НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу

До захисту допущено
Завідувач кафедри
__________ Оксана ТИМОЩУК
«___»_____________20__ р.

Дипломна робота

на здобуття ступеня бакалавра
за освітньо-професійною програмою «Системний аналіз і управління»
спеціальності 124 «Системний аналіз»
на тему: «Задача про знаходження ймовірності виграшу в антагоністичній грі з повною інформацією, у якій гравці можуть відхилятись від оптимальних стратегій під впливом випадкових факторів»

Виконала:
Студентка IV курсу, групи КА-74
Соболь Надія Олександрівна __________

Керівник:
професор, д.ф.-м.н., професор кафедри ММСА
Пилипенко Андрій Юрійович __________

Консультант з економічного розділу:
доцент, к.е.н., доцент кафедри ТТПЕ
Рощина Надія Василівна __________

Консультант з нормоконтролю:
доцент, к.т.н., доцент кафедри ММСА
Коваленко Анатолій Єпіфанович __________

Рецензент:
с.н.с., д.ф.-м.н., зав. відділом тектонофізики ім. С.І. Субботіна НАН України
Арясова Ольга Вікторівна __________

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка ____________

Київ – 2021 року

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Інститут прикладного системного аналізу

Кафедра математичних методів системного аналізу

Рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)

Спеціальність – 124 "Системний аналіз"

Освітньо-професійна програма «Системний аналіз і управління»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
__________ Оксана ТИМОЩУК
«___»_____________20__ р.

ЗАВДАННЯ

на дипломну роботу студенці

Соболь Надії Олександрівні

1. Тема роботи «Задача про знаходження ймовірності виграшу в антагоністичній грі з повною інформацією, у якій гравці можуть відхилятись від оптимальних стратегій під впливом випадкових факторів», керівник роботи Пилипенко Андрій Юрійович, д. ф.-м. .н., професор, затверджені наказом по університету від «26» травня 2021 р. №1244-с.

2. Термін подання студентом 7 червня 2021р.

3. Вихідні дані до роботи

Антагоністична гра з випадковим втручанням.

4. Зміст роботи

Формулювання виграшних стратегій в задачі Боше, моделювання випадкових відхилень від виграшної стратегії в імовірнісному підході, розрахунок імовірності виграшу за допомогою ланцюгів Маркова.

5. Перелік ілюстративного матеріалу (із зазначенням плакатів, презентацій тощо)

Презентація.

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Економічний	Рощина Н.В., доцент		

7. Дата видачі завдання 03.09.2020

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломної роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Формулювання тематики (напряму) дослідження.	03.09.2020 – 30.09.2020	
2	Аналіз актуальності задач стосовно тематики дослідження	01.10.2020 – 30.10.2020	
3	Аналіз відомих результатів стосовно тематики дослідження	01.11.2020 – 30.11.2020	
4	Формулювання задач дослідження	01.12.2020 – 30.12.2020	
5	Уточнення теми дипломної роботи	25.02.2021	
6	Ознайомлення з ДСТУ 3008-95 та стандарти ЄСПД	01.03.2021 – 30.03.2021	
7	Проведення дослідження за темою БДР під керівництвом керівника	01.03.2021 – 30.04.2021	
8	Завершення роботи над першим варіантом частини БДР	01.05.2021 – 20.05.2021	
9	Оформлення БДР та аналіз отриманих результатів	21.05.2021 – 26.05.2021	
10	Підготовка презентації для захисту	27.05.2021 – 31.05.2021	
11	Попередній захист дипломної роботи	31.05.2021 – 31.05.2021	
12	Захист дипломної роботи	14.06.2021 – 16.06.2021	

Студент Надія СОБОЛЬ

Керівник Андрій ПИЛИПЕНКО

РЕФЕРАТ

Дипломна робота: 82 с., 7 рис., 6 табл., 2 дод., 23 джерела.

ТЕОРІЯ ІГОР, АНТАГОНІСТИЧНІ ІГРИ З ПОВНОЮ ІНФОРМАЦІЄЮ, ЛАНЦЮГИ МАРКОВА.

Тема: Задача про знаходження ймовірності виграшу в антагоністичній грі з повною інформацією, у якій гравці можуть відхилятись від оптимальних стратегій під впливом випадкових факторів

Об’єкт дослідження – антагоністичні ігри з повною інформацією.

Предметом дослідження є антагоністична гра з повною інформацією, у якій гравці можуть відхилятись від оптимальних стратегій під впливом випадкових факторів.

Мета роботи – знайти ймовірність виграшу в антагоністичній грі з повною інформацією, у якій гравці можуть відхилятись від оптимальних стратегій під впливом випадкових факторів.

Для досягнення поставленої мети у роботі використовуються методи теорії ігор та ланцюгів Маркова.

Отримані результати – знайдено ймовірність виграшу в антагоністичній грі з повною інформацією, у якій гравці можуть відхилятись від оптимальних стратегій під впливом випадкових факторів, та проведено порівняльній аналіз в залежності від зміни початкових параметрів.

Результати роботи були представлені на X Всеукраїнській науковій конференції молодих математиків, що відбулася 18 квітня 2021 року.

У рамках подальшого дослідження пропонується перетворити цю задачу на більш прикладну для застосування в повсякденному житті. Також цікаво дослідити нашу задачу за додаткових умов, а саме, якщо можна брати не від 1 до m сірників, а, наприклад, тільки: 1, 3, 7,…, m.

ABSTRACT

Bachelor thesis: 82 p., 7 fig., 6 tabl., 2 append., 23 sources.

GAME THEORY, ANTAGONISTIC GAMES WITH FULL INFORMATION, MARKOV CHAINS.

Theme: The problem of finding the probability of winning in an antagonistic game with complete information in which players can deviate from optimal strategies under the influence of random factors

The object of research is an antagonistic game with incomplete information.

The subject of research is an antagonistic game with complete information in which players can deviate from optimal strategies under the influence of random factors.

The aim of this work is to find the probability of winning in an antagonistic game with complete information, in which players can deviate from optimal strategies under the influence of random factors.

To achieve this goal, we use the methods of the theory of games and Markov chains.

Results – the probability of winning in an antagonistic game with complete information in which players can deviate from the optimal strategies under the influence of random factors was found and a comparative analysis was performed depending on initial parameters.

The results were presented at the X Ukrainian Scientific Conference of Young Mathematicians, held on April 18, 2021.

For further research, it is proposed to turn this task into a more applied problem in order to use in everyday life. It is also interesting to investigate our problem under additional conditions, namely, if one can take not from 1 to m matches, but, for example, only 1, 3, 7, …, m.

ЗМІСТ

ВСТУП..8
РОЗДІЛ 1 ДОСЛІДЖЕННЯ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ 10
1.1 Актуальність 10
1.2 Три різні способи використання теорії ігор у повсякденному житті 11
1.3 Марківські ланцюги та їх застосування 12
1.4 Задача Німа 13
1.5 Задача Боше 14
Висновки до розділу 1 14
РОЗДІЛ 2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ 16
2.1 Ланцюги Маркова 16
2.2 Період, зворотність, рекурентність 20
2.3 Ймовірність потрапляння в множину. Середній час досягнення множини.23
2.4 Гранична поведінка ймовірностей переходу ланцюгів Маркова.................24
2.5 Антагоністичні задачі та задачі з повною інформацією 28
Висновки до розділу 2 28
РОЗДІЛ 3 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ЇЇ РОЗВ’ЯЗОК 29
3.1 Постановка задачі..29
3.2 Розв’язок проміжної задачі 29
3.3 Постановка нашої задачі...30
3.4 Розв’язок задачі 31
3.5 Порівняльний аналіз 43
Висновки до розділу 3 47
РОЗДІЛ 4 ФУНКЦІОНАЛЬНО-ВАРТІСНИЙ АНАЛІЗ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ...48

4.1 Постановка завдання..48
4.2 Обґрунтування функцій програмного продукту..48
4.3 Обґрунтування системи параметрів ПП 51
4.4 Аналіз експертного оцінювання параметрів 54
4.5 Аналіз рівня якості варіантів реалізації функцій...58
4.6 Економічний аналіз варіантів розробки ПП...59
4.7 Вибір кращого варіанту ПП техніко-економічного рівня.............................65
Висновки до розділу 4 66
ВИСНОВКИ...67
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 69
Додаток А Лістинг програмного модулю 72
Додаток Б Презентація..75

ВСТУП

Теорія ігор - це універсальна математична дисципліна. Люди почали ставити собі задачі та намагались знайти логічний розв’язок ще багато століть тому. Сьогодні моделі і методи теорії ігор знайшли і знаходять застосування в найрізноманітніших сферах. Вони досить успішно використовуються в політології, соціології, антропології, кібернетики, техніці, в біологічних і екологічних дослідженнях, плануванні та управлінні військовими операціями. Однак традиційно найбільш широкої і відомої сферою застосування теорії ігор залишалася і продовжує залишатися економіка [1].

Дуже цікаво почати з розв’язку ще давніх задач і дослідити зміну їхніх стратегій в залежності від іншого формулювання початкових умов, в подальшому нашу задачу можна буде зробити прикладною і застосовувати на благо людям. В цій роботі ми почали з розгляду часткового випадку задачі Німа – задачі Боше і видозмінили її, створивши нову задачу.

Мета роботи полягає у знаходженні ймовірності виграшу в антагоністичній грі з повною інформацією у якій гравці можуть відхилятись від оптимальних стратегій під впливом випадкових факторів. Робота також ставить за мету використання описаного апарату для отримання кінцевих результатів .

Об’єктом дослідження дипломної роботи є методи розв’язку з допомогою ланцюгів Маркова нашої задачі.

Предметом дослідження дипломної роботи є теорія ігор та ланцюги маркова.

Методи дослідження ґрунтуються на вичерпному використанні знань, отриманих під час вивчення дисциплін «Теорія ігор», та «Теорія випадкових процесів».

Основний зміст роботи:

Перший розділ даної роботи присвячений аналізу предметної області. В ньому буде розказано більш детально про актуальність теорії ігор та ланцюгів

Маркова загалом. Приклади використання. Також описується нове застосування теорії ігор та ланцюгів Маркова.

У другому розділі описано основну теоретичну частину, яка потрібна нам для розв’язку нашої задачі.

Третій розділ присвячено формулюванню нашої задачі, описано метод розв’язку та зроблено порівняльних аналіз, щоб прослідкувати зміну нашого результату в залежності від початкових значень.

Четвертий розділ висвітлює економічну частину дипломної роботи.

РОЗДІЛ 1
ДОСЛІДЖЕННЯ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ

1.1 Актуальність

Кожен з нас у своєму житті зіштовхувався або ще буде в ситуації, коли вирішується питання Вашої заробітної плати. Звичайно, дуже мало знають, що до неї можна застосувати теорію ігор, яка допоможе досягти бажаного результату. В цьому випадку, вона може допомогти як роботодавцю, так і працівнику, в залежності від того, хто більш освічений в цьому питанні. Це лише одиничний випадок практичного застосування цієї науки.

Теорія ігор – це дисципліна, яка математично досліджує стратегії і конфлікти, в якому успіх вибору гравця, залежить від вибору інших учасників [1, 2]. Спочатку, вона була розроблена в області економіки для розуміння поведінки фірм, ринків і клієнтів [3]. Зараз вона застосовуються в прикладній математиці, соціальних науках, найбільш широко, звичайно, в економіці, а також в біології, інженерії, політології, міжнародних відносинах, інформатиці та філософії [4].

Теорія ігор зародилась у 17 столітті одночасно з теорією ймовірностей. Першою істотною роботою з теорії ігор слід вважати статтю Дж. фон Неймана «До теорії стратегічних ігор» (1928), а з виходом в світ монографії американських математиків Дж. фон Неймана та О. Моргенштерна «Теорія ігор і економічна поведінка» (1944), теорія ігор сформувалась як самостійна математична дисципліна [5, 6].

Гравцями можуть бути не обов'язково люди, а й тварини або комп'ютерні програми. Для того, щоб розв'язати певну гру, для початку потрібно задати її модель. Її формування буде складатись з 3 кроків:

1. Задання наших гравців (прораховування їхніх ходів, іншими словами формулювання їхніх стратегій).

2. Присвоєння виграшу та формулювання умови, при якій один гравець виграє, а інший – програє.
3. Формулюємо нашу задачу як об’єкт дослідження в теорії ігор [7].

В наші дні теорію ігор застосовують для дослідження інтернету, нові протоколи тестують за допомогою теорії ігор. Давайте розглянемо ще декілька цікавих прикладів застосування теорії ігор в наступному пункті.

1.2 Три різні способи використання теорії ігор у повсякденному житті

1 спосіб. Цю науку можна застосувати для купівлі автомобіля за набагато дешевшою ціною, замість того, щоб торгуватися з продавцем автомобілів в автосалоні.

Спочатку потрібно знайти всі дилерські центри з автомобілем, який цікавить та на зручній для Вас відстані. Далі телефонуємо та кажемо, що готові купити у будь-якого дилера у певний час, але за нижчу ціну. Якщо Вам кажуть, що вони не ведуть угоди по телефону, можете відповісти, що Ви знаєте багато домовленостей у цій справі, які були вкладені по телефону. Дилер спробує перемогти своїх конкурентів, запропонувавши нижчу ціну, ніж зазвичай.

Професор Нью-Йоркського університету сказав, що цей метод працював для нього в 11 різних покупках автомобілів [8,9].

2 спосіб. Можливо Ви навіть не підозрювали, але теорія ігор досить часто присутня в переговорах про нерухомість. Коли Ви подаєте заявку, агент з нерухомості може заявити, що на цю пропозицію є і інші покупці, крім Вас. Далі можливі наступні кроки.

Наші можливі варіанти дій: зберегти свою початкову пропозицію, скасувати свою пропозицію або запропонувати вищу ціну. Очевидно, що для виграшу допоможе лише третій варіант, тож доведеться підвищити ціну і розрахувати нову ціну точно, що виграти ставку за будинок і не переплатити.

Якщо навіть хтось поставить ціну вище, не потрібно засмучуватись, адже Ваша гра була оптимальною і неправильні рішення Ви не приймали, просто хтось інший був готовий переплачувати [8,10].

3 спосіб. Використання арбітражу ризику для отримання прибутку - це спосіб використовувати теорії ігор на ринках.

Арбітраж ризику або арбітраж злиття - це одночасна купівля акцій у компанії, яка оголосила про її придбання разом із продажем компанії, яка оголосила про придбання. Наведемо практичну ситуацію:

Припустимо, компанія A ("покупець") пропонує поміняти одну зі своїх акцій на кожні дві акції компанії T ("цільова"). Акції A продаються за 50 доларів за акцію, а B продаються за 20 доларів за акцію до пропозиції. Отже, акціонери T повинні прийняти угоду, а вартість акцій B повинна зрости до 25 доларів. Якщо акції T зростуть лише до 24 доларів, це представляє можливість арбітражу злиття. Інвестори можуть придбати дві акції компанії T за 48 доларів, коротку одну акцію компанії A отримати 50 доларів. Потім вони можуть поміняти свої дві акції T на одну акцію A, використати це, щоб покрити їх короткий термін, і отримати 2 долари безризикового прибутку [8].

1.3 Марківські ланцюги та їх застосування

Але не всі задачі в теорії ігор мають простий розв’язок або взагалі його не мають, якщо розв’язувати їх лише підходами з теорії ігор. Саме в таких випадках можемо застосувати марківські ланцюги, адже вони є одним з найрозповсюдженіших методів математичного моделювання реальних систем і процесів завдяки простоті представлення даних (у вигляді матриці перехідних ймовірностей) і легкості їх обробки. Основною ідеєю є властивість Маркова, що деякі прогнози щодо стохастичних процесів можна спростити, розглядаючи майбутнє, яке незалежне від минулого, враховуючи сучасний стан процесу. Це використовується для спрощення прогнозів щодо майбутнього стану стохастичного процесу [11,12].

Потужним методом для розпізнавання мови є також саме приховані ланцюги Маркова [11]. Сьогодні вони застосовуються у таких прикладних дисциплінах як теорія масово обслуговування, теорія надійності, теорія дифузійних процесів, математична біологія, нейронних мережах, тощо [13,14].

Найбільш актуальною проблемою нашого часу є дослідження проблем міжнародних відносин, адже дуже загострені кризи можуть привести до масштабних міжнародник конфліктів і навіть війни. Саме цією проблемою зацікавився видатний політолог Філіп Шродт. Він займався побудовою нелінійних моделей на основі прихованих марківських ланцюгів. Таким чином, було науково доведено, що приховані ланцюги Маркова більш точно класифікують міжнародні кризи ніж традиційні лінійні методи [11].

Вперше визначальну властивість марківського процесу сформував саме Марков А.А., який 1907 року почав вивчати послідовності залежних випробувань і пов'язані з ними суми випадкових величин. Надалі цей напрямок почали називати теорія ланцюгів Маркова.

В подальшому основи цієї теорії сформулював вже Колмогоров [15].

1.4 Задача Німа

Гра Нім – це досить відома та давня китайська гра, перша згадка про неї була в XVI столітті в записах європейців. Чарльз Бутон дав назву цій грі, описуючи в 1901 році виграшну стратегію цієї гри.

Нім — математична гра, кількість гравців – двоє, які один за одним беруть предмети, розкладені на декілька купок. За свій хід гравець може брати будь-яку кількість предметів (більше ніж нуль) із однієї купки. Перемога за тим гравцем, хто візьме останній предмет. Кожному крокові гри відповідає нім-сума цього кроку – результат складання розмірів всіх купок в двійковій системі числення без урахування перенесення розрядів. Нім — це скінченна гра з повною інформацією. Класичний варіант – це коли купок саме три. Одна купка – це частковий випадок, проте і в цьому випадку максимальне число предметів, які можна взяти за хід, обмежене, відома як гра Боше [16].

1.5 Задача Боше

Боше – це теж математична гра, в ній на відміну від Німа лише 2 купки, є n предметів в сумі з них обох, по черзі гравці беруть не менше одного і не більше m предметів. Виграє той, хто бере останній сірник.

Класична гра : $n = 15$, гравець може брати від одного до трьох предметів. Правильна стратегія для першого гравця полягає в тому, що він бере 3 предмети за перший хід і доповнює ходи суперника до 4 в наступних ходах.

Існує також інша варіація цієї гри: програє той, хто бере останній предмет.

Спочатку гра мала трохи інше формулювання: перший гравець обирає число від 1 до 10, другий додає до нього будь-яке число з того ж проміжку і так далі. Перемога за тим, хто в сумі отримає 100. Вона також має виграшні позиції. Боше сказав, що це: 9, 19, 29 … 89 [17].

Висновки до розділу 1

У даному розділі була розглянута теорія ігор як наука та методи її застосування. Ми впевнились, що це дійсно дуже актуальна галузь і вона тісно вплелася в більшість сфер нашого життя. Проте не всі про це знають або взагалі не вміють її застосовувати в повсякденному житті, тому були розглянуті цікаві практичні приклади її застосування.

Проте для більш складних задач не достатньо лише апарату теорії ігор, тому ми ближче познайомились з ланцюгами Маркова, які і будемо в подальшому застосовувати в нашій роботі. Вони є не менш важливими, адже допомагають в дуже глобальних проблемах, наприклад, у міжнародних відносинах для недопущення війн між країнами шляхом уникнення криз між ними.

Ну і на завершення ми сформулювали класичну та дуже стародавню китайську задачу Німа, похідною від якої є задача Боше, яка нас і цікавить. Сформулювали умову Боше та розробили оптимальну стратегію для неї.

РОЗДІЛ 2
ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1 Ланцюги Маркова

Означення 1. Послідовність випробувань $\{ X_n, n \geq 0 \}$ з можливими наслідками $E_1, E_2, \dots, E_n \in E$ називається ланцюгом Маркова, якщо ймовірності послідовностей результатів визначаються формулою

$$P\left(x_0 = E_{j0}, x_1 = E_{j1}, x_2 = E_{j2}, x_3 = E_{j3}, \dots, x_n = E_{jn}\right) =$$
$$= a_{j_0} \cdot p_{j_0 j_1} \cdot p_{j_1 j_2} \cdot \dots \cdot p_{j_{n-2} j_{n-1}} \cdot p_{j_{n-1} j_n}$$

через розподіл ймовірностей $\{a_i\}$ для E_i в початковому (або нульовому) випробуванні і через фіксовані умовні ймовірності p_{ij} появи E_i при умові, що в наступному випробуванні з'явиться E_j. Можливі результати E_i зазвичай називають можливими станами системи; замість того, щоб сказати що n-е випробування закінчилось появою E_i, кажуть, що n-ий крок приводить до стану E_i або що система потрапляє в E_i на n-му кроці [18].

Означення 2. Множина E називається фазовим простором послідовності $\{X_n, n \geq 0\}$, елементи E будемо називати станами.

Означення 3. Ланцюг Маркова $\{X_n, n \geq 0\}$ називається однорідним, якщо

$$\forall\, n \geq 0 \;\; \forall E_i, E_j \in E$$
$$P\left(X_{n+1} = E_j \middle| X_n = E_i\right) = p_{ij}.$$

Ймовірність p_{ij} називається ймовірністю переходу із стану E_i в стан E_j за один крок.

Для ймовірностей p_{ij} справедливі наступні співвідношення:

$$\forall E_i, E_j \in E \quad p_{ij} \in [0,1]$$
$$\forall E_i \in E \qquad \sum_j p_{ij} = 1. \tag{2.1}$$

Також ми вважаємо, що випробування відбувається за рівні інтервали часу, так що номер кроку – це часовий параметр.

Ймовірність переходу p_{ij} будуть розміщені в матрицю перехідних ймовірностей

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ . & . & . & \cdots \end{bmatrix},$$

де перший індекс означає номер рядка, а другий – номер стовпця. Зрозуміло, що P – квадратна матриця з невід'ємними елементами і одиничними сумами по рядкам. Така матриця(скінченна чи нескінченна) називається стохастичною матрицею [18].

Означення 4. Матриці, що задовольняють умови (2.1) називають стохастичними. Будь-яка стохастична матриця може служити матрицею перехідних ймовірностей; разом з нашим початковим розподілом $\{a_i\}$ вона цілком визначає розподіл Маркова. Матриця $P = ||p_{ij}||$ називається матрицею переходу за один крок.

Теорема 1. Нехай $\{X_n, n \geq 0\}$ – ланцюг Маркова. Тоді

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall E_0, E_1, \dots, E_n \in E$$
$$P(X_0 = E_0, X_1 = E_1, X_2 = E_2, X_3 = E_3, \dots, X_n = E_n)$$
$$= a_0 \cdot p_{01} \cdot p_{12} \cdot \dots \cdot p_{n-2,n-1} \cdot p_{n-1,n}$$

Позначимо через

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i), P^{(n)} \coloneqq ||p_{ij}^{(n)}||;$$

$p_{ij}^{(n)}$ називається ймовірністю переходу зі стану i в стан j за n кроків, $P^{(n)}$ матрицею переходу за n кроків [18].

Теорема 2. Нехай $\{X_n, n \geq 0\}$ – ланцюг Маркова. Тоді $P^{(n)} = P^n$.

Зауваження 1. Ймовірності переходу задовольняють рівняння Колмогорова-Чепмена

$$\sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} = p_{ij}^{(n+m)},$$

тобто

$$P^{(n)} P^{(m)} = P^{(n+m)}.$$

Зауваження 2. Щоб отримати елемент $p_{ij}^{(n+1)}$ матриці $P^{(n+1)}$ потрібно помножити елемент i-го рядка на матриці P на відповідний елемент j-го стовпчика матриці P^n і додати всі ці добутки. Ця операція називається множенням матриці P на матрицю P^n можемо записати це такою тотожністю [18]

$$PP^n = P^{(n+1)}.$$

Теорема 3. Нехай $\{X_n, n \geq 0\}$ – ланцюг Маркова. Тоді

$$\forall k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_n \in \mathbb{N} \quad \forall E_0, E_1, \dots, E_n \in E$$
$$P(X_{k1} = E_1, X_{k2} = E_2, X_{k3} = E_3, \dots, X_{kn} = E_n) = P(X_{k1} = E_1) \cdot p_{12}^{(k_2-k_1)} \cdot p_{23}^{(k_3-k_2)} \cdot \dots \cdot p_{n-1n}^{(k_n-k_{n-1})}$$
$$P(X_{k1} = E_1, X_{k2} = E_2, X_{k3} = E_3, \dots, X_{kn} = E_n | X_0 = E_0) = p_{01}^{(k_1)} \cdot p_{12}^{(k_2-k_1)} \cdot p_{23}^{(k_3-k_2)} \cdot \dots \cdot p_{n-1n}^{(k_n-k_{n-1})}.$$

Теорема 4. Нехай $\{X_n, n \geq 0\}$ – ланцюг Маркова. Тоді

$$P(X_n = E_j) = \sum_{i \in E} P(X_0 = E_0) \cdot p_{ij}^{(n)}.$$

Означення 5. Стан j називають досяжним із стану i, якщо

$$\exists n \geq 0, \qquad p_{ij}^{(n)} \geq 0,$$

тобто якщо існує додатна ймовірність потрапити із стану E_i в стан E_j, включаючи випадок $E_i = E_j$. Позначається це наступним чином: $i \to j$ [10].

Означення 6. Стани i та j сполучаються, якщо $i \to j$ та $j \to i$. Позначається це наступним чином: $i \leftrightarrow j$.

Лема 1. (Властивості)

1. Якщо $i \to j$ та $j \to k$, то $i \to k$.
2. Якщо $i \leftrightarrow j$ та $j \leftrightarrow k$, то $i \leftrightarrow k$.
3. Якщо $i \leftrightarrow j$, то $j \leftrightarrow i$.
4. $i \leftrightarrow i$.

З 1, 2, 3 випливає, що відношення “$\leftrightarrow$” є відношенням еквівалентності. Отже, множина E розбивається класи еквівалентності сполучних станів, що не перетинаються [19].

Означення 7. Стан i називають неістотним, якщо

$$\exists j \in E \ i \to j, j \nrightarrow i.$$

Стан i називають істотним, якщо він не є неістотним [16].

Лема 2. Нехай $i \leftrightarrow j$. Стан i істотний тоді і тільки тоді, коли j істотний.

Означення 8. Множину станів C називають замкнутою, якщо всі стани за межами C не можуть бути досягнуті ні з якого стану, що входить в C. Найменша замкнута множина, що містить C, називається замиканням.

Якщо деякий стан E_i утворює замкнену множину, то він в такому випадку називається поглинаючим станом.

Ланцюг називається незвідним, якщо в ньому немає ніяких замкнутих множин, крім множин всіх станів [20].

Теорема 5. Якщо в матриці $P^{(n)}$ викреслити всі рядки і стовпці, які відповідають станам, що не входять в замкнуту множину C, то залишиться матриця, для якої виконуються такі основні рівняння:

$$p_{jk}^{(n+1)} = \sum_v p_{jv} p_{vk}^{(n)} \text{ та } p_{jk}^{(m+n)} = \sum_v p_{jv}^{(m)} p_{vk}^{(n)}.$$

Це означає, що ми маємо ланцюг Маркова, визначений на C і цей ланцюг можна вивчати незалежно від інших станів.

Стан E_k є поглинаючим тоді і тільки тоді, коли $p_{kk} = 1$. В цьому випадку матриця, яку ми згадували в теоремі 5, зводиться до одного елемента [18].

Означення 9. Замиканням стану E_j є множина станів, які можуть бути досягнуті з E_j (включаючи сам E_j).

Критерій незвідності. Ланцюг є незвідним тоді і тільки тоді, коли будь-який його стан може бути досягнутий із будь-якого іншого стану [21].

2.2 Період, зворотність, рекурентність

Означення 10. Нехай $i \in E$. Періодом стану i називається найбільш спільний дільник натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$ таких, що $p_{ii}^{(n)} > 0$, що позначається:

$$d(i) = \text{НСД}\left\{n \in \mathbb{N}: p_{ii}^{(n)} > 0\right\}.$$

Якщо $d(i) = 1,$ то стан i називається аперіодичним. Якщо

$$\forall\, i \in E\ d(i) = 1,$$

то ланцюг Маркова називається аперіодичним.

Зауваження 3. Якщо множина $\left\{n \in \mathbb{N}: p_{ii}^{(n)} > 0\right\}$ порожня, то за означенням

$$d(i) = 1 \text{ [20]}.$$

Теорема 6. (про рівність періодів) Якщо $i \leftrightarrow j$, то $d(i) = d(j)$.

Нехай $i \in E$. Позначимо через $\tau = \tau_i$ перший момент повернення в стан i, тобто

$$\tau = \tau_i = \inf\{n \in \mathbb{N}: X_n = i\},$$

а через $f_{ii}^{(n)}$ імовірність вперше повернутись в i на n-му кроці, тобто

$$f_{ii}^{(n)} = P(\tau_i = n \mid X(0) = i),$$
$$f_{ii}^{(n)} = 0.$$

Означення 11. Стан i називається зворотним (рекурентним), якщо

$$P(\tau_i < \infty | X(0) = i) = 1.$$

Зауваження 4. Стан i зворотний тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_n f_{ii}^{(n)} = 1.$$

Означення 12. Стан E_i є незворотнім, якщо $f_i < 1$. Для цього необхідно і достатньо, щоб $\sum_n f_{ii}^{(n)} < \infty$; в цьому випадку автоматично $\sum_n f_{li}^{(n)} < \infty$ при будь-якому l [21].

Лема 3. Якщо стан E_j зворотній і неперіодичний, то

$$p_{ij}^{(n)} \to \tau_j^{-1} f_{ij} \text{ при } n \to \infty \quad (2.2)$$

і, зокрема,

$$p_{jj}^{(n)} \to \tau_j^{-1} \text{ при } n \to \infty. \quad (2.3)$$

(Якщо стан E_j нульовий, то слід покласти $\tau_j^{-1} = 0$)

Лема 4. Якщо стан E_j зворотній і має період t, то співвідношення (2.3) слід замінити іншим співвідношенням:

$$p_{jj}^{(nt)} \to t\tau_j^{-1} \text{ при } n \to \infty.$$

Означення 13. Зворотний стан, який не є ні нульовим, ні періодичним будемо називати ергодичним [19].

Теорема 7. В незвідному ланцюгу Маркова всі стани належать до одного і того ж типу: або вони всі незворотні, або вони всі зворотні нульові, або всі зворотні ненульові. У всіх випадках вони мають однаковий період і кожен стан можна досягти із кожного іншого стану.

В кожному ланцюгу всі зворотні стани можна, і при чому єдиним способом, розділити на замкнуті множини $C_{1,}C_2$, ... так, щоб із будь-якого стану даної множини C, були досяжні всі стани цієї множини і не були досяжні ніякі інші стани. Всі стани, що належать одній і тій же замкнутій множині C, мають один і той же тип.

Крім замкнутих множин C, ланцюг, взагалі кажучи, містить незворотні стани, із яких досяжні стани замкнутих множин C (але не навпаки).

Наслідок. Кінцевий ланцюг Маркова не містить нульових станів і не можу складатись лише із незворотніх станів [18].

Теорема 8 (критерій рекурентності). Стан i є рекурентним тоді й тільки тоді, коли

$$\sum_n p_{ii}^{(n)} = \infty.$$

Лема 5. (про зв'язок рекурентності та істотності).

a) Нехай стан i рекурентний, тоді й істотний.

b) Припустимо, що фазовий простір E скінченний. Тоді стан i рекурентний тоді й тільки тоді, коли істотний [19].

Теорема 9. Нехай $i \leftrightarrow j$. Тоді стан i рекурентний тоді й тільки тоді, коли j рекурентний.

Теорема 10 (про кількість повернень). Якщо i зворотний, то

$$\mathrm{P}(\text{ланцюг Маркова нескінченне число раз повернеться в } i) = 1.$$

Якщо i незворотний, то

$$\mathrm{P}(\text{ланцюг Маркова нескінченне число раз повернеться в } i) = 0.$$

Лема 6. Нехай i зворотний, $j \leftrightarrow i$, тоді

$$\mathrm{P}(\text{ланцюг Маркова нескінченне число раз повернеться в } j) = 1 \text{ [20].}$$

2.3 Ймовірність потрапляння в множину. Середній час досягнення множини

Теорема 11. Ймовірності досягнення множини A задовольняють системі лінійних рівнянь

$$x_i = \sum_j p_{ij} x_j, \qquad i \not\subseteq A$$

де $x_i = 1$, якщо $i \in A$, та $x_i = 0$, якщо $i \nrightarrow A$.

Теорема 12. Ймовірність потрапити в А раніше ніж в В задовольняє системі лінійних рівнянь

$$x_i = \sum_j p_{ij} x_j, \qquad i \notin A \cup \mathrm{B}\,,$$

де $x_i = 1$, якщо $i \in A$, та $x_i = 0$, якщо $i \in B$ [19].

Теорема 13. Нехай $A \subset E, \tau -$момент першого потрапляння в А, $y_i = E_i \tau -$ середній час потрапляння в А при старті з i.

Середній час до потрапляння в А задовольняє системі лінійних рівнянь

$$y_i = 1 + \sum_j p_{ij} y_j, \quad i \notin A\,,$$

$$y_i = 0, \qquad i \in A.$$

Зауваження 5. Якщо $i \nrightarrow A$, то $y_i = \infty$;

Зауваження 6. Якщо існують стан j і шлях $i \to i_1 \to \cdots \to i_n \to j$ такі, що $j \nrightarrow A$, то $y_i = \infty$.

Зауваження 7. Якщо $|E| = +\infty$, то y_i може дорівнювати ∞, навіть якщо $\forall\, i, j\ i \leftrightarrow j$.

Теорема 14. Нехай фазовий простір Е скінченний, $i\ \in E, A \subset E,\, \tau -$ момент першого досягнення А. математичне сподівання τ скінчене тоді й тільки тоді, коли для кожного стану j такого, що зі стану i можна потрапити в j, не заходячи в А, маємо $j \to A$ [21].

2.4 Гранична поведінка ймовірностей переходу ланцюгів Маркова

Означення 14. Нехай π – розподіл X_0, тобто

$$\pi = \{\pi_k, k \in E\}, \qquad \pi_k = P(X_0 = k), \qquad k \in E.$$

Розподіл π називається стаціонарним, якщо X_1 також має розподіл π.

Зауваження 8. Якщо X_0 має стаціонарний розподіл, то $X_2, X_3, \ldots$ мають такий самий розподіл, що і X_0 [20].

Розподіл π є стаціонарним тоді й тільки тоді, коли

$$\pi_j = P(X_1 = j) = \sum_i P(\,X_0 = i)p_{ij} = \sum_i \pi_i p_{ij},\ \ j \in E. \tag{2.4}$$

Дана система лінійних рівнянь завжди є виродженою. Додаткове рівняння $\sum_i \pi_i = 1$. В матричному вигляді система (2.4) має вигляд $\pi = \pi P$.

Теорема 15 (про граничну поведінку ланцюга Маркова). Припустимо, що фазовий простір ланцюга Маркова E злічений, всі стани сполучаються, період кожного стану дорівнює 1. Тоді

1) Для всіх $i, j \in E$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j.$$

Ця границя не залежить від початкової точки i.

2) Виконується одна з двох альтернатив: або $\pi_j = 0$ для всіх $j \in E$, або $\pi_j > 0$ для всіх $j \in E$. В першому випадку стаціонарного розподілу не існує, а в другому $\{\pi_j\}$- це єдиний стаціонарний розподіл.

3) Для будь-якого початкового розподілу маємо

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \pi_j.$$

Теорема 16. (про граничну поведінку ланцюга Маркова з нескінченним фазовим простором) Припустимо, що фазовий простір ланцюга Маркова зліченний, всі стани сполучаються, період кожного стану дорівнює 1.Тоді

1) для всіх $i, j \in E$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}{}^{(n)} = \pi_j.$$

Ця границя не залежить від початкової точки i.

2) виконується одна з двох альтернатив: або $\pi_j = 0$ для всіх $j \in E,$ або $\pi_j > 0$ для всіх $j \in E.$ В першому випадку стаціонарного розподілу не існує, а в другому $\{\pi_j\}$ – це єдиний стаціонарний розподіл.

3) для будь-якого початкового розподілу маємо

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \pi_j.$$

Теорема 17 (про зв'язок стаціонарного розподілу та середнього часу повернення). Припустимо, що всі стани ланцюга Маркова сполучаються, період кожного стану дорівнює 1. Позначимо

$$\tau_i = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = j\}.$$

Тоді для будь-якого початкового розподілу маємо

$$\lim_{n\to 0} P(X_n = j) = \pi_j = (E_j\tau_j)^{-1},$$

де $E_j\tau_j$ – середній час повернення в стан j .

Зауваження 9. Припустимо, що всі стани ланцюга Маркова сполучаються, період кожного стану дорівнює $d > 1$. Розіб'ємо фазовий простір E на d класів $E_0, E_1, E_2, \dots , E_{d-1},$ що не перетинаються, таким чином, що

$$p_{ij}^{(nd)} = 0, i \in E_k, j \in E_l, k \neq l\ .$$

Можна перевірити, що якщо $X_0 = i \in E_k$, то $Y_n \coloneqq X_{nd}, n \geq 0$ є ланцюгом Маркова на E_k з періодом 1 [20].

Отже, для $\{Y_n\}$ виконуються умови теореми Маркова та

$$\lim_{n\to\infty} P_i(X_{nd} = j) = \lim_{n\to\infty} P_i(X_n = j).$$

Теорема 18. Нехай фазовий простір E скінченний. Розіб'ємо E на класи $E_0, E_1, E_2, \dots, E_m$, де клас E_0 містить усі неістотні стани, а $E_1, E_2, \dots, E_m$ – класи таких істотних станів, що

$$\forall k \in \{1, \dots, m\}\ \forall i, j \in E_k\ \ i \leftrightarrow j;$$
$$\forall k, l \in \{1, \dots, m\}\ \ k \neq l\ \ \ \forall i \in E_k\ \forall j \in E_l\ i\ ! \leftrightarrow j;$$

Тоді

1) $\forall i, j \in E_0$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}{}^{(n)} = 0.$$

2) $\forall k, l \in \{1, \dots, m\}\ \ k \neq l\ \forall i \in E_k\ \ \forall j \in E_l$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}{}^{(n)} = 0.$$

3) $\forall k \in \{1, \dots, m\}\ \forall i, j \in E_k$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}{}^{(n)} = \pi_j^{E_k},$$

де $\{\pi_j^{E_k}, j \in E_k\}$ – стаціонарний розподіл на E_k;

4) $\forall i \in E_0\ \ \forall k \in \{1, \dots, m\}\ \forall j \in E_k$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}{}^{(n)} = x_i^{E_k} \pi_j^{E_k},$$

де $x_i^{E_k}$- імовірність коли-небудь потрапити в клас E_k при старті з i [13].

2.5 Антагоністичні задачі та задачі з повною інформацією

Означення 15. Антагоністичні ігри — це ігри з двома гравцями, які мають протилежні інтереси, тобто якщо один гравець збільшує свій виграш, то у іншого він зменшується і навпаки [22].

Означення 16. Ігри з повною інформацією – це логічні ігри, в яких для супротивників відсутній елемент невизначеності, тобто в будь-який момент гри всі гравці мають повну інформацію про стан гри: про позицію і всі можливі ходи будь-кого з гравців [23].

Висновки до розділу 2

У цьому розділі представлено теоретичні відомості, які необхідні нам для розв’язання задачі про антагоністичну гру з повною інформацією. Зокрема, наведені визначення антагоністичної гри та гри з повною інформацією. Також розглянуто основні визначення, теореми, леми з теорії марківських процесів, які в подальшому будуть застосовуватися до нашої задачі.

РОЗДІЛ 3
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ЇЇ РОЗВ'ЯЗОК

3.1 Постановка задачі

Розглянемо наступну ситуацію: Іван та Петро грають в таку гру. Перед ними на столі лежить n сірників. Можна брати $1,2,3,\ldots,m$ сірників. Сірники вони беруть по черзі. Іван буде витягати першим, тобто його хід перший, потім Петро робить другий хід, Іван третій і т.д. Виграє той, хто

a) бере останній сірник;

b) не бере останній сірник;

3.2 Розв'язок проміжної задачі

Поки що будемо розглядати задачу для варіанту а), тобто виграє той, хто бере останній сірник. Опишемо оптимальну стратегію 1^* обох гравців в цьому випадку. Можливі такі 2 варіанти при правильній грі обох наших гравців:

1) якщо кількість сірників n кратна $m+1$, то виграє другий гравець, тобто Петро. Це буде відбуватись в тому випадку, якщо він буде дотримуватись такої стратегії. Оптимальна стратегія Петра полягає в наступному: коли Іван робить свій хід: бере k сірників, то Петро візьме $m-(k-1)$, тобто в сумі за 2 ходи вони візьмуть $m+1$. Таким чином, через те що наше число n кратне $m+1$ очевидно, що останній сірник при такому розвитку подій завжди буде за Петром.

2) якщо кількість сірників n не кратна $m+1$, то виграє перший гравець, тобто Іван. Він розпочинає свій хід таким чином, щоб після нього на столі залишилось число кратне $m+1$ і далі вже від ходу Петра нічого не залежить, яку б кількість Петро не витягнув, Іван буде також витягувати таке

число, щоб в сумі за ці два ходи було $m + 1$, тому в цьому випадку останній сірник буде саме за Іваном.

Розглянемо випадок b) виграє той, хто бере останній сірник. Опишемо оптимальну стратегію 2^*обох гравців в цьому випадку. Можливі такі 2 варіанти при правильній грі обох гравців:

1) тут матимемо трохи складнішу кратність, якщо число $n - 1$ кратне $m + 1$, то виграє другий гравець, тобто Петро. Стратегія у нього така ж як у варіанті a) в першому випадку, після ходу Івана він має брати таку кількість сірників, щоб в сумі за 2 ходи кількість забраних сірників зі столу була $m + 1$, таким чином Іван точно візьме останній сірник на столі і програє.

2) якщо число $n - 1$ не кратне $m + 1$, то виграє перший гравець, тобто Іван. Для цього йому потрібно за перший хід взяти таку кількість сірників як остача від ділення $n - 1$ на $m + 1$. А далі теж стратегія як у варіанті b) в другому випадку, тобто як би не походив Петро далі Іван доповнює його хід таким чином, щоб сума забраних сірників зі столу була $m + 1$, таким чином Петро вже має взяти останній сірник зі столу і програти в цьому випадку.

3.3 Постановка нашої задачі

Припустимо тепер, що Іван та Петро можуть відхилятись від оптимальної стратегії, описаної вище, під впливом випадкових факторів. Далі у випадку, коли наш гравець притримується своєї оптимальної стратегій описаної вище – це буде стратегія 1^* або 2^*, в залежності від обраної нами гри, такий хід будемо називати правильним. Неправильний – це коли в гравця є можливість походити відповідно до його оптимальної стратегії, але він відхиляються від неї і робить інший хід під впливом випадкових обставин. Якщо гравець, наприклад Іван, знаходиться в стані, що він не зможе виграти при правильній грі Петра, то ми будемо казати, що в такому випадку йому байдуже як ходити. Отже, Іван та Петро можуть ходити правильно, неправильно або їм байдуже як ходити. Введемо відповідні позначення:

- p_j^{I} – ймовірність того, що Іван походив правильно, взявши зі столу правильну кількість сірників - j;
- p_j^{Π} – ймовірність того, що Петро походив правильно, взявши зі столу правильну кількість сірників - j;
- $q_{i,j}^{\mathrm{I}}$ – ймовірність того, що Іван походив неправильно, взявши зі столу кількість сірників – j, якщо його правильний хід був i;
- $q_{i,j}^{\Pi}$ – ймовірність того, що Петро походив неправильно, взявши зі столу кількість сірників – j, якщо його правильний хід був i;
- r_j^{I} – ймовірність того, що Івану байдуже як ходити і він бере зі столу j сірників;
- $r_j^{\text{п}}$ – ймовірність того, що Петру байдуже як ходити і він бере зі столу j сірників.

Наша задача полягає в тому, щоб знайти

$$\lim_{n\to\infty} P(\text{Іван виграє} \mid \text{спочатку } n \text{ сірників}).$$

3.4 Розв'язок задачі

Розпочинає Іван, оскільки він перший гравець. Розіб'ємо наші ходи на групи. В подальшому будемо називати кожну таку групу ходів - рівнями. В кожному рівні буде знаходитись по $2(m+1)$ точок. Наведемо на прикладах, що таке точка: коли гра тільки починається і сірники ніхто не брав, то гравець, в нашому випадку Іван, починає з нульової точки, якщо він бере один сірник, то він перейде в точку 1, якщо ж він візьме 2 сірники, то потрапить в точку 2. Останньою буде точка під таким номером n – це початкова кількість сірників на столі. В дану точку треба, потрапити Івану, щоб виграти цю гру. Нас цікавить перехід Івана між цими рівнями, тобто будемо розглядати моменти першого ходу Івана на кожному новому рівні. І можемо помітити, що це ланцюг Маркова. Також давайте дамо пояснення, що таке

x_i та y_i в нашій задачі, оскільки вони будуть фігурувати в подальших формулах. Введемо нові позначення:

- $x_i = x_{i,j}$ – ймовірність старту Івана з точки j на наступному рівні, якщо він починає з точки i;
- $y_i = y_{i,j}$ - ймовірність старту Івана з точки j на наступному рівні, якщо Петро починає з точки i.

Також нам знадобляться нові позначення для перехідних ймовірностей, щоб записати нові рівняння, які відповідають нашому ланцюгу, вони будуть наступними:

- $p_{i,j}^{\mathrm{I}} = \begin{cases} p_{j-i}^{\mathrm{I}}, \text{якщо } i = 1, \ldots, m;\ i < j,\ j < m+i \\ r_{j-i}^{I},\ i = 0\ or\ i = m+1, j > i,\ j \le i+m \\ q_{j-i}^{I},\ j \ne m+1,\ j > i,\ j \le i+m \\ 0,\ \text{в усіх інших випадках} \end{cases}$ – ймовірність Івана перейти з точки i в точку j в межах цього рівня, тобто не перескочивши на наступний рівень;
- $p_{i,j}^{\mathrm{I,н}} = \begin{cases} p_{2m+2-i}^{\mathrm{I}},\ j \le m+1,\ i < j \\ r_{j+2m+2-i}^{I},\ i = 0\ or\ i = m+1, j > i,\ j \le i+m \\ q_{j+2m+2-i}^{I},\ j \ne 0, m+1,\ j > i,\ j \le i+m \\ 0,\ \text{в усіх інших випадках} \end{cases}$ – ймовірність Івана перейти з точки i в точку j, перескочивши на наступний рівень, наприклад i знаходиться на 1 першому рівні, а j тоді на другому, підсумовуючи, наші точки мають знаходитись на різних рівнях;
- $p_{i,j}^{\mathrm{П}} = \begin{cases} p_{j-i}^{\mathrm{I}}, \text{якщо } i = 1, \ldots, m;\ i < j,\ j < m+i \\ r_{j-i}^{I},\ i = 0\ or\ i = m+1, j > i,\ j \le i+m \\ q_{j-i}^{I},\ j \ne m+1,\ j > i,\ j \le i+m \\ 0,\ \text{в усіх інших випадках} \end{cases}$ – ймовірність Петра перейти з точки i в точку j в межах цього рівня, тобто не перескочивши на наступний рівень;

– $p_{i,j}^{\text{П,н}} = \begin{cases} p_{2m+2-i}^{\text{I}}, & j \le m+1,\ i < j \\ r_{j+2m+2-i}^{I}, & i = 0\ or\ i = m+1, j > i,\ j \le i+m \\ q_{j+2m+2-i}^{I}, & j \ne 0, m+1,\ j > i,\ j \le i+m \\ 0, & \text{в усіх інших випадках} \end{cases}$ – ймовірність

Петра перейти з точки i в точку j, перескочивши на наступний рівень, наприклад i знаходиться на 1 першому рівні, а j тоді на другому, підсумовуючи, наші точки мають знаходитись на різних рівнях.

Тепер можемо записати відповідні рівняння для x_i та y_i для потрапляння з точки i на цьому рівні в точку k на наступному рівні, враховуючи хто стартує перший з i Іван чи Петро. Вони слідують з теорії ланцюгів Маркова та застосуванням формули повної ймовірності.

$$x_{i,k} = \sum_{l=i+1}^{2m+2} p_{i,l}^{\text{I}} \cdot y_i + \sum_{j=1}^{k-1} p_{i,j}^{\text{I,н}} \cdot p_{i,k}^{\text{П}} \tag{3.1}$$

$$y_{i,k} = \sum_{j=i+1}^{2m+2} p_{i,j}^{\text{П}} \cdot x_i + p_{i,k}^{\text{П,н}} \tag{3.2}$$

Для прикладу розглянемо випадок $m = 2$ і розіб'ємо так, щоб на кожному рівні було по 6 точок, будемо мати відповідні перехідні ймовірності, це якщо розглядати у загальному випадку:

$$p_{6n,6n-2} = r_1^I q_{2,1}^{\text{П}} \qquad p_{6n-2,6n-4} = p^{\text{I}} r_1^{\text{П}}$$

$$p_{6n,6n-3} = r_2^I p^{\text{П}} + r_1^I p^{\text{П}} \qquad p_{6n-2,6n-5} = p^{\text{I}} r_2^{\text{П}} + q_{1,2}^{\text{I}} q_{2,1}^{\text{П}}$$

$$p_{6n,6n-4} = r_2^I q_{2,1}^{\text{П}} \qquad p_{6n-2,6n-6} = q_{1,2}^{\text{I}} p^{\text{П}}$$

$$p_{6n-3,6n-5} = r_1^I q_{2,1}^{\text{П}} \qquad p_{6n-4,6n-6} = q_{2,1}^{\text{I}} p^{\text{П}}$$

$$p_{6n-3,6n-6} = r_1^I p^{\text{П}} + r_2^I p^{\text{П}} \qquad p_{6n-4,6n-7} = p^{\text{I}} r_1^{\text{П}} + q_{2,1}^{\text{I}} q_{1,2}^{\text{П}}$$

$$p_{6n-3,6n-7} = r_2^I q_{1,2}^{\text{П}} \qquad \mathrm{p}_{6\mathrm{n}-4,6\mathrm{n}-8} = \mathrm{p}^{\text{I}} \mathrm{r}_2^{\text{П}}$$

$$p_{6n-5,6n-7} = p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi}$$
$$p_{6n-5,6n-8} = p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi} + q_{1,2}^{\mathrm{I}} q_{2,1}^{\Pi}$$
$$p_{6n-5,6n-9} = q_{1,2}^{\mathrm{I}} p^{\Pi}$$

$$p_{6n-7,6n-9} = q_{2,1}^{\mathrm{I}} p^{\Pi}$$
$$p_{6n-7,6n-10} = p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi} + q_{2,1}^{\mathrm{I}} q_{1,2}^{\Pi}$$
$$p_{6n-7,6n-11} = p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi}$$

Бачимо, що наші ймовірності з деяким періодом повторюються:

$$p_{6n,6n-2} = p_{6n-3,6n-5},$$
$$p_{6n,6n-3} = p_{6n-3,6n-6},$$
$$p_{6n,6n-4} = p_{6n-3,6n-7},$$

$$p_{6n-2,6n-4} = p_{6n-5,6n-7},$$
$$p_{6n-2,6n-5} = p_{6n-5,6n-8},$$
$$p_{6n-2,6n-6} = p_{6n-5,6n-9},$$

$$p_{6n-4,6n-6} = p_{6n-7,6n-9},$$
$$p_{6n-4,6n-7} = p_{6n-7,6n-10},$$
$$p_{6n-4,6n-8} = p_{6n-7,6n-11}.$$

Всі можливі варіанти двох ходів: спочатку Івана, потім Петра, за якими я записувала ймовірності переходів описані вище, можете побачити на рис. 3.1.

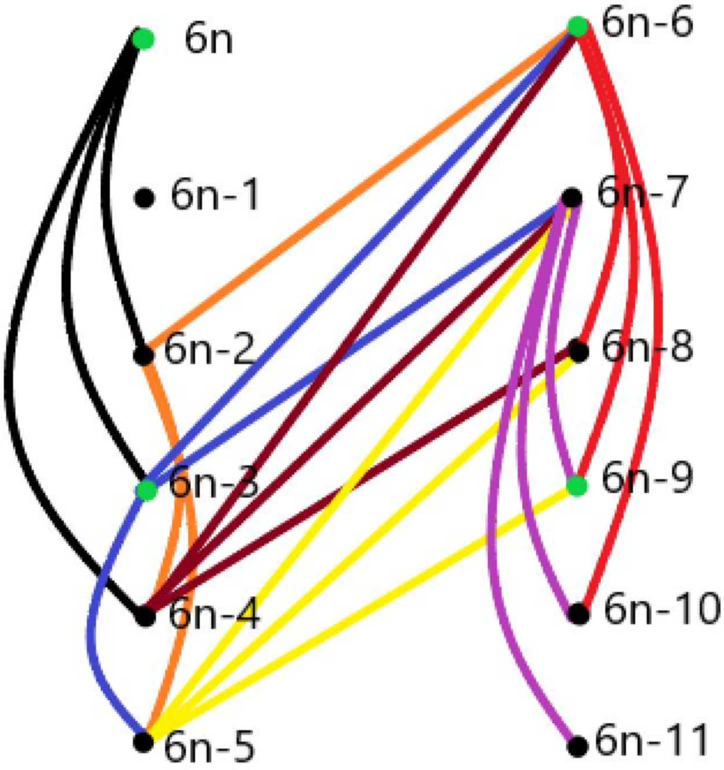


Рисунок 3.1 – Схема ходів обох гравців.

Тепер розглянемо випадок для нашої гри з умовою а) і $m = 2$, $p^{\Pi} = 0,95$; $p^{\mathrm{I}} = 0,9$; $r_1^I = r_2^I = r_1^{\Pi} = r_2^{\Pi} = 0,5$. Запишемо відповідні ймовірності, наприклад ймовірності $p_{0,0}$, означає, що ми починаємо з точки 0 на нашому рівні і перший хід Івана на наступному рівні теж має починатись з 0. Маємо відповідні формули:

$$p_{0,0} = p(0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 0) + p(0 \to 1 \to 2 \to 4 \to 0) +$$
$$+p(0 \to 1 \to 3 \to 4 \to 0) + p(0 \to 1 \to 3 \to 5 \to 0) + p(0 \to 2 \to 3 \to 4 \to 0) +$$
$$+p(0 \to 2 \to 3 \to 5 \to 0) + p(0 \to 2 \to 4 \to 5 \to 0) = r_1^I q_{2,1}^{\Pi} p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi} q_{2,1}^{\mathrm{I}} p^{\Pi} +$$
$$+r_1^I q_{2,1}^{\Pi} q_{1,2}^{\mathrm{I}} p^{\Pi} + r_1^I p^{\Pi} r_1^I p^{\Pi} + r_1^I p^{\Pi} r_2^I p^{\Pi} + r_2^I p^{\Pi} r_1^I p^{\Pi} + r_2^I p^{\Pi} r_2^I p^{\Pi} + r_2^I q_{1,2}^{\Pi} q_{2,1}^{\mathrm{I}} p^{\Pi} =$$
$$=0.908319,$$

$$p_{0,1} = p(0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1) + p(0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 0 \to 1) +$$
$$+p(0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 0 \to 1) + p(0 \to 1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 0 \to 1) +$$

$$+p(0\to 1\to 3\to 5\to 1)+p(0\to 1\to 3\to 4\to 5\to 0\to 1)+$$
$$+p(0\to 2\to 3\to 4\to 5\to 0\to 1)+p(0\to 2\to 3\to 5\to 1)+$$
$$+p(0\to 2\to 4\to 5\to 1)+p(0\to 2\to 4\to 0\to 1)=r_1^I q_{2,1}^{\Pi} p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi} q_{2,1}^{\mathrm{I}} q_{1,2}^{\Pi}+$$
$$+r_1^I q_{2,1}^{\Pi} p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi} p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi}+r_1^I q_{2,1}^{\Pi} p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi} p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi}+r_1^I q_{2,1}^{\Pi} q_{1,2}^{\mathrm{I}} q_{2,1}^{\Pi} p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi}+r_1^I p^{\Pi} r_2^I q_{1,2}^{\Pi}+$$
$$+r_1^I p^{\Pi} r_1^I q_{2,1}^{\Pi} p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi}+r_2^I p^{\Pi} r_1^I q_{2,1}^{\Pi} p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi}+r_2^I p^{\Pi} r_2^I q_{1,2}^{\Pi}+r_2^I q_{1,2}^{\Pi} q_{2,1}^{\mathrm{I}} p^{\Pi}+r_2^I q_{1,2}^{\Pi} p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi}=$$
$$=0.05605,$$

$$p_{0,2}=p(0\to 1\to 2\to 3\to 4\to 0\to 2)+p(0\to 1\to 2\to 3\to 5\to 0\to 2)+$$
$$+p(0\to 1\to 2\to 3\to 5\to 1\to 2)+p(0\to 1\to 2\to 4\to 5\to 0\to 2)+$$
$$+p(0\to 1\to 2\to 4\to 5\to 1\to 2)+p(0\to 1\to 3\to 4\to 5\to 0\to 2)+$$
$$+p(0\to 1\to 3\to 4\to 5\to 1\to 2)+p(0\to 2\to 3\to 4\to 5\to 0\to 2)+$$
$$+p(0\to 2\to 3\to 4\to 5\to 1\to 2)+p(0\to 2\to 4\to 0\to 2)=$$
$$=r_1^I q_{2,1}^{\Pi} p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi} p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi}+r_1^I q_{2,1}^{\Pi} p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi} p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi}+r_1^I q_{2,1}^{\Pi} p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi} q_{1,2}^{\mathrm{I}} q_{2,1}^{\Pi}+r_1^I q_{2,1}^{\Pi} q_{1,2}^{\mathrm{I}} q_{2,1}^{\Pi} p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi}$$
$$+r_1^I q_{2,1}^{\Pi} q_{1,2}^{\mathrm{I}} q_{2,1}^{\Pi} q_{1,2}^{\mathrm{I}} q_{2,1}^{\Pi}+r_1^I p^{\Pi} r_1^I q_{2,1}^{\Pi} p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi}+r_1^I p^{\Pi} r_1^I q_{2,1}^{\Pi} q_{1,2}^{\mathrm{I}} q_{2,1}^{\Pi}+r_2^I p^{\Pi} r_1^I q_{2,1}^{\Pi} p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi}$$
$$+r_2^I p^{\Pi} r_1^I q_{2,1}^{\Pi} q_{1,2}^{\mathrm{I}} q_{2,1}^{\Pi}+r_2^I q_{1,2}^{\Pi} p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi}=0.032294375,$$

$$p_{0,3}=p(0\to 1\to 2\to 3\to 4\to 5\to 1\to 3)+p(0\to 1\to 2\to 3\to 5\to 1\to 3)+$$
$$+p(0\to 2\to 3\to 4\to 5\to 1\to 3)+p(0\to 1\to 3\to 4\to 5\to 1\to 3)=$$
$$=r_1^I q_{2,1}^{\Pi} q_{1,2}^{\mathrm{I}} q_{2,1}^{\Pi} q_{1,2}^{\mathrm{I}} p^{\Pi}+r_1^I q_{2,1}^{\Pi} p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi} q_{1,2}^{\mathrm{I}} p^{\Pi}+r_2^I p^{\Pi} r_1^I q_{2,1}^{\Pi} q_{1,2}^{\mathrm{I}} p^{\Pi}+r_1^I p^{\Pi} r_1^I q_{2,1}^{\Pi} q_{1,2}^{\mathrm{I}} p^{\Pi}=$$
$$=0.00333688,$$

$$p_{0,4}=0,$$

$$p_{0,5}=0.$$

Останні ймовірності нульові, оскільки неможливо знайти такий шлях, щоб Іван перший раз на новому рівні ішов з точок 4 або 5.

Також ці ймовірності можна порахувати іншим шляхом склавши відповідні системи рівнянь для x_i та y_i, де k – це точка, куди на наступному рівні мають потрапити наші гравці, а Іван вперше переходить на наступному рівні, вони будуть виглядати наступним чином:

K=0

$$x_0 = r_1^{\mathrm{I}} y_1 + r_2^{\mathrm{I}} y_2, \qquad y_0 = r_1^{\Pi} x_1 + r_2^{\Pi} x_2,$$
$$x_1 = q^{\mathrm{I}} y_2 + p^{\mathrm{I}} y_3, \qquad y_1 = q^{\Pi} x_2 + p^{\Pi} x_3,$$
$$x_2 = p^{\mathrm{I}} y_3 + q^{\mathrm{I}} y_4, \qquad y_2 = p^{\Pi} x_3 + q^{\Pi} x_4,$$
$$x_3 = r_1^{\mathrm{I}} y_4 + r_2^{\mathrm{I}} y_5, \qquad y_3 = r_1^{\Pi} x_4 + r_2^{\Pi} x_5,$$
$$x_4 = q^{\mathrm{I}} y_5, \qquad y_4 = q^{\Pi} x_5 + p^{\Pi},$$
$$x_5 = 0, \qquad y_5 = p^{\Pi}.$$

Отримаємо такі загальні розв’язки і чисельні:

$$x_0 = p^{\Pi}\left(p^{\Pi}(r_1^{\mathrm{I}} + r_2^{\mathrm{I}})^2 + q^{\mathrm{I}} q^{\Pi}\left(r_1^{\mathrm{I}} + p^{\mathrm{I}} r_1^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi} + r_2^{\mathrm{I}}\right)\right) = 0.908319,$$
$$x_1 = p^{\Pi} q^{\mathrm{I}}\left(q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} + p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi} + p^{\Pi}\left(r_1^{\mathrm{I}} + r_2^{\mathrm{I}}\right)\right) = 0.133475,$$
$$x_2 = p^{\Pi} q^{\mathrm{I}}\left(1 + p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi}\right) = 0.113775,$$
$$x_3 = p^{\Pi}\left(r_1^{\mathrm{I}} + r_2^{\mathrm{I}}\right) = 0.95,$$
$$x_4 = p^{\Pi} q^{\mathrm{I}} = 0.095,$$
$$x_5 = 0,$$
$$y_0 = p^{\Pi} q^{\mathrm{I}}(q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} r_1^{\Pi} + p^{\mathrm{I}}(r_1^{\Pi})^2 + p^{\Pi} r_1^{\Pi}\left(r_1^{\mathrm{I}} + r_2^{\mathrm{I}}\right) + r_2^{\Pi} + p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi} r_2^{\Pi}) = 0.135613,$$
$$y_1 = p^{\Pi}\left(q^{\mathrm{I}}\left(q^{\Pi} + p^{\mathrm{I}} q^{\Pi} r_1^{\Pi}\right) + p^{\Pi}\left(r_1^{\mathrm{I}} + r_2^{\mathrm{I}}\right)\right) = 0.909388,$$
$$y_2 = p^{\Pi}\left(q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} + p^{\Pi}\left(r_1^{\mathrm{I}} + r_2^{\mathrm{I}}\right)\right) = 0.90725,$$
$$y_3 = p^{\Pi}\, q^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi} = 0.0475,$$
$$y_4 = p^{\Pi} = 0.95,$$
$$y_5 = p^{\Pi} = 0.95.$$

K=1

$$x_0 = r_1^{\mathrm{I}} y_1 + r_2^{\mathrm{I}} y_2, \qquad y_0 = r_1^{\Pi} x_1 + r_2^{\Pi} x_2,$$
$$x_1 = q^{\mathrm{I}} y_2 + p^{\mathrm{I}} y_3, \qquad y_1 = q^{\Pi} x_2 + p^{\Pi} x_3,$$

$$x_2 = p^{\mathrm{I}} y_3 + q^{\mathrm{I}} y_4, \qquad y_2 = p^{\Pi} x_3 + q^{\Pi} x_4,$$
$$x_3 = r_1^{\mathrm{I}} y_4 + r_2^{\mathrm{I}} y_5, \qquad y_3 = r_1^{\Pi} x_4 + r_2^{\Pi} x_5,$$
$$x_4 = p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi} + q^{\mathrm{I}} y_5, \qquad y_4 = q^{\Pi} x_5,$$
$$x_5 = p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi}, \qquad y_5 = q^{\Pi}.$$

Отримаємо такі загальні розв’язки і чисельні:

$$x_0 = q^{\Pi}\Big(q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} r_2^{\mathrm{I}} + p^{\Pi} r_2^{\mathrm{I}}\big(r_1^{\mathrm{I}} + r_2^{\mathrm{I}}\big) + p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi}(2q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}} + r_2^{\mathrm{I}} + p^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}}\big(r_1^{\mathrm{I}} + r_2^{\mathrm{I}}\big)$$
$$+ r_1^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi}\big(r_1^{\Pi} + r_2^{\Pi}\big)\Big) = 0.05605,$$
$$x_1 = (q^{\mathrm{I}})^2 (q^{\Pi})^2 + q^{\mathrm{I}} q^{\Pi}\big(p^{\mathrm{I}}\big(2 + p^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}}\big) r_1^{\Pi} + p^{\Pi} r_2^{\mathrm{I}}\big) + (p^{\mathrm{I}})^2 r_1^{\Pi}\big(r_1^{\Pi} + r_2^{\Pi}\big) = 0.412969,$$
$$x_2 = p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi}(2q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} + p^{\mathrm{I}}(r_1^{\Pi} + r_2^{\Pi})) = 0.4095,$$
$$x_3 = q^{\Pi}(p^{\mathrm{I}} r_1^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi} + r_2^{\mathrm{I}}) = 0.03625,$$
$$x_4 = q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} + p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi} = 0.455,$$
$$x_5 = p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi} = 0.45,$$
$$y_0 = r_1^{\Pi}\Big((q^{\mathrm{I}})^2 (q^{\Pi})^2 + q^{\mathrm{I}} q^{\Pi}\big(p^{\mathrm{I}}\big(2 + p^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}}\big) r_1^{\Pi} + 2p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi} + p^{\Pi} r_2^{\mathrm{I}}\big) + (p^{\mathrm{I}})^2\big(r_1^{\Pi} + r_2^{\Pi}\big)^2\Big) =$$
$$= 0.411234,$$
$$y_1 = q^{\Pi}\Big(p^{\mathrm{I}}\big(2q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} + p^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}}\big) r_1^{\Pi} + p^{\Pi} r_2^{\mathrm{I}} + (p^{\mathrm{I}})^2 r_1^{\Pi}\big(r_1^{\Pi} + r_2^{\Pi}\big)\Big) = 0.0549125,$$
$$y_2 = q^{\Pi}\big(q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} + p^{\mathrm{I}}\big(r_1^{\Pi} + p^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi}\big) + p^{\Pi} r_2^{\mathrm{I}}\big) = 0.0571875,$$
$$y_3 = r_1^{\Pi}\Big(q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} + p^{\mathrm{I}}\big(r_1^{\Pi} + r_2^{\Pi}\big)\Big) = 0.4525,$$
$$y_4 = p^{\mathrm{I}} q^{\Pi} r_1^{\Pi} = 0.0225,$$
$$y_5 = q^{\Pi} = 0.05.$$

K=2

$$x_0 = r_1^{\mathrm{I}} y_1 + r_2^{\mathrm{I}} y_2, \qquad y_0 = r_1^{\Pi} x_1 + r_2^{\Pi} x_2,$$
$$x_1 = q^{\mathrm{I}} y_2 + p^{\mathrm{I}} y_3, \qquad y_1 = q^{\Pi} x_2 + p^{\Pi} x_3,$$
$$x_2 = p^{\mathrm{I}} y_3 + q^{\mathrm{I}} y_4, \qquad y_2 = p^{\Pi} x_3 + q^{\Pi} x_4,$$
$$x_3 = r_1^{\mathrm{I}} y_4 + r_2^{\mathrm{I}} y_5, \qquad y_3 = r_1^{\Pi} x_4 + r_2^{\Pi} x_5,$$

$x_4 = p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi} + q^{\mathrm{I}} y_5,$ $\quad\quad$ $y_4 = q^{\Pi} x_5,$

$x_5 = q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} + p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi},$ $\quad\quad$ $y_5 = 0.$

Отримаємо такі загальні розв’язки і чисельні:

$$x_0 = q^{\Pi}\left((q^{\mathrm{I}})^2 (q^{\Pi})^2 r_1^{\mathrm{I}} + q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}}\left(p^{\Pi}\left(r_1^{\mathrm{I}} + r_2^{\mathrm{I}}\right) + 2p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi}\right)\right.$$
$$\left. + p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi}\left(r_2^{\mathrm{I}} + p^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}}\left(r_1^{\mathrm{I}} + r_2^{\mathrm{I}}\right) + p^{\mathrm{I}} r_1^{\mathrm{I}}\left(r_1^{\Pi} + r_2^{\Pi}\right)\right)\right) = 0.0322944,$$

$$x_1 = p^{\Pi} q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}}\left(q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} + p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi}\right) + p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi}\left(2q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} + p^{\mathrm{I}}\left(r_1^{\Pi} + r_2^{\Pi}\right)\right) = 0.410581,$$

$$x_2 = (q^{\mathrm{I}})^2 (q^{\Pi})^2 + 2p^{\mathrm{I}} q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} r_2^{\Pi} + (p^{\mathrm{I}})^2 r_2^{\Pi}(r_1^{\Pi} + r_2^{\Pi}) = 0.409525,$$

$$x_3 = q^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}}\left(q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} + p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi}\right) = 0.011375,$$

$$x_4 = p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi} = 0.45,$$

$$x_5 = q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} + p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi} = 0.455,$$

$$y_0 = p^{\Pi} q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi}\left(q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} + p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi}\right) + r_2^{\Pi}\left(q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} + p^{I}\left(r_1^{\Pi} + r_2^{\Pi}\right)\right)^2 = 0.410053$$

$$y_1 = q^{\Pi}\left((q^{\mathrm{I}})^2 (q^{\Pi})^2 + q^{\mathrm{I}} q^{\Pi}\left(p^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}} + 2p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi}\right) + p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi}\left(p^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}} + p^{\mathrm{I}}\left(r_1^{\Pi} + r_2^{\Pi}\right)\right)\right) =$$
$$= 0.0312825,$$

$$y_2 = q^{\Pi}\left(p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi} + p^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}}\left(q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} + p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi}\right)\right) = 0.0333063,$$

$$y_3 = r_2^{\Pi}\left(q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} + p^{\mathrm{I}}\left(r_1^{\Pi} + r_2^{\Pi}\right)\right) = 0.4525,$$

$$y_4 = q^{\Pi}\left(q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} + p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi}\right) = 0.02275,$$

$$y_5 = 0.$$

K=3 $\quad$ $x_0 = r_1^{\mathrm{I}} y_1 + r_2^{\mathrm{I}} y_2,$ $\quad\quad$ $y_0 = r_1^{\Pi} x_1 + r_2^{\Pi} x_2,$

$x_1 = q^{\mathrm{I}} y_2 + p^{\mathrm{I}} y_3,$ $\quad\quad$ $y_1 = q^{\Pi} x_2 + p^{\Pi} x_3,$

$x_2 = p^{\mathrm{I}} y_3 + q^{\mathrm{I}} y_4,$ $\quad\quad$ $y_2 = p^{\Pi} x_3 + q^{\Pi} x_4,$

$x_3 = r_1^{\mathrm{I}} y_4 + r_2^{\mathrm{I}} y_5,$ $\quad\quad$ $y_3 = r_1^{\Pi} x_4 + r_2^{\Pi} x_5,$

$x_4 = q^{\mathrm{I}} y_5,$ $\quad\quad$ $y_4 = q^{\Pi} x_5,$

$x_5 = q^{\mathrm{I}} p^{\Pi},$ $y_5 = 0.$

Отримаємо такі загальні розв’язки і чисельні:

$$x_0 = p^{\Pi} q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}} \left(q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} + p^{\Pi} \left(r_1^{\mathrm{I}} + r_2^{\mathrm{I}} \right) + p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi} \right) = 0.00333688,$$
$$x_1 = p^{\Pi} q^{\mathrm{I}} \left(p^{\Pi} q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}} + p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi} \right) = 0.0429756,$$
$$x_2 = p^{\Pi} q^{\mathrm{I}} \left(q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} + p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi} \right) = 0.043225,$$
$$x_3 = p^{\Pi} q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}} = 0.002375,$$
$$x_4 = 0,$$
$$x_5 = p^{\Pi} q^{\mathrm{I}} = 0.095,$$
$$y_0 = p^{\Pi} q^{\mathrm{I}} \left(p^{\Pi} q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi} + q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} r_2^{\Pi} + p^{\mathrm{I}} \left(r_1^{\Pi} + r_2^{\Pi} \right) r_2^{\Pi} \right) = 0.0431003,$$
$$y_1 = p^{\Pi} q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} (q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} + p^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}} + p^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi}) = 0.0044175,$$
$$y_2 = (p^{\Pi})^2 q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}} = 0.00225625,$$
$$y_3 = p^{\Pi} q^{\mathrm{I}} r_2^{\Pi} = 0.0475,$$
$$y_4 = p^{\Pi} q^{\mathrm{I}} q^{\Pi} = 0.00475,$$
$$y_5 = 0.$$

K=4

$$x_0 = r_1^{\mathrm{I}} y_1 + r_2^{\mathrm{I}} y_2, \qquad y_0 = r_1^{\Pi} x_1 + r_2^{\Pi} x_2,$$
$$x_1 = q^{\mathrm{I}} y_2 + p^{\mathrm{I}} y_3, \qquad y_1 = q^{\Pi} x_2 + p^{\Pi} x_3,$$
$$x_2 = p^{\mathrm{I}} y_3 + q^{\mathrm{I}} y_4, \qquad y_2 = p^{\Pi} x_3 + q^{\Pi} x_4,$$
$$x_3 = r_1^{\mathrm{I}} y_4 + r_2^{\mathrm{I}} y_5, \qquad y_3 = r_1^{\Pi} x_4 + r_2^{\Pi} x_5,$$
$$x_4 = q^{\mathrm{I}} y_5, \qquad y_4 = 0,$$
$$x_5 = 0, \qquad y_5 = 0.$$

Отримаємо такі загальні розв’язки і чисельні:

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = 0,$$
$$x_1 = 0, \qquad y_1 = 0,$$

$$x_2 = 0, \qquad y_2 = 0,$$
$$x_3 = 0, \qquad y_3 = 0,$$
$$x_4 = 0, \qquad y_4 = 0,$$
$$x_5 = 0, \qquad y_5 = 0.$$

K=5

$$x_0 = r_1^{\mathrm{I}} y_1 + r_2^{\mathrm{I}} y_2, \qquad y_0 = r_1^{\Pi} x_1 + r_2^{\Pi} x_2,$$
$$x_1 = q^{\mathrm{I}} y_2 + p^{\mathrm{I}} y_3, \qquad y_1 = q^{\Pi} x_2 + p^{\Pi} x_3,$$
$$x_2 = p^{\mathrm{I}} y_3 + q^{\mathrm{I}} y_4, \qquad y_2 = p^{\Pi} x_3 + q^{\Pi} x_4,$$
$$x_3 = r_1^{\mathrm{I}} y_4 + r_2^{\mathrm{I}} y_5, \qquad y_3 = r_1^{\Pi} x_4 + r_2^{\Pi} x_5,$$
$$x_4 = q^{\mathrm{I}} y_5, \qquad y_4 = 0,$$
$$x_5 = 0, \qquad y_5 = 0.$$

Отримаємо такі загальні розв’язки і чисельні:

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = 0,$$
$$x_1 = 0, \qquad y_1 = 0,$$
$$x_2 = 0, \qquad y_2 = 0,$$
$$x_3 = 0, \qquad y_3 = 0,$$
$$x_4 = 0, \qquad y_4 = 0,$$
$$x_5 = 0, \qquad y_5 = 0.$$

Перейдемо до нашої основної цілі – знаходження границі ймовірності

$$\lim_{n\to\infty} P(\text{Іван виграє} \mid \text{спочатку } n \text{ сірників}).$$

Отже, посилаючись на теорему 15 (про граничну поведінку ланцюга Маркова) з теоретичних відомостей, нам потрібно знайти π_j , для цього використаємо наш стаціонарний розподіл і розв’яжемо відповідну систему лінійних рівнянь:

В матричному вигляді система має вигляд $\pi = \pi P$. Додаткове рівняння

$$\sum_i \pi_i = 1.$$

Для нашого часткового випадку при $m = 2$, матриця перехідних імовірностей буде мати наступний вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & x_{0,2} & x_{0,3} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,0} & x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,0} & x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що наша матриця в цьому випадку 4×4, оскільки в стан 4 і 5 ми потрапити не можемо. Продовжимо тепер розглядати нашу задачу для загального випадку.

Маємо певні складнощі з використанням теореми про граничну поведінку ланцюга Маркова, оскільки всі стани мають сполучатись, а ми не можемо потрапити в стани починаючи з $2m - 1$ до $2m + 2$, тому розглянемо новий ланцюг, де всі стани будуть сполучні. Формуємо ланцюг від 0 до $2m - 1$. Тепер ми можемо скористатись теоремою 15 і розв'язати відповідну систему лінійних рівнянь для знаходження наших π_i.

Таким чином, ми знаходимо ймовірності переходу між рівнями, але для розв'язку нашої задачі ще потрібно дізнатись ймовірність Івана з передостаннього рівня потрапити в останню точку (забрати останній сірник). Введемо відповідні ймовірності

$$x_i - \text{виграє Іван, якщо стартує з точки } i,$$

$$y_i - \text{виграє Іван, якщо Петро стартує з точки } i,$$

Тепер можемо записати відповідні рівняння для x_i та y_i для потрапляння з точки i (i – кількість сірників, що залишились на столі) на цьому рівні в останню точку на кінцевому рівні, враховуючи хто стартує перший з i Іван чи Петро. Ці рівняння слідують з теорії ланцюгів Маркова та застосуванням формули повної ймовірності.

$$x_i = \sum_{j=1}^{\mathrm{i}-1} p_{i-j}^{\mathrm{I}} \cdot y_j + P(\text{Іван забирає всі } i \text{ сірників })$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{\mathrm{i}-1} p_{i-j}^{\Pi} \cdot x_j$$

Отримаємо таку нашу відповідь:

$$\lim_{n\to\infty} P(\text{Іван виграє} \mid \text{спочатку } n \text{ сірників}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{2m-1} \mathrm{P}(\text{Іван стартує з передостаннього рівня з точки } j | \text{було } n \text{ рівнів}) \times$$

$$\times \mathrm{P}\big(\text{Іван виграє}\big|\text{старт з } \pi_j\big) = \sum_{j=0}^{2m-1} \pi_j\, x_{2m+2-j},$$

де (π_j) – стаціонарний розподіл ланцюга Маркова з перехідними ймовірностями $(x_{i,j})$, що визначені в формулі (3.1).

3.5 Порівняльний аналіз

Тепер розглянемо випадок для нашої гри з умовою а) і $m = 2$,наші ймовірності $p^{\Pi}, p^{\mathrm{I}}, r_1^I, r_2^I, r_1^{\Pi}, r_2^{\Pi}$ поки що не будуть мати чисельне значення, виведемо нашу кінцеву формулу. Для початку запишемо матрицю розподілу для наших перехідних ймовірностей:

$$P = \begin{pmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & x_{0,2} & x_{0,3} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,0} & x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,0} & x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Значення цієї матриці ми отримали розв'язавши системи (3.1) та (3.2) одночасно за допомогою програми "Wolfram Alpha". Вони вже були наведені вище, коли ми знаходили ймовірності переходу між рівнями (спосіб 2). Наприклад ймовірність $x_{0,1}$ в нашій матриці, це ймовірність x_0 при $k = 1$.

Наступний крок: розв'яжемо систему $\pi = \pi P$ Додаткове рівняння $\sum_i \pi_i = 1$. І отримаємо наступні значення π.

$$\pi_0 = \frac{p^{\Pi}(1 - p^{\mathrm{I}})\left(p^{\Pi} + p^{\mathrm{I}}(1 - p^{\Pi})\right)}{p^{\mathrm{I}} + p^{\Pi} - p^{\mathrm{I}}p^{\Pi}(r_1^{\mathrm{I}} + r_1^{\Pi}) - p^{\mathrm{I}}p^{\Pi}\,(p^{\mathrm{I}} + p^{\Pi} - p^{\mathrm{I}}p^{\Pi})(2 - r_1^{\mathrm{I}} - r_1^{\Pi})},$$

$$\pi_1 = \frac{(1 - p^{\Pi})\left(p^{\mathrm{I}}r_1^{\Pi} + p^{\Pi}(1 - p^{\mathrm{I}})\left(1 - r_1^{\mathrm{I}}\right)\right)}{p^{\mathrm{I}} + p^{\Pi} - p^{\mathrm{I}}p^{\Pi}(r_1^{\mathrm{I}} + r_1^{\Pi}) - p^{\mathrm{I}}p^{\Pi}\,(p^{\mathrm{I}} + p^{\Pi} - p^{\mathrm{I}}p^{\Pi})(2 - r_1^{\mathrm{I}} - r_1^{\Pi})},$$

$$\pi_2 = \frac{(1 - p^{\Pi})\left(p^{\mathrm{I}}\left(1 - r_1^{\Pi}\right) + p^{\Pi}(1 - p^{\Pi})(1 - p^{\mathrm{I}})^2 r_1^{\mathrm{I}}\right)}{p^{\mathrm{I}} + p^{\Pi} - p^{\mathrm{I}}p^{\Pi}(r_1^{\mathrm{I}} + r_1^{\Pi}) - p^{\mathrm{I}}p^{\Pi}\,(p^{\mathrm{I}} + p^{\Pi} - p^{\mathrm{I}}p^{\Pi})(2 - r_1^{\mathrm{I}} - r_1^{\Pi})},$$

$$\pi_3 = \frac{p^{\Pi}(1 - p^{\Pi})(1 - p^{\mathrm{I}})\left(p^{\Pi}r_1^{\mathrm{I}} + p^{\mathrm{I}}\left(1 - r_1^{\Pi} - p^{\Pi}r_1^{\mathrm{I}}\right)\right)}{p^{\mathrm{I}} + p^{\Pi} - p^{\mathrm{I}}p^{\Pi}(r_1^{\mathrm{I}} + r_1^{\Pi}) - p^{\mathrm{I}}p^{\Pi}\,(p^{\mathrm{I}} + p^{\Pi} - p^{\mathrm{I}}p^{\Pi})(2 - r_1^{\mathrm{I}} - r_1^{\Pi})}.$$

Система для останнього рівня буде трохи відрізнятись від систем, які ми використовували раніше і буде мати такий вигляд:

$$x_6 = r_1^{\mathrm{I}}y_5 + r_2^{\mathrm{I}}y_4, \qquad y_6 = r_1^{\Pi}x_5 + r_2^{\Pi}x_4,$$
$$x_5 = q^{\mathrm{I}}y_4 + p^{\mathrm{I}}y_3, \qquad y_5 = q^{\Pi}x_4 + p^{\Pi}x_3,$$
$$x_4 = p^{\mathrm{I}}y_3 + q^{\mathrm{I}}y_2, \qquad y_4 = p^{\Pi}x_3 + q^{\Pi}x_2,$$

$$x_3 = r_1^{\mathrm{I}} y_2 + r_2^{\mathrm{I}} y_1, \qquad y_3 = r_1^{\Pi} x_2 + r_2^{\Pi} x_1,$$
$$x_2 = p^{\mathrm{I}}, \qquad y_2 = q^{\Pi} x_1,$$
$$x_1 = 1, \qquad y_1 = 0,$$

де нижній індекс при x чи y – це кількість сірників, що залишились на столі.

Отримаємо такі загальні розв'язки:

$$x_1 = 1,$$
$$x_2 = p^{\mathrm{I}},$$
$$x_3 = r_1^{\mathrm{I}}(1 - p^{\Pi}),$$
$$x_4 = 1 - (1 - p^{\mathrm{I}})\left(p^{\Pi} + p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi}\right),$$
$$x_5 = 1 - (1 - p^{\mathrm{I}})\left(1 - p^{\mathrm{I}} + p^{\mathrm{I}} p^{\Pi} + p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi} - p^{\Pi}\, r_1^{\mathrm{I}}(1 - p^{\Pi})\right),$$
$$x_6 = (1 - p^{\Pi})\ \left(p^{\mathrm{I}} + r_1^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}}\, r_1^{\mathrm{I}}\left(1 - p^{\Pi} + r_1^{\Pi} - p^{\mathrm{I}} r_1^{\Pi}\right)\right),$$

$$y_1 = 0,$$
$$y_2 = 1 - p^{\Pi},$$
$$y_3 = 1 - (1 - p^{\mathrm{I}})\, r_1^{\Pi},$$
$$y_4 = (1 - p^{\Pi})\ (p^{\mathrm{I}} + p^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}}),$$
$$y_5 = (1 - p^{\Pi})\left(1 - p^{\Pi} + p^{\mathrm{I}} p^{\Pi} + p^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}}\, r_1^{\Pi}(1 - p^{\mathrm{I}})\right),$$
$$y_6 = 1 - (1 - p^{\mathrm{I}})\left(p^{\Pi} + r_1^{\Pi} - p^{\Pi}\, r_1^{\Pi}\left(1 - p^{\mathrm{I}} + r_1^{\mathrm{I}} - p^{\Pi} r_1^{\mathrm{I}}\right)\right).$$

Отже, тепер можемо записати кінцеву формулу шуканої границі:

$$\lim_{n\to\infty} P(\text{Іван виграє} \mid \text{спочатку } n \text{ сірників}) = \pi_0 x_6 + \pi_1 x_5 + \pi_2 x_4 + \pi_3 x_3 =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{(p^{\mathrm{I}} - p^{\Pi}) + p^{\Pi}(1 - p^{\Pi})(1 - p^{\mathrm{I}})(2 - p^{\mathrm{I}})r_1^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}}(1 - p^{\mathrm{I}})(1 - p^{\Pi})(2 - p^{\Pi})r_1^{\Pi}}{2[p^{\mathrm{I}} + p^{\Pi} - p^{\mathrm{I}} p^{\Pi}(r_1^{\mathrm{I}} + r_1^{\Pi}) - p^{\mathrm{I}} p^{\Pi}(p^{\mathrm{I}} + p^{\Pi} - p^{\mathrm{I}} p^{\Pi})(2 - r_1^{\mathrm{I}} - r_1^{\Pi})]}.$$

Тепер проведемо власне наш порівняльний аналіз. Для цього побудуємо різні графіки цієї функції, фіксуючи $r_1^{\mathrm{I}} = r_2^{\mathrm{I}} = r_1^{\Pi} = r_2^{\Pi} = 0{,}5$ і обираючи різні значення p^{I}. У цьому випадку вираз для границі суттєво спрощується:

$$\lim_{n\to\infty} P(\text{Іван виграє | спочатку } n \text{ сірників}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{p^{\mathrm{I}} - p^{\Pi}}{1 - p^{\mathrm{I}} p^{\Pi}}\right).$$

Залежності цієї ймовірності від p^{Π} при кількох фіксованих значеннях p^{I} наведені на рис. 3.2.

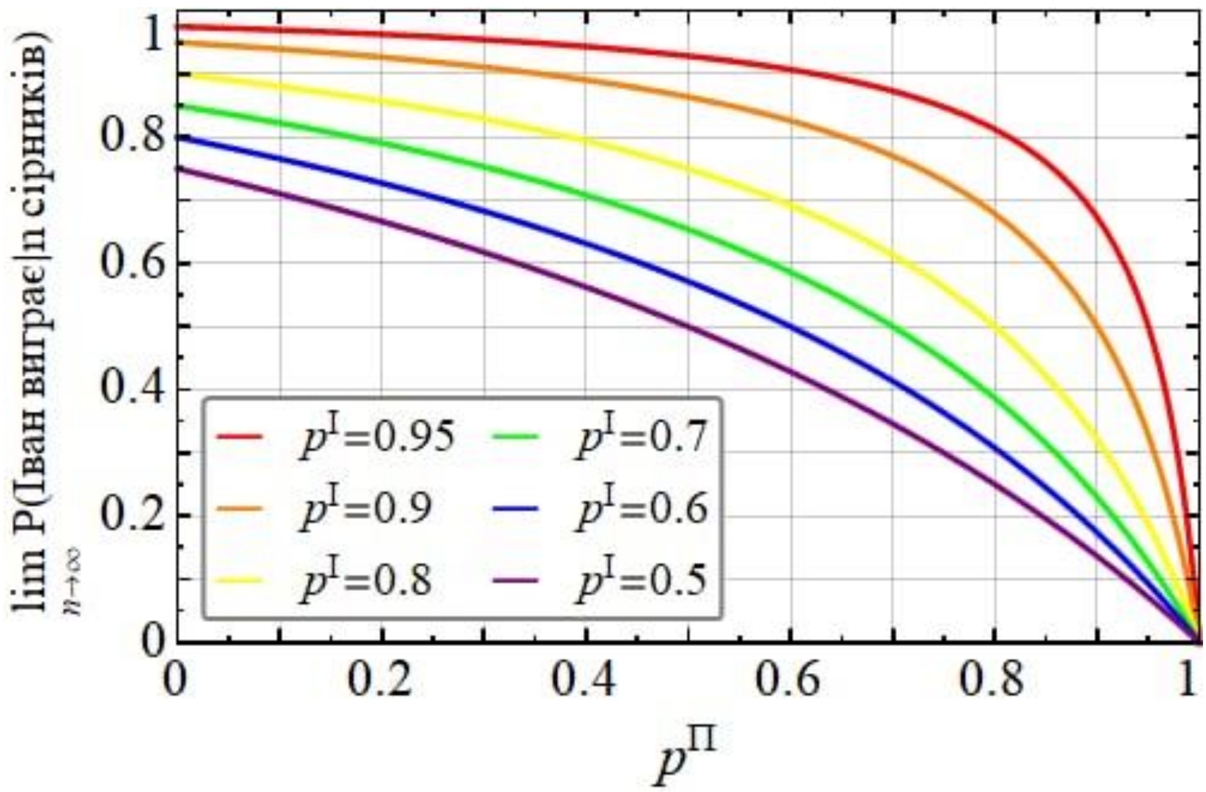


Рисунок 3.2 – Залежність імовірності виграшу Івана у грі від імовірності того, що Петро слідує своїй стратегії p^{Π}; різні криві відповідають різним значенням p^{I}; значення $r_1^{\mathrm{I}} = r_2^{\mathrm{I}} = r_1^{\Pi} = r_2^{\Pi} = 0{,}5$.

Бачимо, що якщо гравці перебувають в однакових умовах, тобто $p^{\Pi} = p^{\mathrm{I}}$, то імовірність виграшу кожного з них дорівнює ½. Якщо Петро зовсім не робить помилок, то у Івана майже завжди імовірність виграти – 0 (окрім випадку, коли він теж ніколи не помиляється). Також бачимо, що імовірність монотонно спадає при зростанні $p^{\text{П}}$ і монотонно зростає при зростанні p^{I}.

Зауваження 1. Якщо ймовірність того, що Петро слідує своїй виграшній стратегії, дорівнює 0, то ймовірність виграшу Івана $(1 + p^{\text{I}})/2$ все одно менша за 1, тому що Іван може помилитись на якомусь із попередніх кроків і Петро ненароком виграє.

Висновки до розділу 3

У цьому розділі було розглянуто задачу Боше та наведено її розв'язок з оптимальними стратегіями гри. На основі цієї задачі було сформульовано нову, що є більш близькою до реальності. Відмінність цієї задачі в тому, що тепер на гравців можуть діяти випадкові зовнішні чинники, які будуть призводити до помилок у діях гравців і відхилення їх від оптимальної стратегії гри. Для розв'язання цієї задачі і знаходження імовірності виграшу одного з гравців було використано теорію ланцюгів Маркова.

Було введено нові поняття для кращого розуміння гри, розраховано ймовірності потрапляння з однієї точки в іншу. Цей процес був зроблений двома способами: аналітично та через системи лінійних рівнянь. Розв'язки в обох випадках співпали, тому робимо висновки, що вони були розраховані коректно.

Для частинного випадку $m = 2$ було розраховано ймовірність виграшу одного з гравців у границі, коли початкове значення ігрових елементів (сірників) прямує до нескінченності. Всі обчислення проведені в аналітичному вигляді для довільних значень параметрів гри.

Насамкінець, було проведено чисельний порівняльний аналіз, в якому пораховано і графічно представлено ймовірність виграшу Івана для різних значень імовірностей того, що гравці дотримуються своїх оптимальних стратегій.

Всі аналітичні розрахунки були перевірені за допомогою пакету Wolfram Alpha, графіки будувались також у ньому.

РОЗДІЛ 4
ФУНКЦІОНАЛЬНО-ВАРТІСНИЙ АНАЛІЗ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ

4.1 Постановка завдання

У даному розділі проводиться оцінка основних характеристик різних програмних продуктів, призначених для знаходження ймовірностей, що потрібні для отримання кінцевого результату.

Функціонально-вартісний аналіз (ФВА) – це технологія, яка дозволяє оцінити реальну вартість продукту або послуги незалежно від організаційної структури компанії. ФВА проводиться з метою виявлення резервів зниження витрат за рахунок ефективніших варіантів виробництва, кращого співвідношення між споживчою вартістю виробу та витратами на його виготовлення. Для проведення аналізу використовується економічна, технічна та конструкторська інформація.

Алгоритм функціонально-вартісного аналізу включає в себе визначення послідовності етапів розробки продукту, визначення повних витрат (річних) та кількості робочих часів, визначення джерел витрат та кінцевий розрахунок вартості програмного продукту.

4.2 Обґрунтування функцій програмного продукту

Головна функція F0 – використання програмного продукту, у який аналітик вносить вхідні дані та робить відповідні обчислення. Виходячи з конкретної мети, можна виділити наступні основні функції ПП:

F1 – вибір відповідного програмного продукту;

F2 – інтерфейс користувача;

F3 – мова програмування

Кожна з основних функцій може мати декілька варіантів реалізації.

Функція F1:

а) база знань Wolfram Alpha.

б) Mathcad.

Функція F2:

а) Інтерфейс користувача з підтримкою перемикачів, графіків та кнопок;

б) Інтерфейс користувача тільки з вікном для введення даних.

Функція F3:

а) Робота з вхідними даними з підтримкою перемикачів та кнопок;

б) Завантаження файлу з даними.

Варіанти реалізації основних функцій наведені у морфологічній карті системи (рис. 4.1).

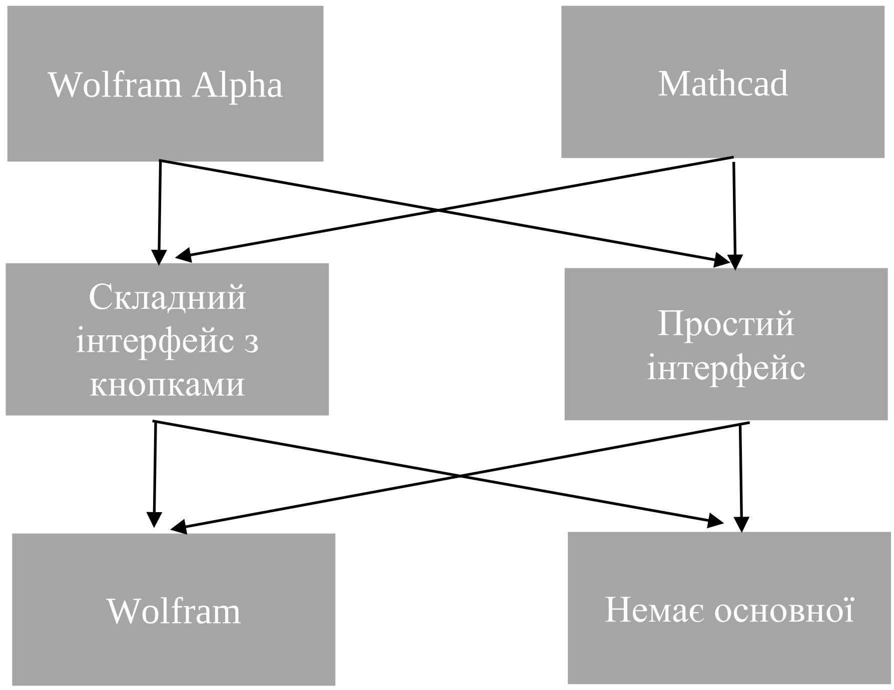


Рисунок 4.1 – Морфологічна карта

Морфологічна карта відображає множину всіх можливих варіанти основних функцій.

Таблиця 4.1 – Позитивно-негативна матриця

Функції	Варіанти реалізації	Переваги	Недоліки

F_1	A	Швидка дія програми, велика кількість доступних алгоритмів	Програма займаю велику частину пам’яті комп’ютера та є платною. Є в доступі онлайн, але не всі потрібні алгоритми там доступні.
	$Б$	Орієнтована на користувачів-непрограмістів	Іде більше часу на обчислення, менш потужний математичний апарат
F_2	A	Інтерфейс спрямований на програміста	На перший погляд доволі примітивний інтерфейс
	$Б$	Для набору команд, функцій, формул можна використовувати як клавіатуру, так і кнопки на численних спеціальних панелях інструментів	Має прості інструменти для поверхневого програмування
F_3	A	Одночасно може підтримувати багато програмних парадигм	Потрібен певний час, щоб вивчити і розібратись
	$Б$	Має доволі прості інструменти	Не призначена для програмування

На основі цієї карти будуємо позитивно-негативну матрицю варіантів основних функцій (Таб. 4.1). Робимо висновок, що при розробці програмного продукту деякі варіанти реалізації функцій варто відкинути, тому що вони не відповідають поставленим перед програмним продуктом задачам. Ці варіанти відзначені у морфологічній карті.

Функція F_1:

Перевагу віддаємо швидкій дії програми та великій кількості алгоритмів., тому варіант Б має бути відкинутий.

Функція F_2:

Обидва варіанти можна використовувати в розробці.

Функція F_3:

Віддаємо перевагу варіанту А, оскільки це більш потужний інструмент.

Таким чином, будемо розглядати такий варіанти реалізації ПП:

$$F_1\text{а} – F_2\text{а} – F_3\text{а}$$

$$F_1\text{а} – F_2\text{б} – F_3\text{а}$$

Для оцінювання якості розглянутих функцій обрана система параметрів, описана нижче.

4.3 Обґрунтування системи параметрів ПП

На основі даних, розглянутих вище, визначаються основні параметри вибору, які будуть використані для розрахунку коефіцієнта технічного рівня.

Для того, щоб охарактеризувати програмний продукт, будемо використовувати наступні параметри:

- *X1* – швидкодія мови програмування;
- *X2* – об’єм пам’яті для обчислень та збереження даних;
- *X3* – час попередньої обробки даних;
- *X4* – потенційний об’єм програмного коду.

Гірші, середні і кращі значення параметрів вибираються на основі вимог замовника й умов, що характеризують експлуатацію ПП як показано у таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 – Основні параметри ПП

Назва Параметра	Умовні позначення	Одиниці виміру	Значення параметра		
			Гірші	середні	Кращі
Швидкодія мови програмування	X1	оп/мс	10000	14000	19000
Об'єм пам'яті	X2	Мб	420	128	64
Час попередньої обробки даних	X3	Мс	4	3	2
Потенційний об'єм програмного коду	X4	кількість рядків коду	200	150	100

За даними таблиці 4.2 будуються графічні характеристики параметрів – рис. 4.2 – рис. 4.5.

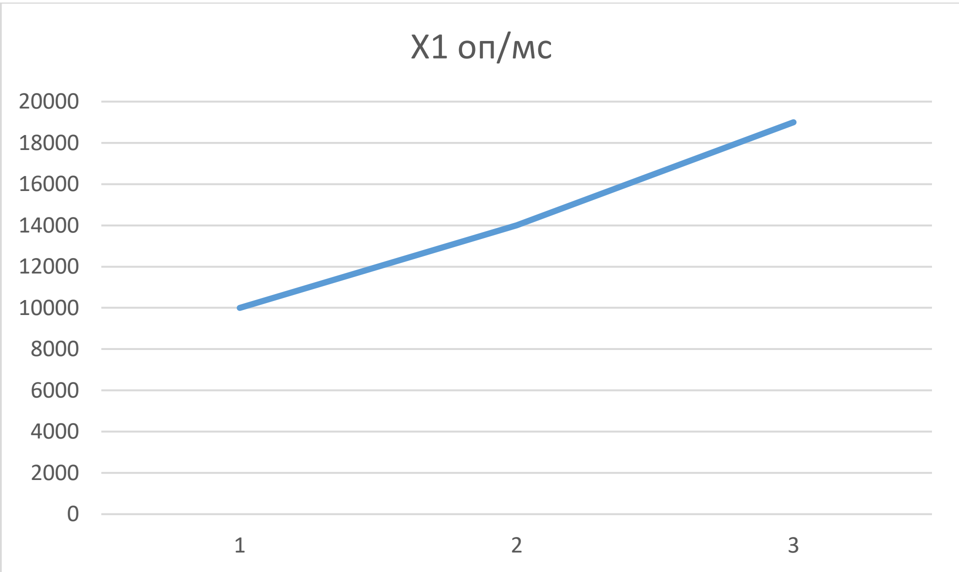


Рисунок 4.2 – X1, швидкодія мови програмування

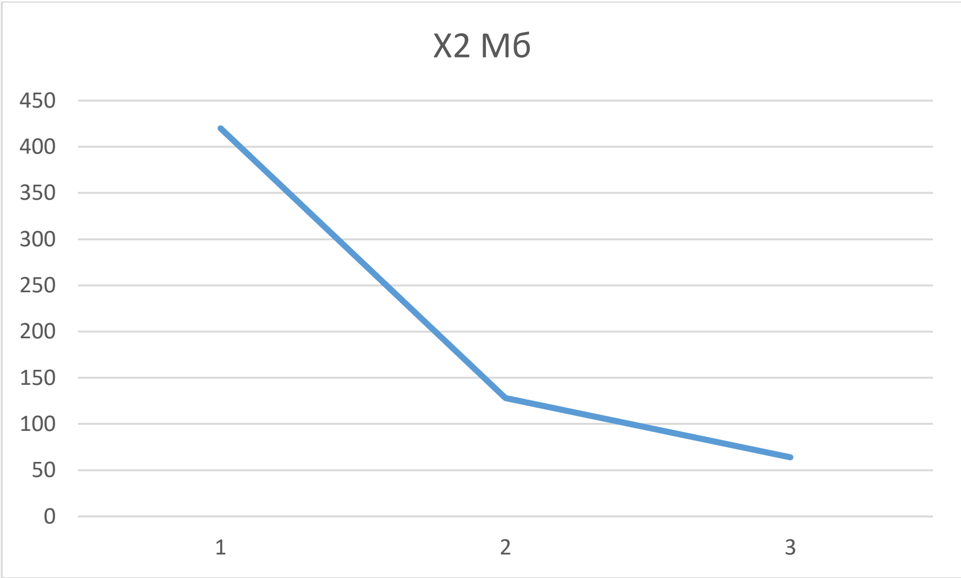


Рисунок 4.3 – X2, об’єм пам’яті

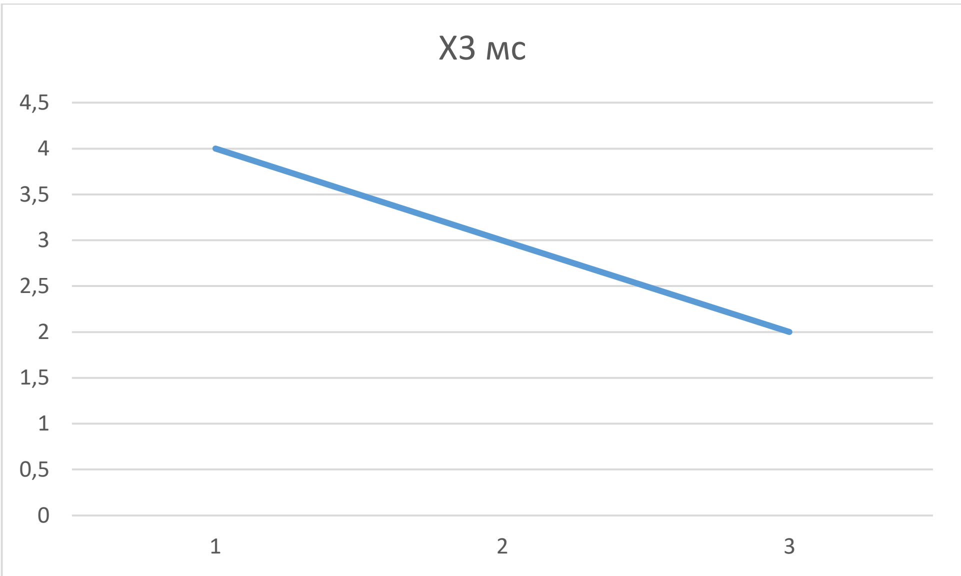


Рисунок 4.4 – X3, час попередньої обробки даних

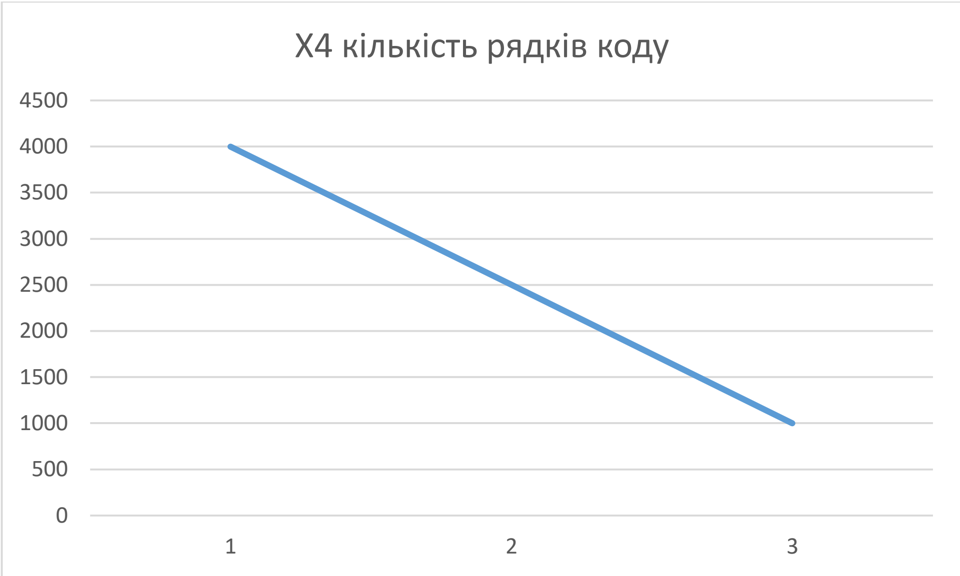


Рисунок 4.5 – Х4, потенційний об’єм програмного коду

4.4 Аналіз експертного оцінювання параметрів

Після детального обговорення й аналізу кожний експерт оцінює ступінь важливості кожного параметру для конкретно поставленої цілі – розробка програмного продукту, який дає найбільш точні результати при знаходженні параметрів моделей адаптивного прогнозування і обчислення прогнозних значень.

Значимість кожного параметра визначається методом попарного порівняння. Оцінку проводить експертна комісія із 7 людей. Визначення коефіцієнтів значимості передбачає:

- визначення рівня значимості параметра шляхом присвоєння різних рангів;
- перевірку придатності експертних оцінок для подальшого використання;
- визначення оцінки попарного пріоритету параметрів;
- обробку результатів та визначення коефіцієнту значимості.

Результати експертного ранжування наведені у таблиці 4.3.

Таблиця 4.3 – Результати ранжування параметрів

Позначення параметра	Назва параметра	Одиниці виміру	Ранг параметра за оцінкою експерта							Сума рангів R_i	Відхилення Δ_i	Δ_i^2
			1	2	3	4	5	6	7			
X1	Швидкодія мови програмування	Оп/мс	4	5	2	5	3	4	5	28	3,5	12,25
X2	Об’єм пам’яті	Mb	2	1	3	1	2	1	2	12	-12,5	156,25
X3	Час попередньої обробки даних	мс	5	3	5	5	4	5	3	30	5,5	30,25
X4	Потенційний об’єм програмного коду	Кількість рядків коду	3	5	4	3	5	4	4	28	3,5	12,25
	Разом		14	14	14	14	14	14	14	98	0	211

Для перевірки степені достовірності експертних оцінок, визначимо наступні параметри:

а) сума рангів кожного з параметрів і загальна сума рангів:

$$R_i = \sum_{j=1}^{N} r_{ij} R_{ij} = \frac{Nn(n+1)}{2} = 98,$$

де N – число експертів, n – кількість параметрів;

б) середня сума рангів:

$$T = \frac{1}{n} R_{ij} = 24{,}5$$

в) відхилення суми рангів кожного параметра від середньої суми рангів:

$$\Delta_i = R_i - T.$$

Сума відхилень по всім параметрам повинна дорівнювати 0;

г)загальна сума квадратів відхилення:

$$S = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 = 211.$$

Порахуємо коефіцієнт узгодженості:

$$W = \frac{12S}{N^2(n^3 - n)} = \frac{12 \cdot 211}{7^2(4^3 - 4)} = 0{,}86 > W_k = 0{,}67.$$

Ранжування можна вважати достовірним, тому що знайдений коефіцієнт узгодженості перевищує нормативний, котрий дорівнює 0,67.

Скориставшись результатами ранжирування, проведемо попарне порівняння всіх параметрів і результати занесемо у таблицю 4.4.

Таблиця 4.4 - Попарне порівняння параметрів.

Параметри	Експерти							Кінцева оцінка	Числове значення
	1	2	3	4	5	6	7		
X1 і X2	>	>	<	<	>	>	>	>	1,5
X1 і X3	<	>	<	=	<	<	>	<	0,5
X1 і X4	>	>	<	=	<	=	>	>	1,5

X2 і X3	<	<	<	<	<	<	<	<	0,5
X2 і X4	<	<	<	<	<	<	<	<	0,5
X3 і X4	>	<	>	>	<	>	<	>	1,5

Числове значення, що визначає ступінь переваги i–го параметра над j–тим, a_{ij} визначається по формулі:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1.5 \text{ при } X_i > X_j \\ 1.0 \text{ при } X_i = X_j \\ 0.5 \text{ при } X_i < X_j \end{cases}$$

З отриманих числових оцінок переваги складемо матрицю А=$\left\| a_{ij} \right\|$.

Для кожного параметра зробимо розрахунок вагомості $K_{вi}$ за наступними формулами:

$$K_{\text{ві}} = \frac{b_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$$

$$b_i = \sum_{i=1}^{N} a_{ij}$$

Відносні оцінки розраховуються декілька разів доти, поки наступні значення не будуть незначно відрізнятися від попередніх (менше 2%). На другому і наступних кроках відносні оцінки розраховуються за наступними формулами:

$$K_{\text{ві}} = \frac{b_i'}{\sum_{i=1}^{n} b_i'},$$

$$b_i' = \sum_{i=1}^{N} a_{ij} b_j$$

Як видно з таблиці 4.5, різниця значень коефіцієнтів вагомості не перевищує 2%, тому більшої кількості ітерацій не потрібно.

Таблиця 4.5 - Розрахунок вагомості параметрів

Параметриx_i	Параметриx_j				Перша ітер.		Друга ітер.		Третя ітер	
	X1	X2	X3	X4	b_i	$K_{\text{ві}}$	b_i^1	$K_{\text{ві}}^1$	b_i^2	$K_{\text{ві}}^2$
X1	1,0	1,5	0,5	1,5	4,5	0,36	17,75	0,25	73,38	0,25
X2	0,5	1,0	1,5	0,5	3,5	0,28	15,75	0,22	65,63	0,23
X3	1,5	1,5	1,0	1,5	5,5	0,44	22,75	0,33	93,6	0,32
X4	0,5	1,5	0,5	1,0	3,5	0,28	13,75	0,2	57,63	0,2
Всього:					12,5	1	70	1	290,25	1

4.5 Аналіз рівня якості варіантів реалізації функцій

Визначаємо рівень якості кожного варіанту виконання основних функцій окремо.

Абсолютні значення параметрів *X2* (Об’єм пам’яті), *X3* (час попередньої обробки даних) та *X4* (потенційний об’єм програмного коду) відповідають технічним вимогам умов функціонування даного ПП.

Абсолютне значення параметра *X1* (швидкість роботи мови програмування) обрано не найгіршим.

Коефіцієнт технічного рівня для кожного варіанта реалізації ПП розраховується так (таблиця 4.6):

$$K_K(j) = \sum_{i=1}^{n} K_{вi,j} B_{i,j} \,,$$

де n – кількість параметрів;

$K_{вi}$– коефіцієнт вагомості i–го параметра;

B_i – оцінка i–го параметра в балах.

Таблиця 4.6 - Розрахунок показників рівня якості варіантів реалізації основних функцій ПП

Основні функції	Варіант реалізації функції	Параметри	Абсолютне значення параметра	Бальна оцінка параметра	Коефіцієнт вагомості параметра	Коефіцієнт рівня якості
F1	А	X1	10000	8	0,25	2
F2	А	X2	64	5	0,23	1,15
	Б	X2	128	2	0,32	0,64
F3	А	X3	100	7	0,2	1,4

За даними з таблиці 4.6 за формулою

$$K_K = K_{\text{ТУ}}[F_{1k}] + K_{\text{ТУ}}[F_{2k}] + \ldots + K_{\text{ТУ}}[F_{zk}]$$

визначаємо рівень якості кожного з варіантів:

$$K_{K1} = 2 + 1{,}15 + 1{,}4 = 4{,}55,$$

$$K_{K2} = 2 + 0{,}64 + 1{,}4 = 4{,}04.$$

Як видно з розрахунків, кращим є перший варіант, для якого коефіцієнт технічного рівня має найбільше значення.

4.6 Економічний аналіз варіантів розробки ПП

Для визначення вартості розробки ПП спочатку проведемо розрахунок трудомісткості.

Всі варіанти включають в себе два окремих завдання:

1. Встановлення програмного продукту;

2. Використання програмного продукту;

Завдання 1 за ступенем новизни відноситься до групи А, завдання 2 – до групи Б. За складністю алгоритми, які використовуються в завданні 1 належать до групи 1; а в завданні 2 – до групи 3.

Для реалізації завдання 1 використовується довідкова інформація, а завдання 2 використовує інформацію у вигляді даних.

Проведемо розрахунок норм часу на встановлення та використання продукту для кожного з завдань.

Загальна трудомісткість обчислюється як

$$T_O = T_P \cdot K_П \cdot K_{СК} \cdot K_М \cdot K_{СТ} \cdot K_{СТ.М},$$

де T_P – трудомісткість ;

$K_П$ – поправочний коефіцієнт;

$K_{СК}$ – коефіцієнт на складність вхідної інформації;

$K_М$ – коефіцієнт рівня мови програмування;

$K_{СТ}$ – коефіцієнт використання стандартних модулів і прикладних програм;

$K_{СТ.М}$ – коефіцієнт стандартного математичного забезпечення.

Для першого завдання, виходячи із норм часу для завдань розрахункового характеру степеню новизни А та групи складності алгоритму 1, трудомісткість дорівнює: T_P =90 людино-днів. Поправочний коефіцієнт, який враховує вид нормативно-довідкової інформації для першого завдання: $K_П$ = 1.7. Поправочний коефіцієнт, який враховує складність контролю вхідної та вихідної інформації для всіх семи завдань рівний 1: $K_{СК}$ = 1. Оскільки при розробці першого завдання використовуються стандартні модулі, врахуємо це за допомогою коефіцієнта $K_{СТ}$ = 0.8. Тоді загальна трудомісткість програмування першого завдання дорівнює:

$$T_1 = 90 \cdot 1.7 \cdot 0.8 = 122.4 \text{ людино-днів.}$$

Проведемо аналогічні розрахунки для подальших завдань.

Для другого завдання (використовується алгоритм третьої групи складності, степінь новизни Б), тобто T_P =27 людино-днів, $K_П$ =0.9,$K_{СК}$ = 1,$K_{СТ}$ =0.8:

$$T_2 = 27 \cdot 0.9 \cdot 0.8 = 19.44 \text{ людино-днів.}$$

Складаємо трудомісткість відповідних завдань для кожного з обраних варіантів реалізації програми, щоб отримати їх трудомісткість:

$$T_I = (122.4 + 19.44 + 4.8 + 19.44) \cdot 8 = 1328,64 \text{ людино-годин.}$$

$$T_{II} = (122.4 + 19.44 + 6.91 + 19.44) \cdot 8 = 1345.52 \text{ людино-годин.}$$

Найбільш високу трудомісткість має варіант II.

В розробці беруть участь два програмісти з окладом 8000 грн., один аналітик в області даних з окладом 10500. Визначимо середню зарплату за годину за формулою:

$$С_Ч = \frac{М}{T_m \cdot t} \text{грн.,}$$

де М – місячний оклад працівників;

T_m – кількість робочих днів тиждень;

t – кількість робочих годин в день.

$$С_Ч = \frac{8000 + 8000 + 10500}{3 \cdot 21 \cdot 8} = 52,58 \text{ грн.}$$

Тоді, розрахуємо заробітну плату за формулою:

$$С_{ЗП} = С_ч \cdot Т_i \cdot К_Д$$

де $С_Ч$– величина погодинної оплати праці програміста;

$Т_i$ – трудомісткість відповідного завдання;

$К_Д$ – норматив, який враховує додаткову заробітну плату.

Зарплата розробників за варіантами становить:

I. $С_{ЗП}$ = 52,58· 1328.64 · 1.2 =69860,25 грн.

II. $С_{ЗП}$ = 52,58· 1345.52 · 1.2 =84896,93 грн.

Відрахування на єдиний соціальний внесок становить 22%:

I. $С_{ВІД} = С_{ЗП} \cdot 0.22 = 102811{,}43 \cdot 0.22 = 15369{,}26$ грн.

II. $С_{ВІД} = С_{ЗП} \cdot 0.22 = 104117{,}62 \cdot 0.22 = 18677{,}32$ грн.

Тепер визначимо витрати на оплату однієї машино-години. ($С_М$)

Так як одна ЕОМ обслуговує одного програміста з окладом 8000 грн., з коефіцієнтом зайнятості 0,2 то для однієї машини отримаємо:

$$С_Г = 12 \cdot М \cdot К_З = 12 \cdot 8000 \cdot 0{,}2 = 19200 \text{ грн.}$$

З урахуванням додаткової заробітної плати:

$$С_{ЗП} = С_Г \cdot (1 + К_З) = 19200 \cdot (1 + 0.2) = 23040 \text{ грн.}$$

Відрахування на соціальний внесок:

$$С_{ВІД} = С_{ЗП} \cdot 0.22 = 23040 \cdot 0{,}22 = 5069 \text{ грн.}$$

Амортизаційні відрахування розраховуємо при амортизації 25% та вартості ЕОМ – 20000 грн.

$$С_А = К_{ТМ} \cdot К_А \cdot Ц_{ПР} = 1.15 \cdot 0.25 \cdot 20000 = 5750 \text{ грн.},$$

де $К_{ТМ}$– коефіцієнт, який враховує витрати на транспортування та монтаж приладу у користувача;

$К_А$– річна норма амортизації;

$Ц_{ПР}$– договірна ціна приладу.

Витрати на ремонт та профілактику розраховуємо як:

$$С_Р = К_{ТМ} \cdot Ц_{ПР} \cdot К_Р = 1.15 \cdot 20000 \cdot 0.05 = 1150 \text{ грн.},$$

де $К_Р$– відсоток витрат на поточні ремонти.

Ефективний годинний фонд часу ПК за рік розраховуємо за формулою:

$$Т_{ЕФ} =(Д_К – Д_В – Д_С – Д_Р) \cdot t_З \cdot К_В = (365 – 104 – 12 – 16) \cdot 8 \cdot 0.9 = \\ = 1677.6 \text{ годин},$$

де $Д_К$ – календарна кількість днів у році;

$Д_В$, $Д_С$ – відповідно кількість вихідних та святкових днів;

$Д_Р$ – кількість днів планових ремонтів устаткування;

t –кількість робочих годин в день;

$К_В$– коефіцієнт використання приладу у часі протягом зміни.

Витрати на оплату електроенергії розраховуємо за формулою:

$$С_{ЕЛ} = Т_{ЕФ} \cdot N_С \cdot К_З \cdot Ц_{ЕН} =1677.6 \cdot 0,3 \cdot 0,95 \cdot 3,52 = 1682,97 \text{ грн.},$$

де $N_С$ – середньо-споживча потужність приладу;

$К_З$– коефіцієнтом зайнятості приладу;

$Ц_{ЕН}$ – тариф за 1 КВт-годин електроенергії.

Накладні витрати розраховуємо за формулою:

$$С_{Н} = Ц_{ПР} \cdot 0.67 = 20000 \cdot 0,67 = 13400 \text{ грн.}$$

Тоді, річні експлуатаційні витрати будуть:

$$С_{ЕКС} = С_{ЗП} + С_{ВІД} + С_{А} + С_{Р} + С_{ЕЛ} + С_{Н},$$

$$С_{ЕКС} = 23040 + 5069 + 5750 + 1150 + 1682,97 + 13400 = 50091,97 \text{ грн.}$$

Собівартість однієї машино-години ЕОМ дорівнюватиме:

$$С_{М\text{-}Г} = С_{ЕКС} / Т_{ЕФ} = 50091,97 / 1677.6 = 29,86 \text{ грн/год.}$$

Оскільки в даному випадку всі роботи, які пов‘язані з розробкою програмного продукту ведуться на ЕОМ, витрати на оплату машинного часу, в залежності від обраного варіанта реалізації, складає:

$$С_{М} = С_{М-Г} \cdot Т,$$

I. $С_{М} = 29,86 \cdot 1328,64 = 39672,27$ грн.

II. $С_{М} = 29,86 \cdot 1345.52 = 40177,23$ грн.

Накладні витрати складають 67% від заробітної плати:

$$С_{Н} = С_{ЗП} \cdot 0,67,$$

I. $C_H = 69860{,}25 \cdot 0{,}67 = 46805{,}37$ грн.

II. $C_H = 84896{,}93 \cdot 0{,}67 = 56880{,}94$ грн.

Отже, вартість розробки ПП за варіантами становить:

$$C_{\text{ПП}} = C_{\text{ЗП}} + C_{\text{ВІД}} + C_{\text{М}} + C_{\text{Н}},$$

I. $C_{\text{ПП}} = 69860{,}25 + 15369{,}26 + 39672{,}27 + 46805{,}37 = 171707{,}15$ грн.

II. $C_{\text{ПП}} = 84896{,}93 + 18677{,}32 + 40177{,}23 + 56880{,}94 = 200632{,}42$ грн.

4.7 Вибір кращого варіанту ПП техніко-економічного рівня

Розрахуємо коефіцієнт техніко-економічного рівня за формулою:

$$K_{\text{ТЕР}j} = K_{\text{К}j} \,/\, C_{\Phi j},$$

$$K_{\text{ТЕР}1} = 4{,}25/\ 171707{,}15 = 2{,}47 \cdot 10^{-5},$$

$$K_{\text{ТЕР}2} = 3{,}74/\ 200632{,}42 = 1{,}86 \cdot 10^{-5}.$$

Як бачимо, найбільш ефективним є перший варіант реалізації програми з коефіцієнтом техніко-економічного рівня $K_{\text{ТЕР}1} = 2{,}47 \cdot 10^{-5}$.

Після виконання функціонально-вартісного аналізу програмного комплексу що розроблюється, можна зробити висновок, що з альтернатив, що залишились після першого відбору двох варіантів виконання програмного комплексу оптимальним є перший варіант реалізації програмного продукту. У нього виявився найкращий показник техніко-економічногоs рівня якості $К_{ТЕР} = 2,47 \cdot 10^{-5}$.

Цей варіант реалізації програмного продукту має такі параметри:

– програмний продукт – база знань Wolfram|Alpha.
– Інтерфейс користувача з підтримкою перемикачів, графіків та кнопок;
– Робота з вхідними даними з підтримкою перемикачів та кнопок;

Даний варіант виконання програмного комплексу дає користувачу зручний інтерфейс, непоганий функціонал і швидкодію.

Висновки до розділу 4

Проведено повний функціонально-вартісний аналіз програмного продукту. Визначено та проведено оцінку основних функцій програмного продукту. Визначено параметри, які характеризують програмний продукт. Проведено експертне оцінювання параметрів та аналіз якості варіантів реалізації функцій.

Проведено економічний аналіз варіантів розробки – трудомісткість, витрати на заробітну плату та інші витрати.

На основі аналізу вибрано варіант реалізації програмного продукту.

ВИСНОВКИ

Теорія ігор має застосування в більшості сфер нашого життя. Тому й не дивно, що перші дослідження ігор виникли ще в працях античних філософів. Більшість задач теорії ігор мають однозначний розв'язок – стратегію – і він є широковідомим. Однак, для ознайомлення з темою корисно взяти таку задачу і спробувати дійти до її розв'язку самотужки. Однією з найдавніших відомих ігор є задача Боше, в якій два гравці по черзі витягають із купки сірників обмежену їх кількість. Хоча існує проста оптимальна стратегія для кожного з гравців, вони можуть відхилятися від неї під впливом випадкових факторів. Дослідженню ймовірності виграшу в такій модифікованій задачі присвячена ця дипломна робота.

На жаль, не всі задачі теорії ігор можна розв'язати лише її математичним апаратом. Зокрема, і в нашому випадку це було неможливо, оскільки в постановці задачі присутня випадковість. Тому для розрахунку ймовірності виграшу в цій грі ми використовували теорію ланцюгів Маркова. За умови, що за один хід гравці можуть брати не більше ніж два сірники, всі обчислення вдалося провести аналітично. Для перевірки і візуалізації результатів було освоєно та використано програму "Wolfram Alpha".

Головним досягненням дипломної роботи можна вважати коректно знайдене значення ймовірності виграшу в антагоністичній грі з повною інформацією, у якій гравці можуть відхилятись від оптимальних стратегій під впливом випадкових факторів. Для знаходження проміжних імовірностей було розроблено 2 методи: (а) за допомогою ланцюгів Маркова складена система рівнянь переходів між рівнями та (б) безпосередньо прораховані всі варіанти ходів та обчислені їх імовірності. Результати обох методів співпали між собою, що підтверджує правильність нашого розв'язку. Крім цього, було проведено порівняльний аналіз імовірності виграшу в такій антагоністичній грі в залежності від параметрів, а саме: імовірностей того, що кожен з гравців дотримується своєї оптимальної стратегії. Для ілюстрації результатів були побудовані відповідні графіки.

Задачі, пов’язані з ланцюгами Маркова, мають прикладний характер, тому нашу задачу було б корисно розвинути до більш прикладної та знайти застосування в повсякденному житті. Також цікаво дослідити нашу задачу за додаткових умов, а саме, якщо можна брати не від 1 до m сірників, а наприклад тільки: 1, 3, 7,…, m. Це значно ускладнить її і, можливо, допоможе визначити нові закономірності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ігнатенко О. Теорія ігор: що це таке, та як вона змінює повсякденне життя. *Українська правда. Життя.* 2018. 3 лют. URL: https://life.pravda.com.ua/columns/2018/02/3/228782/ (дата звернення: 05.05.2021).
2. Берж К. Общая теория игр несольких лиц / ред. В.Ф. Колчин; пер. с фр. И.В. Соловьев. Москва: Физматлит, 1961. 126 с.
3. Крушевский А.В. Теория игр. Киев: Вища школа, 1977. 216 с.
4. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики / ред. Н.С. Кукушкин; пер. с фр.: О.Р. Меньшикова, И.С. Меньшиков. Москва: Мир, 1985. 200 с.
5. Теорія ігор (матеріал з Вікіпедії – вільної енциклопедії). URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F_%D1%96%D0%B3%D0%BE%D1%80#%D0%86%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F (дата звернення: 18.04.2021).
6. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение / пер. с англ. Н.Н. Воробьев. Москва: Наука, 1970. 708 с.
7. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр: учеб. пособ. для ун-тов. Москва: Высшая школа, 1998. 304 с.
8. Duronio B. 7 Easy Ways To Use Game Theory To Make Your Life Better. *Business Insider*. 2012. April 4. URL: https://www.businessinsider.com/how-to-use-game-theory-to-your-benefit-2012-4 (Last accessed: 17.04.2021)
9. Шиян А.А. Теорія ігор: основи та застосування в економіці та менеджменті: навч. посіб. / Вінницький нац. тех. ун-т. Вінниця: ВНТУ, 2009. 164 с.
10. Печерский С.Л., Беляева А.А. Теория игр для экономистов. Вводный курс: учеб. пособ. Санкт-Петербург: Европейский ун-т, 2001. 342 с.
11. Мацагор І.Д. Методи визначення метастабільних станів у ланцюгах Маркова: дипломна робота / НТУУ «Київський політехнічний інститут», 2016. 65 с. URL:

http://mmsa.kpi.ua/sites/default/files/abstracts/2016_b_sa_matsahor_id_uk_presentation.pdf (дата звернення: 13.04.2021).

12. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова / ред. А.А. Юшкевич; пер. с англ.: С.А. Молчанов, Н.Б. Левина, Я.А. Коган. Москва: Наука, 1970. 272 с.
13. Соколов Г.А., Чистякова Н.А. Теория вероятностей. Управляемые цепи Маркова в экономике. Москва: Физматлит, 2005. 248 с.
14. Четаев А.Н. Нейронные сети и цепи Маркова. Москва: Наука, 1985. 128 с.
15. Марковский процесс (матеріал з Вікіпедії – вільної енциклопедії). URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%80%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%86%D0%B5%D1%81%D1%81 (дата звернення: 15.03.2021).
16. Ним (игра) (матеріал з Вікіпедії – вільної енциклопедії). URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B8%D0%BC_(%D0%B8%D0%B3%D1%80%D0%B0) (дата звернення: 9.03.2021).
17. Баше (игра) (матеріал з Вікіпедії – вільної енциклопедії). URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B0%D1%88%D0%B5_(%D0%B8%D0%B3%D1%80%D0%B0)#:~:text=%D0%91%D0%B0%D1%88%D0%B5%CC%81%20%E2%80%94%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F%20%D0%B8%D0%B3%D1%80%D0%B0%2C%20%D0%B2%20%D0%BA%D0%BE%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B9,%D0%B8%20%D0%BD%D0%B5%20%D0%B1%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D0%B5%20%D0%9C%20%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B2.&text=%D0%9E%D0%BF%D1%82%D0%B8%D0%BC%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%B3%D0%B8%D1%8F%20%D0%B4%D0%BB%D1%8F%20%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B2%D0%BE%D0%B3%D0%BE%20%D0%B8%D0%B3%D1%80%D0%BE%D0%BA%D0%B0,%D0%B4%D0%BE%204%20%D0%B2%20%D0%BF%D0%BE%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%B4%D1%83%D1%8E%D1%89%D0%B8

%D1%85%20%D1%85%D0%BE%D0%B4%D0%B0%D1%85 (дата звернення: 10.03.2021).

18. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения: в 2-х т. / пер. с англ. Ю.В. Прохоров. Москва: Мир, 1967. Т. 2. 752 с.
19. Чжун К.Л. Однородные цепи Маркова / ред. С.Х. Сираждинов; пер. В.Ф. Колчин. Москва: Мир, 1964. 426 с.
20. Гринь А.Г. Цепи Маркова: учеб. пособ. Омск: Омский гос. ун-т им. Ф.М. Достоевского, 2019. 42 с.
21. Романовский В.И. Дискретные цепи Маркова. Москва: Гостехиздат, 1949. 436 с.
22. Воробьев Н.Н Бесконечные антагонистические игры. Москва: Физматгиз, 1963. 504 с.
23. Гра з повною інформацією (матеріал з Вікіпедії – вільної енциклопедії). URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0_%D0%B7_%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D1%8E_%D1%96%D0%BD%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D1%86%D1%96%D1%94%D1%8E#:~:text=%D0%93%D1%80%D0%B0%20%D0%B7%20%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D1%8E%20%D1%96%D0%BD%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D1%86%D1%96%D1%94%D1%8E%20(%D0%B0%D0%BD%D0%B3%D0%BB,%D0%B4%D0%BB%D1%8F%20%D1%81%D1%83%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D1%96%D0%B2%20%D0%B2%D1%96%D0%B4%D1%81%D1%83%D1%82%D0%BD%D1%96%D0%B9%20%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%20%D0%BD%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%96 (Last accessed: 17.03.2021)

Додаток А Лістинг програмного модулю

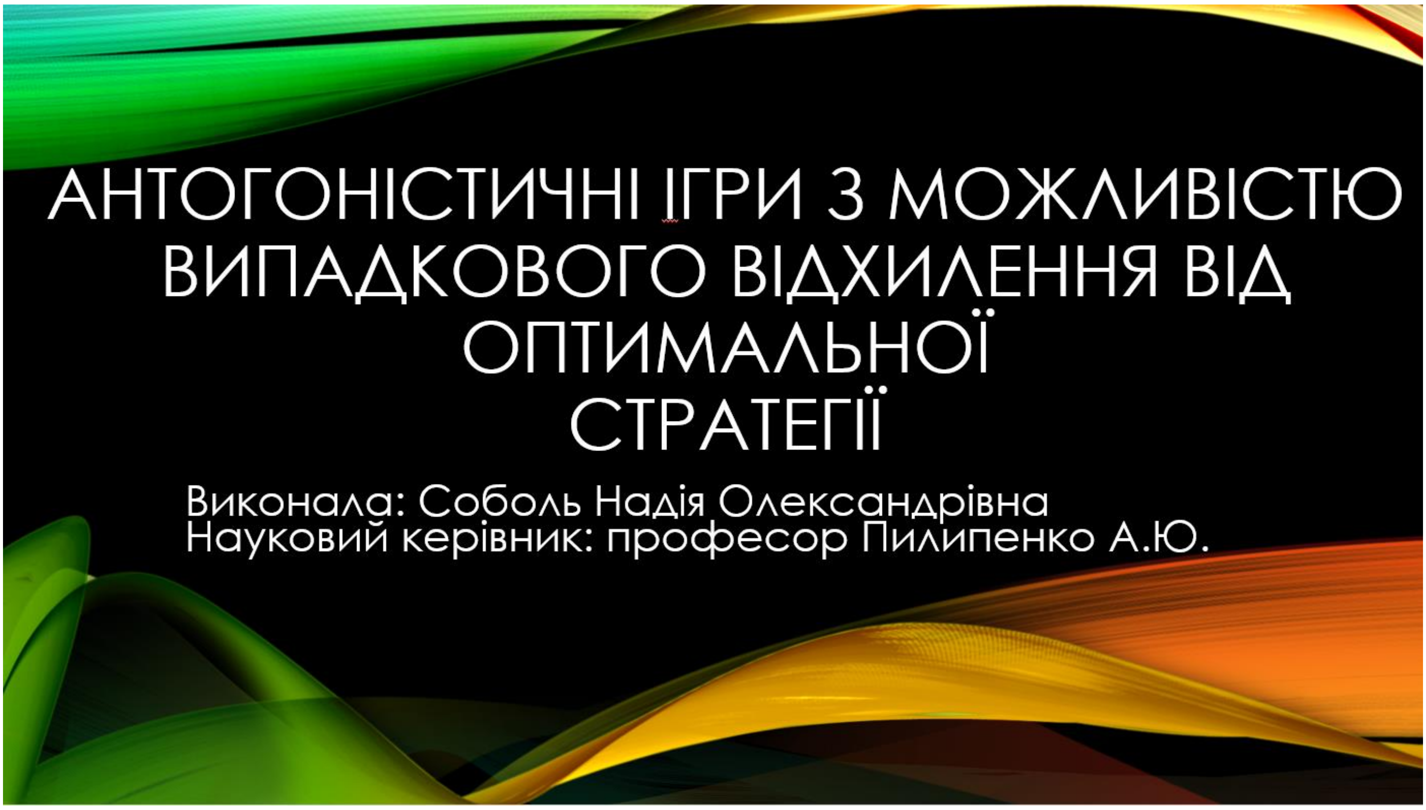
```
qI = 1 - pI;
qP = 1 - pP;
r2I = 1 - r1I;
r2P = 1 - r1P;

vars = {x0, x1, x2, x3, x4, x5, y0, y1, y2, y3, y4, y5};

system0 = {x0 == r1I y1 + r2I y2, x1 == qI y2 + pI y3,
  x2 == pI y3 + qI y4, x3 == r1I y4 + r2I y5, x4 == qI y5, x5 == 0,
  y0 == r1P x1 + r2P x2, y1 == qP x2 + pP x3, y2 == pP x3 + qP x4,
  y3 == r1P x4 + r2P x5, y4 == qP x5 + pP, y5 == pP};

system1 = {x0 == r1I y1 + r2I y2, x1 == qI y2 + pI y3,
  x2 == pI y3 + qI y4, x3 == r1I y4 + r2I y5, x4 == qI y5 + pI r1P,
  x5 == pI r1P, y0 == r1P x1 + r2P x2, y1 == qP x2 + pP x3,
  y2 == pP x3 + qP x4, y3 == r1P x4 + r2P x5, y4 == qP x5, y5 == qP};

system2 = {x0 == r1I y1 + r2I y2, x1 == qI y2 + pI y3,
  x2 == pI y3 + qI y4, x3 == r1I y4 + r2I y5, x4 == qI y5 + pI r2P,
  x5 == pI r2P + qI qP, y0 == r1P x1 + r2P x2, y1 == qP x2 + pP x3,
  y2 == pP x3 + qP x4, y3 == r1P x4 + r2P x5, y4 == qP x5, y5 == 0};

system3 = {x0 == r1I y1 + r2I y2, x1 == qI y2 + pI y3,
  x2 == pI y3 + qI y4, x3 == r1I y4 + r2I y5, x4 == qI y5,
  x5 == qI pP, y0 == r1P x1 + r2P x2, y1 == qP x2 + pP x3,
  y2 == pP x3 + qP x4, y3 == r1P x4 + r2P x5, y4 == qP x5, y5 == 0};

system4 = {x0 == r1I y1 + r2I y2, x1 == qI y2 + pI y3,
```

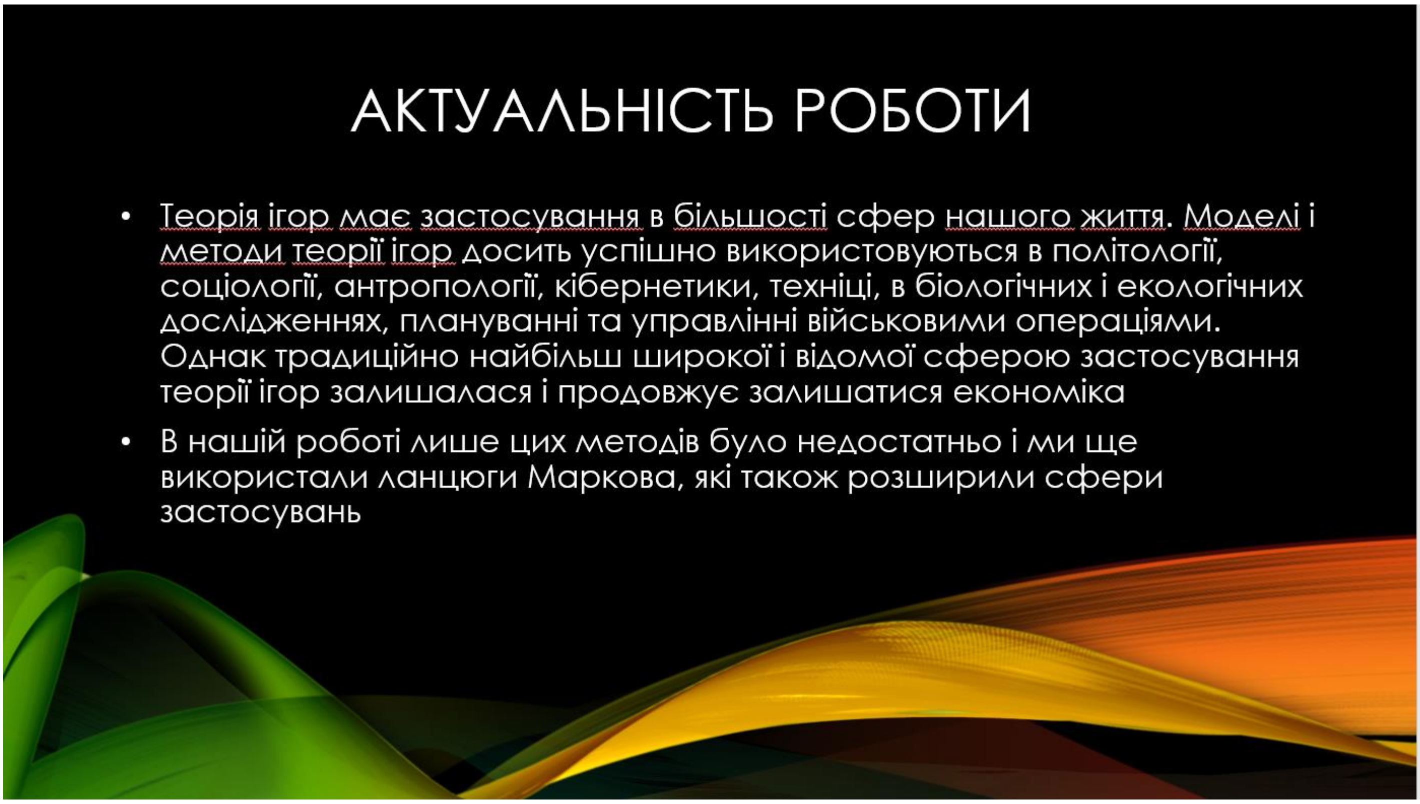
```
  x2 == pI y3 + qI y4, x3 == r1I y4 + r2I y5, x4 == qI y5, x5 == 0,
  y0 == r1P x1 + r2I x2, y1 == qP x2 + pP x3, y2 == pP x3 + qP x4,
  y3 == r1P x4 + r2P x5, y4 == 0, y5 == 0};

sol0=Solve[system0, vars]//FullSimplify;
sol1=Solve[system1, vars]//FullSimplify;
sol2=Solve[system2, vars]//FullSimplify;
sol3=Solve[system3, vars]//FullSimplify;
sol4=Solve[system4, vars]//FullSimplify;
```

```
P = {{Tr[x0 /. sol0], Tr[x0 /. sol1], Tr[x0 /. sol2], Tr[x0 /. sol3],
     1}, {Tr[x1 /. sol0], Tr[x1 /. sol1], Tr[x1 /. sol2],
     Tr[x1 /. sol3], 1}, {Tr[x2 /. sol0], Tr[x2 /. sol1],
     Tr[x2 /. sol2], Tr[x2 /. sol3], 1}, {Tr[x3 /. sol0],
     Tr[x3 /. sol1], Tr[x3 /. sol2], Tr[x3 /. sol3], 1}} //
   FullSimplify;

solPi = Solve[{pi0, pi1, pi2, pi3}.P == {pi0, pi1, pi2, pi3, 1}, {pi0,
    pi1, pi2, pi3}] // FullSimplify;

vars2 = {x1, x2, x3, x4, x5, x6, y1, y2, y3, y4, y5, y6};
systemLast = {x6 == r1I y5 + r2I y4, x5 == qI y4 + pI y3,
  x4 == pI y3 + qI y2, x3 == r1I y2 + r2I y1, x2 == pI + qI y1,
  x1 == 1, y6 == r1P x5 + r2P x4, y5 == qP x4 + pP x3,
  y4 == pP x3 + qP x2, y3 == r1P x2 + r2P x1, y2 == qP x1, y1 == 0};
```

```
solLast=Solve[systemLast, vars2]//FullSimplify;

prob = Tr[(pi0 /. solPi)*(x6 /. solLast) + (pi1 /. solPi)*(x5 /.
    solLast) + (pi2 /. solPi)*(x4 /. solLast) + (pi3 /. solPi)*(x3 /.
    solLast)] // FullSimplify

(* Output:
((-1+pP) (pP r1I+pI (1+pP-2 pP r1I-r1P)+pI^2 (pP (-1+r1I)+r1P)))/(-pP+pI (-1+pP
(r1I+r1P+pI (-1+pP) (-2+r1I+r1P)-pP (-2+r1I+r1P))))
*)

Prob[pI_, pP_, r1I_, r1P_] :=((-1+pP) (pP r1I+pI (1+pP-2 pP r1I-r1P)+pI^2 (pP (-
1+r1I)+r1P)))/(-pP+pI (-1+pP (r1I+r1P+pI (-1+pP) (-2+r1I+r1P)-pP (-2+r1I+r1P))));
```

Додаток Б Презентація





МЕТА, ОБ’ЄКТ ТА ПРЕДМЕТ РОБОТИ

- Мета роботи – знайти ймовірність виграшу в антагоністичній грі з повною інформацією, у якій гравці можуть відхилятись від оптимальних стратегій під впливом випадкових факторів.
- Об’єкт дослідження – антагоністичні ігри з повною інформацією.
- Предметом дослідження є антагоністична гра з повною інформацією, у якій гравці можуть відхилятись від оптимальних стратегій під впливом випадкових факторів.

ЗАДАЧА БОШЕ

Іван та Петро грають в таку гру. Перед ними на столі лежить n сірників. Можна брати $1,2,3,\ldots,m$ сірників. Сірники вони беруть по черзі. Іван буде витягати першим, тобто його хід перший, потім Петро робить другий хід, Іван третій і т.д. Виграє той, хто:

a) бере останній сірник;

b) не бере останній сірник.

ОПТИМАЛЬНІ СТРАТЕГІЇ

Можливі такі 2 варіанти при правильній грі обох наших гравців:

1) якщо кількість сірників n кратна $m+1$. Оптимальна стратегія Петра: коли Іван робить свій хід: бере k сірників, Петро візьме $m-(k-1)$, в сумі за 2 ходи $m+1$.
2) якщо кількість сірників n не кратна $m+1$. Оптимальна стратегія Івана: він ходить так, щоб після нього на столі залишилось число кратне $m+1$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо попередню задачу в припущенні, що обидва гравці можуть відхилятись від оптимальних стратегій під впливом непередбачуваних, випадкових факторів.

Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} P(\text{Іван виграє} \mid \text{спочатку } n \text{ сірників})$

ЗАВДАННЯ

- Проаналізувати існуючі літературні джерела для кращого заглиблення в обрану тему
- Дослідити математичні методи, що найкраще підходять для нашої задачі
- Коректно знайти значення ймовірності виграшу в антагоністичній грі з повною інформацією, у якій гравці можуть відхилятись від оптимальних стратегій під впливом випадкових факторів
- Провести порівняльний аналіз імовірності виграшу в нашій антагоністичній грі в залежності від параметрів, а саме: імовірностей того, що кожен з гравців дотримується своєї оптимальної стратегії. Для ілюстрації результатів побудувати відповідні графіки.

ПОЗНАЧЕННЯ

p_j^{I}– ймовірність того, що Іван походив правильно, взявши зі столу правильну кількість сірників - j;

p_j^{II}– ймовірність того, що Петро походив правильно, взявши зі столу правильну кількість сірників - j;

$q_{i,j}^{\mathrm{I}}$ – ймовірність того, що Іван походив неправильно, взявши зі столу кількість сірників – j, якщо його правильний хід був i;

$q_{i,j}^{\mathrm{II}}$– ймовірність того, що Петро походив неправильно, взявши зі столу кількість сірників – j, якщо його правильний хід був i;

r_j^{I} – ймовірність того, що Івану байдуже як ходити і він бере зі столу j сірників;

r_j^{II} – ймовірність того, що Петру байдуже як ходити і він бере зі столу j сірників;

РОЗВ’ЯЗОК ЗАДАЧІ

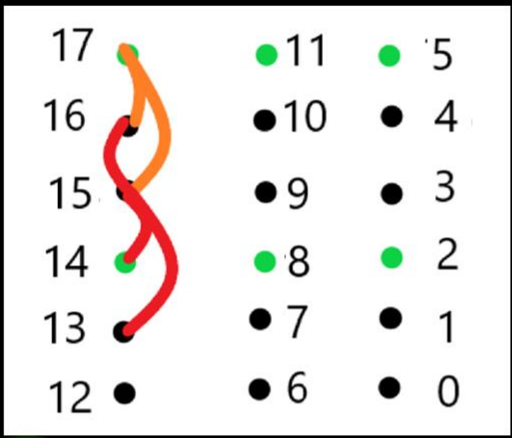


Рис. при m =2

Давайте розіб’ємо наші ходи на певні блоки. В кожному буде знаходитись по 2(m+1) точка. Останньою буде точка під таким номером як кількість сірників, в яку треба, потрапити Івану, щоб виграти цю гру. Ці блоки ми назвемо рівнями і нас цікавить перехід Івана між цими рівнями, тобто будемо розглядати моменти старту Івана на кожному рівні. І можемо помітити, що це ланцюг Маркова.

Порівняльний аналіз

$m=2$, наші ймовірності $p^{\Pi}, p^{\mathrm{I}}, r_1^{I}, r_2^{I}, r_1^{\Pi}, r_2^{\Pi}$ поки що не будуть мати чисельне значення.

Кінцева формула шуканої границі:

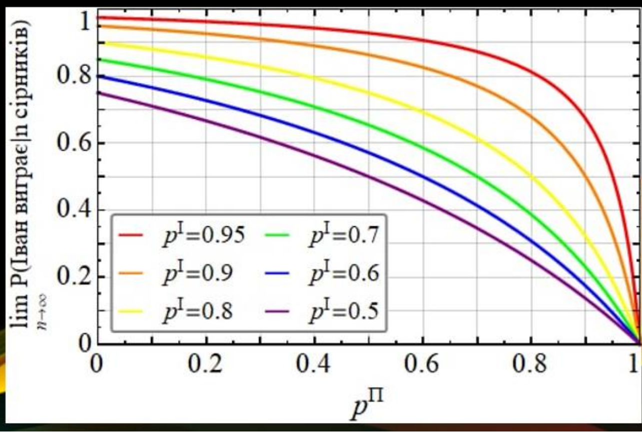
$$\lim_{n\to\infty} P(\text{Іван виграє} \mid \text{спочатку } n \text{ сірників}) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{(p^{\mathrm{I}} - p^{\Pi}) + p^{\Pi}(1-p^{\Pi})(1-p^{\mathrm{I}})(2-p^{\mathrm{I}})r_1^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}}(1-p^{\mathrm{I}})(1-p^{\Pi})(2-p^{\Pi})r_1^{\Pi}}{2\left[p^{\mathrm{I}} + p^{\Pi} - p^{\mathrm{I}}p^{\Pi}(r_1^{\mathrm{I}} + r_1^{\Pi}) - p^{\mathrm{I}}p^{\Pi}(p^{\mathrm{I}} + p^{\Pi} - p^{\mathrm{I}}p^{\Pi})(2 - r_1^{\mathrm{I}} - r_1^{\Pi})\right]}$$

Порівняльний аналіз

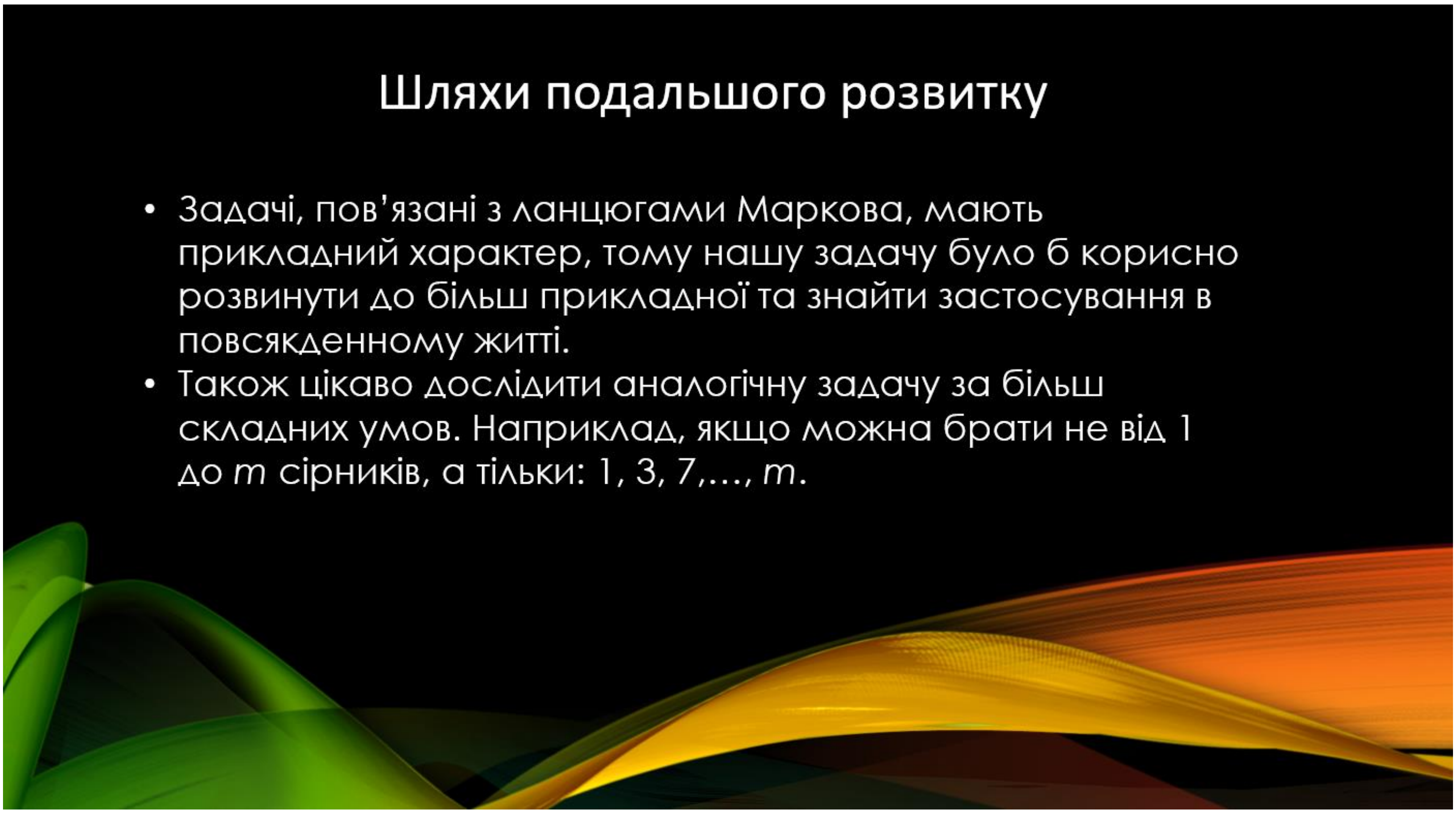
Бачимо, що якщо гравці перебувають в однакових умовах, тобто $p^{\Pi} = p^{\mathrm{I}}$, то імовірність виграшу кожного з них дорівнює ½. Якщо Петро зовсім не робить помилок, то у Івана майже завжди імовірність виграти – 0 (окрім випадку, коли він теж ніколи не помиляється). Також бачимо, що імовірність монотонно спадає при зростанні p^{Π} і монотонно зростає при зростанні p^{I}.

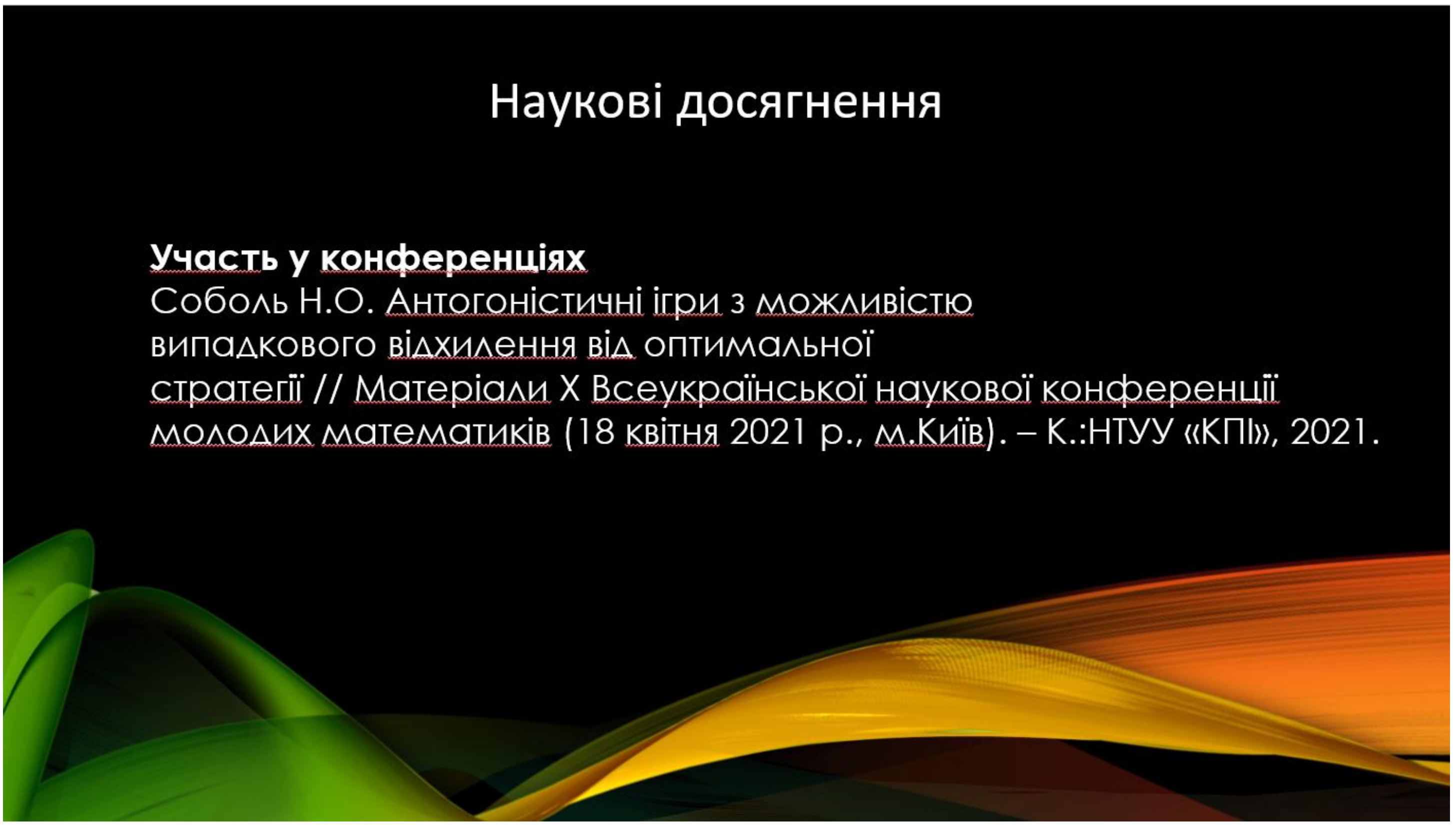
Якщо ймовірність того, що Петро слідує своїй виграшній стратегії, дорівнює 0, то ймовірність виграшу Івана $\left(1 + p^{\mathrm{I}}\right)/2$ все одно менша за 1, тому що Іван може помилитись на якомусь із попередніх кроків і Петро ненароком виграє.

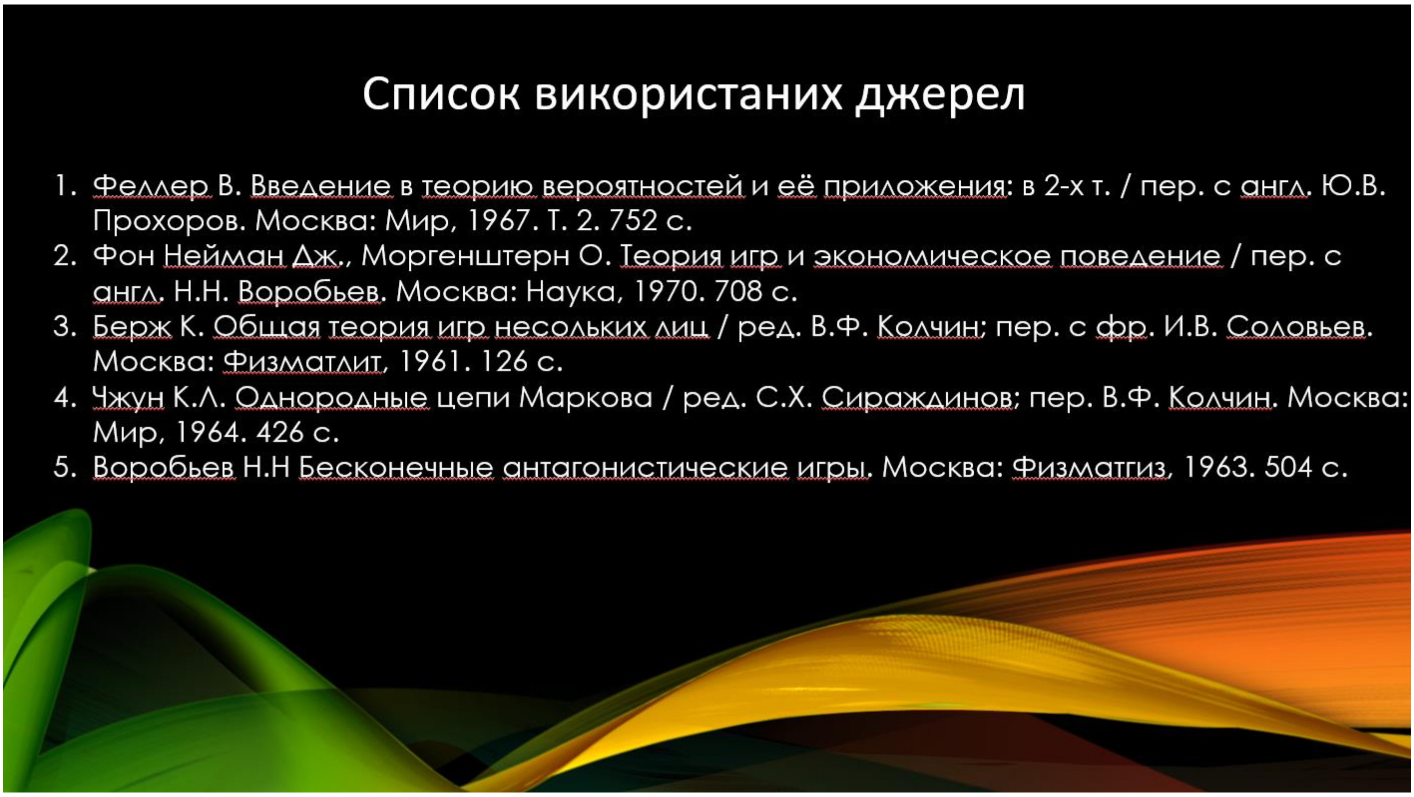


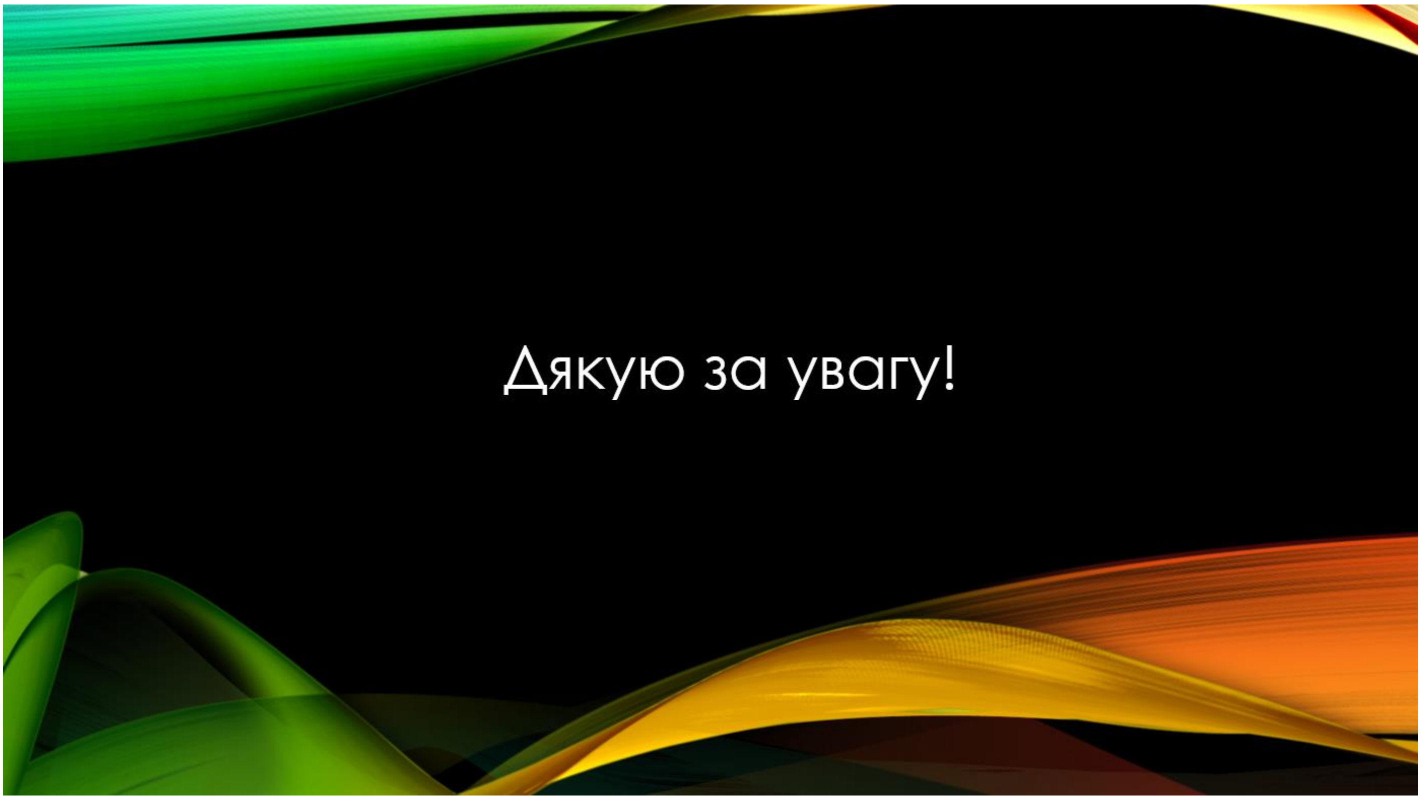
Висновки

- На основі задачі Боше було сформульовано нову: тепер на гравців можуть діяти випадкові зовнішні чинники, які будуть призводити до помилок у діях гравців і відхилення їх від оптимальної стратегії гри.
- Для розв'язання цієї задачі і знаходження імовірності виграшу одного з гравців було використано теорію ланцюгів Маркова.
- Для частинного випадку $m = 2$ було розраховано ймовірність виграшу одного з гравців у границі, коли початкове значення ігрових елементів (сірників) прямує до нескінченності. Всі обчислення проведені в аналітичному вигляді для довільних значень параметрів гри.
- Насамкінець, було проведено чисельний порівняльний аналіз, в якому пораховано і графічно представлено ймовірність виграшу Івана для різних значень імовірностей того, що гравці дотримуються своїх оптимальних стратегій.


Шляхи подальшого розвитку
• Задачі, пов’язані з ланцюгами Маркова, мають прикладний характер, тому нашу задачу було б корисно розвинути до більш прикладної та знайти застосування в повсякденному житті.
• Також цікаво дослідити аналогічну задачу за більш складних умов. Наприклад, якщо можна брати не від 1 до m сірників, а тільки: 1, 3, 7,…, m.


Наукові досягнення
Участь у конференціях
Соболь Н.О. Антогоністичні ігри з можливістю випадкового відхилення від оптимальної стратегії // Матеріали X Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків (18 квітня 2021 р., м.Київ). – К.:НТУУ «КПІ», 2021.


Список використаних джерел
1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения: в 2-х т. / пер. с англ. Ю.В. Прохоров. Москва: Мир, 1967. Т. 2. 752 с.
2. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение / пер. с англ. Н.Н. Воробьев. Москва: Наука, 1970. 708 с.
3. Берж К. Общая теория игр несольких лиц / ред. В.Ф. Колчин; пер. с фр. И.В. Соловьев. Москва: Физматлит, 1961. 126 с.
4. Чжун К.Л. Однородные цепи Маркова / ред. С.Х. Сираждинов; пер. В.Ф. Колчин. Москва: Мир, 1964. 426 с.
5. Воробьев Н.Н Бесконечные антагонистические игры. Москва: Физматгиз, 1963. 504 с.


Дякую за увагу!