

Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"
Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

КОЛЬЦОВ ДМИТРО РОМАНОВИЧ

УДК 519.6:514.18

ДИСЕРТАЦІЯ

**МЕТОД КОРОТАЦІЙНОГО БАЛКОВОГО СПЛАЙНА ДЛЯ
ЗІСТАВЛЕННЯ КРИВИХ ТА ВИЗНАЧЕННЯ КУТОВИХ ТОЧОК НА
ЗОБРАЖЕННЯХ**

113 – Прикладна математика

11 – Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ Д. Р. Кольцов

Науковий керівник _____

Ориняк Ігор Володимирович, доктор технічних наук, професор

Київ – 2026

АНОТАЦІЯ

Кольцов Д. Р. Метод коротаційного балкового сплайна для зіставлення кривих та визначення кутових точок на зображеннях. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика. – Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, 2026.

Метою роботи є підвищення точності та обчислювальної ефективності процесів геометричної апроксимації, ідентифікації кутових особливостей та зіставлення контурів на основі розробки та впровадження методу коротаційного балкового сплайна.

Сплайни широко застосовуються в системах автоматизованого проєктування (САПР), у комп'ютерній графіці й анімації, для прокладання шляхів і траєкторій, для обробки зображень і в задачах розпізнавання образів. Розвиток сучасних сплайнів пов'язаний у першу чергу з САПР для естетичного проєктування геометричної форми, звідки й виникла постановка задачі сплайнів як побудова кривих вільної форми. Термін «сплайн» виник із назви гнучкої дерев'яної дошки, деформація якої при заданих обмеженнях і навантаженнях описувала гладку до другої похідної криву красивої форми.

Деформування дошки при невеликих відхиленнях гарно описується математичною теорією балки, тому вона отримала значну кількість напрацювань, що активно впроваджувалися в практику побудови сплайнів. Це зокрема, моделі натягнутих балок, балки на пружних опорах (для згладжування неточно заданих точок), балки змінної жорсткості, можливість задання різних фізично обґрунтованих граничних умов на кінцях балки тощо. Недоліком балкових сплайнів є те, що крива передбачає явну форму залежності переміщення y від координати x , тобто $y = y(x)$, що обмежує максимальну зміну напрямку дотичної до неї в межах до 180° . Розширення

можливостей таких сплайнів шляхом застосування теорії гнучких балок (так званої еластики), стримується складністю математичного апарату й ефективних рішень для еліптичних інтегралів різного виду. Цікавою була ідея Фоулера-Вільсона покращити кубічні інтерполяційні сплайни шляхом введення локальних координат для ділянок між заданими точками, причому кути, що виникають між ними, мають бути зведеними до нуля шляхом відповідного деформування цих ділянок. Це призводить до формування нелінійної системи рівнянь, що розв'язуються ітераційно. Недоліком такого підходу є необхідність задання великої кількості точок вимірювання, наприклад, побудова кола вимагає як мінімум 40 точок.

Популярні класичні сплайни Безьє виникли для розв'язання задач проєктування в автомобілебудуванні. Основним недоліком є їхній глобальний характер. Грубо кажучи, якщо ми маємо криву N -го порядку, то зміна положення, скажімо на вектор Δ певної контрольної точки призводить до відхилення сплайна всього на величину трохи більшу за Δ/N біля цієї точки і на подібну зміну в околі всіх інших точок (за винятком граничних). Це утруднює побудову й корекцію кривої. Як протипага їм була запропонована теорія B-сплайнів, що мають локальний характер, але і вони не проходять через задані точки. Вони оперують дуже багатьма допоміжними параметрами, вузли, їх кількість, відстані між ними, їх кратність, поняття відкритих і періодичних сплайнів, ваги окремих точок (NURBS) – і, як відзначається в роботах конструкторів і дизайнерів в машинобудуванні – потрібні роки, щоб опанувати техніку побудови сплайнів оптимальної форми.

Щобільше, ці популярні техніки сплайнування не гарантують побудову естетичних кривих, що мають певні інтегральні властивості, зокрема мінімум інтеграла по довжині від квадрата кривини. Цей критерій прямо впливає з теорії балок і широко застосовується в геометричному проєктуванні. Відповідність критеріям естетичності призводить до постановки і розв'язання складної задачі оптимізації для класичних сплайнів, що вимагає пошуку

оптимального розміщення вузлів і положень контрольних точок. Альтернативними методами є застосування аналітичних кривих, таких як клотоїди, еластики, лог-естетичних кривих. Проте вони вимагають аналітичних процедур інтегрування, «склеювання ділянок», і не можуть бути універсальним засобом, а можуть застосовуватися лише як певні перехідні зони між заданими точками й напрямками.

Значною проблемою геометричного моделювання є згладжування заміряних точок. Така задача виникає для обробки результатів сканування промислових об'єктів з метою оцінки їх технічного стану, для задач реверсної інженерії, розпізнавання образів, в тому числі для медицини. Коли відстані між точками заміру велика, то можна застосовувати класичні В-сплайни, які необхідно адаптувати для врахування різної відстані між точками (густини точок вимірювання). Коли відстань між точками заміру менша, ніж похибки вимірювань, то застосування кубічних сплайнів, чи В-сплайнів вимагає попередніх процедур сегментації, обробки окремих сегментів, потім накладання їх з різними вагами, і лише потім згладжування. Тому для геометричного моделювання майже завжди застосовується Гаусівське (на основі ядер) згладжування, яке в статистичних застосуваннях вважається неефективним, проте для геометричних задач є майже безальтернативним. Такі підходи не є адаптивними до відстані між точками, вони застосовуються окремо до координат по y та x , і при більшому згладжуванні зменшують масштаб отриманої фігури.

Як бачимо, для практично важливих задач інтерполяції, дизайну та згладжування застосовуються зовсім різні методи, хоча на практиці буває важко зрозуміти різницю в їхніх постановках (при зменшенні похибки і густини точок вимірювань задача згладжування переходить в інтерполяцію).

Таким чином, важливим є створення універсального методу, який би однаковою мірою був ефективним для задач дизайну (найестетичніша крива), задач інтерполяції та задач згладжування. Балкові сплайни, мають багато очевидних переваг, зокрема, щодо точного проходження сплайна через задані

контрольні точки, відповідності довільно сформульованим граничним умовам, застосування адаптивних параметрів згладжування, застосування ділянок різних властивостей гнучкості тощо. Тому врахування минулих здобутків в теорії балкових сплайнів, ефективної ідеї Фоулера-Вільсона щодо використання локальних координат (неявного представлення залежності між координатами) може стати солідною основою створення нового методу в теорії лінійних сплайнів, а саме коротаційного балкового сплайна.

У *першому розділі* дисертаційної роботи виконано обґрунтування актуальності задачі геометричного моделювання та згладжування контурів складної форми, що виникають у задачах комп'ютерної геометрії, обробки зображень та автоматизованого проєктування. Показано значення побудови гладких інтерполяційних кривих для задач відновлення форм, зокрема при аналізі та реконструкції пазлів. Розглянуто основні поняття добротності сплайнів та сформульовано вимоги до якості геометричних кривих, включаючи неперервність похідних, поведінку кривини та енергетичні критерії гладкості. Наведено огляд класичних методів побудови сплайнів, зокрема кубічних інтерполяційних сплайнів і кривих Безьє, та досліджено їх можливості й обмеження при моделюванні складних геометричних форм. Проаналізовано сучасні підходи до ідентифікації та зіставлення контурів, що використовуються для визначення відповідності геометричних елементів, а також їх застосування у задачах автоматичного складання та аналізу складених структур. На основі проведеного аналізу сформульовано постановку задач дослідження, визначено основні напрямки розроблення методу та окреслено вимоги до математичної моделі, що забезпечує побудову гладких і фізично узгоджених кривих.

Другий розділ дисертаційної роботи присвячено розробленню загальної математичної моделі коротаційного балкового сплайна та дослідженню його інтерполяційних властивостей. У розділі сформульовано базову ідею методу, що полягає у модифікації класичного балкового підходу шляхом введення додаткових (удаваних) точок, які дозволяють керувати змінювати локальну

кривину та забезпечувати стабільність розрахункового процесу. Запропоновано новий підхід до визначення нормального напрямку деформованої кривої, що забезпечує неперервність нахилу та узгодженість геометричних параметрів між сусідніми сегментами сплайна. Розроблено алгоритм розрахунку коротаційного балкового сплайна, який включає послідовне уточнення геометрії кривої шляхом ітераційного коригування параметрів системи. Описано процедуру виконання ітерацій та умови досягнення стабілізованого розв'язку. Можливості методу щодо інтерполяції показано на прикладі еліпса з відношенням півосей 2:1, який є нетривіальним тестовим об'єктом з огляду на те, що його кривина змінюється вздовж контуру у 8 разів. Також розглянуто задачу інтерполяції прямокутника без явного задання кутових точок, що дозволило продемонструвати здатність методу коректно відновлювати форму та виконувати природне згладжування кутових ділянок. Для порівняння наведено результати побудови контурів із використанням параметричного сплайна, який забезпечує прийнятну якість апроксимації, проте потребує додаткових процедур визначення параметра t , що ускладнює практичне застосування методу. Окремо розглянуто задачу інтерполяції типу C^1 – задачу Ерміта, у межах якої досліджено побудову кривих між двома заданими точками для симетричних, асиметричних та несиметричних конфігурацій при різних варіантах граничних умов. Проведено порівняльний аналіз результатів із кривими Безьє та моделлю геометрично нелінійної балки.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено дослідженню апроксимаційних властивостей коротаційного балкового сплайна. Введено поняття відстані між вхідними дискретними точками та апроксимуючим контуром, що використовується як критерій збіжності ітераційного процесу. Досліджено задачу відновлення кола за дискретним набором точок із різними рівнями випадкових відхилень. Виконано порівняння з існуючими підходами для задачі реконструкції дуги кола за п'ятьма точками, де метод коротаційного балкового сплайна продемонстрував результати, співставні з відомими

рішеннями. Крім того, наведено приклади відновлення складніших геометричних форм та досліджено вплив параметра податливості моделі на характер отриманих розв'язків і стабільність обчислювального процесу.

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячено розвитку теоретичних засад і практичних алгоритмів застосування коротацийного балкового сплайна до задач обробки та відтворення контурів реальних об'єктів. На початку розділу наведено теоретичні викладки, пов'язані з введенням адаптивного параметра згладжування та поняття удаваної кутової точки, що дозволяє описувати локальні особливості геометрії контуру без явного задання розривів гладкості. Запропоновано критерії зіставлення кривих, оснований на різниці кривин, а також запропоновано метод визначення кутових точок на основі аналізу локальної роботи. Розглянуто формування вхідних даних для алгоритму коротацийного балкового сплайна. Описано метод сканування пазлів і процедуру отримання дискретного набору точок контуру, що використовується як початкова геометрична інформація. Запропоновано алгоритм впорядкування точок, спрямований на усунення дефектів, спричинених похибками сканування та цифрової обробки зображень. Наведено результати перевірки коректності запропонованого підходу до визначення кутових точок. Зокрема, представлено алгоритм відтворення зображення на прикладі пазлів, що складається з 60 елементів, який ілюструє можливості методу при роботі зі складними контурами. Досліджено вплив адаптивної жорсткості моделі на результати обчислень та характер відновлених форм, що дозволило оцінити роль параметрів згладжування у забезпеченні точності та стабільності розрахункового процесу.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у наступному:

1. **Уперше розроблено** метод коротацийних балкових сплайнів, у якому, на відміну від існуючого методу Фоулера-Вільсона, введено удавані точки та нормальні вектори, повернуті на локальний кут деформації, що дало змогу звести геометрично нелінійну задачу до ітераційної процедури лінійних

розрахунків та забезпечити побудову енергетично оптимальної кривої у формі клотоїди.

2. **Уперше запропоновано** метод адаптивного згладжування артефактів на основі моделі балки у пружному середовищі, який відрізняється від існуючих підходів використанням механізму адаптивної жорсткості локальних опор із прямою залежністю коефіцієнта зв'язку від відстані між вузлами, помноженої на розмірний параметр h^{-4} , що дало змогу забезпечити властивість рівномірної згладжуваності контуру та теоретично гарантувати ефективне усунення протяжних артефактів незалежно від щільності експериментальних даних.

3. **Удосконалено** спосіб ідентифікації кутових точок на геометричних контурах, що відрізняється від існуючих введенням критерію «локальної роботи» та використанням поняття «кутової удаваної точки» з допуском розриву кута за умови нульових моментів, що дало змогу забезпечити геометричну коректність опису контурів із розривами першого роду за кутом нахилу дотичної.

4. **Отримало подальший розвиток** математичне оцінювання схожості кривих, яке відрізняється впровадженням метрики «взаємної енергії», що дало змогу забезпечити високу достовірність зіставлення зашумлених контурів складних геометричних об'єктів.

Практичне значення одержаних результатів полягає у тому, що:

1. Розроблено обчислювально збіжний ітераційний алгоритм побудови коротаційних балкових сплайнів, який, на відміну від існуючих бібліотек апроксимації, дозволяє одночасно виконувати згладжування зашумлених даних та збереження геометричних особливостей (кутів) без перепараметризації кривої.

2. Розроблено алгоритмічне забезпечення для автоматизованої ідентифікації кутових точок на цифрових зображеннях, де використання критерію «локальної роботи» забезпечило надійну сепарацію істинних вершин від гладких ділянок за рахунок 8–30-кратного зниження значення

енергетичного функціоналу при введенні кутової удаваної точки, тоді як для неперервних ділянок цей показник змінюється лише на 10–30%.

3. Розроблено ефективну методику зіставлення криволінійних об'єктів за інтегральною метрикою «взаємної енергії» та створено програмне забезпечення для ідентифікації об'єктів за їхньою межею в умовах низької якості оцифрування. Розроблені програми передбачають використання не складних методів динамічного програмування та високовитратних переборних стратегій, а прямих розрахунків, що значно спрощує архітектуру програмних систем машинного зору при збереженні високої достовірності результатів зіставлення складних геометричних форм.

4. Впроваджено результати досліджень, здійснених автором під час роботи в рамках договору № ДНДЧ/05.02/267/24 від 26.12.2024 р. «Розробка методів та алгоритмів розрахунку напружено-деформованого стану пружних циліндричних, конічних та тороїдальних оболонок методом узгоджених січень» (Товариство з обмеженою відповідальністю «ЛІРА САПР»).

5. Наукові та практичні результати роботи впроваджено в освітній процес кафедри прикладної математики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» при проведенні лекційних занять з освітнього компонента «Геометричне моделювання» для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти за освітньо-науковою програмою «Машинне навчання та математичне моделювання» за спеціальністю F1 Прикладна математика.

Ключові слова: сплайн, згладжування, кутова точка, кривина, довжина дуги, диференційні рівняння, оптимізація, розпізнавання, обробка зображень, деформація, інтерполяція, геометричне моделювання, математичне моделювання, фільтрація зображення, дефекти.

ABSTRACT

Koltsov D. R. Corotational beam spline method for curve matching and corner point detection on images. – Qualifying scientific work as a manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in specialty 113 Applied Mathematics. – National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, 2026.

The aim of this work is to improve the accuracy and computational efficiency of geometric approximation, corner feature identification, and contour matching through the development and implementation of the corotational beam spline method.

Splines are widely used in computer-aided design (CAD) systems, computer graphics and animation, path and trajectory planning, image processing, and pattern recognition. The development of modern splines is primarily associated with CAD for aesthetic shape design, which gave rise to the formulation of spline problems as the construction of free-form curves.

The deformation of such a strip at small deflections is well described by the mathematical beam theory, which has accumulated a substantial body of knowledge actively applied in spline construction practice. These include, in particular, models of tensioned beams, beams on elastic foundations (for smoothing imprecisely specified points), beams of variable stiffness, and the ability to impose various physically motivated boundary conditions at the beam ends. A drawback of beam-based splines is that the curve assumes an explicit functional dependence of the displacement y on the coordinate x , i.e. $y = y(x)$, which limits the maximum change in tangent direction to within 180° . Extending the capabilities of such splines through the application of flexible beam theory (the so-called elastica) is hampered by the complexity of the mathematical apparatus and the efficient evaluation of elliptic integrals of various kinds. An interesting idea was proposed by Fowler and Wilson: to improve cubic interpolation splines by introducing local coordinate systems for intervals between given points, where the angles arising between them

are to be reduced to zero through appropriate deformation. This leads to a nonlinear system of equations solved iteratively. A disadvantage of this approach is the need for a large number of measurement points – for instance, constructing a circle requires at least 40 points.

The popular classical Bézier splines arose for solving design problems in the automotive industry. Their main drawback is their global nature. As a counterpart, B-spline theory was proposed, which provides local control, but B-splines do not pass through the given points. They operate with numerous auxiliary parameters – knots, their count, spacing, multiplicity, the notions of open and periodic splines, weights of individual points (NURBS) – and, as noted in the work of designers and engineers in mechanical engineering, it takes years to master the technique of building splines of optimal shape.

Moreover, these popular splining techniques do not guarantee the construction of aesthetic curves satisfying certain integral properties, in particular the integral of the squared curvature along the curve length. This criterion follows directly from beam theory and is widely applied in geometric design. Compliance with aesthetic criteria leads to the formulation and solution of complex optimization problems for classical splines, requiring optimal placement of knots and control point positions. Alternative methods include the use of analytical curves such as clothoids, elasticae, and log-aesthetic curves. However, these require analytical integration procedures and segment joining, and cannot serve as a universal tool but only as transitional zones between specified points and directions.

A significant problem of geometric modeling is the smoothing of measured points. This problem arises in processing results from industrial object scanning for technical condition assessment, in reverse engineering, pattern recognition, and in medical applications. When the spacing between measurement points is large, classical B-splines can be used, albeit requiring adaptation to account for varying inter-point distances (measurement point density). When the spacing is smaller than measurement errors, the application of cubic splines or B-splines requires preliminary segmentation, processing of individual segments, overlapping them

with different weights, and only then smoothing. Consequently, geometric modelling almost always employs (kernel-based) Gaussian smoothing, which is considered inefficient in statistical applications but remains virtually without alternative for geometric tasks. Such approaches are not adaptive to inter-point distance, are applied separately to the y and x coordinates, and at higher smoothing levels reduce the scale of the resulting figure.

As can be seen, fundamentally different methods are applied for the practically important tasks of interpolation, design, and smoothing, although in practice the distinction between their formulations can be difficult to discern (as measurement error and point density decrease, the smoothing problem transitions into interpolation).

Thus, it is important to develop a universal method that would be equally effective for design tasks (the most aesthetic curve), interpolation tasks, and smoothing tasks. Beam-based splines possess many obvious advantages, including exact passage through given control points, compliance with arbitrarily formulated boundary conditions, adaptive smoothing parameters, and the use of segments with different flexibility properties. Therefore, building on past achievements in beam spline theory and the effective idea of Fowler–Wilson regarding the use of local coordinates (implicit representation of the relationship between coordinates) can provide a solid foundation for a new direction in linear spline theory – the corotational beam spline.

The first chapter of the dissertation provides a justification for the relevance of geometric modelling and smoothing of complex-shaped contours arising in computational geometry, image processing, and computer-aided design. The significance of constructing smooth interpolation curves for shape recovery tasks is demonstrated, particularly in the analysis and reconstruction of puzzles. The basic concepts of spline fairness are reviewed, and requirements for the quality of geometric curves are formulated, including derivative continuity, curvature behaviour, and energy-based smoothness criteria. An overview of classical spline construction methods is presented, including cubic interpolation splines and Bézier

curves, and their capabilities and limitations in modelling complex geometric shapes are examined. Modern approaches to contour identification and matching are analysed, which are used to determine the correspondence of geometric elements and their application in automatic assembly and analysis of composite structures. Based on this analysis, the research problem is formulated, the main directions for method development are defined, and requirements for the mathematical model ensuring the construction of smooth and physically consistent curves are outlined.

The second chapter is devoted to the development of the general mathematical model of the corotational beam spline and the investigation of its interpolation properties. The fundamental idea of the method is formulated, consisting in the modification of the classical beam approach through the introduction of additional (dummy) points that enable controlled variation of local curvature and ensure the stability of the computational process. A new approach to determining the normal direction of the deformed curve is proposed, ensuring continuity of the slope and consistency of geometric parameters between adjacent spline segments. An algorithm for computing the corotational beam spline is developed, which involves successive refinement of the curve geometry through iterative adjustment of system parameters. The iteration procedure and conditions for achieving a stabilised solution are described. The capabilities of the method with regard to interpolation are demonstrated on the example of an ellipse with a semi-axis ratio of 2:1, which is a nontrivial test object given that its curvature varies along the contour by a factor of 8. The problem of rectangle interpolation without explicit specification of corner points is also considered, demonstrating the method's ability to correctly recover shape and perform natural smoothing of corner regions. For comparison, results of contour construction using a parametric spline are presented, which provides acceptable approximation quality but requires additional procedures for determining the parameter t , complicating practical application. Separately, the C^1 interpolation problem – the Hermite problem – is considered, in which curve construction between two given points is investigated for symmetric, asymmetric, and non-symmetric

configurations under various boundary conditions. A comparative analysis of the results with Bézier curves and a geometrically nonlinear beam model is carried out.

The third chapter is devoted to the investigation of the approximation properties of the corotational beam spline. The concept of the distance between input discrete points and the approximating contour is introduced and used as a convergence criterion for the iterative process. The problem of circle recovery from a discrete set of points with various levels of random perturbation is investigated. A comparison with existing approaches for the problem of circular arc reconstruction from five points is performed, where the corotational beam spline method produced results comparable to known solutions. Additionally, examples of recovering more complex geometric shapes are presented, and the influence of the model compliance parameter on the nature of the obtained solutions and the stability of the computational process is examined.

The fourth chapter is devoted to the development of theoretical foundations and practical algorithms for applying the corotational beam spline to the processing and reproduction of real object contours. The chapter begins with theoretical derivations related to the introduction of an adaptive smoothing parameter and the concept of a virtual corner point, which enables the description of local geometric features of a contour without explicitly imposing smoothness discontinuities. Curve matching criteria based on curvature differences are proposed, and a method for corner point detection based on the analysis of local work is developed. The formation of input data for the corotational beam spline algorithm is discussed. A method for scanning puzzles and the procedure for obtaining a discrete set of contour points, used as initial geometric information, are described. An algorithm for point ordering aimed at eliminating defects caused by scanning and digital image processing errors is proposed. Results verifying the correctness of the proposed corner point detection approach are presented. In particular, an algorithm for image reconstruction using a 60-piece puzzle is demonstrated, illustrating the method's capabilities in working with complex contours. The influence of the model's adaptive stiffness on the computational results and the character of the recovered

shapes is examined, enabling an assessment of the role of smoothing parameters in ensuring accuracy and stability of the computational process.

The scientific novelty of the results is as follows:

1. **For the first time**, the corotational beam spline method is developed, in which, unlike the existing Fowler–Wilson method, dummy points and normal vectors rotated by the local deformation angle are introduced, enabling the reduction of the geometrically nonlinear problem to an iterative procedure of linear computations and ensuring the construction of an energetically optimal curve in the form of a clothoid.

2. **For the first time**, a method of adaptive artefact smoothing based on the beam-on-elastic-foundation model is proposed, which differs from existing approaches by employing an adaptive stiffness mechanism for local supports with a direct dependence of the coupling coefficient on the inter-nodal distance multiplied by a dimensional parameter h^{-4} , ensuring uniform smoothing of the contour and theoretically guaranteeing effective elimination of extended artefacts regardless of the density of experimental data.

3. The method of corner point identification on geometric contours is **improved**, differing from existing approaches by introducing a "local work" criterion and the concept of a "corner dummy point" with permitted angle discontinuity under zero-moment conditions, ensuring geometric correctness in describing contours with first-order discontinuities in the tangent angle.

4. Mathematical assessment of curve similarity is **further developed** by introducing a "mutual energy" metric, ensuring high reliability of matching noisy contours of complex geometric objects.

The practical significance of the obtained results is as follows:

1. A computationally convergent iterative algorithm for constructing corotational beam splines has been developed. Unlike existing approximation libraries, it enables simultaneous smoothing of noisy data and preservation of geometric features (corners) without curve reparametrization.

2. Algorithmic tools for automated identification of corner points in digital images have been developed, where the use of the "local work" criterion ensured reliable separation of true vertices from smooth segments due to an 8–30-fold reduction in the energy functional value upon introduction of a corner dummy point, whereas for continuous segments this value changes by only 10–30%.

3. An efficient methodology for comparing curvilinear objects using the integral "mutual energy" metric has been developed, along with software for object identification by their boundary under low-quality digitization conditions. The developed software avoids complex dynamic programming methods and computationally expensive exhaustive search strategies, relying instead on direct calculations, which significantly simplifies the architecture of computer vision systems while maintaining high reliability of complex geometric shape matching results.

4. The research results have been implemented within the framework of contract № ДНДЧ/05.02/267/24 dated December 26, 2024, "Development of methods and algorithms for stress-strain state analysis of elastic cylindrical, conical, and toroidal shells using the method of consistent cross-sections" (LIRA SAPR LLC).

5. The scientific and practical results of the work have been implemented in the educational process of the Department of Applied Mathematics at the National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute" for lecture courses in the "Geometric Modelling" discipline for students of the second (Master's) level of higher education under the educational and research program "Machine Learning and Mathematical Modelling," specialty F1 Applied Mathematics.

Keywords: spline, smoothing, corner point, curvature, arc length, differential equations, optimization, recognition, image processing, deformation, interpolation, geometric modeling, mathematical modelling, image filtering, defects.

Список публікацій здобувача

1. Orynyak I., Koltsov D., Chertov O., Mazuryk R. Application of beam theory for the construction of twice differentiable closed contours based on discrete noisy points. System research and information technologies. 2022, N4. doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2022.4.10 (Scopus, WOS, Q4)

Orynyak I. – визначення загального плану статті та постановка задачі

Koltsov D. – модифіковано метод Фоулера-Вільсона, запропоновано метод удаваної точки, спосіб визначення відстані Π та корегування вектора нормалі. Реалізовано алгоритм та проведено розрахунки

Chertov O. – запропоновано алгоритм корегування кривини

Mazuryk R. – реалізований МПП та ітераційну процедуру

2. Orynyak I., Yablonskyi P., Koltsov D., Chertov O., Mazuryk R. Fairness of 2D corotational beam spline as compared with Geometrically nonlinear elastic beam. System research and information technologies, 2024, N3, doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2024.3.07 (Scopus, WOS, Q4)

Orynyak I. – визначення загального плану статті та постановка задачі

Yablonskyi P. – запропоновано критерій якості й нормалізованої якості

Koltsov D. – застосовано метод КБС для C^1 задачі Ерміта проведено розрахунки для КБС та зроблено порівняння

Chertov O. – проведено розрахунки для методу Безьє

Mazuryk R. – проведено розрахунки для методу ГНБ

3. Д.Р. Кольцов, І.В. Ориняк, Укладання неточно оцифрованого безколірного пазла по кривизні контурів за допомогою коротаційного балкового сплайна. Журнал обчислювальної та прикладної математики, 2025, № 2 doi.org/10.17721/2706-9699.2025.2.01 (Фахове видання)

Кольцов Д. – розроблено метод обробки контурів на зображеннях та застосування КБС для зіставлення частин зображення за допомогою критерію якості

Ориняк І. – визначення загального плану статті та постановка задачі

4. І.В. Ориняк, Д.Р. Кольцов, Д.Ю. Тавров, Метод визначення кутових точок на зображеннях за допомогою коротаційного балкового сплайна. Наукові вісті КПП, № 1, 2026. doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.349268 (Фахове видання)

Ориняк І. – визначення загального плану статті та постановка задачі

Кольцов Д. – запропоновано та реалізовано метод пошуку та уточнення кутових точок за допомогою коротаційного балкового сплайна

Тавров Д. – запропонував алгоритм побудови наближеного контуру та брав участь у визначенні загального плану статті та постановки задачі

5. Ігор Ориняк, Дмитро Кольцов, Роман Мазурик (2023). Порівняння плоских балкового коротаційного сплайна і геометрично нелінійної балки. Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики - 2023", Львів. Збірник наукових праць / за заг. ред. акад. НАН України Р.М. Кушніра та чл.-кор. НАН України В.О. Пелиха [Електронний ресурс] // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2023. – 454 с. С. 393.

Ориняк І. – визначення загального плану статті та постановка задачі

Кольцов Д. – проведено розрахунки для КБС та зроблено порівняння

Мазурик Р. – проведено розрахунки для методу ГНБ

6. Роман Мазурик, Дмитро Кольцов, Ігор Ориняк (2025). Геометрично-нелінійні балки в задачах побудови сплайнів оптимальної форми. Матеріали XIII Міжнародної науково-практичної конференції "прикладна геометрія, інженерна графіка та об'єкти інтелектуальної власності", 2025, doi.org/10.20535/ngikg2024.XIII.310158

Мазурик Р. – проведено розрахунки для методу ГНБ

Кольцов Д. – проведено розрахунки для КБС та зроблено порівняння

Ориняк І. – визначення загального плану статті та постановка задачі

7. Igor Orynyak, Roman Mazuryk, Dmytro Koltsov, Yurii Kuznetsov, Julius Lubinskis, Smoothing the pipeline noisy point positions by corotational beam spline, Pipeline Technology Conference 2024, Proceedings (ISSN 2510-6716)

<https://www.pipeline-conference.com/abstracts/smoothing-pipeline-noisy-point-positions-corotational-beam-spline>

Orynyak I. – визначення загального плану статті та постановка задачі

Mazuryk R. – проведено попередню обробку даних

Koltsov D. – проведено розрахунки для теоретичних тестів та реальних даних за допомогою методу КБС

Kuznetsov Y. – Запропоновано ідею вбудованої кривини для врахування початкової кругової конфігурації

Lubinskis J. – досліджено розповсюдження похибок

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ ТА ПОЗНАЧЕНЬ	22
ВСТУП	23
РОЗДІЛ 1. АКТУАЛЬНІСТЬ ЗАДАЧІ ТА АНАЛІЗ ІСНУЮЧИХ РІШЕНЬ	31
1.1 Актуальність проблеми	31
1.2 Поняття і критерії добротності сплайнів	35
1.3 Балкові та клотоїдні сплайни	40
1.4 Методи згладжування контурів	46
1.5 Методи ідентифікації кутових точок	50
Висновки за розділом 1	53
РОЗДІЛ 2. МЕТОД КОРОТАЦІЙНОГО БАЛКОВОГО СПЛАЙНА ДЛЯ ЗАДАЧ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ	55
2.1 Коротаційний балковий сплайн для задач інтерполяції	55
2.2 Загальний алгоритм та постобробка результатів	64
2.3 Загальні властивості коротаційного балкового сплайна	69
2.4 Задачі інтерполяції	79
2.5 C1 задача Ерміта	84
Висновки за розділом 2	97
РОЗДІЛ 3. МЕТОД КОРОТАЦІЙНОГО БАЛКОВОГО СПЛАЙНА ДЛЯ ЗАДАЧ АПРОКСИМАЦІЇ	99
3.1 Коротаційний балковий сплайн для задач апроксимації	99
3.2 Задачі апроксимації	102
Висновки за розділом 3	115

РОЗДІЛ 4. МЕТОД КОРОТАЦІЙНОГО БАЛКОВОГО СПЛАЙНА ДЛЯ ЗАДАЧ РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ НА ПРИКЛАДІ БЕЗКОЛІРНИХ ПАЗЛІВ	118
4.1 Застосування коротаційного балкового сплайна для згладжування густих точок	118
4.1.1 Адаптивний параметр згладжування	119
4.1.2 Алгоритм зіставлення контурів	122
4.1.3 Поняття роботи в околі точки.....	123
4.1.4 Кутова удавана точка	124
4.2 Програмне забезпечення для обчислень методом КБС та автоматизованого збирання пазлів.....	128
4.3 Сканування пазла, обробка зображення та контуру.....	132
4.4 Виділення кутових точок на прикладі пазла.....	136
4.5 Укладання пазла шляхом зіставлення контурів	148
Висновки за розділом 4.....	159
ВИСНОВКИ	161
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	163
ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ.....	176
ДОДАТОК Б. ДОВІДКА ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ	179

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ ТА ПОЗНАЧЕНЬ

КБС – коротаційний балковий сплайн

ГНБ – геометрично нелінійна балка

БЗ – Сплайн Безьє

КМЕ – крива мінімальної енергії

МПП – метод початкових параметрів

$W(s)$ – переміщення

$\theta(s)$ – кут повороту

$M(s)$ – згинальний момент

$Q(s)$ – поперечна сила

$A_i^j(X_i^j, Y_i^j)$ – розрахункові точки i , на j -ій ітерації

$B_i^j(X_i^j, Y_i^j)$ – дискретні вхідні точки

s – локальна координата вздовж відрізка

$\vec{n}_i$ – нормальний вектор

$\vec{t}_i$ – дотичний вектор

C_i – жорсткість пружної опори

D_i – податливість

Π_i – відстань між вхідними та розрахунковими точками

$\kappa_d(s)$ – локальна кривина

E – якість кривої

$E_{a,b}$ – критерій зіставлення кривих на основі якості

h – адаптивний параметр згладжування

R_{int} – локальна інтегральна робота

ВСТУП

Сплайни широко застосовуються в системах автоматизованого проєктування, САПР, в комп'ютерній графіці і анімації, для прокладання шляхів і траєкторій, для обробки зображень і в задачах розпізнавання образів. Розвиток сучасних сплайнів пов'язаний в першу чергу з САПР для естетичного проєктування геометричної форми. Власне звідси і виникла постановка задачі сплайнів як побудова кривих вільної форми. Термін сплайн виник з назви гнучкої дерев'яної дошки, деформація якої при заданих обмеженнях і навантаженнях описувала гладку до другої похідної криву красивої форми. Оскільки її деформування при невеликих відхиленнях гарно описується математичною теорією балки, то ця теорія, що оперує кубічними поліномами була дуже популярною.

Теорія балки має дуже багато напрацювань, які активно впроваджувалися в практику побудови сплайнів. Це зокрема, натягнуті балки, балки на пружних опорах (для згладжування неточно заданих точок), балки змінної жорсткості, можливість задання різних граничних умов на кінцях балки тощо. Недоліком балкових сплайнів є те, що крива передбачає явну форму залежності переміщення y від координати x , тобто $y = y(x)$, що обмежує максимальну зміну напрямку дотичної до неї (кут повороту) в межах до 180° . Розширення можливостей таких сплайнів шляхом застосування теорії гнучких балок (так званої еластики), стримується складністю математичного апарату і ефективних рішень для еліптичних інтегралів різного виду. Цікавою є ідея Фоулера-Вільсона покращити кубічні інтерполяційні сплайни шляхом введення локальних координат для ділянок між заданими точками, причому кути, що виникають між ними, мають бути зведені до нуля шляхом відповідного деформування цих ділянок. Це призводить до формування нелінійної системи рівнянь, що розв'язуються ітераційно. Недоліком такого підходу є необхідність задання великої кількості точок вимірювання, наприклад, побудова кола вимагає як мінімум 40 точок.

Популярні класичні сплайни Безьє виникли для розв'язання задач проєктування в автомобілебудуванні. Основним недоліком є їхній глобальний характер. Грубо кажучи, якщо ми маємо криву N -го порядку, то зміна положення, скажімо на вектор Δ певної контрольної точки призводить до відхилення сплайна всього на величину трохи більшу за Δ/N біля цієї точки і на подібну зміну в околі всіх інших точок (за винятком граничних). Це утруднює побудову і корекцію кривої. Як противага їм була запропонована теорія В-сплайнів, що мають локальний характер, але і вони не проходять через задані точки. Вони оперують дуже багатьма допоміжними параметрами, вузлами, їх кількість, відстані між ними, їх кратність, поняття відкритих і періодичних сплайнів, ваги окремих точок (NURBS) – і, як відзначається в роботах конструкторів і дизайнерів в машинобудуванні – потрібні роки, щоб опанувати техніку побудови сплайнів оптимальної форми.

Щобільше, ці популярні техніки сплайнування не гарантують побудову естетичних кривих, що мають певні інтегральні властивості, зокрема інтеграл по довжині від квадрата кривини. Цей критерій прямо впливає з теорії балок і широко застосовується в геометричному проєктуванні. Відповідність критеріям естетичності вимагає постановки і розв'язання складної задачі оптимізації форми для класичних сплайнів, що вимагає пошуку оптимального розміщення вузлів і положень контрольних точок. Альтернативними методами є застосування аналітичних кривих, таких як клотоїди, еластики, лог-естетичних кривих. Проте вони вимагають аналітичних процедур інтегрування, «склеювання ділянок», і не можуть бути універсальним засобом, а можуть застосовуватися лише як певні перехідні зони між заданими точками і напрямками.

Значною проблемою геометричного моделювання є згладжування замірених точок. Така задача виникає для обробки результатів сканування промислових об'єктів з метою оцінки їх технічного стану, для задач реверсної інженерії, розпізнавання образів, в тому числі для медицини. Коли відстані

між точками заміру велика, то можна застосовувати класичні В-сплайни, які необхідно адаптувати для врахування різної відстані між точками (густини точок вимірювання). Коли відстань між точками заміру менша, ніж похибки вимірювань, то застосування кубічних сплайнів, чи В-сплайнів вимагає попередніх процедур сегментації, обробки окремих сегментів, потім накладання їх з різними вагами, і лише потім згладжування. Тому для геометричного моделювання майже завжди застосовується Гаусівське (на основі ядер) згладжування. І хоча в статистичних застосуваннях воно вважається неефективним, проте для геометричних задач є майже безальтернативним. Такий підхід не є адаптивним до відстані між точками вимірювань, що спотворює кривину, як основної характеристики кривої. Така процедура застосовується окремо до кожної із координат y та x , тому при збільшенні згладжування зменшується масштаб отриманої фігури. Це породжує значні проблеми для задач комп'ютерного зору, коли виникає необхідність зіставлення кривих (curve matching) по їх кривині.

Як бачимо, для практично важливих задач інтерполяції, дизайну та згладжування застосовуються зовсім різні методи, хоча на практиці буває важко зрозуміти різницю в їхніх постановках (при зменшенні похибки і густини точок вимірювань задача згладжування переходить в інтерполяцію).

Таким чином, важливим є створення універсального методу, який би однаково чиним був ефективним для задач дизайну (найестетичніша крива), задач інтерполяції та задач згладжування. Зрозуміло, що балкові сплайни мають багато суттєвих переваг, зокрема, щодо точного проходження сплайна через задані контрольні точки, відповідності довільно сформульованим граничним умовам, застосування адаптивних параметрів згладжування, застосування ділянок різних властивостей гнучкості. Тому врахування минулих здобутків в теорії балкових сплайнів, ефективної ідеї Фоулера-Вільсона щодо використання локальних координат (неявного представлення залежності між координатами) може стати солідною основою створення

нового напрямку в теорії лінійних сплайнів, а саме коротаційного балкового сплайна.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалася на кафедрі прикладної математики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

Дисертація включає результати досліджень і розробок, здійснених автором під час роботи в рамках договору № ДНДЧ/05.02/267/24 від 26.12.2024 р. «Розробка методів та алгоритмів розрахунку напружено-деформованого стану пружних циліндричних, конічних та тороїдальних оболонок методом узгоджених січень» (Товариство з обмеженою відповідальністю «ЛІРА САПР»).

Мета та задачі дослідження. Метою роботи є підвищення точності та обчислювальної ефективності процесів геометричної апроксимації, ідентифікації кутових особливостей та зіставлення контурів на основі розробки та впровадження методу коротаційного балкового сплайна.

Для досягнення вказаної мети у даній дисертаційній роботі вирішуються такі задачі:

1. Проаналізувати наявні сплайнові методи та підходи до обробки контурів, виявивши їхні обмеження при роботі з зашумленими даними та складними геометричними формами.

2. Сформулювати математичний опис методу коротаційних балкових сплайнів через неявне подання моделі, використання удаваних точок та нормальних векторів, повернутих на локальний кут деформації, для ітераційної лінеаризації задачі.

3. Розробити метод адаптивного згладжування артефактів оцифрування, використовуючи модель балки на пружній основі з регульованими параметрами жорсткості.

4. Розробити спосіб виявлення кутових особливостей контуру через введення метрики «локальної роботи» та поняття «кутової удаваної точки», що

допускає розрив нахилу дотичної при збереженні статичної визначеності моделі.

5. Розробити алгоритм зіставлення кривих на основі інтегральної метрики «взаємної енергії».

6. Здійснити експериментальну перевірку розроблених методів на прикладній задачі зіставлення фрагментів пазлів, підтвердивши його ефективність.

Об'єктом дослідження є процеси геометричного моделювання криволінійних об'єктів та аналізу контурів у задачах цифрової обробки зображень і розпізнавання образів.

Предметом дослідження є метод коротаційних балкових сплайнів, алгоритми обчислювальної лінеаризації, методи ідентифікації кутових точок та метрики зіставлення криволінійних об'єктів.

Методи дослідження. Для досягнення поставленої мети та розв'язання визначених задач у роботі використано такі методи: метод математичного моделювання та механіко-геометричних аналогій (для формалізації методу коротаційних балкових сплайнів); чисельні методи та ітераційні алгоритми лінеаризації (для розв'язання нелінійної системи рівнянь Фоулера-Вільсона); методи механіки матеріалів (для розробки алгоритму адаптивного згладжування артефактів оцифрування); методи цифрової обробки зображень та обчислювальної математики (при розробці інтегральної метрики «взаємної енергії» для порівняння та зіставлення кривих); метод обчислювального експерименту (для верифікації розроблених математичних методів).

Наукова новизна отриманих результатів. Наукова новизна одержаних результатів полягає у наступному:

1. **Уперше розроблено** метод коротаційних балкових сплайнів, у якому, на відміну від існуючого методу Фоулера-Вільсона, введено удавані точки та нормальні вектори, повернуті на локальний кут деформації, що дало змогу звести геометрично нелінійну задачу до ітераційної процедури лінійних

розрахунків та забезпечити побудову енергетично оптимальної кривої у формі клотоїди.

2. **Уперше запропоновано** метод адаптивного згладжування артефактів на основі моделі балки у пружному середовищі, який відрізняється від існуючих підходів використанням механізму адаптивної жорсткості локальних опор із прямою залежністю коефіцієнта зв'язку від відстані між вузлами, помноженої на розмірний параметр h^{-4} , що дало змогу забезпечити властивість рівномірної згладжуваності контуру та теоретично гарантувати ефективне усунення протяжних артефактів незалежно від щільності експериментальних даних.

3. **Удосконалено** спосіб ідентифікації кутових точок на геометричних контурах, що відрізняється від існуючих введенням критерію «локальної роботи» та використанням поняття «кутової удаваної точки» з допуском розриву кута за умови нульових моментів, що дало змогу забезпечити геометричну коректність опису контурів із розривами першого роду за кутом нахилу дотичної.

4. **Отримало подальший розвиток** математичне оцінювання схожості кривих, яке відрізняється впровадженням метрики «взаємної енергії», що дало змогу забезпечити високу достовірність зіставлення зашумлених контурів складних геометричних об'єктів.

Практичне значення одержаних результатів полягає у тому, що:

1. Розроблено обчислювально стійкий ітераційний алгоритм побудови коротаційних балкових сплайнів, який, на відміну від існуючих бібліотек апроксимації, дозволяє одночасно виконувати згладжування зашумлених даних та збереження геометричних особливостей (кутів) без перепараметризації кривої.

2. Розроблено алгоритмічне забезпечення для автоматизованої ідентифікації кутових точок на цифрових зображеннях, де використання критерію «локальної роботи» забезпечило надійну сепарацію істинних вершин від гладких ділянок за рахунок 8–30-кратного зниження значення

енергетичного функціоналу при введенні кутової удаваної точки, тоді як для неперервних ділянок цей показник змінюється лише на 10–30%.

3. Розроблено ефективну методику зіставлення криволінійних об'єктів за інтегральною метрикою «взаємної енергії» та створено програмне забезпечення для ідентифікації об'єктів за їхньою межею в умовах низької якості оцифрування. Розроблені програми передбачають використання не складних методів динамічного програмування та високовитратних переборних стратегій, а прямих розрахунків, що значно спрощує архітектуру програмних систем машинного зору при збереженні високої достовірності результатів зіставлення складних геометричних форм.

4. Впроваджено результати досліджень, здійснених автором під час роботи в рамках договору № ДНДЧ/05.02/267/24 від 26.12.2024 р. «Розробка методів та алгоритмів розрахунку напружено-деформованого стану пружних циліндричних, конічних та тороїдальних оболонок методом узгоджених січень» (Товариство з обмеженою відповідальністю «ЛІРА САПР»).

5. Наукові та практичні результати роботи впроваджено в освітній процес кафедри прикладної математики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» при проведенні лекційних занять з освітнього компонента «Геометричне моделювання» для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти за освітньо-науковою програмою «Машинне навчання та математичне моделювання» за спеціальністю F1 Прикладна математика.

Особистий внесок здобувача. Усі основні результати дисертаційного дослідження, представлені до захисту, одержані автором особисто. У публікаціях у співавторстві, здобувачеві належать такі результати: в [1] модифіковано метод Фоулера-Вільсона, запропоновано метод удаваної точки, спосіб визначення відстані Π та корегування вектора нормалі. Реалізовано алгоритм та проведено розрахунки; в [2] застосовано метод КБС для C^1 задачі Ерміта проведено розрахунки для КБС та зроблено порівняння з іншими методами; в [3] розроблено метод обробки контурів на зображеннях та

застосування КБС для зіставлення частин зображення за допомогою критерію якості; в [4] запропоновано та реалізовано метод пошуку та уточнення кутових точок за допомогою коротаційного балкового сплайна.

Апробація результатів дисертації. Результати та основні положення роботи подавалися та обговорювалися на таких конференціях:

- Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики - 2023", Львів. Інститут прикладних проблем механіки і математики. 23-25 травня, 2023.
- XIII Міжнародної науково-практичної конференції "прикладна геометрія, інженерна графіка та об'єкти інтелектуальної власності", Київ. кафедра нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки. 12 червня, 2024
- Pipeline Technology Conference 2024, Німеччина. 27-30 квітня, 2024
- **Публікації.** За результатами досліджень опубліковано 7 наукових робіт, в тому числі **4 статті**, 2 з яких включено до переліку міжнародної наукометричної бази **Scopus з квантилями Q4**

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 124 найменувань. Загальний обсяг роботи складає 180 сторінок, з яких 140 сторінок основного тексту, 13 сторінок використаних джерел, 5 сторінок додатків. Робота містить 52 рисунки, 18 таблиць.

РОЗДІЛ 1. АКТУАЛЬНІСТЬ ЗАДАЧІ ТА АНАЛІЗ ІСНУЮЧИХ РІШЕНЬ

1.1 Актуальність проблеми

Лінійні сплайни є основою сучасних методів створення, обробки, аналізу і зберігання візуальної, геометричної і графічної інформації. Умовно задачі застосування лінійних сплайнів можна поділити на три групи – дизайну, інтерполяції та апроксимації (згладжування даних вимірювань). Лінійні сплайни широко застосовуються в системах автоматичного проєктування, САПР, для побудови віртуальних геометричних моделей тіл, що проєктуються чи аналізуються методами математичної фізики; в комп'ютерній графіці для створення зображень, їх анімації, шрифтів тощо; в дорожньому будівництві для прокладання шляхів; в робототехніці для розрахунку оптимальних траєкторій руху роботів, дронів, машин і для їх відстежування і корекції положення; для обробки цифрових зображень [5, 6], зокрема для згладжування контурів і в задачах розпізнавання образів.

Задачі проєктування об'єктів складної форми мають багатовікову історію: ще в давнину для виготовлення корабельних шпангоутів застосовували багаторазові шаблони [7]. Сам термін «сплайн», яким позначали гнучку дерев'яну рейку, що під дією прикладених вантажів і закріплень набувала певної фіксованої геометричної форми, було введено англійськими кораблебудівниками ще у XVII столітті [8].

Виникнення інженерних сплайнів як математичних об'єктів пов'язують з двома французькими інженерами-автомобілебудівниками: П'єр Безьє працював у компанії «Рено», а Поль де Кастельжо — у компанії «Сітроен». Їхні розробки тривалий час залишалися засекреченими, проте за суттю виявилися подібними: Безьє запропонував математичний апарат (відомий тепер як сплайни Безьє), а де Кастельжо — його геометричне тлумачення [4]. Ідеї побудови базувалися на поліномах Бернштейна (математик початку 20-го століття з Харківською університету).

Системи геометричного проектування довго й непросто утверджувалися на ринку проектних послуг. Цьому заважала ціла низка чинників: масштабність самої задачі, складність процесу, технічні труднощі, висока вартість виходу на ринок, тривалий період амортизації та гостра конкуренція — і це попри потенційно високу ефективність таких систем. Саме тому перші визначні дослідження стосувалися насамперед «трьох великих галузей систем автоматичного проектування, а саме: автомобільної, аерокосмічної та морського машинобудування» [9].

Недоліком сплайнів Безьє є їхня глобальність. Тобто вони оперують базисними функціями з невідомими коефіцієнтами (ступені вільності, так звані контрольні точки), де ці базисні функції є ненульовими для усього проміжку визначення функції. Зміна положення (координат) однієї з контрольних точок призводить до глобальної зміни всього сплайна, а не лише невеликого околу біля цієї точки.

Першою серед комерційних систем геометричного проектування стала програма «Автокон», розроблена на основі балкових сплайнів для потреб кораблебудування. Її автор, Мехлум, уперше розглянув не лише балку як основу для побудови сплайнів, а й фактично ввів у розгляд пружинні опори між ділянками сплайна (стрибок третьої похідної пропорційний значенню самої функції) [10]. Проте криві NURBS не гарантують проходження кривої через задану точку, а також ці сплайни не дають естетично красивих кривих та вимагають подальшої обробки і оптимізації.

Найпоширенішими в системах автоматичного (геометричного) проектування є B-сплайни, а також їхня модифікація з ваговими коефіцієнтами для контрольних точок — так звані нерівномірні раціональні криві (NURBS). Ідея B-сплайнів полягає в створенні локальної системи базисних функцій різного порядку, де вищий порядок створюється ітераційно з двох сусідніх функцій нижчого порядку, шляхом множення їх на лінійно змінні функції так, що принцип розділення одиниці зберігається, так званий алгоритм Кокса-Де Бура [11, 12]. Перевагою B-сплайнів та NURBS є їхня локальність — зміна

положення контрольної точки в сплайні n –порядку призводить до зміни сплайна в околі такої ж кількості точок. Проте застосування NURBS не гарантує проходження кривої через задану точку, а головне ці сплайни не дають естетично красивих кривих і вимагають подальшої обробки і оптимізації.

Задачі інтерполяції тісно пов'язані з задачами дизайну, оскільки використовують подібні інструменти побудови кривої як і задачі дизайну [13]. Вони є важливими в дорожньому будівництві, плануванні траєкторій і шляхів для роботів [14], обробки результатів геометричних вимірювань, де точки вимірювань розміщені далеко одна від одної [15]. Тут також важливим є питання оптимізації отриманої форми [16] і досягнення того, щоб характеристики кривини кривих були якомога меншими, адже великі кривини суттєво обмежують можливості машин і роботів по швидкості проходження ділянки [17]. Тому в цих задачах часто застосовуються спеціальні методи побудови геометрії, які ґрунтуються на використанні гладких функцій, де кривина задається аналітично, таких як клотоїди, логарифмічно естетичні криві тощо. Недоліком їх є аналітична складність, що для отримання кривої вимагає двічі інтегрувати кривину, і обмеженість до невеликої кількості практичних випадків, кожен з яких аналізується окремо.

Задачі згладжування в геометричному моделюванні мають велике значення для розпізнавання образів і зіставлення об'єктів, обробки результатів лазерного сканування в геодезії [18], мають застосування для аналізу томографічних та рентгенівських знімків в медицині [19]; сканування і зіставлення положення промислових об'єктів в різні моменти часу для оцінки його стану та деградації [20]; для реверсної інженерії в тому числі для медичних цілей (протези) [21], та інше. Звичайно точки даються з певними похибками (обробка сигналів, зображень, вимірів). Зрозуміло, що отримана крива має проходити біля, а не через задані точки, яких може бути дуже велика кількість. Інтерполяція дає величезну кількість гострих зубців і є неприпустимою. Коли відстані між точками заміру є великими, то можна

застосовувати В-сплайни, але потрібно розробляти адаптивні сплайни, які мають враховувати різну відстань між точками. Коли відстань між точками (значно) менша, ніж похибки вимірювань, то застосування кубічних сплайнів [23], чи В-сплайнів вимагає попередніх процедур сегментації, обробки їх, потім накладання сегментів з різними вагами, і лише потім згладжування. В певному сенсі задачі апроксимування в геометричному моделюванні нагадують постановки задач в статистичній обробці даних, наприклад, фізичних експериментів. Останні найчастіше використовують кубічні сплайни на основі В-сплайнів і застосовують для згладжування функціонали виду [23-26]:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^I (W_i - Y_i)^2 + \lambda \int_0^L W''(s)^2 ds = \min, \quad (1.1)$$

де Y_i – заміряне (статистичне) експериментальне значення функції в точці t_i , $W(s)$ – розрахункова крива, як мета аналізу, W_i значення функції $W(s)$ в точці s_i . Ця формула встановлює баланс між відхиленнями кривої від заданих точок і збереженням гладкості кривої, бо друга похідна може (умовно) інтерпретуватися як кривина кривої. Знову ж таки, це значно ускладнює застосування класичних сплайнів і робить неможливим використання поліномів типу Лагранжа чи рядів Фур'є. Проте в геометричному моделюванні такі підходи складно застосовувати, адже координати точок сплайни звичайно розглядаються в параметричній постановці, тобто як дві незалежні функції від параметра t , і незрозуміло як трактувати заміряне положення Y_i . Окрім того, заміряні точки є неупорядкованими (непронумерованими), а техніка В-сплайнів вимагає впорядкованості. Тому в геометричному моделюванні найпопулярнішими є застосування Гаусівського згладжування [27].

Таким чином, геометричні задачі дизайну, інтерполяції та апроксимації в літературі дуже часто розглядаються як незалежні, і зазвичай обробляються

принципово різними підходами – сплайни на основі поліномів; аналітичні криві; інтегральне згладжування за допомогою певних аналітичних ядер, відповідно. Але всі ці задачі залежно від конкретних умов дуже часто є нероздільними і переходять одна в одну, наприклад, зі зменшенням густини вимірених точок і збільшення точності їх вимірювань. Окрім того, важливим є відповідність побудованих кривих певним критеріям оптимальності. Розглянемо їх нижче.

1.2 Поняття і критерії добротності сплайнів

Очевидно, що постановка задачі про сплайни не є однозначною для усіх трьох груп застосувань (дизайн, інтерполяція, апроксимація). Для заданих умов можна провести безліч кривих і завжди стає питання – наскільки правильно та оптимально розв'язана задача? Це питання однаково хвилює і художників і дослідників. Прикладом може слугувати ще XVIII століття — праця відомого англійського художника та теоретика мистецтва Вільяма Гогарта «The Analysis of Beauty», у якій у доступній формі викладено теорію візуальної краси та грації. Центральне місце в ній посідає концепція «лінії краси» (line of beauty), що, за Гогартом, має форму латинської літери «S». Варто зазначити, що цю літеру можна інтерпретувати як ділянку клотоїди — кривої, яка в сучасній теорії геометричного моделювання вважається однією з найбільш «добротних» (fairest) серед усіх плоских кривих, оскільки її кривина змінюється лінійно вздовж довжини дуги.

Проте точне формулювання поняття добротності неможливе, оскільки в різних застосуваннях криві мають свою специфіку, умови та призначення. Зазначаючи, що повною характеристикою кривої є залежність кривини від довжини дуги, у роботі [29] наведено детальний огляд визначень та коментарів щодо добротної кривої. Наведемо кілька цитат із цієї роботи.

У книзі «Aesthetic Measure» [30] Дж. Д. Біркгоф ще задовго до появи систем автоматизованого проєктування запропонував кількісне тлумачення

різних мистецьких форм. Зокрема, до регулярного контуру він висував дві основні вимоги:

«Перша очевидна вимога полягає в тому, щоб кривина змінювалася поступово (тобто неперервно) вздовж кривої та мала якомога менше екстремумів з урахуванням заданих характерних точок і дотичних. Зокрема, кривина не повинна мати більше одного екстремуму на будь-якій дузі контуру, що не містить точки перегину. Друга вимога полягає в тому, щоб максимальна швидкість зміни кривини була якомога меншою вздовж контуру. Ця умова усуває як надмірно великі значення кривини, так і надмірно швидкі її зміни».

В оглядовій роботі [30] узагальнено й інші підходи до означення добротності кривої:

крива є доботною, якщо графік її кривини неперервний і складається лише з кількох монотонних фрагментів [31];

певну міру добротності дає частотний аналіз залежності радіуса кривини від довжини дуги: чим нижча домінантна частота, тим добротнішою є крива [32];

добротна крива має мінімальну енергію деформації [33];

графік кривини повинен бути майже кусково-лінійним із невеликою кількістю сегментів, а сама кривина — неперервною [34];

добротність вимірюється як інтеграл від квадрата другої похідної кривої [35];

у багатьох дизайнерських застосуваннях бажаною є плавна, поступова зміна кривини вздовж кривої, яка часто використовується як суб'єктивний показник добротності [36];

бажаними властивостями доботної кривої є гладкість, збереження форми, відсутність зайвих точок перегину тощо; проте крива, що задовольняє всі ці критерії разом із початковими обмеженнями, усе ще може не бути доботною. Міри добротності мають залежати лише від геометричних інваріантів кривої та не залежати від її параметризації; форма кривої повинна мінімізувати або зміну радіуса кривини, або зміну самої кривини [37].

Таким чином, дискусія щодо критеріїв такої якості в спільнотах геометричного дизайну та комп'ютерної графіки має довгу історію та відображена в багатьох дослідженнях [3, 34]. Однак перше математично точне визначення було засноване на аналогії з теорією пружної балки, де енергія деформації E_{EoD} задається виразом [35, 36]:

$$E_{EoD} = \int_0^L \kappa^2(l) dl, \quad (1.2)$$

де κ – кривина, l – елемент довжини, а L – загальна довжина кривої. Таким чином, крива вважається найкращою, якщо вона забезпечує мінімум енергії E_{EoD} , а такі криві називаються кривими мінімальної енергії. У контексті систем автоматизованого проєктування (САПР) цей інтеграл став одним зі стандартних критеріїв визначення добротності плоскої сплайнової кривої [37] і досі широко використовується для коригування форми кривої, що вважається апіорно гладкою [38].

Проте формальне застосування критерію (1.2) може призводити до суперечливих результатів. Зокрема, у роботі Горна [39] було детально досліджено окремий сегмент МЕС, заданий двома точками на базовій прямій з горизонтальною відстанню між ними, що дорівнює 2, за умови накладання обмеження на вертикальну дотичну в кожній з цих точок. Запропонований підхід полягає в поданні шуканої кривої у вигляді набору дуг кола з мінімізацією енергії. Було показано, що інтуїтивно найкраща крива з радіусом, рівним 1, і відповідним значенням $E_{EoD} = \pi$, не забезпечує мінімального значення енергії, тобто не є МЕС. Чим більшу кількість дуг кола використовували для апроксимації, тим менші значення енергії отримували [39]. Подібні результати було отримано і в нашій роботі [2], де розглядалася задача інтерполяції двох граничних точок із заданими дотичними. У такому разі криві мінімальної енергії прямують до нескінченної довжини. Отже, щоб гарантувати існування МЕС для заданої задачі інтерполяції, необхідно

обмежити довжину дуги кривої [29]. На це обмеження також звертають увагу Біркгоф і де Бур [40], зауважуючи, що інтерполянт може складатися з дуг кіл з нескінченно великим радіусом, що може призвести до нульової енергії кривої.

Для подолання зазначеного вище недоліку математичного критерію МЕС у роботах [29, 41] було запропоновано альтернативний конкурентний критерій – мінімум інтеграла варіації кривини як міру гладкості. Цей критерій полягає в мінімізації інтеграла вздовж довжини дуги від квадрата похідної кривини за довжиною дуги:

$$E_{CVI} = \int_0^L \left(\frac{d\kappa(l)}{dl} \right)^2 dl. \quad (1.3)$$

Зокрема, цей критерій є математичним відображенням визначення найкращої кривої за Фаріним, згідно з яким [3] крива вважається гладкою, якщо її графік кривини є неперервним і складається лише з небагатьох монотонних ділянок.

Цікаво зазначити, що еластика є кривою, яка мінімізує критерій (1.2) за умови фіксованої довжини кривої, тоді як спіраль Ейлера (або клотоїда) є одним із багатьох розв'язків, що мінімізують варіацію кривини [42]. Обидві криві досліджуються ще з XVII століття і пов'язані з деформацією пружної балки. Еластика визначається як крива, що відповідає початково прямій балці, на яку діють навантаження та кутові й поступальні обмеження на її кінцях. Спіраль Ейлера можна розглядати як обернену задачу – це викривлена пружна балка, яка при прикладенні навантаження до одного з її кінців набуває форми прямої лінії [42].

Запровадження математичного критерію (1.3) відроджує інтерес до клотоїди як примітиву для побудови сплайнів. Як примітив вона за означенням задовольняє критерій (1.3) кривина кожного сегмента між суміжними контрольними точками описується залежністю $\kappa(l) = \kappa_0 + Al$, де κ_0 та A є

сталими величинами. Проте сплайни на основі поєднання ділянок клотоїд досі не набули широкого застосування в практичних задачах. Причина полягає в тому, що для неї складно забезпечити виконання багатьох бажаних властивостей сплайнів. Серед них виділяють наступні [34]:

- **Відтворюваність** (extensionality). Це властивість, за якої при додаванні нових опорних точок до заданого сплайна форма кривої не змінюється.
- **Круглість** — здатність сплайна точно відтворювати коло за заданими на ньому точками.
- **Монотонна кривина**. Ця властивість передбачає, що всі екстремуми кривини повинні збігатися з заданими контрольними точками, а сплайнові сегменти між ними мають характеризуватися монотонною зміною кривини.
- **Неперервність вищих порядків проти локальності**. Безумовно стверджується, що гладкий сплайн повинен бути щонайменше C^2 -неперервним. Локальність є властивістю, яка визначає, на яку відстань уздовж сплайна поширюється вплив малої локальної зміни положення однієї з опорних точок. Загалом для інтерполяційних сплайнів існує компроміс між локальністю та неперервністю вищого порядку C^n .

Як зазначено в роботі [34], навіть найбільш усталені сплайнові методи дуже часто не здатні задовольнити ці властивості.

Додаткові вимоги до візуально естетичних кривих з точки зору практикуючого інженера з проєктування форм автомобілів сформульовано в роботі [43]:

Гіпотеза 1. Лише контрольний багатокутник повинен однозначно та передбачувано визначати форму кривої.

Гіпотеза 2. Контрольний багатокутник має бути якомога розрідженішим, тобто містити мінімальну кількість точок:

- для забезпечення ефективного керування формою;
- для уникнення артефактів.

Гіпотеза 3. Керування кривиною є критично важливим; значна частина часу витрачається на усунення артефактів кривини.

Перша гіпотеза виключає подання кривих із прихованими додатковими параметрами, такими як NURBS, β —, τ — або ν — сплайни; зазвичай навіть варіювання кроку вузлів уникають [43]. Використання будь-яких подібних неграфічних параметрів має принциповий недолік: лише за виглядом контрольного багатокутника неможливо оцінити форму отриманої кривої, тоді як саме така оцінка становить ключову компетенцію інженера з проєктування поверхонь [43]. Що ж до гіпотез 2 і 3, то, на нашу думку, мінімізація кількісного критерію (1.3) забезпечує їх виконання.

1.3 Балкові та клотоїдні сплайни

1. Балкові сплайни. Огляд еволюції балкових сплайнів наведено в роботі [29], а їх аналіз було використано в нашому огляді [1]. Застосування кубічних балкових сплайнів для інтерполяції бере початок із роботи Холлідєя [35]. Він використовував традиційне для курсу опору матеріалів подання вертикального переміщення y як функції змінної x , тобто застосовувалася явна форма залежності $y = f(x)$. Крім того, з технічної точки зору побудова системи рівнянь для балкового сплайна [44] нагадує відомі рівняння трьох моментів, які були запропоновані німецьким інженером-будівельником Крістіаном Отто Мором ще у 1860 році.

Ранні етапи розвитку балкових сплайнів також були запозичені або мали попередників у практиці опору матеріалів [36]. Можна згадати роботу Аскера, у якій запропоновано кілька підходів до усунення небажаних хвилястостей контуру [29]. Він запропонував використовувати змінну жорсткість балки як кусково-сталу та кусково-лінійну, що дає змогу локально змінювати поведінку сплайна, зберігаючи ті самі контрольні точки. Фактично, як зазначено в [29], ці методи є еквівалентними зваженому сплайнові Салкаускаса [45]. Швейкерт

[46] увів сплайн з натягом як засіб боротьби з паразитними осциляціями, які іноді спостерігаються в кубічних сплайнах [29]. Сплайн з натягом використовує відомий з опору матеріалів розв'язок задачі згину осьово натягнутої балки [36], а параметри експоненційних функцій у цій моделі мають чіткий фізичний зміст.

Основним недоліком «класичних» явних балкових сплайнів є те, що вони придатні лише для інтерполяції плоских кривих, які повертаються на кут менший за 180° [47], не здатні представляти багатозначні функції та не можуть бути використані у випадках, коли обмеження містять нескінченну похідну [48]. Тому загалом для довільної геометрії у сплайнових кривих застосовують неявні подання вигляду $f(x, y) = 0$ або параметричні подання вигляду $y = f(t)$ та $x = g(t)$, де t є додатковим параметром [48]. Що стосується власне балкових сплайнів, Фергюсон [49] увів параметричну криву, застосувавши кубічну сплайнову функцію до кожної координати з використанням незалежного параметра кривої t , призначаючи для кожної послідовної векторної точки (x, y) неспадне значення параметра t . Їхній недолік полягає в довільності вибору параметра t , зміна якого призводить до різних конфігурацій кривої [50], особливо під час згладжування різких кутів [51] або, загалом, у випадках великої кривини [52]. Звичайно, це можна «виправити» шляхом накладання додаткових вимог до поперечної сили (третьої похідної) та зміни положення кутових точок [51], однак це все одно призводить до додаткових ускладнень. Унаслідок цього параметричні балкові сплайни нині використовуються рідко.

Найважливішим з точки зору нашого методу є сплайн Фоулера – Вільсона [53], який було розроблено у 1966 році для потреб атомної промисловості США. Він базується на звичайних кубічних балкових сплайнах, заданих у локальній двовимірній системі координат. По суті, схема Фоулера-Вільсона є переходом від явного подання сплайна $y = f(x)$ до неявного подання $g(x, y) = 0$. Цей підхід був дуже популярним до початку XXI століття

та застосовувався в багатьох галузях промисловості по всьому світу [54]. На початковому етапі сплайн задається набором прямих відрізків, для яких використовується локальна система дотичного та нормального векторів. Фактично відхилення для цих локальних сегментів сплайна обчислюються вздовж нормалі до відповідного перерізу. Основною вимогою є забезпечення неперервності нахилу та кривини на межах між сусідніми точками. Для цього виводяться нелінійні рівняння неперервності (зокрема для кутів між початковими сегментами), які розв'язуються ітераційно. Як показано в роботі [54], для побудови точного кола за допомогою сплайна Фоулера–Вільсона необхідно використати приблизно 40 контрольних точок.

2. *Клотоїдні сплайни.* Походження, фізичний зміст, виведення, апроксимація, межі застосування, властивості, теоретичні досягнення та використання клотоїди як перехідної кривої в дорожньому будівництві, а також як сплайна в комп'ютерній графіці – так званої «прекрасної спіралі Ейлера» – детально описано у ґрунтовному огляді Рафа Левісна [42]. Зазначимо, що клотоїду часто також називають спіраллю Корню.

З нашої точки зору доцільно розглянути використання спіралі Ейлера як примітиву для побудови сплайнів. Основною проблемою є аналіз одиничної клотоїди як інтерполяційного сплайнового примітиву, зокрема її фактичної форми, а також дотичних і нормальних векторів, які, на жаль, не задаються в явному вигляді та повинні обчислюватися за допомогою відомих інтегралів Френеля із застосуванням чисельних процедур. Очевидно, що використання складних аналітичних методів для побудови такого примітиву всередині великої сплайнової системи є непрактичним [55, 56], хоча подібні підходи можуть бути застосовані для створення сплайна, що складається лише з одного сегмента клотоїди [57].

Саме тому в літературі пропонуються наближені подання її форми, наприклад, у раціональній формі [58]. Крім того, для побудови клотоїди застосовуються спрощені чисельні методи. Так, у роботі [59,60] запропоновано метод, у якому кривина вважається сталою на кожному

інтеграційному сегменті. Проте точність визначення положення точок відносно кута клотоїди, який обчислюється за іншою формулою, у цьому підході не обґрунтована. Щобільше, з технічної точки зору такий підхід практично не відрізняється від ідеї апроксимації спіралі Ейлера дуговими сплайнами [61].

У контексті побудови сплайнів варто також згадати роботу [62], у якій запропоновано дискретний клотоїдний сплайн для інтерполяції замкненого плоского багатокутника. Дискретна кривина в кожній контрольній точці визначається на основі відповідного рівняння диференціальної геометрії. Положення контрольних точок ітераційно уточнюються доти, доки кривини в трьох послідовних точках не буде задовольняти задане співвідношення для клотоїди. Зазначений метод згодом було використано для побудови кусково-клотоїдної кривої [43,63], де додатково враховувалися довжини сегментів під час обчислення кривин.

Підхід до побудови клотоїдного сплайна на основі контрольної ламаної розроблено в роботі [64]. Він ґрунтується на використанні пар клотоїд як кривих злиття, які разом із прямолінійними сегментами утворюють елемент сплайнової конструкції. У разі переміщення контрольної точки зазнають змін лише три такі елементи. Крім того, парні клотоїди потребують контрольних точок, які мають задаватися вручну дизайнером. Таким чином, метод забезпечує можливість локального налаштування форми.

Задача апроксимації заданої кривої за допомогою послідовності клотоїд, дуг кола та прямолінійних сегментів розглянута в роботі [65], де запропоновано двоетапний підхід. На першому етапі виконується кусково-лінійна апроксимація дискретної кривини в контрольних точках як функції довжини дуги. Початкове та кінцеве значення кривини кожної лінійної ділянки однозначно визначають відповідний сегмент прямої, дуги кола або клотоїди, які унікальним чином поєднуються в єдину складену криву. На другому етапі передбачається застосування методу найменших квадратів для мінімізації похибки апроксимації.

Бертолацці та Фрего [66] отримали клотоїдно-орієнтований сплайн шляхом побудови нелінійної системи для рішення C^2 задачі Ерміта. Вони запропонували розв'язок задачі побудови кривої між двома точками із заданим положенням, та необхідними напрямками дотичної та заданою кривиною. Також автори показали, що для задоволення цих обмежень необхідно щонайменше три клотоїдні сегменти. Запропонований підхід у результаті зводиться до нелінійної системи з 8 рівнянь у 10 невідомих. Спочатку цей метод було реалізовано для генерації траєкторій із неперервною кривиною між маршрутними точками [67], однак згодом від нього відмовилися через високу обчислювальну складність.

У роботі [68] сплайни формуються шляхом зшивання клотоїд і прямолінійних сегментів із забезпеченням C^2 - неперервності. Процедура починається з локальної оцінки цільових значень дотичної та кривини в кожній контрольній точці, після чого кривина локально модифікується з метою забезпечення переходу між двома послідовними контрольними точками. Метод ґрунтується на знаходженні найкоротшої перехідної клотоїди від точки з обмеженнями другого порядку до прямої із заданим цільовим кутом [62]. Іншим цікавим результатом роботи [68] є графічне подання так званої *оболонки клотоїд*, яке показує найкоротшу клотоїду, що забезпечує C^2 -перехід між початковою точкою з граничними умовами $(W_0, \theta_0, \kappa_0)$, де W_0 – положення, θ_0 – напрям, а κ_0 – кривина, та прямою лінією таким чином, що кут між дотичною клотоїди з напрямом θ_0 і напрямом прямої дорівнює Ψ . Саме цей графік становить основу практичного застосування методу. Водночас точність побудови цього графіка у роботі не досліджувалася.

Криві клотоїди знаходять дуже широке застосування в задачах локального планування траєкторії для автономних транспортних засобів [69]. Такі планувальники зазвичай використовуються під час зміни смуги руху або обходу перешкод. Для отримання локального згладжування заданої глобальної траєкторії інтегрується множина локальних шляхів [70]. Метою

подібних робіт є знаходження розв'язку задачі генерації локального шляху для неголономного транспортного засобу автомобільного типу, коли задача визначається двома граничними конфігураціями з нульовою кривиною на обох кінцях. Як приклад можна навести роботи, у яких запропоновано розв'язок типу «клотоїда-дуга кола-клотоїда», що забезпечує будь-яке задане значення кута повороту [71–73]. Особливо цікавим є дослідження [74], у якому описано комбінації двох наведених вище примітивів повороту, здатні забезпечувати як необхідний поворот, так і осьове паралельне зміщення.

Клотоїдні сплайни рідко використовуються для глобального планування траєкторії, оскільки їхні декартові координати не мають аналітичного подання, а отже зшивання кусково-клотоїдних сегментів потребує додаткових чисельних обчислень. Тому традиційні параметричні криві, такі як криві Безьє [75], В-сплайни та раціональні криві Безьє, широко застосовуються як інтерполяційні планувальники траєкторій [76]. Проте класичні криві не забезпечують безпосереднього контролю максимальної кривини, у зв'язку з чим виникає необхідність у спеціальних процедурах мінімізації кривини [77]. Одним із можливих шляхів розв'язання цієї проблеми є «вбудовування» властивостей клотоїди в традиційні криві та їх подальше використання для побудови сплайнів. Це потребує апроксимації інтегралів Френеля раціональними кривими Безьє або В-сплайнами, які згодом застосовуються для генерації онлайнової клотоїдоподібної траєкторії шляхом простого масштабування параметричних кривих [78–80]. Іншою альтернативою побудови клотоїдоподібної кривої є формулювання та мінімізація функціоналу оптимізації, що поєднує похибку наближення до вхідної траєкторії та міру гладкості, визначену профілем кривини кривої [81]. Ключовою складовою такого функціоналу є крива мінімальної варіації, що задається критерієм (1.3).

1.4 Методи згладжування контурів

Методи згладжування і отримання неперервних кривин для дискретно визначених точок положення були запропоновані раніше в 1986 [82]. Вводиться незалежний параметр t і вважається, що згладжені координати точок x та y можуть бути представлені як функції цього параметра t . Вважається, що значення t_i в точках заміру є відомими, наприклад, є номером точки i , а заміряні положення є відповідно X_i та Y_i . Тоді для отримання неперервних згладжених залежностей $x(t)$ та $y(t)$ вводиться конволюційний інтеграл з ядром $g(t, \sigma)$:

$$x(t); y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X_i(u); Y_i(u))g(t - u, \sigma)du, \quad (1.4)$$

де в якості ядра приймається відома функція нормального розподілу з параметром σ . Очевидно, що σ є параметром згладжування (бендвідс) і чим він більший, тим значнішим є згладжування. Отримавши неперервні значення функцій $x(t); y(t)$ можна знайти координату довжини, $s(t)$ і кривину, $\kappa(t)$ кожної точки:

$$xs(t) = \int_0^t \sqrt{(\dot{x}(u))^2 + (\dot{y}(u))^2} du, \quad (1.5)$$

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{((\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2)^{3/2}}. \quad (1.6)$$

Зазначимо, що Гаусівське згладжування є найбільш застосованим при обробці результатів вимірів [83-85]. Проте в роботі [82] не уточняється вибір параметра σ в залежності від амплітуди можливої похибки, а лише даються загальні коментарі, щодо впливу його на характер отримуваної кривої. В статистичних оцінках подібний підхід називається методом Надараї-Вотсона,

який не вважається оптимальним для згладжування [24]. Зокрема, для врахування нерівномірно розміщених точок X_i та Y_i і коли відстань між ними порівнянна з параметром згладжування σ , пропонуються деякі методи інтерполяції проміжних значень між ними для використання в аналітичному інтегралі (1.4) [86, 87].

Щобільше, використання параметричних сплайнів [27, 28] чи ядер для геометричних задач залежить від суб'єктивного вибору параметра t , такого, наприклад, як рівномірний розподіл чи прив'язаний до довжини дуги (так звана натуральна параметризація) інтерполяційного сплайна [29]. Проте жоден з цих популярних підходів не є оптимальним і широко застосовуються альтернативні підходи, зокрема, так званий доцентровий (centripetal) метод, де значення параметра t залежить від самої кривини траєкторії [88]. Він також є ітераційним як і при натуральній параметризації, але дає кращі результати на ділянках різкої зміни кривини.

Для ідентифікації морських ссавців застосовується альтернативний підхід для згладжування [89]. Замість конволюційного інтегралу (1.4), що вимагає великої кількості обчислень і викликає певні труднощі врахування граничних умов для обмежених ділянок, використовується техніка В-сплайнів [89]. Тут також використовується параметрична апроксимація і координата, наприклад, $x(t)$ знаходиться шляхом мінімізації наступного функціонала, де окрім відхилень по методу найменших квадратів враховується мінімізація інтеграла від квадрата кривини з певною вагою ρ :

$$E(\rho) = \sum_i (x(t_i) - X_i)^2 + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (\ddot{x}(t))^2 dt. \quad (1.7)$$

Параметр згладжування λ грає подібну роль як і параметр σ . Аналогічні апроксимації широко застосовуються в статистичних аналізах [90]. Між іншим, кубічні (балкові) сплайни дають найменше значення згинальної енергії

для кожного вибраного значення коефіцієнта пропорційності між приростом третьої похідної і функцією в заданих дискретних точках [23].

Проблема шуму визначається як основна при розпізнаванні образів в роботі [91]. Відзначається, що успішному впровадженні диференційних інваріантів (сігнатур) перешкоджають складності їх обчислення, що призводять до підсилення шуму. Власне тому і пропонуються використання їх інтегральних відповідників. В роботі [92] згладжування проводиться за допомогою В-сплайнів, і вводиться інтеграл від модуля кривини як характеристика для порівняння кривих чи їх ділянок. Все це є свідченням відсутності надійних і зрозумілих методів згладжування кривини до зрозумілого наперед рівня.

Оригінальна афінно-інваріантна характеристика кривої для зіставлення кривих і розпізнавання прихованих об'єктів [93,94] також вимагає визначення кривини з наступним інтегруванням їх абсолютних величин. Методика згладжування відбувається у два етапи. На першому етапі застосовується ядро Гауса, хоча як зазначається в [93] вибір параметра σ є неоднозначним, адже малі значення дають дуже багато точок, де кривина змінює знак, а великі значення призводять до втрати корисної інформації. На другому етапі застосовуються В-сплайни, які дають неперервний і ще більш згладжений контур, придатний для отримання неперервних кривин.

Автори [95, 96] використовують кривину і її похідну по довжині контуру як Евклідові диференціальні інваріанти. Характерними точками вважаються ті, де похідна від кривини досягає нуля. Вони і розбивають криві на ділянки зіставлення. Відзначається великий вплив шуму на отримані значення кривини, і це вимагає проведення досить точних вимірів [97, 98] контуру. Це зменшує, але не знімає проблему шуму. Пропонуються два емпіричні методи згладжування. Перший метод передбачає переміщення точок найбільшої кривини в напрямку кривини на деяку величину пропорційну цій кривині. Це суб'єктивний метод, що може по різному згладжувати цю криву і відповідну їй іншу криву, що ускладнює процедуру узгодження. Інший метод також є

суб'єктивним, використовує техніку періодичних сплайнів з ітераційною процедурою перерозподілу початкових точок пропорційно по довжині сплайна, причому кількість ітерацій досягала 1500 [96]. Як вказують автори [96], цей метод не має теоретичного обґрунтування і в майбутньому пропонується застосовувати згладжувальні сплайни.

В роботі [97] дається огляд сучасних методів представлення форми двовимірних фігур і суттєвих параметрів (ознак), що її характеризують, причому кривина є одним із найбільш суттєвих із них. Проте ця ознака досить добре працює у випадку даних без шуму. Вказується що звичайно застосовується Гаусівське згладжування з різними величинами σ , вибір яких суттєво впливає на оцінку відповідності.

Ключовим в усіх методах відтворення, означення і зіставлення форми фігур є згладжування первинної інформації вимірювання. Подібні задачі згладжування контуру виникають і в суміжних галузях комп'ютерної графіки, зокрема для побудови траєкторії чи шляху по неточно виміряним точкам. Часто в таких задачах відстань між точками вимірювань значно перевищує похибку вимірювань, наприклад, в роботі [98] відстань дорівнює 1 метр, а похибка – 0.05м. Це дозволяє легко проводити нумерацію точок (навіть якщо вони не були прив'язані до часу) і оброблювати дані за допомогою, наприклад, В-сплайнів. Робота Бертолацці з колегами [99] цікава тим, що хоча автори використовують пронумеровані дані, проте фактично розглядувані розкиди є достатньо великими, щоб в процесі побудови сплайна їх приходилося перенумеровувати, в крайньому разі їх проєкція на сплайн розташовується в іншому порядку, ніж номери. Алгоритм побудови сплайна складається з декількох кроків: 1) це розбиття точок на кластери, що перетинаються; 2) побудова кубічного полінома для кожного кластера, де значною проблемою є початкове розміщення вузлів і пропонується певна процедура їх усереднення, яка можливо буде не оптимальною при більшому розкиді точок; а потім застосування процедури згладжування за допомогою кубічного полінома з певним оптимізованим параметром згладжування ρ ; 3) усереднення

кластерних поліномів, де точки беруться з різною вагою (більша – для внутрішніх, і менша – для граничних); 4) застосування класичного кубічного (балкового типу) параметричного сплайна з доцентровою параметризацією [87]. Очевидно, що методика складна, об'єднує різні суб'єктивні кроки, і при цьому не містить механізмів контролю кривини, яка в прикладах демонструє значні флуктуації [99].

1.5 Методи ідентифікації кутових точок

Першою роботою по «складанню» безколірних пазлів була [100]. Окрім самої постановки задачі були виділені три основних аспекти: 1) цифровий опис границь елементів; 2) маніпуляції з елементами – повороти і зіставлення; 3) оцінка відповідності границь. Для зіставлення виділялися точки, де кривина була екстремальною. Проблема згладжування тут не розглядалася. В той час було типово розглядати зіставлення лише по характерним точкам, а згладжування в основному належати до специфічних прийомів трактування належності первинних пікселів до області елемента залежно від стану його оточуючих пікселів. Щодо згладжування контуру, то використовувалися суб'єктивні критерії врахування ваги наступної точки стосовно попередньої.

Вагомим вкладом була робота Волфсона et al. [101], де розглядався прямокутний (4 сторони) пазл зі 104 елементів. Описана методика цифрового фотографування пазла і виділення 4-х кутових точок, де швидко і значно (інійни $\sim 90^\circ$) змінюється напрямок дотичної (велика кривина). Вперше зазначається необхідність згладжування контуру, відповідно до ідеї [102], де знаходиться найкоротший шлях між замірними точками, що лежить поблизу спостережуваного контуру, на відстані меншій відомої наперед величини неточності вимірювань. На ньому розставляються точки через рівні відстані. Для визначення того, чи є криві відповідними, знаходиться Евклідова відстань для заданих точок [95], яка повинна бути мінімальною. Для складання пазлів застосовувався глобальний алгоритм, де уже враховувалося розміщення

попередньо проставлених елементів, де спочатку складалися кутові і граничні елементи усього пазла.

Наступна робота Волфсона [103] має велике значення оскільки вперше вводить залежність кривини від координати довжини як найбільш значущої ознаки (сінтури) кривої. Оскільки автор не використовує математичні методи згладжування, то в якості заміника кривини використовувалися певним чином усереднені значення приростів кутів на елементарних ділянках заданої довжини. Подібна методика застосовується при відновленні порізаних документів [104], проте тут відповідність двох контурів перевіряється для всього набору точок шляхом визначення суми коефіцієнтів, які наперед встановлюються в залежності від різниці квадратів кривин. Більш універсальний підхід до порівняння двох контурів, що отримані в різному масштабі, дається в роботах [105, 106], де вводяться поняття енергії деформації і енергії видовження, як інтеграли від квадратів різниці кривин і квадратів різниці лінійних деформацій (видовження). Ці критерії порівняння застосовувалися в роботах [107, 108, 109] для зіставлення археологічних, біомедичних, графічних зображень.

Цікаво відзначити, що подібні інтеграли для однієї кривої мають широке застосування в задачах інтерполяції і побудови оптимальних шляхів чи естетичних кривих і мають чітко виражений механічний зміст, адже крива деформування гнучкої балки задовольняє критерію мінімуму енергії деформації [34, 37, 112]. Подібний критерій ми будемо застосовувати і в цій роботі.

Визначення кутів об'єктів на зображеннях є ключовою проблемою комп'ютерного зору, адже кути – це характерні місця на зображенні, де відбуваються зміни інтенсивності в кількох напрямках, що робить їх стійкими та незмінними до таких трансформацій, як обертання та зміна масштабу [113]. Вони є важливими локальними ознаками в багатьох задачах, таких як 3D-реконструкція будівель та їх геолокації [89], зіставлення зображень і

фрагментів пошкоджених манускриптів [114], відстеження рухомих об'єктів [100], для калібрування камери на основі кутів шахової дошки [83].

Протягом останніх десятиліть було запропоновано різні аналітичні детектори кутів, які умовно можна поділити на дві категорії: методи на основі інтенсивності зображень, використовуючи зміну інтенсивності пікселів; і методи геометричного аналізу контуру, екстрагованого із цифрового зображення. Останнім часом метод на основі контурів стає все більш розповсюдженим завдяки простоті коду та обчислювальній ефективності.

Ключовою проблемою в геометричній категорії є оцінка дискретної кривини кожної цифрової кривої, отриманої з вхідного зображення. Для цього були запропоновані різні міри визначення кривини, наприклад, k -косинус [101]; диференціальна кривина на основі застосування різних рівнів згладжування [102, 103], що використовують техніку багато масштабного представлення форми плоских кривих запропонованої в [104]; та накопичення відстані від хорди до точки [105, 106]. Подібні підходи припускають, що на цифровій кривій кожні два сусідні пікселі мають постійну відстань (тобто пікселі розподілені на кривій на рівній відстані). Проте ця відстань може змінюватися в середньому від 1 до $\sqrt{2}$, що вимагає адаптивного згладжування, особливо при зіставленні двох контурів.

Майже всі існуючі методи отримання цифрових кривих ґрунтуються на Гаусівському згладжуванні точок контуру, що попередньо представляються як окремі функції координат $x(t), y(t)$ від параметра t , який визначається за допомогою окремих спеціальних процедур екстракції контуру із дискретних границь і нумерації точок [108, 109]. Проте Гаусівські ядра стають досить неточними коли є розмиті чи шумні зображення. Вони стають залежними від кількості та амплітуди шумних точок, включаючи артефакти. Саме тому в усіх підручниках по статистичному згладжуванню відзначаються недоліки Гаусівських ядер, і пропонуються альтернативні підходи, що використовують адаптивні ядра чи сплайни [34]. В деяких роботах по геометричному

моделюванні [110, 111], особливо для побудови траєкторій по неточно визначеним точкам [37], пропонується параметричне згладжування на основі кубічних сплайнів з доцентровою корекцією величини параметра t [112]. Іншим недоліком Гаусівського чи параметричного згладжування є те, що сам масштаб згладженого контуру залежить від параметра згладжування – зі збільшенням згладжування рисунок прямує до точки.

Висновки за розділом 1

Аналіз літератури показав, що попри найкращі енергетичні (естетичні) властивості, кубічні сплайни застосовуються дуже рідко для задач геометричного моделювання, в основному для задач інтерполяції, де сплайн будується в параметричних координатах. Але в такому випадку, коли фактично незалежно будуються криві для різних координат, то всі переваги кубічних сплайнів щодо мінімуму енергії втрачаються. Що стосується задач згладжування, то на відміну від статистичних застосувань, кубічні і взагалі поліноміальні сплайни, повністю поступаються методам оснований на Гаусівському (на основі ядер) згладжуванні. Тому необхідно: а) зробити універсальний метод, що має бути однаково ефективний для задач дизайну, інтерполяції і апроксимації; б) досягти того, щоб отримані криві мали найкращі енергетичні властивості.

Мета та задачі дослідження. Метою роботи є підвищення точності та обчислювальної ефективності процесів геометричної апроксимації, ідентифікації кутових особливостей та зіставлення контурів на основі розробки та впровадження методу коротацийного балкового сплайна.

Для досягнення вказаної мети у даній дисертаційній роботі вирішуються такі задачі:

1. Проаналізувати наявні сплайнові методи та підходи до обробки контурів, виявивши їхні обмеження при роботі з зашумленими даними та складними геометричними формами.

2. Сформулювати математичний опис методу коротаційних балкових сплайнів через неявне подання моделі, використання удаваних точок та нормальних векторів, повернутих на локальний кут деформації, для ітераційної лінеаризації задачі.

3. Розробити метод адаптивного згладжування артефактів оцифрування, використовуючи модель балки на пружній основі з регульованими параметрами жорсткості.

4. Розробити спосіб виявлення кутових особливостей контуру через введення метрики «локальної роботи» та поняття «кутової удаваної точки», що допускає розрив нахилу дотичної при збереженні статичної визначеності моделі.

5. Розробити алгоритм зіставлення кривих на основі інтегральної метрики «взаємної енергії».

6. Здійснити експериментальну перевірку розроблених методів на прикладній задачі зіставлення фрагментів пазлів, підтвердивши його ефективність.

Об'єктом дослідження є процеси геометричного моделювання криволінійних об'єктів та аналізу контурів у задачах цифрової обробки зображень і розпізнавання образів.

Предметом дослідження є метод коротаційних балкових сплайнів, алгоритми обчислювальної лінеаризації, методи ідентифікації кутових точок та метрики зіставлення криволінійних об'єктів.

РОЗДІЛ 2. МЕТОД КОРОТАЦІЙНОГО БАЛКОВОГО СПЛАЙНА ДЛЯ ЗАДАЧ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

2.1 Коротаційний балковий сплайн для задач інтерполяції

Процес згину прямолінійної балки може бути описаний за допомогою математичної моделі, побудованої на основі векторного подання стану. У кожному положенні вздовж довжини балки її механічний стан задається вектором $\vec{Y}(s)$, компоненти якого утворюють систему з чотирьох незалежних параметрів, пов'язаних з локальною координатою s .

$$\vec{Y}(s) = \text{column}\{W(s); \theta(s); M(s); Q(s)\}. \quad (2.1)$$

Відповідно до теорії згину балок, замість використання функції відхилення та її похідних застосовуються фізичні величини. До них належать: переміщення $W(s)$, додатний напрям якого збігається з напрямком нормалі; кут повороту $\theta(s)$, що визначається як нахил деформованої осі відносно початкового напрямку та вважається додатним при обертанні від дотичної до нормалі за годинниковою стрілкою; згинальний момент $M(s)$; поперечна сила $Q(s)$. Додатні напрями цих величин обираються таким чином, щоб у відповідних диференціальних рівняннях використовувався додатний знак. Параметри пов'язані між собою диференціальними залежностями, форма та розв'язки яких можуть дещо змінюватися залежно від умов навантаження та характеру роботи балки. У даній роботі розглядається найпростіша статична модель балки – балка Ейлера–Бернуллі, широко описана в підручниках з опору матеріалів [115]. Відповідно, диференціальні залежності між параметрами балки мають такий вигляд:

$$\frac{dW(s)}{ds} = \theta(s); \quad \frac{d\theta(s)}{ds} = \frac{M(s)}{EI}; \quad \frac{dM(s)}{ds} = Q(s); \quad \frac{dQ(s)}{ds} = q_m. \quad (2.2)$$

Величина q_m використовується для опису дії зовнішнього розподіленого навантаження, тоді як параметр EI характеризує матеріальні властивості балки. Після приведення системи визначальних рівнянь (2.2) до форми, придатної для застосування методу початкових параметрів, її розв'язок може бути поданий таким чином:

$$(\vec{Y}(s)) = [p_{i,j}(s)](\vec{Y}_0) + q_m(\vec{C}(s)). \quad (2.3)$$

Вектор $\vec{Y}_0$, що відповідає стану балки в опорному положенні $s = 0$, приймається як початковий вектор стану. Елементи матриці переходу, а також компоненти вектора вільних членів, задаються у наведеному нижче вигляді:

$$[p_{i,j}(s)] = \begin{bmatrix} 1 & s & \frac{s^2}{2EI} & \frac{s^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{s}{EI} & \frac{s^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{C}(x) = \begin{pmatrix} \frac{s^4}{24EI} \\ \frac{s^3}{6EI} \\ \frac{s^2}{2} \\ s \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

У межах подальшого аналізу використовується спрощена форма, в якій згинальна жорсткість балки нормується до одиниці, $EI \equiv 1$, а вплив зовнішнього розподіленого навантаження не враховується, тобто $q_m = 0$.

Початкові дані задаються впорядкованою сукупністю експериментально виміряних точок $B_i(X_{bi}, Y_{bi})$. Кожній точці з індексом i відповідає пара координат на площині, значення яких містять похибку вимірювання, що кількісно описується середньоквадратичним відхиленням σ .

У процесі ітераційного уточнення форма досліджуваного об'єкта на ітерації j описується дискретною множиною точок $A_i^j(X_i^j, Y_i^j)$. Кожна з цих точок однозначно пов'язується з відповідною точкою вимірювань B_i за спільним індексом i . На початковому кроці алгоритму ($j = 0$) положення

точок A_i^0 повністю відтворюють координати вихідних вимірюваних точок B_i . Надалі індекс ітерації j у позначенні точок опускається, якщо це не призводить до неоднозначності.

Сусідні точки A_i послідовно з'єднуються прямолінійними відрізками, утворюючи ламану лінію. Кути між суміжними відрізками позначаються як $\psi_{i-1,i}$, та вважаються додатними у разі відліку за годинниковою стрілкою (Рисунок 2.1). На кожній ітерації j кожен відрізок з індексом i однозначно визначається своїми кінцевими точками, координати яких збігаються з положеннями відповідних точок A_i . Векторне подання такого відрізка позначається як $\vec{L}_i$.

$$\vec{L}_i = \vec{A}_{i+1} - \vec{A}_i = (X_{i+1} - X_i)\vec{i} + (Y_{i+1} - Y_i)\vec{j}. \quad (2.5)$$

Для кожного відрізка вводиться пара взаємно ортогональних локальних векторів – дотичний вектор $\vec{t}_i$ та відповідний йому нормальний вектор $\vec{n}_i$. Орієнтація нормального вектора визначається умовою, за якої найменший кутовий поворот, що переводить дотичний напрям у нормальний, відлічується за годинниковою стрілкою. Відповідно, вважаючи, що дотичний вектор $\vec{t}_i$ має вигляд:

$$\vec{t}_i(s) = \frac{\vec{L}_i}{|\vec{L}_i|} = a_i\vec{i} + b_i\vec{j} = const, \quad (2.6)$$

тоді вектор $\vec{n}_i$ визначається за формулою:

$$\vec{n}_i(s) = c_i\vec{i} + d_i\vec{j} = const, \quad (2.7)$$

де:

$$\begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\pi/2) & -\sin(-\pi/2) \\ \sin(-\pi/2) & \cos(-\pi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

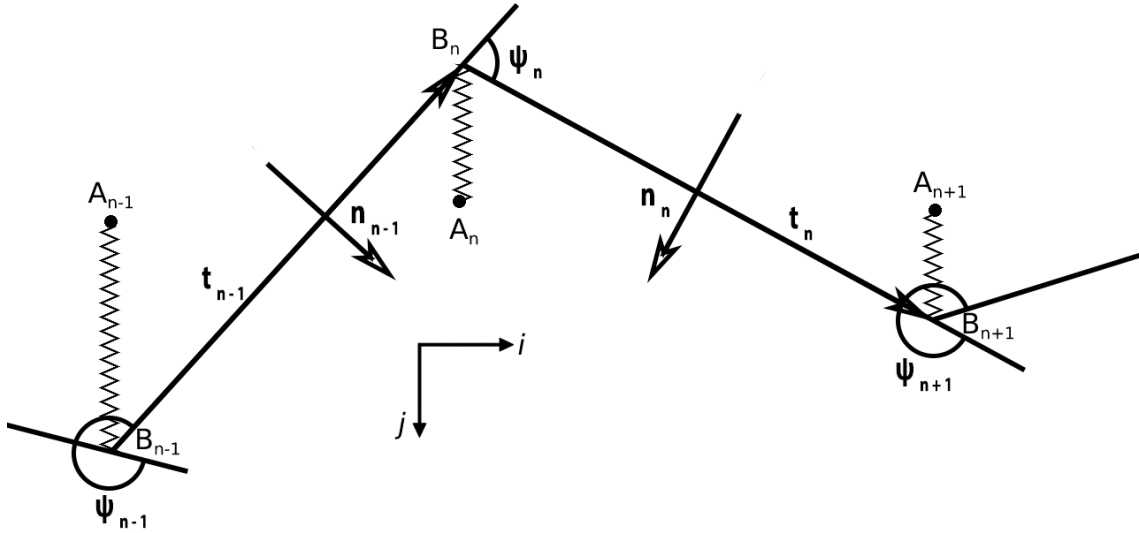


Рисунок 2.1 – Модель дискретних балок на пружних опорах

Ключовим елементом запропонованої моделі є явне введення кутової неузгодженості між суміжними відрізками. Цей кут характеризує локальну неузгодженість ламаної геометрії та підлягає поступовому згладжуванню на кожному наступному кроці ітераційного процесу. Кутова неузгодженість позначається як $\psi_{i-1,i}$ і вважається додатною у разі відліку за годинниковою стрілкою (Рисунок 2.1). Її значення обчислюється за відомими співвідношеннями, що ґрунтуються на векторному та скалярному добутках відповідних векторів.

$$\sin(\psi_{i,i-1}) = \vec{t}_i * \vec{t}_{i-1}, \quad (2.9)$$

$$\cos(\psi_{i,i-1}) = \vec{t}_i \cdot \vec{t}_{i-1}. \quad (2.10)$$

Для обчислення кутів одночасно застосовуються обидва співвідношення, оскільки обернені тригонометричні функції арксінус і арккосинус окремо коректно визначені лише в межах двох квадрантів декартової системи координат. Зокрема, у випадку, коли в обох формулах отримується додатний знак, відповідний кут належить першому квадранту. Переходимо до формулювання основних змінних і рівнянь, що будуть використовуватися при складанні розрахункової схеми.

Далі вводяться основні змінні та рівняння, необхідні для побудови розрахункової моделі. Насамперед встановлюються позначення для базових параметрів. Для кожної ділянки з індексом i визначається вектор стану в початковій точці $\vec{Y}_{i,0}(s=0)$, та вектор стану в кінцевій точці цієї ж ділянки $\vec{Y}_{i,e}(s=s_i)$. Відповідно до співвідношень зв'язку (2.3), зазначені вектори пов'язані між собою матричною залежністю:

$$(\vec{Y}_{i,e}) = [p_{i,j}(s_i)](\vec{Y}_{i,0}), \quad (2.11)$$

$$s_i = |\vec{L}_i|, \quad (2.12)$$

Важливою рисою запропонованого підходу є інтерпретація початково неточних вхідних точок як фіксованих опорних положень, до яких приєднуються пружні зв'язки. У межах таких зв'язків виникає додаткова відновлювальна сила, величина якої є пропорційною зміщенню відповідної точки контуру, що відповідає початку відрізка, відносно її опорного положення. Зміщення визначається як різниця між початковими координатами точки P_i , заданими до початку обчислень, та додатковим переміщенням $W_{i,1}$, отриманим на поточній ітерації алгоритму. Зазначене припущення враховується у четвертій умові спряження системи, яка забезпечує зв'язок між векторами стану в кінцевій точці попередньої ділянки. Відповідні рівняння мають такий вигляд:

$$W_{i+1,0} = W_{i,1}, \quad (2.13)$$

$$\theta_{i+1,0} = \theta_{i,1} - \psi_{i,i+1}, \quad (2.14)$$

$$M_{i+1,0} = M_{i,1}, \quad (2.15)$$

$$Q_{i+1,0} = Q_{i,1} - C_i(W_{i,1} - P_i). \quad (2.16)$$

За умови великих значень параметра жорсткості C_i безпосереднє використання рівняння (2.16) може спричиняти втрату числової точності та накопичення обчислювальних похибок. З метою усунення цього недоліку замість співвідношення (2.16) використовується альтернативна форма запису:

$$(W_{i,1} - P_i) = D_i(Q_{i+1,0} - Q_{i,1}), \quad (2.17)$$

де вводиться альтернативний параметр – податливість D_i , яка визначається як величина, обернена до жорсткості, та використовується для опису пружних властивостей опори:

$$D_i = C_i^{-1}. \quad (2.18)$$

Фізичний зміст отриманих рівнянь можна пояснити таким чином. Перше співвідношення відображає вимогу геометричної неперервності та забезпечує однаковість переміщення точки A_i незалежно від того, розглядається вона як кінцева точка ділянки $i - 1$ чи як початкова точка ділянки i . Друге співвідношення, записане у вигляді рівняння в, задає зменшення кута повороту на початку наступної ділянки на величину $\psi_{i,i+1}$ порівняно з кутом

деформації попередньої ділянки. У результаті деформований контур не містить кутових розривів або стрибків [116]. Третє співвідношення встановлює умову неперервності згинальних моментів, що еквівалентно вимозі неперервності других похідних і, відповідно, кривини контуру.

Слід підкреслити, що як обчислюване переміщення $W_{i,1}$, так і допоміжна величина P_i , яка задається перед кожною ітерацією, є знаковими. Додатне значення відповідає напрямку нормального вектора $\vec{n}_i$.

Окремо варто зазначити різницю між рівняннями (2.16) та (2.17). За помірних значень параметрів D_i та C_i рівняння (2.16) і (2.18) є еквівалентними. Проте у випадку великих значень жорсткості, коли $C_i \gg 1$, доцільно застосовувати рівняння (2.17), яке в граничному випадку $C_i \rightarrow \infty$, тобто $D_i \rightarrow 0$, фактично переходить у таку умову:

$$W_{i,1} = P_i. \quad (2.19)$$

Далі рівняння (2.19) буде використовуватися для визначення фіксованих точок, і буде мати вигляд:

$$W_{i,1} = 0. \quad (2.20)$$

Запровадження цього рівняння призводить до повного усунення переміщення у фіксованій точці, що забезпечує точне виконання умов інтерполяції.

Аналогічно, застосування рівняння (2.17) не має обмежень і в протилежному граничному випадку, коли параметр жорсткості прямує до нуля, $C_i \rightarrow 0$, а відповідна податливість необмежено зростає, $D_i \rightarrow \infty$. За таких умов співвідношення (2.16) вироджується та фактично переходить у наступну рівність:

$$Q_{i+1,0} = Q_{i,1}. \quad (2.21)$$

Таким чином ми отримаємо четверте рівняння спряження для удаваної точки. Як вже згадувалось раніше ці точки будуть застосовуватися для зменшення кута та лінеаризації задачі.

З метою збереження геометричної неперервності деформованого контуру у вузлових точках запропоновано додаткове уточнення моделі. Воно полягає у введенні нормальних векторів, що відповідають деформованій конфігурації геометрії. Такі вектори формуються шляхом повороту початкових нормальних векторів на локальний кут деформації $\theta_i(s)$, обчислений у процесі розв'язання задачі. Відповідно, нормальний вектор деформованого контуру в точці з координатою s позначається як $\overrightarrow{n\theta}_{i+1}$ і визначається за наступною формулою:

$$\overrightarrow{n\theta}_i(s) = \vec{n}_i \cos\theta(s) - \vec{t}_i \sin\theta(s) = c\theta_i(s)\vec{i} + d\theta_i(s)\vec{j}, \quad (2.22)$$

де:

$$\begin{pmatrix} c\theta_i(s) \\ d\theta_i(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\pi/2 - \theta(s)) & -\sin(-\pi/2 - \theta(s)) \\ \sin(-\pi/2 - \theta(s)) & \cos(-\pi/2 - \theta(s)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Унаслідок виконання умови (2.14) на межі суміжних ділянок забезпечується неперервність орієнтації деформованого контуру. Тому нормальні вектори, що відповідають деформованій геометрії, на межі між ділянками збігаються, тобто

$$\overrightarrow{n\theta}_{i+1}(s = 0) = \overrightarrow{n\theta}_i(s = s_i). \quad (2.24)$$

Далі вводиться визначення додаткового переміщення довільної точки з параметром s , що належить i -тій ділянці, яке описує зміну її положення та задається наступним співвідношенням:

$$\vec{W}_i(s) = W(s) \cdot \vec{n}\theta_i(s). \quad (2.25)$$

У результаті виконання ітераційної процедури оновлені положення кожної граничної точки з індексом i на j -тій ітерації описуються співвідношенням:

$$\vec{A}_i^j = \vec{A}_i^{j-1} + W_{i+1,0} \vec{n}\theta_{i+1}(s=0) = \vec{A}_i^{j-1} + W_{i,0} \vec{n}\theta_i(s=s_i), \quad (2.26)$$

що забезпечуватиме неперервність на межах між ділянками.

Оскільки на j -тій ітерації функції переміщення $W(s)$ та кута повороту $\theta(s)$ є неперервними вздовж кожної ділянки з індексом i , то неперервність розповсюджується і на положення довільної внутрішньої точки. Зокрема, положення точки $\vec{R}_i^j(s)$ яке формується шляхом додавання початкової геометрії та інкрементальної поправки, визначеної співвідношенням (2.25), є неперервною функцією параметра s :

$$\vec{R}_i^j(s) = \vec{A}_i^{j-1} + \vec{t}_i \cdot s + W(s) \cdot \vec{n}\theta_i(s). \quad (2.27)$$

Отже, співвідношення (2.27) є ключовим для визначення оновлених положень усіх точок контуру після завершення ітераційного кроку. У деяких випадках отримана геометрія вже відповідає поставленим вимогам, що дозволяє припинити подальші обчислення. Якщо ж сформований контур виявляється недостатньо гладким, можуть бути застосовані альтернативні підходи. Найпростішим з них є повторний запуск алгоритму з початкової ітерації зі зменшеним початковим значенням параметра C_s , що забезпечує

інтенсивніше згладжування. Така необхідність зазвичай виникає тоді, коли величина похибок вимірювань є малою порівняно з відстанями між сусідніми точками.

У випадку незамкненого контуру ми все ще маємо $8N$ рівнянь, але не маємо рівнянь спряження між першою та останньою точками, так як вони не з'єднані. В такому випадку вводяться 2 пари граничних умов для кожної точки.

В загальному граничні умови визначаються під конкретну задачу. Ось декілька варіантів граничних умов

$$W_0 = W_N = 0, \quad (2.28)$$

$$M_0 = M_N = 0, \quad (2.29)$$

які звичайно називаються натуральними граничними умовами, та:

$$W_0 = W_N = 0, \quad (2.30)$$

$$\theta_0 = \alpha, \theta_N = \beta, \quad (2.31)$$

які краще за все підходять для задач інтерполяції, тут α та β – це кути під якими крива виходить з першої точки та кут під яким заходить в останню точку інтерполяційної кривої.

2.2 Загальний алгоритм та постобробка результатів

Нехай кількість експериментально виміряних точок становить N . Відповідно до цього контур розбивається на N відрізків, причому останній відрізок замикає контур, з'єднуючи точки з індексами $i = N$ та $i = 1$. Оскільки кожному відрізку відповідають два вектори стану, що містять по чотири компоненти, загальна кількість невідомих змінних дорівнює $8N$.

Для їх визначення формується система рівнянь, що складається з двох частин. Перша частина включає N наборів рівнянь переходу станів, заданих співвідношеннями (2.3) – (2.4), які забезпечують $4N$ рівнянь. Друга частина утворюється $4N$ умовами спряження, що задаються рівняннями (2.13) – (2.16).

Запровадження удаваних точок спрямоване на усунення обмежень, пов'язаних із базовою гіпотезою теорії балок, згідно з якою деформаційні кути вважаються малими: $\theta \approx \sin\theta \approx \tan\theta$. У випадку, коли геометричне наближення задається невеликою кількістю вузлів A_i , багатокутна апроксимація містить значні кутові неузгодження між суміжними відрізками (Рисунок 2.1). Унаслідок цього кути повороту в точках спряження стають надто великими, що виходить за межі застосовності гіпотези малих кутів і знижує точність розрахунків.

Для зменшення зазначених кутів пропонується вводити додаткові удавані опори в середині кожного відрізка. Такі опори характеризуються нульовою жорсткістю, що дозволяє безпосередньо використовувати рівняння спряження (2.21). У результаті багатокутна апроксимація краще відтворює реальну форму об'єкта, а побудований контур набуває більшої гладкості.

Слід підкреслити, що удавані точки не мають фізичних аналогів серед вимірних даних і не змінюють структуру контуру; їхнє призначення полягає виключно в покращенні кривини шляхом зменшення кутів між сусідніми відрізками.

Структура обчислювального процесу та необхідна кількість ітерацій значною мірою визначаються властивостями вхідного набору точок. Водночас можна сформулювати низку загальних стратегій ефективної обробки даних.

Особливо важливим є початковий ітераційний крок, на якому слід проаналізувати щільність точок та можливу наявність перетинів між відрізками.

У випадку щільно розташованих точок доцільно ініціалізувати алгоритм із малим значенням жорсткості опори C_i . Такий вибір дозволяє сформувати

грубе початкове наближення контуру, яке надалі уточняється шляхом поступового збільшення жорсткості. Цей підхід є обґрунтованим, оскільки за високої щільності даних і значних кутових неузгоджень застосування великої жорсткості на ранніх етапах може призводити до виникнення надмірних сил, що деформують контур і ускладнюють його згладжування.

Натомість, якщо точки розміщені на великих відстанях одна від одної, алгоритм можна починати з великого значення C_i . За таких умов початковий контур інтерполює всі точки, після чого жорсткість поступово зменшується для досягнення необхідного ступеня згладжування. Це забезпечує врахування всіх геометричних особливостей на початковому етапі, тоді як подальші ітерації виконують функцію фільтрації шуму.

Критерії зупинки також залежать від характеру задачі. За помірних вимог може бути достатньо досягнення візуальної гладкості контуру та її підтвердження за допомогою аналізу кривини. У задачах із підвищеними вимогами до точності можуть застосовуватися кількісні критерії зупинки. Наприклад, якщо відома похибка вимірювань, ітераційний процес доцільно завершувати тоді, коли відхилення між виміряними та реконструйованими точками стає співрозмірним із цією похибкою.

Зрештою, на результат істотно впливають кількість ітерацій і величина кроку зміни жорсткості. Хоча в найпростіших випадках може вистачити однієї ітерації, на практиці зазвичай потрібно більше кроків. Менші кроки зміни жорсткості забезпечують повільніше, але більш контрольоване згладжування, що підвищує якість результату ціною збільшення числа ітерацій. Для додаткового підвищення точності доцільно виконувати декілька стабілізаційних ітерацій при фіксованому значенні жорсткості.

Кінцевим результатом виконання чисельних розрахунків є неперервний опис геометрії, у межах якого положення кожної точки відрізка визначається співвідношенням (2.25). Якщо до j -тої ітерації розглядалися лише дискретні положення вузлових точок A_i^{j-1} , то після її завершення отримується

неперервне відображення (2.27), справедливе для всіх значень локального параметра $0 \leq s \leq s_i$. Важливим наслідком такої деформації є зміна довжини контуру. Для кількісної оцінки цього ефекту розглянемо, як змінюється довжина елементарного відрізка Δs у околі довільної точки s після деформації. З цією метою на першому етапі перепишемо вираз (2.27) з урахуванням співвідношення (2.22):

$$\vec{R}_i^j(s) = \vec{A}_i^{j-1} + \vec{t}_i \cdot X(s) + \vec{n}_i \cdot Y(s), \quad (2.32)$$

де:

$$X(s) = (s - W(s)\sin\theta(s)), Y(s) = W(s)\cos\theta(s). \quad (2.33)$$

Надалі співвідношення (2.33) розглядаються як параметричний опис кривої, у якому координати точки задаються через параметр s . Для обчислення локальних геометричних характеристик – елемента довжини дуги та кривини – використаємо стандартні співвідношення диференціальної геометрії. Для подальших викладок введемо допоміжні величини, що отримуються диференціюванням формул (2.33) за параметром s :

$$\dot{X}(s) = 1 - \dot{W}(s)\sin\theta(s) - W(s)\cos\theta(s) \cdot \dot{\theta}(s), \quad (2.34)$$

$$\dot{Y}(s) = \dot{W}(s)\cos\theta(s) - W(s)\sin\theta(s) \cdot \dot{\theta}(s). \quad (2.35)$$

Отримані допоміжні співвідношення дають змогу кількісно оцінити локальну зміну елемента довжини дуги в околі точки, що відповідає параметру s . Цю величину будемо інтерпретувати як деформацію $\varepsilon(s)$ та визначимо її наступним чином:

$$\varepsilon(s) = \frac{\Delta s_d}{\Delta s} = \sqrt{(\dot{X})^2 + (\dot{Y})^2}. \quad (2.36)$$

Для обчислення локальної кривини $\kappa_d(s)$ кривої, заданої співвідношенням (2.32), у кожній її точці використовується стандартна формула диференціальної геометрії, яка має такий вигляд:

$$\kappa_d(s) = \frac{\ddot{X}\dot{Y} - \ddot{Y}\dot{X}}{\left(\sqrt{(\dot{X})^2 + (\dot{Y})^2}\right)^3} = \frac{\ddot{X}\dot{Y} - \ddot{Y}\dot{X}}{(\varepsilon(s))^3}. \quad (2.37)$$

Розглянемо окремі складові, з яких формується чисельник співвідношення (2.37), та запишемо їх у розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} \ddot{X}(s) = & \ddot{W}(s)\sin\theta(s) + 2\dot{W}(s)\cos\theta(s) \cdot \dot{\theta}(s) \\ & - W(s)\sin\theta(s) \left(\dot{\theta}(s)\right)^2 + W(s)\cos\theta \cdot \ddot{\theta}(s), \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \ddot{Y}(s) = & \ddot{W}(s)\cos\theta(s) - 2\dot{W}(s)\sin\theta(s) \cdot \dot{\theta}(s) \\ & - W(s)\cos\theta(s) \left(\dot{\theta}(s)\right)^2 + W(s)\sin\theta \cdot \ddot{\theta}(s). \end{aligned} \quad (2.39)$$

З метою отримання компактнішого запису перетворимо наведені вирази, використовуючи базові диференційні співвідношення, що пов'язують основні параметри та задані рівняннями (2.2):

$$\begin{aligned} \ddot{X}(s) = & M(s)\sin\theta(s) + 2\theta(s)\cos\theta(s)M(s) \\ & - W(s)\sin\theta(s)(M(s))^2 + W(s)\cos\theta \cdot Q(s), \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \ddot{Y}(s) = & M(s)\cos\theta(s) - 2\theta(s)\sin\theta(s)M(s) \\ & - W(s)\cos\theta(s)(M(s))^2 - W(s)\sin\theta \cdot Q(s). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Об'єднане використання співвідношень (2.40), (2.41) та допоміжних виразів (2.34), (2.35) дає змогу обчислити уточнене значення кривини в кожній точці кривої.

2.3 Загальні властивості коротаційного балкового сплайна

Кортаційний балковий сплайн базується на попередніх досягненнях і методах балкових сплайнів. Його головна відмінність у задачі інтерполяції полягає у введенні удаваних точок, розташування та положення яких не впливають на результат – значення має лише їх мінімальна кількість. КБС володіє всіма зазначеними вище важливими властивостями. Нижче наведено їх перелік і обґрунтування.

Відтворюваність виконується за означенням властивостей балкових сплайнів. У кубічних балкових сплайнах контрольні точки є точками прикладання поперечної сили (третьої похідної). Ця сила призводить до зміни початкового положення точки. Якщо ж контрольна точка лежить безпосередньо на сплайні, додаткова сила не виникає, а отже форма сплайна не змінюється.

Круглість. Спеціальні тести наведено нижче. Спочатку розглядаються три точки, що лежать на колі радіуса 1, з кутовими відстанями: 60° між точками 1 і 2, 60° між 2 і 3 та 240° між 3 і 1. Очевидно, у цьому випадку необхідно вводити удавані точки. Аналогічно розглядається випадок чотирьох точок, розташованих на колі. Точне розміщення удаваних точок не має значення. У деяких випадках вони спочатку розташовуються на значній відстані від потрібного положення, проте після кількох ітерацій знову займають коректне положення на ідеальному колі.

Монотонна кривина. Основною властивістю КБС є те, що третя похідна положення кривої в межах кожного сегмента між двома контрольними точками є сталою. Це означає, що кривина змінюється лінійно між ними, а локальні максимуми й мінімуми кривини досягаються саме в контрольних точках, де поперечна сила (третья похідна) різко змінює своє значення. Удавані

точки не створюють додаткових сил, тому вони не впливають на зміну кривини. Отже, чим менша кількість контрольних точок, тим меншою є варіація обчисленої кривини.

Неперервність і локальність. КБС є C^2 -неперервним у контрольних точках. Що стосується локальності, то, з одного боку, КБС є глобальним методом, і теоретично зміна положення будь-якої точки на кривій призводить до зміни всієї кривої. З іншого боку, методологія балкових сплайнів побудована так, що положення кривої в усіх інших контрольних точках не змінюється взагалі. Крива зазнає змін лише на проміжних сегментах між контрольними точками. Більше того, якщо розглядати задану контрольну точку як точку з номером «0», то вплив цієї зміни стає практично незначним для сегментів, розташованих між контрольними точками з номерами «4» і більшими. Це проілюстровано на Рисунок 2.2. Екстремальні значення відхилення сплайна від початкового горизонтального положення також наведено в Таблиця 2.1. Таким чином, фактично запропонований сплайн задовольняє цю вимогу, а також гіпотезу 1 роботи [43].

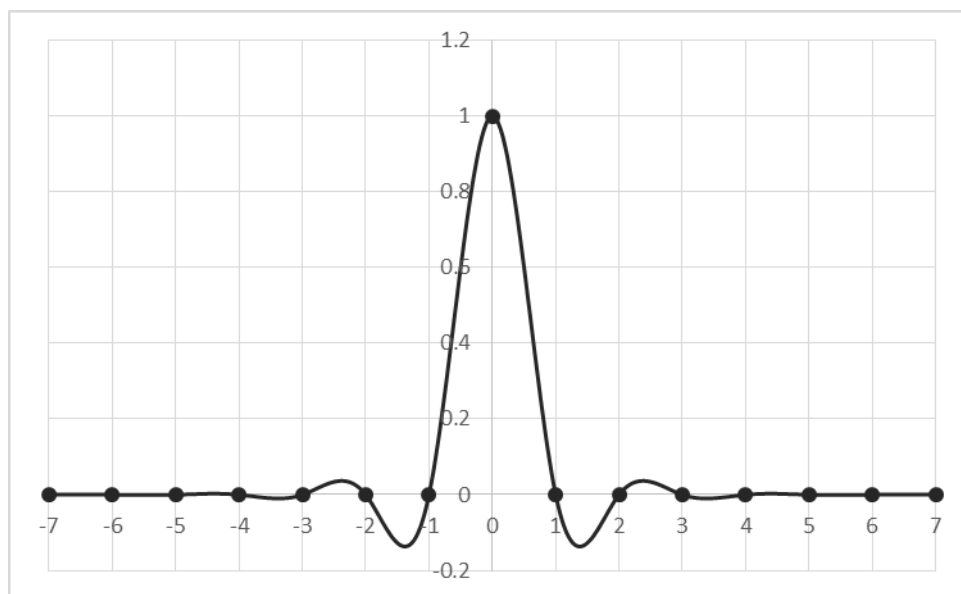


Рисунок 2.2 – Відхилення балкового сплайна, спричинене одиничним зсувом контрольної точки

Таблиця 2.1 – Координати та відхилення екстремальної точки на кожному сегменті

Проміжок	Екстремальна точка	Відсоток відхилення
1-2	(1.366667; -0.136558)	13.656
2-3	(2.366667; 0.03659)	3.659
3-4	(3.366667; -0.009804)	0.980
4-5	(4.366667; 0.002627)	0.263
5-6	(5.366667; -0.000704)	0.070
6-7	(6.366667; 0.000189)	0.019

Приклад 1. Розглянемо спочатку випадок, коли задані точки точно лежать на коловій дузі. Нехай задано чотири точки: $B_1(x_1 = -2, y_1 = 1)$, $B_2(2, 1)$, $B_3(2, -1)$, $B_4(-2, -1)$. Задані координати однозначно визначають коло радіуса $R = \sqrt{5} \approx 2.236$, що відповідає сталій кривині $\kappa = 0.4472$.

Переходячи до розрахункової процедури, зазначимо, що у випадку точно заданих точок (без урахування удаваних допоміжних точок) потреба в ітераційному алгоритмі відпадає, оскільки розв'язок безпосередньо впливає з початкових умов. У такій ситуації застосовується четверта умова спряження у формі рівняння (2.19). Оскільки весь розрахунок відповідає першій ітерації, ця умова приймається в такому вигляді:

$$W_{i,1} = 0. \quad (2.42)$$

Результати виконаних розрахунків наведені на Рисунок 2.3, а–в. Через малу кількість вихідних точок – усього чотири – отримані графіки не можна вважати неперервними. Зокрема, графік положення залишається неперервним,

тоді як розподіл кутів (дотичних) і графік кривини (моментів) мають розриви в точках вимірювання. Як зазначалося раніше, така поведінка зумовлена фундаментальними припущеннями теорії балок, у межах якої вважається, що кути повороту є малими. Оскільки розподіл кутів є розривним, відповідні значення моментів (кривини) не можуть вважатися повністю точними. Отримане значення кривини $\kappa = 0.5235$ приблизно на 17% перевищує точне теоретичне значення (Рисунок 2.3, б). Слід також зазначити, що вісь абсцис на графіку Рисунок 2.3, б відповідає початковій довжині периметра прямокутника, утвореного чотирма заданими точками, яка дорівнює $4 + 2 + 4 + 2 = 12$.

Варто підкреслити, що розраховані кривини фактично є внутрішніми параметрами розв'язку в рамках теорії балок, а не справжніми геометричними кривинами отриманого контуру. Реальні значення кривини необхідно визначати за співвідношеннями (2.37). Для цього врахуємо вплив деформованої довжини відповідно до формули (2.37). Отриманий графік геометричних кривин, наведений на Рисунок 2.3, в, показує, що екстремальні значення кривини істотно перевищують результати, передбачені теорією балок. Таким чином, хоча таке уточнення не покращує значення моментів на Рисунок 2.3, б, воно точно відображає геометрію отриманої фігури.

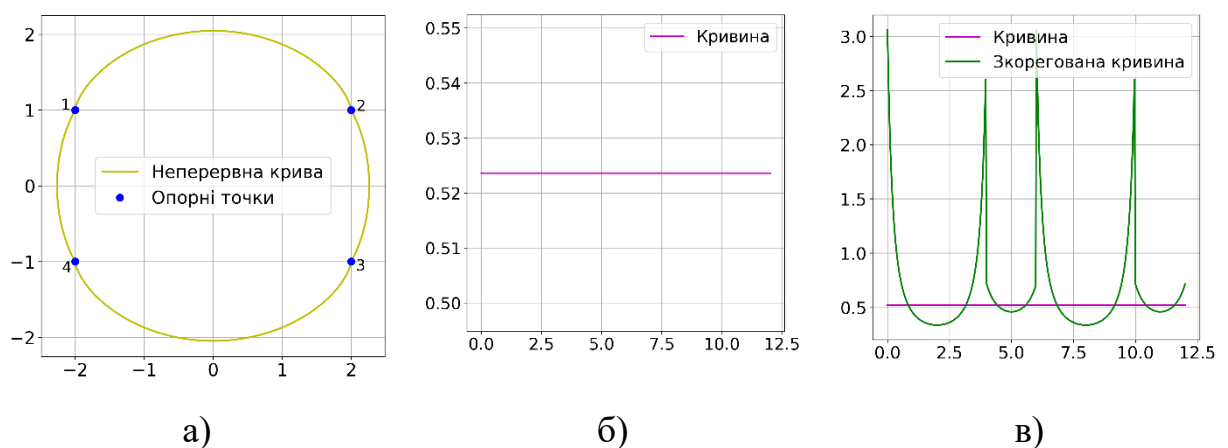


Рисунок 2.3 – Відновлення колової кривої за чотирма виміряними точками, що відповідають вершинам прямокутника: а) отримана реконструйована

фігура; б) значення кривини, визначені в межах теорії балок; в) геометрично обчислені кривини.

Для підвищення точності результатів вводимо поняття удаваних проміжних точок. З цією метою в розрахунковій схемі, наведеній на Рисунок 2.3, а, у середині кожного відрізка між сусідніми реальними точками додається по одній додатковій точці. Ці допоміжні точки позначаються як B_{1-2} , B_{2-3} , B_{3-4} , B_{4-1} , після чого визначаються їх координати. Послідовне з'єднання точок B_1 , B_{1-2} , $B_2 \dots B_4$, B_{4-1} , B_1 утворює уточнений замкнутий багатокутний контур. У реальних точках застосовуються умови спряження (2.42), тоді як в удаваних точках використовується умова (2.21).

Результати відповідних розрахунків наведені на Рисунок 2.4. Отримані графіки стають помітно гладкішими, а злами кутів практично не спостерігаються візуально, хоча формально вони залишаються. Розрахункові значення кривини за теорією балок становлять 0.4773, що перевищує точне значення на 6.7%. Водночас геометричні кривини, визначені за формулою (2.37), усе ще суттєво відрізняються від цих величин. Максимальні значення кривини виникають у реальних точках вимірювання і майже у 1.5 раза перевищують точну кривину кола.

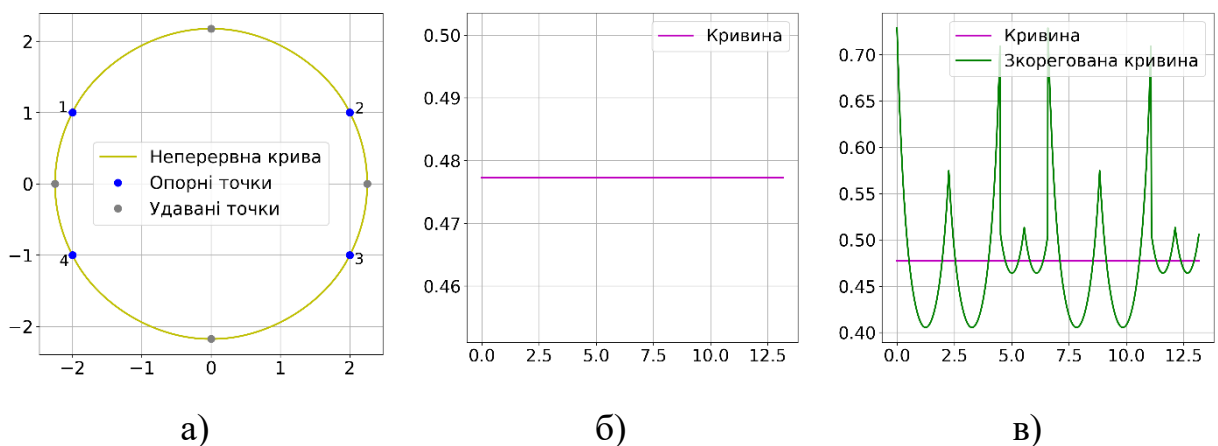


Рисунок 2.4 – Відновлення колової кривої за чотирма реальними точками з додаванням чотирьох удаваних допоміжних точок: а) отримана

реконструйована геометрія; б) значення кривини, визначені в рамках теорії балок; в) кривини, перераховані за формулою (2.37).

Аналогічним чином введемо додаткові допоміжні точки, розташовані в середині відрізків між усіма вісьмома точками, використаними на попередньому етапі. У результаті загальна кількість розглядуваних точок зростає до шістнадцяти, серед яких чотири є реальними (для них застосовуються умови (2.42)), а дванадцять – удаваними, що задовольняють умови спряження (2.21). Відповідні результати наведені на Рисунок 2.5, де відтворена фігура візуально практично не відрізняється від точного кола. Розрахункове значення кривини за теорією балок (фіолетова крива на Рисунок 2.5, б та Рисунок 2.5, в) становить 0.4564, що відрізняється від точного значення приблизно на 2%. Далі визначимо істинну геометричну кривину за формулою (2.37), як показано на Рисунок 2.5, б. Отримані значення значно краще наближаються до кривини ідеального кола, однак зберігаються періодичні коливання відносно точного значення з похибкою близько $\pm 10\%$.

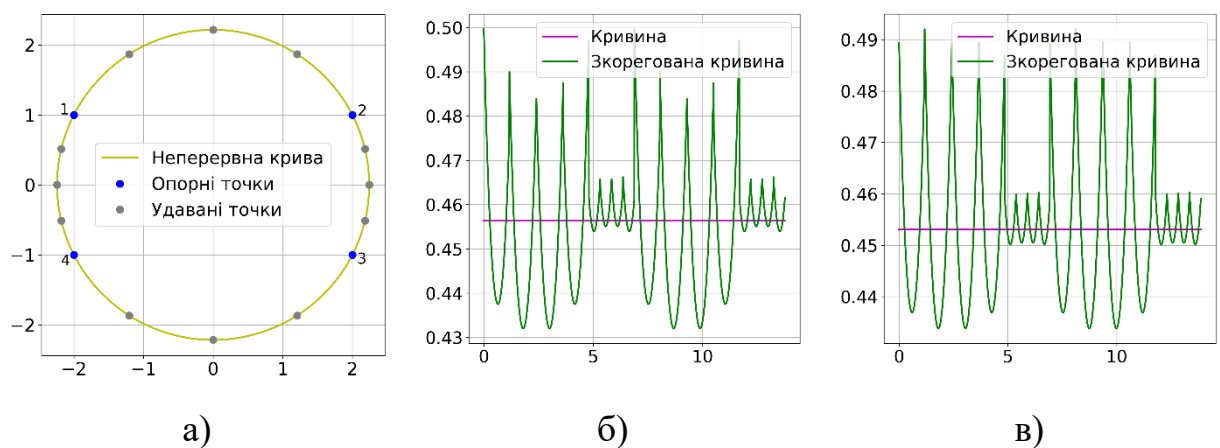


Рисунок 2.5 – Відновлення колової кривої за чотирма реальними точками з додаванням дванадцяти удаваних допоміжних точок: а) отримана реконструйована геометрія; б) розподіли балкових та геометричних кривин після першої ітерації; в) розподіли кривини після другої ітерації.

Подальше покращення результатів можливе шляхом виконання додаткової ітерації. Використовуючи отриманий розв'язок, уточнюємо положення лише удаваних точок і повторюємо розрахунок. Графік уточненого розподілу кривини наведений на Рисунок 2.5, в, де спостерігається невелике, але помітне покращення результатів. Цей приклад демонструє можливість ітераційного уточнення геометрії шляхом повторного визначення початкового положення удаваних точок.

Продовжуючи той самий підхід, додатково вводимо ще шістнадцять удаваних допоміжних точок. У результаті розрахункова схема містить чотири реальні точки вимірювання та двадцять вісім удаваних точок. Відповідні результати обчислень наведені на Рисунок 2.6. Значення кривини, отримані в межах теорії балок, показані на Рисунок 2.6, б. На Рисунок 2.6, в наведені геометричні кривини, визначені після виконання третьої додаткової ітерації, під час якої здійснюється подальше уточнення положення удаваних точок. Отримані значення геометричної кривини характеризуються високою точністю, а в остаточному випадку відхилення від точного значення становить приблизно 2%.

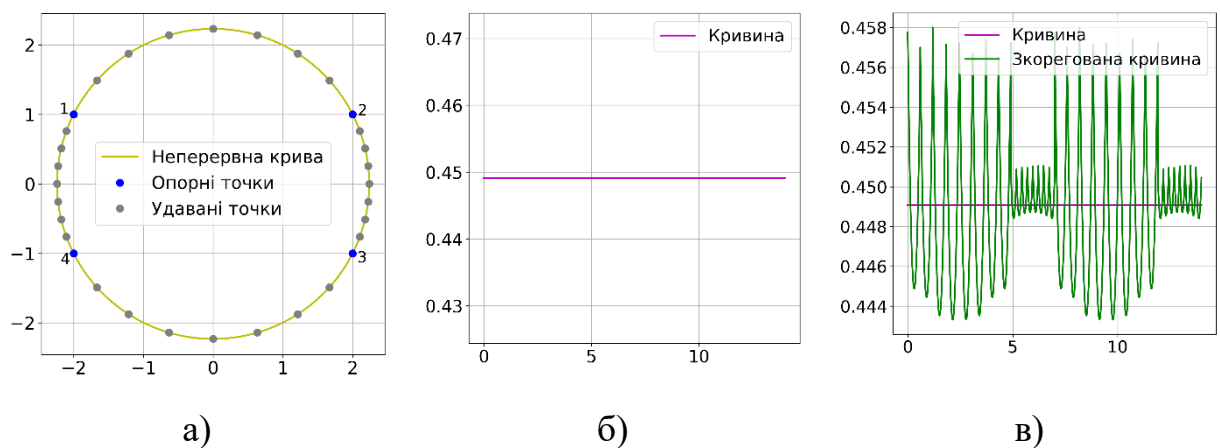


Рисунок 2.6 – Відновлення колової кривої за чотирма реальними точками з додаванням двадцяти восьми удаваних допоміжних точок: а) отримана реконструйована геометрія; б) значення кривини, визначені в межах теорії балок; в) кривини, перераховані за формулою (2.37).

На перший погляд може виникнути припущення, що висока точність відтворення при використанні удаваних точок обумовлена саме точністю їх початкового розміщення. Проте для підтвердження того, що вирішальним є факт наявності цих точок, а не їх конкретна позиція, проведемо наступний числовий експеримент. Розглянемо конфігурацію з 32 вузлів (4 реальних та 28 удаваних), отриману в попередньому розрахунку. Для зручності перенумеруємо точки, починаючи з реальної точки B_1 . Далі штучно змістимо назовні від колового контуру положення точок №4, №14 та №26, як показано на Рисунок 2.7, а. Змінену множину точок використаємо для формування нового початкового багатокутника, який служитиме вихідною геометрією для подальших ітерацій. Окремі результати наведені на Рисунок 2.7. Після першої ітерації розрахований контур навіть містить локальні петлі (Рисунок 2.7, б) і зовсім не нагадує ідеальне коло. Після другої ітерації (Рисунок 2.7, в) форма вже візуально наближається до овалу. Кожна наступна ітерація поступово покращує контур, і вже на шостій ітерації він практично не відрізняється від кола. Після дев'ятої ітерації розподіл кривини (Рисунок 2.7, е) майже повністю збігається з результатами, отриманими раніше (див. Рисунок 2.6, в). Таким чином, використання 32 точок є майже достатнім для опису замкнутого колового контуру в рамках теорії балкових сплайнів. У практичному сенсі це означає, що крок дискретизації за кутом (приблизно, з огляду на нерівномірність кутового розбиття) не повинен перевищувати $360/32 \approx 12^\circ$.

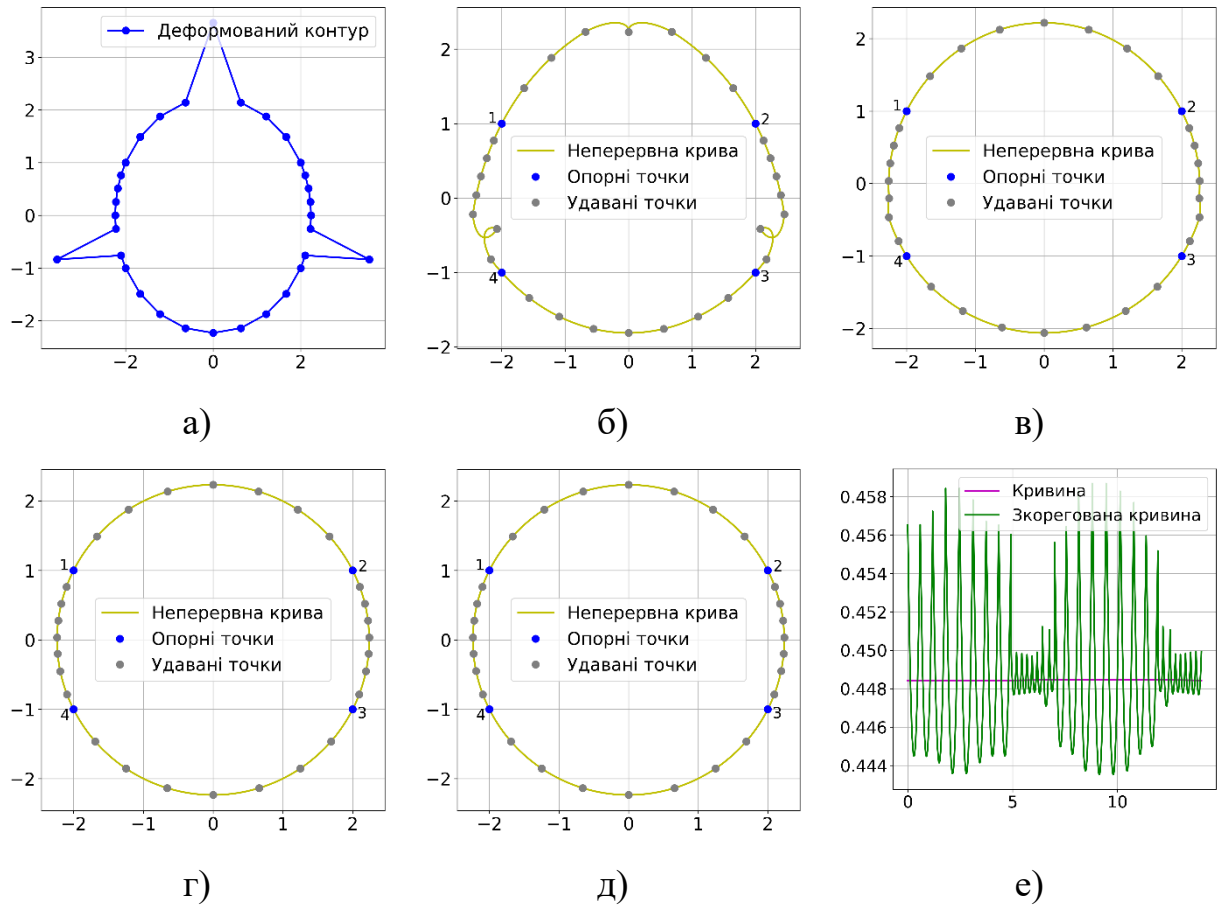
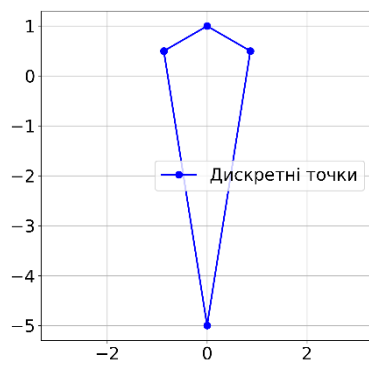


Рисунок 2.7 – Відновлення колової кривої за чотирма реальними точками та двадцятьма вісьмома удаваними допоміжними точками, три з яких були істотно зміщені: а) початкова конфігурація точок; б) відтворений контур після першої ітерації; в) контур після другої ітерації; г) контур після шостої ітерації; д) контур після дев'ятої ітерації; е) розподіл кривини після дев'ятої ітерації.

Приклад 2. Розглянемо відтворення колової кривої за нерівномірно розташованими точками. У практичних умовах вимірювання часто обмежені, і доступним для фіксації є лише певний сегмент кола. Нехай задано три точки (Рисунок 2.8): $B_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $B_2(0, 1)$, $B_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Зазначені координати відповідають колу одиничного радіуса, а отже, кривина також дорівнює 1. Проте ці точки охоплюють лише третину повного колового контуру. Через значну нерівномірність розташування виникають великі кути неузгодження між сусідніми відрізками: між першим і другим вони становлять 60° , між

другим і третім – -120° , а між третім і першим – 120° . Коли такі кути перевищують 90° , порушуються базові припущення теорії балок, оскільки кут уже не є близьким до свого тангенса і навіть може мати протилежний знак. З цієї причини на початковому етапі необхідно вводити допоміжні удавані точки. Для запуску обчислювальної процедури достатньо додати одну таку точку, наприклад, $B_{3-1}(0, -5)$. Відповідні результати наведені на Рисунок 2.8. Після розрахунку отриманий контур містить петлю і суттєво відхиляється від очікуваної колової форми.



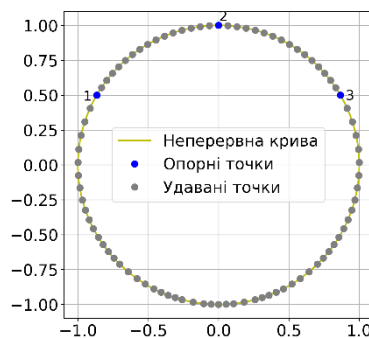
а)



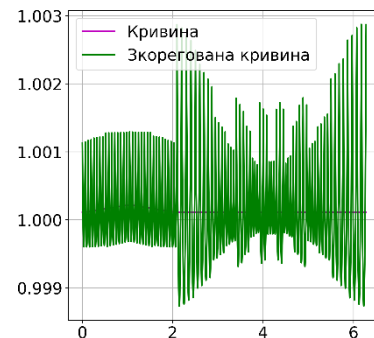
б)

Рисунок 2.8 – Спроба відновлення колової кривої за трьома реальними точками, що охоплюють дугу 120° , та однією удаваною допоміжною точкою:

а) початкова конфігурація точок; б) отриманий контур із наявною петлею.



а)



б)

Рисунок 2.9 – Відновлення колової кривої за трьома реальними точками, розташованими на верхній дузі кола з удаваними точками: а) отримана конфігурація точок; б) розподіли балкових і геометричних кривин.

Отриману фігуру, показану на Рисунок 2.8, б, приймемо як початкову геометрію та введемо по 25 додаткових удаваних точок між раніше заданою удаваною точкою і точками 1 та 3. Далі виконуємо декілька ітерацій розрахунку до моменту стабілізації геометричної форми (Рисунок 2.10). У результаті отримується конфігурація, що складається з трьох реальних і вісімдесяти трьох удаваних точок, яка візуально добре наближає коло одиничного радіуса. Зокрема, довжина діаметра вздовж осі x практично дорівнює 2, а ордината найнижчої точки (що відповідає удаваній точці) є близькою до значення -1 . Відповідні розподіли балкових і геометричних кривин наведені на Рисунок 2.10. Варто відзначити, що балкові кривини практично збігаються з точним значенням (похибка менша за 0.1%), тоді як геометричні кривини демонструють дещо більші відхилення, які сягають приблизно 0.3%.

2.4 Задачі інтерполяції

У цьому пункті ми розглянемо властивості КБС щодо задач інтерполяції для фігур, кривина яких змінюється досить суттєво.

Приклад 3. У цьому прикладі розглядається більш складна геометрична фігура – еліпс. На відміну від кола, його кривина змінюється вздовж контуру, тому становить інтерес дослідити можливість її визначення за дискретним набором точок еліпса.

Рівняння еліпса задамо у параметричній формі відносно параметра φ , де:

$$x = a * \cos(\varphi), \quad (2.43)$$

$$y = b * \sin(\varphi), \quad (2.44)$$

де a та b є велика та піввісь еліпса, відповідно. Кривина еліпса визначається таким рівнянням:

$$\kappa(\varphi) = \frac{a * b}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)(\cos(\varphi))^2}}^3. \quad (2.45)$$

Прийmemo що $a = 2, b = 1$. Відмітимо, що при $\varphi = 0$ кривина набуває значення $\kappa(0) = \frac{a}{b^2} = 2$, тоді як при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ вона дорівнює $\kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{b}{a^2} = \frac{1}{4}$. Отже, на чверті еліпса (90°) кривина змінюється у вісім разів.

Було згенеровано 40 точок таким чином, щоб зміна кривини відбувалася пропорційно, з коефіцієнтом $k = \sqrt[10]{8}$. Параметричні координати φ_i цих точок визначаються за рівнянням (3.3). На Рисунок 2.10 наведено розташування 40 згенерованих точок еліпса, а також реконструйований контур і відповідні розподіли балкової та геометричної кривини.

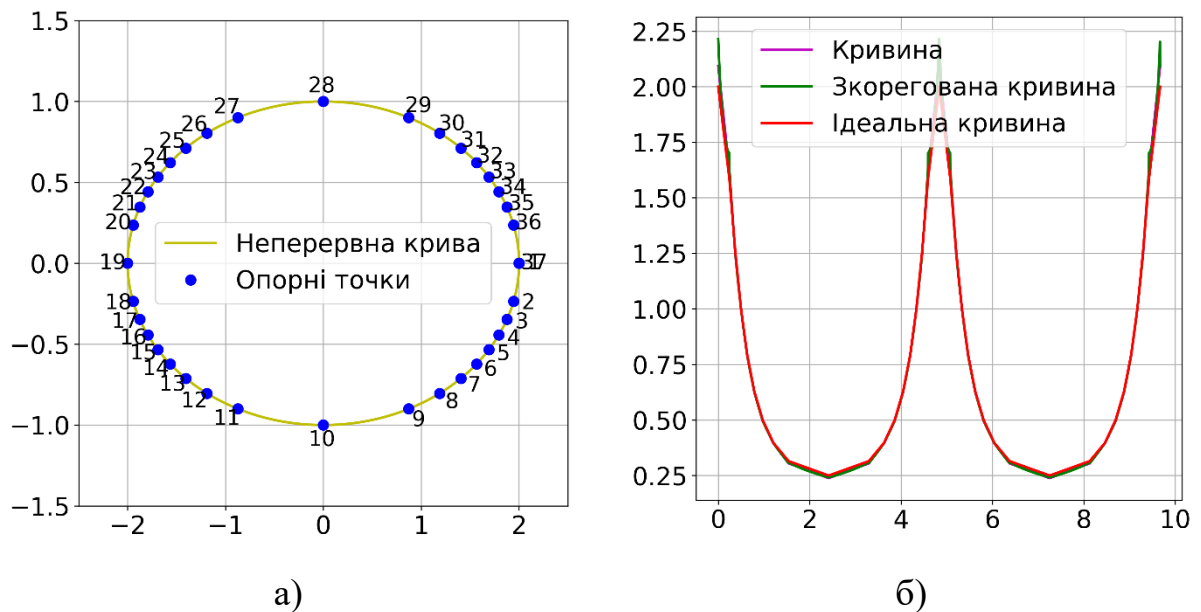


Рисунок 2.10 – Відновлення еліптичного контуру за дискретним набором точних точок: а) вхідні точки та отримана розрахункова геометрія; б) порівняння графіка кривини ідеального еліпса з розрахунковими значеннями кривини.

Загалом спостерігається дуже висока відповідність точному розв'язку. Помітні відхилення виникають лише в точках, що лежать на осі x , де різниця між геометричною кривою та точним значенням досягає приблизно 10%.

При додаванні буквально ще однієї точки в кожному із чотирьох проміжках, що розташовані біля осі x , і проведення ще декількох ітерацій ми отримаємо наступні результати, Рисунок 2.11. За таких змін різниця між аналітичними кривими та розрахунковими становить менше 1%. Це досягнуто за рахунок того, що точка була введена в зону найбільшої кривини.

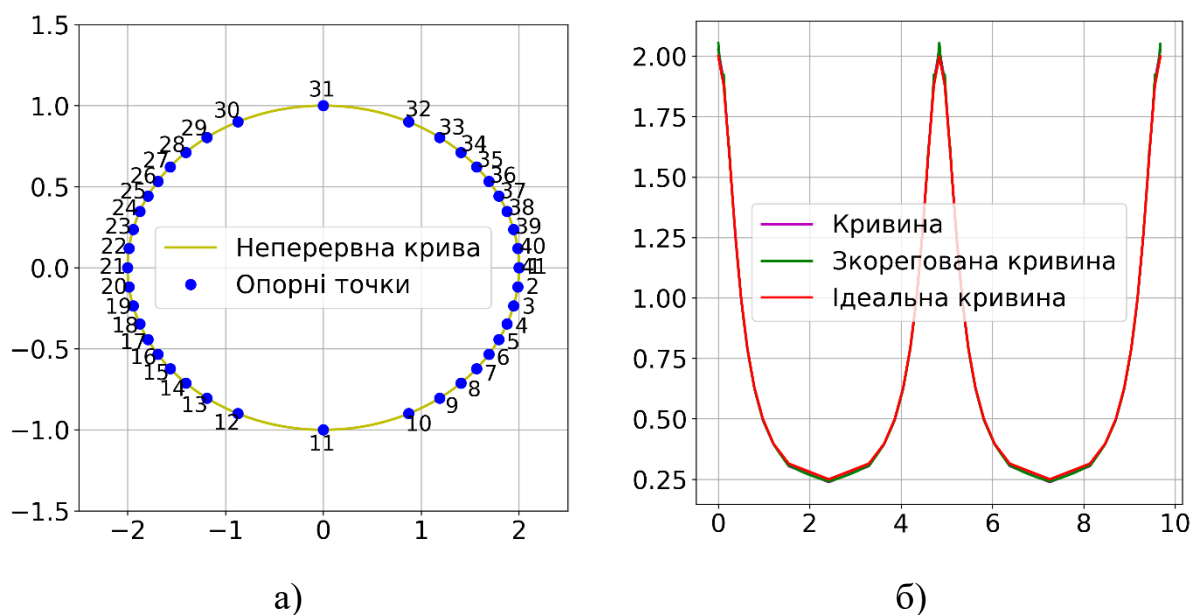


Рисунок 2.11 – Відновлення еліптичної кривої за дискретними точними точками з додаванням додаткової точки поблизу осі x : а) початкова конфігурація точок та отримана розрахункова геометрія; б) порівняння графіка кривини ідеального еліпса з розрахованими значеннями кривини.

Приклад 4. Далі дослідимо здатність методу КБС забезпечувати плавний перехід між двома прямолінійними ділянками. Для цього розглянемо прямокутник розміром 4×4 . Уздовж кожної сторони розміщено точки з кроком 0,5, при цьому кутові вузли свідомо виключено (див. Рисунок 2.12). Після цього виконується перша ітерація з використанням лише реальних точок вимірювання. Отриманий S-подібний контур наведено на Рисунок 2.12, а.

Важливо відзначити, що відновлена крива не містить небажаних точок перегину [51], а сформований S-контур є достатньо гладким і відповідає загальноприйнятим естетичним критеріям.

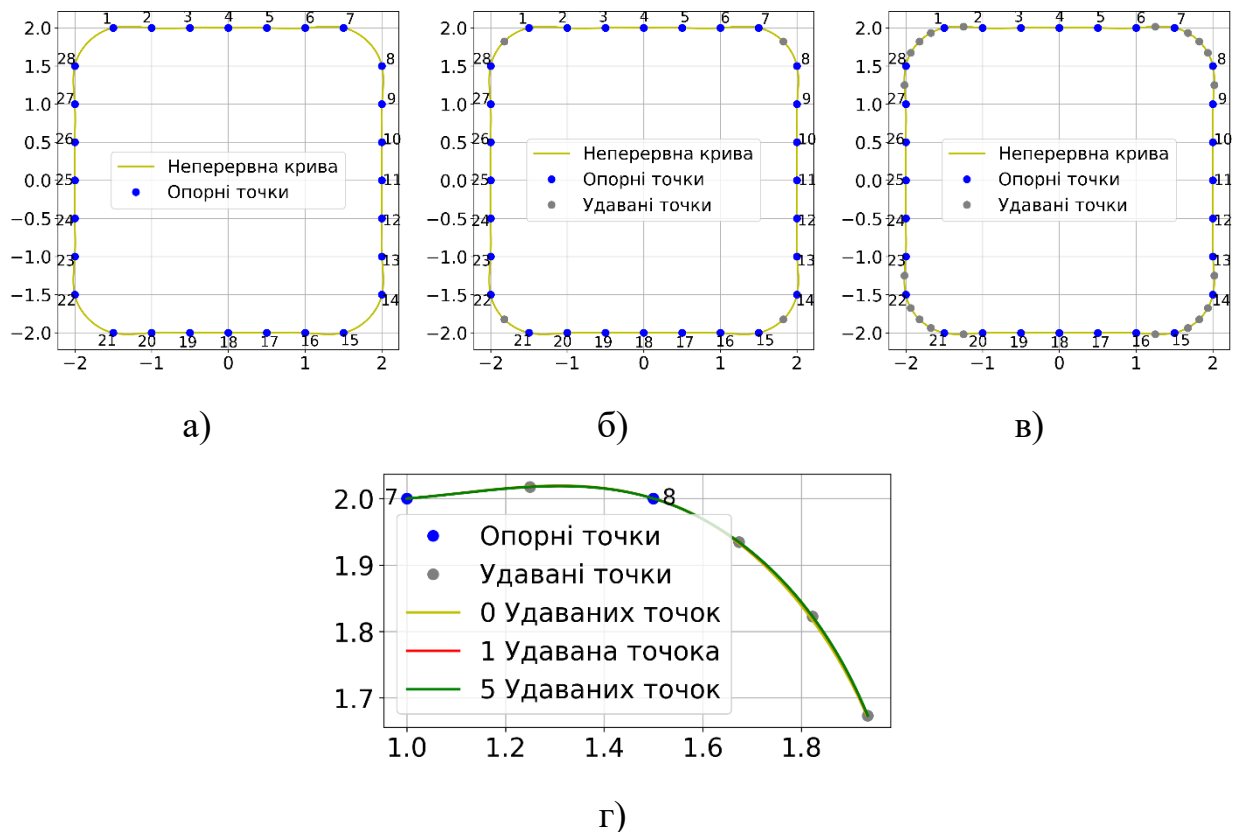


Рисунок 2.12 – Згладжування кутових ділянок прямокутного контуру: а) початкові точки та сформований S-подібний контур; б) S-контур з додаванням однієї удаваної точки в кожному куті; в) S-контур із п'ятьма удаваними точками, введенними в кожному куті; г) збільшене зображення поведінки сплайнів поблизу кута.

На наступному етапі в область кожного кута було введено по одній удаваній допоміжній точці. Відповідні результати наведені на Рисунок 2.12, б, де отриманий S-подібний контур практично не змінює свого візуального вигляду. Надалі до кожного кута було додано по три удавані точки, а також по одній удаваній точці розміщено в середині кожної прилеглої ділянки (Рисунок 2.12, в). Збільшене зображення трьох отриманих S-контурів для верхнього

правого кута (його половини) наведено на Рисунок 2.12, г. Порівняння показує, що відмінності між усіма трьома кривими є незначними, що підтверджує високу здатність балкового сплайна ефективно згладжувати кути прямокутника.

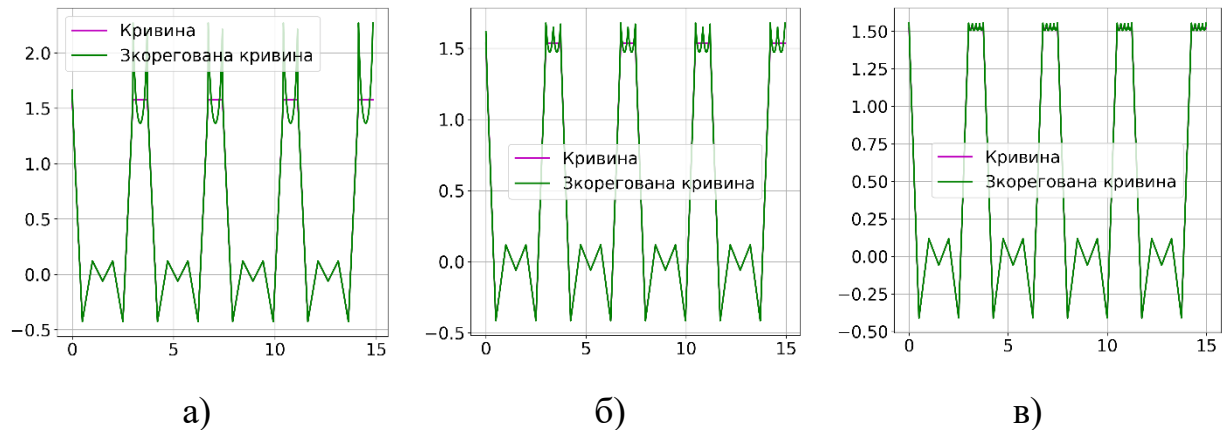


Рисунок 2.13 – Графіка кривини прямокутного контуру: а) без додавання удаваних точок; б) при додаванні 1 удаваної точки; в) при додаванні 5 удаваних точок.

Для порівняння ці самі дані було прораховано за допомогою параметричного кубічного сплайна. Особливістю цього методу полягає в застосування параметра t . Складність вибору цього значення полягає в тому, що не існує фізичних відповідників, як наприклад, відстань між точками в методі КБС. Нижче наведено приклад для квадрата який також складається з 28 точок. Для ділянок, що лежать на прямих лініях, значення допоміжного параметра $0 \leq t \leq 1$ а для кутових відрізків його максимальне значення t_{max} приймалось як 0,5; 1; 2.

Аналіз результатів, наведених на Рисунок 2.14, показує, що параметричний сплайн дозволяє отримувати якісні результати, однак це потребує додаткової роботи, пов'язаної з підбором оптимального значення параметра t_{max} окремо для кожної ділянки.

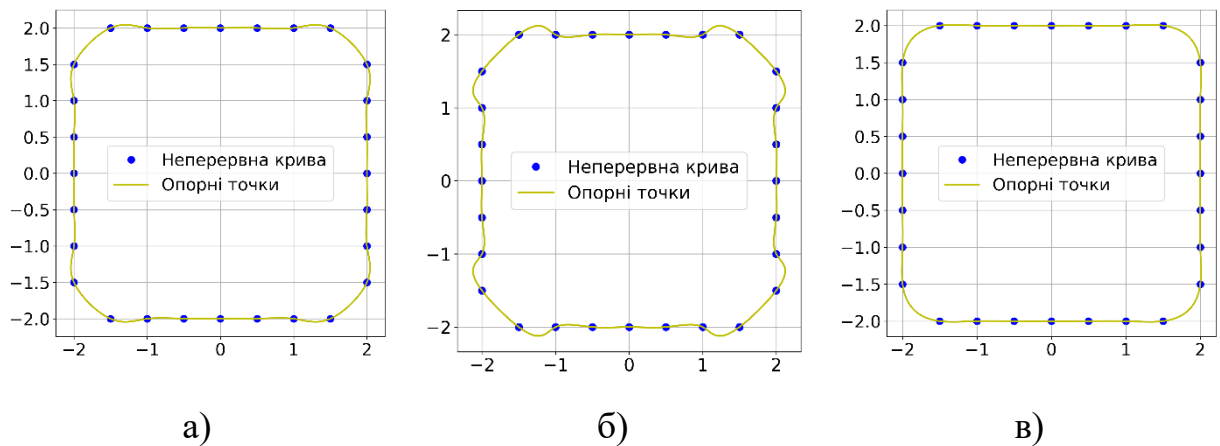


Рисунок 2.14 – Параметричний сплайн з максимальним значенням t_{max} кутових відрізків: а) $t_{max} = 1$; б) $t_{max} = 0,5$; в) $t_{max} = 2$

2.5 C^1 задача Ерміта

У цьому розділі розглядається та аналізується низка споріднених тестових задач. Для цілей порівняння в окремих прикладах також використовується класична крива Безьє. Основна увага приділяється відносно простій постановці задачі, у якій геометрія визначається двома граничними точками з наперед заданими напрямками дотичних у кожній з них.

Приклад 1. Перша гранична точка B_1 розташована в початку координат із координатами $(X = 0, Y = 0)$, тоді як друга точка B_2 має координати $(X = 150, Y = 0)$. У точці B_1 напрям дотичної є вертикальним, що відповідає куту -90° , відліченому за годинниковою стрілкою від горизонтальної осі, а в точці B_2 заданий кут дотичної дорівнює 90° . Така постановка відповідає відомій задачі Горна [39], яка продемонструвала, що мінімізація енергії не завжди призводить до побудови найкращої кривої. Саме це спостереження згодом зумовило появу альтернативних критеріїв оптимальності, зокрема мінімізації квадрата похідної від кривини [29].

З геометричної точки зору найбільш природним розв'язком у цьому випадку є півколо з діаметром, що дорівнює 150. Довжина дуги такої кривої визначається як $L_0 = \pi \cdot \frac{150}{2} = 235,62$. Далі можна обчислити показник якості,

який у даному контексті інтерпретується як енергія ідеальної півколової кривої. Відповідно до співвідношення, це значення дорівнює $E_0 = \left(\frac{2}{150}\right)^2 \cdot \frac{\pi 150}{2} \approx 0.041888$.

Побудова сплайнів здійснюється з використанням кількох різних підходів, що проілюстровано на Рисунок 2.15. Позначення БЗ 95.26 відповідає сплайна Безьє, у якому дві допоміжні контрольні точки розміщуються вздовж заданих дотичних на відстані 95.26 від кожної з граничних точок. Аналогічно, крива з маркуванням БЗ 100.23 формується шляхом розміщення по одній контрольній точці на кожній дотичній на відстані 100.23. Метод геометрично нелінійної балки, ГНБ, параметризується заданою довжиною балки, тому позначення ГНБ 230 означає, що довжина балки приймається рівною 230. Як для підходу на основі сплайнів Безьє (БЗ), так і для методу ГНБ можливе отримання багатьох варіантів кривих залежно від вибору параметрів. На відміну від цього, метод КБС приводить лише до єдиної можливої конфігурації.

Аналіз отриманих результатів насамперед показує, що метод КБС відтворює ідеальну півколову форму. Інші побудовані криві, незважаючи на використання різних підходів, на перший погляд дуже добре наближаються до еталонної геометрії, і кожна з них візуально здається здатною коректно описати шукану кругову форму.

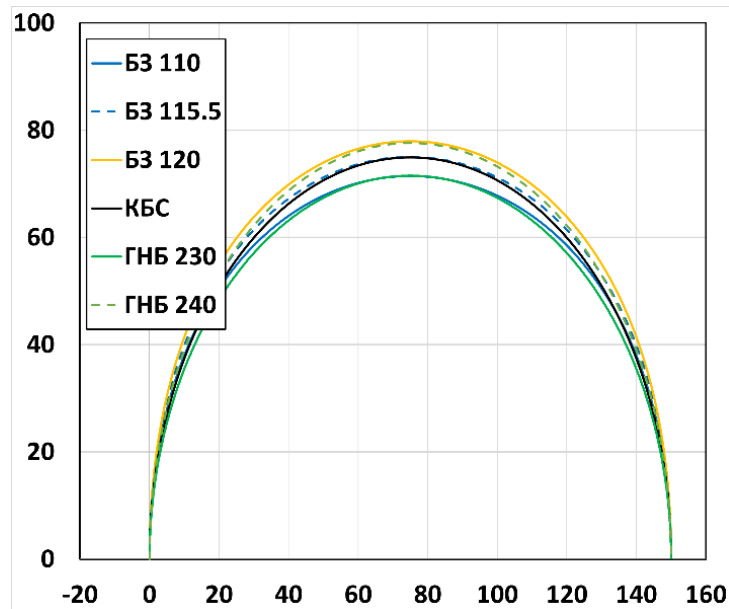


Рисунок 2.15 – Приклади сплайнових кривих, побудованих за методом Безьє з чотирма контрольними точками, а також із використанням методів КБС та ГНБ.

У цьому сенсі значно більш інформативними є графіки залежності кривини від координати довжини дуги для кожного зі сплайнів, наведених на Рисунок 2.16. Саме вони дають змогу сформулювати більш однозначні та обґрунтовані висновки. По-перше, ці графіки підтверджують, що метод КБС дійсно здатний відтворювати ідеальну кругову форму. Хвилястий характер кривої кривини зумовлений недостатньою кількістю удаваних точок: зі збільшенням їх числа розподіл кривини стає значно гладкішим. По-друге, сплайни на основі кривих Безьє демонструють помітні відхилення від ідеального кола для всіх розглянутих параметрів оптимізації, зокрема для різних відстаней контрольних точок від граничних. По-третє, метод ГНБ є надзвичайно потужним і водночас чутливим до вибору заданої довжини балки. У випадку, коли ця довжина збігається з довжиною ідеального кола, крива ГНБ фактично відтворює саме цю ідеальну кругову форму.

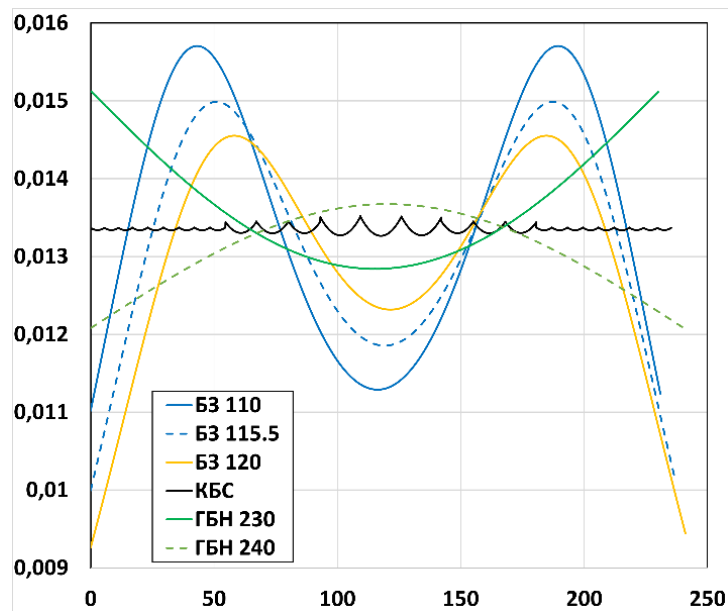


Рисунок 2.16 – Розподіли кривини, отримані з використанням різних сплайнових методів для задачі 1.

Далі виконується порівняння якості кожної побудованої кривої, яка оцінюється за енергетичним показником. Відповідні числові результати наведені в Таблиця 2.2, де подано як абсолютні значення енергії, так і їх нормалізовані величини, отримані шляхом ділення на еталонне значення для ідеального півкола (0.41888). Для методу КБС спостерігається незначне відхилення від ідеального випадку, що пояснюється обмеженою кількістю удаваних точок, використаних у розрахунках (лише 28). Натомість результати, отримані для сплайнів Безьє, у всьому розглянутому діапазоні відстаней додаткових контрольних точок залишаються близькими до одиниці, при цьому найменше значення енергії досягається для кривої БЗ 103.92.

Таблиця 2.2 – Обчислені значення енергії для різних сплайнових побудов у задачі 1.

Крива	БЗ 110	БЗ 115.5	БЗ 120	КБС	ГНБ 230	ГНБ 240	ГНБ 410
Якість	0.04305	0.04190	0.04113	0.04190	0.04302	0.04118	0.03793
Норм. якість	1.02774	1.0003	0.9818	1.0003	1.0448	0.9831	0.9054

Приклад 2. Розглядувана задача за своєю постановкою є дуже близькою до симетричної задачі 1. Єдина відмінність полягає у граничних умовах для дотичних: значення кутів були 60° та -60° відповідно.

З інтуїтивної точки зору оптимальною еталонною формою і в цьому випадку є півколо. Прості геометричні міркування показують, що його діаметр має задовольняти співвідношення $D/2\cos 30^\circ = 75$, звідки отримуємо $D = 173.20$. Відповідно, довжина дуги ідеальної кривої становить 181.37. Енергетичний показник цієї ідеальної конфігурації дорівнює 0.02418.

Побудову сплайнів виконано з використанням кількох різних методів, що показано на Рисунок 2.17. Як і в попередньому випадку, підхід КБС відтворює ідеальну півколову форму. Сплайн Безьє забезпечує особливо близьке наближення за умови, що відстань розміщення допоміжних контрольних точок дорівнює 67. За менших значень цієї відстані крива Безьє розташовується нижче ідеального півкола, тоді як за більших – зміщується вище еталонної кривої. Подібна закономірність спостерігається і для сплайнів ГНБ: якщо задана довжина балки є меншою за довжину ідеального півкола, побудована крива лежить нижче нього, а у протилежному випадку – вище ідеальної геометрії.

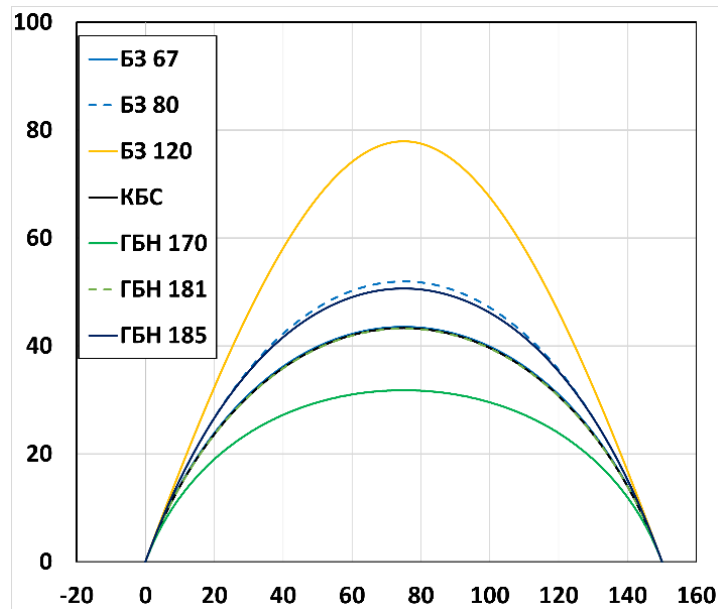


Рисунок 2.17 – Приклади сплайнових кривих, побудованих за методом Безьє, а також із застосуванням методів КБС та ГНБ для задачі 2.

Найбільш інформативним є подання результатів у вигляді графіків кривини для кожного зі сплайнів, наведених на Рисунок 2.18. Серед побудов на основі кривих Безьє сплайн БЗ 67 демонструє майже повну відповідність ідеальній круговій формі, а його кривина практично збігається з теоретичним значенням. Аналогічний рівень точності спостерігається також для методу КБС та для сплайна ГНБ із довжиною балки 185. Порівняно з результатами для методу КБС у задачі 1 (Рисунок 2.16), розподіл кривини для КБС у задачі 2 є значно гладкішим. Це пояснюється використанням істотно більшої кількості удаваних точок – у даному випадку їх кількість становить 120. Загалом, графіки кривини є ключовим інструментом для оцінювання та порівняння якості різних сплайнових побудов.

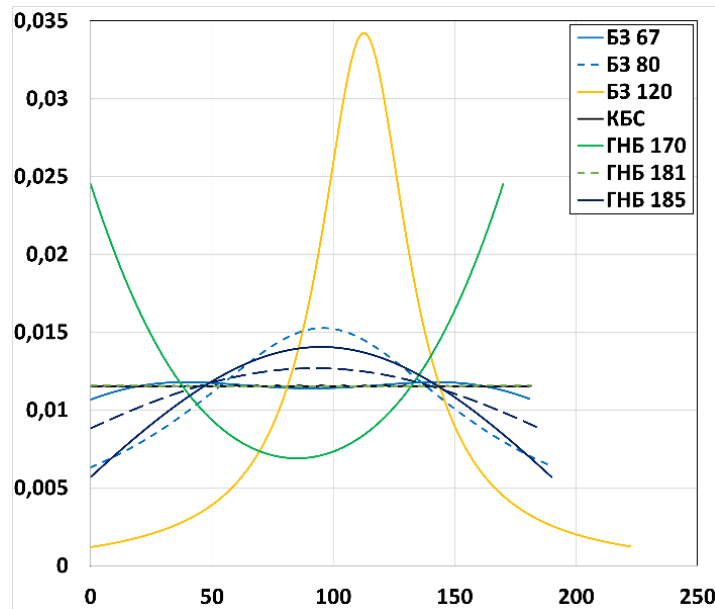


Рисунок 2.18 – Профілі кривини, отримані з використанням різних сплайнових методів для задачі 2.

Далі виконується порівняння побудованих кривих за показником якості, визначеним через енергію. Відповідні числові результати для задачі 2 наведені в Таблиця 2.3. Попри те, що деякі з отриманих кривих можуть виглядати візуально дуже близькими, їхні енергетичні значення іноді суттєво відрізняються. Це наочно демонструє, що енергія не може розглядатися як єдиний критерій ані для побудови кривої, ані для повноцінної оцінки її гладкості.

Таблиця 2.3 – Обчислені значення енергії для різних сплайнових побудов у задачі 2.

Крива	БЗ 67	БЗ 80	БЗ 120	КБС 181	ГНБ 170	ГНБ 181	ГНБ 190
Якість	0.0241	0.0246	0.0408	0.0242	0.0303	0.0242	0.0243

Приклад 3. Розглядувана задача є більш складною та пов’язана з побудовою антисиметричної геометричної конфігурації. Перша гранична точка B_1 розташована в початку координат із координатами $(X = 0, Y = 0)$,

тоді як друга точка B_2 має координати ($X = 150, Y = 150$). У обох граничних точках напрям дотичної задано однаково – під кутом 60° відносно горизонтальної осі.

У цьому випадку неможливо інтуїтивно визначити оптимальний розв'язок, тому надалі найдоцільніший результат буде оцінюватися на основі суб'єктивного аналізу.

Побудову сплайнів виконано з використанням кількох різних методів, що показано на Рисунок 2.19. Особливу увагу слід звернути на результат, отриманий методом КБС, який не потребує жодних допоміжних параметрів налаштування. З суб'єктивної точки зору ця крива виглядає візуально гладкою та збалансованою, а її обчислена довжина становить приблизно 294. Відповідно, допоміжні параметри в інших сплайнових методах підбираються таким чином, щоб максимально наблизити отримані криві до цієї еталонної конфігурації. Для сплайнів Безьє таке узгодження виявляється можливим не завжди. Якщо відстань розміщення контрольних точок вибрати надто малою, побудована крива практично вироджується у пряму лінію, що з'єднує граничні точки, і тому має бути відхилена. У протилежному випадку, за надто великих значень цієї відстані, графік кривої виходить далеко за межі вертикального діапазону $-150 < y < 150$. З огляду на це, значення відстаней 120, 150 та 180 було суб'єктивно обрано як кандидати для побудови найкращої кривої Безьє. Проте навіть у цих випадках форма кривих не виглядає достатньо привабливою, що додатково підтверджується графіками кривини, наведеними на Рисунок 2.20. Натомість підхід ГНБ дає криву, яка повністю збігається з результатом КБС, якщо довжину балки прийняти рівною 294 (Рисунок 2.19). Збільшення або зменшення цієї довжини відповідно призводить до більш «розтягнутої» або, навпаки, більш «стиснутої» геометричної конфігурації.

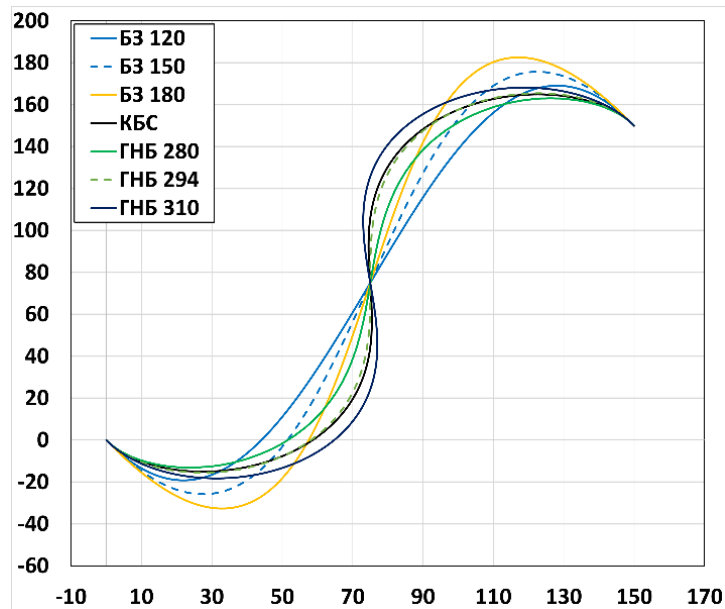


Рисунок 2.19 – Приклади сплайнових кривих, побудованих за методом Безьє, а також із використанням методів КБС та ГНБ для задачі 3.

Найбільш показовими є графіки залежності кривини від поточної координати довжини дуги, наведені на Рисунок 2.19. Для методу КБС розподіл кривини є надзвичайно гладким і має вигляд майже ідеальної прямої лінії; незначні коливання зумовлені виключно обмеженою кількістю удаваних точок, використаних у побудові. Таке візуальне подання дозволяє зробити важливий теоретичний висновок. Зокрема, крива КБС є спіраллю Корню, що безпосередньо впливає з третього диференціального рівняння співвідношення. На кожній малій прямолінійній ділянці навантаження P залишається сталим, унаслідок чого згинальний момент, а отже і кривина, змінюється лінійно. У випадку, коли проміжні вузли є удаваними точками, сила між ними не змінюється, тому вся ділянка між будь-якими двома реальними точками описується спіраллю Корню.

Як видно з результатів, крива ГНБ повністю збігається з результатом КБС у тому випадку, коли довжина балки в підході ГНБ дорівнює довжині, отриманій методом КБС. Якщо ж довжина ГНБ є меншою за відповідну довжину КБС, кривина побудованої кривої виявляється більшою; навпаки, за більшої довжини ГНБ значення кривини зменшується.

На відміну від цього, крива Безьє демонструє значні локальні значення кривини для всіх трьох розглянутих варіантів вибору відстаней контрольних точок. Отримані результати свідчать про те, що підхід на основі кривих Безьє є малоефективним для задач з антисиметричними граничними умовами.

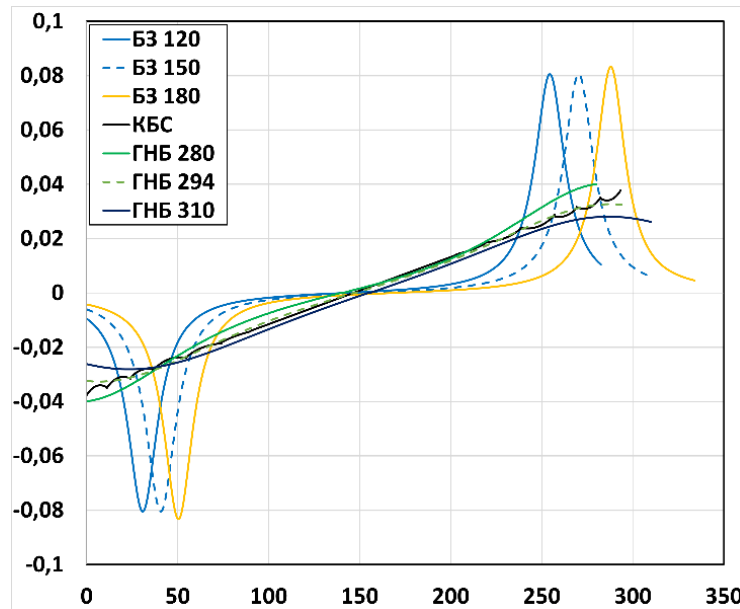


Рисунок 2.20 – Розподіли кривини, отримані за допомогою різних сплайнових методів для задачі 3.

Далі виконується порівняння енергетичних характеристик для кожної з побудованих кривих. Результати відповідних розрахунків для задачі 3 наведені в Таблиця 2.4. Для кривих Безьє отримані значення виявляються вкрай незадовільними: суттєва різниця в енергії чітко вказує на недоліки форми таких кривих. Натомість результати, отримані для методу ГНБ, є близькими до значень, характерних для КБС, що зумовлено подібністю їх довжин. Більш того, важливою перевагою підходу ГНБ є можливість варіювання довжини балки, завдяки чому якість побудованої кривої завжди може бути зроблена вищою, ніж у випадку застосування методу КБС.

Таблиця 2.4 – Обчислені значення енергії для різних сплайнових побудов у задачі 3.

Крива	БЗ 120	БЗ 150	БЗ 180	КБС	ГНБ 280	ГНБ 294	ГНБ 310
Якість	0.2080	0.2092	0.2173	0.1286	0.1373	0.1284	0.1225

Приклад 4. Розглядувана задача є близькою за постановкою до попередньої, проте не має антисиметричних властивостей. Перша гранична точка B_1 розташована в початку координат із координатами $(X = 0, Y = 0)$, тоді як друга точка B_2 має координати $(X = 150, Y = -150)$. У точці B_1 напрям дотичної задано під кутом -60° відносно горизонтальної осі, тоді як у точці B_2 дотична орієнтована горизонтально, що відповідає куту 0° .

У даному випадку інтуїтивне визначення оптимального розв’язку є неможливим, тому надалі найбільш доцільний результат буде оцінюватися на основі суб’єктивних міркувань.

Побудову сплайнів виконано з використанням кількох альтернативних методів, що показано на Рисунок 2.21. Щодо результату, отриманого методом КБС, суб’єктивна візуальна оцінка свідчить про його гладкість і збалансованість, а обчислена довжина кривої становить приблизно 260. Відповідно, допоміжні параметри в інших сплайнових підходах підбираються таким чином, щоб максимально наблизити побудовані криві до цієї еталонної конфігурації. Як і в задачі 3, для сплайнів Безьє таке наближення виявляється неможливим, оскільки за будь-якого вибору відстані контрольних точок вони відхиляються від кривої КБС. З цієї причини результати для сплайнів Безьє наведені лише для трьох суб’єктивно обраних значень відстаней – 100, 125 та 150. Проте й у цих випадках форма кривих не виглядає візуально привабливою, що додатково підтверджується графіками кривини, наведеними на Рисунок 2.22, де спостерігаються значні локальні піки кривини. Така поведінка є неприйнятною з точки зору поняття «гладкого» (fair) сплайна [29].

Натомість підхід ГНБ дає криву, яка повністю збігається з результатом КБС за умови, що довжина балки приймається рівною 260 (Рисунок 2.21). Збільшення або зменшення цієї довжини відповідно призводить до більш розтягнутої або більш стислої геометричної конфігурації.

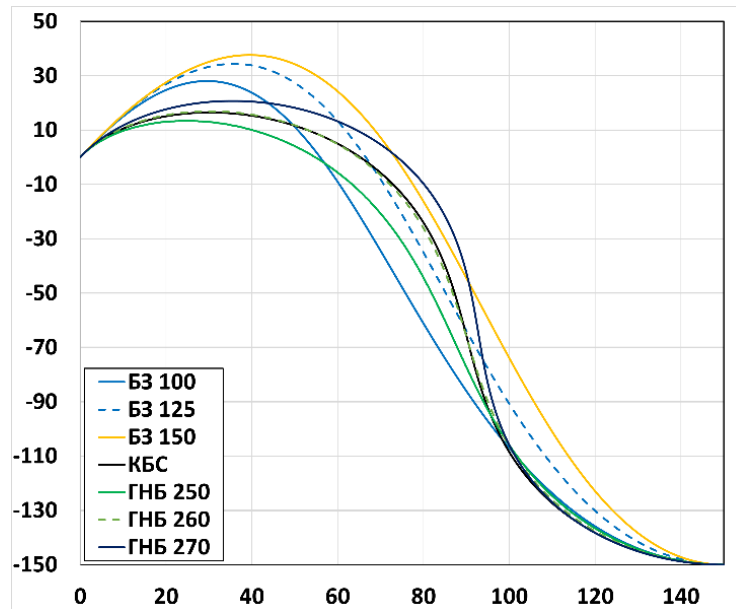


Рисунок 2.21 – Приклади сплайнових кривих, побудованих за методом Безьє, а також із використанням методів КБС та ГНБ для задачі 4.

Найбільш інформативними є графіки залежності кривини від поточної координати довжини дуги, наведені на Рисунок 2.22. Для рішення КБС профіль кривини є практично лінійним; незначні відхилення зумовлені обмеженою кількістю удаваних точок, використаних у побудові. Така поведінка однозначно свідчить про те, що крива КБС є спіраллю Корню.

Як і в задачі 4, рішення ГНБ повністю відтворює криву КБС за умови, що задана довжина балки в підході ГНБ дорівнює довжині, отриманій методом КБС. Відхилення від цього значення призводять відповідно до більш «стиснутої» або більш «розтягнутої» геометрії залежно від того, чи є довжина ГНБ меншою або більшою за еталонну довжину КБС. На відміну від цього, криві Безьє демонструють значні значення кривини для всіх трьох обраних відстаней контрольних точок.

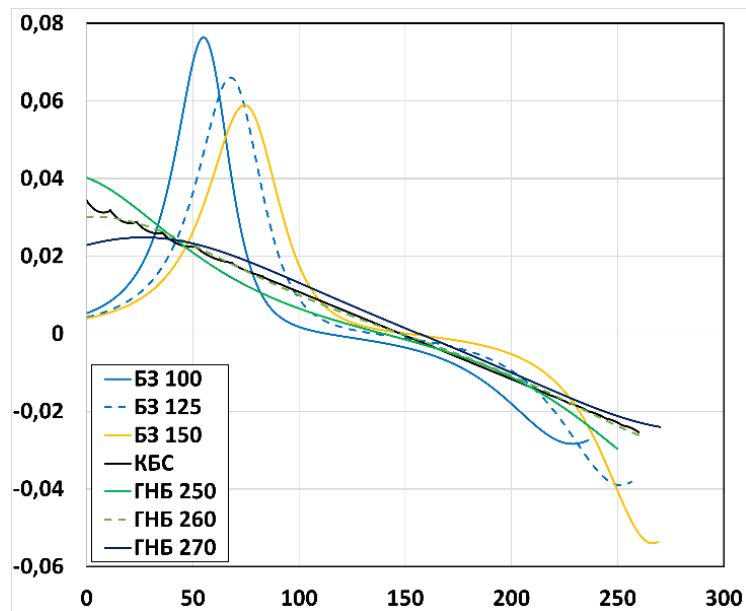


Рисунок 2.22 – Профілі кривини, отримані за допомогою різних сплайнових методів для задачі 4.

Далі порівнюється енергетична якість побудованих кривих. Відповідні числові результати для задачі 4 наведені в Таблиця 2.5. Сплайни Безьє демонструють незадовільні показники, що проявляється у значно гірших значеннях енергії та однозначно свідчить про недоліки форми таких кривих. Для підходу ГНБ отримані значення енергії є близькими до результатів методу КБС, що зумовлено подібністю довжин відповідних кривих. Водночас важливою перевагою методу ГНБ є можливість варіювання довжини балки, завдяки чому якість побудованої кривої завжди може бути покращена порівняно з рішенням КБС.

Таблиця 2.5 – Обчислені значення енергії для різних сплайнових побудов у задачі 4.

Крива	БЗ 100	БЗ 125	БЗ 150	КБС	ГНБ 250	ГНБ 260	ГНБ 270
Якість	0.1156	0.1114	0.1153	0.0781	0.0835	0.0778	0.0753

Висновки за розділом 2

1. Розглянуто модель та основні рівняння зв'язку і спряження методу коротацийного балкового сплайна (КБС) для задач інтерполяції. Описано модифікації методу порівняно з класичними рівняннями теорії балок, зокрема явне введення кутової неузгодженості між сусідніми відрізками, яка поступово усувається в ітераційному процесі. Розкрито ідею дотичного та нормального векторів з описом модифікації нормального вектора для забезпечення неперервності по кутах. Описано додаткові удавані точки, які використовуються для зменшення кутів між реальними точками для покращення результатів.

2. Представлено параметр жорсткості опори та обернене до нього значення податливості, а також випадки застосування кожного з них. Розглянуто фіксовані точки, які використовуються в задачах інтерполяції, та удавані точки, які не створюють додаткових сил і тому не змінюють форму сплайна. Показано, що загальна кількість рівнянь дорівнює загальній кількості невідомих, що забезпечує замкнутість системи.

3. Виведено параметричний опис деформованого контуру та отримано вирази для перших і других похідних координат, які враховують взаємозв'язки між параметрами балки. На цій основі введено поняття локальної деформації як відносної зміни елемента довжини дуги, що дозволяє кількісно оцінювати метричні спотворення контуру. Отримана формула для кривини деформованої кривої є універсальною та придатною для обчислення реальних кривин довільних фігур.

4. Показано можливості КБС на ряді прикладів. Відновлення кола за чотирма точками, розташованими у формі прямокутника, дало відхилення балкової кривини від точного значення не більше 2 % при використанні 32 точок (28 з яких удавані). Продемонстровано, що положення удаваних точок не впливає на контур – навіть після значного зміщення вони все одно стають на своє місце. Розглянуто також можливість відновити коло за його дугою:

отриманий діаметр вздовж осі x практично дорівнює 2, а ордината найнижчої точки близька до -1. На прикладі еліпса зі співвідношенням півосей 8, побудованого за 40 точками, отримано похибку положення та кривини менше 1 %.

5. Виконано порівняння методу КБС зі сплайном Безьє та методом геометрично нелінійної балки (ГНБ) на задачах Ерміта із заданими дотичними на кінцях. Показано, що в симетричних задачах КБС точно відтворює ідеальне півколо, а в антисиметричних – будує спіраль Корню, яка вважається однією з найестетичніших кривих у геометричному проєктуванні. Сплайн Безьє у всіх розглянутих випадках демонструє значні локальні піки кривини, тоді як ГНБ повністю збігається з КБС за умови, що задана довжина балки дорівнює довжині КБС. Таким чином, КБС може слугувати якісною початковою апроксимацією для подальшого застосування ГНБ.

Аналіз, здійснений у цьому розділі, ґрунтується на результатах, які автор опублікував у працях [1, 2].

РОЗДІЛ 3. МЕТОД КОРОТАЦІЙНОГО БАЛКОВОГО СПЛАЙНА ДЛЯ ЗАДАЧ АПРОКСИМАЦІЇ

3.1 Коротаційний балковий сплайн для задач апроксимації

Розглянемо рівняння (2.16) з точки зору застосування для задач апроксимації. Параметр C_i визначає жорсткість пружної опори, що відповідає i -тій точці. Величина P_i вводиться як допоміжна характеристика, яка описує відносне зміщення між експериментально виміряною точкою B_i та відповідною вузловою точкою A_i , використаною в розрахунковій моделі. На початковому етапі ітераційного процесу це зміщення вважається відсутнім, тобто $P_i = 0$.

На наступних ітераціях вважається, що початкова ітерація вже виконана з використанням відносно великого значення параметра згладжування C_s . Результатом цього кроку є визначені положення вузлових точок A_i . На їх основі будується багатокутна апроксимація контуру, для кожного відрізка якої вводяться локальні системи базисних векторів. Далі алгоритм переходить до наступного кроку, приймаючи нове значення параметра C_s , яке вибирається меншим порівняно з попередньою ітерацією.

Для коректного застосування методу необхідно чітко розуміти, які значення параметра C_s є малими або великими в межах конкретної задачі. З цією метою доцільно навести наближені попередні оцінки порядку величини цього параметра. Зокрема, початкову жорсткість слід обирати такою, щоб викликані нею переміщення W були відмінними від нуля, але не призводили до надмірних деформацій. У межах класичної теорії балок [115] така оцінка може бути виконана шляхом введення безрозмірної характеристики жорсткості пружини:

$$\bar{C}_s = \frac{C_s \cdot L^3}{6EI}. \quad (3.1)$$

У межах прийнятої моделі пружний елемент проявляє жорстку поведінку за великих значень безрозмірної жорсткості $\bar{C}_s \gg 1$, тоді як за малих значень $\bar{C}_s \ll 1$ його поведінка є податливою. Для ініціалізації алгоритму спочатку вводиться характерна довжина L , яка визначається як середнє значення довжин усіх початкових відрізків. Після цього задається достатньо велике початкове значення безрозмірного параметра, наприклад, $\bar{C}_s = 400$. На основі цього вибору фактичне значення параметра жорсткості C_s визначається за співвідношенням:

$$C_s = \frac{6}{L^3} \bar{C}_s. \quad (3.2)$$

З урахуванням того, що згинальна жорсткість нормована до одиниці, $EI = 1$, значення безрозмірного параметра $\bar{C}_s = 400$ приймається як гранично допустиме для коректного використання рівняння спряження (2.16).

Також для переходу до наступного ітераційного кроку необхідно задати попередній натяг пружного елемента, який описується допоміжною величиною P_i . При цьому постає питання коректного визначення цієї величини. Безпосереднє трактування P_i як евклідової відстані між виміряною точкою $\vec{B}_i$ та відповідною розрахунковою точкою $\vec{A}_i$ може призводити до некоректних ситуацій. Зокрема, можлива конфігурація, за якої точка $\vec{B}$ практично збігається з оновленим контуром, тоді як точка $\vec{A}_i$ залишається віддаленою від нього. У такому випадку виникають дві проблеми. По-перше, значення P_i штучно зростає, що зумовлює надмірний попередній натяг пружини, хоча положення точки $\vec{A}_i$ вже майже відповідає положенню контуру. По-друге, стає неможливим однозначно визначити знак цієї величини, що

може призвести до принципово різної поведінки алгоритму на наступній ітерації.

Отже, знакова величина Π_i визначається як мінімальна відстань від вимірної точки $\vec{B}_i$ до локального багатокутного наближення контуру. При цьому відстань обчислюється відносно одного з двох суміжних векторів відрізків – $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ або $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$. Дві відповідні відстані, знайдені для кожного з цих відрізків, позначаються як Π_{1i} та Π_{2i} і визначаються за наступними співвідношеннями:

$$\overrightarrow{A_iB_i} \cdot \vec{n}_{i-1} = \Pi_{1i}; \quad \overrightarrow{A_iB_i} \cdot \vec{n}_i = \Pi_{2i}. \quad (3.3)$$

Характерні приклади визначення величини Π_i наведені на Рисунок 3.1.

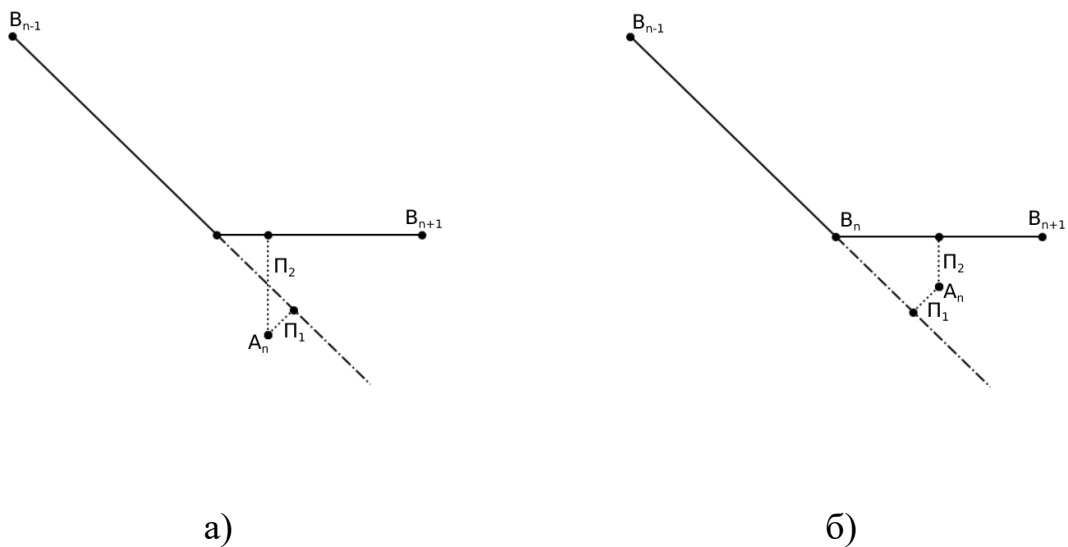


Рисунок 3.1 – Деякі випадки знаходження відстані від опорної точки A до двох прямолінійних відрізків наближення: а) одна відстань додатня, а друга – від’ємна; б) дві відстані додатні

З двох обчислених відстаней для подальшого використання обирається та, що має менший модуль, і саме вона приймається за величину Π_i . Знак цієї величини визначається відносним розташуванням точки B_i щодо відповідного

відрізка контуру: додатний знак відповідає випадку, коли точка знаходиться праворуч від відрізка, тоді як у протилежній ситуації величина P_i вважається від'ємною.

3.2 Задачі апроксимації

У всіх наведених далі прикладах розглядається коло одиничного радіуса.

Приклад 1. Спочатку розглядається коло одиничного радіуса. На основі 20 майже рівномірно розташованих опорних точок уздовж кола формується відповідний набір із 20 збурених точок. Збурення генеруються за рівномірним розподілом у межах $a = -0.05$ до $b = 0.05$ незалежно для обох декартових координат X та Y .

Такі випадкові відхилення теоретично описуються середньоквадратичним відхиленням σ_{theor} , яка визначається як:

$$\sigma_{\text{theor}} = \frac{(b - a)}{2\sqrt{3}}. \quad (3.4)$$

Розташування згенерованих точок наведено на Рисунок 3.2, а. Там же показано реконструйований контур після першої ітерації, при початковому значенні параметра $\bar{C} = 100$. Подальше уточнення геометрії здійснюється шляхом поступового зменшення $\bar{C}$, наприклад, у 1,65 раза на кожному кроці. На Рисунок 3.2, б подано конфігурацію після 10-ї ітерації ($\bar{C} = 0.977$), на Рисунок 3.2, в – результат після 30-ї ітерації при $\bar{C} = 3.33 \cdot 10^{-5}$, а на Рисунок 3.2, г зображено розподіл розрахованих згинальних моментів.

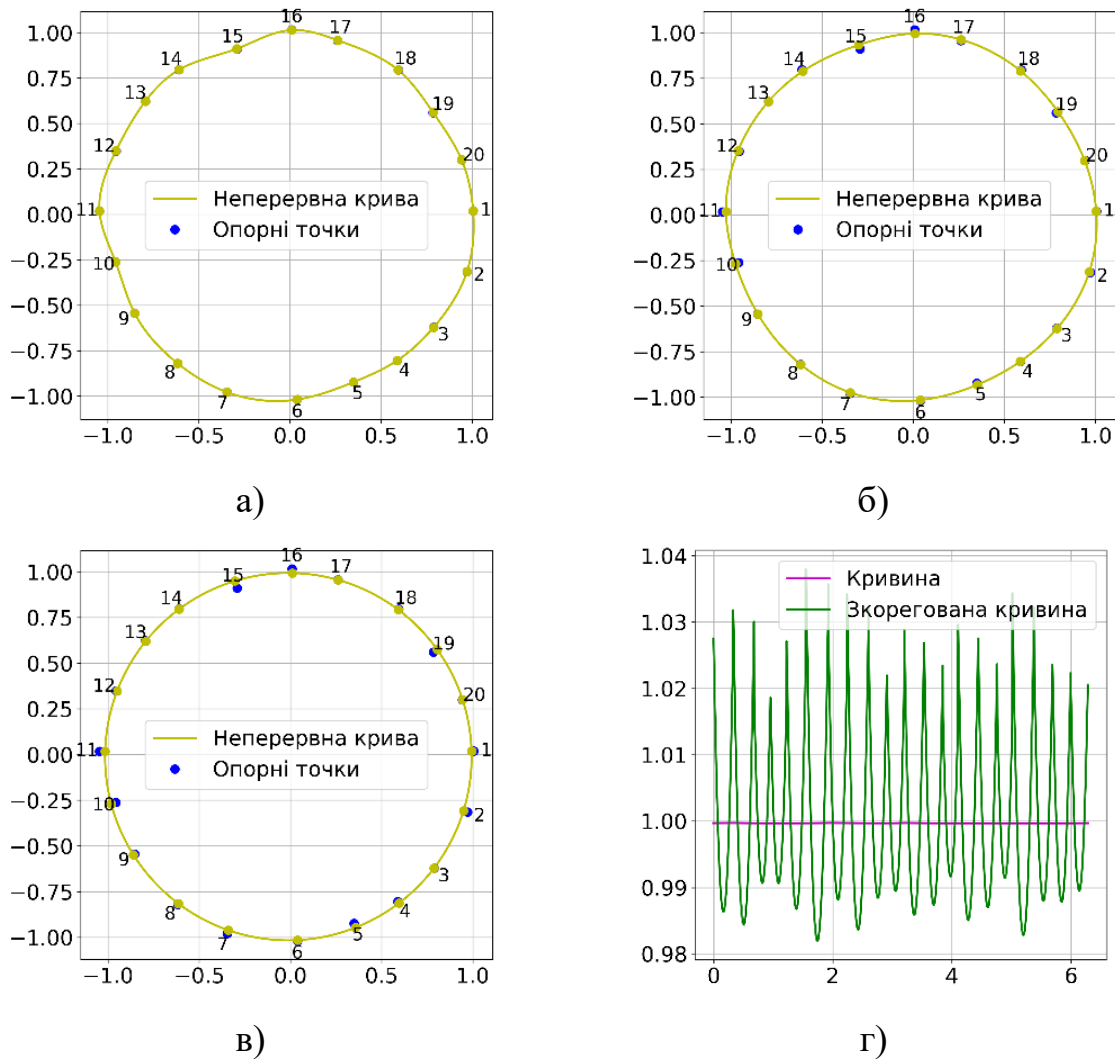


Рисунок 3.2. – Відновлення колової кривої за 20 збуреними точками, згенерованими рівномірним розподілом з максимальним відхиленням ± 0.05 для кожної з декартових координат: а) вихідні точки та початкова конфігурація з «жорсткими» опорами; б) контур після 10-ї ітерації ($\bar{C} = 0.977$); в) контур після 30-ї ітерації ($\bar{C} = 3.33 \cdot 10^{-5}$); г) розподіл кривин після 30-ї ітерації.

Введемо поняття умовного емпіричного середньоквадратичного відхилення σ_{emp} , яка характеризує середньоквадратичне відхилення точок вимірювання B_i від відповідних точок контуру A_i і наближено визначається за наступною формулою:

$$\sigma_{emp} = \sqrt{\frac{\sum_1^N P_i^2}{N}}. \quad (3.5)$$

Слід зазначити, що теоретичне відхилення згенерованих точок не повністю відповідає виразу (3.4), оскільки випадкові збурення вводяться незалежно для двох декартових координат, а не вздовж радіального напрямку. Аналогічно, величини P_i не є точними геометричними відстанями до відновленого контуру. Таким чином, теоретичне та емпіричне середньоквадратичні відхилення мають різний зміст і не зобов'язані збігатися. Проте для значень $a = -0.05$ та $b = 0.05$ можна виконати їх оцінювання. Теоретичне (задане) значення становить $\sigma_{theor} = 0.0288$, тоді як після 30-ї ітерації отримано $\sigma_{emp} = 0.01770$. Порівняння показує задовільну узгодженість цих величин, що дозволяє використовувати їх як практичний критерій зупинки ітераційного процесу, зокрема для вибору оптимальної жорсткості пружини.

Приклад 2. Розглянемо ситуацію зі значними початковими збуреннями. Як і раніше, аналізується коло одиничного радіуса, проте кількість рівномірно розташованих опорних точок збільшено до 40. Для кожної з них вводяться випадкові відхилення, згенеровані за рівномірним розподілом у межах $a = -0.3$ та $b = 0.3$. Відповідно до формули (3.4), теоретичне умовне середньоквадратичне відхилення становить $\sigma_{theor} = 0.173$.

Початкові координати наведені в Таблиця 3.1 і зображені на Рисунок 3.3, а. Можна помітити, що послідовність згенерованих точок не завжди зберігає правильний порядок розташування за напрямком годинникової стрілки. Їх розміщення часто має хаотичний характер, що ускладнює виконання розрахунків.

Проміжні результати відновлення показані на Рисунок 3.3. На початковому етапі формується значна кількість локальних петель. Із поступовим зменшенням жорсткості пружин ці петлі зникають унаслідок

зближення та суміщення відповідних точок. Після 15-ї ітерації при $\bar{C} = 0.473$ контур повністю розплутується. Надалі геометрія все більше наближається до форми кола. Розрахунковий процес завершується після 40-ї ітерації при $\bar{C} = 3.33 \cdot 10^{-5}$.

Таблиця 3.1 – Сорок випадкових збурень, згенерованих для рівномірно розташованих точок кола.

N	X	Y	N	X	Y	N	X	Y	N	X	Y
1	0.9616	0.0000	11	0.0727	-1.2507	21	-0.9969	0.0611	31	-0.0193	0.8941
2	0.7032	0.0773	12	-0.1389	-1.0679	22	-1.2485	0.3154	32	-0.0225	0.8435
3	0.9809	-0.4040	13	-0.5283	-0.7405	23	-0.9942	0.1106	33	0.3933	0.8832
4	0.8522	-0.4137	14	-0.4458	-0.9472	24	-1.1331	0.3298	34	0.4438	1.0902
5	0.7612	-0.6313	15	-0.7771	-1.0927	25	-1.0327	0.6022	35	0.5909	0.9511
6	0.6053	-0.7451	16	-0.5359	-0.8588	26	-0.6491	0.6211	36	0.6392	0.6346
7	0.4106	-0.6431	17	-0.5966	-0.8475	27	-0.7522	0.5364	37	0.9852	0.2956
8	0.5256	-0.8696	18	-0.8945	-0.1577	28	-0.6898	1.1809	38	0.9390	0.6324
9	0.1888	-0.6788	19	-0.7431	-0.0267	29	-0.4768	0.9159	39	0.7484	0.1707
10	0.0165	-0.9612	20	-1.2399	0.0237	30	-0.2465	0.9901	40	1.1081	0.2060

Щодо розрахованого середньоквадратичного відхилення, то емпіричне значення, визначене за формулою (3.5), становить $\sigma_{\text{emp}} = 0.151$, що демонструє добру узгодженість із теоретичною оцінкою. Краща відповідність порівняно з попереднім прикладом пояснюється, зокрема, збільшенням кількості точок, завдяки чому умовна відстань P_i точніше відображає реальну відстань до контуру. Цей приклад ще раз підтверджує, що у випадку відомої теоретичного середньоквадратичного відхилення величина σ_{emp} може ефективно використовуватися як критерій завершення ітераційного процесу.

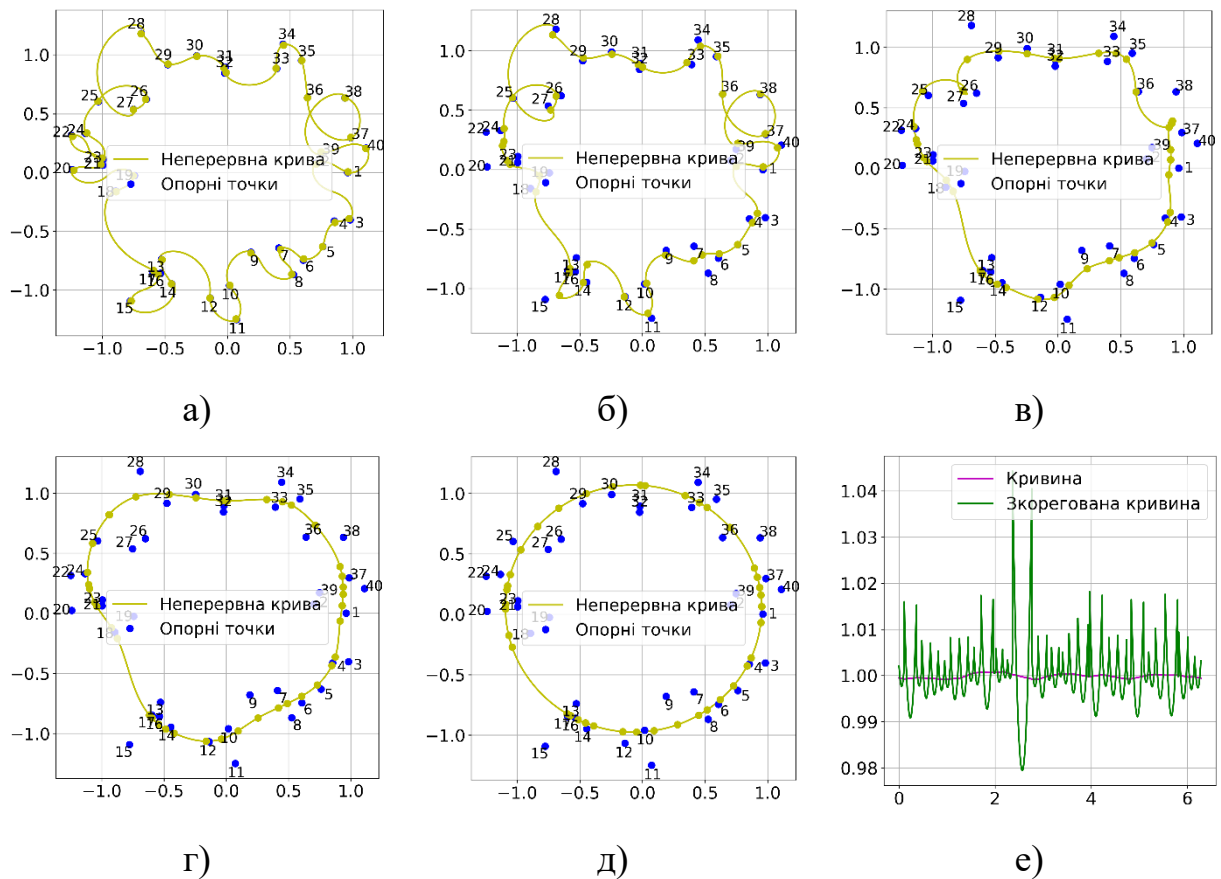


Рисунок 3.3. – Відновлення колового контуру за 40 збуреними точками, згенерованими рівномірним розподілом з максимальним відхиленням ± 0.30 для кожної декартової координати: а) вихідний набір точок та початкова конфігурація з «жорсткими» опорами; б) контур після 5-ї ітерації ($\bar{C} = 21.66$); в) контур після 12-ї ітерації ($\bar{C} = 1.49$); г) розподіл кривини на 15-й ітерації ($\bar{C} = 0.47$); д) контур після 40-ї ітерації ($\bar{C} = 3.33 \cdot 10^{-5}$); е) кривини після 40-ї ітерації.

Приклад 3. Розглянемо приклад, наведений у роботі [118], яка присвячена розробці методики визначення параметрів кола за дискретними неточними точками. Серед поданих там прикладів відтворимо один для подальшого аналізу. Нехай задано набір із п'яти точок (Таблиця 3.2), причому в першому рядку наведено їх нумерацію відповідно до Рисунок 3.4, а. Для спрощення запуску ітераційного алгоритму на першому кроці додатково вводяться п'ять удаваних точок, розміщених між сусідніми реальними точками з Таблиця 3.2. У подальших ітераціях кількість удаваних точок

поступово збільшувалася і після 10-ї ітерації була прийнята рівною 100, після чого більше не змінювалася.

Таблиця 3.2 – Розташування точок вимірювання

№ (Рисунок 3.4)	1	3	4	5	7
X	2	5	7	9	3
Y	6	8	7	5	7

Вхідні дані та результати розрахунків наведені на Рисунок 3.4. На початковому кроці ітерацій жорсткість приймалася рівною $\bar{C} = 100$. Контур, отриманий після першої ітерації, показано на Рисунок 3.4, б жовтою лінією, з якої видно, що відновлена крива ще суттєво відрізняється від кола.

Для порівняння також наведені кола, розраховані за заданими точками у роботі [118] відповідно до різних критеріїв оптимізації (зелена пунктирна, червона точкова та синя штрих-пунктирна лінії). Відмінності між отриманими там результатами свідчать про те, що задачі такого типу загалом не мають єдиного однозначного розв'язку.

Після 50-ї ітерації відновлений контур уже візуально наближається до кола та добре узгоджується з варіантами розв'язків, наведеними у [118]. Проте значення кривини в різних точках ще відрізняються приблизно на 8%. Подальше зменшення жорсткості до 0.0056 (після 100-ї ітерації) призводить до геометрії, яка дуже добре апроксимує коло, причому різниця між максимальними та мінімальними значеннями кривини не перевищує 0.4%.

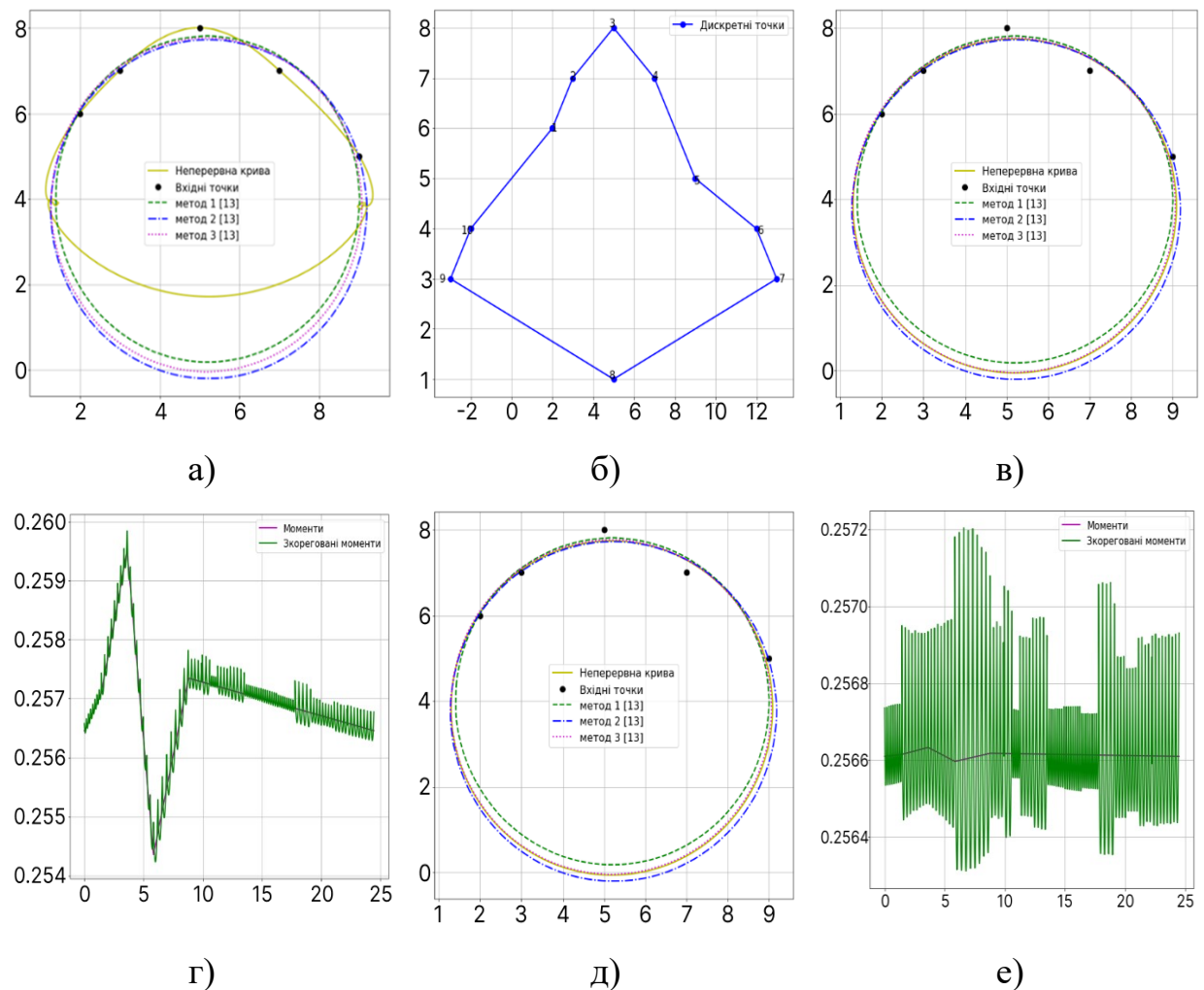


Рисунок 3.4. – Відновлення колового контуру за п'ятьма неточно заданими точками з порівнянням із літературними результатами: а) вихідні точки вимірювання; б) відтворений контур із використанням «жорстких» опор; в) контур після 50-ї ітерації ($\bar{C} = 0.788$); г) розподіл кривини після 50-ї ітерації; д) контур після 100-ї ітерації ($\bar{C} = 0.0056$); е) розподіл кривини після 100-ї ітерації.

Слід підкреслити, що подальше зменшення податливості опор призводить лише до повільного збільшення радіуса відтворюваного кола. Це пояснюється тим, що пружні опори поступово втрачають здатність обмежувати переміщення точок, унаслідок чого задача стає недостатньо визначеною. Саме тому необхідно вводити критерій зупинки, пов'язаний з оцінкою розсіювання вихідних даних.

Приклад 4. У роботі [119] досліджувалася задача відновлення силуетів за густо розташованими, але неточними точками. У ній наведено значну кількість наборів штучно згенерованих даних, частину з яких ми розглянемо в даному дослідженні. Характерною особливістю цих тестів є відсутність інформації як про початкові геометричні фігури, на основі яких генерувалися випадкові точки, так і про сам алгоритм їх формування. У назвах файлів, що супроводжують роботу [119], містяться числові значення, які можна трактувати як певні параметри середньоквадратичного відхилення; надалі ми будемо посилалися на них і проводити відповідні порівняння. Окрему складність становить нумерація точок. Запропонований метод передбачає фіксований порядок їх індексації та не змінює його під час розрахунків. Водночас, як показано на Рисунок 3.3, при генерації густих і значно розсіяних точок може виникати проблема коректного впорядкування. Наразі процедура перенумерації не застосовується, оскільки метод демонструє працездатність для всіх наведених нижче прикладів.

Розглянемо перший обраний приклад із роботи [119] – контур яблука, наведений на Рисунок 3.5, який задано 155 дискретними точками. У назві файла (“apple_2percent_noise.txt”) рівень шуму подано у відсотках, однак незрозуміло, відносно якої величини ці відсотки визначалися. Оскільки всі наведені нижче зображення побудовані в абсолютній системі координат із діапазоном приблизно від -0.5 до $+0.5$ як за віссю x , так і за віссю y , припустимо, що нормування шуму виконувалося відносно значення 0.5 . Відповідно, у подальших розрахунках приймаємо теоретичне значення середньоквадратичного відхилення рівним $\sigma_{\text{theor}} = 0.02 \cdot 0.5 = 0.01$.

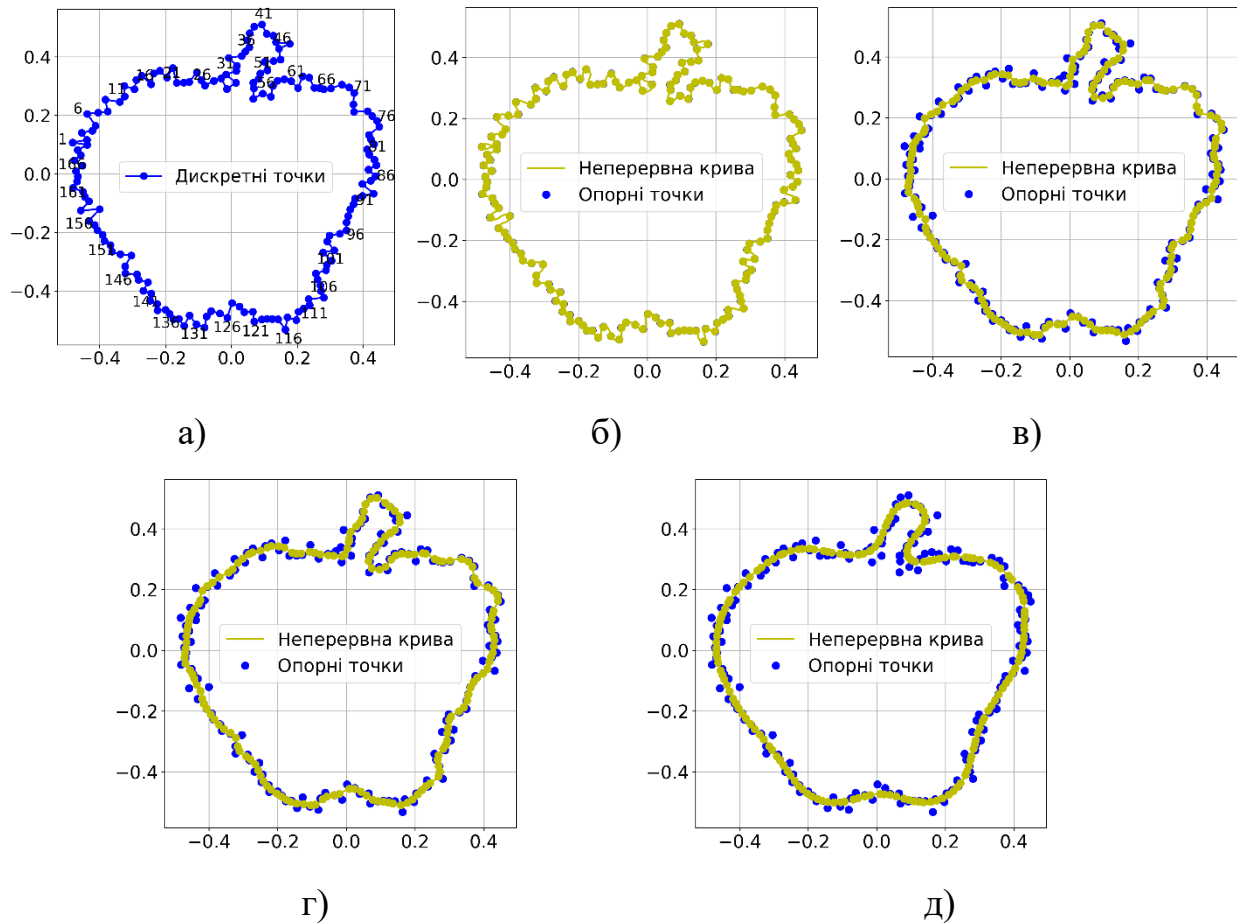


Рисунок 3.5. – Відновлення контуру яблука за вихідними даними з роботи [119]: а) вхідні точки; б) контур після першої ітерації; в) контур після 15-ї ітерації; г) контур на 18-й ітерації ($\sigma_{\text{emp}} \approx 0.010$); д) контур після 30-ї ітерації.

Результат першої ітерації наведено на Рисунок 3.5, б, де розрахункові точки практично збігаються з початковими виміряними точками. Внаслідок цього значення емпіричного середньоквадратичного відхилення після першого кроку є дуже малим і становить $\sigma_{\text{emp}} = 0.00035$. Характерною особливістю даного контуру, з огляду на невеликий рівень шуму, є відсутність утворення петель. Після 15-ї ітерації (Рисунок 3.5, в) контур усе ще має дещо нерівномірний вигляд. Обчислене значення середньоквадратичного відхилення дорівнює $\sigma_{\text{emp}} = 0.00795$, що вже наближається до теоретичного, проте залишається трохи меншим. Це свідчить про те, що процес згладжування ще не завершено, тому розрахунки доцільно продовжити. На 18-

й ітерації отримано значення $\sigma_{\text{emp}} \approx 0.010$, яке можна розглядати як ознаку близького до оптимального результату. Отримана фігура при цьому вже виглядає візуально задовільною. Для порівняння виконано подальші обчислення. Так, на 30-й ітерації (Рисунок 3.5, д) значення середньоквадратичного відхилення зростає до $\sigma_{\text{emp}} = 0.01514$, перевищуючи теоретичне значення. Це свідчить про надмірне згладжування контуру, що також добре помітно на зображенні.

Отримані результати підтверджують як результативність запропонованого алгоритму згладжування, так і обґрунтованість використання емпіричного середньоквадратичного відхилення σ_{emp} як показника якості. Зокрема, її застосування в ролі критерію завершення процесу згладжування є доцільним та ефективним.

Наступним прикладом є контур метелика з роботи [119]. Відповідні вихідні дані містяться у файлі “butterfly_2percent_noise.txt”, що включає 164 дискретні точки. Аналогічно до попереднього випадку приймаємо теоретичне значення шуму $\sigma_{\text{theor}} = 0.01$. Результати розрахунків наведено на Рисунок 3.6. Початковий розподіл точок подано на Рисунок 3.6, а. Після першої ітерації (Рисунок 3.6, б) спостерігаються три локальні петлі, тоді як значення емпіричного середньоквадратичного відхилення залишається дуже малим – $\sigma_{\text{emp}} = 0.00029$. На 15-й ітерації петлі зникають, а емпіричне середньоквадратичне відхилення зростає до $\sigma_{\text{emp}} = 0.00672$, що все ще менше теоретичного значення. Проте контур на цьому етапі ще виглядає недостатньо згладженим. На 20-й ітерації ($\bar{C} = 0.377$) отримано $\sigma_{\text{emp}} = 0.01060$, що практично відповідає теоретичному орієнтиру. Однак зберігається одна локальна петля, для усунення якої виконано додаткові ітерації.

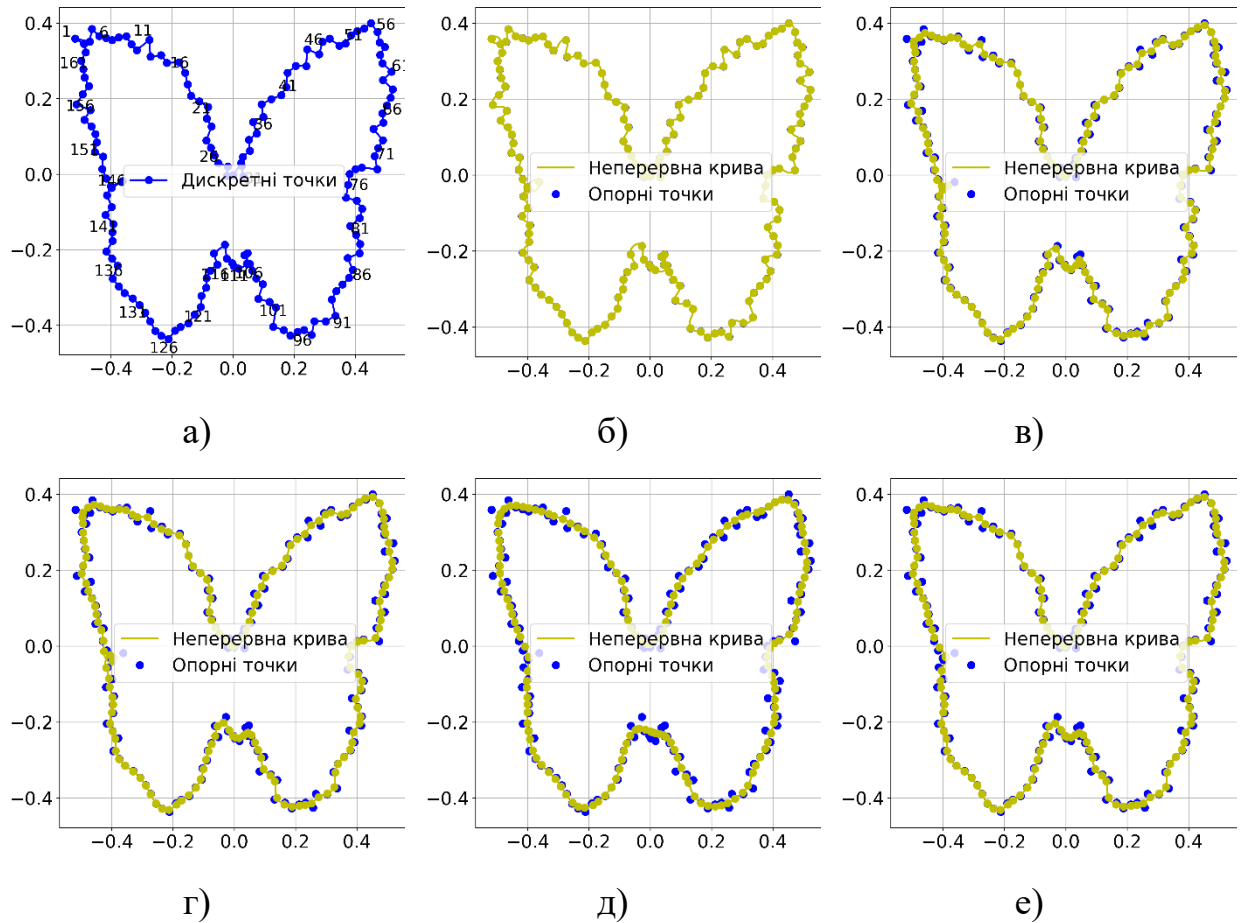


Рисунок 3.6. – Відновлення контуру яблука за даними роботи [119]: а) вихідні точки вимірювання; б) контур після першої ітерації; в) контур після 15-ї ітерації; г) контур на 20-й ітерації ($\sigma_{\text{emp}} \approx 0.010$); д) контур після 30-ї ітерації; е) контур, отриманий після повернення до 20-ї ітерації зі зменшеною жорсткістю опор ($\sigma_{\text{emp}} \approx 0.010$).

Після 30-ї ітерації значення σ_{emp} збільшується до 0.01378, перевищуючи теоретичне, що свідчить про надмірне згладжування – це підтверджується і візуально. Цікаво, що при поверненні до стану, який відповідає 20-й ітерації (з тим самим параметром жорсткості), отримуємо $\sigma_{\text{emp}} = 0.01059$, але без локальної петлі. Подальше зменшення жорсткості призводить до ще більш виражених змін. Зокрема, при $\bar{C} = 2 \cdot 10^{-5}$ значення σ_{emp} зростає до 0.10857, що приблизно в десять разів перевищує теоретичну величину. За таких умов відновлений контур поступово наближається до форми кола.

Розглянемо набір даних із контуром краба з роботи [119] (“crab_2percent_noise.txt”), наведений на Рисунок 3.7, який містить 284 точки. Теоретичний рівень похибки приймаємо рівним $\sigma_{\text{theor}} = 0.01$. Збільшення кількості точок може спричиняти появу більшої кількості локальних петель під час відновлення контуру.

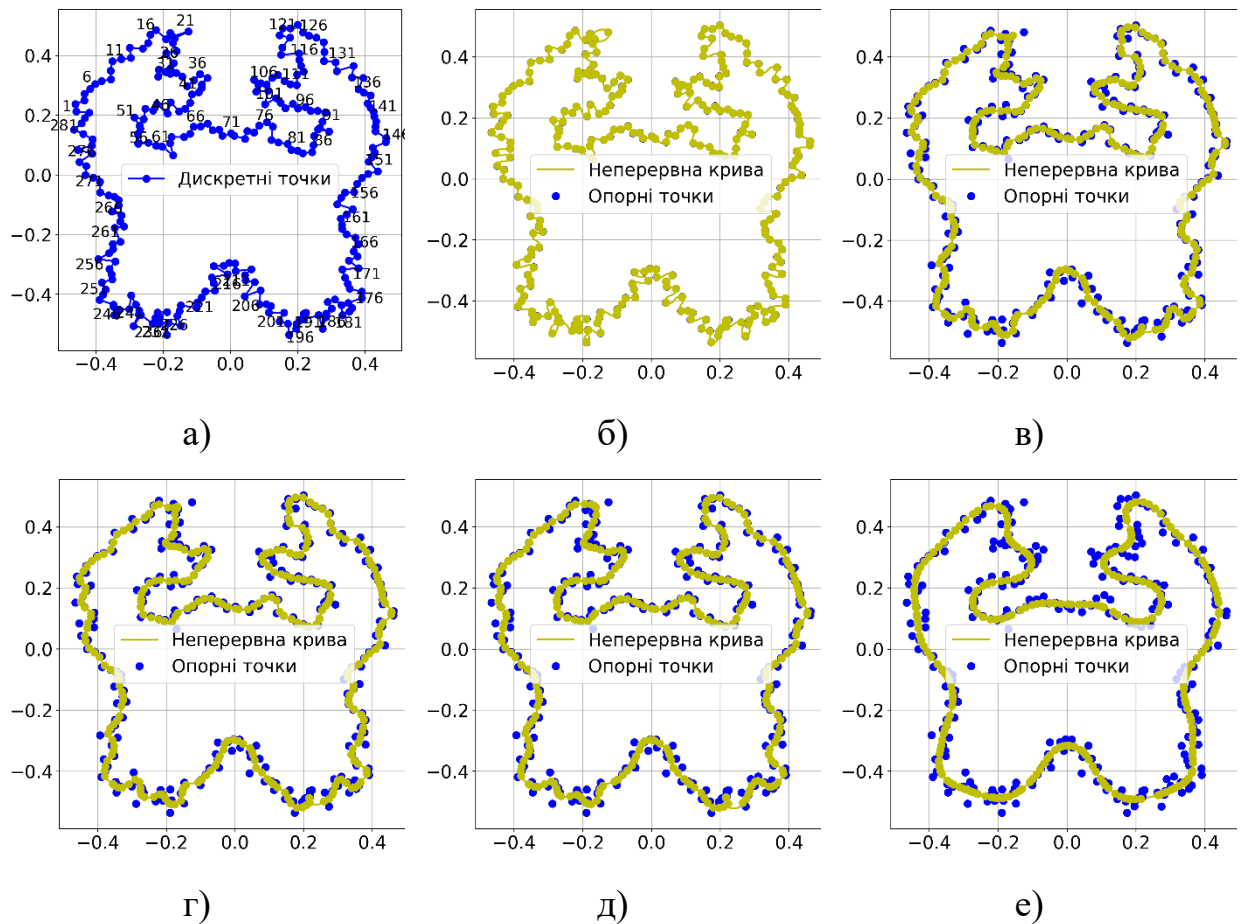


Рисунок 3.7. – Відновлення контуру краба за даними роботи [119]: а) вихідні точки; б) після 1 ітерації; в) на 15-й ітерації; г) на 18-й ітерації при $\sigma_{\text{emp}} \approx 0.010$; д) після 30-ї ітерації; е) після повернення до 16-ї ітерації зі зменшеною жорсткістю опор ($\sigma_{\text{emp}} \approx 0.010$).

Після першої ітерації (Рисунок 3.7, б) розрахункові точки майже повністю збігаються з початковими вимірюваннями, тому емпіричне відхилення є дуже малим і становить $\sigma_{\text{emp}} = 0.00032$. Незважаючи на це, спостерігається утворення трьох локальних петель. На 15-й ітерації контур усе

ще містить помітні геометричні злами, а значення емпіричного середньоквадратичного відхилення дорівнює $\sigma_{\text{emp}} = 0.00807$, що залишається меншим за теоретичне. На 20-й ітерації отримано $\sigma_{\text{emp}} = 0.01051$, яке вже близьке до критеріального значення, хоча одна локальна петля ще зберігається. На 30-й ітерації значення зростає до $\sigma_{\text{emp}} = 0.01716$, перевищуючи теоретичний критерій і свідчаючи про надмірне згладжування. Повернення до стану з $\sigma_{\text{emp}} = 0.01049$ дозволяє усунути залишкову петлю.

Розглянемо контур дельфіна (“dolphin_2percent_noise.txt”) [119], наведений на Рисунок 3.8, який містить 179 точок. Теоретичний рівень похибки приймаємо рівним $\sigma_{\text{theor}} = 0.01$. Під час першої ітерації формуються три локальні петлі. На 15-й ітерації при значенні $\bar{C} = 1.64$ емпіричне середньоквадратичне відхилення становить $\sigma_{\text{emp}} = 0.0086$, що дещо менше за теоретичне значення. На 22-й ітерації отримуємо $\sigma_{\text{emp}} = 0.0102$, що практично відповідає критеріальному рівню. На 30-й ітерації значення зростає до $\sigma_{\text{emp}} = 0.0165$, що свідчить про надмірне згладжування контуру, що підтверджується і візуально. Подальше зменшення жорсткості призводить до ще більшого округлення форми. Для ілюстрації наведено результат при $\bar{C} = 2 \cdot 10^{-5}$, де отримано $\sigma_{\text{emp}} = 0.08902$, що на порядок перевищує теоретичну оцінку.

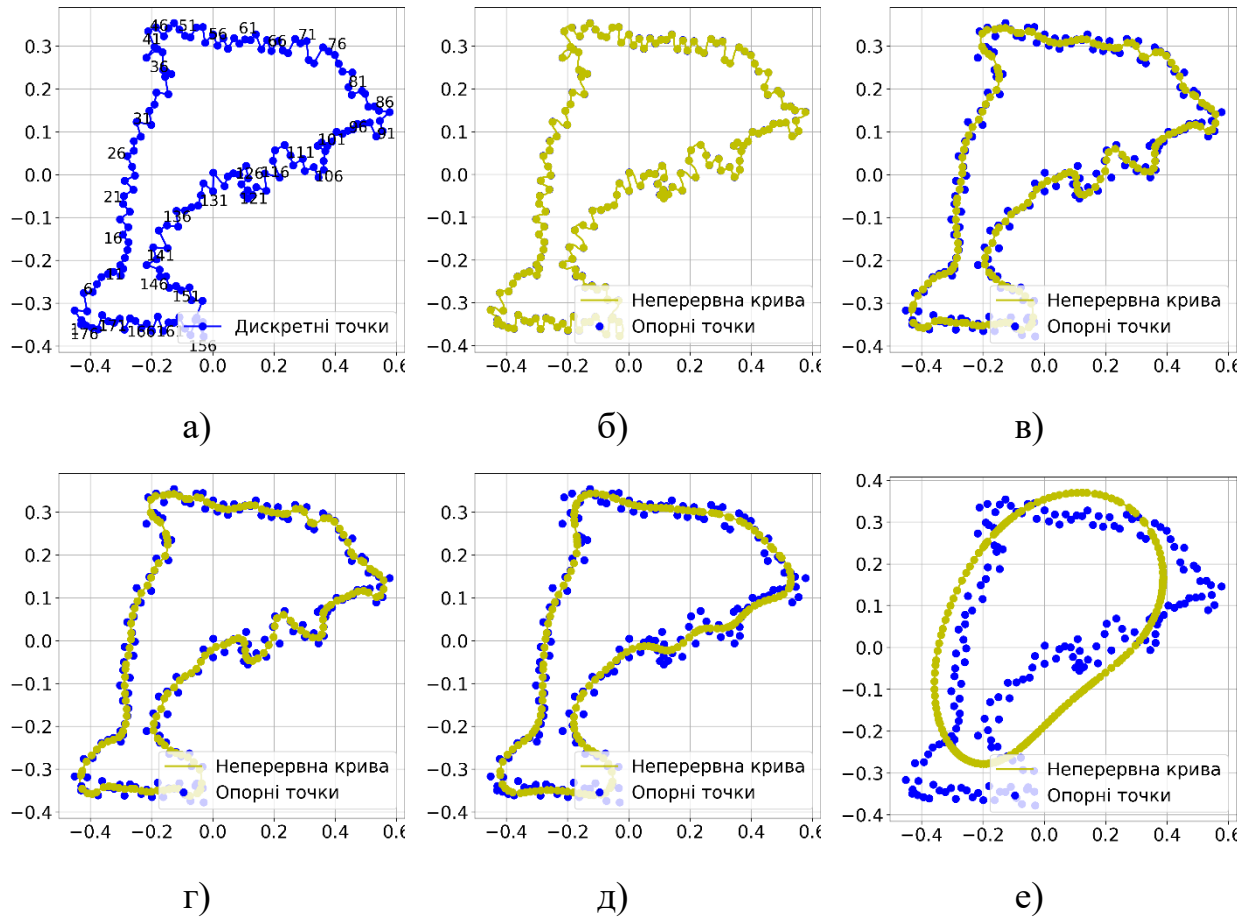


Рисунок 3.8. – Відновлення контуру дельфіна за даними роботи [119]: а) вихідні точки; б) контур після 1 ітерації; в) 15-ї ітерації ($\sigma_{\text{emp}} = 0.0086$); г) 18-ї ітерації ($\sigma_{\text{emp}} = 0.0102$); д) 30-ї ітерації ($\sigma_{\text{emp}} = 0.0165$); е) 60-ї ітерації ($\sigma_{\text{emp}} = 0.08902$).

Висновки за розділом 3

1. Розглянуто застосування методу КБС до задач згладжування, коли відомий теоретичний рівень похибки вимірювань. Введено основний керуючий параметр – спільну для всіх точок жорсткість пружних опор, а також знакову величину попереднього натягу пружини, яка визначається як мінімальна за модулем відстань від вимірюної точки до локальної багатокутної апроксимації контуру. Описано знакову конвенцію та показано, чому наївне визначення цієї величини через евклідову відстань призводить до некоректних результатів. Такий підхід дозволяє враховувати не лише величину відхилення

точки від контуру, а й напрям цього відхилення відносно локальної геометрії кривої. Це є принципово важливим для коректного формування навантаження на пружні опори та подальшого відновлення згладженого контуру.

2. Обґрунтовано вибір початкового значення параметра жорсткості через його безрозмірну характеристику. Встановлено, що початкове значення безрозмірної жорсткості має прийматися в межах близько 400, а поступове зменшення жорсткості на кожній ітерації, приблизно у 1,65 раза, забезпечує стабільне наближення контуру до цільової геометрії. Використання безрозмірної характеристики робить алгоритм менш залежним від масштабу задачі та середньої довжини ділянок початкової ламаної. Завдяки цьому один і той самий принцип вибору параметрів може бути застосований як до простих модельних прикладів, так і до складніших контурів реальних об'єктів.

3. Запропоновано статистичний критерій зупинки ітераційного процесу, заснований на порівнянні емпіричного середньоквадратичного відхилення точок від відновленого контуру з теоретичним значенням похибки вимірювань. Показано, що оптимальний результат згладжування досягається тоді, коли емпіричне відхилення наближається до теоретичного, тоді як подальші ітерації призводять до надмірного згладжування і втрати характерних деталей контуру. Запропонований критерій дає змогу уникнути суб'єктивного вибору моменту завершення ітерацій та формалізує процедуру отримання оптимальної кривої. Крім того, він безпосередньо пов'язує параметри алгоритму з якістю вихідних вимірювань.

4. Працездатність методу підтверджено на ряді прикладів. Для кола з 20 точками та малим шумом отримано добру відповідність емпіричного та теоретичного відхилень після 30 ітерацій. Для кола з 40 точками та великим шумом метод повністю усуває початкові петлі та хаотичне впорядкування точок уже після 15 ітерацій, а остаточна відповідність між емпіричним та теоретичним відхиленнями досягається на 40-й ітерації. Для прикладу з п'ятьма рідкими неточними точками з літератури після 100 ітерацій різниця між максимальним і мінімальним значеннями кривини не перевищує 0,4 %.

Отримані результати демонструють, що метод є ефективним як за малої кількості вихідних точок, так і за наявності значного шуму. Важливо, що при цьому зберігається загальна форма контуру, а згладжування не перетворюється на просте усереднення координат.

5. Метод також застосовано до густих контурів реальних силуетів з відомого тестового набору: яблуко, метелик, краб, дельфін, що містять від 155 до 284 точок. У всіх випадках запропонований критерій надійно вказує на оптимальну ітерацію, після якої починається надмірне згладжування. Для усунення залишкових локальних петель застосовано прийом повернення до попередньої ітерації зі зменшеною жорсткістю опор. Це підтверджує можливість використання методу не лише для модельних кривих, а й для обробки реальних контурів зі складною геометрією. Таким чином, метод КБС може розглядатися як універсальний інструмент для згладжування дискретно заданих контурів із контрольованим рівнем похибки.

Аналіз, здійснений у цьому розділі, ґрунтується на результатах, які автор опублікував у праці [1].

РОЗДІЛ 4. МЕТОД КОРОТАЦІЙНОГО БАЛКОВОГО СПЛАЙНА ДЛЯ ЗАДАЧ РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ НА ПРИКЛАДІ БЕЗКОЛІРНИХ ПАЗЛІВ

4.1 Застосування коротацийного балкового сплайна для згладжування густих точок

Алгоритм побудови початкового полігонального контуру на кожній ітерації, нумерації невідомих, складання системи рівнянь, їх рішення і отримання згладженої геометрії, переходу на наступну ітерацію, що вимагає полігональної геометрії.

Перед кожною ітерацією маємо пронумеровані точки B_i та A_i , де $0 \leq i \leq M$. Останні утворюють полігон з M прямими відрізками. По положеннях цих точок знаходимо відстань між ними P_i , яка має знак. Знак є додатнім, якщо вектор $\overrightarrow{A_i B_i}$ утворює гострий кут з нормаллю $\vec{n}_i$.

Для кожного відрізка формуємо вектор невідомих (4 параметри) на його початку і в його кінці, тобто всього 8 невідомих. Оскільки кількість відрізків є M , то всього маємо $8M$ невідомих. З іншої сторони, для кожного відрізка ми маємо 4 рівнянь зв'язку, тобто $4M$ рівнянь. На межах між елементами (відрізками) ми маємо 4 рівняння спряження. Всього таких меж $M - 1$, тобто маємо $4M - 4$ рівняння. Також на кожній границі застосовуються по 2 граничних умові, всього їх 4. Таким чином, кількість рівнянь і кількість невідомих – однакова.

Розв'язок матриці дає нам вектори стану $\vec{Y}_{m,0}$ на початку кожного сегмента (елемента). Згідно з (2.3) вектор стану $\vec{Y}_m(t)$ можна визначити для кожної точки t сегмента.

4.1.1 Адаптивний параметр згладжування

Цей параграф стосується вибору податливості D в рівнянні (2.16) для реальних точок. Інтуїтивно ясно, що може бути різна густина вимірювальних точок. Більше того, часто в заміри попадають артефакти – вони мають локально покручені геометрії, а тому їм відповідає більша кількість точок на одиницю довжини згладженого контуру. Зрозуміло, що такі ділянки повинні згладжуватися сильніше, ніж інші. Але коли багато «шумних» точок, то вони усереднюються і їхній вплив залишається більшим, ніж там, де мало шумних точок. Власне тому, в статистиці використовується поняття адаптивного проміжку згладжування (adaptive bendwidth) [24].

Ми знову використаємо механічну аналогію, яку ми застосовували для порівняння двох результатів вимірювання положення точок осі трубопровода, проведених різними приборами з нерівномірними та різними густинами вимірювальних точок [120]. Тобто використовується ідея балки на пружній основі (в пружному середовищі). Ідея балки на пружних опорах запропонована Тимошенком в 1916 році. Для розрахунку рельс залізної дороги замість розгляду зосереджених сил від шпал, що значно ускладнювало розрахунки, запропоновано розглядати дію однакового середовища, що створює тиск пропорційно прогину кожної точки. Це ускладнює саме диференціальне рівняння, проте зменшує різко кількість змінних і дозволяє отримати красиве аналітичне рішення. Приведемо це рівняння сил, яке на відміну від (2.16), відноситься до всієї ділянки, а не до дискретних точок заміру :

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{1}{h^4}(W(t) - P(t)). \quad (4.1)$$

Функція $P(t)$ – задає зовнішнє збудження, тобто є неперервним зовнішнім відхиленням. Змінна величина $P(t)$ може бути розрахована по

дискретним значенням Π_i , наприклад, як кусково-стала функція, або як лінійно-змінна [24, 87]. Тоді загальне диференціальне рівняння приймає вигляд:

$$\frac{d^4 W(t)}{dt^4} = -\frac{1}{h^4} (W(t) - \Pi(t)) = 0, \quad (4.2)$$

де h має розмірність довжини і характеризує спільну взаємодію балки і навколишнього середовища. Модель згладжування (початково прямої балки) (4.1) цікава тим, що вона легко передбачає ступінь згладжування для відомих функцій відхилення $\Pi(t)$. Нехай ця функція задається так:

$$\Pi(t) = \Delta_m \left(\cos \frac{t}{\xi_m}; \exp \frac{t}{\xi_m} \right), \quad (4.3)$$

тоді розрахункове значення $W(t)$ дається формулою:

$$W(t) = \Delta_m \left(\cos \frac{t}{\xi_m}; \exp \frac{t}{\xi_m} \right) \varepsilon \left(\frac{\xi}{h} \right), \quad (4.4)$$

де функція (результат) згладжування $\varepsilon \left(\frac{\xi}{h} \right)$

$$\varepsilon \left(\frac{\xi}{h} \right) = \frac{\xi_m^4}{(h^4 + \xi_m^4)}. \quad (4.5)$$

Очевидно, що якщо $\xi_m < h/2$, то $\varepsilon \left(\frac{\xi}{h} \right) \rightarrow 0$, а якщо $\xi_m > 2h$, то $\varepsilon \left(\frac{\xi}{h} \right) \rightarrow$

1. Тому, знаючи довжину артефакта ξ_m можна підбирати параметр згладжування h , щоб мінімізувати вплив. І навпаки, знаючи довжину локальних корисних особливостей, можна підібрати h , щоб їх зберегти. Саме тому ми і назвали цей підхід як контрольоване згладжування [120].

Але у нас балка не на розподілених, а на зосереджених опорах. Як перейти до неї, як зберегти властивості рівномірного згладжування, як це дає модель балки в пружному середовищі? Вважається, що ділянка, де є заміряне переміщення, є достатньо малою, порівняно з параметром h . Тоді в рівнянні (4.1) можна вважати, що $W(h); P(h)$ є константами, тоді інтегруючи його отримаємо замість (2.16):

$$Q_{i+1,0} = Q_{i,1} - \frac{L_i}{h^4} (W_{i,1} - P_i), \quad (4.6)$$

або

$$D = \frac{L_i}{h^4}, \quad (4.7)$$

де L_i – це довжина, на якій діє ця опора, тобто сума половинок відстані до правої опори і відстані до лівої опори.

$$L_i = \frac{s_i}{2} + \frac{s_{i+1}}{2}. \quad (4.8)$$

Фактично, застосування моделі жорсткостей (4.6) замість (2.16) означає перехід від моделі «однакового впливу кожної точки» до моделі «однакової впливу рівних ділянок», незалежно від того скільки точок є на ній. Пояснимо це. Нехай є правильний контур, що є прямою лінією довжиною 100, де всі точки заміряні з інтервалом 2 і їх кількість 50. Очевидно, що дві моделі дають однакові результати, якщо взяти $D = \frac{L_i}{h^4} = \frac{2}{h^4}$, тобто якщо $h = 1$, то $D = 2$. Допустимо, між двома правильними точками вставлена ще одна додаткова точка (артефакт) на висоті 1 над правильним контуром. Тоді в моделі (2.16) вона приведе до появи неправильної додаткової сили рівній $D \cdot 1 = 2$. А в

моделі (4.6) сума відстаней від цієї точки до сусідніх(4.8) буде рівна 1, це значить, що артефактна сила буде дорівнювати 1, а не 2, як в попередній моделі. Тепер допустимо, що артефактна фігура заміряна більш детально – наприклад, за допомогою 20 точок. В першій моделі, це призведе до появи артефактної сили рівної $20 \cdot 2 = 40$, а в другій – ці точки в середньому розміщені на відстані $\frac{1}{20} = 0.05$, тому сумарна сила всіх цих точок буде максимально дорівнювати $20 \cdot \frac{1}{20} = 1$. Тобто в другому випадку вплив артефакта на результуючий контур буде незначний і визначатися лише довжиною артефакта, а не кількістю заміряних точок.

4.1.2 Алгоритм зіставлення контурів

Для визначення якості кривої використовується наступна відома формула:

$$E = \int_0^l \kappa^2 ds, \quad (4.9)$$

де κ – це кривина. Чим менше отримане значення енергії E , тим краща добротність кривої. Формула (4.9) застосовується для початкового аналізу кожної окремої сторони кожного контуру. Зокрема, певне фіксується певне критеріальне значення E_{st} , по якому розділяються умовно прямолінійні (границя пазла) та криволінійні сторони.

Для порівняння двох сторін пазла необхідно взяти значення кривин цих сторін (одна з яких обчислюється у протилежному напрямку) і застосувати формулу (4.9) наступним чином

$$E_{a,b} = \int_0^l (\kappa_1(s) - \kappa_2(s))^2 ds, \quad (4.10)$$

де ми ввели поняття енергії (критерію) порівняння $E_{a,b}$ як енергії взаємної різниці кривин двох різних сторін a та b . Таким чином, ми знаходимо значення якості різниці кривин. Сторони різних елементів пазла вважаються відповідними (кандидатами на відповідність), якщо їх взаємна енергія дає найменше значення. Також необхідно зауважити, що для порівняння сторін їх необхідно опрацювати двічі – за та проти годинникової стрілки.

4.1.3 Поняття роботи в околі точки

Спробуємо знайти додаткові аргументи того, чи справді розглянута зона є кутовою (містить кут). На відміну від попередніх розділів, де аналізувалася енергія деформації, як характеристика добротності контуру, тут ми введемо поняття «роботи», як локальної міри відхилення точок згладженого контуру від заміряних точок. В механіці поняття «робота» – це добуток сили на переміщення в точці її прикладення. В усталеній геометрії (незмінне h для двох чи трьох ітерацій уточнення контуру) положення точок A уже не змінюються (розрахункові $W_i \rightarrow 0$), тому переміщення пружини – це Π_i . Тоді сила в опорі дорівнює $D_i \Pi_i$, а робота в данній точці, R_i є такою:

$$R_i = D_i \Pi_i^2. \quad (4.11)$$

Оскільки довжина ділянки згладжування (бендвідс) геометричних особливостей для конкретного h становить приблизно $\pm h3/4$, то доцільно обраховувати інтегральну роботу на такій ділянці в околі особливої точки:

$$R_{int}(N, h) = \sum_{N-\frac{h3}{4}}^{N+\frac{h3}{4}} D_i \Pi_i^2 = \sum_{N-\frac{h3}{4}}^{N+\frac{h3}{4}} \frac{L_i}{h^4} \Pi_i^2. \quad (4.12)$$

Результати розрахунку інтегральної роботи R_{int} показано нижче

4.1.4 Кутова удавана точка

В задачах геометричного моделювання методом КБС часто виникає необхідність застосування удаваних точок, які трактуються як точки A_i . Нагадаємо, що удавана точка не має фізичного відповідника, тобто точки B_i . Її введення обумовлене необхідністю зменшення розрахункових кутів $\theta(t)$, бо рівняння теорії балок стають неправильними [112, 10]. Введення удаваних точок в розрахункову схему може відбуватися різними способами, наприклад, просто на середини прямих відрізків з самого початку, а можна на будь якому етапі – ітерації [10]. Їх застосування вимагає перенумерації всіх точок. Введення удаваних точок відбувається, коли ми будуємо наближений контур (перед першою ітерацією), або у нас уже є поняття наближеного розрахункового контуру (на наступних ітераціях). Розрахунки для удаваних точок, і відрізків, що містять їх, майже нічим не відрізняються від таких для реальних точок. Ми використовуємо ті ж самі рівняння зв'язку (2.3). Єдиною особливістю є те, що податливість D пружини (якої немає) приймається нулю. Тому останнє рівняння спряження (2.16) записується так:

$$Q_{i+1,0} = Q_{i,1}. \quad (4.13)$$

В даній роботі поняття удаваної точки застосовується також для визначення кутових точок. В кутових точках відбувається стрибок кута. Проблема в тому, що ми не знаємо їх положення, бо із-за неточностей визначення положення реальних точок завжди є ймовірність прийняття невірної точки як кутової, що може впливати на подальші результати. Тому спочатку проводиться проведення сплайна для усього контуру. В районі кутових точок, інтеграли енергії (4.9) приймають (для обмеженої кількості пікселів, скажімо 20) найменше значення. Тому ми завжди знаємо приблизне положення кутової точки. Спочатку воно береться суб'єктивно. Тоді в

рівняннях спряження викидається рівняння неперервності кутів (2.14). А замість нього використовується умова, що моменти в кутових точках дорівнюють нулю:

$$M_{i,1} = 0. \quad (4.14)$$

Ця умова є досить логічною, адже біля кутових точок контур являє собою прямі відрізки, тобто кривина прямує до нуля. Використання умови (4.14) вимагає проведення декількох ітерацій з: а) перенумерацією реальних точок і віднесенням їх до найближчих ділянок контуру (дивись нижче); б) та поступовим уточненням кута між ділянками

Завдяки такій умові ми можемо згладити контур а також позбутися паразитних значень моментів, які виникають в кутових точках. Більше цього, це дозволяє розбити весь контур на чотири окремих підконтури, зіставлення яких власне і є основою процедури збирання пазла в цілому.

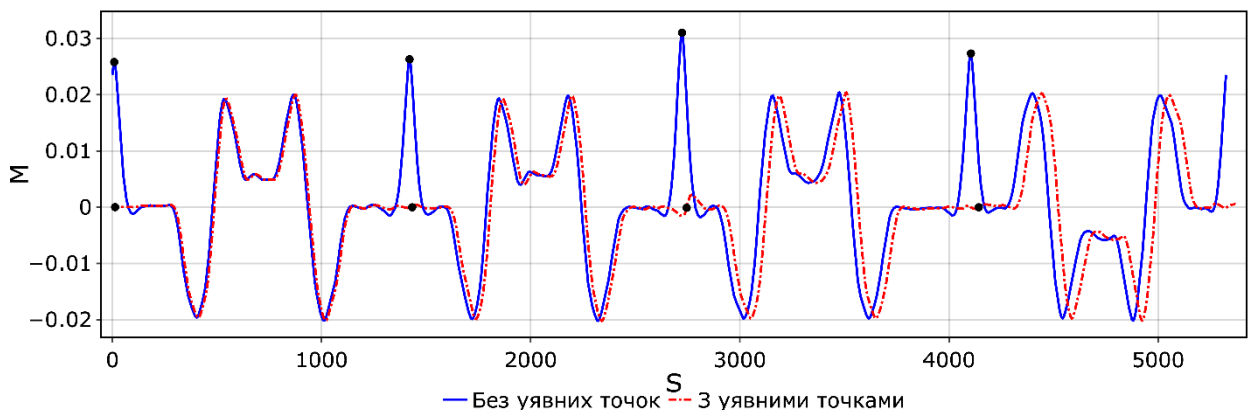


Рисунок 4.1 – Порівняння графіка моментів з удаваними кутовими точками та без них

Інша особливість реалізації кутової точки полягає в способі відкладенні переміщень $W(t)$ розрахункових точок в околі кутової точки (відрізків, що містять її). Нагадаємо, що однією з особливостей нашого КБС є власне

відкладення переміщень $W(t)$ по скоректованій нормалі (2.7), що забезпечує неперервність функції переміщення і дотичних. Тут задача набагато складніша. Розглянемо ділянку між точками A_i та A_{i+1} між якими розміщена кутова точка K , Рисунок 4.2. Так ми отримали дві ділянки, замість однієї. Кут між $A_i K \rightarrow K A_{i+1} \rightarrow$ позначимо як ψ_k

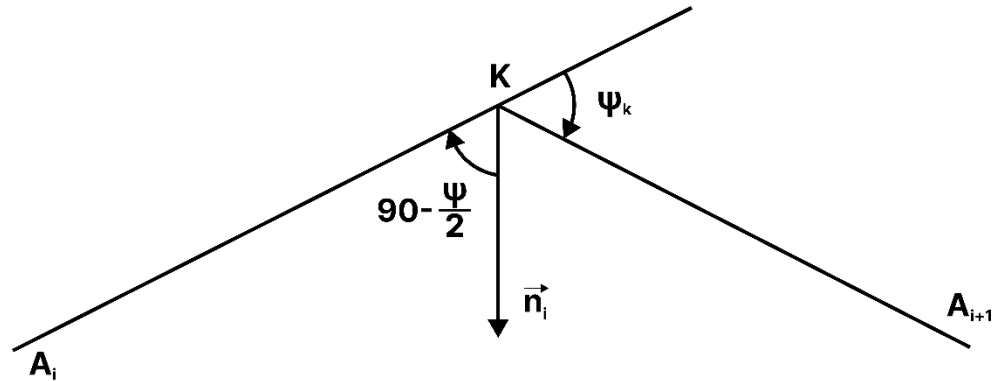


Рисунок 4.2 – Напрям нормалі в кутовій точці при нульових значеннях кутів деформування

Для обґрунтування способу відкладення $W(t)$, що гарантує гладкість і нерозривність контуру в околі точки K розглянемо спочатку випадок, коли розрахункові кути в кінці першої ділянки $[A_i K \rightarrow]$ і на початку другої ділянки $[K A_{i+1} \rightarrow]$ дорівнюють нулю. Тоді для того, щоб уточнені нормальні вектори (по яким відкладається W) співпадали в точці K , треба в цій точці початковий вектор до першої ділянки повернути на кут $\psi_k/2$, а початковий вектор до другої ділянки – на кут $-\psi_k/2$. Очевидно, що напрямок уточненої нормалі не може бути розривним, тому його треба плавно продовжити в обидва кінці до точок A_i та A_{i+1} . Це відбувається за допомогою лінійної апроксимації кутових поправок для формули типу (2.7).

Розрахункові кути деформації на обидвох ділянках звичайно не є нульовими. Позначимо їх як $\theta_{i,k}(t)$ $\theta_{k,i+1}(t)$ для першої і другої ділянки відповідно. Зокрема в кінці першої ділянки і на початку другої, тобто в точці K вони такі: $\theta_e^{i,k} = \theta_{i,k}(l_{i,k})$ та $\theta_0^{k,i+1} = \theta_{k,i+1}(0)$, відповідно. Тоді, додатково

будемо вважати, що в точці K уточнена нормаль має бути повернута на кут $\Delta\omega_{i,k}(t)$, де

$$\Delta\omega_k(t) = (\theta_e^{i,k} + \theta_0^{k,i+1})/2, \quad (4.15)$$

тоді повне значення уточнюючого кута в точці K буде таким

$$\omega_e^{i,k} = \frac{\psi_k}{2} + \frac{(\theta_e^{i,k} + \theta_0^{k,i+1})}{2}, \quad (4.16)$$

як точки кінця відрізка $[A_i K^{\rightarrow}]$, та

$$\omega_0^{k,i+1} = -\frac{\psi_k}{2} + \frac{(\theta_e^{i,k} + \theta_0^{k,i+1})}{2}, \quad (4.17)$$

як точки початку другої ділянки $[KA_{i+1}^{\rightarrow}]$

Тепер залишилося дати вираз для додаткового кута повороту нормалі для кожної із двох ділянок, які б забезпечили прийнятну гладкість сплайна на двох ділянках. Пропонуються такі вирази

$$\Delta\omega_{i,k}(t) = \theta_0^{i,k} \left(1 - \frac{t}{l_{i,k}}\right) + \omega_e^{i,k} \frac{t}{l_{i,k}}, \quad (4.18)$$

- для першої ділянки. А також

$$\Delta\omega_{k,i+1}(t) = \omega_0^{k,i+1} \left(1 - \frac{t}{l_{i,k}}\right) + \theta_e^{k,i+1} \frac{t}{l_{i,k}}, \quad (4.19)$$

-для другої ділянки. А новий напрямок нормалі записується за формулами аналогічній (2.7):

$$n\theta^{\rightarrow}_{i,k}(t) = n^{\rightarrow}_{i,k}\cos(\Delta\omega_{i,k}(t)) - t^{\rightarrow}_{i,k}\sin(\Delta\omega_{i,k}(t)), \quad (4.20)$$

-для першої ділянки, а також

$$\begin{aligned} n\theta^{\rightarrow}_{k,i+1}(t) = & n^{\rightarrow}_{k,i+1}\cos(\Delta\omega_{k,i+1}(t)) \\ & - t^{\rightarrow}_{k,i+1}\sin(\Delta\omega_{k,i+1}(t)), \end{aligned} \quad (4.21)$$

-для другої ділянки.

4.2 Програмне забезпечення для обчислень методом КБС та автоматизованого збирання пазлів

Для проведення обчислювальних експериментів, результати яких наведено в розділах 2–4 цієї дисертаційної роботи, було розроблено програмне забезпечення мовою Python 3. Вибір мови програмування зумовлений наявністю розвиненої екосистеми бібліотек для наукових обчислень, зокрема NumPy та SciPy, які забезпечують ефективну роботу з матричними операціями та розрідженими системами лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).

Розроблене програмне забезпечення складається з двох основних модулів: модуля побудови коротаційного балкового сплайна та модуля автоматизованого збирання пазлів.

Модуль побудови коротаційного балкового сплайна

Модуль побудови КБС має клієнт-серверну архітектуру та складається з чотирьох взаємопов'язаних компонентів: серверного API, веб-інтерфейсу користувача (фронтенду), модуля збереження та візуалізації результатів, а також набору скриптів для розширеної роботи з API.

Серверне API

Обчислювальне ядро системи реалізовано у вигляді веб-сервера на основі фреймворку Flask. Серверна частина приймає HTTP-запити з параметрами задачі (координати контрольних точок, тип кривої, граничні умови, параметри згладжування) та виконує побудову КБС як для замкнених, так і для незамкнених кривих. Основними обчислювальними етапами є: формування початкового контуру за заданим набором контрольних (реальних) точок та автоматичне розміщення удаваних точок між ними; побудова системи рівнянь на основі матриць переходу для кожного сегмента контуру з урахуванням рівнянь зв'язку на ділянках та рівнянь спряження на межах між суміжними елементами, що обертаються відповідно до поточного нахилу контуру; ітераційне розв'язання СЛАР для уточнення геометрії кривої та визначення векторів стану на початку кожного сегмента; перевірка збіжності за критерієм стабілізації переміщень між послідовними ітераціями.

Для замкнених кривих реалізовано накладання періодичних граничних умов, що забезпечують неперервність переміщень, кутів повороту та внутрішніх зусиль у точці замикання контуру. Для незамкнених кривих передбачено можливість задання різних типів граничних умов на кінцях: вільні кінці, защемлення, задані кути нахилу або кривина.

Результуюча система рівнянь зберігається у розрідженому форматі засобами бібліотеки `scipy.sparse`, а її розв'язання виконується за допомогою прямого розв'язувача `scipy.sparse.linalg.spsolve`. Такий підхід дає змогу ефективно обробляти контури, що містять кілька тисяч точок, зберігаючи при цьому обчислювальну складність, лінійно пропорційну кількості вузлів.

Веб-інтерфейс користувача

Для забезпечення зручного доступу до обчислювальних можливостей системи розроблено веб-інтерфейс (фронтенд) з використанням технологій HTML та JavaScript. Інтерфейс надає графічні засоби для задання вхідних параметрів розрахунку – координат контрольних точок, типу кривої (замкнена чи незамкнена), граничних умов та параметрів згладжування – і дає змогу ініціювати обчислення через звернення до серверного API. Результати

розрахунку відображаються безпосередньо у вікні браузера. Веб-інтерфейс охоплює основні сценарії використання методу КБС, проте має обмежений функціонал порівняно з повним набором можливостей API.

Модуль збереження та візуалізації результатів

Результати обчислень – координати побудованого контуру, значення кривини, енергії деформації та інші характеристики – зберігаються у форматі CSV. Такий підхід обрано з огляду на компактність зберігання даних порівняно з растровими зображеннями та можливість подальшої обробки збережених результатів. Для візуалізації даних використовується бібліотека Plotly, яка забезпечує побудову інтерактивних графіків кривин, контурів, енергетичних характеристик та інших залежностей на основі збережених CSV-файлів. Інтерактивність графіків дає змогу масштабувати окремі ділянки, порівнювати результати для різних параметрів та детально аналізувати поведінку сплайна в локальних зонах.

Скрипти для розширеної роботи з API

Для задач, що виходять за межі функціональності веб-інтерфейсу, розроблено набір Python-скриптів, які безпосередньо звертаються до серверного API. Ці скрипти забезпечують можливість автоматизації серій обчислень з різними параметрами, пакетної обробки наборів контурів, проведення параметричних досліджень та порівняльного аналізу результатів. Зокрема, скрипти використовувалися для систематичного дослідження впливу параметра згладжування h на якість відновлення кривини, для масового зіставлення сторін фрагментів пазлів, а також для автоматизації процедури збирання пазла. Такий підхід забезпечує повну відтворюваність обчислювальних експериментів та гнучкість у налаштуванні параметрів дослідження.

Модуль автоматизованого збирання пазлів

Другий модуль реалізує алгоритм автоматизованого збирання безколірного пазла на основі зіставлення кривин сторін окремих фрагментів. Алгоритм складається з таких послідовних етапів.

На першому етапі для кожного фрагмента пазла обчислюються кривини всіх чотирьох сторін за допомогою модуля КБС із заданим параметром згладжування h . Далі визначається енергія деформації кожної сторони. Сторони, енергія деформації яких не перевищує заздалегідь визначеного порогового значення, класифікуються як прямі. Фрагменти, що мають хоча б одну пряму сторону, утворюють множину рамкових елементів (множина А), а решта фрагментів – множину внутрішніх елементів (множина Б).

На другому етапі серед рамкових елементів виділяються кутові фрагменти – елементи, які мають дві суміжні прямі сторони. Довільний кутовий фрагмент обирається як початковий елемент збирання.

На третьому етапі здійснюється формування першого ряду пазла. До кривої сторони початкового кутового елемента серед множини А підбирається найкращий відповідник за критерієм мінімуму спільної енергії зіставлення кривин. Знайдений фрагмент приєднується до збірки, а його пряма сторона продовжує рамку. Процес послідовного нарощування ряду продовжується доти, поки не буде знайдено наступний кутовий фрагмент. Положення другого кутового елемента визначає довжину однієї зі сторін пазла.

На четвертому етапі починається формування наступного ряду. Від іншої прямої сторони щойно знайденого другого кутового фрагмента знаходиться найкращий відповідник серед невикористаних елементів множини А. Цей елемент стає початковим для нового ряду. Далі збирання відбувається у зворотному напрямку: до кожної позиції підбирається фрагмент із множини Б за критерієм мінімуму сумарної енергії зіставлення одразу двох пар кривих сторін – бічної (сусідній елемент у тому самому ряді) та верхньої (відповідний елемент попереднього ряду). Ряд завершується елементом із множини А, що має одну пряму сторону, яка має належати зовнішній рамці.

Описану процедуру повторюють для кожного наступного ряду. На кожному кроці множини невикористаних елементів зменшуються, що суттєво звужує простір пошуку. Експериментальна перевірка на 60-елементному безколірному пазлі підтвердила, що за умови коректного згладжування

контурів методом КБС алгоритм послідовного збирання забезпечує однозначне визначення правильного відповідника на кожному кроці без необхідності застосування зворотного пошуку чи складних стратегій оптимізації.

4.3 Сканування пазла, обробка зображення та контуру

Власне цей параграф і становить основну принципову методичну відмінність даної роботи в частині згладжування кривих. Тут проблема полягає в тому, як саме визначити контур, тобто сформувати впорядковану множину пронумерованих дискретних точок B_i , створити перший пробний контур, знайти на ньому відповідні точки A_i , відповідно до розміщення яких перенумеровуються точки B_i , а також побудувати процедуру послідовного уточнення контурів на ітераціях із локальною перенумерацією точок. На відміну від класичних підходів, де дискретний контур вважається заданим і вже впорядкованим, у даній роботі саме задача коректної параметризації контуру є ключовою. У задачі реконструкції пазлів контур завжди є замкненим, однак через високу щільність точок, отриманих при скануванні побутовим сканером з роздільною здатністю 600 dpi, а також через наявність шумів і локальних дефектів краю, початкова нумерація точок може бути геометрично некоректною та призводити до самоперетинів при їх безпосередньому з'єднанні.

1. Проводиться сканування всіх пазлів (Рисунок. 4.3а), у результаті чого отримується кольорове зображення. Для початку кольорова модель змінюється з RGB на HSV (відтінок, насиченість, яскравість), що дає більшу гнучкість у визначенні кольору та дозволяє відокремити інформацію про яскравість від кольорового відтінку. Для визначення білого кольору вводиться правило розділення: усе, що потрапляє в проміжок $(0, 0, 240) - (360, 50, 255)$, вважається білим кольором, а все інше – чорним. Тобто всі відтінки зі

значенням насиченості до 50 та значенням яскравості від 240 до 255 інтерпретуються як фон.

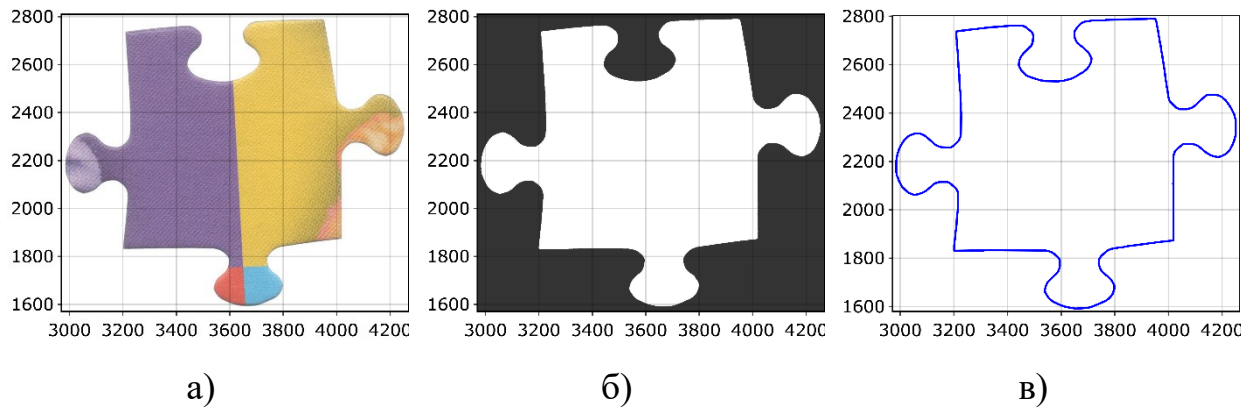


Рисунок. 4.3 – а) Вхідне зображення б) Маска пазла в) Точки B_i пазла

2. Після таких перетворень отримується зображення, розділене на два кольори – чорний і білий, де зображення пазла є чорним, а фон білим. Далі виконується інверсія кольорів так, щоб фон став чорним, а пазл білим. Таким чином формується маска пазла (Рисунок. 4.3б). До цього зображення застосовується функція `findContours` бібліотеки OpenCV у режимі пошуку лише зовнішнього контуру, що дозволяє отримати початкові точки B_i (Рисунок. 4.3в). У даній роботі ці точки використовуються без попереднього згладжування, фільтрації або морфологічної обробки.

3. На першій ітерації вибирається кожна K -та точка серед множини B_i , наприклад кожна двадцята, щоб початковий полігон був достатньо гладким, а кути ψ_i (Рисунок 2.1) не перевищували приблизно 60° . Такий вибір здійснено емпірично і пов'язаний з тим, що похибка сканування може перевищувати відстань між сусідніми точками, тому використання всіх точок одразу призводило б до нестійкої геометрії. Вибір кожної K -тої точки дозволяє побудувати грубий наближений контур, гарантовано позбавлений самоперетинів. Для цього початкового полігона вважається, що точки A_i співпадають з відповідними вибраними точками B_i , а початкові відстані Π_i дорівнюють нулю. Вибирається початкове значення параметра $l = 20$, тобто

припускається, що довжини всіх артефактів завідомо менші за це значення. Після першого обчислення отримується початковий наблизений контур, який надалі уточнюється за рахунок поступового врахування всіх інших точок і зменшення параметра згладжування. Для локальної ділянки формується розрахунковий (синій) контур, показаний на Рисунок 4.4.

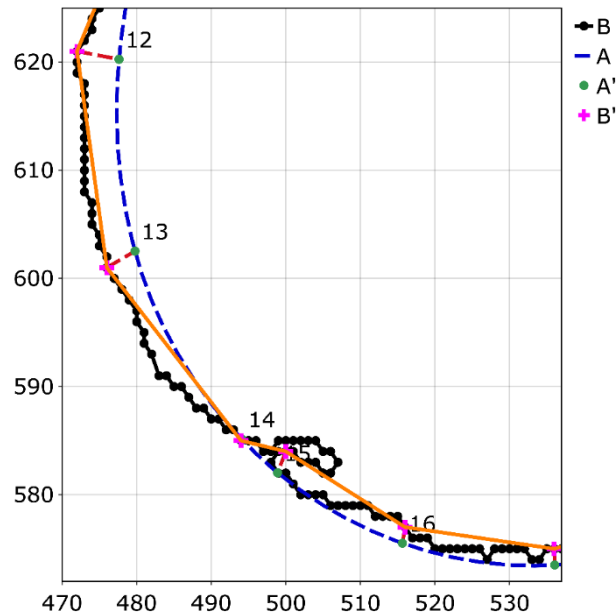


Рисунок 4.4 – Контур після першої ітерації. Чорні точки це точки B_i .

Фіолетові точки - це кожна 20-та заміряна точка, тобто K -ті точки.

Помаранчеві – це початковий полігон, а синій контур показує розрахункову криву після 1 ітерації. Червоним пунктиром показана відповідність між кожною 20-тою точкою та точками A_i згладженого контуру.

4. Наступною задачею є знаходження проєкцій усіх без винятку точок B_i на побудований контур і визначення відповідних точок A_i . Навіть ті точки B_i , які брали участь у побудові початкового наблизеного контуру, повторно включаються до уточнюючої процедури. Між кожними K -тими точками вводяться додаткові точки (так звані великі K -ті ділянки), причому для кожної з них генерується близько 200 проміжних точок. Для кожної реальної точки B_i визначається найближча за евклідовою відстанню точка серед множини точок A_i та додаткових проміжних точок у межах трьох сусідніх K -тих ділянок.

Таким чином знаходяться нові точки A_i , які нумеруються відповідно до їх розміщення вздовж довжини гладкого контуру, після чого відповідно перенумеровуються точки B_i . Оскільки гладкий контур не містить самоперетинів, перенумерація автоматично усуває можливі топологічні помилки. На Рисунок 4.5а показані точки B_i , з'єднані відповідно до початкової нумерації, а на Рисунок 4.5б – після перенумерації відносно гладкого контуру.

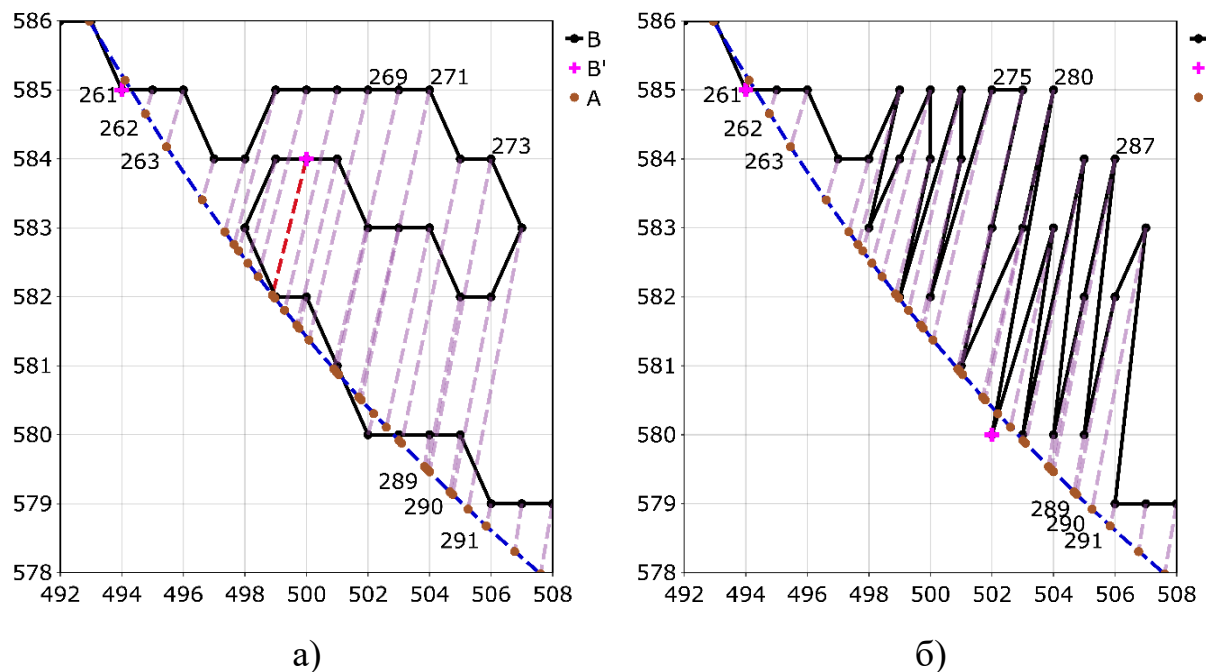


Рисунок 4.5 – Проекції точок B_i на розрахований контур та їх перенумерація:
 а) Точки B_i відповідно до початкової нумерації і їх проекція (фіолетові лінії)
 на розрахований контур. б) Перенумеровані точки B_i відповідно до
 розміщення їх проекцій A_i .

5. Маючи послідовність точок A_i , локально найближчих до B_i , а також відповідні відстані Π_i , переходять до наступного етапу уточнення. Вибирається нове значення параметра згладжування, наприклад за правилом $h^{k+1} = h^k / 1.2$, що відповідає зменшенню ступеня згладжування порівняно з попередньою ітерацією. Параметр h інтерпретується як характерна довжина, на якій згладжується шум або похибка вимірювання, тому його поступове зменшення дозволяє переходити від грубого (перезгладженого) опису

геометрії до відтворення дрібніших деталей. Будується новий полігон із точок B_i , обчислюється сплайн і визначається новий контур, на якому отримуються оновлені позиції точок A_i . Оскільки ці точки можуть незначно зміщуватися відносно відповідних точок B_i , у локальному околі попередніх положень A_i уздовж контуру генеруються додаткові точки ліворуч і праворуч. Серед них вибираються найближчі до відповідних B_i , які приймаються як нові уточнені точки A_i .

Таким чином формується ітераційна процедура, що поєднує глобальну топологічну стабілізацію та локальне геометричне уточнення. Самоперетини усуваються вже на етапі побудови грубого наближеного контуру, після чого всі подальші перенумерації виконуються відносно гладкої кривої, яка не може містити перетинів. Поступове зменшення параметра згладжування реалізує багатомасштабний процес відновлення контуру – від грубого наближення до детального відтворення реальної геометрії, що і становить методичну основу запропонованого підходу.

4.4 Виділення кутових точок на прикладі пазла

Ідентифікація починається з побудови наближеного контуру. Є набір точок 2300 більш менш упорядкованих. Але оскільки точки перемішані і то маємо нечіткість щодо порядку їх розміщення. Тому спочатку вибирається кожна 20-а точка (точки B') Рисунок 4.6. На цій першій ітерації вважаємо, що $B' = A'$. Отримуємо нові положення точок A'' і застосовуємо процедуру (2.32) для побудови повного контуру, Рисунок 4.6. Цей контур дає нам початкове наближення, з якого починається більш детальна процедура уточнення контуру.

Знаходимо проекції (найближчі точки до контуру) всіх точок B . Зрозуміло, що кожній точці B «дозволено» перевіряти близькість в малому інтервалі біля відповідних точок найближчих до неї (по порядку початкової

нумерації) точок A' , що призводить до розгляду лише двох ділянок між точками A' .



Рисунок 4.6 – Початкове наближення для згладженої фігури утворене за допомогою кожної 20-ї точки вимірів при $h = 20$

Після того як ми знайшли проекції усіх точок B на контур (назвемо ці точки A''), ми (пере)нумеруємо усі точки A''), відповідно до послідовності розміщення їх на контурі (при русі по годинниковій стрілці). Після цього ми перенумеруємо усі точки B відповідно до нумерації їх відповідників A . Це робиться для того, щоб уникнути петель у вхідних даних при наступній ітерації.

Проведемо наступну ітерацію при цьому ж самому значенні $h = 20$ але з врахуванням уже всіх перенумерованих точок B та A . Результати розрахунку усього контуру показані на Рисунок 4.7а, і він відрізняється від Рисунок 4.6 врахуванням усіх заданих точок B , а не кожної 20-ї точки.

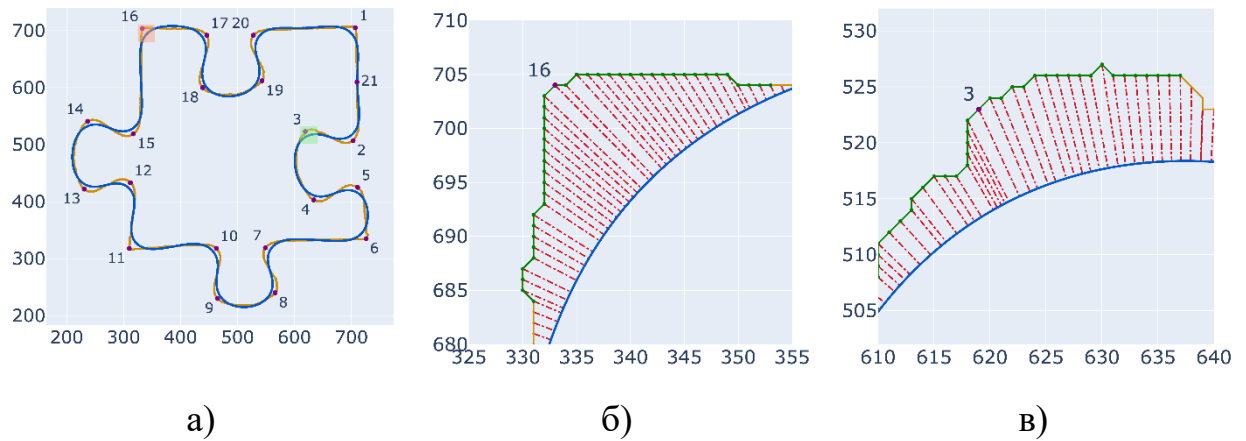


Рисунок 4.7 – Згладжений контур пазла при $h = 20$: а) повний контур; б) локальні точки B та їх відповідники A в околі особливої точки 3; в) точки B та A для іншої ділянки в районі кутової точки 16.

Графік кривин для всього контуру зображений на Рисунок 4.8. Очевидно, що при такому згладжуванні немає сенсу говорити про знаходження кутових точок, адже величини екстремальних моментів є близькими для всіх 20 особливих діляночок, Рисунок 4.8. Це пояснюється тим, що масштаб згладжування $h = 20$ є співмірним з радіусами заокруглень, а кут кутової точки $\sim 90^\circ$ є близьким до кутів повороту на гладких ділянках.

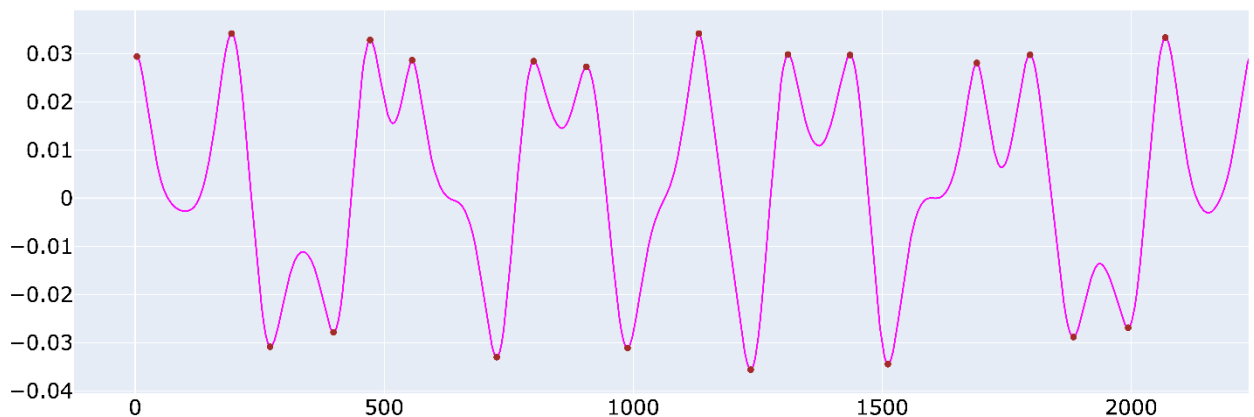


Рисунок 4.8 – Графік згладжених кривин контуру пазла при $h = 20$

Таблиця 4.1 – Інтегральна робота в зонах точок інтересу при $h = 20$

N	1	2	3	4	5
R_{int}	0.01077	0.01162	0.00898	0.00838	0.01051
N	6	7	8	9	10
R_{int}	0.0099	0.01129	0.00737	0.00574	0.00846
N	11	12	13	14	15
R_{int}	0.01492	0.0117	0.00946	0.00865	0.01136
N	16	17	18	19	20
R_{int}	0.0105	0.00805	0.0056	0.00684	0.01156

Поступово зменшуючи число h , наприклад, в 1.2 раза на кожній наступній ітерації, дійдемо до $h = 10$. Результати обробки всього контуру, а також його локальних ділянок в околах точок 3 та 16 показані на Рисунок 4.9. Тут також показані точки B та їхні відповідники – точки A . Очевидно, що тут спостерігається велике відхилення згладженого контуру від кутових точок, яке є більшим, ніж на гладких поворотних ділянках пазла.

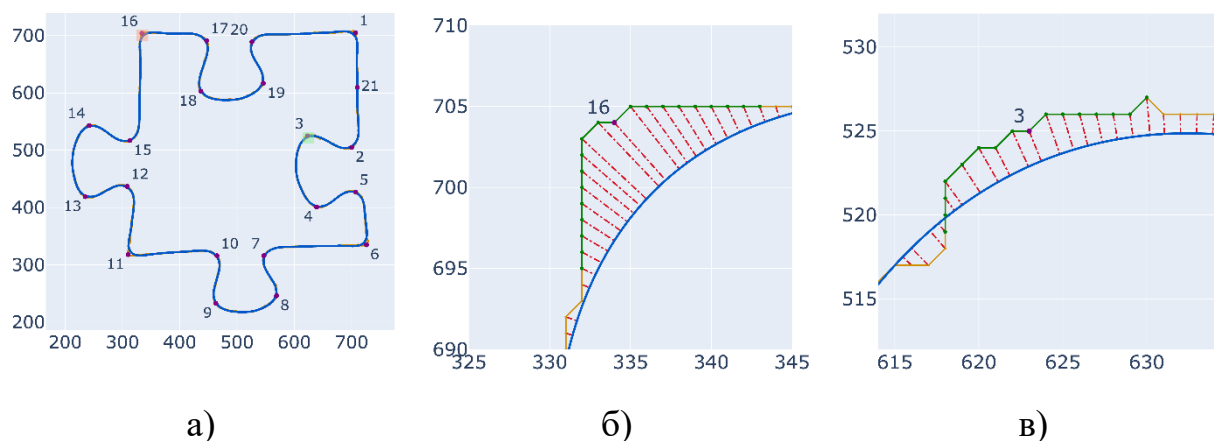


Рисунок 4.9 – Згладжений контур пазла при $h = 10$: а) повний контур; б) локальні точки B та їх відповідники A в околі особливої точки 3; в) точки B та A для ділянки в районі кутової точки 16.

Графік кривин показаний на Рисунок 4.10. При такому згладжуванні кривини в реальних кутових точках стають більш значними, і їх абсолютна величина уже завжди перевищує кривину поворотних точок контуру пазла.

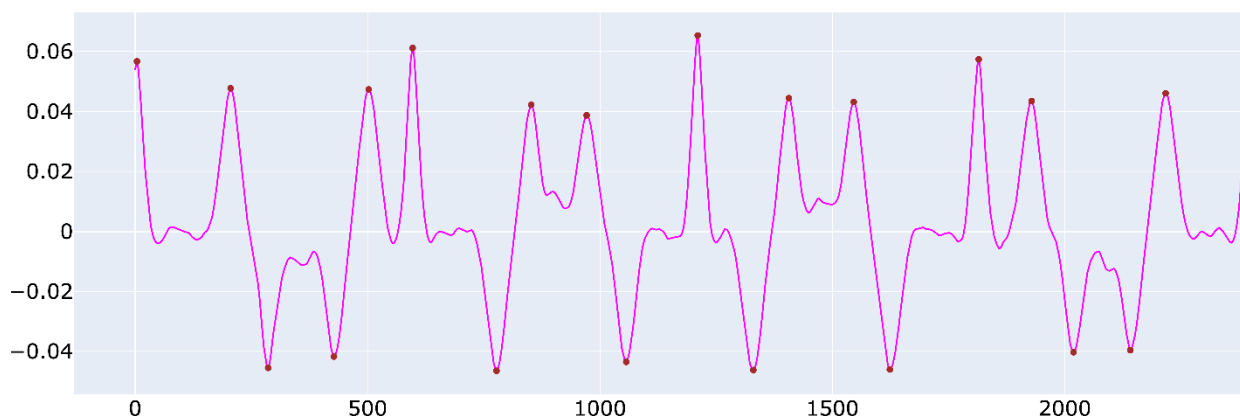


Рисунок 4.10 – Графік згладжених кривин контуру пазла при $h = 10$

Результати розрахунку роботи при $h = 10$ показані в Таблиця 4.1. Інтегральна сума значень роботи в точках, є меншою в 2 рази, адже меншою стала величина h . Ці дані також підтверджують особливість кутових точок – загалом робота в них в 4 і більше разів перевищує роботу на інших поворотних зонах. Тобто на ділянках реальних поворотів контуру встигає деформуватися до розміщення реальних точок, а на ділянках, що містять кутові точки – ні.

Таблиця 4.2 – Інтегральна робота в зонах точок інтересу при $h = 10$

N	1	2	3	4	5
R_{int}	0.01715	0.00277	0.00522	0.00206	0.00183
N	6	7	8	9	10
R_{int}	0.02556	0.00219	0.00296	0.00144	0.00171
N	11	12	13	14	15
R_{int}	0.02735	0.00169	0.00268	0.00237	0.00185
N	16	17	18	19	20
R_{int}	0.01822	0.00252	0.00158	0.00246	0.00198

Наступний аналіз проведемо для значення $h = 4.5$. Результати обробки всього контуру, а також його локальних ділянок в околах точок 3 та 16 показані на Рисунок 4.11. Очевидно, що тут також точок в околі кутових точок помітно значно більше відхилення згладженого контуру від замірених точок, яке є більшим, ніж на гладких поворотних ділянках пазла.

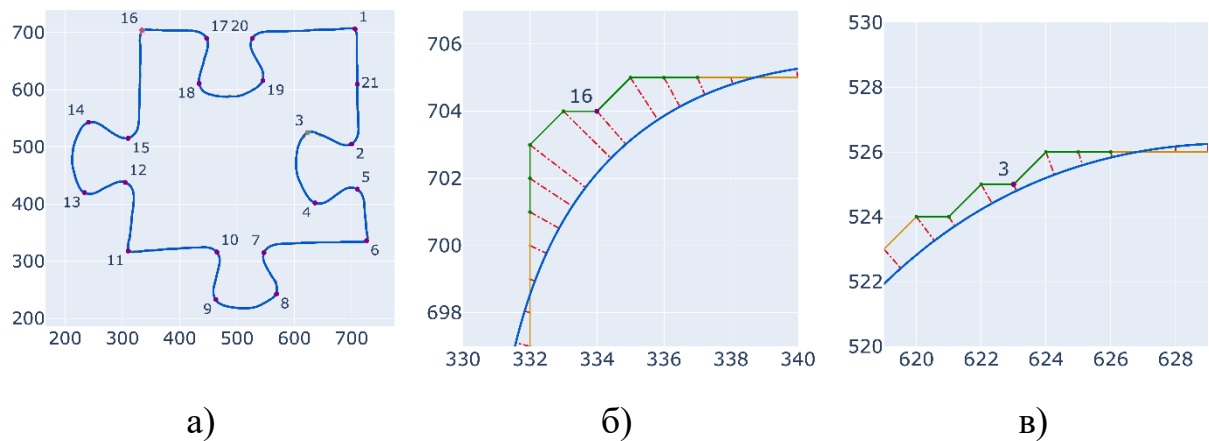


Рисунок 4.11 – Згладжений контур пазла при $h = 4.5$: а) повний контур; б) точки B та точки A в околі поворотної точки 3; в) точки B та A в околі кутової точки 16.

Графік кривин дається на Рисунок 4.12. Тут уже кривина в кутових точках відрізняються від кривини в поворотних точках як мінімум в два рази.

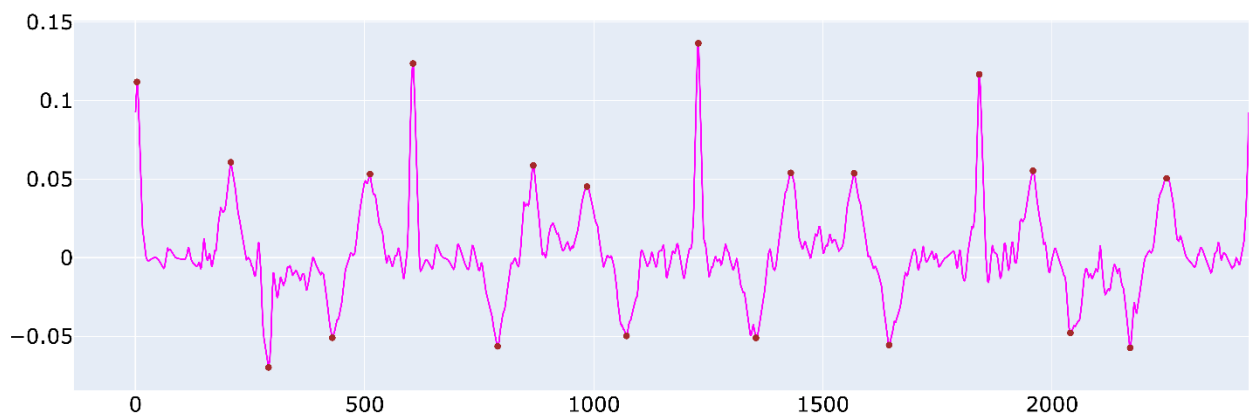


Рисунок 4.12 – Розрахункові кривини контуру при $h = 4.5$

Результати розрахунку роботи при $h = 4.5$ показані в Таблиця 4.3. Тут різниці в роботі є уже дуже помітними, і демонструють доцільність застосування такого критерію порівняння.

Таблиця 4.3 – Інтегральна робота в зонах точок інтересу при $h = 4.5$

N	1	2	3	4	5
R_{int}	0.0253	0.00199	0.00613	0.00188	0.00177
N	6	7	8	9	10
R_{int}	0.01864	0.00193	0.00647	0.00106	0.00115
N	11	12	13	14	15
R_{int}	0.04362	0.00187	0.00112	0.00192	0.00149
N	16	17	18	19	20
R_{int}	0.03463	0.00146	0.00222	0.00652	0.00087

Важливо зазначити, що подальше зменшення масштабу згладжування для заданого пазла i , головне для наявної точності вимірювання реальних його точок і наявності випадкових артефактів, - уже не має сенсу. В попередніх розділах демонструвалось, що кривини при $h < 5$ стають залежними від шуму вимірювань, що спотворює контур. Звичайно, збільшення точності вимірювань і попередньої нумерації точок контуру, може давати можливість застосування менших h . Але в будь-якому разі існує певне мінімальне число h , якого необхідно дотримуватися.

Після визначення зон кандидатів на наявність кутової точки необхідно дослідити ефект від розміщення в певному місці кутової точки, що повертає контур на певний кут. Математика такого розміщення описана нами в п. 1.2. Тут ми розглянемо конкретні приклади.

Виберемо в якості характерного параметра згладжування h величину $h = 10$, яка є з однієї сторони достатньою для видалення всіх артефактів вимірювання, а з іншої – забезпечує збереження корисної інформації як для

зіставлення кривих, так і для чіткого виявлення зон розміщення кутових точок (Рисунок 4.10 та Таблиця 4.2).

Таким чином, для отриманого контуру при $h = 10$ для кожної із чотирьох зон максимальної кривини в точці екстремуму кривини між двома реальними точками ми вставляємо одну кутову удавану точку. Для прикладу розглянемо зону точки 1 (див Рисунок 4.9а).

В результаті розв'язання системи рівнянь ми отримаємо такий контур з розривами в кутових точках. На Рисунок 4.13 показані два випадки розрахованого контуру після першої ітерації вставляння кутової точки: а) контур отриманий по звичайній корекції напрямку всіх точок, де одна удавана точка дає дві різні точки на контурі (що недопустимо); б) по запропонованій корекції напрямку відкладення переміщень для кутових удаваних точок за формулою (4.21). В подальшому варіант а) не застосовується.

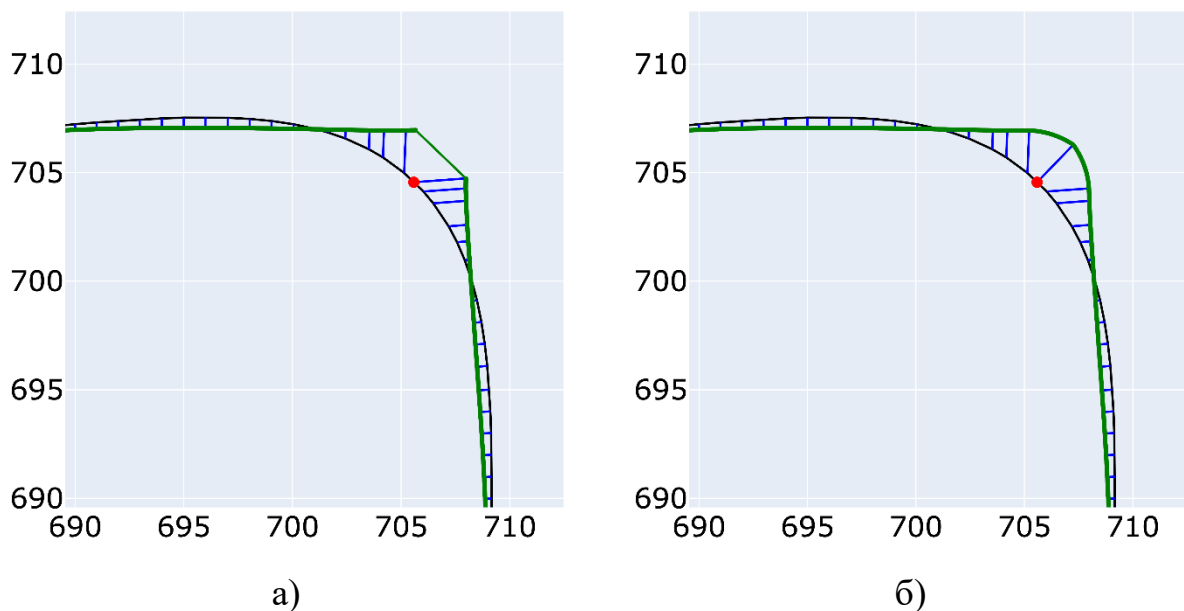


Рисунок 4.13 – Розрахований контур в околі зони 1 з кутовою точкою після першої ітерації: а) по звичайній процедурі уточнення нормалі (кутова точка дає дві нормалі); б) нормаль розрахована по (4.21)

Після того, як ми отримали скорегований гладкий контур, ми застосовуємо процедуру перенумерації точок. Для кожної точки B_i ми

розглядаємо зону контуру розміщену між точками A'_{i-1} , A'_i , A'_{i+1} і розміщуємо між ними 40 допоміжних точок, серед яких шукаємо найближчу до B_i точку контуру A''_i . Ця точка (квазіперпендикуляр) є новим відповідником точки B_i . Потім впорядковуємо по відношенні до руху по контуру точки A''_i і відповідно до них перенумеровуємо точки B_i . Після цього проводиться ще певна кількість ітерацій (звичайно 4, 5) для стабілізації контуру при значенні $h = 10$.

Результат уточнення контуру в зоні 1 з застосування кутової удаваної точки після чотирьох ітерацій розрахунку показаний на Рисунок 4.14. Очевидно, що незважаючи на помірний шум визначення точок B_i , згладжений контур виглядає досить пристойно. Це значить, що і місце знаходження і величина кута зміни напрямку контуру визначені правильно.

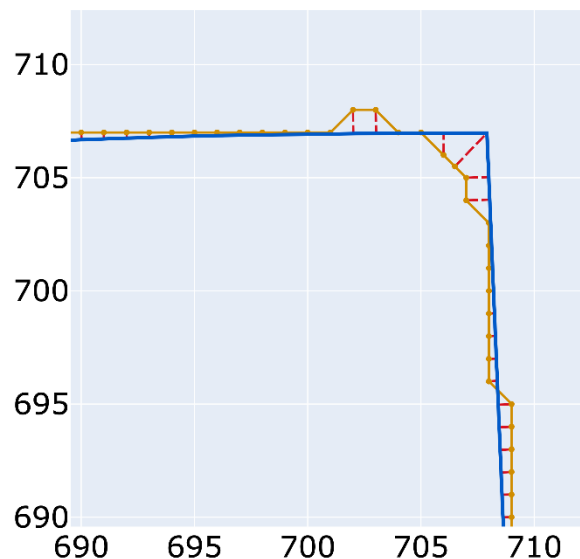


Рисунок 4.14 – Контур в зоні 1 після проведення 4 стабілізаційних ітерацій.

Перерахуємо значення інтегральної роботи, R_{int} , в особливих зонах після введення в зонах 1, 6, 11, 16 кутових удаваних точок. Ці результати наведені в Таблиця 4.4. Очевидно, що візуальне покращання контуру підтверджуються знайденими значеннями роботи, яка зменшилася, як мінімум в 15-30 разів порівняно зі значеннями в Таблиця 4.2. Більше того, тепер робота

в реальних кутових точках завжди менша, ніж в інших особливих точках, Рисунок 4.15. Це також є переконливим свідченням правильності застосування методики в зоні кутових точок. Для довідки, для всіх кутових точок в Таблиця 4.5 наводяться визначені стрибки кутів $\Delta\psi$ в них.

Таблиця 4.4 – Інтегральна робота в зонах точок інтересу при $h = 10$

N	1	2	3	4	5
R_{int}	0.00076	0.00276	0.00521	0.00206	0.0018
N	6	7	8	9	10
R_{int}	0.00180	0.00218	0.00296	0.00144	0.00171
N	11	12	13	14	15
R_{int}	0.00170	0.00168	0.00267	0.00237	0.00185
N	16	17	18	19	20
R_{int}	0.00072	0.00253	0.00158	0.00246	0.00198

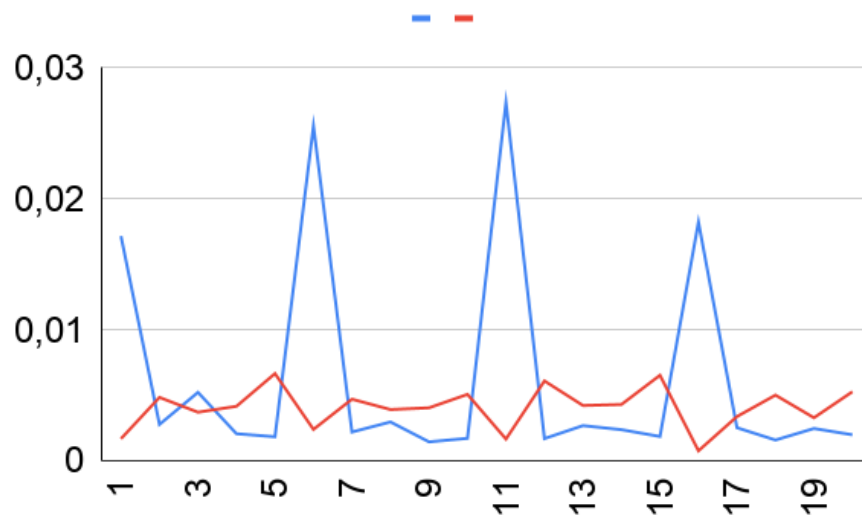


Рисунок 4.15 – Порівняння α інтегральних робіт до і після вставлення кутової точки в особливих зонах при а робота з кутовими точками (червона) та без (синя) при різних $h = 10$

Таблиця 4.5 – Розраховані стрибки кутів в кутових точках

N	1	6	11	16
$\Delta\psi$	87.5412	93.8480	98.7128	88.1403

Останнім недослідженим моментом методики визначення кутових точок є локалізація їх розміщення в особливій зоні. Очевидно, що правило розміщення кутової удаваної точки в точці максимальної кривини є трохи неясним. Адже завжди може бути певна зона, де значення кривини є дуже близькими, або де кривина має декілька локальних екстремумів. Тому потребує окремого дослідження питання вибору розміщення на контурі кутової удаваної точки.

Для перевірки правильності визначення положення кутової точки ми зробимо декілька експериментів, штучно зсуваючи кутову удавану точку в 6-ій особливій зоні (2 реальна кутова точка на Рисунок 4.7а) на 1 та 2 пікселя проти годинникової стрілки та на 1, 2, 5 точок за годинниковою стрілкою. Ці результати показані на Рисунок 4.16.

Детально опишемо отримані результати. При малій величині зсуву (до 2 пікселів) величина отриманого кута зсуву змінюється незначно і кут близький до 93.8° . Це свідчить про не критичність малих похибок в визначенні правильного місця знаходження кутової точки. Щодо інтегральної роботи, то вона має більш виражений мінімум в «правильній» точці, і власне ця величина може бути критерієм для більш точного знаходження місця розташування кутової точки, Таблиця 4.6. Зауважимо, що в Таблиця 4.6 даються два значення інтегральної роботи.

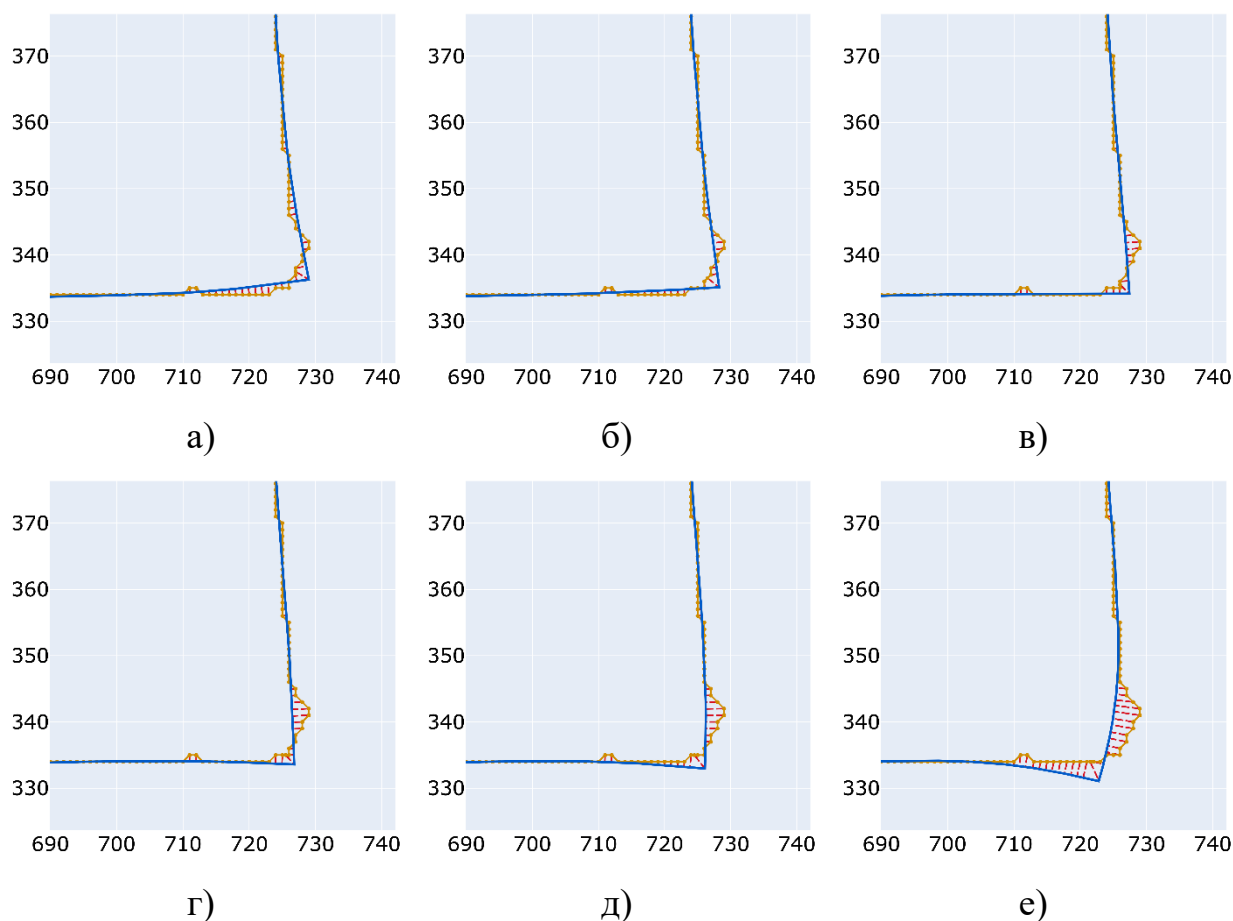


Рисунок 4.16 – Демонстрація зміни конфігурації контуру від послідовної зміни положення кутової удаваної точки в околі зони 6 відносно годинникової стрілки: а) зсув на -2 пікселя; в) на -1 піксель; в) «правильне» положення; г) на 1 піксель; д) на 2 пікселя; е) на 5 пікселів.

Перше значення дається відносно «правильного» положення (тобто обчислюється на ділянці, що знаходиться від неї на відстані $\pm 10 \cdot \frac{3}{4} = \pm 7.5$), а друге значення – інтервал розрахунку береться відносно конкретної кутової точки. В цьому сенсі точка, що посунута на (-1) піксель відносно «правильної» точки також може вважатися істинним положенням кута. Але це не є критичним, адже як показано раніше похибка на 1 чи 2 пікселя в положенні кутової точки мало впливає на енергію при зіставленні двох контурів.

Таблиця 4.6 – Значення величини кута і інтегральної енергії при локальному зміщенні положення кутової удаваної точки

Зсув	-2	-1	Без зсуву	На 1	На 2	На 5
Значення кута	93.019	93.960	93.848	93.333	93.137	87.804
Робота відносно «правильної» точки	0.00312	0.00195	0.00180	0.00283	0.00460	0.0130
Робота відносно заданої кутової точки	0.00235	0.00143	0.00180	0.00249	0.00365	0.01186

4.5 Укладання пазла шляхом зіставлення контурів

Розглядуваний пазл із 60 елементів показаний на Рисунок 4.17. Очевидно, що самі пазли містять велику гамму кольорів, що ускладнює вибір значення яскравості, що характеризує належність пікселя до пазла, а не до загального фону. Всі елементи пронумеровані. Кожен елемент має 4 сторони, які також нумеруються за годинниковою стрілкою. Так, для пазла №1 показано порядок нумерації сторін. В подальшому сторони пазлів будуть позначатись як номер пазла та номер сторони записані через дефіс. Так, 1-1 це права сторона першого пазла.

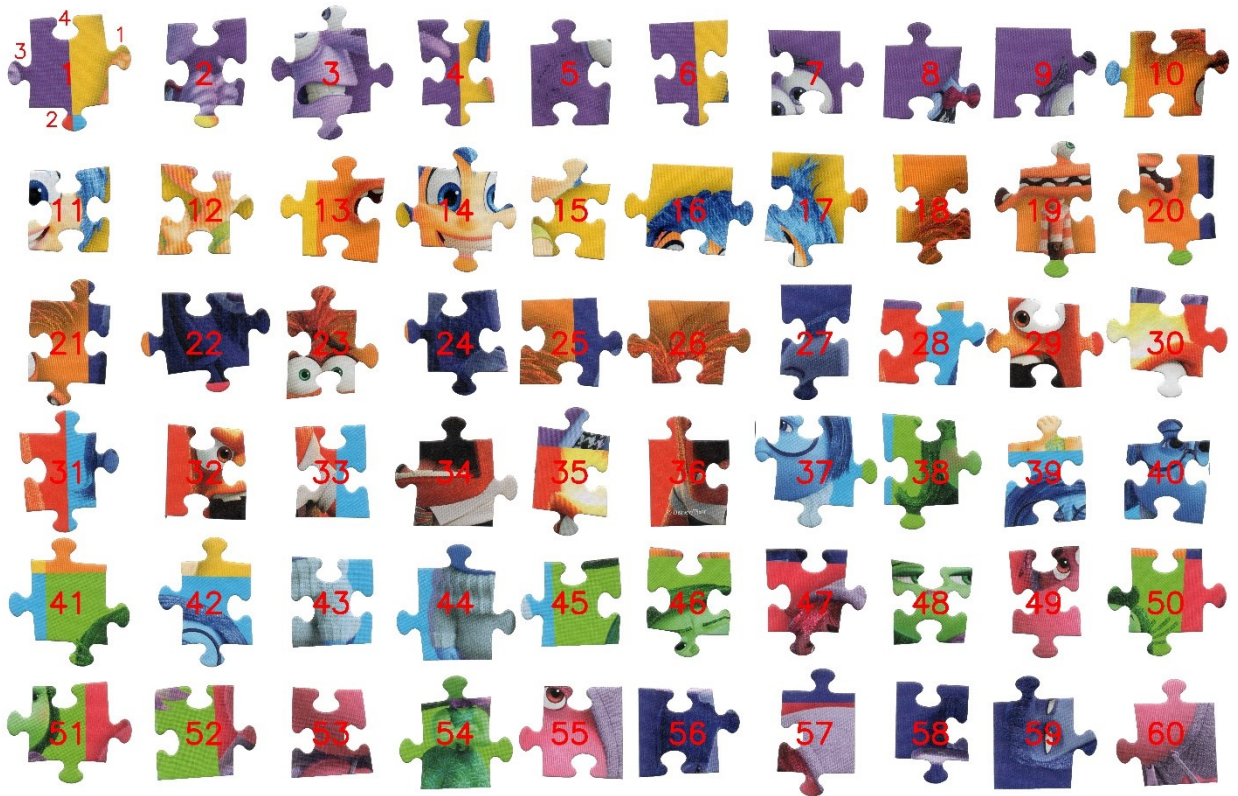


Рисунок 4.17 – Розглядуваний пазл.

Таким чином, ми маємо $60 \cdot 4 = 240$ сторін. Кожна сторона має зіставлятися з іншою. Звичайно, наявність кутових і прямих сторін, випуклих і впуклих сторін значно зменшує кількість необхідних зіставлень, і це детально розглядається в інших роботах [89, 101, 112]. Наша задача полягає в зіставленні кривин відповідних сторін.

Опишемо методику зіставлення двох контурів. Визначимо кривини і загальну довжину кожної сторони, L . Вони можуть незначно відрізнятись в силу неточностей вимірів (різні віддалі фотографування, відмінності в точності визначення границь – кутових точок). Тому ми перемасштабовуємо меншу сторону до більшої (вводимо масштабування абсциси s), так щоб їхні довжини були однаковими. Це правило перемасштабування застосовується окремо для кожної пари пазлів, які ми порівнюємо. Для знайденого меншого відношення двох сторін правило більш загально формулюється так: а) вводиться правило сепарації - якщо це відношення менше, ніж, скажімо 96,5%, то сторони вважаються невідповідними; б) вводиться правило масштабування,

тобто приведення до однакової глобальної довжини для близьких по довжині сторін для подальшого аналізу за формулою (4.10). Також застосовується правило зсуву, яке відображає той факт, що кутові точки можуть бути визначені неправильно – на 2-4 пікселі в різні сторони, тобто в межах 6 вхідних точок B_i . Тому при порівнянні двох контурів перший з них розглядається в декількох позиціях зсуву відносно другого, тобто він почергово зсувається на 4, 2, 0, -2, 4 (відповідно вилучаються точки B_i). Рахуються енергії і серед усіх енергій вибирається найменша.

У якості прикладу зіставлення сторін розглянемо сторону елемент №60, а саме 60-3, Рисунок 4.17, як одну із найбільш проблемних при складанні всього пазлу. Справа в тому, що «правильна» сторона зіставлення, а саме 53-1, та одна із «неправильних» сторін, а саме 45-1 давали дуже близькі результати по енергії зіставлення. Тому, звичайно, цікаво їх розглянути більш детально. Дослідимо, як впливає параметр згладжування h на отримані значення енергії порівняння (4.10). Зафіксуємо значення h для обох сторін і проведемо розрахунки для обох сторін. Спочатку співставимо довжини сторін, Таблиця 4.7. Як бачимо, невеликі неточності масштабування, початкового положення пазлів при їх фотографуванні трохи впливають на відношення довжин сторін і незначно змінюються від параметру h . Ця таблиця (порівняння 60-3 та 53-1) цікава тим, що дає уявлення про неточність виміру довжини і обґрунтовує критерій відбраковки пар по довжині, який ми тут встановили з запасом як 96,5%.

Таблиця 4.7 – Порівняння масштабів 60-3 з 45-1 та 60-3 з 53-1, при різних h

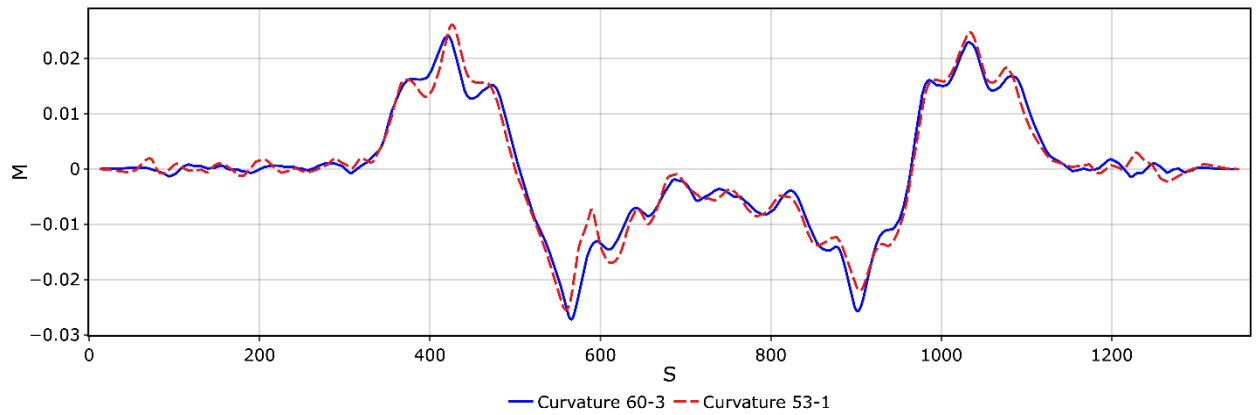
h	Пари сторін	
	60-3 та 45-1	60-3 та 53-1
10	99.53	96.92
20	99.70	96.99
30	99.49	96.88

Тепер власне перейдемо до критерію відповідності. Але спочатку знайдемо енергію лише сторони 60-3 за формулою (4.9), Таблиця 4.8. Як бачимо, чим більше число h , тим менша енергія деформації контуру, що є логічним результатом. Ця енергія змінюється від 0.14482 для $h = 10$ до 0.11856 для $h = 30$. Ці значення дають уявлення про число, відносно якого. будуть зрівнюватися енергії зіставлення контурів. Як бачимо, для $h = 10$, зіставлена енергія контурів 60-3 та 45-1 та 60-3 та 53-1 становить 3.78% та 3.21% відповідно. Цікаво зазначити дві тенденції згладжування при різних h . Перша, це відношення зіставленої енергії до початкової зменшується (тобто відносна відповідність стає кращою); Друга, це відношення між енергіями «правильної» пари і «неправильної» пари досягає максимуму при $h = 30$. Тобто, для $h = 30$ зіставлена енергія контурів 60-3 та 53-1 та 60-3 та 45-1 становить 0.85% та 0.18%, відповідно. Ще раз зазначимо, що ці дві пари контурів (правильна і неправильна) були найпроблемнішими в нашому пазлі.

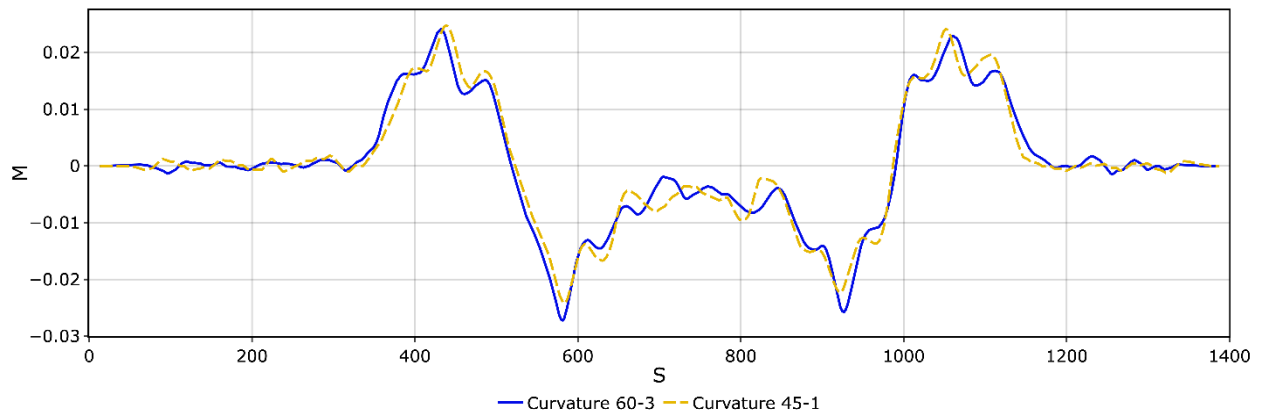
Таблиця 4.8 – Порівняння сторін: лише 60-3, 60-3 з 45-1 та 60-3 з 53-1, при різних h , виражені в значеннях енергії

	Лише 60-3	60-3 та 45-1	60-3 та 53-1
10	0.14482	0.00548	0.00465
20	0.13433	0.00126	0.00103
30	0.11856	0.00101	0.00022

Проілюструємо графічно ці результати. На Рисунок 4.18а показані зіставлення кривин 60-3 та 53-1 при $h = 10$. Очевидно, що графіки кривин досить негладкі, мають багато локальних піків і виглядають недозгладженими. Власне тому і значення енергії є досить великим. Аналогічно приведені графіки кривин для пари контурів 60-3 та 45-1, Рисунок 4.18б. Візуально тяжко сказати яка пара є кращою, хоча формально значення енергії для 60-3 та 53-1 є кращим, хоча всього і незначно, Таблиця 4.8.



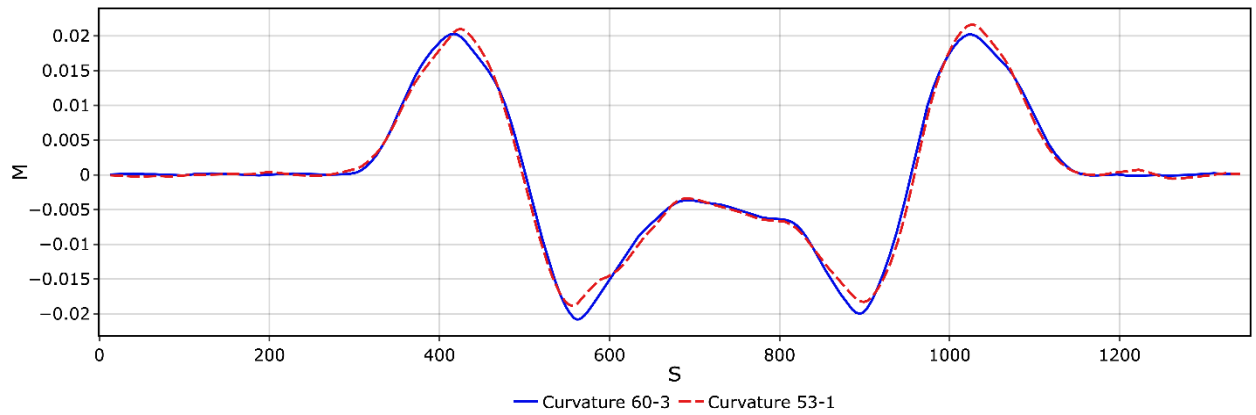
а)



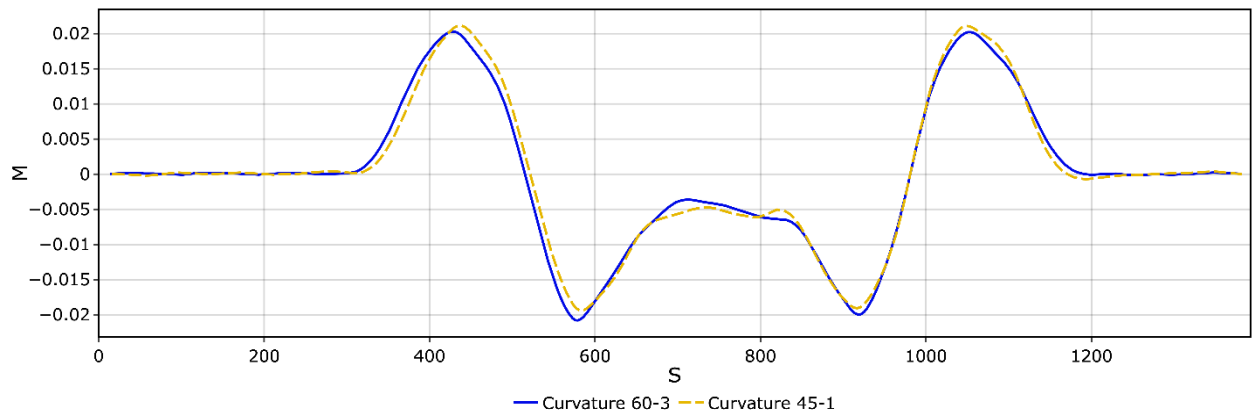
б)

Рисунок 4.18 – а) Порівняння 60-3 та 53-1 при $h=10$. б) Порівняння 60-3 та 45-1 при $h = 10$.

Застосування $h = 20$ помітно зменшує енергію порівняння, Рисунок 4.19. Правильна пара має кращі показники енергії і візуально краще виглядає, ніж неправильна пара. Навіть поведінка графіків на краях є більш логічною, бо лінії є майже прямими. Це свідчить про достатній рівень згладжування.



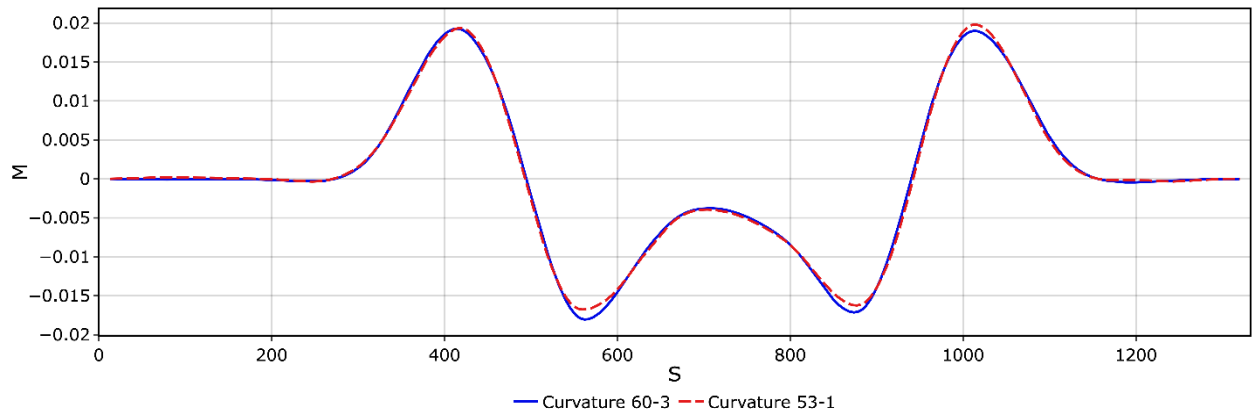
а)



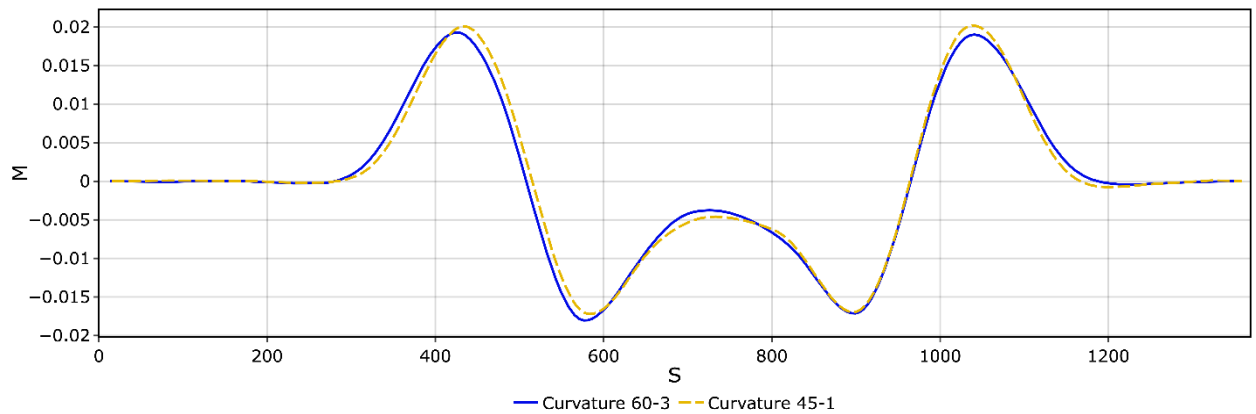
б)

Рисунок 4.19 – а) Порівняння 60-3 та 53-1 при $h=20$. б) Порівняння 60-3 та 45-1 при $h=20$.

Подальше згладжування при $h = 30$ знову покращує результати, Рисунок 4.20. Але на відміну від попередніх результатів видно, що графік кривини став ще більше згладженим і втратив корисну інформацію, що є свідченням певного перезладжування. Енергія знову зменшилася, особливо суттєво для правильної пари, 0.19% від початкової енергії контуру. «Правильне» значення енергії в 5 раз менше за «неправильне», але абсолютні значення є дуже малими.



а)



б)

Рисунок 4.20 – а) Порівняння 60-3 та 53-1 при $h=30$. б) Порівняння 60-3 та 45-1 при $h=30$.

Для ілюстрації впливу згладжування на кривини покажемо графік кривини контуру 60-3 при різних h , Рисунок 4.21. Тут спостерігаються більш явно всі описані вище явища згладжування. Для нас важливим є те, що інший контур (53-1) також згладжується подібно, тобто не дивлячись на те, що перший контур змінює і екстремуми і точки їх розміщення, другий контур веде себе подібним чином. Це значить, що методика вибору поняття h є правильною.

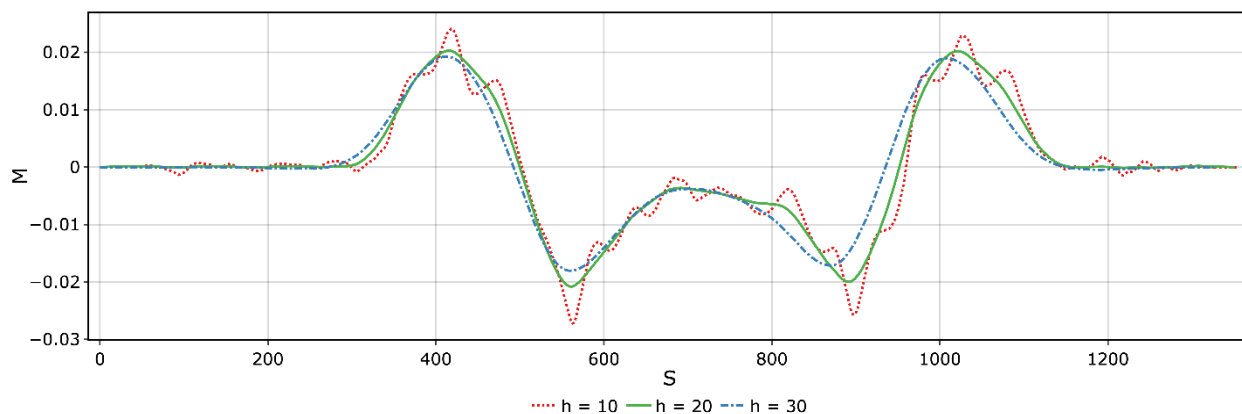


Рисунок 4.21 – Графік порівняння кривин при різних значеннях $h = (10, 20, 30)$

Першою дією по складанні пазла є визначення енергій кожної сторони і сепарація сторін на прямі та скривлені, а скривлені (що не обов'язково, бо призводить до наперед передбачуваних результатів) – на випуклі і впуклі. Це є дуже легкою задачею, адже максимальна енергія прямої ділянки в десятки разів перевищувала мінімальну енергію скривлених ділянок. При $h = 20$ мінімальне значення кривої сторони = 0.12546 а максимальне для прямої = 0.00123. Таким чином критерієм прямої сторони є значення якості менше ніж 0,05. Для інших значень h ми маємо подібні значення тому критерій залишається таким самим.

Для складання пазла ми будемо починати з кутового елемента. В даному випадку в нас їх 4 штуки, і немає різниці з якого починати, тобто в програмі вибір першого кутового є довільним. Для вибору кутового елемента було обрано критерій, що елемент має дві прямі сторони і сума енергій (4.9) їх сторін дає найменше значення. За цим принципом було обрано пазл №60, для якого, при $h = 10$, $E_{60-1} = 0.000061$, а $E_{60-2} = 0.000019$.

Починаємо збирати пазл. Сторона для якої будемо підбирати сторону іншого пазла, була обрана як непряма сторона після двох прямих за годинниковою стрілкою. Таким чином, ми починаємо збирати пазл зі сторони 60-3. Так як 60 це кутовий пазл, то з ним має узгоджуватися пазл рамки. За таким принципом ми вибираємо як можливі кандидати всі пазли як мінімум з

однією плоскою стороною. Тобто включаємо в розгляд і кутові елементи, бо ми поки ще не знаємо розмірність пазла по вертикалі і горизонталі. В цих елементах розглядаємо лише сторону, яка знаходиться перед прямою стороною за годинниковою стрілкою та містить впадину (бо 60-3 є стороною з випуклістю), наприклад, 53-1, 45-1, чи 43-1. Для 60-3 ми отримали 53-3, де $E_{60-3,53-1} = 0.00103$ та відношення сторін $= 99,70$. Наступним

кандидатом на співпадіння була сторона 45-1, де відношення довжин було 96.99%, а їхня спільна енергія $E_{60-3,45-1} = 0,00126$, що є досить близьким.

За таким принципом ми заповнюємо весь перший ряд до тих пір, поки не знайдемо кутовий пазл. Пошуку пазла для сторони 34-3 наведено в Таблиця 4.9. Першим кутовим пазлом який ми знайшли, став 36 пазл. Тепер ми знаємо, що пазл має 10 колонок, і знаючи кількість пазлів, можемо визначити кількість рядків.

Таблиця 4.9 – Пошук пазла для сторони 34-3 при $h = 20$

Кандидати: (кутові та граничні пазли): 19 шт		5-2, 6-3, 7-3, 8-2, 9-2, 16-3, 17-3, 18-3, 25-3, 26-3, 27-3, 32-2, 35-2, 36-1, 55-4, 56-2, 57-4, 58-2, 59-1					
Співпадає довжина: 10 шт		7-3, 9-2, 16-3, 17-3, 18-3, 25-3, 27-3, 32-2, 36-1, 56-2					
Співпадає форма: 8		7-3, 9-2, 17-3, 18-3, 25-3, 32-2, 36-1, 56-2					
34-3 та 7-3	34-3 та 9-2	34-3 та 17-3	34-3 та 18-3	34-3 та 25-3	34-3 та 32-2	34-3 та 36-1	34-3 та 56-2
0.32346	0.26635	0.07224	0.05442	0.22058	0.34831	0.00072	0.22691

Після того, як ми знайшли весь перший ряд, ми змінюємо напрямок та шукаємо пазл над щойно знайденим кутовим. Так як це теж пазл рамки, то

шукаємо його за тим самим принципом (але вже без кутових). В нашому випадку це 32 пазл. Пошуку пазла для сторони 36-4 наведено в Таблиця 4.10.

Таблиця 4.10 – Пошук пазла для сторони 36-4 при $h = 20$

Кандидати: 16		5-2, 6-3, 7-3, 8-2, 16-3, 17-3, 18-3, 25-3, 26-3, 27-3, 32-2, 35-2, 55-4, 56-2, 57-4, 58-2			
Співпадає довж.: 9		2-1, 3-1, 6-1, 10-2, 18-4, 28-4, 37-4			
Співпадає форма: 6		5-2, 6-3, 25-3, 32-2, 55-4, 56-2			
36-4 та 5-2	36-4 та 6-3	36-4 та 25-3	36-4 та 32-2	36-4 та 55-4	36-4 та 56-2
0.08576	0.34527	0.09483	0.00061	0.33619	0.07927

Далі ми продовжуємо збирати наступний рядок в протилежному (зліва-направо) напрямку. Але так як це вже не пазл, що лежить на рамці, то ми використовуємо пошук наступного фрагмента уже по 2 кривим сторонам. Очевидно, що шуканий елемент має узгоджуватися з уже знайденими сторонами 32-1 та 34-4 (як по довжині, так і по енергії) в такому порядку за годинниковою стрілкою і має мати одну випуклу та одну впуклу сторони. По цим початковим критеріям у нас зразу відсіюються більшість пазлів і їх сторін і залишаються лише 4 комбінацій, наприклад, 1-(1, 4), 10-(1, 4), 29-(3, 2), 38-(1, 4). Порівняння кривин дає таке значення спільних енергій $E_{32-1,1-1} = 0.00379$ та $E_{34-4,1-4} = 0.01735$. Сума цих кривин = 0.02114. Наступна мінімальна комбінація для ПАЗЛА 29-(3,2) дає такі значення енергії, $E_{32-1,29-3} = 0.00103$ та $E_{34-4,29-2} = 0.00077$ сума = 0,0018 що майже в 12 разів перевищують вищеприведені для ПАЗЛА 1-(1,4). Детальні результати наведені в Таблиця 4.11. Все це свідчить про дуже велику ефективність використання енергії як критерія для ПРАВИЛЬНО згладжених контурів і розрахованих кривин.

Подальший процес складання є тривіальним. В жодному із розглянутих випадків ми не були на роздоріжжі який елемент і яку сторону вибирати для наступного суміщення.

Таблиця 4.11 – Пошук пазла для основної сторони 32-1 та додаткової 34-4 при $h = 20$

Співпадає довжина: 10		1-(1, 4), 10-(1, 4), 12-(3, 2), 19-(3, 2), 20-(1, 4), 29-(3, 2), 37-(3, 2), 38-(1, 4), 48-(3, 2), 49-(1, 4)		
Співпадає форма: 4		1-(1, 4), 10-(1, 4), 29-(3, 2), 38-(1, 4)		
	1-(1, 4)	10-(1, 4)	29-(3, 2)	38-(1, 4)
32-1	0.00379 (1-1)	0.29993	0.00103	0.14919
34-4	0.01735 (1-4)	0.11903	0.00077	0.10637
Сума	0,02114	0,41896	0,0018	0,25556



Рисунок 4.22 – Автоматично зібраний пазл

Висновки за розділом 4

1. Розглядається задача зіставлення кривих, що має важливе прикладне значення для комп'ютерної графіки, судової експертизи та задач розпізнавання образів. Задача складання пазлів використовується як показовий приклад застосування коротаційних балкових сплайнів (КБС) до подібних проблем. Ключовим досягненням роботи є можливість коректної обробки дуже густих наборів точок, коли похибка вимірювань може бути співмірною або навіть перевищувати відстані між сусідніми точками. Показано, що за таких умов першочергового значення набуває правильне згладжування контуру та надійне відновлення кривини. У разі коректного розв'язання цих задач подальше зіставлення або складання може здійснюватися відносно простими алгоритмами.

2. Обґрунтовано використання індивідуальної жорсткості для кожної опори, що забезпечує рівномірність згладжування відповідно до геометричної довжини ділянок контуру, а не до кількості вимірюваних точок. Такий підхід дає змогу пов'язати процес згладжування з характерною довжиною впливу (bandwidth) і з відстанями між проєкціями вимірюваних точок на пробний контур. Запропоновано поняття початкового (стартового) контуру, який будується з обмеженої кількості реальних і, за потреби, удаваних точок та використовується для первинної перенумерації точок. Подальше уточнення положення точок контуру виконується ітераційно, шляхом пошуку найближчих точок у локальному околі попереднього наближення, що забезпечує стабільність і збіжність процедури. Для кількісного зіставлення контурів запропоновано методику, засновану на інтегралі від квадрата різниці кривин, яка дає інваріантну до параметризації міру подібності форм. Проаналізовано також технічні аспекти зіставлення, зокрема зсув, масштабування та вибір параметра згладжування, які у розглянутих прикладах не мали визначального впливу, але можуть бути критичними для складніших геометрій, наприклад, за невизначених меж зіставляваних ділянок.

3. Розширено можливості коротацийних балкових сплайнів для інтерполяційних і апроксимаційних задач геометричного моделювання кривих. У задачах апроксимації КБС мають дві принципові переваги порівняно з методами, що ґрунтуються на параметричному поданні кривих. По-перше, забезпечується збереження масштабу контуру при зміні параметра згладжування, що дозволяє уникнути спотворення геометрії. По-друге, результат згладжування визначається середньою похибкою вимірювань і реальними геометричними особливостями контуру, такими як амплітуди та характерні довжини заокруглень, а не густотою дискретизації, що фактично реалізує адаптивне згладжування.

4. Важливим результатом є розробка концепції кутової удаваної точки, яка допускає розрив напрямку дотичної в цій точці. Для таких точок вводяться спеціальні умови спряження, що передбачають нульову кривину та змінений напрям нормалі, вздовж якої відкладається розраховане переміщення. Методика ідентифікації кутових особливостей базується на узгодженому аналізі кривини та інтегральної роботи, яка інтерпретується як сумарна робота сил взаємодії між контуром і виміряними точками в межах заданої довжини впливу. Показано, що в околі реальних кутів значення інтегральної роботи істотно перевищує відповідні значення для гладких ділянок, а введення кутової удаваної точки призводить до її суттєвого зменшення. Остаточний вибір положення кутової точки здійснюється шляхом аналізу кількох можливих локацій уздовж контуру та мінімізації інтегральної роботи, що забезпечує надійну ідентифікацію кутових елементів навіть за умов значного шуму вимірювань і збереження гладкості контуру поза цими особливими точками.

Аналіз, здійснений у цьому розділі, ґрунтується на результатах, які автор опублікував у працях [3, 4]

ВИСНОВКИ

1. За результатом аналізу існуючих сплайнових методів встановлено, що класичні підходи (сплайни Безьє, В-сплайни) та гаусове згладжування мають суттєві обмеження при роботі з зашумленими контурами: зокрема, Гаусівське згладжування призводить до втрати масштабу фігури при збільшенні фільтрації, а метод Фоулера-Вільсона вимагає надмірної дискретизації (не менше 40 точок для побудови кола).

2. Сформульовано математичний опис методу КБС, який завдяки введенню удаваних точок та нормальних векторів, повернутих на локальний кут деформації, дав змогу лінеаризувати нелінійну задачу Фоулера-Вільсона. Експериментально доведено, що при побудові замкнутого колового контуру, що проходить через 4 точки, використання 28 додаткових удаваних точок (крок $\sim 12^\circ$) забезпечує розрахункову похибку кривини не більше 2%.

3. Розроблено метод адаптивного згладжування, заснований на моделі балки у пружному середовищі з жорсткістю опор (коефіцієнтом залежності стрибка третьої похідної від відхилення заміряної точки), що регулюється розмірним параметром h^{-4} , помноженим на відстань між вузлами. Це дало змогу однаково ефективно згладжувати експериментальні артефакти незалежно від щільності вимірювальних точок. Запропонований коефіцієнт лінійно залежить від відстані між проєкціями вимірюваних точок на контур і розмірного множника h^{-4} , де для гарантованого згладжування артефактів довжини l параметр має задовольняти умову $h > l$.

4. Запропоновано спосіб ідентифікації кутових особливостей, що базується на аналізі метрики «локальної роботи». Встановлено, що введення «кутової удаваної точки» забезпечує 8–30-кратне зниження значення енергетичного функціоналу в зонах справжніх кутів, тоді як на гладких ділянках цей показник змінюється лише на 10–30%.

5. Розроблено алгоритм зіставлення кривих, який використовує інтегральну метрику «взаємної енергії» (квадрат різниці кривин).

Експериментальні розрахунки показали, що для коректно зіставлених фрагментів пазлів значення спільної енергії виявляється в середньому у 12 разів нижчим, ніж для наступної за схожістю помилкової комбінації.

6. Здійснено експериментальну перевірку розроблених методів на задачі автоматизованого збирання 60-елементного безколірного пазла. Підтверджено, що метод КБС забезпечує однозначне зіставлення контурів навіть за наявності протяжних дефектів оцифрування, що дало змогу виключити складні стратегії перебору та динамічного програмування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Orynyak, I., Koltsov, D., Chertov, O., & Mazuryk, R. (2022). Application of beam theory for the construction of twice differentiable closed contours based on discrete noisy points. *System Research and Information Technologies*, 2022(4), 119–140. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2022.4.10
2. Orynyak, I., Yablonskyi, P., Koltsov, D., Chertov, O., & Mazuryk, R. (2024). Fairness of 2D corotational beam spline as compared with geometrically nonlinear elastic beam. *System Research and Information Technologies*, 2024(3), 107–132. DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2024.3.07
3. Кольцов, Д., & Ориняк, І. (2025). Укладання неточно оцифрованого безколірного пазла по кривизні контурів за допомогою коротаційного балкового сплайна. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*, 2, 3–18. DOI: 10.17721/2706-9699.2025.2.01
4. Ориняк, І. В., Кольцов, Д. Р., & Тавров, Д. Ю. (2026). Метод визначення кутових точок на зображеннях за допомогою коротаційного балкового сплайна. *Наукові вісті КІІІ*, 2026(1), 19–31. DOI: 10.20535/kpissn.2026.1.349268
5. Зінченко, А. Ю., & Хайдуров, В. В. (2024). Покращення розпізнавання структурованого тексту нейронною мережею YOLO. *Системи та технології*, 68(2), 23–31. DOI: 10.32782/2521-6643-2024-2-68.3
6. Коротков, В. С. (2024). Підвищення ефективності металообробки на верстатах з ЧПК деталей складної просторової форми. *Збірник наукових праць Дніпровського державного технічного університету (технічні науки)*, 1(44), 52–57. DOI: 10.31319/2519-2884.44.2024.6
7. Farin, G. E. (2002). *Curves and surfaces for CAGD: A practical guide* (5th ed.). Morgan Kaufmann Publishers.
8. Nowacki, H. (2000). Splines in shipbuilding. In *Proceedings of the 21st Duisburg Colloquium on Marine Technology* (pp. 27–53).

9. Cohen, E., Lyche, T., & Riesenfeld, R. F. (2010). MCAD: Key historical developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(5–8), 224–228. DOI: 10.1016/j.cma.2009.09.018
10. Mehlum, E. (1964). A curve-fitting method based on a variational criterion. *BIT Numerical Mathematics*, 4, 213–223. DOI: 10.1007/BF01920073
11. Cox, M. G. (1972). The numerical evaluation of B-splines. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 10(2), 134–149. DOI: 10.1093/imamat/10.2.134
12. de Boor, C. (1972). On calculating with B-splines. *Journal of Approximation Theory*, 6(1), 50–62. DOI: 10.1016/0021-9045(72)90080-9
13. Сітко, Д. О., Гніденко, М. П., & Крилов, О. С. (2024). Сплайн-функції в задачах інтерполяції. *Наукові записки Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій*, (2), 171–178. DOI: 10.31673/2786-8362.2024.025091
14. Xu, L., Song, B., & Cao, M. (2021). A new approach to optimal smooth path planning of mobile robots with continuous-curvature constraint. *Systems Science & Control Engineering*, 9(1), 138–149. DOI: 10.1080/21642583.2021.1872576
15. Liu, R., Wang, J., & Zhang, B. (2020). High definition map for automated driving: Overview and analysis. *The Journal of Navigation*, 73(2), 324–341. DOI: 10.1017/S0373463319000723
16. Хайдуров, В., Татенко, В., Литовченко, М., Цюпій, Т., & Жовновач, Т. (2024). Прискорення обчислень у моделюванні процесів у складних об'єктах і системах. *Системні дослідження в енергетиці*, (2(77)), 58–70. DOI: 10.15407/srenergy2024.02.058
17. Kobryń, A. (2017). *Transition curves for highway geometric design* (Springer Tracts on Transportation and Traffic, Vol. 14). Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-53727-6
18. Shults, R., Annenkov, A., Seitzkazin, G., Soltabayeva, S., Kozhayev, Z., Khailak, A., & Kulichenko, N. (2022). Analysis of the displacements of pipeline

overpasses based on geodetic monitoring results. *Geodesy and Geodynamics*, 13(1), 50–71. DOI: 10.1016/j.geog.2021.05.005

19. Dotson, R., Brown, A., & Jackson, B. (2024). Consistently inconsistent: Lessons from operators comparing multiple IMU data sets. In *Proceedings of the International Pipeline Conference* (Vol. 88575, V004T06A025). ASME. DOI: 10.1115/IPC2024-88575

20. Likhachev, D. V. (2022). Certain topics in ellipsometric data modeling with splines: A review of recent developments. *Advanced Optical Technologies*, 11(3–4), 93–115. DOI: 10.1515/aot-2022-0006

21. Wakjira, Y., Kurukkal, N. S., & Lemu, H. G. (2024). Reverse engineering in medical application: Literature review, proof of concept and future perspectives. *Scientific Reports*, 14, 23621. DOI: 10.1038/s41598-024-23621-5

22. Козак, Є. Б. (2022). Застосування математичної моделі інтерполяції кубічним сплайном при автоматизації аеронавігаційної системи. *Наукові нотатки*, (73), 259–264. DOI: 10.36910/775.24153966.2022.73.37

23. Reinsch, C. H. (1967). Smoothing by spline functions. *Numerische Mathematik*, 10(3), 177–183. DOI: 10.1007/BF02162161

24. Eubank, R. L. (1999). *Nonparametric regression and spline smoothing*. CRC Press.

25. Аушева, Н. М., Сидоренко, Ю. В., Демчишин, А. А., & Каленюк, О. С. (2025). Побудова періодичних кривих комбінованим експоненційно-алгебраїчним інтерполюючим поліномом. *Комп'ютерні науки та прикладна математика*, (1), 5–11. DOI: 10.26661/2786-6254-2025-1-01

26. Аушева, Н. М., Каленюк, О. С., & Сидоренко, Ю. В. (2024). Побудова замкнених кривих із наперед заданими властивостями експоненціальним комплексним поліномом дійсного аргументу. *Управляючі системи та комп'ютери*, (3), 3–9. DOI: 10.15407/csc.2024.03.003

27. Стрелковська, І., Соловська, І., & Стрелковська, Ю. (2024). Застосування параметричних сплайн-функцій в моделюванні. *Вісник*

Хмельницького національного університету. *Технічні науки*, 335(3(1)), 228–232. DOI: 10.31891/2307-5732-2024-335-3-32

28. Туровський, О. Л., & Правдивий, А. М. (2024). Моделювання сигналів засобів негласного отримання інформації за допомогою сплайн-функцій. *Сучасний захист інформації*, 1(57), 22–27. DOI: 10.31673/2409-7292.2024.010003

29. Moreton, H. P. (1992). *Minimum curvature variation curves, networks, and surfaces for fair free-form shape design* [Doctoral dissertation, University of California, Berkeley].

30. DeRose, T. D. (1990). Necessary and sufficient conditions for tangent plane continuity of Bézier surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 7(1–4), 165–179. DOI: 10.1016/0167-8396(90)90014-K

31. Farin, G., Rein, G., Sapidis, N., & Worsey, A. J. (1987). Fairing cubic B-spline curves. *Computer Aided Geometric Design*, 4(1–2), 91–103. DOI: 10.1016/0167-8396(87)90011-2

32. Nowacki, H., Li, D., & Lin, X. (1989). Mesh fairing GC^1 surface generation method. In *Theory and practice of geometric modeling* (pp. 93–108). Springer. DOI: 10.1007/978-3-642-61574-3_7

33. Meier, H., & Nowacki, H. (1987). Interpolating curves with gradual changes in curvature. *Computer Aided Geometric Design*, 4(4), 297–305. DOI: 10.1016/0167-8396(87)90024-0

34. Levien, R., & Séquin, C. H. (2009). Interpolating splines: Which is the fairest of them all? *Computer-Aided Design and Applications*, 6(1), 91–102. DOI: 10.3722/cadaps.2009.91-102

35. Holladay, J. C. (1957). A smoothest curve approximation. *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, 11, 233–243. DOI: 10.2307/2001941

36. Timoshenko, S. P. (1956). *Strength of materials: Part II. Advanced theory and problems*. D. Van Nostrand.

37. Brunnett, G., & Kiefer, J. (1994). Interpolation with minimal-energy splines. *Computer-Aided Design*, 26(2), 137–144. DOI: 10.1016/0010-4485(94)90034-5
38. Juhász, I., & Róth, Á. (2019). Adjusting the energies of curves defined by control points. *Computer-Aided Design*, 107, 77–88. DOI: 10.1016/j.cad.2018.10.004
39. Horn, B. K. P. (1983). The curve of least energy. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 9(4), 441–460. DOI: 10.1145/356056.356061
40. Birkhoff, G., & de Boor, C. (1965). Piecewise polynomial interpolation and approximation. In H. L. Garabedian (Ed.), *Approximation of functions* (pp. 164–190). Elsevier.
41. Moreton, H. P., & Séquin, C. H. (1993). Scale-invariant minimum-cost curves: Fair and robust design implements. *Computer Graphics Forum*, 12(3), 473–484. DOI: 10.1111/j.1467-8659.1993.tb00402.x
42. Levien, R. (2008). *The Euler spiral: A mathematical history* (Technical Report UCB/EECS-2008-111). University of California, Berkeley.
43. Havemann, S., Edelsbrunner, J., Wagner, P., & Fellner, D. (2013). Curvature-controlled curve editing using piecewise clothoid curves. *Computers & Graphics*, 37(6), 764–773. DOI: 10.1016/j.cag.2013.05.005
44. Ahlberg, J. H., Nilson, E. N., & Walsh, J. L. (1967). *The theory of splines and their applications* (Mathematics in Science and Engineering, Vol. 38). Academic Press.
45. Salkauskas, K. (1984). C^1 splines for interpolation of rapidly varying data. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 14, 239–250.
46. Schweikert, D. G. (1966). An interpolation curve using a spline in tension. *Journal of Mathematics and Physics*, 45(3), 312–317. DOI: 10.1063/1.1931206
47. Birkhoff, G., Burchard, H., & Thomas, D. (1965). Nonlinear interpolation by splines, pseudosplines, and elastica (Research Publication No. 468). General Motors Research Laboratories.

48. Rogers, D. F. (2001). *An introduction to NURBS: With historical perspective*. Morgan Kaufmann.
49. Ferguson, J. C. (1964). Multivariable curve interpolation. *Journal of the ACM*, 11(2), 221–228. DOI: 10.1145/321217.321225
50. Epstein, M. P. (1976). On the influence of parametrization in parametric interpolation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 13(2), 261–268. DOI: 10.1137/0713021
51. Kjellander, J. A. (1983). Smoothing of cubic parametric splines. *Computer-Aided Design*, 15(3), 175–179. DOI: 10.1016/0010-4485(83)90068-5
52. Ye, J., & Qu, R. (1999). Fairing of parametric cubic splines. *Mathematical and Computer Modelling*, 30(5–6), 121–131. DOI: 10.1016/S0895-7177(99)00104-3
53. Fowler, A. H., & Wilson, C. W. (1966). *Cubic spline: A curve fitting routine* (Report Y-1400). Union Carbide Nuclear Division.
54. Birchler, W. D., & Schilling, S. A. (2001). *Comparisons of Wilson–Fowler and parametric cubic splines with the curve-fitting algorithms of several CAD systems* (Report LA-13784). Los Alamos National Laboratory.
55. Sandoval-Hernandez, M., Vazquez-Leal, H., Hernandez-Martinez, L., Filobello-Nino, U. A., & Diaz-Arango, G. (2018). Approximation of Fresnel integrals with applications to diffraction problems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018, 4031793. DOI: 10.1155/2018/4031793
56. Zaghloul, M. R., & Alrawas, L. (2024). Calculation of Fresnel integrals of real and complex arguments up to 28 significant digits. *Numerical Algorithms*, 96(2), 489–506. DOI: 10.1007/s11075-023-01620-7
57. Stoer, J. (1982). Curve fitting with clothoidal splines. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 87(4), 317–346.
58. Heald, M. A. (1985). Rational approximations for the Fresnel integrals. *Mathematics of Computation*, 44(170), 459–461. DOI: 10.1090/S0025-5718-1985-0777289-2

59. Vázquez-Méndez, M. E., & Casal, G. (2016). The clothoid computation: A simple and efficient numerical algorithm. *Journal of Surveying Engineering*, 142(3), 04016005. DOI: 10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000178
60. Пилипака, С., Воліна, Т., Кресан, Т., Захарова, І., & Семерак, В. (2024). Пружне згинання смуги під дією прикладених сил. *Вісник Львівського національного університету природокористування. Серія «Агроінженерні дослідження»*, (27), 70–75. DOI: 10.31734/agroengineering2023.27.070
61. Narayan, S. (2014). Approximating Cornu spirals by arc splines. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 255, 789–804. DOI: 10.1016/j.cam.2013.06.038
62. Schneider, R., & Kobbelt, L. (2000). Discrete fairing of curves and surfaces based on linear curvature distribution. In *Curve and surface design, Saint-Malo 1999* (pp. 371–378). Vanderbilt University Press.
63. Pylypaka, S., Volina, T., Hropost, V., Babka, V., & Hryshchenko, I. (2023). Determination of the form of a spiral spring in a free state. *ScienceRise*, 2023(3), 3–9. DOI: 10.21303/2313-8416.2023.003213
64. Walton, D., & Meek, D. (2005). A controlled clothoid spline. *Computers & Graphics*, 29(3), 353–363. DOI: 10.1016/j.cag.2005.03.002
65. McCrae, J., & Singh, K. (2009). Sketching piecewise clothoid curves. *Computers & Graphics*, 33(4), 452–461. DOI: 10.1016/j.cag.2009.03.010
66. Bertolazzi, E., & Frego, M. (2018). Interpolating clothoid splines with curvature continuity. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41(4), 1723–1737. DOI: 10.1002/mma.4700
67. Kotha, B. D. (2021). *Autonomous vehicle waypoint navigation using hyper-clothoids* [Master's thesis, Virginia Tech].
68. Binninger, A., & Sorkine-Hornung, O. (2022). Smooth interpolating curves with local control and monotone alternating curvature. *Computer Graphics Forum*, 41(5), 25–38. DOI: 10.1111/cgf.14612

69. Ravankar, A., Ravankar, A. A., Kobayashi, Y., Hoshino, Y., & Peng, C. C. (2018). Path smoothing techniques in robot navigation: State-of-the-art, current and future challenges. *Sensors*, 18(9), 3170. DOI: 10.3390/s18093170
70. Adouane, L. (2017). Reactive versus cognitive vehicle navigation based on optimal local and global PELC. *Robotics and Autonomous Systems*, 88, 51–70. DOI: 10.1016/j.robot.2016.11.007
71. Wilde, D. K. (2009). Computing clothoid segments for trajectory generation. In *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* (pp. 2440–2445). IEEE. DOI: 10.1109/IROS.2009.5354732
72. Zhang, S., Wang, R., Jian, Z., Zhan, W., Zheng, N., & Tomizuka, M. (2023). Controllable clothoid path generation for autonomous vehicles. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 8(8), 5108–5115. DOI: 10.1109/LRA.2023.3291998
73. Lambert, E. D., Romano, R., & Watling, D. (2021). Optimal smooth paths based on clothoids for car-like vehicles in the presence of obstacles. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 19, 2163–2182. DOI: 10.1007/s12555-020-0187-9
74. Gim, S., Adouane, L., Lee, S., & Derutin, J. P. (2017). Clothoids composition method for smooth path generation of car-like vehicle navigation. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 88, 129–146. DOI: 10.1007/s10846-017-0498-3
75. Вірченко, Г. А., & Яблонський, П. М. (2020). Деякі аспекти комп'ютерного геометричного моделювання з використанням кривих Безьє. *Прикладні питання математичного моделювання*, 3(1), 41–48. DOI: 10.32782/2618-0340/2020.1-3.4
76. Gonzalez, D., Perez, J., Milanes, V., & Nashashibi, F. (2016). A review of motion planning techniques for automated vehicles. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 17(4), 1135–1145. DOI: 10.1109/TITS.2015.2498841

77. Xu, L., Wang, D., Song, B., & Cao, M. (2017). Global smooth path planning for mobile robots based on continuous Bézier curve. In *Proceedings of the Chinese Automation Congress* (pp. 2081–2085). IEEE. DOI: 10.1109/CAC.2017.8243123
78. Montes, N., Mora, M. C., & Tornero, J. (2007). Trajectory generation based on rational Bézier curves as clothoids. In *Proceedings of the IEEE Intelligent Vehicles Symposium* (pp. 505–510). IEEE. DOI: 10.1109/IVS.2007.4290203
79. Saito, T., & Yoshida, N. (2023). Curvature monotonicity evaluation functions on rational Bézier curves. *Computers & Graphics, 114*, 219–228. DOI: 10.1016/j.cag.2023.06.010
80. Yang, X. (2024). Euler Bézier spirals and Euler B-spline spirals. *Computer Aided Geometric Design, 102361*. DOI: 10.1016/j.cagd.2024.102361
81. Parque, V. (2021). Towards higher order fairness functionals for smooth path planning. In *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion* (pp. 319–320). ACM. DOI: 10.1145/3449726.3463121
82. Mokhtarian, F., & Mackworth, A. K. (1986). Scale-based description and recognition of planar curves and two-dimensional shapes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 8*(1), 34–43. DOI: 10.1109/TPAMI.1986.4767760
83. Goldberg, D., Malon, C., & Bern, M. (2004). A global approach to automatic solution of jigsaw puzzles. *Computational Geometry, 28*(2–3), 165–174. DOI: 10.1016/j.comgeo.2004.03.007
84. Michel, D., Oikonomidis, I., & Argyros, A. A. (2011). Scale invariant and deformation tolerant partial shape matching. *Image and Vision Computing, 29*(7), 459–469. DOI: 10.1016/j.imavis.2011.02.006
85. Gameliak, I., Kharchenko, A., Dmytrychenko, A., Svatko, V., Moroz, T., & Sikhnevych, S. (2025). Devising an approach to selecting filtering methods for relevant images of road defects. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 6*(2(138)), 42–51. DOI: 10.15587/1729-4061.2025.343208

86. Cheng, K. F., & Lin, P. E. (1981). Nonparametric estimation of a regression function. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 57(2), 223–233. DOI: 10.1007/BF00535487
87. Clark, R. M. (1977). Non-parametric estimation of a smooth regression function. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 39(1), 107–113. DOI: 10.1111/j.2517-6161.1977.tb01615.x
88. Lee, E. T. Y. (1989). Choosing nodes in parametric curve interpolation. *Computer-Aided Design*, 21(6), 363–370. DOI: 10.1016/0010-4485(89)90003-1
89. Gope, C., Kehtarnavaz, N., Hillman, G., & Würsig, B. (2005). An affine invariant curve matching method for photo-identification of marine mammals. *Pattern Recognition*, 38(1), 125–132. DOI: 10.1016/j.patcog.2004.07.005
90. Ruppert, D. (2002). Selecting the number of knots for penalized splines. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 11(4), 735–757. DOI: 10.1198/106186002853
91. Manay, S., Cremers, D., Hong, B. W., Yezzi, A. J., & Soatto, S. (2006). Integral invariants for shape matching. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 28(10), 1602–1618. DOI: 10.1109/TPAMI.2006.212
92. Cui, M., Femiani, J., Hu, J., Wonka, P., & Razdan, A. (2009). Curve matching for open 2D curves. *Pattern Recognition Letters*, 30(1), 1–10. DOI: 10.1016/j.patrec.2008.08.012
93. Fu, H., Tian, Z., Ran, M., & Fan, M. (2013). Novel affine-invariant curve descriptor for curve matching and occluded object recognition. *IET Computer Vision*, 7(4), 279–292. DOI: 10.1049/iet-cvi.2012.0227
94. Гамеляк, І., Харченко, А., & Дмитриченко, А. (2024). Основи методології розпізнавання дефектів цементобетонних покриттів. *Автомобільні дороги і дорожнє будівництво*, 116(2), 74–80. DOI: 10.33744/0365-8171-2024-116.2-074-080
95. Hoff, D. J., & Olver, P. J. (2013). Extensions of invariant signatures for object recognition. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 45(2), 176–185. DOI: 10.1007/s10851-012-0355-8

96. Hoff, D. J., & Olver, P. J. (2014). Automatic solution of jigsaw puzzles. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 49, 234–250. DOI: 10.1007/s10851-013-0451-y
97. Kurnianggoro, L., & Jo, K. H. (2018). A survey of 2D shape representation: Methods, evaluations, and future research directions. *Neurocomputing*, 300, 1–16. DOI: 10.1016/j.neucom.2018.02.017
98. Gwon, G. P., Hur, W. S., Kim, S. W., & Seo, S. W. (2017). Generation of a precise and efficient lane-level road map for intelligent vehicle systems. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 66(6), 4517–4533. DOI: 10.1109/TVT.2016.2611620
99. Bertolazzi, E., Frego, M., & Biral, F. (2020). Point data reconstruction and smoothing using cubic splines and clusterization. *Mathematics and Computers in Simulation*, 176, 36–56. DOI: 10.1016/j.matcom.2020.04.003
100. Freeman, H., & Garder, L. (1964). Apictorial jigsaw puzzles: The computer solution of a problem in pattern recognition. *IEEE Transactions on Electronic Computers*, EC-13(2), 118–127. DOI: 10.1109/PGEC.1964.263830
101. Wolfson, H. J., Schonberg, E., Kalvin, A., & Lamdan, Y. (1988). Solving jigsaw puzzles by computer. *Annals of Operations Research*, 12(1), 51–64. DOI: 10.1007/BF02022008
102. Schwartz, J. T., & Sharir, M. (1987). Identification of partially obscured objects in two and three dimensions by matching noisy characteristic curves. *The International Journal of Robotics Research*, 6(2), 29–44. DOI: 10.1177/027836498700600202
103. Wolfson, H. J. (1990). On curve matching. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(5), 483–489. DOI: 10.1109/34.55103
104. Stieber, A., Schneider, J., Nickolay, B., & Krüger, J. (2010). A contour matching algorithm to reconstruct ruptured documents. In *Joint Pattern Recognition Symposium* (pp. 121–130). Springer. DOI: 10.1007/978-3-642-15986-5_13
105. Duncan, J. S., Owen, R. L., Staib, L. H., & Anandan, P. (1991). Measurement of non-rigid motion using contour shape descriptors. In *Proceedings*

of the *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition* (pp. 318–319). IEEE. DOI: 10.1109/CVPR.1991.139708

106. Cohen, I., Ayache, N., & Sulger, P. (1992). Tracking points on deformable objects using curvature information. In *Computer Vision – ECCV'92* (Lecture Notes in Computer Science, Vol. 588, pp. 458–466). Springer. DOI: 10.1007/3-540-55426-2_40

107. McBride, J. C., & Kimia, B. B. (2003). Archaeological fragment reconstruction using curve-matching. In *Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops* (Vol. 1, pp. 3–3). IEEE. DOI: 10.1109/CVPRW.2003.10002

108. Sebastian, T. B., Crisco, J. J., Klein, P. N., & Kimia, B. B. (2000). Constructing 2D curve atlases. In *Proceedings of the IEEE Workshop on Mathematical Methods in Biomedical Image Analysis* (pp. 70–77). IEEE. DOI: 10.1109/MMBIA.2000.852384

109. Sebastian, T. B., Klein, P. N., & Kimia, B. B. (2003). On aligning curves. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25(1), 116–125. DOI: 10.1109/TPAMI.2003.1159950

110. Вірченко, Г. А., & Терещук, М. О. (2025). До питання практичного застосування кривих з натуральною параметризацією. *Прикладні питання математичного моделювання*, 8(2), 32–41. DOI: 10.32782/mathematical-modelling/2025-8-2-3

111. Вірченко, Г. А., Лебедєва, О. О., Надкернична, Т. М., & Линок, Н. М. (2021). До питання комп'ютерного параметричного проєктування в системі Компас-3D. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*, 101, 208–220. DOI: 10.32347/0131-579X.2021.101.208-220

112. Orynyak, I., Kuznetsov, Y., & Tavrov, D. (2025). Efficient construction of clothoidal splines using corotational beam splines. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 117318. DOI: 10.1016/j.cam.2025.117318

113. Marande, W., & Burger, G. (2007). Mitochondrial DNA as a genomic jigsaw puzzle. *Science*, 318(5849), 415. DOI: 10.1126/science.1148036

114. Leitão, H. C., & Stolfi, J. (2005). Measuring the information content of fracture lines. *International Journal of Computer Vision*, 65, 163–174. DOI: 10.1007/s11263-005-3842-8
115. Писаренко, Г. С., Квітка, О. Л., & Уманський, Е. С. (1993). *Onip матеріалів*. Вища школа.
116. Orynyak, I. V., Lokhman, I. V., & Bohdan, A. V. (2012). Determination of curve characteristics by its discrete points measured with an error and its application to stress analysis for buried pipeline. *Strength of Materials*, 44, 268–284. DOI: 10.1007/s11223-012-9380-7
117. Orynyak, I., Lokhman, I., & Bohdan, A. (2012). The spring splines procedure with prescribed accuracy for determination of the global (pipe centerline) as well as the local (dent) curvatures. In *Proceedings of the 9th International Pipeline Conference (IPC 2012)* (Paper IPC2012-90127). ASME. DOI: 10.1115/IPC2012-90127
118. Ladrón de Guevara, J. M., de Cózar, O. D., & Blázquez, E. B. (2011). Robust fitting of circle arcs. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 40, 147–161. DOI: 10.1007/s10851-010-0249-8
119. Ohrhallinger, S., & Wimmer, M. (2018). StretchDenoise: Parametric curve reconstruction with guarantees by separating connectivity from residual uncertainty of samples. In *Proceedings of the 26th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications (PG 2018)*, Short Papers (pp. 1–4). DOI: 10.2312/pg.20181266
120. Orynyak, I., Kuznetsov, Y., & Mazuryk, R. (2025). Controllable curvature smoothing of the pipeline positions by 2D corotational beam spline. *Journal of Pipeline Systems Engineering and Practice*, 16(3), 04025047. DOI: 10.1061/JPSEA2.PSENG-1739

ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Orynyak I., Koltsov D., Chertov O., Mazuryk R. Application of beam theory for the construction of twice differentiable closed contours based on discrete noisy points. System research and information technologies. 2022, N4. doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2022.4.10 (Scopus, WOS, Q4)

Orynyak I. – визначення загального плану статті та постановка задачі

Koltsov D. – модифіковано метод Фоулера-Вільсона, запропоновано метод удаваної точки, спосіб визначення відстані Π та корегування вектора нормалі. Реалізовано алгоритм та проведено розрахунки

Chertov O. – запропоновано алгоритм корегування кривини

Mazuryk R. – реалізований МПП та ітераційну процедуру

2. Orynyak I., Yablonskyi P., Koltsov D., Chertov O., Mazuryk R. Fairness of 2D corotational beam spline as compared with Geometrically nonlinear elastic beam. System research and information technologies, 2024, N3, doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2024.3.07 (Scopus, WOS, Q4)

Orynyak I. – визначення загального плану статті та постановка задачі

Yablonskyi P. – запропоновано критерій якості й нормалізованої якості

Koltsov D. – застосовано метод КБС для C^1 задачі Ерміта проведено розрахунки для КБС та зроблено порівняння

Chertov O. – проведено розрахунки для методу Безьє

Mazuryk R. – проведено розрахунки для методу ГНБ

3. Koltsov D., Orynyak I. Укладання неточно оцифрованого безколірного пазла по кривизні контурів за допомогою коротаційного балкового сплайна. Журнал обчислювальної та прикладної математики, 2025, № 2 doi.org/10.17721/2706-9699.2025.2.01 (Фахове видання)

Кольцов Д. – розроблено метод обробки контурів на зображеннях та застосування КБС для зіставлення частин зображення за допомогою критерію якості

Ориняк І. – визначення загального плану статті та постановка задачі

4. І.В. Ориняк, Д.Р. Кольцов, Д.Ю. Тавров, Метод визначення кутових точок на зображеннях за допомогою коротаційного балкового сплайна. Наукові вісті КПП, № 1, 2026. doi.org/10.20535/kpissn.2026.1.349268 (Фахове видання)

Ориняк І. – визначення загального плану статті та постановка задачі

Кольцов Д. – запропоновано та реалізовано метод пошуку та уточнення кутових точок за допомогою коротаційного балкового сплайна

Тавров Д. – запропонував алгоритм побудови наближеного контуру та брав участь у визначенні загального плану статті та постановки задачі

5. Ігор Ориняк, Дмитро Кольцов, Роман Мазурик (2023). Порівняння плоских балкового коротаційного сплайна і геометрично нелінійної балки. Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики - 2023", Львів. Збірник наукових праць / за заг. ред. акад. НАН України Р.М. Кушніра та чл.-кор. НАН України В.О. Пелиха [Електронний ресурс] // Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2023. – 454 с. С. 393.

Ориняк І. – визначення загального плану статті та постановка задачі

Кольцов Д. – проведено розрахунки для КБС та зроблено порівняння

Мазурик Р. – проведено розрахунки для методу ГНБ

6. Роман Мазурик, Дмитро Кольцов, Ігор Ориняк (2025). Геометрично-нелінійні балки в задачах побудови сплайнів оптимальної форми. Матеріали XIII Міжнародної науково-практичної конференції "прикладна геометрія, інженерна графіка та об'єкти інтелектуальної власності", 2025, doi.org/10.20535/ngikg2024.XIII.310158

Мазурик Р. – проведено розрахунки для методу ГНБ

Кольцов Д. – проведено розрахунки для КБС та зроблено порівняння

Ориняк І. – визначення загального плану статті та постановка задачі

7. Igor Orynyak, Roman Mazuryk, Dmytro Koltsov, Yurii Kuznetsov, Julius Lubinskis, Smoothing the pipeline noisy point positions by corotational beam spline,

Pipeline Technology Conference 2024, Proceedings (ISSN 2510-6716)

<https://www.pipeline-conference.com/abstracts/smoothing-pipeline-noisy-point-positions-corotational-beam-spline>

Orynyak I. – визначення загального плану статті та постановка задачі

Mazuryk R. – проведено попередню обробку даних

Koltsov D. – проведено розрахунки для теоретичних тестів та реальних даних за допомогою методу КБС

Kuznetsov Y. – Запропоновано ідею вбудованої кривини для врахування початкової кругової конфігурації

Lubinskis J. – досліджено розповсюдження похибок

ДОДАТОК Б. ДОВІДКА ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ



ЛІРА САПР

Товариство з обмеженою відповідальністю «ЛІРА САПР»
Україна, 04053, м. Київ, Киянівський провулок, 7-а
ЄДРПОУ 37472235
+38(044) 590-58-86
info@liraland.com.ua
www.liraland.ua

Вих. № 56 від 13.04.2026

ДОВІДКА

про використання результатів дисертаційної роботи
Кольцова Дмитра Романовича
«Метод коротаційного балкового сплайна для зіставлення кривих та визначення
кутових точок на зображеннях»,
поданої на здобуття наукового ступеня доктора філософії
з галузі знань 11 Математика та статистика
за спеціальністю 113 Прикладна математика

На виконання договору № ДНДЧ/05.02/267/24 між Національним технічним університетом України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського» та Товариством з обмеженою відповідальністю «ЛІРА САПР» від 26 грудня 2024 щодо виконання науково-дослідної роботи «Розробка методів та алгоритмів розрахунку напружено-деформованого стану пружних циліндричних, конічних та тороїдальних оболонок методом узгоджених січень» був залучений аспірант Кольцов Д. Р. У рамках виконання договору результати його дослідження було використано для створення методики узгодження кінематичних параметрів між границями тіл різної геометричної природи і розмірності, зокрема для приєднання пластин і плоских тіл до оболонок різної форми.

Директор ТОВ «ЛІРА-САПР»

Марія БАРАБАШ





ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з навчальної роботи

КПІ ім. Ігоря Сікорського

Тетяна ЖЕЛЯСКОВА

2026 року

14 КВІ 2026

АКТ

про впровадження в освітній процес Національного технічного університету України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
наукових положень і результатів дисертаційної роботи Дмитра КОЛЬЦОВА на тему:
«Метод коротаційного балкового сплайна для зіставлення кривих та визначення кутових
точок на зображеннях», поданої на здобуття наукового ступеня доктора філософії
з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 113 Прикладна математика

Комісія в складі:

Голова:

завідувач кафедри прикладної математики, канд. техн. наук, доцент Данило ТАВРОВ;

Члени комісії:

професор кафедри прикладної математики, д-р техн. наук, професор Олег ЧЕРТОВ;

доцент кафедри прикладної математики, д-р філософії Іван ЖУК

склала цей акт про те, що наукові положення та результати дисертаційної роботи
аспіранта Дмитра КОЛЬЦОВА на тему: «Метод коротаційного балкового сплайна для
зіставлення кривих та визначення кутових точок на зображеннях», поданої на здобуття
наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 Математика та статистика за
спеціальністю 113 Прикладна математика, а саме застосування коротаційного балкового
сплайна до побудови сплайнів на основі кривої для геометричних задач широкого класу,
розв'язання задач Ерміта та задач апроксимації кривих, впроваджено в освітній процес
кафедри прикладної математики факультету програмних систем та прикладної математики під
час викладання освітнього компонента «Геометричне моделювання» для здобувачів другого
(магістерського) рівня вищої освіти за освітньо-науковою програмою «Машинне навчання та
математичне моделювання» (лекції 7–8), що відображено в силабусі відповідного освітнього
компонента, затвердженому на засіданні кафедри прикладної математики (протокол №14 від
14.05.2025, https://pma.fpm.kpi.ua/_next/static/media/9d810e9f-c3d9-43fe-b74d-68518fb74fe0.pdf).

Голова комісії:

завідувач кафедри
прикладної математики,
кандидат технічних наук, доцент

Данило ТАВРОВ

Члени комісії:
професор кафедри
прикладної математики,
доктор технічних наук, професор

Олег ЧЕРТОВ

доцент кафедри
прикладної математики,
доктор філософії

Іван ЖУК