x}$  і  $\bar{y}$ , а для генеральних дисперсій  $\sigma^2_x$  і  $\sigma^2_y$  — вибіркові дисперсії  $s_x^2$  і  $s_y^2$ . Можна довести, що змістовною і незміщеною оцінкою генеральної коваріації  $cov_{xy}$  слугує *вибіркова коваріація*

$$cov_{xy}^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}). \quad (4.29)$$

Користуючись цією оцінкою, розраховують *вибірковий коефіцієнт кореляції*

$$r_{xy}^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1)S_x S_y}, \quad (4.30)$$

який є змістовною оцінкою коефіцієнта кореляції генеральної сукупності зі зміщенням, що дорівнює  $r(1-r^2)/2n$ . Величина зміщення убиває зі збільшенням числа дослідів і при  $n > 50$  становить менш 1%. Вибірковий коефіцієнт кореляції має ті ж властивості, що і  $r_{xy}$ , і за абсолютною величиною також не більше одиниці:

$$-1 \leq r_{xy}^* \leq 1. \quad (4.31)$$

Величина вибіркового коефіцієнта кореляції визначає міру криволінійності зв'язку між  $X$  і  $Y$ . Тому можливі випадки, коли при коефіцієнті кореляції, значно меншому одиниці, зв'язок між  $X$  і  $Y$  виявляється близьким до функціонального, хоч є суттєво нелінійним.

У випадку, якщо отримане значення  $r^*$  близьке до нуля, необхідно провести перевірку гіпотези про відсутність кореляції між випадковими величинами. Необхідно визначити, чи значно відрізняється  $r^*$  від нуля. Якщо число досліджень  $n$  достатньо велике (суттєво більше 30), то в умовах нульової гіпотези ( $H_0: r = 0$ ) можна використати нормальний розподіл із стандартом

$$\sigma_r^* \approx \frac{(1-r^{*2})}{\sqrt{n}}. \quad (4.32)$$

Тоді при  $\gamma = 0,95$  генеральний коефіцієнт кореляції знаходиться в наступних довірчих інтервалах:

$$r^* - \frac{1.96(1-r^{*2})}{\sqrt{n}} \leq r \leq r^* + \frac{1.96(1-r^{*2})}{\sqrt{n}}. \quad (4.33)$$

Із ймовірністю 0,95 можна очікувати, що існує кореляція між випадковими величинами, якщо 0 не міститься усередині довірчого інтервалу.

На практиці, особливо при числі дослідів  $n < 30$ , часто доводиться вирішувати питання про те, наскільки точно отримані експериментальні точки підтверджують лінійний зв'язок між величинами  $X$  і  $Y$ . Відповісти на це питання можна таким чином. Припустимо, що дві змінні  $X$  і  $Y$  дійсно некорельовані, тобто при проведенні нескінченно великого числа вимірів вибіркового коефіцієнта кореляції для них дорівнював би нулю. Проте, при кінцевому числі вимірів мало ймовірно, щоб величина  $r^*$  через вплив випадкових чинників точно дорівнювала нулю

Позначимо через  $P_n(r^* \geq r_1^*)$  ймовірність того, що  $n$  вимірів двох некорельованих змінних  $X$  і  $Y$  приведуть до значення  $r^*$  (по модулю), що не

менший деякого окремого значення  $r_1^*$ . Результати розрахунків ймовірності  $P_n$  для вибірок різного обсягу  $n$  і чисел  $r_1^*$  наведені в табл. 4.1. Для відповіді на питання про те, наскільки добре  $n$  пара отриманих значень  $(x_i, y_i)$  підтверджують лінійний зв'язок між досліджуваними величинами, спочатку по вимірних точках обчислюють вибіркового коефіцієнт кореляції  $r_1$ . Далі по табл. 4.1 знаходять ймовірність  $P_n$  того, що  $n$  некорельованих точок приведуть до значення коефіцієнта кореляції, що не менший за  $r_1^*$ . Якщо  $P_n \leq 0,05$  (або для “вагомих” кореляцій  $P_n \leq 0,01$ ), то гіпотеза про лінійну залежність між величинами  $X$  і  $Y$  приймається (при вибраному рівні значущості 0,05 або 0,01 відповідно).

Наприклад, по вибірці із п'яти пар значень  $(x_i, y_i)$  отримано  $r_1^* = 0,9$ . Ймовірність отриманого коефіцієнта  $r^*$  така, що  $|r^*| \geq 0,9$  для п'яти некорельованих точок дорівнює  $P_n = 0,04$  (див. табл. 4.1). Отже, гіпотеза про лінійний зв'язок двох досліджуваних величин може бути прийнята з рівнем значення 0,05.

#### 4.5. Метод множинної кореляції

На практиці часто буває необхідним дослідити кореляційний зв'язок між багатьма (а не лише двома) величинами. У разі, коли необхідно встановити залежність величини  $Y$  від більш ніж одного параметра, зазвичай використовують рівняння множинної регресії такого вигляду:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k. \quad (4.34)$$

Коефіцієнти рівняння знаходять методом найменших квадратів, тобто визначають з умови:

$$Q = \sum_{i=1}^n y_i - \hat{y}_i = \min, \quad (4.35)$$

де  $\hat{y}_i = \hat{y}(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki})$ . Умови мінімуму функції  $Q$  наступні:

$$\frac{\partial Q}{\partial b_0} = 0, \frac{\partial Q}{\partial b_1} = 0, \dots, \frac{\partial Q}{\partial b_k} = 0. \quad (4.36)$$

Коефіцієнти рівняння наближеної регресії знаходять із розв'язання системи  $(k + 1)$  нормальних рівнянь, отриманих за умови (4.36).

Розглянемо випадок, коли величина  $Y$  лінійно залежить від двох змінних  $X_1$  і  $X_2$ . Нехай із дослідів отримана вибірка точок  $(x_{1i}, x_{2i}, y_i)$  обсягом  $n$ . Знайдемо методом найменших квадратів коефіцієнти лінійного рівняння регресії:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2. \quad (4.37)$$

Тоді

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial b_0} = 1, \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial b_1} = x_1, \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial b_2} = x_2. \quad (4.38)$$

Система нормальних рівнянь, що відповідають умові (4.38), приймає наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n 2(y_i - \hat{y}_i) \frac{\partial \hat{y}}{\partial b_0} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n 2(y_i - \hat{y}_i) \frac{\partial \hat{y}}{\partial b_1} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n 2(y_i - \hat{y}_i) \frac{\partial \hat{y}}{\partial b_2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

З урахуванням того, що  $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i}$  і значень часткових похідних (4.38), після арифметичних перетворень отримуємо:

$$\begin{aligned} b_0 n + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} &= \sum_{i=1}^n y_i, \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} &= \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i, \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$b_0 \sum_{i=1}^n x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 = \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i.$$

Розв'язуючи отриману систему рівнянь щодо  $b_0, b_1, b_2$ , знаходимо найкращу апроксимацію для співвідношення (4.40). Силу лінійного зв'язку між змінними  $X_1$  і  $X_2$  можна оцінити на підставі вибіркового коефіцієнта кореляції:

$$r^*(x_1, x_2) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)}{(n-1)s(x_1)s(x_2)}. \quad (4.41)$$

Таблиця 4.1 - Ймовірність  $P_n$  того, що  $n$  вимірів двох некорельованих змінних дадуть коефіцієнт кореляції  $|r^*| \geq r_1^*$

N	$r_1^*$								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
3	0.94	0.87	0.81	0.74	0.67	0.59	0.51	0.41	0.29
4	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10
5	0.87	0.75	0.62	0.50	0.39	0.28	0.19	0.10	0.04
6	0.85	0.70	0.56	0.43	0.31	0.21	0.12	0.06	0.01
7	0.83	0.67	0.51	0.37	0.25	0.15	0.08	0.03	—
8	0.81	0.63	0.47	0.33	0.21	0.12	0.05	0.02	—
9	0.80	0.61	0.43	0.29	0.17	0.09	0.04	0.01	—
10	0.78	0.58	0.40	0.25	0.14	0.07	0.02	0.01	—
11	0.77	0.56	0.37	0.22	0.12	0.05	0.02	—	—
12	0.76	0.53	0.34	0.20	0.10	0.04	0.01	—	—
13	0.75	0.51	0.32	0.18	0.08	0.03	0.01	—	—
14	0.73	0.49	0.30	0.16	0.07	0.02	0.01	—	—
15	0.72	0.47	0.28	0.14	0.06	0.02	—	—	—
16	0.71	0.46	0.26	0.12	0.05	0.01	—	—	—
17	0.70	0.44	0.21	0.11	0.04	0.01	—	—	—
18	0.69	0.43	0.23	0.10	0.04	0.01	—	—	—
19	0.68	0.41	0.21	0.09	0.03	0.01	—	—	—
20	0.67	0.40	0.20	0.08	0.03	0.01	—	—	—
25	0.63	0.34	0.15	0.05	0.01	—	—	—	—
30	0.60	0.29	0.11	0.03	0.01	—	—	—	—
35	0.57	0.25	0.08	0.02	—	—	—	—	—
40	0.54	0.22	0.06	0.01	—	—	—	—	—
50	0.49	0.16	0.03	—	—	—	—	—	—
60	0.45	0.13	0.02	—	—	—	—	—	—
80	0.38	0.08	0.01	—	—	—	—	—	—
100	0.32	0.05	—	—	—	—	—	—	—

(прочерками відмічені значення, які менші за 0,01)

### Контрольні запитання та завдання

1. Яку залежність називають статистичною?
2. Яку залежність називають кореляційною?
3. Які значення називають умовним середніми?
4. Надайте вираз для вибіркового рівняння регресії  $U$  на  $X$ .

5. Що таке коефіцієнт регресії  $Y$  на  $X$ ?
6. У чому полягає сутність методу найменших квадратів?
7. Яку таблицю, називають кореляційною?
8. Що таке коефіцієнт кореляції?
9. Які властивості коефіцієнта кореляції Вам відомі?
10. У чому полягає зміст вибіркового коефіцієнту кореляції?
11. Поясніть зміст вибіркового коефіцієнта коваріації.
12. Поясніть сутність методу множинної кореляції?

## РОЗДІЛ 5. ОСНОВИ РЕГРЕСІЙНОГО АНАЛІЗУ

### 5.1 Наближена регресія. Метод найменших квадратів

При дослідженні кореляційної залежності між двома випадковими величинами необхідно по вибірці обсягом  $n$  знайти рівняння наближеної регресії, найчастіше у вигляді наступного полінома:

$$\hat{y}(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j x^j, \quad (5.1)$$

де  $b_0$  і  $b_j$  - коефіцієнти оцінки відповідних теоретичних коефіцієнтів істинного рівняння регресії

$$m_{y/x} = \varphi(x) = \beta_0 + \beta_1x + \beta_2x^2 + \beta_3x^3 + \dots = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x^j, \quad (5.2)$$

і оцінити помилку, що при цьому припускається.

Для цього зазвичай використовують метод найменших квадратів.

Розглянемо деякий клас функцій, аналітичний вираз яких містить деяку кількість  $k$  невизначених коефіцієнтів. Оптимальне рівняння наближеної регресії дає та функція з даного класу, для якої сума квадратів має найменше (мінімальне) значення  $S$ :

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{y}(x_i)]^2 = \min. \quad (5.3)$$

Припустимо, що експериментальні точки відхиляються від рівняння істинної регресії  $\varphi(x)$  тільки в результаті дії випадкових чинників, а помилки вимірів розподілені нормально. Отримані в експериментальних дослідах значення  $y_i$  будуть розподілені за нормальним законом із математичним сподіванням  $M(y_i) = \varphi(x_i)$  та дисперсією  $\sigma_i^2$ . Акцентуємо увагу, що при рівноточкових експериментах  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_n^2 = \sigma^2$ . Тоді щільність розподілу величини  $Y_i$  буде

$$f_i(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [y_i - \varphi(x_i)]^2 \right\}. \quad (5.4)$$

У результаті дослідів випадкові величини  $Y_i$  прийняли сукупність значень  $y_i$ . Використовуємо принцип максимальної правдоподібності: визначимо так математичні сподівання  $\varphi(x_i)$ , щоб ймовірність цієї події була максимальною.

Позначимо через  $p_i = f_i(y_i)\delta$  ймовірність того, що випадкова величина  $Y_i$  набуде значення з інтервалу  $(y_i - \delta/2 \dots y_i + \delta/2)$ . Ймовірність спільного здійснення подібних подій для  $i = 1, 2, \dots, n$  дорівнює

$$P = \delta^n \prod_{i=1}^n f_i(y_i) = \delta^n \sigma^{-n} (2\pi)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i)]^2 \right\} = (5.5)$$

$$= K \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i)]^2 \right\},$$

де  $K$  — коефіцієнт, незалежний від  $\varphi(x_i)$ .

Очевидно, що при заданому  $\sigma^2$  ймовірність  $P$  максимальна за умови, що

$$\sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i)]^2 = \min. \quad (5.6)$$

Таким чином, при нормальному розподілі випадкових величин оптимальність методу найменших квадратів легко обґрунтовується.

Знаходження коефіцієнтів рівняння наближеної регресії за цим методом пов'язане із завданням визначення мінімуму функції багатьох змінних.

Нехай:

$$\hat{y}(x) = f(x, b_0, b_1, b_2, \dots, b_k). \quad (5.7)$$

Знайдемо значення коефіцієнтів  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$  так, щоб

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{y}(x_i)]^2 = \min.$$

Якщо  $S$  приймає мінімальне значення, то

$$\frac{\partial S}{\partial b_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial S}{\partial b_k} = 0, \quad (5.8)$$

що відповідає такій системі рівнянь:

$$\sum_{i=1}^n 2[y_i - \hat{y}(x_i)] \frac{\partial \hat{y}(x_i)}{\partial b_0} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n 2[y_i - \hat{y}(x_i)] \frac{\partial \hat{y}(x_i)}{\partial b_1} = 0, \quad (5.9)$$

$$\sum_{i=1}^n 2[y_i - \hat{y}(x_i)] \frac{\partial \hat{y}(x_i)}{\partial b_k} = 0.$$

Перетворимо (5.9) і отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial \hat{y}(x_i)}{\partial b_0} - \sum_{i=1}^n \hat{y}(x_i) \frac{\partial \hat{y}(x_i)}{\partial b_0} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial \hat{y}(x_i)}{\partial b_1} - \sum_{i=1}^n \hat{y}(x_i) \frac{\partial \hat{y}(x_i)}{\partial b_1} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial \hat{y}(x_i)}{\partial b_k} - \sum_{i=1}^n \hat{y}(x_i) \frac{\partial \hat{y}(x_i)}{\partial b_k} &= 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

В останній системі міститься стільки ж  $(k + 1)$  рівнянь, скільки і невідомих коефіцієнтів у рівнянні (5.7), тобто вона є системою нормальних рівнянь. Оскільки  $S \geq 0$  при будь-яких значеннях коефіцієнтів, то в ній повинен існувати щонайменше один мінімум. Тому якщо система (5.10) має єдине рішення, то воно і є мінімумом для  $S$ .

## 5.2 Лінійна регресія від одного параметра

Нехай із дослідів отримана вибірка точок  $(x_i, y_i)$  обсягом  $n$ . Знайдемо методом найменших квадратів коефіцієнти лінійного рівняння регресії

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x. \quad (5.11)$$

Система нормальних рівнянь (5.10) з урахуванням того, що

$$\hat{y}(x_i) = b_0 + b_1 x_i,$$

набирає вигляду

$$\sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 x_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 x_i) x_i = 0, \quad (5.12)$$

або після перетворення

$$\begin{aligned} n b_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n y_i, \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n y_i x_i. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}, \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1)s_x^2}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Із рівнянь (5.14) та (5.15) видно, що між коефіцієнтами  $b_0$  і  $b_1$  існує кореляційна залежність, вираз для якої можна отримати, наприклад, з першого рівняння системи:

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}. \quad (5.16)$$

Вибірковий коефіцієнт кореляції із урахуванням (5.15) дорівнює

$$r_{xy}^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1)s_x s_y} = \frac{b_1 (n-1) s_x^2}{(n-1) s_x s_y} = \frac{b_1 s_x}{s_y}, \quad (5.17)$$

та оцінює силу лінійного зв'язку між  $Y$  і  $X$ .

### 5.3 Регресійний аналіз

Отже, рівняння лінійної регресії визначено. Проведемо статистичний аналіз отриманих результатів, який передбачає оцінку значення коефіцієнтів

регресії і перевірку адекватності отриманого рівняння експериментальним результатам. Подібний аналіз і називається регресійним.

Прийmemo наступне:

вхідний параметр  $x$  вимірюється з набагато більшою точністю в порівнянні з вихідною величиною  $y$ ;

значення  $y_i$  отримані незалежним чином і нормально розподілені;

якщо при кожному заданому значенні  $x_i$  проводиться серія паралельних дослідів, то вибіркoві дисперсії  $s_i^2$  - однорідні.

### Перевірка адекватності наближеного рівняння регресії експерименту

Розглянемо три варіанти перевірки адекватності отриманого рівняння регресії, які часто зустрічаються.

1. Нехай при кожному значенні  $x_i$  проведена серія з  $m$  паралельних дослідів. Тоді дисперсія відтворюваності з кількістю ступенів вільності  $f_{\text{відтв.}} = n(m - 1)$  дорівнює

$$s_{\text{відтв.}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n s_i^2}{n}. \quad (5.18)$$

Дисперсія адекватності визначається за формулою

$$s_{\text{ад.}}^2 = \frac{m \sum_{i=1}^n [\bar{y}_i - \hat{y}(x_i)]^2}{n - l}, \quad (5.19)$$

де  $l$  – кількість коефіцієнтів у рівнянні регресії (при лінійній регресії  $l = 2$ ),

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m} \sum_{u=1}^m y_{iu}. \quad (5.20)$$

Кількість ступенів вільності дисперсії адекватності дорівнює  $f_{\text{ад.}} = n - l$ .

Адекватність рівняння перевіряється за критерієм Фішера

$$F = \frac{s_{\text{ад.}}^2}{s_{\text{відтв.}}^2}. \quad (5.21)$$

Якщо обчислене значення  $F$  виявиться меншим за табличну величину  $F_{1-\alpha}(f_1, f_2)$  для рівня значущості  $\alpha$  і кількості ступенів вільності  $f_1 = f_{\text{ад.}}$  та  $f_2 = f_{\text{відтв.}}$ , то рівняння адекватне експерименту.

2. Основна серія дослідів проведена без паралельних дослідів, а дисперсія відтворюваності визначена в окремій серії з  $m$  дослідів.

Тоді

$$s_{\text{ад.}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n [y_i - \hat{y}(x_i)]^2}{n-l}, \quad (5.22)$$

$$s_{\text{відтв.}}^2 = \frac{\sum_{u=1}^m (y_u^0 - \bar{y}^0)^2}{m-1}, \quad \text{де } \bar{y}^0 = \frac{1}{m} \sum_{u=1}^m y_u^0. \quad (5.23)$$

Адекватність рівняння перевіряється за критерієм Фішера (5.21), при цьому  $f_2 = f_{\text{відтв.}} = m - 1$ .

3. Основна серія дослідів виконана без паралельних дослідів, і немає даних для розрахунку дисперсії відтворюваності. Тоді за критерієм Фішера порівнюється дисперсія адекватності і дисперсія відносно середнього

$$F = \frac{s_y^2(f_1)}{s_{\text{ад.}}^2(f_2)}, \quad (5.24)$$

де

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}. \quad (5.25)$$

Чим більше отримане  $F$  перевищує табличне значення  $F_{1-\alpha}(f_1, f_2)$  для рівня значущості  $\alpha$  і кількості ступенів вільності  $f_1 = n - 1$  і  $f_2 = n - l$ , тим ефективніше рівняння регресії.

### Оцінка значення коефіцієнтів рівняння регресії

Значення коефіцієнтів рівняння регресії оцінюється за критерієм Стьюдента

$$t_j = \frac{|b_j|}{s(b_j)}, \quad (5.26)$$

де  $b_j$  –  $j$ -й коефіцієнт рівняння регресії;

$s(b_j)$  – середнє квадратичне відхилення  $j$ -го коефіцієнта.

Якщо  $t_j$  більше за табличну величину  $t_{1-\alpha/2}$  для обраного рівня значення  $\alpha$  і кількості ступенів вільності  $f$  дисперсії  $j$ -го коефіцієнта, то коефіцієнт  $b_j$  значно відрізняється від нуля.

У разі лінійної регресії середні квадратичні відхилення коефіцієнтів розраховуються наступним чином:

$$s(b_0) = \sqrt{\left(s^2 \sum_{i=1}^n x_i^2\right) / \left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_j\right)^2\right)}, \quad (5.27)$$

$$s(b_1) = \sqrt{(s^2 n) / \left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_j\right)^2\right)}, \quad (5.28)$$

де дисперсія  $s^2$  в загальному випадку визначається як

$$s^2 = \frac{f_{\text{відтв.}} \cdot s_{\text{відтв.}}^2 + f_{\text{ад.}} \cdot s_{\text{ад.}}^2}{f_{\text{відтв.}} + f_{\text{ад.}}} = \frac{n(m-1)s_{\text{відтв.}}^2 + (n-l)s_{\text{ад.}}^2}{n(m-1) + (n-l)}. \quad (5.29)$$

Кількість ступенів вільності середньозваженої дисперсії  $s^2$  дорівнює

$$f = n(m-1) + (n-l) = nm - n + n - l = nm - l.$$

Дисперсії відтворюваності та адекватності розраховуються за формулами (5.18) і (5.19) або (5.22) і (5.23). Якщо у експериментатора немає підстав сумніватися в лінійному характері досліджуваної залежності і досліди проведені без паралельних дослідів ( $m=1$ ), то  $s^2 = s_{\text{ад.}}^2$  і  $f = f_{\text{ад.}} = n-l$ .

Дисперсія адекватності в даному випадку визначається за формулою (5.22).

Для оцінки випадкових помилок у визначенні коефіцієнтів наближеного рівняння регресії можна також скористатися критерієм Стюдента.

Розглянемо величину:

$$t = \frac{b_0 - \beta_0}{s(b_0)}, \quad (5.30)$$

де  $\beta_0$  – істинне значення коефіцієнта  $b_0$ .

Провівши аналогічні викладки, отримаємо

$$b_0 - s(b_0)t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \beta_0 \leq b_0 + s(b_0)t_{1-\frac{\alpha}{2}}. \quad (5.31)$$

Або

$$\beta_0 = b_0 \pm s(b_0)t_{1-\frac{\alpha}{2}}, \quad (5.32)$$

де  $t_{1-\alpha/2}$  – квантиль  $t$ -розподілу для кількості ступенів вільності  $f$  і обраного рівня значимості  $\alpha$ .

Аналогічно можна побудувати довірчий інтервал для коефіцієнта  $b_1$ :

$$b_1 - s(b_1)t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \beta_1 \leq b_1 + s(b_1)t_{1-\frac{\alpha}{2}}, \quad (5.33)$$

$$\beta_1 = b_1 \pm s(b_1)t_{1-\frac{\alpha}{2}}. \quad (5.34)$$

З урахуванням (5.32) і (5.34), рівняння регресії приймає наступний вигляд:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x = \left( b_0 \pm s(b_0)t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) + \left( b_1 \pm s(b_1)t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) x. \quad (5.35)$$

#### 5.4 Оцінка тісноти нелінійної зв'язку

Якщо рівняння регресії отримано з достатньою точністю, то силу стохастичного зв'язку між величинами  $Y$  і  $X$  можна охарактеризувати величиною

$$\eta_{yx} = \frac{s_{\bar{y}}}{s_y} = \frac{s_{\text{ад.}}}{s_y}, \quad (5.36)$$

яку називають вибіркоvim кореляційним відношенням  $Y$  до  $X$ .

Дисперсія адекватності (залишкова дисперсія) і дисперсія відносно середнього розраховуються за формулами (5.22) і (5.25) відповідно.

Зв'язок тим сильніший, чим більшим є значення  $\eta$ .

Для кореляційного відношення справедлива подвійна нерівність

$$0 \leq \eta \leq 1. \quad (5.37)$$

У загальному випадку аналіз сили зв'язку за кореляційним відношенням називають кореляційним аналізом.

Функціональна залежність між випадковими величинами існує, якщо  $\eta = 1$ . Однак при  $\eta = 0$  однозначно говорити про відсутність зв'язку можна тільки у разі нормального розподілу випадкових величин.

При лінійній регресії кореляційне відношення дорівнює коефіцієнту кореляції:

$$\eta = |r^*|. \quad (5.38)$$

#### 5.5 Апроксимація. Параболічна регресія

У загальному випадку при описі функціональної залежності між двома випадковими величинами використовують поліноми відповідного порядку, коефіцієнти яких можуть не характеризувати певний фізичний сенс. Така

операція називається *апроксимацією експериментальних даних*. Отримана емпірична формула зазвичай справедлива тільки для порівняно вузького інтервалу вимірювань і непридатна поза цим інтервалом. При використанні методу найменших квадратів коефіцієнти наближеного рівняння регресії визначаються рішенням системи лінійних рівнянь.

Припустимо, що залежність між величинами  $X$  і  $Y$  описується параболою другого порядку.

$$\hat{y}(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2. \quad (5.39)$$

Тоді

$$\frac{\partial \hat{y}(x)}{\partial b_0} = 1, \quad \frac{\partial \hat{y}(x)}{\partial b_1} = x, \quad \frac{\partial \hat{y}(x)}{\partial b_2} = x^2, \quad (5.40)$$

і система нормальних рівнянь набуває вигляду

$$\begin{aligned} b_0n + b_1 \sum_{i=1}^n x_i + b_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n y_i, \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 &= \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + b_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Розв'язуючи систему (5.41), знаходять коефіцієнти шуканої квадратичної функції. При описі функціональних залежностей поліномами вищого порядку коефіцієнти визначаються з аналогічних за структурою систем рівнянь.

На практиці адекватності рівняння регресії експерименту при апроксимації досягають використанням полінома вищого порядку. При використанні полінома  $k$ -ступеня потрібно визначати  $k+1$  коефіцієнт. Збільшення ступеня полінома припиняють, якщо дисперсія адекватності (залишкова дисперсія) рівняння регресії  $k+1$  ступеня ( $s_{k+1}^2$ ) перестає бути значимо меншою дисперсії адекватності, обчисленої для полінома  $k$ -ступеня ( $s_k^2$ ). Значимість відмінності досліджується за критерієм Фішера

$$F = \frac{s_k^2}{s_{k+1}^2}, \quad (5.42)$$

де

$$s_k^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y(\hat{x}_i))^2}{n - (k + 1)}, \quad s_{k+1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y(\hat{x}_i))^2}{n - (k + 2)}. \quad (5.43)$$

Якщо отримане  $F$  менше табличного значення  $F_{1-\alpha}(f_1, f_2)$  для рівня значимості  $\alpha$  і кількості ступенів вільності  $f_1 = f_k = (n - k - 1)$  і  $f_2 = f_{k+1} = (n - k - 2)$ , то збільшення порядку поліному потрібно припинити і як наближене рівняння регресії використовувати поліном  $k$ -ступеня.

### 5.6. Знаходження параметрів вибіркового рівняння прямої лінії регресії за згрупованими даними

У попередньому підрозділі для визначення параметрів рівняння прямої лінії регресії  $Y$  на  $X$  була отримана система рівнянь:

$$\begin{cases} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \rho_{yx} + \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \rho_{yx} + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (5.44)$$

Передбачалось, що значення  $X$  та відповідні їм значення  $Y$  спостерігаються при проведенні експериментів по одному разу. Зараз же припустимо, що отримана якась кількість даних (практично для задоволення оцінки шуканих параметрів повинно бути приведено не менше ніж 50 спостережень), серед них є такі, що повторюються, їх згрупувують у вигляді кореляційної таблиці. Тому отримуємо такі тотожності:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &= nx_{cp}; & (\text{слідство з } \sum_{i=1}^n x_i / n = x_{cp}) \\ \sum_{i=1}^n y_i &= ny_{cp}; & (\text{слідство з } \sum_{i=1}^n y_i / n = y_{cp}) \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 &= nx_{cp}^2; & (\text{слідство з } \sum_{i=1}^n x_i^2 / n = x_{cp}^2), \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i &= \sum_{i=1}^n n_{xy} x_i y_i. \end{aligned}$$

Підставивши праві частини тотожності у систему рівнянь і провівши спрощення (скоротивши на  $n$ ), отримуємо:

$$(nx_{cp}^2) \rho_{yx} + (nx_{cp}) b = \sum_{i=1}^n n_{xy} x_i y_i, \quad (5.45)$$

$$x_{cp} \rho_{yx} + b = y_{cp}. \quad (5.46)$$

Розв'язав цю систему рівнянь, знайдемо параметри  $\rho_{yx}$  та  $b$ , а значить і саме рівняння:

$$y_x cp = \rho_{yx} x + b. \quad (5.47)$$

Однак, більш доцільно, ввести нову величину – вибіркового коефіцієнта кореляції. Спочатку знайдемо

$$y_{cp} - \rho_{yx}x_{cp} = b, \quad (5.48)$$

та підставимо його в (5.47) і отримаємо

$$y_{x\ cp} - y_{cp} = \rho_{yx}(x - x_{cp}).$$

Так як  $x_{cp}^2 - (x_{cp})^2 = \sigma_{x\ cp}^2$ , то

$$\rho_{yx} = \frac{\sum_{i=1}^n n_{xy}x_i y_i - n x_{cp} y_{cp}}{n(x_{cp}^2 - (x_{cp})^2)} = \frac{\sum_{i=1}^n n_{xy}x_i y_i - n x_{cp} y_{cp}}{n\sigma_x^2}.$$

Помножимо обидві частини на  $\sigma_x / \sigma_y$

$$r_B = \rho_{yx} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^n n_{xy}x_i y_i - n x_{cp} y_{cp}}{n\sigma_x \sigma_y},$$

де  $r_B$  – вибіркового коефіцієнта кореляції.

Остаточно маємо:

$$y_{x\ cp} - y_{cp} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - x_{cp}).$$

Рівняння вибіркового прямої регресії можна записати так:

$$\frac{y_{x\ cp} - y_{cp}}{\sigma_y} = r_B \frac{x - x_{cp}}{\sigma_x}.$$

Вибірковий коефіцієнт кореляції є оцінкою коефіцієнта кореляції:

$$r = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{M(XY) - M(X)M(Y)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

### Контрольні запитання та завдання

1. Поясніть сутність рівняння наближеної регресії у поліноміальному вигляді.
2. Поясніть сутність методу максимальної правдоподібності.
3. Поясніть порядок знаходження коефіцієнтів рівняння наближеної регресії.
4. У чому полягає сутність лінійної регресії?
5. Як визначити коефіцієнти лінійного рівняння регресії?
6. Як перевірити адекватність лінійного рівняння регресії експериментальним даним?
7. У чому полягає сутність вибіркового рівняння регресії?

8. Сформулюйте основні задачі регресійного аналізу.
9. Поясніть сутність перевірки адекватності рівняння регресії експериментальним даним за критерієм Фішера в умовах проведення серії  $m$  паралельних дослідів.
10. Поясніть сутність перевірки адекватності рівняння регресії експериментальним даним за критерієм Фішера в умовах проведення серії без паралельних дослідів.
11. Поясніть порядок оцінювання значень коефіцієнтів на основі застосування критерію Стьюдента.
12. Поясніть фізичний зміст дисперсії відтворюваності та дисперсії адекватності.
13. Поясніть порядок визначення вибіркового кореляційного відношення.
14. В чому полягає сутність процедури апроксимації експериментальних даних?
15. Що Ви розумієте під параболічною регресією? Який вплив на адекватність функції регресії має використання поліномів вищих порядків?
16. Поясніть порядок знаходження параметрів вибіркового рівняння прямої лінії регресії за згрупованими даними.

## РОЗДІЛ 6. ОСНОВИ ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ

### 6.1 Задачі дисперсійного аналізу. Однофакторний дисперсійний аналіз

Середні значення величин, які вимірюються, залежать від комплексу основних чинників (якісних і кількісних). Ці чинники визначають умови проведення досліджу, і випадкових факторів. Задача дисперсійного аналізу: вивчення впливу тих чи інших факторів на зміну середніх.

У залежності від числа джерел дисперсії (числа розглянутих факторів) розрізняють однофакторний і багатофакторний дисперсійний аналізи. Багатофакторний дисперсійний аналіз більш ефективний у порівнянні з класичним методом дослідження, в якому змінюється тільки один фактор при сталості всіх інших, що не дозволяє визначити вплив взаємодії різних факторів на результати експерименту.

При дисперсійному аналізі кожне спостереження використовується для одночасної оцінки всіх факторів і їх взаємодії. Суть дисперсійного аналізу полягає у виділенні та оцінці окремих факторів, які впливають на значення середнього. При цьому сумарна вибіркова дисперсія розкладається на складові, зумовлені дією незалежних факторів. Вплив даного чинника визначається значущим, якщо відповідна йому вибіркова дисперсія значно відрізняється від дисперсії відтворюваності, зумовленої випадковими помилками.

Перевірка значення оцінок дисперсій проводиться за критерієм Фішера.

Надалі приймаємо, що:

- випадкові помилки розподілені нормально;
- експерименти рівноточні;
- фактори, що досліджуються, впливають тільки на мінливість середніх, але не на дисперсію спостережень (вона постійна).

При дисперсійному аналізі розглядаються фактори двох видів, а саме: з випадковими і з фіксованими рівнями. У першому випадку вибір рівнів фактору проводиться з нескінченної сукупності можливих значень. Якщо всі рівні вибираються випадковим чином, то математична модель об'єкта називається *моделлю з випадковими рівнями факторів*.

Якщо ж кожен фактор може приймати тільки деякі з фіксованих значень, то говорять про *моделі з фіксованими рівнями факторів*. У разі моделі змішаного типу одна група чинників розглядається на випадкових рівнях, а інша – на фіксованих.

Розглянемо вплив на результати дослідів одиничного фактору  $A$ , що приймає  $k$  різних значень (фактор  $A$  має  $k$  фіксованих рівнів  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ). Позначимо через  $y_{ij}$  результат  $j$ -досліджу в серії з  $n_i$  кількості вимірювань ( $j = 1, 2, \dots, n_i$ ), які виконані на  $i$ -рівні фактору  $A$  (табл. 6.1).

Таблиця 6.1 - Вихідні дані для однофакторного дисперсійного аналізу

Номер спостереження	Рівні фактору $A$			
	$a_1$	$a_2$	...	$a_k$
1	$y_{11}$	$y_{21}$	...	
2	$y_{12}$	$y_{22}$	...	
...			...	
$n$	$y_{1n}$	$y_{1n}$	...	
Результати:	$B_1, C_1$	$B_2, C_2$	...	$B_k, C_k$

Припустимо, що результат кожного дослідження можна представити у вигляді такої моделі:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \quad (6.1)$$

де  $\mu$  – сумарний ефект у всіх дослідженнях;

$\alpha_i$  – ефект, обумовлений впливом фактору  $A$  на  $i$ -рівні;

$\varepsilon_{ij}$  – випадкова помилка дослідження на  $i$ -рівні.

Прийmemo також, що спостереження на фіксованому рівні фактору  $A$  нормально розподілені щодо середнього значення ( $\mu + \alpha_i$ ) із загальною дисперсією  $\sigma^2_{\text{пом}}$ . Для того, щоб вирішити питання про значимість впливу фактору  $A$ , слід перевірити нульову гіпотезу рівності математичних сподівань сум ( $\mu + \alpha_i$ ) на різних рівнях цього фактору:

$$H_0: m_1 = m_2 = \dots = m_k = m, \quad (6.2)$$

де  $m_i = M\{\mu + \alpha_i\}$  – математичне сподівання сум ( $\mu + \alpha_i$ ) на рівнях фактору.

Розглянемо випадок, коли на кожному рівні виконано однакову кількість дослідів ( $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$ ). Загальна кількість дослідів:

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_k = kn. \quad (6.3)$$

Позначимо суму результатів всіх дослідів (підсумків) на  $i$ -рівні через:

$$B_i = \sum_{j=1}^n y_{ij}, \quad (6.4)$$

а сума квадратів підсумків на  $i$ -рівні через:

$$C_i = \sum_{j=1}^n y_{ij}^2. \quad (6.5)$$

Тоді середнє значення спостережень на  $i$ -рівні дорівнює:

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^n y_{ij}}{n} = \frac{B_i}{n}, \quad (6.6)$$

а загальне середнє для всієї вибірки з  $N$  спостережень

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij} = \frac{1}{kn} \sum_{i=1}^k \bar{y}_i = \frac{1}{kn} \sum_{i=1}^k B_i. \quad (6.7)$$

Загальна вибіркова дисперсія дослідів визначається за формулою:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2}{N - 1} = \\ &= \frac{1}{N - 1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 = \frac{1}{N - 1} \sum_{i=1}^k C_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k B_i^2, \end{aligned} \quad (6.8)$$

а вибіркова дисперсія на  $i$ -рівні:

$$S_i^2 = \frac{1}{n - 1} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2 = \frac{1}{n - 1} \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 = \frac{1}{n - 1} C - \frac{B^2}{n}. \quad (6.9)$$

Якщо вибіркові дисперсії  $s_i^2$  однорідні (перевірка за критерієм Кохрена), то найкращою оцінкою дисперсії  $\sigma_{\text{пом.}}^2$ , що характеризує вплив випадкових факторів, буде вибіркова дисперсія

$$S_{\text{пом.}}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k s_i^2 \quad (6.10)$$

з кількістю ступенів вільності  $f_{\text{пом.}} = k(n - 1) = N - k$ .

Наближено оцінити дисперсію фактора  $A$  можна наступним чином:

$$\sigma_A^2 \approx S^2 - S_{\text{пом.}}^2. \quad (6.11)$$

Для отримання більш точної оцінки розглянемо відхилення середніх на фіксованих рівнях від загального середнього:

$$\frac{1}{k - 1} \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \approx \sigma_A^2 + \frac{\sigma_{\text{пом.}}^2}{n} \approx \sigma_A^2 + \frac{S_{\text{пом.}}^2}{n} \quad (6.12)$$

У даному випадку під дисперсією фактору  $A$  розуміють математичне сподівання середнього квадрата відхилень, обумовленого впливом цього чинника.

Вибіркова дисперсія

$$s_A^2 = \frac{n}{k-1} \sum_{i=1}^k (\overline{y_i^2} - \bar{y})^2 \approx n\sigma_A^2 + s_{\text{пом}}^2 \quad (6.13)$$

з кількістю ступенів вільності  $f_A = k - 1$  використовується для перевірки нульової гіпотези за критерієм Фішера.

При цьому, якщо нульова гіпотеза ( $H_0: \sigma_A^2 = \sigma_{\text{пом}}^2$ ) вірна, виконується наступна умова:

$$\left( \frac{S_A^2}{S_{\text{пом}}^2} \right) \leq F_{1-\alpha}, \quad (6.14)$$

тобто відмінність між дисперсіями  $s_A^2$  і  $s_{\text{пом}}^2$  є незначною, і отже вплив фактору  $A$  на результати дослідів теж незначний (можна порівняти з ефектом випадковості).

При перевірці гіпотези використовується односторонній критерій, так як альтернативною гіпотезою є  $H_1: \sigma_A^2 > \sigma_{\text{пом}}^2$ . Якщо ж

$$\left( \frac{S_A^2}{S_{\text{пом}}^2} \right) > F_{1-\alpha}, \quad (6.15)$$

то нульова гіпотеза про рівність математичних сподівань сум ( $\mu + \alpha_i$ ) відхиляється (вплив фактору  $A$  значимий). Щоб з'ясувати, які середні різні, можна використовувати критерій Стьюдента, порівнюючи попарно середні.

Оцінити вплив фактору  $A$  можна на підставі (6.15):

$$\sigma_A^2 = \frac{S_A^2 - S_{\text{пом}}^2}{n}. \quad (6.16)$$

Якщо на кожному рівні виконана різна кількість дослідів, вибіркова дисперсія фактора  $A$  розраховується за наступною формулою:

$$s_A^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k \frac{B_i^2}{n_i} - \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^k B_i \right)^2, \quad (6.17)$$

а вибіркова дисперсія, що характеризує вплив випадкових факторів, за формулою:

$$S_{\text{пом}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i s_i^2}{\sum_{i=1}^k f_i}, \quad (6.18)$$

де  $f_i = n_i - 1$ .

Кількість ступенів вільності  $s_{\text{пом}}^2$  дорівнює  $f_{\text{пом}} = N - k$ .

Якщо дисперсія  $s_A^2$  значно відрізняється від дисперсії  $s_{\text{пом.}}^2$ , то дисперсія фактору  $A$  оцінюється за формулою:

$$\sigma_A^2 \approx \frac{k-1}{N-1} (s_A^2 - s_{\text{пом.}}^2). \quad (6.19)$$

## 6.2 Двофакторний дисперсійний аналіз

Розглянемо вплив на результати дослідів двох факторів  $A$  і  $B$ . Фактор  $A$  досліджується на  $k$  рівнях ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), фактор  $B$  досліджується на  $m$  рівнях ( $j = 1, 2, \dots, m$ ). Нехай при кожному поєднанні рівнів факторів виконано  $n$  паралельних дослідів ( $q = 1, 2, \dots, n$ ). Тоді загальне число дослідів дорівнює  $N = nkm$ . Позначимо через  $y_{ijq}$  результат  $q$ -го дослідів, виконаного на  $i$ -рівні фактору  $A$  і  $j$ -рівні фактору  $B$ .

Припустимо, що результат кожного дослідів можна представити таким чином:

$$y_{ijq} = \bar{y} + \alpha_i + \beta_j + \alpha_i\beta_j + \varepsilon_{ijq}, \quad (6.20)$$

де  $\bar{y}$  – загальне середнє (сумарний ефект у всіх дослідів);

$\alpha_i$  та  $\beta_j$  – ефекти, обумовлені впливом фактору  $A$  на  $i$ -рівні і фактору  $B$  на  $j$ -рівні відповідно;

$\varepsilon_{ijq}$  – випадкова помилка дослідів, розподілена нормально з нульовим математичним сподіванням та дисперсією  $\sigma_{\text{пом.}}^2$ ;

$\alpha_i\beta_j$  – ефект взаємодії факторів.

Величина  $\alpha_i\beta_j$  характеризує відхилення середнього в  $(ij)$ -серії дослідів від суми перших трьох членів у рівнянні (6.20), а відповідну їй дисперсію  $\sigma_{AB}^2$  можна оцінити тільки при наявності паралельних дослідів.

При відсутності паралельних дослідів (табл. 6.2) або в разі, якщо ефектом взаємодії факторів нехтують, для опису результатів експериментів використовується лінійна модель

$$y_{ij} = \bar{y} + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}. \quad (6.21)$$

Позначимо через  $\bar{y}_i$  і  $\bar{y}_j$  середні по стовпчиках і по рядках:

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^m y_{ij}}{m}, \quad \bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^k y_{ij}}{k}. \quad (6.22)$$

А через  $\bar{y}$  – середнє всіх дослідів:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{km} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m y_{ij} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{y}_i. \quad (6.23)$$

Таблиця 6.2 - Вихідні дані для двофакторного дисперсійного аналізу без паралельних дослідів

Рівні фактору <i>B</i>	Рівні фактору <i>A</i>			
	<i>a</i> <sub>1</sub>	<i>a</i> <sub>2</sub>	<i>a</i> <sub>3</sub> ( <i>a</i> <sub><i>k</i></sub> )	Середні:
<i>b</i> <sub>1</sub>	<i>y</i> <sub>11</sub>	<i>y</i> <sub>21</sub>	<i>y</i> <sub>31</sub> ( <i>y</i> <sub><i>k</i>1</sub> )	$\bar{y}'_1$
<i>b</i> <sub>2</sub>	<i>y</i> <sub>12</sub>	<i>y</i> <sub>22</sub>	<i>y</i> <sub>32</sub> ( <i>y</i> <sub><i>k</i>2</sub> )	$\bar{y}'_2$
<i>b</i> <sub>3</sub> ( <i>b</i> <sub><i>m</i></sub> )	<i>y</i> <sub>13</sub>	<i>y</i> <sub>23</sub>	<i>y</i> <sub>33</sub> ( <i>y</i> <sub><i>k</i><i>m</i></sub> )	$\bar{y}'_3$ ( $\bar{y}'_m$ )
Середні:	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$ ( $\bar{y}_k$ )	–

Акцентуємо увагу, що фактори *A* і *B* досліджуються на трьох рівнях.

Розглянемо вплив чинників *A* і *B* на розсіювання середніх по стовпцях і по рядках відповідно щодо загального середнього. Розсіювання в середніх по рядках не залежить від фактору *A*, так як всі його рівні усереднені, і визначаються впливом фактору *B* і випадкових факторів.

Тоді з урахуванням того, що дисперсія середнього в *k* разів менше дисперсії випадкової помилки одиничного вимірювання, маємо

$$\sigma_B^2 + \frac{\sigma_{\text{ПОМ}}^2}{k} \approx \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (\bar{y}_j - \bar{y})^2. \quad (6.24)$$

Аналогічним чином можна показати, що

$$\sigma_A^2 + \frac{\sigma_{\text{ПОМ}}^2}{m} \approx \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{y})^2. \quad (6.25)$$

Таким чином, щоб оцінити дисперсії факторів *A* і *B*, необхідно знати дисперсію випадкової помилки.

Оцінити вплив випадкових факторів при відсутності паралельних дослідів можна наступним чином. Розсіювання результатів дослідів в *i*-му стовпці відносно його середнього, обумовлено впливом фактору *B* і фактору випадковості:

$$s_i^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (y_{ij} - y_i)^2 \approx \sigma_B^2 + \sigma_{\text{ПОМ}}^2. \quad (6.26)$$

Рівність (6.26) стане більш точною, якщо використовувати середньозважене значення дисперсії по всіх стовпцях:

$$\sigma_B^2 + \sigma_{\text{пом}}^2 \approx \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k s_i^2. \quad (6.27)$$

Віднімаючи (6.25) з (6.27), отримаємо:

$$\sigma_{\text{пом}}^2 - \frac{\sigma_{\text{пом}}^2}{k} \approx \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k s_i^2 - \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (\bar{y}_j - \bar{y})^2 \quad (6.28)$$

або після арифметичних перетворень

$$\sigma_{\text{пом}}^2 \approx \frac{1}{(k-1)(m-1)} \left[ (m-1) \sum_{i=1}^k s_i^2 - k \sum_{j=1}^m (\bar{y}_j - \bar{y})^2 \right] \cong s_{\text{пом}}^2 \quad (6.29)$$

Отриману оцінку для дисперсії випадкової помилки з кількістю ступенів вільності  $f_{\text{пом.}} = (k-1)(m-1)$  позначимо через  $s_{\text{пом.}}^2$ . Визначимо також наступні вибіркові дисперсії:

$$s_A^2 = \frac{m}{k-1} \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \approx m\sigma_A^2 + \sigma_{\text{пом}}^2, \quad (6.30)$$

$$s_B^2 = \frac{k}{m-1} \sum_{j=1}^m (\bar{y}_j - \bar{y})^2 \approx k\sigma_B^2 + \sigma_{\text{пом}}^2, \quad (6.31)$$

з кількістю ступенів вільності  $f_A = (k-1)$  і  $f_B = (m-1)$ .

Перевірка нульової гіпотези про незначущість впливу факторів  $A$  і  $B$  проводиться за критерієм Фішера: якщо

$$\frac{s_A^2}{s_{\text{пом}}^2} \leq F_{1-\alpha}(f_A, f_{\text{пом}}) \text{ та (або) } \frac{s_B^2}{s_{\text{пом}}^2} \leq F_{1-\alpha}(f_B, f_{\text{пом}}), \quad (6.32)$$

то вплив фактору визнається незначним ( $\alpha_i = 0$  і (або)  $\beta_j = 0$ ).

Якщо одна (або обидві) нерівності (6.32) не виконуються, то вплив відповідного фактору (факторів) значиме. Визначити, які саме середні різні, можна за критерієм Стюдента.

Розглянемо тепер випадок, коли при кожному поєднанні рівнів факторів  $A$  і  $B$  виконано  $n$  паралельних дослідів ( $u = 1, 2, \dots, n$ ), що дає можливість оцінити вплив взаємодії цих факторів на результати дослідів.

Так, наприклад, у табл. 6.3 замість одного значення  $y_{11}$  з'явиться серія значень  $y_{111}, y_{112}, \dots, y_{11n}$ . Позначимо через  $y_{ij}$  середнє в комірці (середнє серії паралельних дослідів):

$$\bar{y}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n y_{iju}. \quad (6.33)$$

Тоді

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{y}_{ij}, \quad \bar{y}'_j = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{y}_{ij}, \quad (6.34)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{km} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \bar{y}_{ij} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{y}_i, \quad (6.35)$$

і дисперсії  $s_A^2$  і  $s_B^2$  розраховуються за формулами (6.30) і (6.31).

В якості оцінки дисперсії відтворюваності використовуємо середньозважене значення дисперсій результатів в кожній комірці

$$S_{\text{пом}}^2 = \frac{1}{mk} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m s_{ij}^2, \quad (6.36)$$

де

$$s_{ij}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{u=1}^n (y_{iju} - \bar{y}_{ij})^2. \quad (6.37)$$

Кількість ступенів вільності дисперсії  $s_{\text{пом}}^2$  дорівнює  $f_{\text{пом}} = mk(n-1)$ .

Введемо також вибіркoву дисперсію, що характеризує вплив взаємодії факторів

$$s_{AB}^2 \approx \frac{n}{(k-1)(m-1)} \left[ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_i)^2 - k \sum_{j=1}^m (\bar{y}'_j - \bar{y})^2 \right] \quad (6.38)$$

з кількістю ступенів вільності  $f_{AB} = (k-1)(m-1)$ .

Перевірка значущості впливу факторів і їх взаємодії проводиться за критерієм Фішера, але по різному для моделей з фіксованими і випадковими рівнями:

1. Для моделі з фіксованими рівнями вибіркові дисперсії  $s_A^2$ ,  $s_B^2$  и  $s_{AB}^2$  порівнюються з оцінкою дисперсії відтворюваності  $s_{\text{пом.}}^2$ .

Якщо виконуються нерівності

$$\begin{aligned} (S_A^2/S_{\text{пом.}}^2) &> F_{1-\alpha}(f_A, f_{\text{пом.}}), \\ (S_B^2/S_{\text{пом.}}^2) &> F_{1-\alpha}(f_B, f_{\text{пом.}}), \\ (S_{AB}^2/S_{\text{пом.}}^2) &> F_{1-\alpha}(f_{AB}, f_{\text{пом.}}), \end{aligned} \quad (6.39)$$

то вплив факторів та їх взаємодія значимі.

2. Для моделі з випадковими рівнями перевірка значущості взаємодії факторів проводиться так само, як і для моделі з фіксованими рівнями. Вплив факторів значимий, якщо виконуються наступні нерівності:

$$\begin{aligned} (S_A^2/S_{AB}^2) &> F_{1-\alpha}(f_A, f_{AB}), \\ (S_B^2/S_{AB}^2) &> F_{1-\alpha}(f_B, f_{AB}). \end{aligned} \quad (6.40)$$

### 6.3 Планування експерименту при дисперсійному аналізі

При двофакторному дисперсійному аналізі мінімальне число дослідів (в умовах лінійної моделі), що забезпечує перебір всіх можливих поєднань рівнів факторів, визначається добутком кількості їх рівнів:  $N = kn$ . Подібний експеримент називається *повним факторним експериментом (ПФЕ)*.

Якщо вивчається вплив на процес  $k$  факторів при однаковій кількості рівнів  $n$ , то необхідна кількість дослідів при ПФЕ:

$$N = n^k. \quad (6.41)$$

Так, якщо  $k = 2$  і  $n = 3$ , то  $N = 3^2 = 9$ .

Експеримент, в якому пропущені деякі поєднання рівнів, називається *дробовим факторним експериментом (ДФЕ)*.

Скорочення кількості дослідів неминує призводить до втрати частини інформації, при цьому зазвичай нехтують ефектами взаємодії факторів.

Розглянемо трьохфакторний дисперсійний аналіз при однаковій кількості рівнів  $n$  для кожного фактору. Нехай  $n = 2$ . Тоді при ПФЕ потрібно провести  $N = 2^3 = 8$  дослідів (табл. 6.3).

Таблиця 6.3 - Повний факторний експеримент  $2^3$ 

Рівні факторів	$a_1$		$a_2$	
	$b_1$	$b_2$	$b_1$	$b_2$
$c_1$	* $y_{111}$	$y_{121}$	$y_{211}$	* $y_{221}$
$c_2$	$y_{112}$	* $y_{122}$	* $y_{212}$	$y_{222}$

При відсутності паралельних дослідів результати спостережень можна представити у вигляді лінійної моделі:

$$y_{ijq} = \bar{y} + \alpha_i + \beta_j + \gamma_q + \varepsilon_{ijq}. \quad (6.42)$$

При цьому лінійні ефекти виявляються змішаними з ефектами взаємодії: ефект  $A$  з  $BC$  взаємодією, ефект  $B$  з  $AC$  взаємодією, ефект  $C$  з  $AB$  взаємодією. Однак кількість дослідів в умовах лінійної моделі можна істотно скоротити при використанні ДФЕ, спланованого за схемою латинського квадрата.

*Латинським квадратом  $n \times n$*  називають квадратну таблицю, складену з  $n$  елементів (чисел або літер) таким чином, щоб кожен елемент повторювався в кожному рядку і кожному стовпці тільки один раз.

Із двох елементів утворюється латинський квадрат  $2 \times 2$ :

$$\begin{array}{cc} A & B \\ B & A \end{array} \quad \text{або} \quad \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \\ C_2 & C_1 \end{array}, \quad (6.43)$$

з трьох – латинський квадрат  $3 \times 3$ :

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{array} \quad \text{або} \quad \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_2 & C_3 & C_1 \\ C_3 & C_1 & C_2 \end{array}. \quad (6.44)$$

*Стандартними латинськими квадратами* називаються квадрати, в яких перші рядок і стовпець побудовані або в алфавітному порядку, або в порядку натурального ряду (квадрати виразів (6.43) та (6.44)). Отримано ці квадрати шляхом однокрокової циклічної перестановки.

При ДФЕ за схемою латинського квадрата вводиться у планування експерименту третій фактор. При цьому основою є ПФЕ типу  $n^2$ . Так, при  $n = 2$  та ПФЕ типу  $2^2$  (для факторів  $A$  і  $B$ ) накладається латинський квадрат  $2 \times 2$  (табл. 6.4). План експерименту, відповідний табл. 6.3, називається матрицею планування і представлений в табл. 6.4. Кількість дослідів при цьому скорочується до чотирьох замість восьми при ПФЕ.

Таблиця 6.4 - латинський квадрат  $2 \times 2$ 

A	B	
	$b_1$	$b_2$
$a_1$	$c_1$	$c_2$
$a_2$	$c_2$	$c_1$

Хоча латинський квадрат  $2 \times 2$  є частиною плану проведення експерименту, всю табл. 6.4 також називають латинським квадратом. У ньому кожен елемент повторюється тільки один раз у кожному рядку і кожному стовпці, що в рівній мірі впливає при підрахунку середніх по рядках і стовпцях. Наведений в табл. 6.3 план являє собою половину – напіврепліку від ПФЕ типу  $2^3$  (досліди, що увійшли в напіврепліки відмічені табл. 6.2 зірочками).

Таблиця 6.5 - План ДФЕ по схемі латинського квадрата  $2 \times 2$   
( $k = 3, n = 2, N = 4$ )

№ досліду	A	B	C	Результат
1	$a_1$	$b_1$	$c_1$	$y_{111}$
2	$a_1$	$b_2$	$c_2$	$y_{122}$
3	$a_2$	$b_1$	$c_2$	$y_{212}$
4	$a_2$	$b_2$	$c_1$	$y_{222}$

Аналогічно планується ДФЕ за схемою латинського квадрата  $3 \times 3$  (табл. 6.6). За основу взято ПФЕ типу  $3^2$ , третій фактор (C) введено в розгляд по схемі латинського квадрата (6.44). ДФЕ  $3^2$  можна розглядати як 1/3 репліки від ПФЕ типу  $3^3$ .

Таблиця 6.6 - Латинський квадрат  $3 \times 3$ 

A	B		
	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$a_1$	$c_1$	$c_2$	$c_3$
	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$a_2$	$c_2$	$c_3$	$c_1$
	$y_4$	$y_5$	$y_6$
$a_3$	$c_3$	$c_1$	$c_2$
	$y_7$	$y_8$	$y_9$

У загальному випадку при плануванні ДФЕ за схемою латинського квадрата кількість дослідів у порівнянні із ПФЕ зменшується в  $n$  разів (так, якщо  $n = 4$ , то при ПФЕ  $N = 4^3 = 64$ , а при ДФЕ за схемою латинського квадрата  $4 \times 4$  кількість дослідів дорівнює  $N = 4^2 = 16$ ).

Дисперсійний аналіз латинського квадрата, виконаного без паралельних дослідів, проводиться аналогічно двофакторному дисперсійному аналізу. При цьому для факторів A і B розглядається їх вплив на розсіювання середніх по стовпцях і по рядках щодо загальної середньої відповідно, а для фактору C – на

розсіювання середніх за латинськими літерами  $C_q$ . Так, наприклад, для ДФЕ, представленого в табл. 6.6, середні за латинськими літерами:

$$C_1 = \frac{y_1+y_6+y_8}{3}, \quad C_2 = \frac{y_2+y_4+y_9}{3}, \quad C_3 = \frac{y_3+y_5+y_7}{3}. \quad (6.45)$$

Значимість лінійних ефектів перевіряють за критерієм Фішера. Адекватність прийнятої лінійної моделі можна перевірити, виконавши для кожного поєднання рівнів факторів (для кожної комірки латинського квадрата) однакову кількість паралельних дослідів.

При цьому наявність паралельних спостережень використовується тільки для оцінки випадкової помилки досліду. Якщо ефекти взаємодії незначимі, то залишкова дисперсія буде незначно відрізнятися від дисперсії відтворюваності, обумовленої помилкою досліду.

### Контрольні запитання та завдання

1. Поясніть сутність дисперсійного аналізу та його задачі.
2. Поясніть підходи до вирішення задачі дисперсійного аналізу.
3. Опишіть у чому полягає суть однофакторного дисперсійного аналізу.
4. Назвіть умову, коли вплив відповідного фактору слід вважати значущим.
5. За яким критерієм може проводитись перевірка значення оцінок дисперсій при дисперсійному аналізі.
6. Вкажіть, фактори яких рівнів розглядаються при дисперсійному аналізі.
7. Поясніть що таке модель об'єкта з випадковими рівнями факторів.
8. Поясніть що таке модель об'єкта з фіксованими рівнями факторів.
7. Надайте порівняльну характеристику однофакторному і багатфакторному дисперсійному аналізу.
8. Наведіть математичну інтерпретацію загальної виправлена вибіркової дисперсії дослідів
9. Поясніть, як визначити виправлену вибірку дисперсію для кожного фактору.
10. Вкажіть, що ми розуміємо під дисперсією одного фактору.
11. Наведіть математичний вираз для наближеного оцінювання вибіркової дисперсії випадкового фактору.
12. Поясніть порядок застосування математичного апарату перевірки параметричних статистичних гіпотез при перевірці відмінності між загальною дисперсією та дисперсією фактора.
13. За яким критерієм можна перевірити однорідність виправлених вибіркової дисперсій за кожним рівнем виконання дослідів?
15. Опишіть та поясніть особливості двофакторного дисперсійного аналізу.
16. Поясніть, як можна оцінити дисперсію випадкової помилки.
17. Як визначити оцінку дисперсії відтворюваності при двофакторному аналізі?

18. Як оцінити вибіркoву дисперсію, що характеризує вплив взаємодії факторів при двофакторному аналізі?
19. За яким критерієм може бути проведена перевірка значущості впливу факторів та їх взаємодії?
20. Пояснить особливості планування двофакторного експерименту при дисперсійному аналізі.
21. Що Ви розумієте під повним факторним експериментом?
22. Що Ви розумієте під дробовим факторним експериментом?
23. Що таке латинський квадрат?
24. Що таке стандартний латинський квадрат?

## РОЗДІЛ 7. ОСНОВИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУВАННЯ ФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

### 7.1. Постановка задачі при плануванні екстремальних експериментів

Розв'язання екстремальних задач, які описують процеси в електронних комунікаційних структурах (наприклад, визначення оптимальних умов обробки сигналів) можливо на основі математичної моделі об'єкта – функції відгуку, що зв'язує вихідний параметр, що характеризує результати експерименту, зі змінними (факторами), які визначають умови проведення досліду

$$y = \phi(x_1, x_2, \dots, x_k). \quad (7.1)$$

Наприклад, на основі теоретичного аналізу процесів перетворення сигналів при наявності достатньої інформації про їх специфіку можна скласти детерміновану математичну модель об'єкта. Однак при проведенні більшості досліджень механізми процесів, що протікають в об'єктах, які підлягають проведенню експериментів, а саме: засоби обробки інформації, залишаються невідомими. Тому для розв'язання завдань оптимізації необхідно використовувати методи математичної статистики.

При статистичному підході математична модель об'єкта або процесу представляється у вигляді полінома, тобто відрізка ряду Тейлора, в який розкладається невідома функція (7.1):

$$y = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_j + \sum_{\substack{u,j=1 \\ u \neq j}}^k \beta_{uj} x_u x_j + \\ + \sum_{j=1}^k \beta_{jj} x_j^2 + \sum_{\substack{i,u,j=1 \\ i \neq u \neq j}}^k \beta_{iuj} x_i x_u x_j + \dots \quad (7.2)$$

Для виразу (7.2) значення складових розраховуються таким чином:

$$\beta_0 = \varphi(0), \quad \beta_j = \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x_j}, \quad \beta_{uj} = \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x_u \partial x_j}, \quad \beta_{jj} = \frac{\partial \varphi(0)}{2 \partial x_j^2}, \quad \beta_{iuj} = \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x_i \partial x_u \partial x_j}. \quad (7.3)$$

Через вплив випадкових факторів на результати досліду при обробці і аналізі експериментальних даних для поліноміальної моделі (7.2) знаходять вибіркові коефіцієнти регресії  $b_0, b_j, b_{uj}, b_{jj}, b_{iuj}$ , які є оцінками відповідних теоретичних коефіцієнтів.

Рівняння регресії записується у вигляді

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j x_j + \sum_{\substack{u,j=1 \\ u \neq j}}^k b_{uj} x_u x_j + \sum_{j=1}^k b_{jj} x_j^2 + \sum_{\substack{i,u,j=1 \\ i \neq u \neq j}}^k b_{iuj} x_i x_u x_j + \dots, \quad (7.4)$$

де  $b_0$  – вільний член;

$b_j$  – коефіцієнт, який характеризує лінійні ефекти;

$b_{ij}$  – коефіцієнт, який характеризує ефекти парної взаємодії;

$b_{jj}$  – коефіцієнт, який характеризує квадратичні ефекти;

$b_{uij}$  – коефіцієнт, який характеризує ефекти потрійної взаємодії.

Залежно від мети дослідження і наявної інформації можна обмежитися розрахунком тільки частини коефіцієнтів, нехтуючи впливом інших ефектів (наприклад, в умовах лінійної моделі значущими вважаються тільки лінійні ефекти; квадратичної моделі – лінійні і квадратичні ефекти, при цьому в обох випадках приймається, що ефекти взаємодії факторів достатньо малі).

Слід зазначити, що на підставі оцінок теоретичних коефіцієнтів можна визначити аналітичний вираз функції відгуку і, отже, отримати інформацію про механізм процесу. Поліноміальні моделі використовуються тільки для розв'язання завдань оптимізації та керування процесами.

*Під плануванням експерименту розуміють оптимальне (найбільш ефективне) керування ходом експерименту з метою отримання максимально можливої інформації на основі мінімально допустимої кількості даних.*

Весь експеримент зазвичай розбивається на кілька етапів. Інформація, отримана на попередньому етапі, використовується для планування досліджень на наступному етапі.

Планування експерименту дозволяє варіювати всіма факторами і отримувати одночасно кількісні оцінки всіх ефектів, і при цьому, на відміну від класичного регресійного аналізу, уникнути кореляції між коефіцієнтами рівняння регресії.

## **7.2 Повний факторний експеримент типу $2^2$ : матриця планування, розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії**

При ПФЕ кількість дослідів дорівнює кількості всіх можливих комбінацій рівнів факторів і при однаковій кількості рівнів для кожного фактору визначається формулою

$$N = n^k, \quad (7.5)$$

де  $n$  – кількість рівнів;

$k$  – кількість факторів ( $j = 1, 2, \dots, k$ ).

ПФЕ  $2^k$  називається таке проведення дослідів, при якому кожен з  $k$  факторів розглядається тільки на двох рівнях. При цьому рівні факторів - це межі варіювання даного параметру.

Припустимо, наприклад, що вивчається вплив на результати експерименту ( $y$ ) двох параметрів (факторів): температури ( $z_1$ ) в інтервалі  $50 - 100^\circ \text{C}$  і тиску ( $z_2$ ) у діапазоні 1 - 2 атмосфери.

При реалізації ПФЕ потрібно виконати  $N = 2^2 = 4$  досліди. Зробимо кодування факторів (заміну змінних):

$$x_j = \frac{z_j - z_j^0}{\Delta z_j} \quad (7.6)$$

У виразі (7.6) для розрахунку  $z_j^0$  та  $\Delta z_j$  використовують залежності

$$z_j^0 = \frac{z_j^{max} + z_j^{min}}{2}, \quad \Delta z_j = \frac{z_j^{max} - z_j^{min}}{2}, \quad (7.7)$$

де  $z_j^{max}$  і  $z_j^{min}$  — верхня та нижня границі варіювання  $j$ -фактору.

Точка  $(z_1^0, z_2^0)$  називається центром плану, або основним рівнем.

Величини  $\Delta z_1$  і  $\Delta z_2$  — інтервалами варіювання по осям  $z_1$  і  $z_2$ .

Як впливає з рівнянь (7.6) і (7.7), для змінних  $x_1$  і  $x_2$  нижній рівень дорівнює  $(-1)$ , а верхній дорівнює  $(+1)$ , координати центру плану дорівнюють нулю. У табл. 7.1 представлений план ПФЕ  $2^2$ , який у безрозмірному масштабі може бути інтерпретований у вигляді чотирьох вершин квадрату (рис. 7.1).

Таблиця 7.1 - Повний факторний експеримент  $2^2$

№ досліду	Фактори в натуральному масштабі		Фактори в безрозмірному масштабі		Вихід продукту, $y$
	$z_1$ (°C)	$z_2$ (атм)	$x_1$	$x_2$	
1	50	1	-1	-1	$y_1$
2	50	2	-1	+1	$y_2$
3	100	1	+1	-1	$y_3$
4	100	2	+1	+1	$y_4$

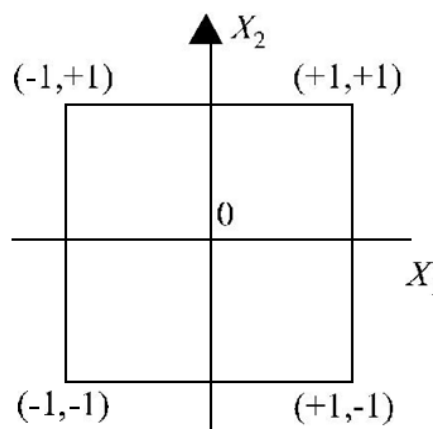


Рис. 7.1 – Повний факторний експеримент  $2^2$

Розрахуємо коефіцієнти лінійного рівняння регресії

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 . \quad (7.8)$$

Для знаходження  $b_0$  у план ПФЕ треба ввести стовпець фіктивної змінної  $x_0 = 1$ . Відповідна матриця планування представлена в табл. 7.2.

У математичній статистиці доводиться, що при плануванні експерименту за запропонованою схемою і знаходженні коефіцієнтів рівняння регресії за методом найменших квадратів будь-який коефіцієнт визначається скалярним добутком стовпчика у на відповідний стовпець факторів  $x_j$  у безрозмірному масштабі (табл. 7.2), розділеним на кількість дослідів в матриці планування:

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ji} y_i}{N} . \quad (7.9)$$

Таблиця 7.2 - Матриця планування ПФЕ типу  $2^2$  з фіктивною змінною

№ дослідю	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$y$
1	+1	-1	-1	$y_1$
2	+1	-1	+1	$y_2$
3	+1	+1	-1	$y_3$
4	+1	+1	+1	$y_4$

Так, значення коефіцієнта  $b_1$  визначається виразом

$$b_1 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N x_{ji} y_i = \frac{[-y_1 + y_2 - y_3 + y_4]}{4} . \quad (7.10)$$

Якщо ввести в розгляд ефект парної взаємодії, то рівняння регресії матиме вигляд:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 . \quad (7.11)$$

Для знаходження коефіцієнта  $b_{12}$  необхідно розширити матрицю планування, яка представлена в табл. 7.2, додавши в неї стовпець  $x_1 x_2$ , що характеризує ефект взаємодії (табл. 7.3).

Таблиця 7.3 - Розширена матриця планування ПФЕ типу  $2^2$

№ дослідю	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1 x_2$	$y$
1	+1	-1	-1	+1	$y_1$
2	+1	-1	+1	-1	$y_2$
3	+1	+1	-1	-1	$y_3$
4	+1	+1	+1	+1	$y_4$

Значення фактору взаємодії у безрозмірному масштабі визначається добутком відповідних значень факторів  $x_1$  і  $x_2$ :

$$(x_1 x_2)_i = x_{1i} x_{2i} . \quad (7.12)$$

Коефіцієнт  $b_{12}$  визначається так як і лінійні ефекти:

$$b_{12} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_1 x_2)_i y_i = \frac{1}{4} [y_1 - y_2 - y_3 - y_4]. \quad (7.13)$$

### 7.3. Матриця планування повного факторного експерименту типу $2^3$

Розглянемо планування ПФЕ типу  $2^3$ , при якому досліджується вплив на результат досліду трьох факторів. При реалізації такого ПФЕ потрібно виконати  $N = 8$  дослідів. Проведемо кодування факторів за рівнянням (7.12). План проведення дослідів приведений у табл. 7.4, геометрично в безрозмірному масштабі може бути інтерпретований у вигляді восьми вершин куба (рис. 7.2).

Таблиця 7.4 - Повний факторний експеримент  $2^3$

№ дослідів	Фактори у безрозмірному масштабі			Вихід продукту, у
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
1	-1	-1	-1	$y_1$
2	+1	-1	-1	$y_2$
3	-1	+1	-1	$y_3$
4	+1	+1	-1	$y_4$
5	-1	-1	+1	$y_5$
6	+1	-1	+1	$y_6$
7	-1	+1	+1	$y_7$
8	+1	+1	+1	$y_8$

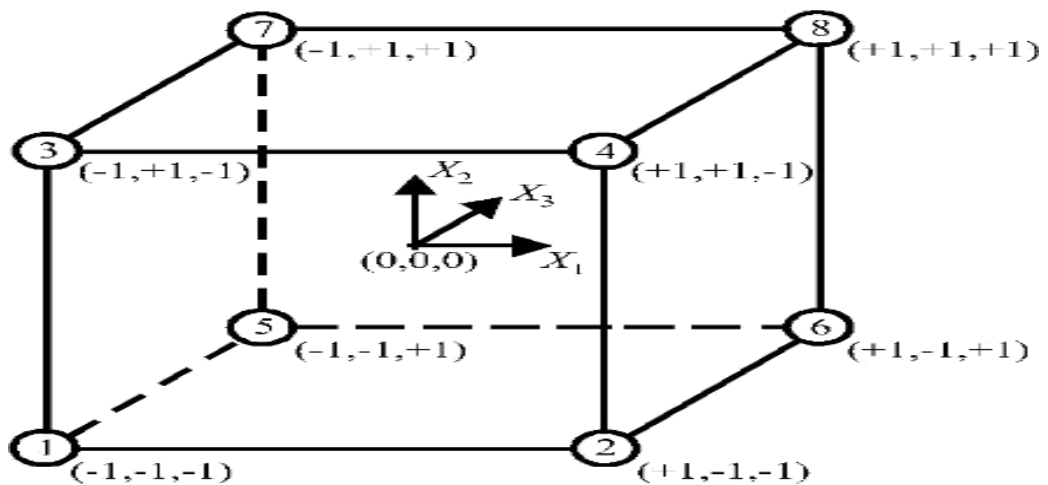


Рисунок 7.2 – Повний факторний експеримент  $2^3$

Рівняння регресії із урахуванням ефектів взаємодії факторів запишеться в наступному вигляді:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3 \quad (7.4)$$

де коефіцієнти  $b_{12}$ ,  $b_{13}$  та  $b_{23}$  характеризують ефекти парної взаємодії, а  $b_{123}$  — ефект потрійної взаємодії.

Для знаходження коефіцієнтів рівняння (7.4) необхідно скласти розширену матрицю планування ПФЕ с фіктивною змінною, яка представлена в табл. 7.5.

Таблиця 7.5 - Розширена матриця планування ПФЕ типу  $2^3$

№	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	$y$
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	$y_1$
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	$y_2$
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	$y_3$
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	$y_4$
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	$y_5$
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	$y_6$
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	$y_7$
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$y_8$

Як і при ПФЕ  $2^2$ , коефіцієнти рівняння регресії (7.4) визначаються скалярним добутком стовпчика  $y$  на відповідний стовпець факторів або їх взаємодії в безрозмірному масштабі, розділеним на кількість дослідів в матриці планування.

Так, наприклад, коефіцієнт  $b_{123}$  розраховується за наступним виразом:

$$b_{123} = \frac{1}{8} [-y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + y_5 - y_6 - y_7 + y_8] \quad (7.5)$$

#### 7.4. Перевірка значення коефіцієнтів і адекватності рівняння регресії, отриманих при обробці результатів ПФЕ $2^2$ та $2^3$

Для оцінки значення коефіцієнтів рівняння регресії та перевірки адекватності рівняння експерименту достатньо провести серію паралельних дослідів, виконаних при якомусь одному поєднанні факторів.

Нехай у центрі плану (в точках  $(z_1^0, z_2^0)$  та  $(z_1^0, z_2^0, z_3^0)$  для ПФЕ  $2^2$  та  $2^3$  відповідно) проведена серія з  $m$  дослідів. Тоді вибіркова дисперсія відтворюваності, що характеризує вплив випадкових факторів, дорівнює

$$S_{\text{відт}}^2 = \frac{\sum_{u=1}^m (y_u^0 - \bar{y}^0)^2}{m-1}, \quad (7.6)$$

де  $y_u^0$  — результат  $u$ -го дослід (  $u = 1, 2, \dots, m$  );  
 $\bar{y}^0$  — середнє значення серії дослідів.

У математичній статистиці доводиться, що для спланованих експериментів всі коефіцієнти рівняння регресії визначається з однаковою точністю, що дорівнює

$$S(b_j) = \frac{S_{\text{відт}}}{\sqrt{N}}. \quad (7.7)$$

Значення коефіцієнтів перевіряється за критерієм Стюдента. В умовах нульової гіпотези  $H_0: \beta_j = 0$ ; відношення абсолютної величини коефіцієнта до його помилки має розподіл Стюдента.

Тоді для кожного коефіцієнта визначається  $t$ -відношення:

$$t_j = \frac{|b_j|}{s(b_j)} = \frac{|b_j|}{S_{\text{відт}}} \sqrt{N}, \quad (7.8)$$

яке порівнюється з табличним значенням критерію Стюдента  $t_p(f)$  для обраного рівня значення  $\alpha$  (звичайно 0,05) та кількості ступенів вільності  $f = m - 1$ . Якщо для даного коефіцієнта  $t_j > t_p(f)$ , то він істотно відрізняється від нуля. Вибіркові коефіцієнти, для яких  $t_j \leq t_p(f)$ , незначимі, та їх слід виключити з рівняння регресії.

Допустимо, при перевірці значущості коефіцієнтів рівняння (7.4) виявилось, що всі коефіцієнти, які характеризують ефекти взаємодії факторів, незначимі. Після їх виключення отримуємо лінійне рівняння регресії

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \quad (7.9)$$

при цьому значення  $b_0, b_1, b_2$  і  $b_3$  не потрібно обчислювати заново через те, що коефіцієнти рівняння не корельовані між собою.

На відміну від класичного регресійного аналізу, виключення незначимого коефіцієнту не впливає на величини інших коефіцієнтів рівняння регресії, а самі вибіркові коефіцієнти, отримані при реалізації ПФЕ, є незсуненими оцінками теоретичних коефіцієнтів.

Адекватність рівняння перевіряється за критерієм Фішера

$$F = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S_{\text{відт}}^2}. \quad (7.10)$$

Дисперсія адекватності (залишкова дисперсія) дорівнює

$$S_{\text{ад}}^2 = S_{\text{ост}}^2 = \frac{1}{N-l} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2, \quad (7.11)$$

де  $l$  — кількість значущих коефіцієнтів (для випадку, що розглядається  $l = 4$ ).

Рівняння адекватно описує експеримент, якщо

$$F \leq F_{1-\alpha}(f_1, f_2), \quad (7.12)$$

де  $F_{1-\alpha}(f_1, f_2)$  – табличне значення критерію Фішера для  $\alpha = 0,05$  та кількості ступенів вільності  $f_1 = f_{ад} = N - l$  та  $f_2 = f_{відТВ} = m - 1$ .

Розглянемо також алгоритм проведення регресійного аналізу для спланованого експерименту у випадку, коли кожний дослід у матриці планування повторюється  $m$  раз. Для прикладу використаємо ПФЕ  $2^3$ ; при отриманні рівняння регресії обмежимося лінійним приближенням (рівняння (7.9)). Матриця планування такого експерименту представлена в табл. 7.6. Для кожного поєднання рівняння факторів визначається середнє значення вимірювальної величини і вибіркова дисперсія:

$$y_i = \frac{1}{m} \sum_{u=1}^m y_{iu} \quad , \quad (7.13)$$

$$S_i^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{n=1}^m (y_{iu} - y_i)^2. \quad (7.14)$$

Таблиця 7.6 - Матриця планування ПФЕ  $2^3$  в умовах лінійної моделі з однаковою кількістю паралельних дослідів при кожному поєднанні рівнів факторів

$N_i$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$	$\bar{y}_i$	$s_i^2$
1	+1	-1	-1	-1	$y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1m}$	$\bar{y}_1$	$s_1^2$
2	+1	+1	-1	-1	$y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2m}$	$\bar{y}_2$	$s_2^2$
3	+1	-1	+1	-1	$y_{31}, y_{32}, \dots, y_{3m}$	$\bar{y}_3$	$s_3^2$
4	+1	+1	+1	-1	$y_{41}, y_{42}, \dots, y_{4m}$	$\bar{y}_4$	$s_4^2$
5	+1	-1	-1	+1	$y_{51}, y_{52}, \dots, y_{5m}$	$\bar{y}_5$	$s_5^2$
6	+1	+1	-1	+1	$y_{61}, y_{62}, \dots, y_{6m}$	$\bar{y}_6$	$s_6^2$
7	+1	-1	+1	+1	$y_{71}, y_{72}, \dots, y_{7m}$	$\bar{y}_7$	$s_7^2$
8	+1	+1	+1	+1	$y_{81}, y_{82}, \dots, y_{8m}$	$\bar{y}_8$	$s_8^2$

Однорідність дисперсії перевіряється за критерієм Кохрена. Відношення максимальної дисперсії до суми всіх дисперсій

$$G = \frac{S_{max}^2}{\sum_{i=1}^N S_i^2} \quad (7.15)$$

порівнюється з табличним значенням  $G_{1-\alpha}(f_1, f_2)$  для  $\alpha = 0,05$  та кількості ступенів вільності  $f_1 = m - 1$  і  $f_2 = N$ . Якщо  $G \leq G_{1-\alpha}(f_1, f_2)$ , то вибіркові дисперсії однорідні. Тоді найкращою оцінкою дисперсії відтворюваності буде середньозважена дисперсія

$$S_{\text{відт}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i^2, \quad (7.16)$$

із кількості ступенів вільності

$$f_{\text{відтв}} = N(m - 1). \quad (7.17)$$

Коефіцієнти рівняння регресії визначаються за формулою

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ji} \bar{y}_i. \quad (7.18)$$

Оскільки дисперсія середнього в  $m$  разів менше дисперсії одиничного вимірювання, тобто

$$S^2(\bar{y}) = \frac{S_{\text{відт}}^2}{m}, \quad (7.19)$$

то вибіркові середньоквадратичні відхилення коефіцієнтів розраховується наступним чином:

$$S(b_j) = \frac{S_{\text{відт}}}{\sqrt{Nm}} = \frac{1}{N\sqrt{m}} \sqrt{\sum_{i=1}^N S_i^2}. \quad (7.20)$$

Значення коефіцієнтів перевіряється за критерієм Стюдента:

$$t_j = \frac{b_j}{S(b_j)} > t_{\alpha}(f), \quad (7.21)$$

де  $t_{\alpha}(f)$  — табличне значення критерію Стюдента для  $\alpha = 0,05$  і кількості ступенів вільності  $f = N(m - 1)$ , то значення коефіцієнта відрізняється від нуля.

Адекватність рівняння регресії експерименту перевіряється за критерієм Фішера. Дисперсія адекватності дорівнює

$$S_{ад}^2 = \frac{m \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2}{N-l}, \quad (7.22)$$

де  $l$  – число значущих коефіцієнтів у рівнянні регресії.  
Рівняння адекватно експерименту, якщо

$$F = \frac{S_{ад}^2}{S_{відт}^2} \leq F_{1-\alpha}(f_{ад}, f_{відт}), \quad (7.23)$$

$F_{1-\alpha}(f_{ад}, f_{відт})$  – табличне значення критерія Фішера для  $\alpha = 0,05$  та кількості ступенів вільності  $f_{ад} = N - l$  и  $f_{відтв} = N(m - 1)$ . В іншому випадку для опису результатів експерименту необхідно збільшити порядок апроксимуючого полінома.

### 7.5. Дробовий факторний експеримент. Плани типу $2^{k-1}$

Кількість необхідних дослідів за умов лінійної моделі істотно скорочується при проведенні дробових факторних експериментів (дробових реплік від ПФЕ).

В якості репліки звичайно використовується повний факторний експеримент для меншого числа факторів. При цьому обчислення коефіцієнтів рівняння та оцінка їх значущості проводиться так само, як і в розглянутих вище прикладах ПФЕ  $2^2$  и  $2^3$ . Кількість дослідів у дробовій репліці має бути більше або дорівнює кількості невідомих коефіцієнтів у рівнянні регресії.

Сплануємо дробовий факторний експеримент для отримання лінійного рівняння регресії невеликої ділянки поверхні відгуку при трьох незалежних факторах:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3. \quad (7.24)$$

Постановка ПФЕ  $2^3$  вимагає проведення 8 дослідів. Для вирішення цього поставленого завдання можна обмежитися 4 дослідями, якщо в матриці планування ПФЕ  $2^2$  використати стовпець  $x_1 x_2$  в якості плану для  $x_3$ . Матриця планування такого скороченого експерименту – ДФЕ типу  $2^{3-1}$  або напіврепліки від ПФЕ  $2^3$ , – представлена в табл. 7.7.

Таблиця 7.7 - Матриця планування ДФЕ типу  $2^{3-1}$

№ дослідів	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$Y$
1	+1	-1	-1	+1	$y_1$
2	+1	-1	+1	-1	$y_2$
3	+1	+1	-1	-1	$y_3$
4	+1	+1	+1	+1	$y_4$

Проведення ДФЕ за запропонованою схемою дозволяє оцінити вільний член і три коефіцієнти при лінійних членах рівняння (7.24). Але при цьому вони будуть незмішаними оцінками теоретичних коефіцієнтів тільки у тому випадку, якщо генеральні коефіцієнти регресії при парних взаємодіях дорівнюють нулю. Інакше знайдені вибіркові коефіцієнти будуть змішаними оцінками теоретичних:

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}, \quad b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}, \quad b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}. \quad (7.25)$$

Генеральні коефіцієнти не можуть бути оцінені окремо на основі тільки 4 дослідів, оскільки при цьому стовпці для лінійних членів і парних стовпців однакові (наприклад, елементи розрахованого стовпця для множення  $x_2 x_3$  у точності співпадають із елементами стовпця  $x_1$ ).

Щоб визначити, оцінкою суми яких саме генеральних коефіцієнтів є вибіркові коефіцієнти, зручно користуватися генеруючим співвідношенням

$$x_3 = x_1 x_2, \quad (7.26)$$

у загальному випадку це означає, який саме стовпець ПФЕ  $2^k$  був використаний в якості плану для введення  $(k + 1)$ -го фактору в ДФЕ.

При множенні обох частин (7.26) на  $x_3$ , отримуємо

$$x_3^2 = x_1 x_2 x_3. \quad (7.27)$$

Одиничний стовпець

$$I = x_1 x_2 x_3 \quad (7.28)$$

називається *визначальним контрастом* і дозволяє визначити, елементи яких стовпців у розширеній матриці планування однакові. Помноживши  $I$  по черзі на  $x_1, x_2, x_3$ , отримуємо

$$x_1 = x_1^2 x_2 x_3 = x_2 x_3, \quad x_2 = x_1 x_2^2 x_3 = x_1 x_3, \quad x_3 = x_1 x_2 x_3^2 = x_1 x_2, \quad (7.29)$$

які точно відповідають системі змішаних оцінок (7.25).

При постановці ДФЕ з кількістю факторів  $k \geq 4$  залежно від генеруючого співвідношення вибіркові коефіцієнти регресії виявляються змішаними оцінками того або іншого поєднання генеральних коефіцієнтів. Тому важливо заздалегідь визначитися з тим, яка саме інформація є найбільш важливою в цьому дослідженні, і залежно від поставленого завдання, підібрати потрібну дробову репліку.

Розглянемо, наприклад, планування ДФЕ типу  $2^{4-1}$ , що є напівреплікою від ПФЕ  $2^4$ . В якості репліки використовувався ПФЕ  $2^3$  (табл. 7.4). Використовуємо два генеруючі співвідношення:

$$x_4 = x_1 x_2 x_3, \quad (7.30)$$

$$x_4 = x_1 x_3. \quad (7.31)$$

Для цих співвідношень визначальним контрастом буде

$$I = x_1 x_2 x_3 x_4. \quad (7.32)$$

Тоді

$$x_1 = x_2 x_3 x_4, b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{234}; x_2 = x_1 x_3 x_4, b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{134};$$

$$x_3 = x_1 x_2 x_4, b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{124}; x_4 = x_1 x_2 x_3, b_4 \rightarrow \beta_4 + \beta_{123};$$

$$x_1 x_2 = x_3 x_4, b_{12} \rightarrow \beta_{12} + \beta_{34}; \quad (7.33)$$

$$x_1 x_3 = x_2 x_4, b_{13} \rightarrow \beta_{13} + \beta_{24};$$

$$x_1 x_4 = x_2 x_3, b_{14} \rightarrow \beta_{14} + \beta_{23}.$$

У реальних завданнях вплив потрійних взаємодій зазвичай дорівнює нулю. Отже, генеруюче співвідношення (7.30) слід використати, якщо найбільший інтерес представляють оцінки для лінійних ефектів.

Для співвідношення (7.33) визначальним контрастом буде

$$I = x_1 x_3 x_4. \quad (7.34)$$

Тоді

$$x_1 = x_3 x_4, b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{34}; x_2 = x_1 x_2 x_3 x_4, b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{1234}$$

$$x_3 = x_1 x_4, b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{14}; x_4 = x_1 x_3, b_4 \rightarrow \beta_4 + \beta_{13};$$

$$x_1 x_2 = x_2 x_3 x_4, b_{12} \rightarrow \beta_{12} + \beta_{234}; \quad (7.35)$$

$$x_2 x_3 = x_1 x_2 x_4, b_{23} \rightarrow \beta_{23} + \beta_{124};$$

$$x_2 x_4 = x_1 x_2 x_3, b_{24} \rightarrow \beta_{24} + \beta_{123}$$

Отже, дробову репліку з генеруючим співвідношенням  $x_4 = x_1 x_3$  слід використати, якщо найбільший інтерес представляють ефекти парних взаємодій.

У загальному випадку кількість дослідів у дробовій репліці повинне задовольняти наступному співвідношенню:

$$k + 1 \leq N < 2^k, \quad (7.35)$$

де  $k$  – кількість факторів.

Якщо кількість дослідів дорівнює числу коефіцієнтів, які визначаються, у лінійному рівнянні регресії ( $N = k + 1$ ), дробова репліка є лінійним насиченим планом, для якого усі лінійні ефекти змішані з ефектами взаємодії. Кількість ступенів вільності залишкової дисперсії у таких планах дорівнює нулю, тому для перевірки адекватності лінійного рівняння потрібне проведення додаткових дослідів.

Отже, розглянуті дворівневі плани ПФЕ  $2^k$  і ДФЕ  $2^{k-1}$  мають такі властивості:

- обчислення прості;
- усі коефіцієнти регресії визначаються незалежно один від одного і з однаковою і мінімальною дисперсією;
- кожен коефіцієнт розраховується за результатами усіх дослідів.

### 7.6. Оптимізація методом крутого сходження по поверхні відгуку

Завдання оптимізації зводиться до експериментального визначення такого поєднання рівнів  $k$  факторів (координати точки в  $(k + 1)$  – вимірному факторному просторі), при якому досягається максимальне (або мінімальне) значення вихідного параметра  $y$  (чи декількох параметрів), тобто функція відгуку системи

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (7.36)$$

набуває екстремального значення.

Розглянемо випадок, коли на систему впливають тільки два фактори, а саме:  $x_1$  і  $x_2$  у безрозмірному масштабі. Побудуємо контурні перерізи  $y = const$  поверхні відгуку при  $k = 2$  (рис. 7.3-а).

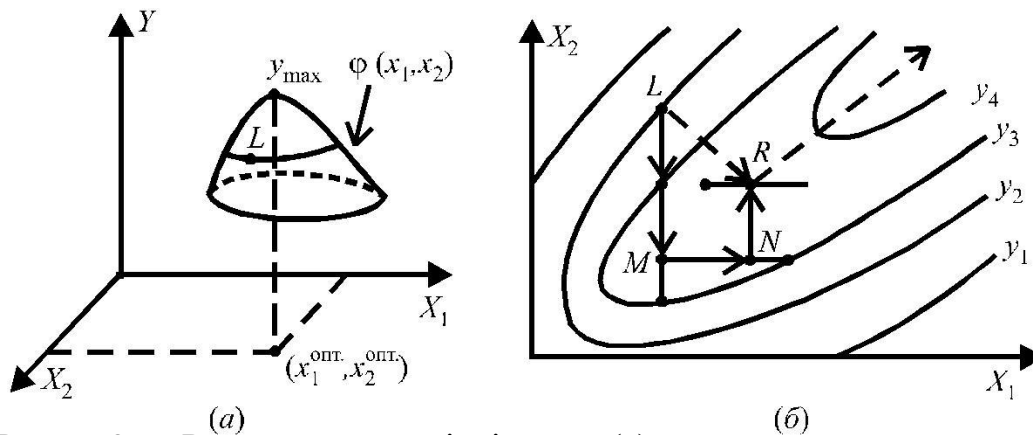


Рис. 7.3 – Рух по поверхні відгуку (а) до екстремуму в традиційному експерименті і у методі крутого сходження (б)

Пошук екстремальної точки поверхні відгуку в традиційному експерименті проводиться таким чином. У точці  $L$  із відомим значенням  $y$  фіксується один із факторів, наприклад  $x_1$ , і починається рух із цієї точки уздовж осі  $x_2$ . Рух по осі  $x_2$  триває доти, поки не припиняється приріст  $y$  (рис. 7.3-б). У точці  $M$  з оптимальним значенням вихідного параметра фіксується чинник  $x_2$  і починається рух у напрямі осі  $x_1$ . У точці  $N$  із наступним найкращим значенням  $y$  знову фіксується  $x_1$  і починається рух по  $x_2$  і т.д. Очевидно, що шлях до екстремуму по ламаній кривій  $LMNR$  (рис. 7.3-б) не є оптимальним.

Найкоротшим, найбільш крутішим шляхом досягнення екстремуму буде рух із точки  $L$  по градієнту перпендикулярно ізолініям  $y = const$  (на рис. 7.3-б цей шлях показаний пунктирною лінією).

Для даного випадку градієнт функції відгуку дорівнює

$$\text{grad } \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) \vec{j}, \quad (7.37)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}$  – орти координатних вісей. Передбачається, що функція  $\varphi$  безперервна, диференційована і немає особливих точок.

Для реалізації *методу крутого сходження* Бокс і Уїлсон запропонували кроковий метод руху по поверхні відгуку. Навколо точки  $L$  ставиться експеримент для реалізації локального опису поверхні відгуку лінійним рівнянням регресії:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2. \quad (7.37)$$

Рух із точки  $L$  починається у напрямі градієнта лінійного наближення

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} = b_1; \quad \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_2} = b_2. \quad (7.39)$$

Для випадку, представленого на рис. 7.3-б, вибіркові коефіцієнти при лінійних членах навколо точки  $L$  мають різні знаки, а саме:  $b_1 > 0$ ,  $b_2 < 0$ . Тому при русі до максимуму функції відгуку значення  $x_1$  збільшується, а  $x_2$  зменшується. Рух по градієнту лінійного наближення триває доти, поки не припиняється приріст  $y$ . У точці з найбільшим значенням  $y$  (центр плану) ставиться нова серія дослідів і визначається новий напрям руху по поверхні відгуку. Такий кроковий процес триває до досягнення області, близької до екстремуму. При постановці експерименту величина кроку має бути пропорційна добутку коефіцієнта на інтервал варіювання:  $b_j \Delta z_j$ . Наприклад, при русі з точки  $L$  наступний експеримент ставиться в точці зі значеннями  $x_1$  і  $x_2$ , які відрізняються від початкових на величини  $2b_1 \Delta z_1$  і  $2b_2 \Delta z_2$  відповідно. У загальному випадку напрям градієнта залежатиме від вибраного інтервалу

варіацій незалежних факторів. При зміні в  $n$  разів інтервала варіювання деякого  $j$ -фактору величина кроку для нього змінюється в  $n^2$  разів, оскільки при цьому в  $n$  разів змінюється і коефіцієнт регресії  $b_j$ . Інваріантними (незмінними) до зміни інтервалу залишаються тільки знаки складових градієнта. При збільшенні кількості факторів більше двох оптимізація методом крутого сходження по поверхні відгуку проводиться аналогічним чином.

### 7.7. Опис функції відгуку в області, близькій до екстремуму. Композиційні плани Бокса-Уїлсона

В області, близькій до екстремуму, (або «майже стаціонарній області») функція відгуку істотно нелінійна. У цьому випадку для її адекватного опису необхідно використовувати нелінійні поліноми. У даний час для цієї мети найбільш широко застосовують поліноми другого порядку, для отримання яких є розроблені відповідні плани експерименту.

Для опису поліномом другого порядку експерименту, який реалізується для знаходження оптимальних умов процесу, кількості дослідів  $N$  у плані має бути не менше кількості коефіцієнтів, які визначаються, у рівнянні регресії другого порядку для  $k$  факторів

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j x_j + \sum_{\substack{u,j=1 \\ u \neq j}}^k b_{uj} x_u x_j + \sum_{j=1}^k b_{jj} x_j^2. \quad (7.40)$$

Вибіркові коефіцієнти (7.35) є оцінками відповідних коефіцієнтів рівняння теоретичної регресії:

$$m_y = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_j + \sum_{\substack{u,j=1 \\ u \neq j}}^k \beta_{uj} x_u x_j + \sum_{j=1}^k \beta_{jj} x_j^2. \quad (7.41)$$

Залежно від кількості розглянутих факторів кількість коефіцієнтів  $l$  рівняння регресії (7.40) визначається за формулою

$$l = (k + 1) + k + c_k^2 = 2k + 1 + \frac{k!}{2!(k-2)!} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \quad (7.42)$$

де  $C_k^2$  – кількість комбінацій з  $k$  факторів по два, яка дорівнює кількості ефектів парної взаємодії.

В області, яка близька до екстремуму, стають значущими ефекти парної взаємодії і квадратичні ефекти. Тому те, що адекватний опис результатів експерименту вимагає використання поліномів другого порядку, може служити ознакою знаходження їх у майже стаціонарній області. Близькість до цієї області можна також встановити, поставивши додатково до ПФЕ  $2^k$  або ДФЕ  $2^{k-1}$  серію дослідів у центрі плану.

Середнє значення результатів цих дослідів є оцінкою для вільного члена рівняння (7.36):

$$y^0 \rightarrow \beta_0. \quad (7.43)$$

Вибірковий коефіцієнт  $b_0$ , який вираховується за формулою

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{0i} y_i, \quad (7.44)$$

оцінює суму вільного і квадратичних членів:

$$b_0 \rightarrow \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_{jj}. \quad (7.45)$$

Тому, чим більше різниця

$$(b_0 - y^0) \rightarrow \sum_{j=1}^k \beta_{jj}, \quad (7.46)$$

тим багатозначні квадратичні ефекти.

Для опису поверхні відгуку поліномами другого порядку незалежні фактори в планах повинні приймати не менше трьох різних значень.

Експеримент, в якому кожен з  $k$  факторів розглядається на трьох рівнях і реалізуються всі можливі сполучення рівнів факторів, є ПФЕ типу  $3^k$ . Як приклад в табл. 7.8 представлена матриця планування ПФЕ  $3^2$ .

Проведення ПФЕ  $3^k$  вимагає великої кількості дослідів, які набагато перевищують кількість визначених коефіцієнтів  $l$  у рівнянні вже при  $k > 2$ :

$k$	2	3	4
$3^k$	9	27	81
$l$	6	10	15

Таблиця 7.8 - Матриця планування ПФЕ  $3^2$

№ досліду	$x_1$	$x_2$	$y$
1	-1	-1	$y_1$
2	0	-1	$y_2$
3	+1	-1	$y_3$
4	-1	0	$y_4$
5	0	0	$y_5$
6	+1	0	$y_6$
7	-1	+1	$y_7$
8	0	+1	$y_8$
9	+1	+1	$y_9$

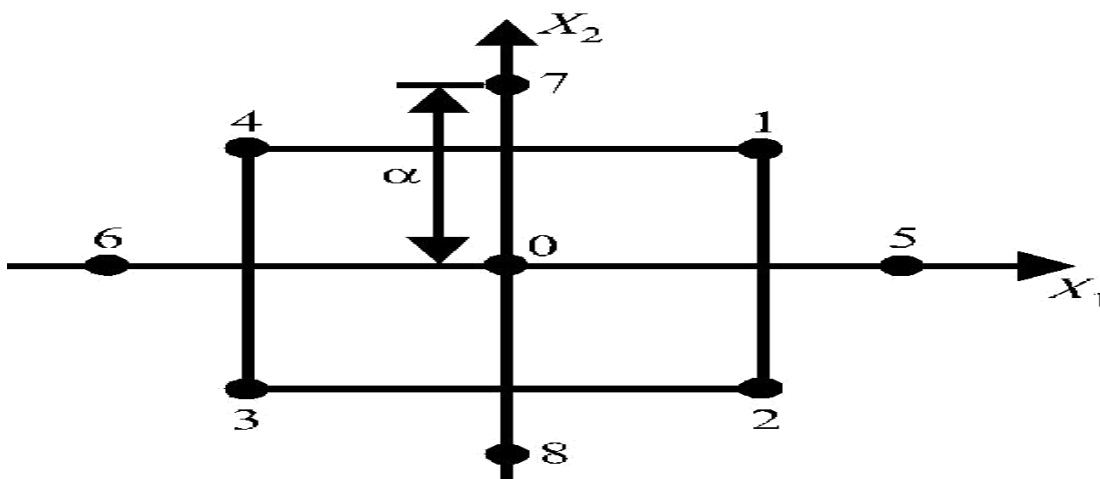


Рисунок 7.4 – Композиційний план другого порядку для двох факторів

Скоротити загальну кількість дослідів за умови отримання незмішаних оцінок для лінійних ефектів і ефектів взаємодії можливо за допомогою композиційних планів Бокса-Уілсона. Ядро таких планів при  $k < 5$  становить ПФЕ  $2^k$ , і напіврепліки від нього при  $k \geq 5$ .

Якщо лінійне рівняння регресії виявилось неадекватним експерименту, необхідно:

1) додати  $2k$  зіркових точок, розташованих на координатних вісях факторного простору. Координати зіркових точок у загальному випадку дорівнюють  $(\pm \alpha, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, \pm \alpha, \dots, 0)$ , ...,  $(0, \dots, 0, \pm \alpha)$ ,

де  $\alpha$  – відстань від центру плану до зоряної точки, або зоряне плече;

2) збільшити число експериментів у центрі плану  $n_0$ .

Загальна кількість дослідів у матриці композиційного плану при  $k \leq 4$  становить

$$N = 2^k + 2k + n_0. \quad (7.47)$$

Розглянемо побудову композиційних планів на прикладі  $k = 2$  (рис. 7.4). Точки 1, 2, 3, 4 утворюють ПФЕ  $2^2$ , точки 5, 6, 7, 8 являються зірковими точками з координатами  $(\pm \alpha, 0)$  і  $(0, \pm \alpha)$ , координати  $n_0$  дослідів в центрі плану нульові –  $(0, 0)$ . Композиційний план другого порядку для двох факторів представлений в табл. 7.9, при цьому в центрі плану виконана серія з трьох дослідів (№ 9-11).

Таблиця 7.9 - Композиційний план другого порядку для двох факторів

№ досліду	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1 x_2$	$x_1^2$	$x_2^2$	$y$
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$y_1$
2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	$y_2$
3	+1	-1	-1	+1	+1	+1	$y_3$
4	+1	-1	+1	-1	+1	+1	$y_4$
5	+1	$+\alpha$	0	0	$\alpha^2$	0	$y_5$
6	+1	$-\alpha$	0	0	$\alpha^2$	0	$y_6$
7	+1	0	$+\alpha$	0	0	$\alpha^2$	$y_7$
8	+1	0	$-\alpha$	0	0	$\alpha^2$	$y_8$
9	+1	0	0	0	0	0	$y_9$
10	+1	0	0	0	0	0	$y_{10}$
11	+1	0	0	0	0	0	$y_{11}$

### 7.8 Ортогональні плани другого порядку. Розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії

Вибір зоряного плеча в композиційних планах Бокса-Уілсона може бути довільним, але розрахунки коефіцієнтів рівняння регресії при  $k < 5$  істотно спрощуються, якщо величина плеча визначається наступним рівнянням:

$$\alpha^4 + 2k \alpha^2 - 2^{k-1} (k + 0.5n_0) = 0. \quad (7.48)$$

Значення  $\alpha^2$ , визначені за (7.48), наведені в табл. 7.10.

Вибравши  $\alpha$ , проведемо наступне лінійне перетворення квадратичних стовпців:

$$x_j' = x_j^2 - \overline{x_j^2} = x_j^2 - 1/N \sum_{i=1}^N x_{ji}^2 \quad (7.49)$$

Композиційні плани, отримані таким чином, називаються ортогональними планами другого порядку.

Ортогональний план другого порядку при  $k = 2$  і  $n_0 = 1$  представлений у табл. 7.10. За його основу взято композиційний план для двох факторів із загальною кількістю дослідів  $N = 9$ .

Величину зоряного плеча визначимо по табл. 7.10:  $\alpha^2 = 1$ ,  $\alpha = 1$ .

Таблиця 7.10 - Значення  $\alpha^2$  для  $k$  факторів та  $n_0$  дослідів у центрі плану

$n_0$	$K$			$n_0$	$k$		
	2	3	4		2	3	4
1	1.00	1.476	2.00	6	1.742	2.325	2.950
2	1.160	1.650	2.164	7	1.873	2.481	3.140
3	1.317	1.831	2.390	8	2.00	2.633	3.310
4	1.475	2.00	2.580	9	2.113	2.782	3.490
5	1.606	2.164	2.770	10	2.243	2.928	3.66

Тоді середні значення елементів квадратичних стовпців дорівнюють

$$x_1^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_{1i}^2 = x_2^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_{2i}^2 = \frac{1}{9} (4 + 2 \alpha^2) = \frac{2}{3}. \quad (7.50)$$

У математичній статистиці доводиться, що для ортогональних планів другого порядку всі коефіцієнти рівняння регресії визначаються незалежно один від одного за формулою

$$b_j = \sum_{i=1}^N x_{ji} y_i / \sum_{i=1}^N x_{ji}^2, \quad (7.51)$$

а дисперсії коефіцієнтів дорівнюють

$$s^2(b_j) = s_{\text{відтвор}}^2 / \sum_{i=1}^N x_{ji}^2. \quad (7.52)$$

Для визначення дисперсії відтворюваності необхідно виконати серію дослідів у центрі плану.

У результаті розрахунків за матрицею з перетвореними стовпцями для квадратичних ефектів (табл. 7.11) отримуємо наступне рівняння:

$$\hat{y} = b_0' + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} (x_1^2 - x_1^2) + b_{22} (x_2^2 - x_2^2). \quad (7.53)$$

Щоб перейти до звичайного запису рівняння регресії у вигляді

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2, \quad (7.54)$$

визначимо  $b_0$  за формулою

$$b_0 = b_0' - b_{11} x_1^2 - b_{22} x_2^2, \quad (7.55)$$

з дисперсією, яка дорівнює

$$s^2(b_0) = s^2(b_0') + (x_1^2)^2 s^2(b_{11}) + (x_2^2)^2 s^2(b_{22}). \quad (7.56)$$

Таблиця 7.11 - Ортогональний план другого порядку для двох факторів

№ досліду	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1 x_2$	$x_1'$	$x_2'$	$y$
1	+1	+1	+1	+1	+1/3	+1/3	$y_1$
2	+1	+1	-1	-1	+1/3	+1/3	$y_2$
3	+1	-1	-1	+1	+1/3	+1/3	$y_3$
4	+1	-1	+1	-1	+1/3	+1/3	$y_4$
5	+1	$+\alpha$	0	0	+1/3	-2/3	$y_5$
6	+1	$-\alpha$	0	0	+1/3	-2/3	$y_6$
7	+1	0	$+\alpha$	0	-2/3	+1/3	$y_7$
8	+1	0	$-\alpha$	0	-2/3	+1/3	$y_8$
9	+1	0	0	0	-2/3	-2/3	$y_9$

Значення коефіцієнтів перевіряється за критерієм Стюдента.

Якщо

$$t_j = \frac{b_j}{s(b_j)} > t_{\alpha}(f), \quad (7.57)$$

де  $t_{\alpha}(f)$  – табличне значення критерію Стюдента для  $\alpha = 0,05$  і кількості ступенів вільності дисперсії відтворюваності, то коефіцієнт суттєво відрізняється від нуля.

Коефіцієнти рівняння регресії, отримані за допомогою ортогональних планів другого порядку, визначаються з різною точністю.

У випадку, коли  $k \leq 4$ , згідно (7.56) маємо

$$s^2(b_0) = \frac{S_{\text{ВідТВ}}^2}{N};$$

$$s^2(b_j) = \frac{S_{\text{ВідТВ}}^2}{2^k + 2\alpha^2}, j = 1, 2, \dots, k; \quad (7.58)$$

$$s^2(b_{uj}) = \frac{S_{\text{ВідТВ}}^2}{2^k}, u, j = 1, 2, \dots, k, u \neq j;$$

$$s^2(b_{jj}) = \frac{S_{\text{ВідТВ}}^2}{2^k(1 - x_j^2)^2 + 2(\alpha^2 - x_j^2)^2 + (n_0 + 2k - 2)(x_j^2)^2}, j = 1, 2, \dots, k.$$

Після виключення незначущих коефіцієнтів проводиться перевірка адекватності рівняння за критерієм Фішера.

Рівняння адекватно експерименту, якщо

$$F = \frac{s_{ад}^2}{s_{відтв}^2} \leq F_{1-\alpha}(f_{ад}, f_{відтв}), \quad (7.59)$$

де  $F_{1-\alpha}(f_{ад}, f_{воспр})$  – критерій Фішера для  $\alpha = 0,05$ ;  
 $f_{ад} = (N - l)$  – кількість ступенів вільності дисперсії адекватності  
 $(l)$  – кількість значущих коефіцієнтів в рівнянні регресії);  
 $f_{відтв.}$  – кількість ступенів вільності дисперсії відтворюваності.

### 7.9 Метод послідовного симплекс-планування

У розглянутих вище планах ПФЕ  $2^2$  і  $2^3$  експериментальні точки розташовувалися в вершинах квадрата і куба відповідно. В якості експериментального плану можна також використовувати регулярний симплекс. *Симплексом* в  $k$ -вимірному просторі називають *випуклий багатогранник*, який має  $(k + 1)$  вершину, кожна з яких визначається перетином  $k$  гіперплощин даного простору. *Симплекс* називається *регулярним*, якщо відстані між усіма його вершинами рівні. Прикладами регулярних симплексів є правильний трикутник у двовимірному і тетраедр у тривимірному просторах.

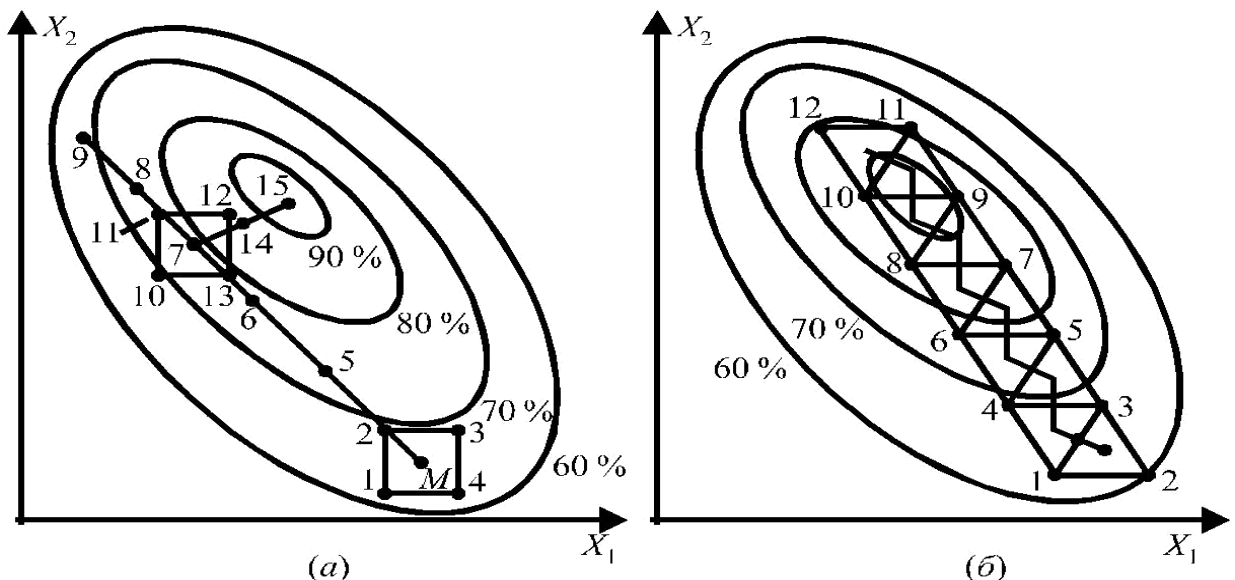


Рисунок 7.5 – Досягнення екстремуму поверхні відгуку методами крутого сходження (а) і симплекс-планування (б)

На практиці планування експерименту з використанням регулярних симплексів застосовується для вирішення завдань оптимізації при русі до майже стаціонарної області.

Для отримання регулярного симплекса проводиться лінійне перетворення рівнів факторів

$$x_j = \frac{z_j - z_j^0}{\Delta z_j}, \quad (7.60)$$

де  $z_j^0$  –  $j$ -та координата центру плану;

$\Delta z_j$  – інтервал варіювання по  $j$ -фактору.

Оптимізація методом послідовного симплекс-планування проводиться наступним чином: вихідна серія дослідів планується так, щоб експериментальні точки утворювали регулярний симплекс у факторному просторі. Після проведення дослідів визначається вершина симплекса, яка відповідає найгіршим результатами. Далі будується новий симплекс, для чого найгірша точка вихідного симплекса замінюється новою, яка розташована симетрично відносно центру межі симплекса, що знаходиться навпроти найгіршої точки. Нова точка разом із рештою точок утворює новий симплекс, центр ваги якого зміщений у бік підвищення якості процесу. Після реалізації дослідів в додатковій точці знову проводиться виявлення найгіршої вершини симплекса і т. д. При досягненні області оптимуму, симплекс починає обертання навколо вершини з максимальним значенням відгуку.

На рис. 7.5 показані схеми досягнення екстремуму поверхні відгуку методами крутого сходження і симплекс-планування на прикладі залежності цільової функції у від двох факторів. При оптимізації методом крутого сходження (рис. 7.5-а) навколо точки  $M$  поставлений ПФЕ  $2^2$ , рух по градієнту лінійного наближення здійснювалося у дослідях 5-9. Далі був поставлений новий ПФЕ  $2^2$  (точки 10-13) із центром у точці 7, в якій було отримано найкраще значення у. Рух по новому градієнту (точки 14-15) призводить до екстремуму.

При оптимізації методом симплекс-планування (рис. 7.3-б) у початковому симплексі (точки 1-3) гіршою точкою виявилася точка 2. Її дзеркальним відображенням відносно  $c_1$  – центру межі 1-3 – є точка 4. У новому симплексі 1, 3, 4 гіршою виявилася точка 1, у результаті її дзеркального відображення отриманий симплекс 3, 4, 5 і т. д. Область оптимуму досягається при реалізації симплекса 9, 10, 11.

Хоча обидва розглянутих методи вимагають проведення приблизно однакової кількості дослідів, симплекс-планування має ряд важливих переваг, а саме:

- при реалізації цього методу параметр оптимізації у може вимірюватися приблизно, досить мати можливість провести ранжирування його величини;
- можна одночасно враховувати декілька параметрів оптимізації;
- метод не пред'являє жорстких вимог до локальної апроксимації поверхні відгуку рівнянням регресії.

На практиці рекомендується орієнтувати вихідний симплекс у факторному просторі в такий спосіб: центр симплекса збігається з початком координат, одна з вершин лежить на координатній осі, а решта вершин розташовується

симетрично щодо координатної вісі площин та гіперплощин (у багатовимірному випадку).

Тоді координати вершин симплекса при  $k = 5$  задаються матрицею

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ -x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & -2x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & -3x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & -4x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5x_5 \end{bmatrix}. \quad (7.61)$$

При  $k < 5$  координати вершин симплекса визначаються частиною матриці (7.61), при цьому кількість стовпців дорівнює кількості факторів, а кількість рядків дорівнює  $k + 1$ . При  $k > 5$  для кожного доданого фактора в матрицю (7.61) також додаються відповідні стовпець і рядок. У загальному випадку кількість дослідів у симплексній матриці для  $k$  незалежних факторів  $N = (k + 1)$  дорівнює кількості коефіцієнтів лінійного рівняння регресії, тобто симплексні плани є насиченими.

Якщо довжину сторони симплекса прийняти рівною 1, то

$$x_j = \sqrt{\frac{1}{2j(j+1)}}. \quad (7.62)$$

Для практичного використання матриці (7.63) її числові елементи заздалегідь підраховані за моделлю матриці (7.61)

$$X = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.289 & 0.204 & 0.158 & 0.129 \\ -0.5 & 0.289 & 0.204 & 0.158 & 0.129 \\ 0 & -0.578 & 0.204 & 0.158 & 0.129 \\ 0 & 0 & -0.612 & 0.158 & 0.129 \\ 0 & 0 & 0 & -0.632 & 0.129 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.645 \end{bmatrix}. \quad (7.63)$$

План експерименту в безрозмірному масштабі для  $k$  факторів складається з  $k$  стовпців і  $k + 1$  рядка матриці (7.63). Коефіцієнти рівняння лінійної регресії

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j x_j \quad (7.64)$$

обчислюються наступним чином:

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i, \quad b_j = 2 \sum_{i=1}^N x_{ji} y_i. \quad (7.65)$$

Якщо в одній із вершин симплекса поставити серію паралельних дослідів і розрахувати дисперсію відтворюваності, то вибіркові дисперсії коефіцієнтів визначаються за формулою

$$s^2(b_j) = \frac{s_{\text{відтв}}^2}{\sum_{i=1}^N x_{ji}^2} = 2s_{\text{відтв}}^2. \quad (7.66)$$

Слід зазначити, що коефіцієнти рівняння регресії, отримані за симплексним планом, визначаються з меншою точністю в порівнянні з коефіцієнтами, отриманими при реалізації ПФЕ  $2^k$  і ДФЕ  $2^{k-1}$ , для яких

$$s^2(b_j) = s_{\text{відтв}}^2 / N. \quad (7.67)$$

Після реалізації вихідного симплекса потрібно провести відпрацьовування найгіршої точки відносно центру протилежної грані. Координати відображеної точки дорівнюють:

$$x_j^{(k+2)} = 2x_j^{(c)} - x_j^{(l)}, j = 1, 2, \dots, k, \quad (7.68)$$

де  $x_j^{(l)}$  –  $j$ -та координата найгіршої точки;  
 $x_j^{(k+2)}$  –  $j$ -та координата нової точки, одержаної у результаті відображення;  
 $x_j^{(c)}$  –  $j$ -та координата центру протилежної грані, яка визначається за формулою

$$x_j^{(c)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k+1} x_j^{(i)}, i \neq l, \quad (7.69)$$

де  $x_j^{(i)}$  –  $j$ -та координата  $i$ -й вершини симплекса ( $i = 1, 2, \dots, k + 1$ ).

Координати центру оптимального симплексу (точка  $S$ ) у майже стаціонарній області знаходяться наступним чином:

$$x_j^{(S)} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} x_j^{(i)}. \quad (7.70)$$

Кількість необхідних дослідів за умов лінійної моделі істотно скорочується при проведенні ДФЕ (дробових реплік від ПФЕ).

## Контрольні запитання та завдання

1. Поясніть, що Ви розумієте під плануванням експерименту ?
2. Надайте визначення терміну «повний факторний експеримент»( ПФЕ).
3. Поясніть, як обґрунтувати необхідну кількість дослідів при ПФЕ.
4. Який експеримент називається дробовим факторним експериментом (ДФЕ)?
5. Поясніть, до чого призводить скорочення кількості дослідів та нехтування ефектами взаємодії факторів.
6. Надайте пояснення визначенню «латинський квадрат  $n \times n$ » та поясніть підходи до його побудови.
7. Поясніть суть постановки задачі оптимізації керуванням ходом експерименту.
8. Наведіть приклад формування стандартного латинського квадрата.
9. Які квадрати отримуються шляхом однокрокової циклічної перестановки?
10. Надайте визначення терміну «матриця планування».
11. Наведіть приклад планування ДФЕ за схемою латинського квадрата  $3 \times 3$ .
12. Поясніть, як проводиться дисперсійний аналіз латинського квадрата, виконаного без паралельних дослідів.
13. Опишіть, як перевіряється значимість лінійних ефектів та адекватність прийнятої лінійної моделі при виконанні паралельних дослідів.
14. У чому полягає суть постановки задачі при плануванні екстремальних експериментів?
15. Наведіть приклад розв'язання екстремальних задач, які описують відомі вам процеси в електронних комунікаційних структурах (наприклад, визначення оптимальних умов обробки сигналів).
16. Як представляється при статистичному підході математична модель об'єкта або процесу проведення експерименту?
17. Назвіть умови використання поліноміальних моделей для розв'язання завдань оптимізації та керування процесами обробки результатів експериментів.
18. Що дозволяє планування експерименту при обробці результатів досліджень?
19. Наведіть опис повного факторного експерименту типу  $2^2$ .
20. Поясніть підхід до побудови матриці планування експерименту з фіктивною змінною.
21. Наведіть математичну інтерпретацію розрахунку кількості дослідів при повному факторному експерименті.
22. Поясніть зміст розширеної матриці планування ПФЕ типу  $2^2$ .
23. Наведіть та поясніть графічну інтерпретацію повного факторного експерименту  $2^2$ .

24. Поясніть, які підходи використовуються для побудови матриці планування повного факторного експерименту типу  $2^3$ .
25. Наведіть та прокоментуйте приклад планування ПФЕ типу  $2^3$ .
26. Наведіть та поясніть графічну інтерпретацію у вигляді восьми вершин куба плану проведення дослідів.
27. Опишіть особливості побудови рівняння регресії із урахуванням ефектів взаємодії трьох факторів.
28. Складіть та прокоментуйте розширену матрицю планування ПФЕ із фіктивною змінною.
29. Наведіть та прокоментуйте графічну інтерпретацію ПФЕ  $2^3$ .
30. Поясніть, як проводиться перевірка значення коефіцієнтів і адекватності рівняння регресії, отриманих при обробці результатів ПФЕ  $2^2$  та  $2^3$ .
31. Наведіть і поясніть графічну інтерпретацію та математичний вираз для розрахунку вибіркової дисперсії відтворюваності, що характеризує вплив випадкових факторів, якщо у центрі плану (в точках  $(z_1^0, z_2^0)$  та  $(z_1^0, z_2^0, z_3^0)$ ) для ПФЕ  $2^2$  та  $2^3$  відповідно проведена серія з  $m$  дослідів.
32. Створіть та прокоментуйте алгоритм проведення регресійного аналізу для спланованого експерименту у випадку, коли кожний дослід повторюється  $m$  раз.
33. Наведіть та прокоментуйте, для випадку використання ПФЕ  $2^3$ , вираз для рівняння регресії із урахуванням ефектів взаємодії.
34. Поясніть, як перевіряються значення коефіцієнтів і адекватність рівняння регресії, отриманих при обробці результатів ПФЕ.
35. Поясніть алгоритм проведення регресійного аналізу для спланованого ПФЕ у випадку, коли кожний дослід у матриці планування повторюється  $m$  раз.
36. Поясніть як застосувати для перевірки адекватності рівняння регресії експерименту критерій Фішера.
37. Наведіть вираз для визначення дисперсії адекватності при визначенні адекватності рівняння регресії експерименту.
38. Що розуміють під терміном «дробовий факторний експеримент»? Що таке «дробова репліка» від ПФЕ?
39. Поясніть, як планується ДФЕ для отримання лінійного рівняння регресії невеликої ділянки поверхні відгуку при трьох незалежних факторах.
40. Надайте визначення терміну «визначальний контраст».
41. Наведіть приклад планування ДФЕ типу  $2^{4-1}$ .
42. Поясніть, за яких умов доцільно використати дробову репліку з генеруючим співвідношенням  $x_4 = x_1x_3$
43. Наведіть властивості дворівневих планів ПФЕ  $2^k$  і ДФЕ  $2^{k-1}$ .
44. Поясніть підходи до оптимізації результатів експериментів методом крутого сходження по поверхні відгуку.

45. Наведіть графічну інтерпретацію руху по поверхні відгуку до екстремуму в традиційному експерименті і в методі крутого сходження.
46. Поясніть, як проводиться пошук екстремальної точки поверхні відгуку в традиційному експерименті.
47. Опишіть підходи для реалізації методу крутого сходження Бокса–Уілсона.
48. Наведіть та прокоментуйте опис функції відгуку в області, близькій до екстремуму.
49. Поясніть підхід до формування композиційних планів Бокса-Уілсона.
50. Чому для опису поверхні відгуку поліномами другого порядку незалежні фактори в планах проведення експерименту повинні приймати не менше трьох різних значень?
51. Наведіть графічну інтерпретацію композиційного плану другого порядку для двох факторів
52. Поясніть підхід до формування при експериментах ортогональних планів другого порядку.
53. Наведіть приклад розрахунку коефіцієнтів рівняння регресії.
54. Обґрунтуйте вибір зоряного плеча в композиційних планах Бокса-Уілсона для проведення розрахунків коефіцієнтів рівняння регресії.
55. Надайте визначення терміну «ортогональні плани другого порядку».
56. Як проводиться визначення дисперсії відтворюваності при виконанні серії дослідів у центрі плану.

## АЛФАВІТНИЙ ПОКАЗЧИК

### А

абсолютна похибка, 10  
абсолютне відхилення, 19  
абстрактна генеральна сукупність, 25  
апроксимація експериментальних даних, 109

### Б

безповторна вибірка, 26

### В

випадкова величина, 9  
випадкові помилки, 9  
відносна точність вимірювання, 10  
відносна похибка, 11  
вибіркова сукупність, 26  
вибіркова середня, 36  
вибіркова дисперсія, 40  
вибірковий коефіцієнт регресії, 88  
вибіркова коваріація, 91  
визначальний контраст, 132

### Г

груба помилка, 9  
гранична абсолютна похибка, 10  
гранична відносна похибка, 11  
генеральна сукупність, 26  
гістограма частот, 32  
гістограма відносних частот, 32  
генеральна середня, 38  
групова середня, 38  
генеральна дисперсія, 39  
групова дисперсія, 41

### Д

дисперсія, 22  
довірчий інтервал, 76  
двофакторний дисперсійний аналіз, 113

### Е

емпірична функція розподілу, 29  
ефективна статистична оцінка, 36

### З

закон розподілу, 15  
закон додавання дисперсій, 23  
закон накопичення помилок, 23  
змістовна статистична оцінка, 37  
загальна середня, 38  
загальна дисперсія, 43

### Й

ймовірність події, 15  
ймовірнісний ряд, 15

### К

крива Гауса, 18  
квантіль, 23  
критична область, 57  
критерій Кохрена, 66  
критерій згоди Пірсона, 70  
критерій згоди Колмогорова, 70  
коридор помилок, 79  
кореляційна залежність, 84  
коваріація, 85  
коефіцієнт кореляції, 89  
композиційний план Бокса-Уілсона, 139

### М

момент випадкової величини, 21  
математичне сподівання, 21  
механічний відбір, 29  
міжгрупова дисперсія, 42  
метод максимальної правдоподібності, 44  
метод найменших квадратів, 88  
метод крутого сходження, 138

## **Н**

непрямі вимірювання, 13  
нормальний розподіл, 16  
нульова гіпотеза, 55

## **О**

обсяг сукупності, 27  
область прийняття гіпотези, 57  
основна гіпотеза, 69

## **П**

помилка вимірювання, 9  
прямі вимірювання, 13  
похибка в сумах і різницях, 13  
похибка в степеневій функції, 15  
повторна вибірка, 26  
полігон частот, 31  
помилка першого роду, 56  
потужність критерію, 59  
планування експерименту, 126

## **Р**

розподілена величина, 18  
репрезентативна вибірка, 27  
розподіл Фішера, 61  
регулярний симплекс, 145

## **С**

систематична помилка, 10  
стандартний розподіл, 19  
серійний відбір, 29  
статистичний розподіл  
вибірки, 29  
статистична оцінка невідомого  
параметру, 36  
статистична гіпотеза, 55  
статистичний критерій, 56

## **Т**

типовий відбір, 27  
теоретична функція розподілу, 29

## **У**

умовний закон розподілу, 83  
умовне математичне сподівання, 92

## **Ф**

функція розподілу, 16  
функція Лапласа, 19  
функція правдоподібності, 45

## **Ч**

частота появи події, 15

## **Щ**

щільність розподілу, 17  
щільність частот, 32

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Положення про систему запобігання академічному плагіату в Національному технічному університеті України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 10 с. Режим доступу: [https://osvita.kpi.ua/sites/default/files/downloads/Pol\\_zapobiganniu\\_plagiatu.pdf](https://osvita.kpi.ua/sites/default/files/downloads/Pol_zapobiganniu_plagiatu.pdf)
2. Основи наукових досліджень: навчальний посібник / Марта Мальська, Наталія Паньків. Львів: Видавництво ЛНУ імені Івана Франка, 2020. 226 с.
3. Євтушенко М., Хижняк М. Методологія та організація наукових досліджень: навчальний посібник. Київ: Центр учбової літератури 2021, 350 с.
4. Конверский А. Основи методології та організації наукових досліджень. Київ: Центр учбової літератури 2021, 352 с.
5. Родіонов, В. М., Левандовський І. А, Шамота Т. В. Магістерська дисертація: навчальний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 31 с. [Електронний ресурс].
6. Магістерська дисертація: Організація, вимоги до структури, змісту та оформлення: навч. посіб. для студ. /уклад.: Ю.С. Ямненко, Л.М. Батрак, С.Р. Михайлов. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 51 с. [Електронний ресурс]:
7. Корягін М.В., Чік М.Ю. Основи наукових досліджень: навчальний посібник. Київ: Центр учбової літератури 2020, 492 с.
8. Комар Ю.М., Попов О.І., Комар В.Ю. Основи наукових досліджень: навчальний посібник. Київ: Видавництво Ліра-К, 2018. 182 с.
9. Партико З. В. Основи наукових досліджень: підготовка дисертації: навч. посібн. Київ : Видавництво Ліра-К, 2017. 232 с.
10. Колесников О. Основи наукових досліджень: навчальний посібник. Київ: Центр учбової літератури 2021, 144 с.
11. Основи наукових досліджень та науково-технічної творчості: навч. посіб. / В.О. Онищенко, С.М. Срібнюк, Б.О. Коробко, О.В. Матяш. Київ : Видавництво Ліра-К, 2020. 280 с.
12. Медведєва В.М. Основи наукових досліджень: практикум. Київ: Видавництво Ліра-К, 2017. 84 с.
13. Палеха Ю. І., Леміш Н. О. Основи науково-дослідної роботи: навч. посібник. Київ: Видавництво Ліра-К, 2017. 336 с.
14. Грипич С., Буравкова П. Науково-дослідницька діяльність студентів. Київ: Видавництво Кондор, 2021, 288 с.
15. Данильян О.Г., Дзьобань О.П. Методологія наукових досліджень: підручник. Київ: Центр учбової літератури 2021, 488 с.

Таблиця значень функції  $\Phi(x)$  для інтегральної теореми Лапласа

При знаходженні значень функцій  $\Phi(x)$  слід враховувати, що  $\Phi(x)$  непарна функція  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
0	0	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,004	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,334
0,02	0,008	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,012	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,016	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,148	0,7	0,258	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,4	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,1	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,17	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,1	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,8	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,291	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,5	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,195	0,83	0,2967	1,15	0,3749

0,2	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,377
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,379
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,381
0,23	0,091	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,383
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,2	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,219	0,9	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,6	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,3	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,5	0,4938
1,27	0,398	1,6	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,3	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,475	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,6	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,7	0,4965

1,37	0,4147	1,7	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,1	0,4821	2,76	0,4971
1,4	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,483	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,8	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,2	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,498
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,9	0,4981
1,47	0,4292	1,8	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,3	0,4893	2,96	0,4985
1,5	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,2	0,49931
1,53	0,437	1,86	0,468	2,38	0,4913	3,4	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,4	0,4918	3,6	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,8	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4	0,499968
1,57	0,4418	1,9	0,4713	2,46	0,4931	4,5	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5	0,499997

$\Phi(x) = 0, 5 \text{ npu } x \geq 4$

Таблиця значень функції  $\varphi(x)$  для локальної теореми Лапласа

При знаходженні значень функції  $\varphi(x)$  слід враховувати, що  $\varphi(x)$  парна функція  $\varphi(-x) = \varphi(x)$

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$x$
0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,398	0,3977	0,3973	0
0,1	0,397	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918	0,1
0,2	0,391	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825	0,2
0,3	0,3814	0,3802	0,379	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697	0,3
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538	0,4
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,341	0,3391	0,3372	0,3352	0,5
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,323	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144	0,6
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,292	0,7
0,8	0,2897	0,2874	0,285	0,2827	0,2803	0,278	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685	0,8
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444	0,9
1	0,242	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203	1
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965	1,1
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736	1,2
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518	1,3
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315	1,4
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,12	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127	1,5
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,104	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957	1,6
1,7	0,094	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804	1,7
1,8	0,079	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669	1,8
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,062	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551	1,9

2	0,054	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449	2
2,1	0,044	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0388	0,0379	0,0371	0,0363	2,1
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,031	0,0303	0,0297	0,029	2,2
2,3	0,0283	0,0277	0,027	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229	2,3
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,018	2,4
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139	2,5
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,011	0,0107	2,6
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081	2,7
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061	2,8
2,9	0,006	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,005	0,0048	0,0047	0,0046	2,9
3	0,0044	0,0043	0,0042	0,004	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034	3
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,003	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025	3,1
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,002	0,002	0,0019	0,0018	0,0018	3,2
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013	3,3
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,001	0,001	0,001	0,0009	0,0009	3,4
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006	3,5
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	3,6
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	3,7
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	3,8
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	3,9

$\varphi(x) = 0$  нпу  $x \geq 4$

Таблиці значення функції Лапласа  $\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma(\bar{x})}\right) = \Phi(x)$ .

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
0.00	0.00000	0.20	0.15852	0.40	0.31084	0.60	0.45149
0.01	0.00798	0.21	0.16633	0.41	0.31819	0.61	0.45814
0.02	0.01596	0.22	0.17413	0.42	0.32552	0.62	0.46474
0.03	0.02393	0.23	0.18191	0.43	0.33280	0.63	0.47131
0.04	0.03191	0.24	0.18967	0.44	0.34006	0.64	0.47783
0.05	0.03988	0.25	0.19741	0.45	0.34729	0.65	0.48431
0.06	0.04784	0.26	0.20514	0.46	0.35448	0.66	0.49075
0.07	0.05581	0.27	0.21284	0.47	0.36164	0.67	0.49714
0.08	0.06376	0.28	0.22052	0.48	0.36877	0.68	0.50350
0.09	0.07171	0.29	0.22818	0.49	0.37587	0.69	0.50981
0.10	0.07966	0.30	0.23582	0.50	0.38292	0.70	0.51607
0.11	0.08759	0.31	0.24344	0.51	0.38995	0.71	0.52230
0.12	0.09552	0.32	0.25103	0.52	0.39694	0.72	0.52848
0.13	0.10348	0.33	0.25860	0.53	0.40389	0.73	0.53461
0.14	0.11134	0.34	0.26614	0.54	0.41080	0.74	0.54070
0.15	0.11924	0.35	0.27366	0.55	0.41768	0.75	0.54675
0.16	0.12712	0.36	0.28115	0.56	0.42452	0.76	0.55275
0.17	0.13499	0.37	0.28862	0.57	0.43132	0.77	0.55870
0.18	0.14285	0.38	0.29605	0.58	0.43809	0.78	0.56461
0.19	0.15069	0.39	0.30346	0.59	0.44481	0.79	0.57047

Таблиці значення функції Лапласа  $\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma(\bar{x})}\right) = \Phi(x)$  продовження).

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
0.80	0.57629	1.00	0.68269	1.20	0.76986	1.40	0.83849
0.81	0.58206	1.01	0.68750	1.21	0.77372	1.41	0.84146
0.82	0.58778	1.02	0.69227	1.22	0.77754	1.42	0.84439
0.83	0.59346	1.03	0.69699	1.23	0.78130	1.43	0.84728
0.84	0.59909	1.04	0.70166	1.24	0.78502	1.44	0.85013
0.85	0.60468	1.05	0.70628	1.25	0.78870	1.45	0.85294
0.86	0.61021	1.06	0.71086	1.26	0.79233	1.46	0.85571
0.87	0.61570	1.07	0.71538	1.27	0.79592	1.47	0.85844
0.88	0.62114	1.08	0.71986	1.28	0.79945	1.48	0.86113
0.89	0.62653	1.09	0.72429	1.29	0.80295	1.49	0.86378
0.90	0.63188	1.10	0.72867	1.30	0.80640	1.50	0.86639
0.91	0.63718	1.11	0.73300	1.31	0.80980	1.51	0.86696
0.92	0.64243	1.12	0.73729	1.32	0.81316	1.52	0.87149
0.93	0.64763	1.13	0.74152	1.33	0.81648	1.53	0.87398
0.94	0.65278	1.14	0.74571	1.34	0.81975	1.54	0.87644
0.95	0.65789	1.15	0.74986	1.35	0.82298	1.55	0.87886
0.96	0.66294	1.16	0.75395	1.36	0.82617	1.56	0.88124
0.97	0.66795	1.17	0.75800	1.37	0.82931	1.57	0.88358
0.98	0.67291	1.18	0.76200	1.38	0.83241	1.58	0.88589
0.99	0.67783	1.19	0.76595	1.39	0.83547	1.59	0.88817

**Таблиці значення функції Лапласа  $\Phi(\frac{\delta}{\sigma(\bar{x})}) = \Phi(x)$  продовження).**

<b>x</b>	<b><math>\Phi(x)</math></b>	<b>x</b>	<b><math>\Phi(x)</math></b>	<b>x</b>	<b><math>\Phi(x)</math></b>	<b>x</b>	<b><math>\Phi(x)</math></b>
1.60	0.89040	1.80	0.92814	2.00	0.99730	2.20	0.99863
1.61	0.89260	1.81	0.92970	2.01	0.99739	2.21	0.99867
1.62	0.89477	1.82	0.93124	2.02	0.99747	2.22	0.99872
1.63	0.89690	1.83	0.93275	2.03	0.99755	2.23	0.99876
1.64	0.89899	1.84	0.93423	2.04	0.99763	2.24	0.99880
1.65	0.90106	1.85	0.93569	2.05	0.99771	2.25	0.99855
1.66	0.90309	1.86	0.93711	2.06	0.99779	2.26	0.99889
1.67	0.90508	1.87	0.93852	2.07	0.99786	2.27	0.99892
1.68	0.90704	1.88	0.93989	2.08	0.99793	2.28	0.99896
1.69	0.90897	1.89	0.94124	2.09	0.99800	2.29	0.99900
1.70	0.91087	1.90	0.94257	2.10	0.99806	2.30	0.99903
1.71	0.91273	1.91	0.94387	2.11	0.99813	2.31	0.99907
1.72	0.91457	1.92	0.94514	2.12	0.99819	2.32	0.99910
1.73	0.91637	1.93	0.94639	2.13	0.99825	2.33	0.99913
1.74	0.91814	1.94	0.94762	2.14	0.99831	2.34	0.99916
1.75	0.91988	1.95	0.94882	2.15	0.99837	2.35	0.99919
1.76	0.92159	1.96	0.95000	2.16	0.99842	2.36	0.99922
1.77	0.92327	1.97	0.95116	2.17	0.99848	2.37	0.99925
1.78	0.92492	1.98	0.95230	2.18	0.99853	2.38	0.99928
1.79	0.92655	1.99	0.95341	2.19	0.99858	2.39	0.99930