

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу**

До захисту допущено

Завідувач кафедри

_____ Оксана ТИМОЩУК

«___» _____ 20__ р.

Дипломна робота

**на здобуття ступеня бакалавра
за освітньо-професійною програмою «Системний аналіз і управління»
спеціальності 124 «Системний аналіз»
на тему: «Гама функція від матриць»**

Виконав (-ла):

Студент (-ка) IV курсу, групи КА-71

Шутяк Дмитро Олегович _____

Керівник:

Доцент кафедри ММСА, канд. фіз.-мат. наук

Подколзін Гліб Борисович _____

Консультант з економічного розділу:

доцент кафедри ТПЕ,

Роштіна Надія Василівна _____

Консультант з нормоконтролю:

Доцент кафедри ММСА, к.т.н.

Коваленко Анатолій Єпіфанович _____

Рецензент:

доцент кафедри МАтаТІ, канд. фіз.-мат. наук,

Орловський Ігор Володимирович _____

Засвідчую, що у цій дипломній роботі
немає запозичень з праць інших авторів
без відповідних посилань.

Студент (-ка) Шутяк Дмитро Олегович

Київ – 2021 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу

Рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)

Спеціальність – 124 «Системний аналіз»

Освітньо-професійна програма «Системний аналіз і управління»

ЗАТВЕРДЖУЮ

В.о. завідувача кафедри

_____ Оксана ТИМОЩУК

«__» _____ 2021 р.

ЗАВДАННЯ

на дипломну роботу студенту

Шутяку Дмитру Олеговичу

1. Тема роботи «Гама функція від матриць», керівник роботи Подколзін Г. Б., доцент кафедри ММСА, затверджені наказом по університету від «26» травня 2021 р. № 1344-с
2. Термін подання студентом роботи
3. Вихідні дані до роботи: скалярна Гама функція, жорданова форма матриці
4. Зміст роботи: Розглянути властивості Гама функції в скалярному випадку; проаналізувати відомі підходи до узагальнення Гама функції до матричного випадку; проаналізувати властивості жорданової матриці та її потенційні застосування для Гама функції; дослідити та вивести основний набір властивостей для матричної Гама функції на основі властивостей скалярного випадку; виконати економічний аналіз потенційного застосування отриманих результатів.
5. Перелік ілюстративного матеріалу (із зазначенням плакатів, презентацій тощо): презентація.

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Економічний	Рощина Н.В., доцент кафедри ТПЕ		

7. Дата видачі завдання 01.09.2020

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломної роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Формулювання тематики (напрямку) дослідження.	01.09.2020 – 30.09.2020	
2	Аналіз актуальності задач стосовно тематики дослідження	01.10.2020 – 30.10.2020	
3	Аналіз відомих результатів стосовно тематики дослідження	01.11.2020 – 30.11.2020	
4	Вибір інструментів дослідження	01.12.2020 – 30.12.2020	
5	Уточнення теми дипломної роботи	21.02.2021	
6	Попередній аналіз властивостей	01.03.2021 – 30.03.2021	
7	Виконання моделювання, аналіз та оформлення результатів	31.03.2021 – 10.05.2021	
8	Оформлення пояснювальної записки у цілому	11.05.2021 – 25.05.2021	
9	Підготовка презентації для захисту	26.05.2021 – 28.05.2021	
10	Попередній захист дипломної роботи	29.05.2021 – 02.06.2021	
11	Захист дипломної роботи	14.06.2021 – 18.06.2021	

Студент

Д. О. Шутяк

Керівник

Г. Б. Подколзін

РЕФЕРАТ

Дипломна робота: 72 с., 1 табл., 2 рис., 1 додатки, 14 джерел.

ГАМА ФУНКЦІЯ, МАТРИЧНА ЕКСПОНЕНТА, ЖОРДАНОВА КАНОНІЧНА
ФОРМА.

Об'єкт дослідження – Гама функція та матрична експонента.

Мета роботи – узагальнити ряд властивостей Гама функції до
матричного випадку.

Методи дослідження – використання жорданової канонічної форми
матриці та пов'язаних властивостей матричної експоненти.

Було досліджено Гама функцію та узагальнено ряд основних
властивостей до матричного випадку.

ABSTRACT

Thesis: 72 p., 1 tabl., 2 fig., 1 appendix, 14 sources.

GAMMA FUNCTION, MATRIX EXPONENTIAL, JORDAN NORMAL FORM.

Object of research – Gamma function, matrix exponential.

Purpose of the work – to generalize the properties of the Gamma function to the matrix case.

Research methods –the Jordan normal form of a matrix and properties of the matrix exponential.

A set of properties were proposed and proven as well as properties exclusive to the matrix case, due to the unique properties of the Jordan matrix.

ЗМІСТ

ВСТУП	8
РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ ПРО СКАЛЯРНУ ГАМА ФУНКЦІЮ ТА ВІДОМІ ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ МАТРИЧНОЇ ГАМА ФУНКЦІЇ.....	9
1.1 Класична ГАМА ФУНКЦІЯ	9
1.1.1 Передумови виникнення Гама функції	9
1.1.2 Основні властивості Гама функції.....	13
1.1.3 Сфери застосування класичної Гама функції	24
1.2 Існуючі методи чисельного знаходження матричної ГАМА ФУНКЦІЇ.....	26
1.2.1 Наближення Ланцоша	26
1.2.2 Наближення Суджа (анг. Spouge)	28
1.2.3 Наближення Ланцоша (узагальнення).....	30
1.2.4 Наближення Суджа (узагальнення)	31
1.3 Висновки до розділу 1	34
РОЗДІЛ 2 ОГЛЯД ОСНОВНИХ ВІДОМОСТЕЙ ПРО МАТРИЧНУ ЕКСПОНЕНТУ ТА ПІДБІР ВЛАСТИВОСТЕЙ ДЛЯ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ	36
2.1 МАТРИЧНА ЕКСПОНЕНТА.....	36
2.1.1 Загальні відомості та властивості матричної експоненти	36
2.1.2 Застосування матричної експоненти для розв’язку систем лінійних диференціальних рівнянь.	39
2.2 МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ МАТРИЧНОЇ ЕКСПОНЕНТИ	43
2.2.1 Діагоналізовна матриця	43
2.2.2 Жорданова канонічна форма	44
Висновки до розділу 2	46
РОЗДІЛ 3 УЗАГАЛЬНЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ГАМА ФУНКЦІЇ ДО МАТРИЧНОГО ВИПАДКУ З ВИКОРИСТАННЯМ ЖОРДАНОВОЇ КАНОНІЧНОЇ ФОРМИ.....	48
3.1 Означення та загальний вигляд матричної ГАМА ФУНКЦІЇ	48
3.2 Основна функціональна тотожність	50
3.3 Значення функції для деяких матриць та їх узагальнення	53
3.4 Функціональне рівняння Ейлера та його наслідок	55
Висновки до розділу 3	58

РОЗДІЛ 4: ФУНКЦІОНАЛЬНО-ВАРТІСНИЙ АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ.....	60
4.1 Гідрологічний аналіз та метеорологічні спостереження	60
4.2 Економічна цінність поверхневих спостережень та передбачення погодніх катаклізмів	60
4.3 Використання Гама функції та Гама розподілу для оцінки кількості опадів Африканського континенту	64
4.4 Висновки до розділу	67
ВИСНОВКИ.....	68
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	69
ДОДАТОК А ІЛЮСТРАТИВНІ МАТЕРІАЛИ ДО ДОПОВІДІ	71

ВСТУП

Наука завжди йшла в ногу зі світом навколо і адаптувалася для вирішення нагальних проблем людства. З розвитком технологій об'єми інформації, які стають доступними для науковців, колосально збільшуються, тому з'являється потреба працювати з цими масивами даних та оптимізувати процес їх обробки. Саме через це класичні проблеми, які століттями мали вирішення, переходять на нові рівні та потребують нових підходів та розв'язків, а багато чисельних методів втрачають свою актуальність через високу обчислювальну складність. В останні кілька десятиліть питання узагальнення вже отриманих раніше результатів та перенесення їх на багатовимірний випадок грає особливо суттєву роль в вирішенні найважливіших проблем людства.

Гама функція займала і продовжує займати дуже важливу позицію в математиці, науці та оточуючих їх сферах через свою універсальність та ряд унікальних властивостей. Вона допомагає обійти багато перешкод, з якими стикаються під час роботи з певними видами інтегралів, в комбінаторних задачах та задачах теорії ймовірностей і статистики, для узагальнення поняття факторіала та в багатьох інших застосуваннях.

Метою цієї роботи є огляд класичної Гама функції та її властивостей та узагальнення їх для матричного випадку з використанням методів матричної експоненти та супроводжуючих її властивостей. Такий підхід розширює можливості знаходження аналітичного розв'язку задач замість того, щоб покладатися на чисельні методи підрахунку впродовж всього процесу вирішення проблеми.

РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ ПРО СКАЛЯРНУ ГАМА ФУНКЦІЮ ТА ВІДОМІ ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ МАТРИЧНОЇ ГАМА ФУНКЦІЇ

1.1 Класична Гама функція

Гама функція займає одну з ключових позицій в областях математичного аналізу, теорії чисел, теорії ймовірностей та статистики та багатьох інших сфер науки

1.1.1 Передумови виникнення Гама функції

Перші згадки про Гама функцію датуються ще XIII-м століттям, коли швейцарський математик та вчений Леонард Ейлер (нім. Leonhard Euler) листувався з російським математиком і науковцем Християном Гольдбахом (нім. Christian Goldbach) відносно поставленої останнім задачі, на яку він не міг знайти відповідь. Питання полягало в інтерполяції добутку перших n натуральних чисел – факторіалу. Перед Ейлером постала задача знаходження аналітичної формули для $n!$, яка в тому числі могла бути використана і для знаходження значень для нецілих n . Перша ітерація Гама функції, яку він відкрив була виведена на припущенні, що $n \in \mathbb{Z}^+$ і мала наступний вигляд:

$$\left[\left(\frac{2}{1} \right)^n \frac{1}{n+1} \right] \left[\left(\frac{3}{2} \right)^n \frac{2}{n+2} \right] \left[\left(\frac{4}{3} \right)^n \frac{3}{n+3} \right] \dots = n! \quad (1.1)$$

Продовжуючи досліджувати цей нескінченний добуток Ейлер також знайшов, що для значення $n = \frac{1}{2}$ функція набувала значення $n! = \frac{\pi}{2}$. Після цього він зміг помітити тенденції між значеннями n та $n!$: коли n належало

множині цілих чисел, то в результаті завжди отримувалось ціле число, а для інших (наприклад попередній $n = \frac{1}{2}$) відповідь завжди мала π . Саме наявність π і її зв'язок з колами та їх квадратурами нашою вихнула його на наявність інтегральної форми представлення для добутку (1.1).

Наступним кроком до сучасного вигляду Гама функції було розглянути інтеграл $\int_0^1 x^l (1-x)^n dx$. Розглядаючи n як ціле число, Ейлер розгорнув добуток $(1-x)^n$ та отримав наступний результат:

$$\int_0^1 x^l (1-x)^n dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{(l+1)(l+2) \dots (l+n+1)} \quad (1.2)$$

Маючи у правій частині шуканий добуток він хотів відокремити його і мати у лівій чистий інтеграл. Для цього спочатку була зроблена заміна $l = \frac{f}{g}$ та отриманий наступний результат:

$$\int_0^1 x^{\frac{f}{g}} (1-x)^n dx = \frac{g^{n+1}}{f + (n+1)g} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{(f+g)(f+2g) \dots (f+ng)}$$

Або, переписавши:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{(f+g)(f+2g) \dots (f+ng)} = \frac{f + (n+1)g}{g^{n+1}} \int_0^1 x^{\frac{f}{g}} (1-x)^n dx \quad (1.3)$$

Прирівнявши $f = 1; g = 0$ можна було б відокремити шуканий добуток, але тоді у правій частині маємо невизначеність під інтегралом, яку Ейлер записував в такій формі:

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{f}}(1-x)^n dx}{g^{n+1}} \quad (1.4)$$

Далі почався процес знаходження значення виразу (1.4). Спочатку була зроблена заміна x на $x^{\frac{g}{f+g}}$ та отриманий наступний вираз замість dx :

$$\frac{g}{f+g} x^{-\frac{f}{g+f}} dx$$

Тоді, підставивши отриманий вираз, та зробивши ту саму заміну для правої частини рівності (1.3) маємо такий вираз:

$$\frac{f + (n+1)g}{g^{n+1}} \int_0^1 \frac{g}{f+g} \left(1 - x^{\frac{g}{f+g}}\right)^n dx$$

Занесемо тепер в дужки під інтегралом в знаменник дріб $\frac{g}{f+g}$, помноживши відповідно чисельник та знаменник на обернений дріб у степені n :

$$\frac{f + (n+1)g}{(f+g)^{n+1}} \int_0^1 \left(\frac{1 - x^{\frac{g}{f+g}}}{\frac{g}{f+g}} \right)^n dx$$

Тепер, маючи результат у такому вигляді, зробимо ще раз тестову підстановку $f = 1; g = 0$. Дріб перед інтегралом стає рівним 1, а під інтегралом отримуємо невизначеність вже іншого характеру від того, що було отримано у виразі (1.4):

$$\int_0^1 \frac{(1-x^0)^n}{0^n} dx$$

Підінтегральна функція в цьому виразі була схожа на вираз $\frac{1-x^z}{z}$ для z , що прямують до нуля. Ейлер про диференціював чисельник та знаменник цього дробу, скориставшись правилом Лопіталя та отримав

$$\frac{-x^z dz \cdot \ln x}{dz},$$

що в свою чергу для значення $z = 0$ набувало значення $\ln x$. З цього він зробив висновок, що

$$\frac{1-x^0}{0} = -\ln x.$$

Та аналогічно, піднісши до n -го ступеня

$$\left(\frac{1-x^0}{0}\right)^n = (-\ln x)^n.$$

Тепер вже маючи повністю значення правої частини рівності (1.3) Ейлер прийшов до висновку, що

$$n! = \int_0^1 (-\ln x)^n dx. \quad (1.5)$$

Ця формула дала відповідь на початкове запитання, яке було поставлено перед ним Гольдбахом: він отримав вираз для $n!$ в формі інтегралу, в якому можна було підставляти значення відмінні від натуральних чисел.

Результат був отриманий та задача вирішена, проте, початкова знахідка Ейлера відрізнялася від сучасного вигляду Гама функції. Більш звичний вигляд Гама функції з використанням грецької літери «Г» за позначення вперше ввів французький математик Адрієн-Марі Лежандр (фр. Adrien-Marie Legendre). Він називав початковий інтеграл (1.2) «перший Ейлерів інтеграл», а вже отриманий результат (1.5) – «другий Ейлерів інтеграл». Перший з них в модифікованому вигляді є нічим іншим, як бета функцією вигляду

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx.$$

Другий інтеграл шляхом модифікацій та заміन також був записаний у наступному вигляді:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Таким чином, можна побачити, що існування Гама функції було зумовлено власне одним із її найголовніших застосувань: інтерполяцією факторіалу. Ця функція пройшла вже дуже довгий шлях, знаходячи собі застосування у дуже різноманітних та іноді неочікуваних задачах [1].

1.1.2 Основні властивості Гама функції

Окремо від декількох форм запису та їх відповідних застосувань та призначень, Гама функція має ряд властивостей та пов'язаних рівнянь, які ще

більше розширюють облік задач та сфер наукової діяльності, до яких можна її застосовувати. У цьому підрозділі будуть розглянуті найважливіші властивості класичної Гама функції.

Для всіх подальших міркувань Гама функція буде розглядатися в наступному вигляді із заданим обмеженням на аргумент:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0 \quad (1.6)$$

Перше, що потрібно встановити – це збіжність інтегралу та область його збіжності.

Лема 1. Область збіжності інтегралу (1.6) є $\alpha > 0$.

Доведення.

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Розглянемо окремо кожен доданок:

1) Перший доданок.

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \quad (1.7)$$

Єдина потенційна особлива точка $x = 0$. Порівняємо інтеграл (1.7) із іншим інтегралом, про який нам відома його збіжність.

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1-\alpha}} dx, \quad (1.8)$$

збігається для $\alpha > 0$.

Знайдемо границю відношення двох підінтегральних функцій в точці $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1$$

З цього випливає, що обидва інтеграли (1.7) та (1.8) мають область збіжності $\alpha > 0$.

1) Другий доданок.

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx,$$

Має особливу точку ∞ . Порівняємо його із збіжним інтегралом

$$\int_1^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{e^{-\frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^{\frac{x}{2}}} = \begin{cases} \alpha \geq 1, \langle \text{за другим правилом Лопіталя} \rangle = 0 \\ \alpha < 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1-\alpha} e^{\frac{x}{2}}} = 0 \end{cases}.$$

Отже із збіжності інтегралу $\int_1^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx$ випливає збіжність інтегралу $\int_1^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ для всіх α .

■

Лема 2. Диференційованість Гама функції.

$$\Gamma(\alpha) \in C^{\infty}((0, \infty)).$$

Доведення.

Розглянемо результат диференціювання Гама функції, формально вважаючи, що диференційованість функції була доведена.

$$\Gamma'(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \ln x \, dx, \Gamma''(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} (\ln x)^2 \, dx, \dots,$$

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} (\ln x)^n \, dx.$$

Доведемо коректність цих дій. $\forall \alpha_0 > 0 \exists [\beta, \gamma] \in (0, \infty), \alpha_0 \in [\beta, \gamma]$
Покажемо, що на відрізку $[\beta, \gamma]$ всі інтеграли збігаються рівномірно. Для цього розіб'ємо інтеграл на два доданки, та з'ясуємо рівномірну збіжність кожного.

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} (\ln x)^n \, dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} (\ln x)^n \, dx + \int_1^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} (\ln x)^n \, dx$$

1) Перший доданок.

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} (\ln x)^n \, dx \tag{1.9}$$

$$\forall 0 < x \leq 1, \forall \alpha \in [\beta, \gamma] \quad 0 < x^{\alpha-1} e^{-x} (\ln x)^n < \begin{bmatrix} x^{\beta-1} e^{-x} (\ln x)^n \\ x^{\gamma-1} e^{-x} (\ln x)^n \end{bmatrix}$$

в залежності від знаків $\beta - 1$ та $\gamma - 1$. Інтеграл

$$\int_0^1 x^{\beta-1} e^{-x} (\ln x)^n \, dx \tag{1.10}$$

порівняємо з інтегралом

$$\int_0^1 x^{\beta-\varepsilon-1} e^{-x} (\ln x)^n dx, \quad (1.11)$$

який збігається за умови $\beta - \varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\beta-1} e^{-x} (\ln x)^n}{x^{\beta-\varepsilon-1}} &= \lim_{x \rightarrow 0} x^{\varepsilon} e^{-x} (\ln x)^n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)^n}{x^{-\varepsilon}} = \\ &= \langle \text{за другим правилом Лопіталя} \rangle = 0 \end{aligned}$$

Тому із збіжності інтегралу (1.11) випливає збіжність інтегралу (1.10), або, аналогічно, збіжність інтегралу (1.10) з параметром γ замість β . Звідси за ознакою Вейєрштрасса, ряд (1.9) збігається рівномірно на $[\beta, \gamma]$.

1) Другий доданок.

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} (\ln x)^n dx \quad (1.12)$$

$$\forall x > 1, \forall \alpha \in [\beta, \gamma] \quad 0 < x^{\alpha-1} e^{-x} (\ln x)^n < \begin{bmatrix} x^{\gamma-1} e^{-x} (\ln x)^n \\ x^{\beta-1} e^{-x} (\ln x)^n \end{bmatrix}$$

в залежності від знаків $\beta - 1$ та $\gamma - 1$. Інтеграл

$$\int_1^{\infty} x^{\beta-1} e^{-x} (\ln x)^n dx \quad (1.13)$$

порівняємо з інтегралом

$$\int_1^{\infty} x^{\beta-1+\varepsilon} e^{-x} (\ln x)^n dx, \quad (1.14)$$

який збігається.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\beta-1} e^{-x} (\ln x)^n}{x^{\beta-1+\varepsilon}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^n}{x^\varepsilon} = \langle \text{за другим правилом Лопіталя} \rangle = 0$$

Тому із збіжності інтегралу (1.14) випливає збіжність інтегралу (1.13), або, аналогічно, збіжність інтегралу (1.13) з параметром γ замість β .

Звідси за ознакою Вейєрштрасса, ряд (1.12) збігається рівномірно на $[\beta, \gamma]$.

Обидва доданки збігаються рівномірно, тому інтеграл

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} (\ln x)^n dx$$

також збігається рівномірно на $[\beta, \gamma]$ $n \geq 0$, тому можна застосувати теореми про диференціювання за параметром на відрізку $[\beta, \gamma]$, в тому числі і в точці $\forall \alpha_0 > 0 \alpha_0 \in [\beta, \gamma]$. отже, остаточно маємо результат: Гама функція нескінченно диференційована в кожній точці області визначення, тому вона $\Gamma(\alpha) \in C^\infty((0, \infty))$, та на $n \geq 1$

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} (\ln x)^n dx. \quad (1.15)$$

■

Наслідок.

$$\Gamma^{(n)}(\alpha + 1) = \alpha \Gamma^{(n)}(\alpha) + n \cdot \Gamma^{(n-1)}(\alpha) \quad (1.16)$$

Доведення.

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(n)}(\alpha + 1) &= \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} (\ln x)^n dx = \\
&u = x^\alpha (\ln x)^n, dv = e^{-x} dx, v = -e^{-x} \\
&= \langle du = \left(\alpha x^{\alpha-1} (\ln x)^n + n x^\alpha \frac{1}{x} (\ln x)^{n-1} \right) dx \rangle = \\
&= -x^\alpha (\ln x)^n e^{-x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \left(\alpha x^{\alpha-1} (\ln x)^n + n x^\alpha \frac{1}{x} (\ln x)^{n-1} \right) e^{-x} dx = \\
&= -0 + 0 + \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} (\ln x)^n e^{-x} dx + n \int_0^\infty x^{\alpha-1} (\ln x)^{n-1} e^{-x} dx = \\
&= \alpha \Gamma^{(n)}(\alpha) + n \cdot \Gamma^{(n-1)}(\alpha)
\end{aligned}$$

■

Теорема 1. Основна функціональна тотожність Гама функції.

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha), \forall \alpha > 0 \quad (1.17)$$

Розглянемо значення Гама функції для деяких α

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^\infty = 1$$

$$\Gamma(2) = \Gamma(1 + 1) \stackrel{\text{функціональна тотожність}}{=} 1 \cdot \Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2 + 1) \stackrel{\text{функціональна тотожність}}{=} 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3 + 1) \stackrel{\text{функціональна тотожність}}{=} 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3!$$

Доведемо методом математичної індукції, що

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad (1.18)$$

Доведення.

За базу припущення беремо вище зазначені значення для $n = \overline{1,4}$.

Нехай для n припущення виконано, перевіримо тепер для $n + 1$.

$$\begin{aligned}\Gamma(n+2) &= \Gamma((n+1)+1) \stackrel{\text{функціональна тотожність}}{=} (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1) \cdot n! = \\ &= (n+1)!\end{aligned}$$

Таким чином, методом математичної індукції було доведено правдивість рівності (1.18).

■

Розглянемо тепер значення Гама функції в точці $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \langle t = \sqrt{x}, dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \rangle = \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \langle \text{інтеграл Ейлера – Пуассона} \rangle = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) \stackrel{\text{функціональна тотожність}}{=} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) \stackrel{\text{функціональна тотожність}}{=} \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3 \cdot 1 \cdot \sqrt{\pi}}{4} = \frac{3!! \sqrt{\pi}}{2^2}\end{aligned}$$

Сформулюємо припущення на основі рівності (1.18) та вище знайдених результатів:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad (1.19)$$

$$\text{де } (2n - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1).$$

Доведення.

Доведемо це припущення за допомогою методу математичної індукції. Використовуємо попередні результати як базу індукції. Нехай наше припущення вірне для n , перевіримо для $n + 1$:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\left(\frac{1}{2} + n\right) + 1\right) &\stackrel{\text{функціональна}}{=} \stackrel{\text{тотожність}}{=} \left(\frac{1}{2} + n\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \left(\frac{1 + 2n}{2}\right) \frac{(2n - 1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} = \\ &= \frac{(2n + 1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Таким чином, методом математичної індукції була перевірена правильність рівності (1.19) $\forall n \in \mathbb{N}$.

■

Тотожність. Функціональне рівняння Ейлера.

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \quad (1.20)$$

Доведення.

Використаємо той факт, що

$$e^{-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

Тоді Гама функцію можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x^{\alpha-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \langle \text{інтегрування} \\
&\quad \text{частинами} \rangle = \\
&\quad n \text{ разів} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n\alpha} \cdot \frac{n-1}{n(\alpha+1)} \cdot \frac{n-2}{n(\alpha+2)} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n(\alpha+n-1)} \int_0^n x^{\alpha+n-1} dx = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \left(\prod_{k=0}^n (\alpha+k)^{-1} \right) n^{n+\alpha}
\end{aligned}$$

Перепишемо отриманий результат у більш зручному вигляді

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{\alpha} \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{\alpha} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{k}} \quad (1.21)$$

Далі, використовуючи рівність (1.21), ми можемо оцінити ліву частину рівняння (1.20).

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = -\alpha\Gamma(-\alpha)\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{k^2}} \quad (1.22)$$

Скориставшись рядом Фур'є можна довести, що

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

Тоді можемо скористатись цим фактом та розкладом (1.22) отримуємо, що

$$\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{k^2}} = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$$

Тобто, було доведено рівність (1.20). ■

Наслідок функціонального рівняння Ейлера.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{\cos \pi \alpha} \quad (1.23)$$

Доведення випливає із доведення рівності (1.19) та властивостей вище використаного ряду Фур'є.

Зв'язок між Гама та Бета функціями.

Для Бета функції, заданої інтегралом

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx,$$

де $\alpha, \beta > 0$,

та Гама функції існує наступний зв'язок:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

Отже, було розглянуто основні властивості класичної Гама функції та рівняння та тотожності, пов'язані із нею. Через її вік та дуже широке використання, в даному підрозділі були висвітлені не всі існуючі властивості, проте саме ці мають найбільш широке використання та саме на них буде акцентуватись увага у наступних розділах.

1.1.3 Сфери застосування класичної Гама функції

У своїй статті «Найбільша одинична куля в будь-якому Евклідовому просторі» Джеффрі Нунемахер (Jeffrey Nunemacher) поставив дуже своєрідне питання, яке через деякий час знайде свою відповідь у Гама функції. [5]

Спершу, він задає означення n -вимірної відкритої кулі радіуса r як множину точок таку, що

$$\sum x_j^2 < r^2.$$

Користуючись означенням об'єму

$$V_r(n) = \iint_{B_n(r)} \dots \int 1 dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

він користується своїм означенням та ітеративно виводить формулу для $r = 1$:

$$V_n = 2V_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta.$$

Хоча ця формула і не має у явному вигляді Гама функції, вона поклала основу для наступної задачі.

У 1964 році в статті «On round pegs in square holes and square pegs in round holes» Девід Сінгмастер (David Singmaster) використовує наступну формулу для знаходження об'єму n -вимірної кулі:

$$V_n(r) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

Він стверджував, що ця формула була прямо вказала в статті Нунемахера і ніколи її прямо не доводить. Але, якщо згадати альтернативну форму запису Бета функції:

$$B(\alpha, \beta) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha-1} x \cos^{2\beta-1} x dx,$$

то формула Нунемахера може бути ітеративно переписана як

$$\begin{aligned} V_n(1) &= V_{n-1} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \dots = V_1(1) B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \dots B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \\ &= \frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^n \Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}. \end{aligned}$$

Таким чином ми отримуємо формулу для об'єму n -вимірної кулі з використанням Гама функції. Власне у своїй статті Сінгмастер описує наступну проблему: що буде більшим відношення площі круга до вписаного у нього квадрату чи відношення площі квадрату і вписаного в нього круга?

Користуючись своєю формулою він дійшов до висновку і сформулював наступну теорему:

Теорема. n -вимірна куля вкладається в n -вимірний куб краще, ніж n -вимірний куб вкладається в n -вимірну кулю тоді і тільки тоді, коли $n \leq 8$.

Ще одним важливим застосуванням Гама функції є теорія ймовірностей та математична статистика. [2]

Найпростішим прикладом цього є Гама-розподіл, який має щільність

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(k)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Гама-розподіл дуже широко використовується у статистиці, оскільки багато розподілів насправді є Гама-розподілом з відповідними параметрами k та θ .

1.2 Існуючі методи чисельного знаходження матричної Гама функції

Матричні функції мають дуже широке використання у сферах науки та інженерії. Як вже було показано у попередніх підрозділах, Гама функція має ряд дуже важливих застосувань і тому розширення цієї функції на матричний випадок є природнім наступним кроком для розвитку цього напрямку. Більш детально причини фокусування саме на цій матричній функції будуть описані у наступних розділах, а в цьому будуть висвітлені власне методи наближення класичної Гама функції та їх узагальнення на матричний випадок.

1.2.1 Наближення Ланцоша

У своїй статті Корнелій Ланцош (угор. Lánosz Kornél) пропонує наступну формулу для Гама функції, як стартову точку дослідження:

$$\Gamma(z+1) = (z+\alpha+1)^{z+1} e^{-(z+\alpha+1)} \int_0^e (t(1-\ln t))^z t^{\alpha} dt,$$

де $\alpha \in \mathbb{R}^+$ та $\operatorname{Re}(z) > -1$.

Далі він наближує інтеграл у правій частині методом розкладання на прості дроби і отримує наступне значення:

$$\int_0^e (t(1 - \ln t))^z t^\alpha dt \approx c_0 + \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{z+k}, \quad (1.24)$$

де α та m обираються відповідно для того, щоб корегувати помилку усічення наближення (1.24) та кількість доданків у частковому розкладі дроби.

Метод підбору коефіцієнтів c_k , який був запропонований самим Ланцошом був дуже чутливим до похибок округлення та доволі громіздким у підрахунках. Саме тому канадський математик G. R. Pugh інший метод їх знаходження, який вже використовувався математики в подальших дослідженнях методу.

Остаточний вигляд цього наближення з урахуванням похибки тоді має вигляд

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{2\pi}(z+\alpha+1/2)^{z+1/2} e^{-(z+\alpha+1/2)} \left(c_0(\alpha) + \sum_{k=1}^m \frac{c_k(\alpha)}{z+k} + \epsilon_{\alpha,m}(z) \right),$$

де $\epsilon_{\alpha,m}(z)$ – помилка усічення наближення, викликана (1.24).

Для уникнення проблем з переповненням під час підрахунків часто застосовується метод логарифмування:

$$\ln(\Gamma(z)) = \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \left(z + \frac{1}{2}\right) \ln\left(z + \alpha + \frac{1}{2}\right) - \left(z + \alpha + \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \ln \left(c_0(\alpha) + \sum_{k=1}^m \frac{c_k(\alpha)}{z+k} + \epsilon_{\alpha,m}(z) \right). \quad (1.25)$$

1.2.2 Наближення Суджа (анг. Spouge)

Як продовження напрацювань Ланцоша, у 1994 році Джон Судж (анг. John L. Spouge) запропонував покращення попереднього методу, записавши наближення у такій формі:

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}(z-1+a)^{z-\frac{1}{2}} e^{-(z-1+a)} \left(d_0(a) + \sum_{k=1}^m \frac{d_k(a)}{z-1+k} + e_a(z) \right), \quad (1.26)$$

для $\operatorname{Re}(z-1+a) \geq 0, a \in \mathbb{R}^+, m = [a] - 1, d_0 = 1$, а $d_k(a)$ — лишки

$$\Gamma(z)(z-1+a)^{-\left(z-\frac{1}{2}\right)} e^{(z-1+a)} (\sqrt{2\pi})^{-1}$$

в точці $z = -k + 1$. В явному вигляді для $1 \leq k \leq n$ формула набуває вигляду

$$d_k(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} (-k+a)^{k-\frac{1}{2}} e^{-k+a}.$$

Відносна похибка для цього наближення має доволі просту формулу

$$|\epsilon_a(z)| = \left| \frac{e_a(z)}{\Gamma(z)(z-1+a)^{-\left(z-\frac{1}{2}\right)} e^{(z-1+a)} (\sqrt{2\pi})^{-1}} \right|.$$

Або, іншими словами,

$$|\varepsilon_a(z)| \leq \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{a+\frac{1}{2}}} \frac{1}{\operatorname{Re}(z-1+a)}, \quad (1.27)$$

для $a \geq 3$. Таким чином для $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, $|\varepsilon_a(z)|$ має рівномірну границю

$$|\varepsilon_a(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{a}(2\pi)^{a+\frac{1}{2}}}.$$

На відміну від наближення Ланцоша, відносна похибка у наближенні Суджа збігається з стандартною похибкою

$$\varepsilon_a(z) = \frac{\Gamma(z) - G_a(z)}{\Gamma(z)}, \quad (1.28)$$

де $G_a(z)$ — наближення Гама функції, отримане за допомогою формули Суджа:

$$G_a(z) := \sqrt{2\pi}(z-1+a)^{z-\frac{1}{2}} e^{-(z-1+a)} \left(d_0(a) + \sum_{k=1}^m \frac{d_k(a)}{z-1+k} \right).$$

Порівнюючи два вище згаданих метода, можна побачити, що формула Суджа має переваги з точки зору простоти формули для похибки та швидкості обчислення коефіцієнтів d_k . Але слід зазначити, що у більшості випадків формула Суджа не є настільки точною, як формула Ланцоша, для однакових вхідних параметрів. [3]

Тепер, маючи поняття про основні методи наближення скалярної Гама функції, розглянемо можливості розширення цих методів до матричного

випадку. Для всіх наступних міркувань буде використовуватись наступне означення для матричної Гама функції:

$$\Gamma(A) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{A-I} dt, \quad (1.29)$$

де $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, для всіх $\lambda \in \sigma(A)$, $t^{A-I} := \exp((A - I) \ln t)$.

1.2.3 Наближення Ланцоша (узагальнення)

Перш ніж розповсюдити формулу Ланцоша для матриць, потрібно згадати поняття піднесення матриці до ступеня матриці.

Для квадратної комплексної матриці $(n \times n)$ A , яка не має власних чисел на від'ємній півосі $\mathbb{R}_0^-$ та довільної квадратної комплексної матриці порядку n B піднесення матриці A до ступеня B визначається наступним чином:

$$A^B := e^{\ln(A)B}, \quad (1.30)$$

де e^X —матрична експонента X , $\ln(A)$ — розв'язок матричного рівняння $e^X = A$, власні числа якого належать множині $\{z \in \mathbb{C}: -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$.

Щодо обчислення матричної експоненти та логарифму в останніх версіях MATLAB, функція `expm` реалізує алгоритм для її обчислення, і функція `logm` обчислює матричний логарифм з використанням алгоритму, який є вдосконаленою версією зворотного методу масштабування та квадратування наближеннями Паде (Pad'e). Якщо у матриці A є власні числа на від'ємній дійсній осі, `logm` обчислює не головний логарифм. Щоб уникнути цієї ситуації, наступні міркування будуть мати на увазі лише матриці без власних значень на замкнутій від'ємній дійсній осі $\mathbb{R}_0^-$. [3]

Маючи на увазі всі обмеження на матриці, подані до означень (1.29) та (1.30), для $\alpha > 0$ формулу наближення Ланцоша для матричної Гама функції можна записати наступним чином:

$$\Gamma(A) = \sqrt{2\pi} \left(A + \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) I \right)^{A + \frac{1}{2}I} e^{-(A + (\alpha + \frac{1}{2})I)} \times \\ \times \left(c_0(\alpha)I + \sum_{k=1}^m c_k(\alpha)(A + (k-1)I)^{-1} + e_{\alpha,m}(A) \right), \quad (1.31)$$

де $c_k(\alpha)$ — коефіцієнти Ланцоша, які залежать від параметра α .

Основною складністю методу Ланцоша в скалярному випадку було обмеження помилки усічення, що виникає в наближенні функції. Хороше обмеження до цієї помилки було б корисною для пошуку оптимального значення параметрів m, α . Однак виявляється, що емпіричні стратегії знаходження оптимуму між m, α та величиною похибки $e_{\alpha,m}(A)$ успішно використовуються в реалізації формули Ланцоша.

1.2.4 Наближення Суджа (узагальнення)

Нехай $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ — матриця, що має всі власні числа з додатними дійсними частинами та $a > 0$. Матрична версія формули Суджа тоді буде мати такий вигляд:

$$\Gamma(A) = \sqrt{2\pi} \left(A + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) I \right)^{A - \frac{1}{2}I} e^{-(A + (\alpha - \frac{1}{2})I)} \times \\ \times \left(d_0(a)I + \sum_{k=1}^m d_k(a)(A + (k-1)I)^{-1} + e_a(A) \right), \quad (1.32)$$

де $d_k(a)$ – коефіцієнти Суджа, які залежать від $a, m = [a] - 1$.

Виключаючи похибку $e_a(A)$ з правої частини формули (1.32), отримуємо

$$\begin{aligned} \Gamma(A) \approx \sqrt{2\pi} \left(A + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) I \right)^{A - \frac{1}{2}I} e^{-(A + (\alpha - \frac{1}{2})I)} \times \\ \times \left(d_0(a)I + \sum_{k=1}^m d_k(a) (A + (k-1)I)^{-1} \right), \end{aligned} \quad (1.33)$$

Позначимо відносну похибку усічення наближення (1.33) через

$$\varepsilon_a(A) := \frac{\|\Gamma(A) - G_a(A)\|}{\|\Gamma(A)\|},$$

де $G_a(A)$ – права частина рівності (1.33).

Зазначимо, що це означення не впливає на пряму з означення (1.28) для скалярного випадку.

Введемо позначення

$$\kappa_p(X) := \|X\|_p \|X^{-1}\|_p, p = 1, 2, \dots, \infty.$$

Далі наведено лему для знаходження границі для відносної похибки $\varepsilon_a(A)$ за умови, що A діагоналізовна.

Лема. Нехай $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – діагоналізовна матриця ($A = PDP^{-1}$, P – невідроджена матриця та $D := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$), всі її власні числа мають додатні дійсні частини, коефіцієнт $\tilde{\alpha}(A) := \min\{\text{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$ задовольняє умову $\tilde{\alpha}(A) > 0$ та при $a \geq 3$ похибка $\varepsilon_a(A)$ має наступне обмеження:

$$\varepsilon_a(A) \leq \kappa_p(P) \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{a-\frac{1}{2}}(\tilde{\alpha}(A) - 1 + a)}.$$

Доведення.

З формули відносної похибки для скалярного випадку (1.28) для будь-якого z у відкритій правій півплощині отримуємо наступну рівність:

$$\Gamma(z) - G_a(z) = \varepsilon_a(z)\Gamma(z)$$

Оскільки A має всі власні числа з додатними дійсними частинами та всі функції в правій частині аналітичні на правій півплощині, тотожність

$$\Gamma(A) - G_a(A) = \varepsilon_a(A)\Gamma(A)$$

є правильною. Далі користуємось діагоналізовністю матриці A

$$\Gamma(A) - G_a(A) = P\varepsilon_a(D)P^{-1}\Gamma(A).$$

Тому для p -норм маємо наступне

$$\begin{aligned} \|\Gamma(A) - G_a(A)\|_p &\leq \kappa_p(P)\|\varepsilon_a(D)\|_p\|\Gamma(A)\|_p \leq \\ &\leq \kappa_p(P) \max_{i=1,\dots,n} |\varepsilon_a(\lambda_i)| \|\Gamma(A)\|_p, \end{aligned}$$

з цього отримуємо

$$\frac{\|\Gamma(A) - G_a(A)\|_p}{\|\Gamma(A)\|_p} \leq \kappa_p(P) \max_{i=1,\dots,n} |\varepsilon_a(\lambda_i)|.$$

Таким чином отримуємо потрібну нам нерівність на основі нерівності (1.27) для скалярного випадку. [4]

■

Для матриці A , вважаючи, що $E_a(z) = \Gamma(z) - G_a(z)$ (абсолютна похибка) аналітична на замкнутій опуклій множині Ω , що містить спектр A , маємо наступну границю для похибки у матричному випадку:

$$\|E_a(A)\|_F \leq \max_{i \leq k \leq n-1} \frac{\omega_k}{k!} \|(I - |N|)^{-1}\|_F, \quad (1.34)$$

де $U^*AU = T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + N$ – розклад Шура (Schur) матриці A ;

T – верхньотрикутна матриця;

N – строга верхньотрикутна матриця;

$$\omega_k = \sup_{z \in \Omega} |E_a^{(k)}(z)|.$$

Однією з основних проблем цього методу є потреба знаходження похідної $E_a(z)$ до $n - 1$ порядку.

1.3 Висновки до розділу 1

З над швидкими темпами зростання об'ємів інформації, яка стає доступною науковцям, інженерам, системним аналітикам та будь-яким іншим спеціалістам в наукових та оточуючих сферах, потреби працювати з цими масивами даних також продовжують зростати. Опрацьовувати всі ці дані стає абсолютно нераціонально і практично неможливо, тому перехід до матричних систем є єдиним раціональним шляхом вперед.

В першому розділі було проілюстровано історію розвитку скалярної Гама функції та типові задачі, в яких вона знайшла застосування; були

наведені основні, широко відомі властивості та тотожності, пов'язані із скалярною Гама функцією; описані існуючі методи для наближення скалярної Гама функції та їх можливі узагальнення до векторного випадку та складності, які виникають у реалізації цих методів для чисельного знаходження значення матричної Гама функції.

Наявність експоненти в класичній формі запису Гама функції та використання її і в чисельних методах знаходження значення спонукає на можливість використання широкого спектру її властивостей та відповідних властивостей скалярної Гама функції для аналізу матричної Гама функції з аналітичної точки зору.

РОЗДІЛ 2 ОГЛЯД ОСНОВНИХ ВІДОМОСТЕЙ ПРО МАТРИЧНУ ЕКСПОНЕНТУ ТА ПІДБІР ВЛАСТИВОСТЕЙ ДЛЯ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

2.1 Матрична експонента

2.1.1 Загальні відомості та властивості матричної експоненти

Розглянемо лінійний простір $M_n(\mathbb{R})$ – квадратні матриці порядку n . В цьому просторі обрана деяка норма $\|\cdot\|$, така, що для будь-яких двох матриць $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ виконується нерівність $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Маючи норму, ми можемо ввести на цьому просторі збіжність послідовностей та рядів.

Послідовність матриць $\{A_n\} \subset M_n(\mathbb{R})$ збігається за нормою $\|\cdot\|$ до матриці $A \in M_n(\mathbb{R})$, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$.

Аналогічно вводиться поняття збіжності матричного ряду. Розглянемо тепер для довільної матриці $A \in M_n(\mathbb{R})$ матричний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}, \quad (2.1)$$

який збігається за нормою для будь-якого A :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} < \infty.$$

Означення. Експонентною матриці A називають матрицю e^A , яка рівна ряду (2.1).

Матрична експонента e^A дає змогу визначити матричну функцію e^{At} , яка ставить у відповідність до дійсного числа $t \in \mathbb{R}$ експоненту матриці At .

Часом замість матриці e^A за означення обирають саме матрицю вигляду e^{At} через її широке використання, в тому числі в розв'язанні диференціальних рівнянь.

Тепер розглянемо основні властивості матричної експоненти.

Властивість 2.1. Для двох довільних комутуючих матриць $A, B \in M_n(\mathbb{R})$

$$e^{A+B} = e^A e^B. \quad (2.2)$$

Доведення.

$$e^A e^B = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^k B^m}{k! m!}.$$

Замінімо індексацію для сум: $p = k + m, q = k$:

$$e^A e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^k B^m}{k! m!} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p \frac{A^q B^{p-q}}{q! (p-q)!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{q=0}^p \frac{p!}{q! (p-q)!} A^q B^{p-q}. \quad (2.3)$$

Оскільки матриці A та B комутують, то будь-які їх степені також комутують:

$$(A + B)^p = \sum_{q=0}^p \frac{p!}{q! (p-q)!} A^q B^{p-q},$$

що в свою чергу дорівнює правій частині рівності (2.3):

$$e^A e^B = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (A + B)^p = e^{A+B}.$$

■

Властивість 2.2. Для довільної матриці $A \in M_n(\mathbb{R})$ матрична експонента e^A є невинродженою та обернена матриця для неї дорівнює

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

Доведення.

Матриці A та $-A$ комутують, тому, користуючись властивістю 2.1,

$$e^A e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^0,$$

де 0 в даному випадку нульова матриця розмірності n .

Легко перевірити за означенням матричної експоненти, що $e^0 = I$, тому отримуємо, що $e^A e^{-A} = I$ і при цьому аналогічно $e^{-A} e^A = I$, тому з означення оберненої матриці

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

■

Властивість 2.3. Для довільної матриці $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A.$$

Доведення. За означенням матричної експоненти

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Користуючись рівномірною збіжністю за t цього ряду отримуємо

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^{k-1}}{(k-1)!} = Ae^{At}.$$

Аналогічно отримуємо $\frac{d}{dt}e^{At} = e^{At}A$.

■

Властивість 2.4. Для довільної матриці $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$e^{A^T} = (e^A)^T.$$

Доведення.

Використовуючи властивості матриць отримуємо, що

$$(e^A)^T = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right)^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^k)^T}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^T)^k}{k!} = e^{A^T}.$$

■

Властивість 2.5. Для довільної матриці $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$e^{A^*} = (e^A)^*.$$

Доводиться аналогічно властивості 2.4.

2.1.2 Застосування матричної експоненти для розв'язку систем лінійних диференціальних рівнянь.

Однією з причин важливості матричної експоненти є те, що її можна використовувати для розв'язку систем диференціальних рівнянь. Цю систему окрім звичайного вигляду також часто подають у матричному вигляді:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad (2.4)$$

де $x(t)$ — n -вимірний вектор функцій зі змінною t ;

$\dot{x}(t)$ — n -вимірний вектор похідних цих функцій;

$A(t)$ — матриця $n \times n$ коефіцієнтів.

Через наявність змінної t у записі матриці $A(t)$, рівняння вигляду (2.4) мають особливості щодо подання розв'язку. Тому спочатку розглянемо декілька властивостей для випадку, коли матриця коефіцієнтів A є сталою:

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \quad (2.5)$$

Властивість 2.6. Для довільної матриці $A \in M_n(\mathbb{R})$ розв'язком однорідної задачі Коші матричного лінійного диференціального рівняння (2.5) з доданою початковою умовою

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

розв'язком його буде

$$x(t) = e^{At}x_0,$$

тобто матриця e^{At} є резольвентою даної задачі Коші.

Доведення.

$x(0) = e^0 x_0 = Ix_0 = X_0$. Далі, використовуючи властивість 2.3,

$$\frac{d}{dt}(e^{At}x_0) = \left(\frac{d}{dt}e^{At}\right)x_0 = A(e^{At}x_0).$$

Таким чином отримуємо, що $e^{At}x_0$ є розв'язком матричного рівняння (2.6).

■

Властивість 2.7. Для довільної матриці $A \in M_n(\mathbb{R})$, та n -вимірної неперервної вектор-функції $b(t)$ розв'язком неоднорідної задачі Коші матричного лінійного диференціального рівняння

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + b(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

є функція вигляду

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}b(\tau)d\tau.$$

Коректність цього розв'язку можна перевірити простою підстановкою та диференціюванням, аналогічно до попереднього випадку. [9]

Тепер перейдемо назад до випадку, коли матриця коефіцієнтів не є сталою. Знову маємо $x(t), b(t)$ – n -вимірні вектор-функції, $A(t)$ – матрична функція порядку n . Тоді задача Коші набуває наступного вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}. \quad (2.8)$$

Резольвентою цієї задачі Коші, аналогічно до скалярного випадку буде

$$R(t, s) = \exp \left\{ \int_s^t A(\tau) d\tau \right\}, \quad (2.9)$$

оскільки в скалярному випадку фундаментальна матриця може бути записана в вигляді

$$X(t) = \exp \left\{ \int_s^t A(\tau) d\tau \right\},$$

а резольвента має вигляд

$$R(t, s) = X^{-1}(s)X(t).$$

При цьому мають місце рівності

$$R(0, 0) = I, \dot{R}(t, 0) = A(t)R(t, 0).$$

Зазначимо, що

$$\begin{aligned} \dot{R}(t, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\exp \left\{ \int_0^{t+h} A(\tau) d\tau \right\} - \exp \left\{ \int_0^t A(\tau) d\tau \right\} \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\exp \left\{ \int_0^t A(\tau) d\tau + \int_t^{t+h} A(\tau) d\tau \right\} - \exp \left\{ \int_0^t A(\tau) d\tau \right\} \right]. \end{aligned}$$

Для $h \approx 0$ можна вважати, що

$$\int_t^{t+h} A(\tau) d\tau \approx A(t)h.$$

Також для $t > 0$ має місце рівність

$$A(t) \int_0^t A(\tau) d\tau = \left(\int_0^t A(\tau) d\tau \right) A(t), \quad (2.10)$$

тоді, скориставшись властивістю 2.1, отримуємо

$$\dot{R}(t, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\exp\{A(t)h\} - I) \exp\left\{ \int_0^t A(\tau) d\tau \right\} = A(t)R(t, 0).$$

Таким чином якщо виконується умова (2.10), то резольвента задачі Коші відповідає виразу (2.9) та розв'язком цієї задачі тоді буде

$$x(t) = R(t, 0)x_0 + \int_0^t R(t, \tau)b(\tau)d\tau.$$

2.2 Методи обчислення матричної експоненти

Далі будуть розглянуті методи обчислення матричної експоненти для декількох класів матриць з особливим виглядом та більш загальні алгоритми її знаходження.

2.2.1 Діагоналізовна матриця

Означення. Квадратна матриця $A \in M_n(\mathbb{R})$ називається діагоналізовною, якщо $\exists P, P^{-1}, D \in M_n(\mathbb{R})$, де D —діагональна матриця:

$$A = P^{-1}DP.$$

Для діагональної матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Користуючись означенням матричної експоненти, вона буде рівна

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{a_{11}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Тепер, спираючись на цей результат та означення діагоналізовної матриці покажемо, чому буде дорівнювати e^A , A — діагоналізовна.

Для цього спочатку розглянемо наступну властивість діагоналізовних матриць:

A — діагоналізовна матриця, така, що $A = P^{-1}DP$. Тоді

$$A^k = P^{-1}D^kP. \quad (2.11)$$

Доведення.

$$A^k = (P^{-1}DP)^k = (P^{-1}DP)(P^{-1}DP) \dots (P^{-1}DP) = P^{-1}D^kP.$$

■

Повернемося тепер до матричної експоненти цієї матриці A . За означенням

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{-1}D^kP}{k!} = P^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} P = P^{-1}e^D P.$$

2.2.2 Жорданова канонічна форма

Означення 1. Жордановим блоком із власним значенням λ називається матриця вигляду

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Означення 2. Блочна матриця, у якій блоки на основній діагоналі є жордановими блоками називається жордановою матрицею.

Теорема. Для довільної квадратної матриці $A \in M_n(\mathbb{R})$ завжди існує така квадратна невідроджена матриця U , що

$$J = U^{-1}AU. \quad (2.13)$$

є жордановою.

Матриця 2.12 називається жордановою формою (або жордановою нормальною формою) матриці A .

Тоді, аналогічно з попереднім прикладом, спираючись на означення матричної експоненти, для довільної квадратної матриці $A \in M_n(\mathbb{R})$ з жордановою формою (2.12), матрична експонента буде дорівнювати

$$e^A = U^{-1}e^J U. \quad (2.14)$$

Тепер нам залишилось знайти e^J .

Скористаємось тепер наступною властивістю жорданового блоку:

$$f(J(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & \dots & \frac{f^{(k-2)}(\lambda_i)}{(k-2)!} & \frac{f^{(k-1)}(\lambda_i)}{(k-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & \dots & \frac{f^{(k-2)}(\lambda_i)}{(k-2)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda_i) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_i) & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

та розглянемо це для $f(x) = e^{tx}$, $f^{(k)}(x) = t^k e^{tx}$.

$$e^{tJ(\lambda_i)} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_i} & \frac{te^{t\lambda_i}}{1!} & \frac{t^2e^{t\lambda_i}}{2!} & \dots & \frac{t^{k-2}e^{t\lambda_i}}{(k-2)!} & \frac{t^{k-1}e^{t\lambda_i}}{(k-1)!} \\ 0 & e^{t\lambda_i} & \frac{te^{t\lambda_i}}{1!} & \frac{t^2e^{t\lambda_i}}{2!} & \dots & \frac{t^{k-2}e^{t\lambda_i}}{(k-2)!} \\ 0 & 0 & e^{t\lambda_i} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \frac{te^{t\lambda_i}}{1!} & \frac{t^2e^{t\lambda_i}}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda_i} & \frac{te^{t\lambda_i}}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{t\lambda_i} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Висновки до розділу 2

В другому розділі була детально розглянута матрична експонента. Були наведені найважливіші її властивості та застосування її для розв'язання систем диференціальних рівнянь (або ж матричних диференціальних рівнянь).

Було описано методи та алгоритми знаходження матричної експоненти для різних видів матриць та необхідні для цього відомості.

Спираючись на всі ці знання та повертаючись до вигляду матричної Гама функції з першого розділу нескладно побачити зв'язок між матричною

експонентною жорданової форми та похідною скалярної Гама функції. Маючи список основних властивостей слід почати з загального вигляду матричної Гама функції використовуючи останні міркування та перевірити основні властивості, починаючи з основної функціональної тотожності, оскільки саме на неї спирається низка інших властивостей для скалярної Гама функції.

РОЗДІЛ 3 УЗАГАЛЬНЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ГАМА ФУНКЦІЇ ДО МАТРИЧНОГО ВИПАДКУ З ВИКОРИСТАННЯМ ЖОРДАНОВОЇ КАНОНІЧНОЇ ФОРМИ

3.1 Означення та загальний вигляд матричної Гама функції

Як перший крок, спочатку потрібно ввести означення для матричної Гама функції, з яким ми будемо далі працювати, та визначити загальний матричний вигляд отриманої конструкції. Подальші дослідження базуються на жордановій канонічній формі матриці, тому більшість властивостей спочатку будуть доводитись для жорданової матриці, а потім узагальнюватися до довільної з використанням перетворення (2.13) або оберненого перетворення.

Користуючись класичним означенням Гама функції (1.6) запишемо аналогічну функцію, але вже для довільної матриці A :

$$\Gamma(A) = \int_0^{\infty} x^{A-I} e^{-x} dx = \left\langle \begin{array}{l} \text{для спрощення подальших} \\ \text{обчислень замінимо } A - I = \tilde{A} \end{array} \right\rangle = \int_0^{\infty} x^{\tilde{A}} e^{-x} dx.$$

Тепер скористаємось властивістю (1.30) $x^A = e^{A \ln x}$:

$$\Gamma(A) = \int_0^{\infty} e^{A \ln x} e^{-x} dx, \quad (3.1)$$

де матриця A має Жорданову канонічну форму (2.13) $J = U^{-1}AU$.

Розглянемо спочатку Гама функцію (3.1) для жорданової матриці (2.12) $J_{r_i}(\lambda_i)$:

$$\Gamma(J_{r_i}(\lambda_i)) = \int_0^{\infty} e^{J_{r_i}(\lambda_i) \ln x} e^{-x} dx.$$

Для частини підінтегрального виразу $e^{J_{r_i}(\lambda_i) \ln x}$ скористаємось формулою (2.15) із заміною $t = \ln x$:

$$e^{J_{r_i}(\lambda_i) \ln x} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_i \ln x} & \frac{\ln x e^{\lambda_i \ln x}}{1!} & \frac{(\ln x)^2 e^{\lambda_i \ln x}}{2!} & \dots & \frac{(\ln x)^{k-2} e^{\lambda_i \ln x}}{(k-2)!} & \frac{(\ln x)^{k-1} e^{\lambda_i \ln x}}{(k-1)!} \\ 0 & e^{\lambda_i \ln x} & \frac{\ln x e^{\lambda_i \ln x}}{1!} & \frac{(\ln x)^2 e^{\lambda_i \ln x}}{2!} & \dots & \frac{(\ln x)^{k-2} e^{\lambda_i \ln x}}{(k-2)!} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_i \ln x} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{\ln x e^{\lambda_i \ln x}}{1!} & \frac{(\ln x)^2 e^{\lambda_i \ln x}}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_i \ln x} & \frac{\ln x e^{\lambda_i \ln x}}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_i \ln x} \end{pmatrix}.$$

Повернемося тепер до початкового виразу та розглянемо окремо довільний елемент результуючої матриці:

$$\int_0^\infty \frac{(\ln x)^j e^{\lambda_i \ln x}}{j!} e^{-x} dx = \frac{1}{j!} \int_0^\infty (\ln x)^j x^{(\lambda_i+1)-1} e^{-x} dx = \langle \text{формула (1.15)} \rangle =$$

$$= \frac{\Gamma^{(j)}(\lambda_i + 1)}{j!}.$$

Тоді кінцевий вигляд для матриці $\Gamma(J_{r_i}(\lambda_i))$ буде наступним:

$$\Gamma(J_{r_i}(\lambda_i)) =$$

$$= \begin{pmatrix} \Gamma(\lambda_i + 1) & \frac{\Gamma'(\lambda_i + 1)}{1!} & \frac{\Gamma''(\lambda_i + 1)}{2!} & \dots & \frac{\Gamma^{(r_i - 2)}(\lambda_i + 1)}{(r_i - 2)!} & \frac{\Gamma^{(r_i - 1)}(\lambda_i + 1)}{(r_i - 1)!} \\ 0 & \Gamma(\lambda_i + 1) & \frac{\Gamma'(\lambda_i + 1)}{1!} & \frac{\Gamma''(\lambda_i + 1)}{2!} & \dots & \frac{\Gamma^{(r_i - 2)}(\lambda_i + 1)}{(r_i - 2)!} \\ 0 & 0 & \Gamma(\lambda_i + 1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \frac{\Gamma'(\lambda_i + 1)}{1!} & \frac{\Gamma''(\lambda_i + 1)}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Gamma(\lambda_i + 1) & \frac{\Gamma'(\lambda_i + 1)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \Gamma(\lambda_i + 1) \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Повертаємося тепер назад до матриці A , яка визначається як $A = UJU^{-1}$:

$$\begin{aligned} \Gamma(A) &= \int_0^\infty e^{A \ln x} e^{-x} dx = \int_0^\infty U e^{J \ln x} U^{-1} e^{-x} dx = U \left(\int_0^\infty e^{J \ln x} e^{-x} dx \right) U^{-1} = \\ &= U \Gamma(J) U^{-1}. \end{aligned}$$

Отже, користуючись властивостями матричної експоненти та жорданової канонічної форми, було задане означення матричної Гама функції та виведено її загальний вигляд у явному вигляді для жорданової матриці та за допомогою перетворення для довільної матриці A .

3.2 Основна функціональна тотожність

Наступним кроком узагальнення властивостей Гама функції є основна функціональна тотожність, оскільки саме на ній базується ряд інших властивостей Гама функції.

Розглянемо спочатку наступну допоміжну відомість:

$$\begin{aligned}
J_{r_i}(\lambda_i) + I_{r_i} &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda + 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = J_{r_i}(\lambda_i + 1). \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Аналогічно до формули (1.17) розглянемо наступний вираз для матричного випадку:

$$\begin{aligned}
\Gamma(J_{r_i}(\lambda_i) + I) &= \langle \text{формула}_{(3.3)} \rangle = \Gamma(J_{r_i}(\lambda_i + 1)) = \langle \text{формула}_{(3.2)} \rangle = \\
&= \begin{pmatrix} \Gamma(\lambda_i + 2) & \frac{\Gamma'(\lambda_i + 2)}{1!} & \dots & \frac{\Gamma^{(r_i-2)}(\lambda_i + 2)}{(r_i - 2)!} & \frac{\Gamma^{(r_i-1)}(\lambda_i + 2)}{(r_i - 1)!} \\ 0 & \Gamma(\lambda_i + 2) & \frac{\Gamma'(\lambda_i + 2)}{1!} & \dots & \frac{\Gamma^{(r_i-2)}(\lambda_i + 2)}{(r_i - 2)!} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \Gamma(\lambda_i + 2) & \frac{\Gamma'(\lambda_i + 2)}{1!} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Gamma(\lambda_i + 2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Користуємось властивостями (1.16) та (1.17) для відповідно похідної Гама функції та самої Гама функції:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \Gamma(\lambda_i + 2) & \frac{\Gamma'(\lambda_i + 2)}{1!} & \dots & \frac{\Gamma^{(r_i-2)}(\lambda_i + 2)}{(r_i - 2)!} & \frac{\Gamma^{(r_i-1)}(\lambda_i + 2)}{(r_i - 1)!} \\ 0 & \Gamma(\lambda_i + 2) & \frac{\Gamma'(\lambda_i + 2)}{1!} & \dots & \frac{\Gamma^{(r_i-2)}(\lambda_i + 2)}{(r_i - 2)!} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \Gamma(\lambda_i + 2) & \frac{\Gamma'(\lambda_i + 2)}{1!} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Gamma(\lambda_i + 2) \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} (\lambda_i + 1)\Gamma(\lambda_i + 1) & \frac{(\lambda_i + 1)\Gamma'(\lambda_i + 1) + \Gamma((\lambda_i + 1))}{1!} & \dots & \frac{(\lambda_i + 1)\Gamma^{(r_i-1)}(\lambda_i + 1) + (r_i - 1)\Gamma^{(r_i-2)}(\lambda_i + 1)}{(r_i - 1)!} \\ 0 & (\lambda_i + 1)\Gamma(\lambda_i + 1) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{(\lambda_i + 1)\Gamma'(\lambda_i + 1) + \Gamma((\lambda_i + 1))}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda_i + 1)\Gamma(\lambda_i + 1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Розіб'ємо отриману матрицю на дві окремі матриці, групуючи у першу всі доданки із коефіцієнтом $(\lambda_i + 1)$, всі інші в другу:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} (\lambda_i + 1)\Gamma(\lambda_i + 1) & \frac{(\lambda_i + 1)\Gamma'(\lambda_i + 1)}{1!} & \dots & \frac{(\lambda_i + 1)\Gamma^{(r_i-1)}(\lambda_i + 1)}{(r_i - 1)!} \\ 0 & (\lambda_i + 1)\Gamma(\lambda_i + 1) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{(\lambda_i + 1)\Gamma'(\lambda_i + 1)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda_i + 1)\Gamma(\lambda_i + 1) \end{pmatrix} + \\
& + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Gamma((\lambda_i + 1))}{1!} & \dots & \frac{(r_i - 1)\Gamma^{(r_i-2)}(\lambda_i + 1)}{(r_i - 1)!} \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{\Gamma((\lambda_i + 1))}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

винесемо з першого доданку $(\lambda_i + 1)$ за матрицю та скоротимо факторіал та коефіцієнт у другому:

$$\begin{aligned}
& (\lambda_i + 1) \begin{pmatrix} \Gamma(\lambda_i + 1) & \frac{\Gamma'(\lambda_i + 1)}{1!} & \cdots & \frac{\Gamma^{(r_i-1)}(\lambda_i + 1)}{(r_i - 1)!} \\ 0 & \Gamma(\lambda_i + 1) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{\Gamma'(\lambda_i + 1)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma(\lambda_i + 1) \end{pmatrix} + \\
& + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Gamma((\lambda_i + 1))}{1!} & \frac{\Gamma''((\lambda_i + 1))}{2!} & \cdots & \frac{\Gamma^{(r_i-2)}(\lambda_i + 1)}{(r_i - 2)!} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{\Gamma((\lambda_i + 1))}{1!} & \frac{\Gamma''((\lambda_i + 1))}{2!} \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \frac{\Gamma((\lambda_i + 1))}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
& = (\lambda_i + 1)\Gamma(J_{r_i}(\lambda_i)) + \Gamma(J_{r_i}(\lambda_i))J_{r_i}(0).
\end{aligned}$$

Тобто отримуємо наступну тотожність:

$$\Gamma(J_{r_i}(\lambda_i) + I) = (\lambda_i + 1)\Gamma(J_{r_i}(\lambda_i)) + \Gamma(J_{r_i}(\lambda_i))J_{r_i}(0).$$

Узагальнюючи для матриці $A = U J_{r_i}(\lambda_i) U^{-1}$:

$$\Gamma(A + I) = (\lambda_i + 1)\Gamma(A) + \Gamma(A)U J_{r_i}(0) U^{-1}. \quad (3.4)$$

3.3 Значення функції для деяких матриць та їх узагальнення

Хоча ми і маємо загальну формулу для матричної Гама функції та основну функціональну тотожність, деякі значення для функції краще вказати окремо для пришвидшення підрахунків у практичних задачах. Розглянемо далі декілька типових матриць, для яких можна спростити процес пошуку значення функції.

1) Натуральний коефіцієнт n :

$$\Gamma(I_r) = \int_0^\infty e^{I_r \ln x} e^{-x} dx.$$

Скористаємось формулою для матричної експоненти діагональної матриці та отримуємо:

$$\Gamma(I_r) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} e^{\ln x} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\ln x} \end{pmatrix} e^{-x} dx = \begin{pmatrix} \Gamma(2) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Gamma(2) \end{pmatrix} = I_r. \quad (3.5)$$

Проведемо тепер аналогічні міркування для довільного натурального числа n :

$$\Gamma(nI_r) = \int_0^\infty \begin{pmatrix} e^{n \ln x} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{n \ln x} \end{pmatrix} e^{-x} dx = \begin{pmatrix} \Gamma(n+1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Gamma(n+1) \end{pmatrix} = n! I_r. \quad (3.6)$$

2) Дробовий коефіцієнт $\left(n + \frac{1}{2}\right)$:

Аналогічно до попереднього випадку та користуючись властивістю (1.19) скалярної Гама функції отримуємо

$$\Gamma\left(\left(\frac{1}{2} + n\right) I_r\right) = \dots = \begin{pmatrix} \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \end{pmatrix} = \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} I_r. \quad (3.7)$$

3) Довільна діагональна матриця D_k :

$$\begin{aligned}
D_k &= \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{kk} \end{pmatrix}, \\
\Gamma(D_k) &= \int_0^\infty e^{D_k \ln x} e^{-x} dx = \int_0^\infty \begin{pmatrix} e^{d_{11} \ln x} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{d_{kk} \ln x} \end{pmatrix} e^{-x} dx = \\
&= \begin{pmatrix} \Gamma(d_{11} + 1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Gamma(d_{kk} + 1) \end{pmatrix}. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Таким чином, значення для будь-якої діагональної або діагоналізовної матриці можна знаходити не використовуючи громіздкі формули загального вигляду, просто спираючись на властивості матричної експоненти.

3.4 Функціональне рівняння Ейлера та його наслідок

Перед тим як перейти до узагальнення функціонального рівняння наведемо додатково допоміжну властивість:

$$\begin{aligned}
\Gamma(mJ_r(\lambda_i)) &= \int_0^\infty e^{mJ_r(\lambda_i) \ln x} e^{-x} dx = \\
&= \int_0^\infty \begin{pmatrix} e^{m\lambda_i \ln x} & \cdots & \frac{(m \ln x)^{r_i-1} e^{m\lambda_i \ln x}}{(r_i - 1)!} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{m\lambda_i \ln x} \end{pmatrix} e^{-x} dx = \\
&= \begin{pmatrix} \Gamma(m\lambda_i + 1) & \frac{\Gamma'(m\lambda_i + 1)}{1!} & \cdots & \frac{\Gamma^{(r_i-1)}(m\lambda_i + 1)}{(r_i - 1)!} \\ 0 & \Gamma(\lambda_i + 1) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{\Gamma'(m\lambda_i + 1)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma(m\lambda_i + 1) \end{pmatrix}. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Тепер повернемося власне до функціонального рівняння Ейлера:

$$\begin{aligned}
& \Gamma(J_r(\lambda_i))\Gamma(I_{r_i} - J_r(\lambda_i)) = \\
& = \left| I_{r_i} - J_r(\lambda_i) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda_i & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - \lambda_i & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 - \lambda_i & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 - \lambda_i \end{pmatrix} = -J_{r_i}(\lambda_i - 1) \right| = \\
& = \Gamma(J_{r_i}(\lambda_i))\Gamma(-J_{r_i}(\lambda_i - 1)) \stackrel{\text{вл. (3.9)}}{=} \begin{pmatrix} \Gamma(\lambda_i + 1) & \frac{\Gamma'(\lambda_i + 1)}{1!} & \dots & \frac{\Gamma^{(r_i-1)}(\lambda_i + 1)}{(r_i - 1)!} \\ 0 & \Gamma(\lambda_i + 1) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{\Gamma'(\lambda_i + 1)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma(\lambda_i + 1) \end{pmatrix} \times \\
& \times \begin{pmatrix} \Gamma(-\lambda_i + 2) & \frac{\Gamma'(-\lambda_i + 2)}{1!} & \dots & \frac{\Gamma^{(r_i-1)}(-\lambda_i + 2)}{(r_i - 1)!} \\ 0 & \Gamma(-\lambda_i + 2) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{\Gamma'(-\lambda_i + 2)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma(-\lambda_i + 2) \end{pmatrix} = \\
& = \Gamma(J_{r_i}(\lambda_i))\Gamma(J_{r_i}(1 - \lambda_i)) = \\
& = \begin{pmatrix} \Gamma(\lambda_i + 1) \times & \dots & \dots & \swarrow \left(\begin{matrix} i = 0 \\ j = r - 1 \end{matrix} \right) \\ \Gamma(-\lambda_i + 2) & & & \\ 0 & \Gamma(\lambda_i + 1) \times & \sum_{k=0}^{j-i} \frac{\Gamma^{(k)}(\lambda_i + 1)\Gamma^{(r-1-i-k)}(-\lambda_i + 2)}{k!(r-1-i-k)!} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \Gamma(\lambda_i + 1) \times & \vdots \\ & & \Gamma(-\lambda_i + 2) & \\ 0 & \dots & 0 & \Gamma(\lambda_i + 1) \times \\ & & & \Gamma(-\lambda_i + 2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Наслідок функціонального рівняння Ейлера

$$\begin{aligned}
& \Gamma\left(\frac{1}{2}I_{r_i} + J_{r_i}(\lambda_i)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}I_{r_i} - J_{r_i}(\lambda_i)\right) \\
\frac{1}{2}I_{r_i} + J_r(\lambda_i) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{1}{2} + \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2} + \lambda_i \end{pmatrix} = J_r\left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right); \\
\frac{1}{2}I_{r_i} - J_r(\lambda_i) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda_i & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda_i & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{1}{2} - \lambda_i & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2} - \lambda_i \end{pmatrix} = -J_r\left(\lambda_i - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Gamma\left(\frac{1}{2}I_{r_i} + J_{r_i}(\lambda_i)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}I_{r_i} - J_{r_i}(\lambda_i)\right) = \Gamma\left(J_r\left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right)\right) \Gamma\left(-J_r\left(\lambda_i - \frac{1}{2}\right)\right) = \\
& \begin{pmatrix} \Gamma\left(\lambda_i + \frac{3}{2}\right) & \frac{\Gamma'\left(\lambda_i + \frac{3}{2}\right)}{1!} & \dots & \frac{\Gamma^{(r_i-1)}\left(\lambda_i + \frac{3}{2}\right)}{(r_i-1)!} \\ 0 & \Gamma\left(\lambda_i + \frac{3}{2}\right) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{\Gamma'\left(\lambda_i + \frac{3}{2}\right)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma\left(\lambda_i + \frac{3}{2}\right) \end{pmatrix} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{pmatrix} \Gamma\left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) & \frac{\Gamma'\left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right)}{1!} & \cdots & \frac{\Gamma^{(r_i-1)}\left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right)}{(r_i-1)!} \\ 0 & \Gamma\left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{\Gamma'\left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma\left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \\
& = \Gamma\left(J_r\left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right)\right) \Gamma\left(J_r\left(\frac{1}{2} - \lambda_i\right)\right) = \\
& = \begin{pmatrix} \Gamma\left(\lambda_i + \frac{3}{2}\right) \times & & & & \swarrow \begin{pmatrix} i=0 \\ j=r-1 \end{pmatrix} \\ \Gamma\left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) & \cdots & \cdots & & \\ 0 & \Gamma\left(\lambda_i + \frac{3}{2}\right) \times \sum_{k=0}^{j-i} \frac{\Gamma^{(k)}\left(\lambda_i + \frac{3}{2}\right) \Gamma^{(r-1-i-k)}\left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right)}{k! (r-1-i-k)!} & & & \vdots \\ \Gamma\left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) & & & & \\ \vdots & \ddots & \Gamma\left(\lambda_i + \frac{3}{2}\right) \times & & \vdots \\ & & \Gamma\left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) & & \\ 0 & \cdots & 0 & & \Gamma\left(\lambda_i + \frac{3}{2}\right) \times \\ & & & & \Gamma\left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

З отриманих двох результатів можна побачити, що загальний вигляд після розгортання добутку є доволі складним та громіздким для подальшої роботи, проте навіть форма з жордановими матрицями розширює можливості застосування цих тотожностей в інших задачах.

Висновки до розділу 3

У цьому розділі були наведені узагальнення основних властивостей Гама функції до матричного випадку з використанням відомих властивостей

матричної експоненти та жорданової канонічної форми матриці. Такий набір властивостей дає дуже широкий спектр потенційних використань.

Через те, що ці властивості спираються на жорданову матрицю та її перетворення, ми можемо уникнути великої кількості громіздких алгоритмів чисельного пошуку, які були описані у першому розділі. Замість цього можна скористатися будь-якими широко відомими алгоритмами для знаходження власних чисел та векторів матриці та обмежитися звичайними скалярними алгоритмами пошуку Гама функції.

Також слід зазначити, що не всі властивості просто узагальнюються до матричного випадку. Найкращим прикладом цього є функціональна тотожність та її наслідок, які мають доволі громіздких загальний вигляд

РОЗДІЛ 4: ФУНКЦІОНАЛЬНО-ВАРТІСНИЙ АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Вагомість матричної експоненти та Гама функції у науці були більш детально розглянуті у розділах 1 та 2 відповідно, а в цьому розділі будуть висвітлені декілька найбільш важливих можливих застосувань цього функціоналу у вирішенні практичних задач та економічний вплив цих задач на економіку та людство загалом. Прямий зв'язок зі статистикою через Гама розподіл та всі пов'язані з ним розподіли дає Гама функції дуже важливе застосування у сфері метеорології та дослідженні рівня опадів, що було безпосередньо одним із основних поштовхів початку досліджень.

4.1 Гідрологічний аналіз та метеорологічні спостереження

Дослідження метеорологічних явищ завжди було дуже важливою задачею для науковців, оскільки вже давно історично було доведено, що точне передбачення погоди сприяє значним соціальним та економічним покращенням, які можна далі збільшити за допомогою підвищення точності та зменшення часу знаходження даних завдяки кращому метеорологічному моніторингу, моделюванню і методам обчислення.

Далі буде розглянуто загальну економічну цінність дослідження погодних явищ та їх передбачення, а також продемонстровано на попередньому дослідженні опадів Африканського континенту можливості застосування Гама функції та Гама розподілу в моделюванні карт опадів у регіонах з недостатньою кількістю поверхневих спостережень.

4.2 Економічна цінність поверхневих спостережень та передбачення погодних катаклізмів

Поверхневі метеорологічні спостереження - це основні дані, що використовуються для забезпечення безпеки, а також кліматологічних параметрів для прогнозування погоди та попереджати про кліматичні та погодні катаклізми по всьому світу. Вони можуть бути зібрані вручну спостерігачем погоди, за допомогою комп'ютера в автоматизованих метеорологічних станціях або в гібридній схемі за допомогою метеорологічних спостерігачів, які вносять корективи у дані, зібрані автоматизованою метеостанцією.

За даними, оприлюдненими на Всесвітньому Економічному Форумі 2020 року (World Economic Forum 2020), до моменту початку пандемії COVID-19, надзвичайні погодні умови, невчасні дії щодо клімату і стихійні лиха становили три із чотирьох основних ризиків для світового економічного розвитку. [13]

У 2015 році Всесвітня метеорологічна організація (World Meteorological Organization), Світовий банк (World Bank Group) та інші глобальні організації вказали на важливість вдосконалення систем раннього попередження та готовність до них дають можливість обмежити втрати від гідрометеорологічних катастроф. Такі покращення напряму залежать від вдосконалення інфраструктури та можливостей метеорологічних та гідрологічних сервісів та станцій. Саме через це на момент 2019 року Світовий банк підтримував портфоліо гідрометеорологічних інвестицій розміром понад 1 млрд. доларів США.

Прогнозування погоди забезпечує економічні, екологічні та соціальні вигоди у широкому діапазоні: від короткочасних попереджень щодо безпосередньої небезпеки для життя та майна до довгострокових прогнозів зміни клімату, які є важливою складовою планування адаптаційних заходів. Зусилля щодо подальшого вдосконалення можливостей прогнозування погоди, будь то пов'язані із поглибленням розуміння метеорології чи вдосконаленням інформаційних технологій для її моделювання, як правило,

забезпечують зіставні та суттєві збільшення пов'язаних із цим соціально-економічних вигод.

У 2012 році у своєму дослідженні «A Cost Effective Solution to Reduce Disaster Losses in Developing Countries : Hydro-Meteorological Services, Early Warning, and Evacuation» [12] Галлегатте Стефан (Hallegatte Stéphane) відзначив, що якщо у країнах із низьким або середнім рівнем доходу підняти рівень систем збору гідрометеорологічної інформації та раннього попередження до рівня Європи, то можна було б врятувати у середньому близько 23000 життів та уникнути від 300 млн. до 3 млрд. доларів США у матеріальних втратах.

Окрім попередження втрат, аналіз та передбачення погоди також грає ключову роль у підвищенні продуктивності таких секторів як сільське господарство, електроенергія, транспорт та ін.

За даними Продовольчої та сільськогосподарської організації ООН (Food and Agriculture Organization), в сфері сільського господарства близько 5-10% втрат виробництва пов'язані саме із мінливістю погоди. За результатами численних досліджень було виявлено, що можливість та доцільне використання прогнозів погоди та клімату можуть зменшити цей вплив від 10% до 30%. За даними світового банку глобальну цінність сільського господарства у 2019 році оцінювали в 3.49 трильйонів доларів США. Але спочатку потрібно врахувати те, що тваринництво, лісове господарство та рибальство становлять 40% вказаної суми, та той факт, що вони від аналізу погоди отримують значно меншу вигоду, ніж посіви. Взявши усі ці фактори до уваги, було отримано, що використання прогнозів погоди та клімату могло б принести близько 33 млрд. доларів США вигоди .

Сектор електроенергії є дуже суттєвим для людства, маючи загальну світову вартість 1.5 трильйонів доларів США, якщо взяти середню оптову ціну за джерело видобутку електроенергії. Хоча і існує багато досліджень того, як аналіз погоди та клімату впливає на ефективність видобутку електроенергії,

жодні із них не вказують свої результати у відносних термінах або ж із загальними функціональними залежностями. Тому робити точні прогнозування щодо збереження коштів у цьому секторі стає набагато складніше. Приблизне значення цієї величини можна оцінити знизу значенням 29 млрд. доларів США, проте це є лише дуже приблизною нижньою границею та скоріш за все реальне значення може бути суттєво вищим.

Сектор транспорту можна було б розглянути більш детально окремо по кожній формі транспорту, проте можна просто окреслити загальні збіжності та розрізнення в них. Для повітряного та водного транспорту основним джерелом збереження коштів є оптимізація побудови маршрутів на основі метеорологічних даних та результуючі зменшення використаного пального. Для наземного транспорту, оцінка вартості була побудована на основі дослідження, проведеного у Швейцарії, та екстрапольованого на загальний світовий рівень. Підсумовуючи загальні потенційні заощадження, було отримано мінімальну нижню границю в 28 млрд. доларів США щорічно.

Наступна таблиця ілюструє в порядку спадання декілька основних сфер у економіці, які найбільше відчують вплив від вдосконалення технологій гідрологічного аналізу:

Таблиця 4.1

Сектор	Нижня границя річних заощаджень
Попередження стихійних лих	66 млрд. доларів США
Сільське господарство	33 млрд. доларів США
Електроенергія	29 млрд. доларів США
Транспортування	28 млрд. доларів США
Водопостачання	5 млрд. доларів США
Σ	161 млрд. доларів США

Дані таблиці базуються на дослідженнях Світового банку 2020 р. [13]

Підсумовуючи, метеорологія та гідрологічний аналіз мають дуже суттєвий соціо-економічний вплив на сучасний світ та його потенційний економічний розвиток, тому надзвичайно важливо зосереджувати достатню кількість уваги та ресурсів саме на цьому класі проблем для покращення загального життя людства.

4.3 Використання Гама функції та Гама розподілу для оцінки кількості опадів Африканського континенту

Маючи тепер розуміння про те, як саме гідрологічні дані можуть покращити життя людей та потенційні економічні вигоди, потрібно розглянути як саме Гама функція може бути використана для досягнення цих цілей.

Гідрологам дуже важко вимірювати такі гідрологічні дані, як кількість опадів та стоки води. Для проектування споруд, пов'язаних з водою, потрібна дуже велика кількість гідрологічних даних. У більшості випадків доступний обсяг даних обмежений, і він також може містити деякі пропуски в часовому ряді. Коли вирішено здійснити проект водних ресурсів у гідрологічному регіоні, спочатку необхідно зібрати всю інформацію, що стосується регіону, а потім проаналізувати зібрані дані. Частотний аналіз даних є найбільш часто використовуваним методом. Потім проводиться пошук та виведення математичного рівняння, що характеризує наявні дані, щоб заповнити пропуски у спостереженнях та / або продовжити їх на більш тривалий період. Пропуски в даних можна заповнити, скориставшись відповідними даними, отриманими з гідрологічних районів, що знаходяться поблизу географічно і, отже, подібні до розглянутої області.

У гідрологічних дослідженнях використовується багато різних випадкових величин для моделювання різних сценаріїв: нормальний та логнормальний розподіли використовуються найчастіше для оцінки річного

потоків річок, розподіли Гумбеля та Вейбула використовуються зазвичай для прогнозування частоти повені. Проте в даному випадку Гама розподіл має декілька ключових переваг, які підштовхують науковців використовувати саме його: у дослідженнях опадів зазвичай досліджувана область зазвичай розбивається на сектори, а тому дискретизується; також слід зазначити, що значення опадів є невід'ємною величиною, що також підштовхує до використання Гама розподілу.

Для того, щоб аналізувати дані по днях потрібно спочатку визначити, чи є день «сухим» чи «мокрим», тобто чи були опади в даному секторі в день, що спостерігався. Для цього доцільно скористатися алгоритмом на основі ланцюгів Маркова. Далі потрібно оцінити власне рівень опадів в досліджуваній день. Для цього до досліджуваного набору даних застосовується двох-параметричний Гама розподіл для побудови статистик та заповнення пропусків у ряді.

У 2000 році у своїй роботі «Use of Gamma Distribution in Hydrological Analysis» [14] Хафзулла Аксой (Hafzullah Aksoy) проводив подібні дослідження та отримав ряд дуже важливих результатів, які проілюстрували, що використання модифікованого Гама розподілу приносило доволі точні результати щодо передбачення та аналізу рівня опадів Африки. У своїй роботі він користувався наступною три-параметричною модифікацією Гама розподілу:

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} (x - \gamma)^{\alpha-1} e^{-\frac{(x-\gamma)}{\beta}}, x \geq \gamma, \quad (4.1)$$

де α — параметр форми;

β — параметр масштабу;

γ — параметр розташування.

Користуючись цим розподілом він отримав наступні результати:

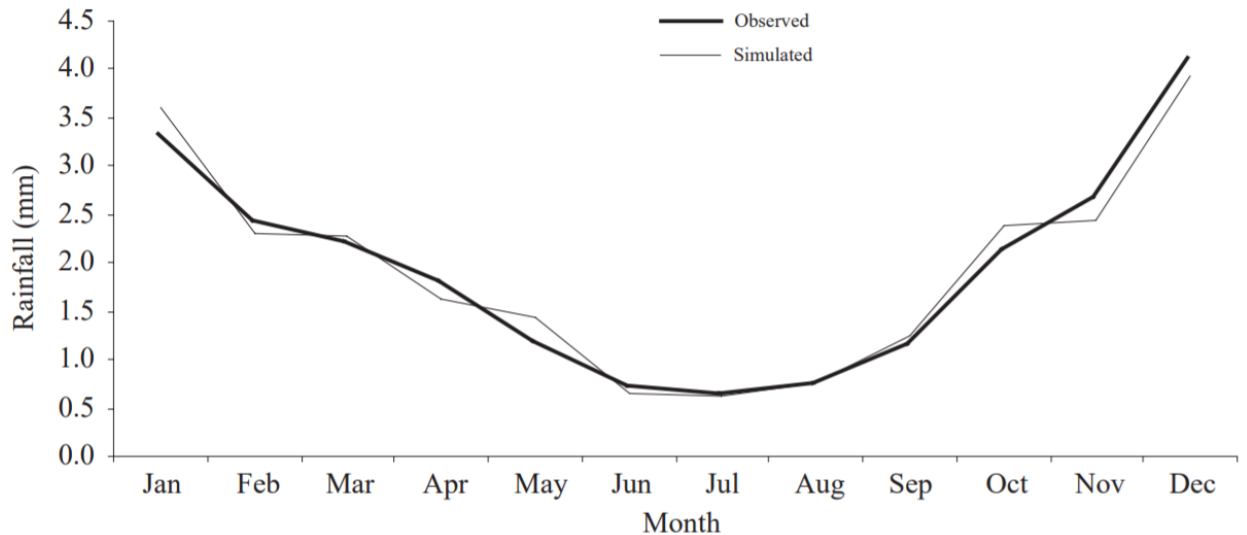


Рис 4.1 – середній місячний рівень опадів

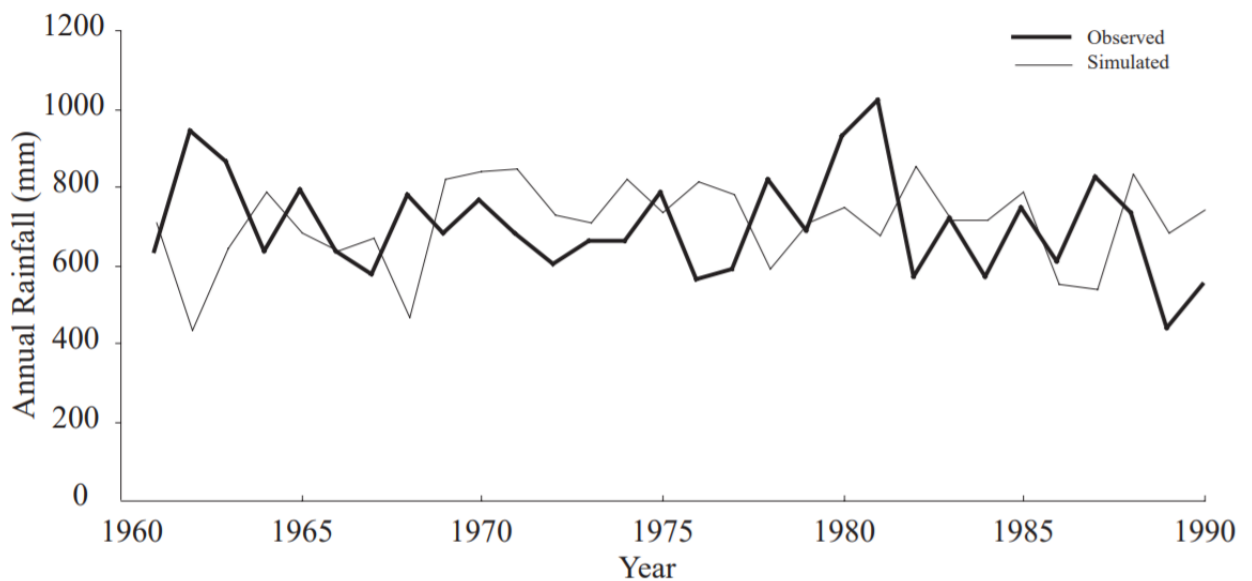


Рис 4.2 – середній річний рівень опадів

Робота Аксойя є лише одним прикладом вдалого застосування Гама функції для визначення рівня опадів та інших гідрологічних статистичних даних. Універсальність Гама функції та її широкий функціонал дають безліч можливостей для застосування у даному класі задач.

4.4 Висновки до розділу

У цьому розділі було розглянуто одне із найважливіших з економічної точки зору застосувань Гама функції: гідрологічний аналіз та метеорологія. Було розглянуто загальні економічні переваги та вплив цієї сфери науки на економічний розвиток людства, наведено дослідження Світового банку, Об'єданих націй та декількох інших світових організацій щодо передбачення погоди та клімату та висвітлено основні сектори економіки, які найбільше виграють за рахунок цих технологій.

Далі було розглянуто більш детально на прикладі аналізу рівня опадів можливості використання Гама розподілу для аналізу місцевостей, які мають обмежені можливості здійснювати наземні спостереження. Для більш наглядної демонстрації можливостей цього функціоналу було наведено попереднє дослідження Хафзулла Аксойя – турецького професора цивільного будівництва Стамбульського технічного університету. У цьому дослідженні було явно показано точність отриманих експериментальних даних на основі набору даних з великою кількістю пропусків саме через особливості Африканського континенту. Такі умови є доволі типовими для багатьох регіонів світу, тому фокусування саме на такому типі досліджень є набагато більш доцільним, аніж дослідження регіонів з обширним покриттям метеорологічних станцій та дослідницьких станцій.

ВИСНОВКИ

В роботі було розглянуто загальне положення Гама функції у науці та її найважливіші властивості, висвітлено можливості узагальнення її до матричного випадку та складності, пов'язані із різними підходами до цього питання. В процесі дослідження було вирішено, що підхід з використанням властивостей матричної експоненти та жорданової форми матриці має потенціал до широкого використання через велику різноманітність властивостей, пов'язаних із цими об'єктами.

Більшість досліджених властивостей доводились спочатку для часткового випадку з однією жордановою матрицею, а потім узагальнювались до загального з допомогою жорданової канонічної форми матриці. Під час дослідження також було виявлено певні складності такої задачі узагальнення, а саме з функціональною тотожністю та її наслідком, що добре ілюструє складності аналітичного підходу.

В результаті роботи було отримано повний набір всіх основних властивостей Гама функції, які потенційно розглядались в розділі 2. В останньому розділі також було проілюстровано потенційне використання Гама функції на живому прикладі дослідження опадів та наведено декілька досліджень щодо переваг та наслідків, які метеорологія та гідрологія мають на сучасному економічному розвитку та на суспільстві загалом ([12] – [14]).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Philip J. D. Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function. *The American Mathematical Monthly*, 1959. Vol. 66, No. 10. P. 849–869.
2. Rice J. A. Mathematical Statistics and Data Analysis. Belmont, CA: Duxbury Press., 2006. 689 p.
3. Cardoso J. R., Sadeghi A. Computation of matrix gamma function. *BIT Numerical Mathematics*, 2019. Vol. 59, No. 2. P. 343–370.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10543-018-00744-1>
4. Reinhold R. Classical Topics in Complex Function Theory. *The Gamma Function* / Ed. S. Axler, F.W. Gehring, P.R. Halmos. New York, NY: Springer, 1997. P. 33–70.
5. Azose, J. On the Gamma Function and its Applications. University of Washington: white paper, 2016, Washnigton, WA. URL: https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_10/papers/joel.pdf
6. Jódar L., Cortés J. C. Some properties of Gamma and Beta matrix functions. *Applied Mathematics Letters*, 1998. Vol. 11, No. 1. P. 89–93.
7. Kishka, Z., Saleem M., Elrawy A. The matrix of matrices exponential and application. *International Journal of Mathematical Analysis*, 2019. Vol. 13. P. 81–97.
8. Walz G. Computing the matrix exponential and other matrix functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1988. Vol. 21, No. 1. P. 119-123.
9. Horn R., Johnson C. Topics in Matrix Analysis. *Cambridge University Press*. 1991, Cambridge, UK.
10. Al-Mohy A., Higham N. Computing the Action of the Matrix Exponential, with an Application to Exponential Integrators. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2011. Vol. 33. No. 2.

11. Sherlock C. Direct statistical inference for finite Markov jump processes via the matrix exponential. *Computational Statistics*, 2021.
DOI: 10.1007/s00180-021-01102-6.
12. Hallegatte S. A Cost Effective Solution to Reduce Disaster Losses in Developing Countries: Hydro-Meteorological Services, Early Warning, and Evacuation. *Policy Research Working Paper*, 2012. No. 6058. World Bank, Washington, DC URL: <http://hdl.handle.net/10986/9359>
13. Kull D., Riishojgaard L. P., Eyre J., Varley A. The Value of Surface-based Meteorological Observation Data. *World Bank*, 2021, Washington, DC.
URL: <http://hdl.handle.net/10986/35178>
14. Aksoy H. Use of Gamma Distribution in Hydrological Analysis. *Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences*, 2000. Vol. 24. No. 6.

ДОДАТОК А ІЛЮСТРАТИВНІ МАТЕРІАЛИ ДО ДОПОВІДІ

Дипломна робота
на здобуття ступеня бакалавра
за освітньо-професійною програмою «Системний аналіз і управління»
спеціальності 124 «Системний аналіз»
на тему: «Гама функція від матриць»

Виконав:

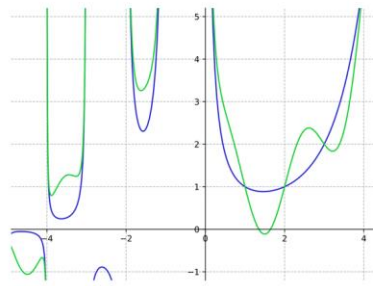
Студент групи КА-71 Шутяк Дмитро Олегович

**Предмет,
мета та
методи
дослідження**

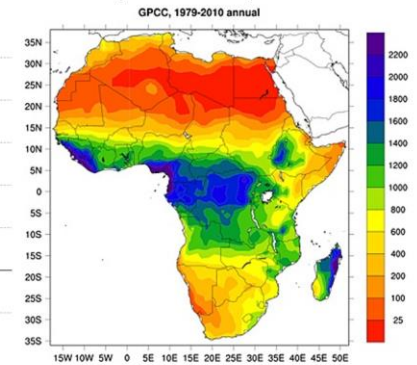
- Предметом дослідження є матрична Гама функція та її властивості
- Метою роботи є узагальнення властивостей Гама функції від скалярного до матричного випадку
- Методом дослідження є використання Жорданової канонічної форми та властивостей матричної експоненти

Актуальність роботи

Інтерполяція факторіалу з допомогою Гама функції



Річний рівень опадів на Африканському континенті



$$\begin{aligned} f_1(z) &= \Gamma(z); \\ f_2(z) &= \Gamma(z) + \sin(\pi z). \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} (x - \gamma)^{\alpha-1} e^{-\frac{(x-\gamma)}{\beta}}, x \geq \gamma$$

Гама функція та її властивості

- Найбільш використовувана форма Гама функції:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0.$$

- Диференційованість, похідна та наслідок з доведення:

$$\Gamma(\alpha) \in C^\infty((0, \infty));$$

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} (\ln x)^n dx;$$

$$\Gamma^{(n)}(\alpha + 1) = \alpha \Gamma^{(n)}(\alpha) + n \cdot \Gamma^{(n-1)}(\alpha).$$

- Основна функціональна тотожність:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha).$$

Гама функція та її властивості

- Значення у деяких точках:

$$\Gamma(n+1) = n!;$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}, n \in \mathbb{N}.$$

- Функціональне рівняння Ейлера та наслідок із нього:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha};$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{\cos \pi\alpha}.$$

Відомі методи пошуку матричної Гама функції

Спроби знаходження матричної Гама функції вже були, проте всі вони базуються на чисельному знаходженні функції та адаптації чисельних методів наближення Гама функції до матричного випадку.

Існує багато загально відомих методів наближення скалярної Гама функції, деякі з яких мають узагальнення для матричного випадку.

Основними проблемами в процесі застосування цих методів для матричної Гама функції є потреба знаходження додаткових допоміжних коефіцієнтів та потреба у знаходженні похідної високого порядку для оцінки похибки отриманого наближення.

Відомі методи пошуку матричної Гама функції

• Наближення Ланцоша

$$\Gamma(A) = \sqrt{2\pi} \left(A + \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) I \right)^{A + \frac{1}{2}I} e^{-(A + (\alpha + \frac{1}{2})I)} \times \\ \times \left(c_0(\alpha)I + \sum_{k=1}^m c_k(\alpha)(A + (k-1)I)^{-1} + e_{\alpha,m}(A) \right);$$

• Наближення Суджа

$$\Gamma(A) = \sqrt{2\pi} \left(A + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) I \right)^{A - \frac{1}{2}I} e^{-(A + (\alpha - \frac{1}{2})I)} \times \\ \times \left(d_0(\alpha)I + \sum_{k=1}^m d_k(\alpha)(A + (k-1)I)^{-1} + e_{\alpha}(A) \right).$$

Абсолютна похибка наближення $E_a(z) = \Gamma(z) - G_a(z)$ оцінюється за наступною формулою:

$$\|E_a(A)\|_F \leq \max_{i \leq k \leq n-1} \frac{\omega_k}{k!} \|(I - |N|)^{-1}\|_F,$$

де $U^*AU = T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + N$ – розклад Шура матриці A , T – верхньотрикутна матриця, N – строга верхньотрикутна матриця, $\omega_k = \sup_{z \in \Omega} |E_a^{(k)}(z)|$.

Жорданова матриця та матрична експонента

Матрична експонента має дуже широкий спектр властивостей та застосувань у різних областях науки, проте у цій роботі буде зроблено акцент саме на тих, які виявилися найбільш суттєвими під час побудови та виведення властивостей матричної Гама функції. Найважливішими властивостями для даного дослідження були значення матричної експоненти для певних класів матриць та зв'язок її з Жордановою матрицею та Жордановою канонічною формою матриці.

Матрична експонента для діагональної та діагоналізовної матриці:

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{d_{11}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{d_{nn}} \end{pmatrix},$$

D – діагональна матриця.

Для діагоналізовної матриці $A = P^{-1}DP$, (D – діаг. матриця)

$$e^A = P^{-1}e^DP.$$

Жорданова матриця та матрична експонента

Для довільної матриці A справедлива наступна рівність:

$$A = UJU^{-1},$$

Жорданова канонічна форма матриці, де J — відповідна Жорданова матриця, яка складається з Жорданових клітин вигляду

$$J(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Застосовуючи тепер отриману рівність до матричної експоненти можна отримати наступний результат:

$$e^A = Ue^JU^{-1}.$$

Жорданова матриця та матрична експонента

Для обчислення останньої формули використовується

властивість матричної експоненти та Жорданової матриці

$$J(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

$$e^{tJ(\lambda_i)} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_i} & \frac{te^{t\lambda_i}}{1!} & \frac{t^2e^{t\lambda_i}}{2!} & \dots & \frac{t^{k-2}e^{t\lambda_i}}{(k-2)!} & \frac{t^{k-1}e^{t\lambda_i}}{(k-1)!} \\ 0 & e^{t\lambda_i} & \frac{te^{t\lambda_i}}{1!} & \frac{t^2e^{t\lambda_i}}{2!} & \dots & \frac{t^{k-2}e^{t\lambda_i}}{(k-2)!} \\ 0 & 0 & e^{t\lambda_i} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \frac{te^{t\lambda_i}}{1!} & \frac{t^2e^{t\lambda_i}}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda_i} & \frac{te^{t\lambda_i}}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{t\lambda_i} \end{pmatrix}.$$

Аналіз отриманих результатів

- Означення, яким оперувалось дослідження:

$$\Gamma(A) = \int_0^{\infty} e^{A \ln x} e^{-x} dx.$$

Це означення відрізняється від класичного тим, що була зроблена заміна $A = A - I$ для спрощення деяких підрахунків. Змін до суті дослідження та отриманих результатів цей крок не несе, тому далі це згадуватись не буде.

- Матричний вигляд функції для Жорданової матриці:

$$\Gamma(J_{r_i}(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} \Gamma(\lambda_i + 1) & \frac{\Gamma'(\lambda_i + 1)}{1!} & \frac{\Gamma''(\lambda_i + 1)}{2!} & \dots & \frac{\Gamma^{(r_i-2)}(\lambda_i + 1)}{(r_i - 2)!} & \frac{\Gamma^{(r_i-1)}(\lambda_i + 1)}{(r_i - 1)!} \\ 0 & \Gamma(\lambda_i + 1) & \frac{\Gamma'(\lambda_i + 1)}{1!} & \frac{\Gamma''(\lambda_i + 1)}{2!} & \dots & \frac{\Gamma^{(r_i-2)}(\lambda_i + 1)}{(r_i - 2)!} \\ 0 & 0 & \Gamma(\lambda_i + 1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \frac{\Gamma'(\lambda_i + 1)}{1!} & \frac{\Gamma''(\lambda_i + 1)}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Gamma(\lambda_i + 1) & \frac{\Gamma'(\lambda_i + 1)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \Gamma(\lambda_i + 1) \end{pmatrix}.$$

Та, користуючись властивістю Жорданової канонічної форми для матриці $A = UJU^{-1}$ маємо результат:

$$\Gamma(A) = U\Gamma(J)U^{-1}.$$

Аналіз отриманих результатів

Основна функціональна тотожність

Для Жорданової матриці:

$$\Gamma(J_{r_i}(\lambda_i) + I) = (\lambda_i + 1)\Gamma(J_{r_i}(\lambda_i)) + \Gamma(J_{r_i}(\lambda_i))J_{r_i}(0),$$

та узагальнення для довільної матриці $A = UJ_{r_i}(\lambda_i)U^{-1}$:

$$\Gamma(A + I) = (\lambda_i + 1)\Gamma(A) + \Gamma(A)UJ_{r_i}(0)U^{-1}.$$

Порівнюючи із скалярним випадком функціональної тотожності, можна побачити, що в ситуації переходу до більшої розмірності додається корегуючий доданок $\Gamma(A)UJ_{r_i}(0)U^{-1}$, який для розмірності 1 просто стає рівним 0. Це доволі поширене явище під час узагальнення скалярних властивостей до вищих розмірностей.

Аналіз отриманих результатів

Значення функції для деяких класів матриць

- Натуральний коефіцієнт n :

$$\Gamma(nI_r) = n! I_r.$$

- Дробовий коефіцієнт $\left(n + \frac{1}{2}\right)$:

$$\Gamma\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)I_r\right) = \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} I_r.$$

- Довільна діагональна матриця D_k :

$$\Gamma(D_k) = \begin{pmatrix} \Gamma(d_{11} + 1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Gamma(d_{kk} + 1) \end{pmatrix}.$$

Аналіз отриманих результатів

Функціональне рівняння Ейлера та його наслідок

Для Жорданової матриці було розглянуто наступний вираз та отримано результат у двох записах:

$$\Gamma(J_r(\lambda_i))\Gamma(I_{r_i} - J_r(\lambda_i)) =$$

$$= \begin{pmatrix} \Gamma(\lambda_i + 1) \times \Gamma(-\lambda_i + 2) & \cdots & \cdots & \cdots & \checkmark \begin{pmatrix} i = 0 \\ j = r - 1 \end{pmatrix} \\ 0 & \Gamma(\lambda_i + 1) \times \Gamma(-\lambda_i + 2) & \sum_{k=0}^{j-i} \frac{\Gamma^{(k)}(\lambda_i + 1) \Gamma^{(r-1-i-k)}(-\lambda_i + 2)}{k! (r-1-i-k)!} & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \Gamma(\lambda_i + 1) \times \Gamma(-\lambda_i + 2) & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \Gamma(\lambda_i + 1) \times \Gamma(-\lambda_i + 2) & \end{pmatrix};$$

або ж записати у такому вигляді:

$$\Gamma(J_r(\lambda_i))\Gamma(I_{r_i} - J_r(\lambda_i)) = \Gamma(J_{r_i}(\lambda_i))\Gamma(J_{r_i}(1 - \lambda_i)).$$

Аналіз отриманих результатів

Наслідок функціонального рівняння:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}I_{r_i} + J_{r_i}(\lambda_i)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}I_{r_i} - J_{r_i}(\lambda_i)\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \Gamma\left(\lambda_i + \frac{3}{2}\right) \times & & & \\ \Gamma\left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) & \dots & \dots & \swarrow \left(\begin{matrix} i=0 \\ j=r-1 \end{matrix} \right) \\ 0 & \Gamma\left(\lambda_i + \frac{3}{2}\right) \times & \sum_{k=0}^{j-i} \frac{\Gamma^{(k)}\left(\lambda_i + \frac{3}{2}\right) \Gamma^{(r-1-i-k)}\left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right)}{k!(r-1-i-k)!} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \Gamma\left(\lambda_i + \frac{3}{2}\right) \times & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \Gamma\left(\lambda_i + \frac{3}{2}\right) \times \\ & & & \Gamma\left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \Gamma\left(J_r\left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right)\right) \Gamma\left(J_r\left(\frac{1}{2} - \lambda_i\right)\right).$$

Аналіз отриманих результатів

Останні два результати дуже добре ілюструють складності роботи з матрицями, а саме те, наскільки більш громіздкими стають результати добутку двох матриць.

Загалом були наведені узагальнення основних властивостей Гама функції до матричного випадку з використанням віще наведених властивостей матричної експоненти та Жорданової матриці.

Через те, що ці властивості спираються на Жорданову матрицю та її перетворення, ми можемо уникнути великої кількості громіздких алгоритмів чисельного пошуку, які були зазначені раніше у роботі. Замість цього можна скористатися будь-якими широко відомими алгоритмами для знаходження Жорданової канонічної форми матриці та обмежитися властивостями та алгоритмами пошуку скалярної Гама функції.

Порівняння алгоритмів знаходження Гама функції для довільної матриці

Алгоритм знаходження функції за допомогою метода Ланцоша

1. Set $\alpha = 9; m = 10; S = c_0 I + c_1 A^{-1};$
2. for $k = 2: 10$
3. $S = S + c_k (A + (k - 1)I)^{-1};$
4. end
5. $L = \frac{1}{2} \ln(2\pi)I + \left(A - \frac{1}{2}I\right) \ln\left(A + \frac{17}{2}I\right) - \left(A + \frac{17}{2}I\right) + \ln(S);$
6. $\Gamma(A) \approx e^L.$

Алгоритм знаходження функції за допомогою Жорданової форми матриці

1. Власні числа λ_i
2. Власні та приєднані вектори x_i ;
3. Жорданова форма J ;
4. $\Gamma(J)$;
5. $\Gamma(A) = U\Gamma(J)U^{-1}.$

Порівняння алгоритмів знаходження Гама функції для довільної матриці

Слід також зазначити, що для використання наближення Ланцоша потрібно додатково також знаходити коефіцієнти c_k або ж користуватися емпірично знайденими коефіцієнтами, які відповідають бажаній похибці наближення. Для методу зі значеннями $\alpha = 9; m = 10$ використовуються наступні значення c_k :

k	$c_k(9)$
0	1.000000000000000174663
1	5716.400188274341379136
2	-14815.30426768413909044
3	14291.49277657478554025
4	-6348.160217641458813289
5	1301.608286058321874105
6	-108.1767053514369634679
7	2.605696505611755827729
8	$-0.7423452510201416151527 \times 10^{-2}$
9	$0.5384136432509564062961 \times 10^{-7}$
10	$-0.4023533141268236372067 \times 10^{-8}$

Висновки

- В роботі було розглянуто основні властивості Гама функції та наведено мотивацію використовувати саме Жорданову матрицю, як основний апарат
- Було запропоновано та доведено ряд властивостей для матричної Гама функції з використанням вище зазначеного функціоналу
- На цих властивостях було висвітлено можливості та складності роботи з матрицями

Дякую за увагу!