

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ ФІЗИКИ

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

Г. Є. Монастирський

(підпис)

(ініціали, прізвище)

Дипломна робота
на здобуття ступеня бакалавра

зі спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»

(код і назва)

на тему: Локалізовані стани Бозе-Ейнштейнівського конденсату в оптичних ґратках

Виконала: студентка 4 курсу, групи ФФ-11

Лаун Вікторія Олександрівна

(прізвище, ім'я, по батькові)

(підпис)

Науковий керівник ст. викл. каф. ПФ, к.ф.-м.н., Катасонов А.А.

(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

(підпис)

Консультант 1,2,3 Пров. н.с., д.ф.-м.н., с.н.с. Герасимчук І.В.

(номер розділу)

(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

(підпис)

Консультант

(номер розділу)

(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

(підпис)

Рецензент Зав.лаб. ІМаг НАНУ, к.ф.-м.н., ст.д. Дереча Д.О.

(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

(підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент

(підпис)

Національний Технічний Університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Навчально-науковий Фізико-технічний інститут
Кафедра прикладної фізики

Рівень вищої освіти — перший (бакалаврський)
Спеціальність 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»

«ЗАТВЕРДЖЕНО»

Завідувач кафедри

Монастирський Г. Є.

(підпис)

(ініціали, прізвище)

« ____ » _____ 2025 р.

ЗАВДАННЯ
на бакалаврську роботу студенту

Лаун Вікторії Олександрівни

(прізвище, ім'я, по батькові)

(підпис)

1. Тема роботи: Локалізовані стани Бозе-Ейнштейнівського конденсату в оптичних ґратках,
науковий керівник роботи _____ ст.викл.каф.ПФ, к.ф.-м.н., Катасонов А.А. _____,
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)
затверджені наказом по університету від « 26 » травня 2025 р № 1761-с
2. Термін подання студентом роботи « 18 » червня 2025 р.
3. Об'єкт дослідження: Бозе-Ейнштейнівський конденсат у зовнішньому періодичному потенціалі.
4. Предмет дослідження: Локалізовані стаціонарні розв'язки рівняння Гросса-Пітаєвського в системі з двома потенціальними пастками, а також їхні просторові властивості та умови існування в залежності від параметрів системи.
5. Перелік завдань, які потрібно розробити: проаналізувати властивості Бозе-Ейнштейнівського конденсату та особливості його поведінки в оптичних ґратках; побудувати математичну модель для опису БЕК на основі рівняння Гросса-Пітаєвського; знайти аналітичні розв'язки для хвильової функції в різних областях системи (лінійних та нелінійних); узгодити розв'язки на межах за допомогою умов неперервності функції та її похідної; дослідити вплив параметрів потенціалу на властивості локалізованих станів; провести аналіз отриманих рішень; оцінити можливість застосування результатів для подальших чисельних або експериментальних досліджень.
6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу: презентація — 16 аркушів А4.

7 Орієнтовний перелік публікацій: XXIII Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених

8 Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
1	Пров.н.с., д.ф.-м.н., с.н.с. Герасимчук І.В.	17.04.2025	18.06.2025
2	Пров.н.с., д.ф.-м.н., с.н.с. Герасимчук І.В.	17.04.2025	18.06.2025
3	Пров.н.с., д.ф.-м.н., с.н.с. Герасимчук І.В.	17.04.2025	18.06.2025

9 Дата видачі завдання

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання бакалаврської роботи	Термін виконання етапів проекту	Примітка
1.	Опрацювання літератури за темою	27.10.2024 — 05.01.2025	виконано
3.	Написання літературного огляду	16.12.2024 — 03.01.2025	виконано
4.	Написання другої частини дипломної роботи	10.03.2025 — 30.03.2025	виконано
5.	Написання третьої частини дипломної роботи	19.05.2025 — 12.06.2025	виконано
6.	Підготовка тез	01.05.2023 — 9.05.2023	виконано
7.	Виступ на конференції	15.05.2025	виконано
8.	Написання висновків	14.06.2023 — 15.06.2025	виконано
9.	Підготовка доповіді та презентації	10.06.2025 — 17.06.2025	виконано
10.	Подання роботи на рецензування	15.06.2025	виконано
11.	Подання роботи до захисту	18.06.2025	виконано

Студент

(підпис)

Науковий керівник роботи

(підпис)

В. О. Лаун

(ініціали, прізвище)

А. А. Катасонов

(ініціали, прізвище)

РЕФЕРАТ

У бакалаврській роботі розглянуто теоретичне моделювання локалізованих станів Бозе–Ейнштейнівського конденсату (БЕК) в оптичних ґратках. Реалізація БЕК відкрила можливість вивчати новий агрегатний стан речовини, в якому квантові ефекти проявляються на макроскопічному рівні. Одним із ключових напрямів сучасної фізики є створення керованих конфігурацій БЕК у зовнішніх потенціалах — зокрема в оптичних ґратках, які забезпечують високу точність контролю над параметрами системи. Це вимагає глибокого теоретичного аналізу, здатного інтерпретувати експериментальні результати та передбачати нові ефекти.

У роботі досліджено просторово локалізовані стани БЕК у моделі з двома ідентичними пастками, що моделюють обмежену область оптичної ґратки. В якості основного рівняння розглянуто рівняння Гросса–Пітаєвського, яке описує динаміку конденсату з урахуванням міжчастинкової взаємодії. Аналітичні розв’язки побудовано окремо для кожної області потенціалу, з подальшою зшивкою на межах за умов неперервності функції та її похідної. Для нелінійних ділянок використано еліптичні функції Якобі.

У результаті дослідження отримано конкретні умови існування локалізованих розв’язків, описано їхню симетрію, а також проведено якісний аналіз їх стійкості. Отримані результати можуть бути використані для чисельного моделювання динаміки БЕК, аналізу когерентних квантових явищ та інтерпретації експериментів у системах з оптичними ґратками.

Ключові слова: *Бозе-Ейнштейнівський конденсат, статистика Бозе-Ейнштейна, рівняння Гросса-Пітаєвського, нелінійне рівняння Шрьодінгера, еліптичні інтеграли, еліптичні функції Якобі, оптична ґратка, потенціальна яма.*

SUMMARY

The theoretical modeling of localized states of Bose-Einstein condensate (BEC) in optical lattices is considered in the bachelor's thesis. The realization of BEC opened up the possibility to study a new aggregate state of matter in which quantum effects are manifested at the macroscopic level. One of the key areas of modern physics is the creation of controlled BEC configurations in external potentials, in particular in optical lattices, which provide high precision control over system parameters. This requires a deep theoretical analysis capable of interpreting experimental results and predicting new effects.

In this bachelor's thesis, we study the spatially localized states of the BEC in a model with two identical traps that simulate a limited region of an optical lattice. The Gross-Pitaevsky equation, which describes the condensate dynamics with account of the inter-particle interaction, is considered as the basic equation. The analytical solutions are constructed separately for each potential region, followed by cross-linking at the boundaries under the conditions of continuity of the function and its derivative. For nonlinear regions, elliptic Jacobi functions are used.

As a result of the study, specific conditions for the existence of localized solutions are obtained, their symmetry is described, and a qualitative analysis of their stability is carried out. The obtained results can be used for numerical modeling of the BEC dynamics, analysis of coherent quantum phenomena, and interpretation of experiments in systems with optical lattices.

Keywords: *Bose-Einstein condensate, Bose-Einstein statistics, Gross-Pitaevsky equation, nonlinear Schrödinger equation, elliptic integrals, elliptic Jacobi functions, optical lattice, potential well.*

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.	4
ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1. Конденсат Бозе-Ейнштейна як квантове явище	7
1.1. Виникнення квантової теорії та формування Стандартної моделі	7
1.1.1. Передумови та становлення квантової механіки як фунда- ментальної теорії	7
1.1.2. Стандартна модель фізики елементарних частинок	8
1.2. Статистика Бозе—Ейнштейна та відкриття Бозе—Ейнштейнів- ського конденсату	9
1.3. Бозе Ейнштейнівський конденсат і його властивості.	11
1.4. Рівняння Гросса—Пітаєвського як основне рівняння для опису БЕК	13
1.5. Оптичні ґратки	15
РОЗДІЛ 2. Рівняння Гросса-Пітаєвського та еліптичні функції Якобі . . .	17
2.1. Постановка задачі	17
2.2. Еліптичні інтеграли та еліптичні функції Якобі.	19
РОЗДІЛ 3. Розв’язки рівняння Гросса-Пітаєвського в системі з двома потенціальними ямами	23
3.1. Лінійне середовище в потенціальних ямах і лінійне оточуюче середовище	23
3.2. Нелінійне середовище в потенціальних ямах і лінійне оточуюче середовище	34
3.3. Лінійне середовище в потенціальних ямах і нелінійне оточуюче середовище.	41
ВИСНОВКИ.	50
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ	51

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

БЕК — Бозе-Ейнштейнівський конденсат

РГП — рівняння Гросса-Пітаєвського

НРШ — нелінійне рівняння Шрьодінгера

ВСТУП

XX століття стало періодом великих відкриттів у фізиці. Одним із найважливіших досягнень стало відкриття та дослідження Бозе–Ейнштейнівського конденсату (БЕК) — п'ятого стану речовини, в якому квантові властивості частинок проявляються на макроскопічному рівні. Це дозволяє вивчати ефекти квантової механіки не лише на рівні окремих атомів, а й у великих системах. Вивчення БЕК та його властивостей важливо як для розуміння фундаментальних законів природи, так і для створення нових технологій — наприклад, у сфері квантових комп'ютерів або сенсорів.

Окрема увага приділяється ситуаціям, коли БЕК поміщають у періодичний потенціал — наприклад, в оптичну ґратку, яка створюється перехрещенням лазерних променів. У таких умовах конденсат може поводитися дуже незвично: формувати згустки (солітони), вихори, квантові переходи між станами та інші цікаві структури. Це робить подібні системи зручними для моделювання фізичних процесів, які складно спостерігати напряму в природі.

Для опису таких явищ використовується рівняння Гросса–Пітаєвського — спеціальна математична модель, що враховує взаємодію частинок між собою та зовнішнє поле. Це рівняння дозволяє будувати точні аналітичні розв'язки, які описують, як виглядає хвильова функція конденсату у просторі та як вона змінюється з часом.

Метою цієї роботи є дослідження локалізованих станів БЕК у системі з двома потенціальними ямами, які можуть мати різні властивості — лінійні або нелінійні. Така модель дає змогу дослідити, за яких умов виникають стійкі стаціонарні стани, та як саме вони можуть бути описані за допомогою спеціальних математичних функцій.

Результати цього дослідження можуть стати основою для подальших теоретичних або експериментальних робіт у галузі квантової фізики, а також бути

корисними для розвитку методів моделювання багаточастинкових квантових систем[1—3].

РОЗДІЛ 1.

КОНДЕНСАТ БОЗЕ-ЕЙНШТЕЙНА ЯК КВАНТОВЕ ЯВИЩЕ

1.1. Виникнення квантової теорії та формування Стандартної моделі

1.1.1. Передумови та становлення квантової механіки як фундаментальної теорії

Класична механіка Ньютона та рівняння електродинаміки Максвелла протягом тривалого часу успішно застосовувалися для опису фізичних процесів. Однак згодом стали очевидними певні невідповідності та явища, які неможливо було пояснити в межах класичної фізики.

Зародження квантової теорії розпочалося у 1900 році з роботи Макса Планка, присвяченої вивченню спектру випромінювання абсолютно чорного тіла. Класична теорія передбачала нескінченне зростання енергії випромінювання за високих частот (так звану «ультрафіолетову катастрофу»), що суперечило експериментальним результатам. Планк припустив, що енергія електромагнітного випромінювання випромінюється та поглинається дискретними порціями — квантами, тим самим відмовившись від класичного принципу рівнорозподілу енергії. Таким чином, світло почало розглядатися одночасно як хвиля і як частинка(корпускула).

Робота Планка започаткувала входження квантових ідей у фундаментальну фізику. У 1905 році Ейнштейн пояснив явище фотоелектричного ефекту, припускаючи, що світло складається з фотонів — частинок, енергія яких пропорційна частоті ν електромагнітного випромінювання, згідно з співвідношенням $E = h\nu$, де h — стала Планка.

Подальший розвиток теорії був стрімким. У 1911 Ернест Резерфорд запропонував планетарну модель атома, в якій електрони обертаються навколо позитивно зарядженого ядра. Через два роки Нільс Бор удосконалив цю модель, увівши поняття квантованих орбіт, по яких електрони можуть рухатися без випромінювання енергії. Наступним етапом став розвиток матричної механіки Гейзенберга, Борна і Джордана, а згодом — хвильової механіки, започаткованої де Бройлем і формалізованої Шредінгером. Формування квантової теорії завершилося введенням принципу заборони Паулі, принципу невизначеності Гейзенберга, а також створенням квантових моделей твердого тіла, зокрема моделі Друде–Зоммерфельда.

Ці фундаментальні відкриття заклали основи сучасної квантової теорії[4].

1.1.2. Стандартна модель фізики елементарних частинок

Одночасно з формуванням квантової теорії вчені прагнули глибше дослідити будову атома. Експерименти Ернеста Резерфорда стали відправною точкою для низки фундаментальних відкриттів — від з'ясування структури атомного ядра до виявлення численних елементарних частинок, що беруть участь у побудові матерії та визначають характер її взаємодій.

Стандартна модель фізики елементарних частинок – це теоретична модель, яка використовується для передбачення поведінки та взаємодії між частинками. Розроблена на початку 1970-х років, вона успішно узгоджується з більшістю експериментальних результатів і забезпечує точні передбачення широкого спектра фізичних явищ. Завдяки численным експериментальним перевіркам Стандартна модель набула статусу однієї з найбільш надійних і підтверджених теорій сучасної фізики [5].

Кожна елементарна частинка має власний кутовий момент — спин, який характеризується відповідним квантовим числом. Спин, хоч і асоціюється з

внутрішнім кутовим моментом частинки, водночас є проявом її квантово-механічної симетрії[6].

Усі елементарні частинки поділяються на дві основні групи: ферміони та бозони. Ферміони – це частинки з напівцілим значенням спіну. Вони є ”будівельними блоками” матерії й підкоряються статистиці Фермі-Дірака та принципу заборони Паулі, згідно з яким жодні дві однакові частинки не можуть перебувати в одному й тому ж квантовому стані[6]. Ферміони, у свою чергу, поділяються на кварки(up, down, charm, strange, top, bottom) та лептони(electron, electron neutrino, muon, muon neutrino, tau, tau neutrino).

Бозони – це частинки з цілим значенням спіну, що є носіями взаємодій між ферміонами. Вони підкоряються статистиці Бозе-Ейнштейна й не підпорядковуються принципу заборони Паулі. З огляду на те, що бозони є носіями взаємодії, розглянемо чотири фундаментальні сили: сильну, слабку, електромагнітну та гравітаційну. Кожна фундаментальна сила має свій відповідний бозон. Сильна сила має дуже короткий радіус дії та ефективна на рівні субатомних частинок, фактично утримує кварки у складі адронів та переноситься глюонами. Електромагнітна сила має нескінченний радіус дії та діє між електрично зарядженими частинками(переноситься фотонами). Слабка сила має короткий радіус дії та присутня на рівні субатомних частинок, зумовлює бета-розпад і діє за допомогою W- та Z- бозонів. Гравітація є найслабшою, але має нескінченний радіус дії, теоретично має передаватися гравітоном, але його існування залишається непідтвердженим[5].

1.2. Статистика Бозе—Ейнштейна та відкриття Бозе—Ейнштейнівського конденсату

Шат'єндранат Бозе був талановитим індійським фізиком із винятковими здібностями до мов. Ще студентом він перекладав ключові наукові праці з фі-

зики для місцевих видань. У 1924 році Бозе надіслав до британського журналу *Philosophical Magazine* статтю, в якій запропонував альтернативний висновок для закону випромінювання Планка, використовуючи суто статистичний підхід до квантів випромінювання, проте редакція відхилила рукопис. Після цього він звернувся безпосередньо до Альберта Ейнштейна з проханням допомогти йому опублікувати статтю. Вражений рівнем роботи, Ейнштейн переклав її німецькою мовою та посприяв публікації у журналі *Zeitschrift für Physik*[7—9].

Зацікавившись результатами, Ейнштейн провів подальші дослідження та запропонував узагальнення ідей Бозе на систему частинок із незмінною кількістю, які мають цілочисельний спін (тобто бозонів). Він показав, що навіть повністю невзаємодіючі бозони можуть виявляти колективну поведінку за наднизьких температур. Це була суттєва відмінність: Бозе розглядав фотони — частинки, які можуть зникати при зменшенні енергії, тоді як Ейнштейн поширив статистичний підхід на частинки, кількість яких є сталою. Він теоретично передбачив явище, при якому значна кількість частинок, за достатньо низької температури, накопичується (конденсується) в основному (найнижчому) енергетичному стані, оскільки число доступних високих енергетичних рівнів різко зменшується. Так було сформульовано новий тип статистичного розподілу, що згодом отримав назву статистика Бозе—Ейнштейна, а частинки, що їй підпорядковуються, стали називатися бозонами [8; 9]

Вперше Бозе—Ейнштейнівський конденсат(БЕК) вдалося експериментально реалізувати лише у 1995 році. Дослідницька група під керівництвом Еріка А. Корнелла та Карла Е. Вімана з JILA (США) охолодила газ атомів рубідію до температури близько 20 нанокельвінів. У результаті приблизно 2000 атомів, що залишилися в зразку, утворили єдиний квантовий стан — конденсат Бозе—Ейнштейна, який іноді називають «суператомом». Незалежно від них, Вольфганг Кеттерле з Массачусетського технологічного інституту здійснив аналогічні експерименти з атомами натрію. Завдяки лазерному охолодженню та утриманню атомів у пастці, йому вдалося створити конденсат з більшою

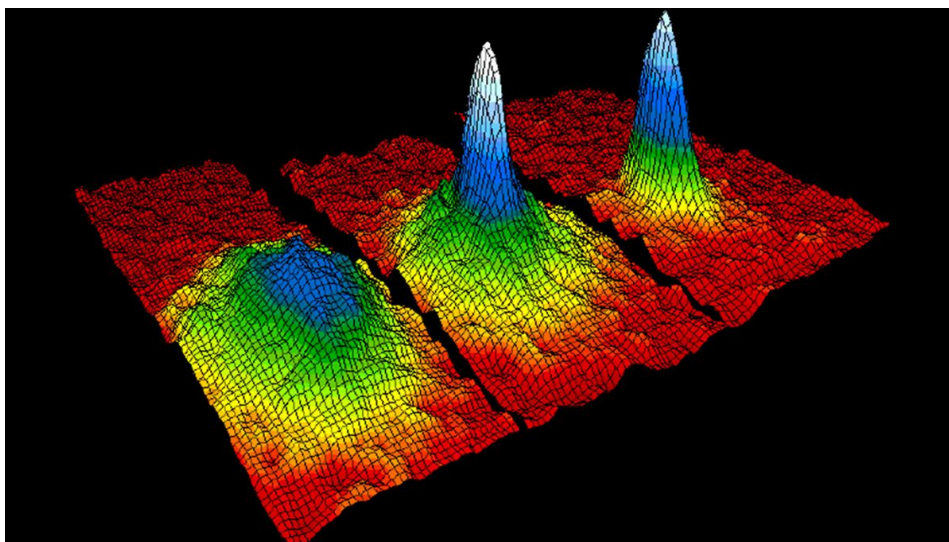


Рис. 1.1. Послідовне виникнення конденсації Бозе — Ейнштейна в рубідії. Зліва направо показано розподіл атомів у хмарі: перед початком конденсації, на її початковій стадії та після повної конденсації. Високі піки відповідають більшій концентрації атомів. Силуети хмари були зареєстровані через 6 мс після вимкнення пастки[7].

кількістю частинок, що дозволило детальніше дослідити властивості БЕК. За ці експериментальні досягнення троє вчених — Корнелл, Віман і Кеттерле — отримали Нобелівську премію з фізики у 2001 році.

У липні 2018 року на борту Міжнародної космічної станції було створено перший конденсат Бозе — Ейнштейна в умовах мікрогравітації. Атоми рубідію охолодили до температури, що становить десятимільйонну частку градуса вище абсолютного нуля. У 2020 році експеримент було повторено. Наразі ця система вважається найхолоднішим об'єктом, створеним у космосі, хоча вона не є найнижчою температурою, досягнутою на Землі[3; 8].

1.3. Бозе Ейнштейнівський конденсат і його властивості

Бозе-Ейнштейнівський конденсат - це квантове явище, за якого велика кількість бозонних частинок накопичується у найнижчому енергетичному стані в системі за температур, близьких до абсолютного нуля.

Розглянемо систему, газ певної маси m , що складається з невзаємодіючих або ідеальних однакових бозонів, які знаходяться у рівновазі в ємності об'ємом V при температурі T . Одночастинкові квантові енергетичні стани системи

позначимо ε_k ; $k=0,1,2,\dots$. Вважаючи, що енергетичні власні стани є невиродженими і що всі частинки перебувають в одному спіновому стані, пам'ятаючи, що бозони не підкоряються принципу виключення Паулі, тобто немає обмеження на кількість частинок, які можуть займати один і той самий власний енергетичний стан, середню кількість бозонів, що займають енергетичний стан ε_k , можна подати законом розподілу:

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1} = \frac{1}{\Theta^{-1} e^{\beta\varepsilon} - 1}, \quad (1.1)$$

де ε_k — енергія k -го рівня, μ — хімічний потенціал, $\beta = \frac{1}{k_B T}$, k_B — стала Больцмана, T — температура, $\Theta = e^{\beta\mu}$ — абсолютна активність (фугасність). Хімічний потенціал завжди повинен бути меншим за найнижчий енергетичний рівень, і зазвичай його беруть рівним нулю (оскільки для ідеального газу енергія основного стану часто вважається нульовою). При зниженні температури до критичної, фугасність z прямує до 1. Це означає, що збуджені стани більше не можуть вміщувати всі частинки. Надлишок частинок переходить у основний стан, утворюючи конденсат.

Критична температура, при якій починається конденсація, визначається як:

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left(\frac{n}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3}, \quad (1.2)$$

де $n = N/\Omega$ — концентрація частинок, $\hbar$ — зведена стала Планка, m — маса частинки, $\zeta(3/2) \approx 2.612$ — дзета-функція Рімана.

За температур нижчих за T_c частка частинок у конденсаті визначається співвідношенням:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2},$$

де N_0 — число частинок в основному стані, N — загальна кількість частинок.

Конденсація настає тоді, коли хвильові пакети де Бройля починають перекриватися, і квантова природа частинок стає домінуючою[9; 10].

Сьогодні процес отримання Бозе–Ейнштейнівського конденсату є багато-етапним. На першому етапі атоми охолоджуються за допомогою лазерного випромінювання — так званого лазерного охолодження, що базується на зміні імпульсу атома внаслідок багаторазового поглинання й випромінювання фотонів. У результаті температура системи знижується до десятків мікрокельвінів.

Після цього охолоджені атоми поміщаються в потенціальну пастку — магнітну або оптичну. У магнітних пастках утримання забезпечується неоднорідним магнітним полем, тоді як в оптичних — впливом інтенсивного лазерного поля. Такі пастки дозволяють ізолювати атоми й контролювати їхнє положення в просторі.

Наступним етапом є евапораційне охолодження, під час якого найгарячіші атоми вибірково видаляються з пастки. Це призводить до зниження середньої енергії решти частинок. Саме на цьому етапі система досягає температур порядку нанокельвінів, за яких відбувається фазовий перехід у конденсат — утворюється макроскопічний квантовий стан.

1.4. Рівняння Гросса–Пітаєвського як основне рівняння для опису БЕК

Динаміку БЕК в багатьох експериментально релевантних умовах можна описати за допомогою спрощених моделей, що дозволяють уникнути складності повного багаточастинкового опису. Однією з найефективніших моделей є рівняння Гросса – Пітаєвського (РГП), яке є варіантом нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ). Це рівняння описує еволюцію квантової хвильової функції частинок у системі з нелінійними ефектами[2; 7].

Рівняння Гросса—Пітаєвського: набуває вигляду:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(r) + g|\Psi|^2 \right) \Psi, \quad (1.3)$$

де m — маса атома, $V_{\text{ext}}(r)$ — зовнішній потенціал, що описує пастку для атомів, $g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ — константа взаємодії, яка залежить від довжини розсіювання a . Залежно від знаку a , взаємодія між атомами може бути відштовхувальною ($g > 0$) або притягувальною ($g < 0$).

Рівняння є наслідком наближення середнього поля, коли багаточастинкова хвильова функція замінюється однією ефективною функцією системи. Загальна кількість атомів N , що зберігається РГП задається формулою:

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$$

Водночас, (1.3) можна записати в канонічній формі, $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\delta E}{\delta \Psi^*}$, де функціонал динамічно збереженої енергії E має вигляд

$$E = \int \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Psi|^2 + V_{\text{ext}} |\Psi|^2 + \frac{g}{2} |\Psi|^4 \right] dr. \quad (1.4)$$

У випадку БЕК нелінійний член рівняння відображає взаємодію між атомами, яка суттєво впливає на поведінку системи. Це дає змогу описувати не лише основні властивості конденсату, а й передбачати широкий спектр нелінійних явищ і станів, таких як солітони, вихори, збудження та інші експериментально спостережувані ефекти, характерні для нелінійних хвильових систем[2].

Зовнішній потенціал відіграє ключову роль у формуванні просторової структури Бозе—Ейнштейнівського конденсату. Його тип залежить від експериментальних умов і технології утримання частинок у локалізованому об'ємі. Найпоширенішим типом потенціалу, особливо на початкових етапах розвитку експериментів з БЕК, є магнітна пастка. Вона базується на взаємодії

магнітного моменту атомів з неоднорідним магнітним полем. Такий потенціал дозволяє створити тривимірну пастку для атомів, забезпечуючи їхню просторову локалізацію та ізоляцію від зовнішнього середовища.

Іншою формою зовнішнього потенціалу є оптична пастка, що базується на взаємодії електричного дипольного моменту атома з інтенсивністю електромагнітного поля лазера. Оптична пастка утворюється завдяки градієнту інтенсивності світлового поля. Цей тип пастки є гнучким у налаштуванні та дозволяє реалізовувати складні конфігурації потенціалу, включаючи періодичні структури, що імітують кристалічну ґратку[2].

1.5. Оптичні ґратки

Оптична ґратка — це періодичний потенціал, який створюється внаслідок інтерференції когерентних лазерних променів. Такий потенціал формує стоячу хвилю, інтенсивність якої змінюється просторово, що дозволяє захоплювати нейтральні атоми в потенціальні ями або вузли ґратки. У найпростішому випадку оптична ґратка утворюється двома зустрічними лазерними променями однакової довжини хвилі, утворюючи одномірну стоячу хвилю.

Стояча хвиля електричного поля в такій системі описується як:

$$E(z, t) = 2E_0 \cos(kz)e^{-i\omega t},$$

де E_0 — амплітуда електричного поля, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — хвильове число, ω — кутова частота. Оскільки дипольний потенціал V_{dip} пропорційний до інтенсивності світлового поля $I(z) \sim |E(z, t)|^2$, отримаємо:

$$V_{\text{dip}}(z) = V_0 \cos^2(kz),$$

де V_0 — амплітуда потенціалу (глибина ґратки). Період такої оптичної ґратки становить $\lambda/2$. Положення атомів у вузлах або антивузлах залежить від знаку відстройки частоти лазера від атомного резонансу:

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0,$$

де ω_0 — резонансна частота атомного переходу. При $\Delta\omega > 0$ (синя відстройка) атоми захоплюються у вузлах (мінімумах інтенсивності), а при $\Delta\omega < 0$ (червона відстройка) — в антивузлах (максимумах інтенсивності)[2; 11].

РОЗДІЛ 2.

РІВНЯННЯ ГРОССА-ПІТАЄВСЬКОГО ТА ЕЛІПТИЧНІ
ФУНКЦІЇ ЯКОБІ

2.1. Постановка задачі

У даній роботі розглядаються властивості локалізованих станів БЕК в оптичних ґратках в рамках модельної системи, яка описується рівнянням Гросса–Пітаєвського (РГП) з двома ідентичними пастками в якості утримуючого потенціалу. При аналізі розв’язків РГП будемо спиратися на результати, отримані в роботі[1; 12].

Потенціальна яма - це модель, яка описує область простору, де потенціальна енергія частинки є нижчою порівняно з енергією навколишніх областей.

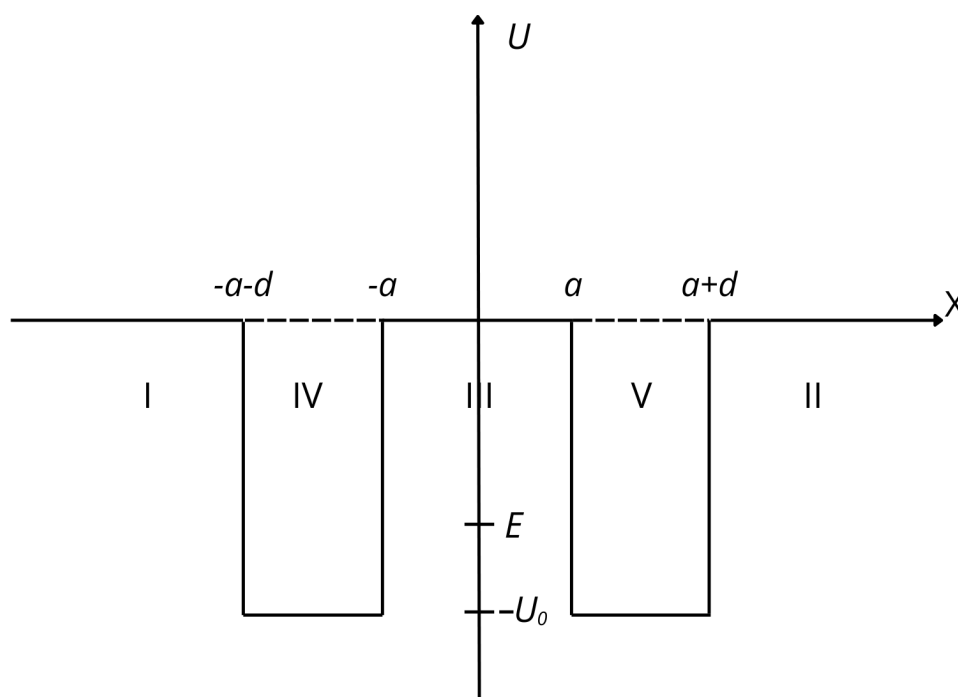


Рис. 2.1. Досліджувана система з двома прямокутними потенціальними ямами.

Система містить дві симетричні прямокутні потенціальні ями (шириною d кожна), які розташовані на відстані $2a$ одна від одної. В областях IV і V потенціал $U = -U_0$, що відповідає глибині ями.

Задача зводиться до знаходження розв'язків відповідного стаціонарного рівняння Гросса-Пітаєвського в кожній з п'яти областей:

$$E\psi = -\frac{d^2\psi}{dx^2} + 2\psi^3 - U_0\psi. \quad (2.1)$$

Кожна область містить різні значення потенціалу, і для коректного поєднання рішень необхідно застосувати граничні умови неперервності хвильових функцій та їх похідних (умови "зшивки") на границях областей [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1|_{-a-d-0} = \psi_4|_{-a-d+0} \\ \psi_4|_{-a-0} = \psi_3|_{-a+0} \\ \psi_3|_{a-0} = \psi_5|_{a+0} \\ \psi_5|_{a+d-0} = \psi_2|_{a+d+0} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi'_1|_{-a-d-0} = \psi'_4|_{-a-d+0} \\ \psi'_4|_{-a-0} = \psi'_3|_{-a+0} \\ \psi'_3|_{a-0} = \psi'_5|_{a+0} \\ \psi'_5|_{a+d-0} = \psi'_2|_{a+d+0} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Розглянемо три випадки:

- лінійне середовище в потенціальних ямах і лінійне оточуюче середовище;
- нелінійне середовище в потенціальних ямах і лінійне оточуюче середовище;
- лінійне середовище в потенціальних ямах і нелінійне оточуюче середовище,

розв'язки для яких буде наведено в розділі 3.

Для розв'язання поставлених задач необхідно використати спеціальний математичний апарат - еліптичні функції Якобі.

2.2. Еліптичні інтеграли та еліптичні функції Якобі

Розглянемо інтеграли вигляду

$$\int f(x, R) dx,$$

де $R = \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}$ або $R = \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$, а $f(x, R)$ - раціональна функція як відносно x , так і відносно R . Такі інтеграли називають *еліптичними*.

Всі еліптичні інтеграли можна звести до трьох основних:

$$\begin{aligned} & \int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \\ & \int_0^\xi \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \\ & \int_0^\xi \frac{d\xi}{(1-n\xi^2)\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \end{aligned}$$

де $|k| < 1$. Число k називається *модулем*, а n - *параметром* інтеграла.

Нехай $\xi = \sin \varphi$, тоді інтеграли набувають вигляду:

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (2.3)$$

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (2.4)$$

$$\Pi(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-n \sin^2 \varphi)(1-k^2 \sin^2 \varphi)}} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{(1-k^2\xi^2)(1-\xi^2)}} &= \frac{1}{k^2} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi = \\ &= \frac{1}{k^2} [F(\varphi, k) - E(\varphi, k)] \end{aligned}$$

Інтеграли $F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$, $\Pi(\varphi, k)$ є зведеними до нормальних форм Лежандра. Їх називають *еліптичними інтегралами*. Число φ називається *амплітудою*.

Якщо $k = 0$, то

$$u = \int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} = \arcsin \xi$$

$$\Delta(\psi, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}$$

Причому $\Delta(\psi, k) = 1$ на початку $\psi = 0$ шляху інтегрування, то визначимо

$$k' = \sqrt{1 - k^2}$$

де k' називають додатковим модулем.

Еліптичним функціями є функції, які є оберненими до еліптичних інтегралів.

Амплітуда Якобі. Розглянемо некомплексний еліптичний інтеграл першого роду:

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\Delta(\psi, k)},$$

де $\Delta(\psi, k)$ – функція від ψ та k . Значення φ називається амплітудою u , та позначається як

$$\varphi = \operatorname{am}(u, k)$$

Функції Якобі. Нехай $\xi = \sin \varphi$ та $\varphi = \operatorname{am}(u, k)$. Тоді

$$\operatorname{sn}(u, k) = \sin \varphi = \sin \operatorname{am}(u, k),$$

$$\operatorname{cn}(u, k) = \cos \varphi = \cos \operatorname{am}(u, k),$$

$$\operatorname{dn}(u, k) = \Delta(\varphi, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(u, k)}$$

Функції $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ називають еліптичними функціями Якобі, які представляють собою набір основних еліптичних функцій комплексної змінної.

Наведемо ключові властивості еліптичних функцій і графіки для еліптичних функцій Якобі[13; 14]:

$$\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u \quad \text{і} \quad \operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn} u, \quad (2.6)$$

видно, що функція $\operatorname{sn} u$ непарна, а функції $\operatorname{cn} u$ і $\operatorname{dn} u$ – парні.

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1 \quad (2.7)$$

$$\operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1 \quad (2.8)$$

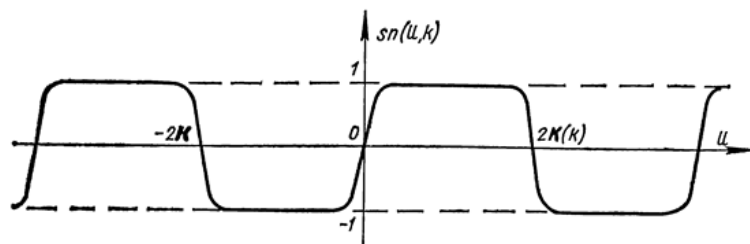


Рис. 2.2. Графік еліптичного синуса Якобі

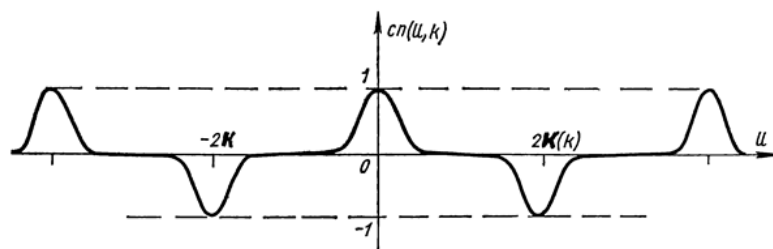


Рис. 2.3. Графік еліптичного косинуса Якобі

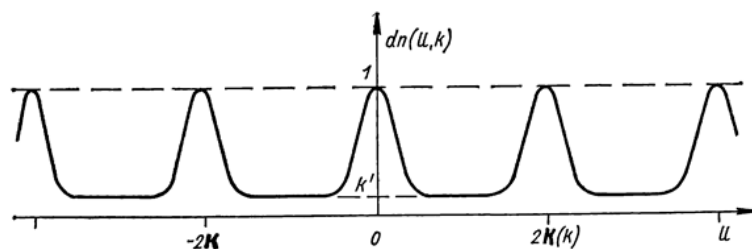


Рис. 2.4. Графік дельта амплітуди Якобі

Висновки до Розділу 2

У другому розділі було сформульовано математичну модель для опису локалізованих станів Бозе–Ейнштейнівського конденсату на основі стаціонарного рівняння Гросса–Пітаєвського з урахуванням зовнішнього потенціалу. Рівняння було приведено до одновимірної форми, що враховує просторову структуру зовнішнього потенціалу, зокрема наявність потенціальних ям.

Показано, що в областях з нелінійною взаємодією можливі аналітичні розв’язки у вигляді еліптичних функцій Якобі, які описують розподіл хвильової функції в залежності від аргумента. В лінійних областях розв’язки мають тригонометричну або експоненціальну форму. У розділі закладено підґрунтя для побудови розв’язків в розрізнених областях, які потребують зшивання на межах цих областей.

РОЗДІЛ 3.

РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ ГРОССА-ПІТАЄВСЬКОГО В СИСТЕМІ З ДВОМА ПОТЕНЦІАЛЬНИМИ ЯМАМИ

3.1. Лінійне середовище в потенціальних ямах і лінійне оточуюче середовище

У модельній системі середовище вважається суцільним і лінійним як всередині потенціальних ям, так і в оточуючих ділянках, що дозволяє звести рівняння (2.1) в усіх областях до наступного вигляду:

$$E \cdot \psi_{1,2,3} = -\frac{d^2 \psi_{1,2,3}}{dx^2}, \quad (3.1)$$

$$E \cdot \psi_{4,5} = -\frac{d^2 \psi_{4,5}}{dx^2} - U_0 \cdot \psi_{4,5}. \quad (3.2)$$

Рівняння (3.1) розв'язуються як рівняння гармонічного осцилятора, розв'язки можна записати наступним чином:

$$\Psi_{1,2,3} = A_{1,2,3}e^{-\sqrt{|E|x}} + B_{1,2,3}e^{\sqrt{|E|x}}, \quad (3.3)$$

З огляду на обмеженість розв'язку в області Ψ_1 на $-\infty$ та в області Ψ_2 на $+\infty$, отримуємо

$$\Psi_1 = B_1 e^{\sqrt{|E|x}},$$

$$\Psi_2 = A_2 e^{-\sqrt{|E|x}},$$

$$\Psi_3 = A_3 e^{-\sqrt{|E|x}} + B_3 e^{\sqrt{|E|x}}.$$

За рахунок симетрії $\Psi_2(x) = \Psi_1(-x)$ і $\Psi_3(x) = \Psi_3(-x)$ маємо:

$$A_2 e^{-\sqrt{|E|x}} = B_1 e^{-\sqrt{|E|x}},$$

$$A_2 = B_1 \equiv A;$$

$$A_3 e^{-\sqrt{|E|x}} + B_3 e^{\sqrt{|E|x}} = A_3 e^{\sqrt{|E|x}} + B_3 e^{-\sqrt{|E|x}},$$

$$A_3 = B_3.$$

$$\psi_1 = A e^{\sqrt{|E|x}}, \quad (3.4)$$

$$\psi_2 = A e^{-\sqrt{|E|x}}, \quad (3.5)$$

$$\psi_3 = A_3 \left(e^{-\sqrt{|E|x}} + e^{\sqrt{|E|x}} \right) = 2A_3 \cosh \left(\sqrt{|E|x} \right). \quad (3.6)$$

Розглянемо рівняння (3.2). Виконавши заміну $\varepsilon^2 = U_0 - \sqrt{|E|}$, розв'язки рівнянь шукатимемо у вигляді

$$\psi_{4,5} = C_{4,5} \cos(\varepsilon x) + D_{4,5} \sin(\varepsilon x), \quad (3.7)$$

оскільки характеристичне рівняння $k^2 + \varepsilon^2 = 0$ має розв'язки виду $k = \pm i\varepsilon$. Врахувавши симетрію $\psi_4(-x) = \psi_5(x)$, маємо

$$C_4 \cos(\varepsilon x) - D_4 \sin(\varepsilon x) = C_5 \cos(\varepsilon x) + D_5 \sin(\varepsilon x),$$

$$(C_4 - C_5) \cos(\varepsilon x) = (D_4 + D_5) \sin(\varepsilon x).$$

Тоді

$$\tan(\varepsilon x) = \frac{C_4 - C_5}{D_4 + D_5}. \quad (3.8)$$

Скористаємося крайовими умовами (2.2):

$$\psi_1|_{-a-d-0} = \psi_4|_{-a-d+0},$$

$$A e^{\sqrt{|E|x}}|_{-a-d-0} = (C_4 \cos(\varepsilon x) + D_4 \sin(\varepsilon x))|_{-a-d+0},$$

$$A e^{-\sqrt{|E|(a+d)}} = C_4 \cos(\varepsilon(a+d)) - D_4 \sin(\varepsilon(a+d));$$

$$\psi_1'|_{-a-d-0} = \psi_4'|_{-a-d+0},$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{|E|} A e^{\sqrt{|E|x}}|_{-a-d-0} &= (-\varepsilon C_4 \sin(\varepsilon x) + \varepsilon D_4 \cos(\varepsilon x))|_{-a-d+0}, \\
\sqrt{|E|} A e^{\sqrt{|E|(a+d)}} &= \varepsilon C_4 \sin(\varepsilon(a+d)) + \varepsilon D_4 \cos(\varepsilon(a+d)); \\
\psi_4|_{-a-0} &= \psi_3|_{-a+0}, \\
(C_4 \cos(\varepsilon x) + D_4 \sin(\varepsilon x)) \Big|_{-a-0} &= A_3 \left(e^{-\sqrt{|E|x}} + e^{\sqrt{|E|x}} \right) \Big|_{-a+0}, \\
C_4 \cos(\varepsilon a) + D_4 \sin(\varepsilon a) &= A_3 \left(e^{-\sqrt{|E|}a} + e^{\sqrt{|E|}a} \right), \\
\psi'_4 \Big|_{-a-0} &= \psi'_3 \Big|_{-a+0}, \\
(-\varepsilon C_4 \sin(\varepsilon x) + \varepsilon D_4 \cos(\varepsilon x)) \Big|_{-a-0} &= -\sqrt{|E|} A_3 \left(e^{-\sqrt{|E|x}} - e^{\sqrt{|E|x}} \right) \Big|_{-a+0}, \\
\varepsilon (C_4 \sin(\varepsilon a) + D_4 \cos(\varepsilon a)) &= -\sqrt{|E|} A_3 \left(e^{\sqrt{|E|}a} - e^{-\sqrt{|E|}a} \right); \\
\psi_3 \Big|_{a-0} &= \psi_5 \Big|_{a+0}, \\
A_3 \left(e^{-\sqrt{|E|}a} + e^{\sqrt{|E|}a} \right) \Big|_{a-0} &= (C_5 \cos(\varepsilon x) + D_5 \sin(\varepsilon x)) \Big|_{a+0}, \\
A_3 \left(e^{-\sqrt{|E|}a} + e^{\sqrt{|E|}a} \right) &= C_5 \cos(\varepsilon a) + D_5 \sin(\varepsilon a); \\
\psi'_3 \Big|_{a-0} &= \psi'_5 \Big|_{a+0}, \\
\sqrt{|E|} A_3 \left(e^{-\sqrt{|E|}a} - e^{\sqrt{|E|}a} \right) \Big|_{a-0} &= (-\varepsilon C_5 \sin(\varepsilon x) + \varepsilon D_5 \cos(\varepsilon x)) \Big|_{a+0}, \\
\sqrt{|E|} A_3 \left(e^{\sqrt{|E|}a} - e^{-\sqrt{|E|}a} \right) &= \varepsilon (-C_5 \sin(\varepsilon a) + D_5 \cos(\varepsilon a)); \\
\psi_5 \Big|_{a+d-0} &= \psi_2 \Big|_{a+d+0}, \\
(C_5 \cos(\varepsilon x) + D_5 \sin(\varepsilon x)) \Big|_{a+d-0} &= A e^{-\sqrt{|E|x}} \Big|_{a+d+0}, \\
C_5 \cos(\varepsilon(a+d)) + D_5 \sin(\varepsilon(a+d)) &= A e^{-\sqrt{|E|(a+d)}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi'_5 \Big|_{a+d-0} &= \psi'_2 \Big|_{a+d+0}, \\ (-\varepsilon C_5 \sin(\varepsilon x) + \varepsilon D_5 \cos(\varepsilon x)) \Big|_{a+d-0} &= -\sqrt{|E|} A e^{-\sqrt{|E|x}} \Big|_{a+d+0}, \\ \varepsilon (-C_5 \sin(\varepsilon a) + D_5 \cos(\varepsilon a)) &= -\sqrt{|E|} A e^{-\sqrt{|E|(a+d)}}. \end{aligned}$$

Запишемо отримані розв'язки в систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{aligned} C_4 \cos(\varepsilon(a+d)) - D_4 \sin(\varepsilon(a+d)) &= A e^{-\sqrt{|E|(a+d)}}, \end{aligned} \right. \quad (3.9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_4 \sin(\varepsilon(a+d)) + D_4 \cos(\varepsilon(a+d)) &= \frac{\sqrt{|E|}}{\varepsilon} A e^{\sqrt{|E|(a+d)}}, \end{aligned} \right. \quad (3.10)$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_5 \cos(\varepsilon(a+d)) + D_5 \sin(\varepsilon(a+d)) &= A e^{-\sqrt{|E|(a+d)}}, \end{aligned} \right. \quad (3.11)$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_5 \sin(\varepsilon a) + D_5 \cos(\varepsilon a) &= \frac{\sqrt{|E|}}{\varepsilon} A e^{-\sqrt{|E|(a+d)}}, \end{aligned} \right. \quad (3.12)$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_4 \cos(\varepsilon a) - D_4 \sin(\varepsilon a) &= A_3 (e^{\sqrt{|E|}a} + e^{-\sqrt{|E|}a}), \end{aligned} \right. \quad (3.13)$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_4 \sin(\varepsilon a) + D_4 \cos(\varepsilon a) &= -\frac{\sqrt{|E|}}{\varepsilon} A_3 (e^{\sqrt{|E|}a} - e^{-\sqrt{|E|}a}), \end{aligned} \right. \quad (3.14)$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_5 \cos(\varepsilon a) + D_5 \sin(\varepsilon a) &= A_3 (e^{-\sqrt{|E|}a} + e^{\sqrt{|E|}a}), \end{aligned} \right. \quad (3.15)$$

$$\left\{ \begin{aligned} -C_5 \sin(\varepsilon a) + D_5 \cos(\varepsilon a) &= \frac{\sqrt{|E|}}{\varepsilon} A_3 (e^{\sqrt{|E|}a} - e^{-\sqrt{|E|}a}). \end{aligned} \right. \quad (3.16)$$

Прирівняємо (3.9) та (3.11) з системи рівнянь:

$$C_4 \cos(\varepsilon(a+d)) - D_4 \sin(\varepsilon(a+d)) = C_5 \cos(\varepsilon(a+d)) + D_5 \sin(\varepsilon(a+d)),$$

$$(C_4 - C_5) \cos(\varepsilon(a+d)) = (D_4 + D_5) \sin(\varepsilon(a+d)).$$

Ця рівність виконується за умови, що

$$\begin{cases} C_4 - C_5 = 0, \\ D_4 + D_5 = 0, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} C_4 = C_5, \\ D_4 = -D_5. \end{cases} \quad (3.17)$$

Прирівнюючи інші рівняння аналогічним чином, систему з восьми рівнянь можна спростити до системи з чотирьох рівнянь:

$$\begin{cases} C_4 \cos \varepsilon(a+d) - D_4 \sin \varepsilon(a+d) = Ae^{-\sqrt{E}(a+d)}, & (3.18) \\ C_4 \sin \varepsilon(a+d) + D_4 \cos \varepsilon(a+d) = \mu Ae^{-\sqrt{E}(a+d)}, & (3.19) \\ C_4 \cos \varepsilon a - D_4 \sin \varepsilon a = 2A_3 \operatorname{ch}(\sqrt{E}a), & (3.20) \\ C_4 \sin \varepsilon a + D_4 \cos \varepsilon a = -2\mu A_3 \operatorname{sh}(\sqrt{E}a). & (3.21) \end{cases}$$

Для спрощення розв'язку рівнянь, виразимо всі коефіцієнти через A_3 . Для цього домножимо рівняння:

$$C_4 \cos \varepsilon a - D_4 \sin \varepsilon a = 2A_3 \operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a),$$

на $\cos \varepsilon a$, а рівняння

$$C_4 \sin \varepsilon a + D_4 \cos \varepsilon a = -2\mu A_3 \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a),$$

на $\sin \varepsilon a$. Обчисливши суму рівнянь, маємо:

$$C_4 = 2A_3 [\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) \cos \varepsilon a - \mu \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \sin \varepsilon a] = C_5, \quad (3.22)$$

Аналогічно домножуючи на ці рівняння $-\sin \varepsilon a$ та $\cos \varepsilon a$ відповідно, додаючи, отримаємо:

$$D_4 = -2A_3 [\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) \sin \varepsilon a + \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \cos \varepsilon a] = -D_5. \quad (3.23)$$

Домноживши рівняння

$$C_4 \cos \varepsilon(a + d) - D_4 \sin \varepsilon(a + d) = A e^{-\sqrt{|E|}(a+d)}$$

на $\cos(\varepsilon(a + d))$, та помноживши на $\sin(\varepsilon(a + d))$ рівняння

$$C_4 \sin \varepsilon(a + d) + D_4 \cos \varepsilon(a + d) = \mu A e^{-\sqrt{|E|}(a+d)},$$

обчислюємо суму рівнянь та маємо:

$$C_4 = A e^{-\sqrt{|E|}(a+d)} [\cos(\varepsilon(a + d)) + \mu \sin(\varepsilon(a + d))]. \quad (3.24)$$

Прирівнюючи (3.22) та (3.24), отримуємо

$$A = \frac{2A_3 [\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) \cos \varepsilon a - \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \sin \varepsilon a] e^{\sqrt{|E|}(a+d)}}{\cos(\varepsilon(a + d)) + \mu \sin(\varepsilon(a + d))}. \quad (3.25)$$

A можна виразити через A_3 з рівнянь (3.9) та (3.13). Домножимо рівняння

$$C_4 \cos \varepsilon(a + d) - D_4 \sin \varepsilon(a + d) = A e^{-\sqrt{|E|}(a+d)},$$

$$C_4 \cos \varepsilon a - D_4 \sin \varepsilon a = 2A_3 \operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a),$$

на $\sin(\varepsilon a$ та $\sin(\varepsilon(a + d))$ відповідно, та додавши їх, маємо:

$$C_4 \sin \varepsilon(a+d) \cdot \cos \varepsilon a - \cos \varepsilon(a+d) \cdot \sin \varepsilon a = 2A_3 \operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) \cdot \sin \varepsilon(a+d) - A e^{-\sqrt{|E|}(a+d)} \cdot \sin \varepsilon a$$

$$\text{або } C_4 \sin \varepsilon d - 2A_3 \operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) \cdot \sin \varepsilon(a + d) = -A e^{-\sqrt{|E|}(a+d)} \cdot \sin \varepsilon a.$$

Підставимо рівняння (3.22):

$$2A_3 [\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) \sin \varepsilon d \cdot \cos \varepsilon a - \mu \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \sin \varepsilon d \cdot \sin \varepsilon a - \operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) \sin \varepsilon(a + d)] =$$

$$\begin{aligned}
&= -Ae^{-\sqrt{|E|}(a+d)} \cdot \sin(\varepsilon a), \\
&-Ae^{-\sqrt{|E|}(a+d)} \cdot \sin \varepsilon a = 2A_3 [\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) \cdot \sin \varepsilon d \cdot \cos \varepsilon a - \\
&-\mu \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \sin \varepsilon d \cdot \sin \varepsilon a - \operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a)(\sin \varepsilon a \cdot \cos \varepsilon d + \sin \varepsilon d \cdot \cos \varepsilon a)], \\
&-Ae^{-\sqrt{|E|}(a+d)} \sin \varepsilon a = -2A_3 [\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) \cos \varepsilon d + \mu \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \sin \varepsilon d] \sin \varepsilon a, \\
&A = 2A_3 [\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) \cos \varepsilon d + \mu \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \sin \varepsilon d]. \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Запишемо умову нормування лінійного середовища:

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$$

Обчислимо N для знаходження A_3 :

$$\begin{aligned}
N &= 2 \left[\int_0^a |\psi_3|^2 dx + \int_a^{a+d} |\psi_5|^2 dx + \int_{a+d}^{\infty} |\psi_2|^2 dx \right] = \\
&= 2 \left(4A_3^2 \int_0^a \operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|x}) dx + \int_a^{a+d} (C_5 \cos \varepsilon x + D_5 \sin \varepsilon x)^2 dx + \right. \\
&+ A^2 \int_{a+d}^{\infty} (e^{-\sqrt{|E|x}})^2 dx = 2 \left(2A_3^2 \int_0^a \frac{1 + \operatorname{ch}(2\sqrt{|E|x})}{2} dx + C_5^2 \int_a^{a+d} \cos^2(\varepsilon x) dx \right. \\
&+ D_5^2 \int_a^{a+d} \sin^2(\varepsilon x) dx + 2C_5 D_5 \int_a^{a+d} \cos \varepsilon x \sin \varepsilon x dx + A^2 \int_{a+d}^{\infty} e^{-2\sqrt{|E|x}} dx \Big) = \\
&= 2 \left(2A_3^2 \left(x + \frac{1}{2\sqrt{|E|}} \operatorname{sh}(2\sqrt{|E|x}) \right) \Big|_0^a + \frac{C_5^2}{2} \int_a^{a+d} (1 + \cos 2\varepsilon x) dx + \right. \\
&+ \frac{D_5^2}{2} \int_a^{a+d} (1 - \cos 2\varepsilon x) dx + C_5 D_5 \int_a^{a+d} 2 \sin \varepsilon x dx + A^2 \left(-\frac{1}{\sqrt{|E|}} \right) e^{-2\sqrt{|E|x}} \Big|_{a+d}^{\infty} \Big) = \\
&= 2 \left(2A_3^2 \left(a + \frac{1}{2\sqrt{|E|}} \operatorname{sh}(2\sqrt{|E|}a) \right) + \frac{C_5^2}{2} \left(x + \frac{1}{2\varepsilon} \sin 2\varepsilon x \right) \Big|_a^{a+d} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{D_5^2}{2} \left(x - \frac{1}{2\varepsilon} \sin 2\varepsilon x \right) \Big|_a^{a+d} - \frac{C_5 D_5}{2\varepsilon} \cos 2\varepsilon x \Big|_a^{a+d} + \frac{A^2}{2\sqrt{\varepsilon}} e^{-2\sqrt{|E|}(a+d)} = \\
& = 2 \left(2A_3^2 \left(a + \frac{1}{2\sqrt{|E|}} \operatorname{sh} 2(\sqrt{|E|}a) \right) + \frac{A^2}{2\sqrt{|E|}} e^{-2\sqrt{|E|}(a+d)} + \frac{C_5^2}{2} \left(d + \frac{1}{2\varepsilon} (\sin 2\varepsilon(a+d) \right. \right. \\
& \left. \left. - \sin 2\varepsilon a) \right) + \frac{D_5^2}{2} \left(d - \frac{1}{2\varepsilon} (\sin 2\varepsilon(a+d) - \sin 2\varepsilon a) \right) - \frac{C_5 D_5}{2\varepsilon} (\cos 2\varepsilon(a+d) - \cos 2\varepsilon a) \right) \\
& = 2 \left(2A_3^2 \left(a + \frac{1}{2\sqrt{|E|}} \operatorname{sh} 2(\sqrt{|E|}a) \right) + \frac{A^2}{2\sqrt{|E|}} e^{-2\sqrt{|E|}(a+d)} + \frac{d}{2} (C_5^2 + D_5^2) + \right. \\
& \left. + (C_5^2 - D_5^2) \frac{(\sin 2\varepsilon(a+d) - \sin 2\varepsilon a)}{4\varepsilon} - \frac{C_5 D_5}{\varepsilon} (\cos 2\varepsilon(a+d) - \cos 2\varepsilon a) \right) \\
& = A_3^2 \left(4a + \frac{2}{\sqrt{|E|}} \operatorname{sh} 2(\sqrt{|E|}a) \right) + \frac{A^2}{\sqrt{|E|}} e^{-2\sqrt{|E|}(a+d)} + (C_5^2 + D_5^2) d + \\
& + \frac{(C_5^2 - D_5^2)}{\varepsilon} (\sin 2\varepsilon(a+d) - \sin 2\varepsilon a) - \frac{2C_5 D_5}{\varepsilon} (\cos 2\varepsilon(a+d) - \cos 2\varepsilon a) = 1; \\
& N = A_3^2 \left(4a + \frac{2}{\sqrt{|E|}} \operatorname{sh} 2(\sqrt{|E|}a) \right) + \frac{A^2}{\sqrt{|E|}} e^{-2\sqrt{|E|}(a+d)} + (C_5^2 + D_5^2) d + \\
& + \frac{(C_5^2 - D_5^2)}{2\varepsilon} (\sin 2\varepsilon(a+d) - \sin 2\varepsilon a) - \frac{C_5 D_5}{\varepsilon} (\cos 2\varepsilon(a+d) - \cos 2\varepsilon a) = 1. \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Окремо обчислимо коефіцієнти з рівняння (3.27):

$$\begin{aligned}
C_5^2 + D_5^2 &= C_4^2 + D_4^2 = 4A_3^2 \left(\left[\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) \cdot \cos \varepsilon a - \mu \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \cdot \sin \varepsilon a \right]^2 \right. \\
& \left. + \left[\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) \cdot \sin \varepsilon a + \mu \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \cdot \cos \varepsilon a \right]^2 \right) = \\
& = 4A_3^2 \left[\operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) \cdot \cos^2 \varepsilon a + \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a) \right], \\
C_5^2 - D_5^2 &= C_4^2 - D_4^2 = 4A_3^2 \left(\left[\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) \cdot \cos \varepsilon a - \mu \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \cdot \sin \varepsilon a \right]^2 - \right. \\
& \left. - \left[\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) \cdot \sin \varepsilon a + \mu \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \cdot \cos \varepsilon a \right]^2 \right) = \\
& = 4A_3^2 \left[\operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) \cdot \cos \varepsilon a - \mu \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \cdot \sin \varepsilon a - \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a) \cdot \cos \varepsilon a \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_5 D_5 &= -C_4 D_4 = 4A_3^2 \left[\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) \cdot \cos \varepsilon a - \mu \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \cdot \sin \varepsilon a \right] \cdot \\
&\quad \left[\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) \cdot \sin \varepsilon a + \mu \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \cdot \cos \varepsilon a \right] = \\
&= 4A_3^2 \left[\frac{1}{2} \operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) \cdot \sin 2\varepsilon a + \frac{1}{2} \mu \operatorname{sh}(2\sqrt{|E|}a) \cdot \cos 2\varepsilon a - \frac{1}{2} \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a) \cdot \sin 2\varepsilon a \right]; \\
A^2 e^{-2\sqrt{|E|}(a+d)} &= 4A_3^2 \left(\operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) \cdot \cos^2 \varepsilon d + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \mu \operatorname{sh}(2\sqrt{|E|}a) \cdot \sin 2\varepsilon d + \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a) \cdot \sin^2 \varepsilon d \right).
\end{aligned}$$

Підставимо коефіцієнти в рівняння (3.27), і після низки перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned}
N &= (2A_3)^2 \left[a + \frac{1}{2\sqrt{|E|}} \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) + d \left(\operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) + \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a) \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\sqrt{|E|}} \left(\operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) \cos^2 \varepsilon d + \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a) \sin^2 \varepsilon d + \mu \operatorname{sh}(2\sqrt{|E|}a) \sin \varepsilon d \cos \varepsilon d \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(\operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) - \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a) \right) \sin \varepsilon d \cos \varepsilon d + \mu \operatorname{sh}(2\sqrt{|E|}a) \sin^2 \varepsilon d \right] \right] = 1.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\sin \varepsilon d \cos \varepsilon d = \operatorname{tg} \varepsilon d \cdot \cos^2 \varepsilon d = \operatorname{tg} \varepsilon d \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon d} =$$

$$\frac{\mu \left(1 - \operatorname{th}(\sqrt{|E|}a) \right)}{1 + \mu^2 \operatorname{th}^2(\sqrt{|E|}a)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\mu^2 (1 - \operatorname{th}(\sqrt{|E|}a))^2}{(1 + \mu \operatorname{th}^2(\sqrt{|E|}a))^2}} =$$

$$\frac{\mu \left(1 - \operatorname{th}(\sqrt{|E|}a) \right) \left(1 + \mu \operatorname{th}^2(\sqrt{|E|}a) \right)}{(1 + \mu^2) + \mu^2 (1 + \mu^2) \operatorname{th}^2(\sqrt{|E|}a)} =$$

$$\frac{\mu}{1 + \mu^2} \frac{\left(1 - \operatorname{th}(\sqrt{|E|}a) \right) \left(1 + \mu \operatorname{th}^2(\sqrt{|E|}a) \right)}{1 + \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a)} =$$

$$\frac{\mu}{(1 + \mu^2)} \cdot \frac{\left(\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) - \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a) \right) \left(\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) + \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a) \right)}{\operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) + \mu \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a)};$$

$$\sin^2 \varepsilon d = \frac{\operatorname{tg}^2 \varepsilon d}{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon d} = \frac{1}{1 + \frac{(1 + \mu^2 \operatorname{th}(\sqrt{|E|}a))^2}{\mu^2 (1 - \operatorname{th}(\sqrt{|E|}a))^2}} = \frac{\mu^2}{(1 + \mu^2)} \frac{\left(\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) - \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \right)^2}{\operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) + \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a)}.$$

Підставимо вирази для $\sin \varepsilon d$, $\cos \varepsilon d$ та $\sin^2 \varepsilon d$, таким чином отримавши:

$$(2A_3)^{-2} = \left[a + \frac{1}{\sqrt{|E|}} \left(\operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) + \operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) \right) + d \left(\operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) + \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a) \right) \right. \\ \left. + \frac{2\sqrt{|E|} \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \left(\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) - \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \right)}{\varepsilon^2 (\operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) + \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a))} \right],$$

$$2A_3 = \left\{ \left[a + \frac{1}{\sqrt{|E|}} \left(\operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) + \operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) \right) + d \left(\operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) + \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a) \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{2\sqrt{|E|} \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \left(\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) - \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \right)}{\varepsilon^2 (\operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) + \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a))} \right\}^{-\frac{1}{2}} \equiv \Omega^{-\frac{1}{2}}.$$

Визначимо коефіцієнт A на основі відомого значення коефіцієнта $2A_3$, скориставшись формулою (3.26). Проте перед цим, застосовуючи співвідношення (3.28), подамо $\sin \varepsilon d$ та $\cos \varepsilon d$ через $\operatorname{th} \sqrt{|E|}a$:

$$\sin \varepsilon d = \frac{\mu \left(\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) - \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \right)}{\sqrt{(1 + \mu^2)} \sqrt{\operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) + \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a)}},$$

$$\cos \varepsilon d = \frac{\sin \varepsilon d \cdot \cos \varepsilon d}{\sin \varepsilon d} = \frac{\mu \left(\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) - \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a) \right) \left(\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) + \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a) \right)}{(1 + \mu^2) (\operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) + \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a))} \cdot$$

$$\frac{\sqrt{(1 + \mu^2)} \sqrt{\operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) + \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a)}}{\mu \left(\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) - \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \right)} = \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) + \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a)}{\sqrt{(1 + \mu^2)} \sqrt{\operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) + \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a)}}.$$

Виконавши спрощення в (3.26)

$$\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) \cdot \cos \varepsilon d + \mu \operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) \cdot \sin \varepsilon d =$$

$$\frac{\operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) + \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a) - \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a)}{\sqrt{(1 + \mu^2)} \sqrt{\operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) + \mu^2 \operatorname{sh}^2(\sqrt{|E|}a)}},$$

$$A = e^{\sqrt{|E|}(a+d)} \frac{\text{ch}^2((\sqrt{|E|}a) + \mu^2 \text{sh}^2((\sqrt{|E|}a) - \mu^2 \text{sh}^2((\sqrt{|E|}a))}{\sqrt{\Omega} \sqrt{(1 + \mu^2)} \sqrt{\text{ch}^2((\sqrt{|E|}a) + \mu^2 \text{sh}^2((\sqrt{|E|}a))}}. \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \Omega = a + d \left(\text{ch}^2 \sqrt{|E|}a + \mu^2 \text{sh}^2 \sqrt{|E|}a \right) + \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\text{sh}(2\sqrt{|E|}a) + \text{ch}^2 \sqrt{|E|}a \right) + \\ + \frac{2\mu \text{sh} \sqrt{|E|}a (\text{ch} \sqrt{|E|}a - \text{sh} \sqrt{|E|}a)}{\varepsilon \text{ch}^2 \sqrt{|E|}a + \mu^2 \text{sh}^2 \sqrt{|E|}a}, \end{aligned}$$

Отримуємо наступні розв'язки хвильових функцій в відповідних областях:

$$\psi_1(x) = \frac{\text{ch}^2 \sqrt{|E|}a + \mu^2 \text{sh}^2 \sqrt{|E|}a - \mu^2 \text{sh}^2 \sqrt{|E|}a}{\sqrt{\Omega} \sqrt{(1 + \mu^2)} \sqrt{\text{ch}^2 \sqrt{|E|}a + \mu^2 \text{sh}^2 \sqrt{|E|}a}} e^{\sqrt{|E|}(a+d+x)}, \quad (3.30)$$

$$\psi_2(x) = \frac{\text{ch}^2 \sqrt{|E|}a + \mu^2 \text{sh}^2 \sqrt{|E|}a - \mu^2 \text{sh}^2 \sqrt{|E|}a}{\sqrt{\Omega} \sqrt{(1 + \mu^2)} \sqrt{\text{ch}^2 \sqrt{|E|}a + \mu^2 \text{sh}^2 \sqrt{|E|}a}} e^{\sqrt{|E|}(a+d-x)}, \quad (3.31)$$

$$\psi_3(x) = \frac{\text{ch} \sqrt{|E|x}}{\sqrt{\Omega}}, \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \psi_4 = \frac{\text{ch} \sqrt{|E|}a \cdot \cos \varepsilon a - \mu \text{sh} \sqrt{|E|}a \cdot \sin \varepsilon a}{\sqrt{\Omega}} \cos \varepsilon x - \\ - \frac{\text{ch} \sqrt{|E|}a \cdot \sin \varepsilon a + \mu \text{sh} \sqrt{|E|}a \cdot \cos \varepsilon a}{\sqrt{\Omega}} \sin \varepsilon x, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \psi_5 = \frac{\text{ch} \sqrt{|E|}a \cdot \cos \varepsilon a - \mu \text{sh} \sqrt{|E|}a \cdot \sin \varepsilon a}{\sqrt{\Omega}} \cos \varepsilon x + \\ + \frac{\text{ch} \sqrt{|E|}a \cdot \sin \varepsilon a + \mu \text{sh} \sqrt{|E|}a \cdot \cos \varepsilon a}{\sqrt{\Omega}} \sin \varepsilon x, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\mu = \frac{\sqrt{|E|}}{\varepsilon}, \quad \varepsilon^2 = U_0 - |E| \quad (3.35)$$

3.2. Нелінійне середовище в потенціальних ямах і лінійне оточуюче середовище

Розглянемо систему, що складається з нелінійного середовища всередині потенціальних ям та лінійного в їх оточенні. Рівняння (2.1) у відповідних областях лінійності зводиться до рівнянь

$$E \cdot \psi_{1,2,3} = -\frac{d^2 \psi_{1,2,3}}{dx^2}, \quad (3.36)$$

розв'язки яких вже знайдені в попередньому пункті:

$$\psi_1 = Ae^{\sqrt{|E|x}}, \quad (3.37)$$

$$\psi_2 = Ae^{-\sqrt{|E|x}}, \quad (3.38)$$

$$\psi_3 = 2A_3 \operatorname{ch}(\sqrt{|E|x}) \quad (3.39)$$

У цьому випадку нелінійне середовище в ямах описується рівняннями:

$$E \cdot \psi_{4,5} = -\frac{d^2 \psi_{4,5}}{dx^2} + 2\psi_{4,5}^3 - U_0 \cdot \psi_{4,5} \quad (3.40)$$

Рівняння (3.40) зводиться до нелінійного рівняння Дюффінга. Для його розв'язання ліву і праву частини помножимо на $2\psi'$

$$2\psi' \cdot \psi'' = 2\psi' (2\psi^3 - (U_0 - |E|)\psi)$$

і проінтегруємо

$$\begin{aligned} (\psi')^2 &= 2 \int (2\psi^3 - \varepsilon^2 \psi) \frac{d\psi}{dx} \cdot dx = 2 \int (2\psi^3 - \varepsilon^2 \psi) d\psi \\ (\psi')^2 &= 2 \left(\frac{\psi^4}{2} - \frac{\varepsilon^2 \psi^2}{2} \right) = \psi^4 - \varepsilon^2 \psi^2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Це рівняння, як і рівняння Дюффінга, описує малоамплітудні коливання в симетричному потенціалі, тому має періодичний розв'язок в інтервалі енергій $0 < E < E_0 = \frac{\varepsilon^4}{8}$. Розділяючи змінні і користуючись інтегралом руху(енергією) запишемо у неявному вигляді загальний розв'язок рівняння (3.40)

$$\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{2E_1 + \psi^4 - \varepsilon^2\psi^2}} = x - x_0 \quad (3.42)$$

Введемо безрозмірний параметр

$$q = \sqrt{\frac{E_0}{E_1}} - \sqrt{\frac{E_0}{E_1}} = 1. \quad (3.43)$$

Підставимо в формулу (3.43) значення $E_0 = \frac{\varepsilon^4}{8}$:

$$q = \sqrt{\frac{\varepsilon^4}{8E_1}} - \sqrt{\frac{\varepsilon^4}{8E_1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad q \cdot \sqrt{8E_1} = \varepsilon^2 - \sqrt{\varepsilon^4 - 8E_1} \quad (3.44)$$

Піднесемо до квадрату параметр q :

$$q^2 = \frac{2\varepsilon^4}{8E_1} - 1 + 2\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{8E_1}}\sqrt{\frac{\varepsilon^4 - 8E_1}{8E_1}} \Rightarrow (q^2 + 1) \cdot 8E_1 = 2\varepsilon^2 (\varepsilon^2 - \sqrt{\varepsilon^4 - 8E_1}). \quad (3.45)$$

Отримаємо вираз для енергії:

$$q \cdot \sqrt{8E_1} = \frac{(q^2 + 1) \cdot 8E_1}{2\varepsilon^2} \Rightarrow \sqrt{8E_1} = \frac{q\varepsilon^2}{q^2 + 1},$$

$$2E_1 = \frac{q^2\varepsilon^4}{(q^2 + 1)^2}.$$

При зміні енергії від $E_1 = 0$ до $E_1 = E_0$ параметр q змінюється від 0 до 1, тому розв'язок (3.42) при заміні змінної набуватиме вигляду:

$$\psi = \frac{\varepsilon q}{\sqrt{1 + q^2}}z, \quad d\psi = \frac{\varepsilon q}{\sqrt{1 + q^2}}dz,$$

можна переписати наступним чином:

$$\int_0^{\psi/\psi_*} \frac{\varepsilon q}{\sqrt{1+q^2}} \frac{dz}{\sqrt{\frac{\varepsilon^4 q^2}{(1+q^2)^2} + \left(\frac{\varepsilon^2 q^2}{1+q^2}\right)^2 z^4 - \frac{\varepsilon^4 q^2}{1+q^2} z^2}} = (x - x_0),$$

$$\int_0^{\psi/\psi_*} \frac{dz}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{1+q^2} + \frac{\varepsilon^2 q^2}{1+q^2} z^4 - \varepsilon^2 z^2}} = (x - x_0),$$

$$\int_0^{\psi/\psi_*} \frac{dz}{\sqrt{1 - q^2 z^2 - z^2 + q^2 z^4}} = \frac{\varepsilon(x - x_0)}{\sqrt{1 + q^2}},$$

Отже, у більш компактному вигляді вираз матиме вигляд:

$$\int_0^{\psi/\psi_*} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - q^2 z^2)}} = \frac{\varepsilon(x - x_0)}{\sqrt{1 + q^2}}, \quad (3.46)$$

де $\psi/\psi_* = \frac{\varepsilon q}{\sqrt{1+q^2}}$ відповідає амплітуді коливання маятника Дюффінга, а інтеграл рівняння (3.46) називається еліптичним інтегралом першого роду, для якого існує стандартне позначення:

$$F(\varphi, q) = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - q^2 z^2)}} \equiv \int_0^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 x}}$$

де q – модуль еліптичного інтеграла.

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (3.40) має наступну неявну форму:

$$F\left(\arcsin \frac{\psi}{\psi_*}, q\right) = \frac{\varepsilon(x - x_0)}{\sqrt{1 + q^2}},$$

для якої введемо функцію обернену еліптичному інтегралу.

Якщо $F(\varphi, q) = u(\varphi)$, то обернену функцію $\varphi(u) = \text{am}(u, q)$ називають еліптичною амплітудою і тому $\text{sn}(u, q) \equiv \sin \text{am}(u, q)$. Тоді розв'язок (3.42) можна виразити через еліптичний синус і враховуючи періодичність

$$\text{sn}(u + K, q) = \frac{\text{cn}(u, q)}{\text{dn}(u, q)},$$

ОСТАТОЧНО ЗАПИСАТИ:

$$\psi = \frac{\varepsilon q}{\sqrt{1+q^2}} \frac{\text{cn}(\gamma x, q)}{\text{dn}(\gamma x, q)}, \quad (3.47)$$

де $\gamma = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+q^2}}$. Тоді

$$\psi_{4,5} = q_{4,5} \gamma_{4,5} \frac{\text{cn}(\gamma_{4,5} x, q_{4,5})}{\text{dn}(\gamma_{4,5} x, q_{4,5})} \quad (3.48)$$

Скористаємося крайовими умовами:

$$\psi_{1|_{-a-d-0}} = \psi_{4|_{-a+d-0}},$$

$$\begin{aligned} A e^{\sqrt{|E|x}} \Big|_{-a-d-0} &= q_4 \gamma_4 \frac{\text{cn}(\gamma_4 x, q_4)}{\text{dn}(\gamma_4 x, q_4)} \Big|_{a-d-0}, \\ A e^{-\sqrt{|E|(a+d)}} &= q_4 \gamma_4 \frac{\text{cn}(\gamma_4(a+d), q_4)}{\text{dn}(\gamma_4(a+d), q_4)} \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\psi'_{1|_{-a-d-0}} = \psi'_{4|_{-a+d+0}},$$

$$\begin{aligned} \sqrt{|E|} A e^{\sqrt{|E|x}} \Big|_{-a-d-0} &= q_4 q_4'^2 \gamma_4^2 \frac{\text{sn}(\gamma_4 x, q_4)}{\text{dn}^2(\gamma_4 x, q_4)} \Big|_{-a+d+0}, \\ \sqrt{|E|} A e^{\sqrt{|E|(a+d)}} &= q_4 q_4'^2 \gamma_4^2 \frac{\text{sn}(\gamma_4(a+d), q_4)}{\text{dn}^2(\gamma_4(a+d), q_4)}; \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\psi_{4|_{-a-0}} = \psi_{3|_{-a+0}},$$

$$\begin{aligned} q_4 \gamma_4 \frac{\text{cn}(\gamma_4 x, q_4)}{\text{dn}(\gamma_4 x, q_4)} \Big|_{-a-0} &= A_3 \left(e^{-\sqrt{|E|x}} + e^{\sqrt{|E|x}} \right) \Big|_{-a+0}, \\ q_4 \gamma_4 \frac{\text{cn}(\gamma_4 a, q_4)}{\text{dn}(\gamma_4 a, q_4)} &= A_3 \left(e^{-\sqrt{|E|a}} + e^{\sqrt{|E|a}} \right); \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\psi'_{4|_{-a-0}} = \psi'_{3|_{-a+0}}$$

$$\begin{aligned} q_4 q_4'^2 \gamma_4^2 \frac{\text{sn}(\gamma_4 x, q_4)}{\text{dn}^2(\gamma_4 x, q_4)} \Big|_{-a-0} &= -\sqrt{|E|} A_3 \left(e^{-\sqrt{|E|a}} - e^{\sqrt{|E|a}} \right) \Big|_{-a+0}, \\ q_4 q_4'^2 \gamma_4^2 \frac{\text{sn}(\gamma_4 a, q_4)}{\text{dn}^2(\gamma_4 a, q_4)} &= -\sqrt{|E|} A_3 \left(e^{\sqrt{|E|a}} - e^{-\sqrt{|E|a}} \right), \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\psi_3|_{a-0} = \psi_5|_{a+0},$$

$$\begin{aligned}
A_3 \left(e^{-\sqrt{|E|x}} + e^{\sqrt{|E|x}} \right) \Big|_{a-0} &= q_5 \gamma_5 \frac{\operatorname{cn}(\gamma_5 x, q_5)}{\operatorname{dn}(\gamma_5 x, q_5)} \Big|_{a+0}, \\
A_3 \left(e^{-\sqrt{|E|a}} + e^{\sqrt{|E|a}} \right) &= q_5 \gamma_5 \frac{\operatorname{cn}(\gamma_5 a, q_5)}{\operatorname{dn}(\gamma_5 a, q_5)};
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
\psi'_3 \Big|_{a-0} &= \psi'_5 \Big|_{a+0} \\
\sqrt{|E|} A_3 \left(e^{-\sqrt{|E|x}} - e^{\sqrt{|E|x}} \right) \Big|_{a-0} &= q_5 q_5'^2 \gamma_5^2 \frac{\operatorname{sn}(\gamma_5 x, q_5)}{\operatorname{dn}^2(\gamma_5 x, q_5)} \Big|_{a+0}, \\
\sqrt{|E|} A_3 \left(e^{\sqrt{|E|a}} - e^{-\sqrt{|E|a}} \right) &= q_5 q_5'^2 \gamma_5^2 \frac{\operatorname{sn}(\gamma_5 a, q_5)}{\operatorname{dn}^2(\gamma_5 a, q_5)};
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
\psi_5 \Big|_{a+d-0} &= \psi_2 \Big|_{a+d+0}, \\
q_5 \gamma_5 \cdot \frac{\operatorname{cn}(\gamma_5 x, q_5)}{\operatorname{dn}(\gamma_5 x, q_5)} \Big|_{a+d-0} &= A e^{-\sqrt{|E|x}} \Big|_{a+d+0} \\
q_5 \gamma_5 \cdot \frac{\operatorname{cn}(\gamma_5(a+d), q_5)}{\operatorname{dn}(\gamma_5(a+d), q_5)} &= A e^{-\sqrt{|E|(a+d)}},
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
\psi'_5 \Big|_{a+d-0} &= \psi'_2 \Big|_{a+d-0}, \\
q_5 q_5' \gamma_5^2 \cdot \frac{\operatorname{sn}(\gamma_5 x, q_5)}{\operatorname{dn}^2(\gamma_5 x, q_5)} \Big|_{a+d-0} &= -\sqrt{|E|} A e^{-\sqrt{|E|x}} \Big|_{a+d+0}, \\
q_5 q_5' \gamma_5^2 \cdot \frac{\operatorname{sn}(\gamma_5(a+d), q_5)}{\operatorname{dn}^2(\gamma_5(a+d), q_5)} &= -\sqrt{|E|} A e^{-\sqrt{|E|(a+d)}}.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

З рівностей (3.49) та (3.50) отримуємо:

$$\begin{aligned}
\sqrt{|E|} q_4 \gamma_4 \cdot \frac{\operatorname{cn}(\gamma_4(a+d), q_4)}{\operatorname{dn}(\gamma_4(a+d), q_4)} &= q_4 q_4'^2 \gamma_4^2 \cdot \frac{\operatorname{sn}(\gamma_4(a+d), q_4)}{\operatorname{dn}^2(\gamma_4(a+d), q_4)}, \\
\sqrt{|E|} \cdot \operatorname{cn}(\gamma_4(a+d), q_4) &= q_4'^2 \gamma_4^2 \cdot \frac{\operatorname{sn}(\gamma_4(a+d), q_4)}{\operatorname{dn}(\gamma_4(a+d), q_4)},
\end{aligned}$$

Аналогічно з рівностей (3.55) та (3.56) маємо:

$$\sqrt{|E|} \cdot \operatorname{cn}(\gamma_5(a+d), q_5) = q_5'^2 \gamma_5^2 \cdot \frac{\operatorname{sn}(\gamma_5(a+d), q_5)}{\operatorname{dn}(\gamma_5(a+d), q_5)}$$

А звідси:

$$q_4'^2 \gamma_4^2 \cdot \frac{\operatorname{sn}(\gamma_4(a+d), q_4)}{\operatorname{dn}(\gamma_4(a+d), q_4)} = q_5'^2 \gamma_5^2 \cdot \frac{\operatorname{sn}(\gamma_5(a+d), q_5)}{\operatorname{dn}(\gamma_5(a+d), q_5)},$$

тобто $\gamma_4 = \gamma_5 \equiv \gamma$ та $q_4 = q_5 \equiv q$. Шукаємо коефіцієнти A_3 з (3.51) та (3.52), знаючи, що

$$e^{\sqrt{|E|}a} + e^{-\sqrt{|E|}a} = 2\operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a), \quad e^{\sqrt{|E|}a} - e^{-\sqrt{|E|}a} = 2\operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a),$$

$$\operatorname{sh}(\sqrt{|E|}a) = \sqrt{\operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) - 1}.$$

Тобто

$$2A_3 \operatorname{ch}(\sqrt{|E|}a) = q\gamma \cdot \frac{(\gamma a, q)}{(\gamma a, q)},$$

$$2\sqrt{|E|}A_3 \sqrt{\operatorname{ch}^2(\sqrt{|E|}a) - 1} = qq'\gamma^2 \cdot \frac{\operatorname{sn}(\gamma a, q)}{\operatorname{dn}^2(\gamma a, q)},$$

$$2\sqrt{|E|}A_3 \sqrt{q^2\gamma^2 \cdot \frac{\operatorname{cn}^2(\gamma a, q)}{\operatorname{dn}^2(\gamma a, q)} - \frac{1}{4A_3^2} - 1} = qq'\gamma^2 \cdot \frac{\operatorname{sn}(\gamma a, q)}{\operatorname{dn}^2(\gamma a, q)},$$

$$\frac{\sqrt{|E|}}{\operatorname{dn}(\gamma a, q)} \sqrt{q^2\gamma^2 \operatorname{cn}^2(\gamma a, q) - 4A_3^2 \operatorname{dn}^2(\gamma a, q)} = qq'\gamma^2 \cdot \frac{\operatorname{sn}(\gamma a, q)}{\operatorname{dn}^2(\gamma a, q)},$$

$$A_3 = \frac{\sqrt{|E|q^2\gamma^2 \operatorname{cn}^2(\gamma a, q) \cdot \operatorname{dn}^2(\gamma a, q) - q^2q'^4\gamma^4 \operatorname{sn}^2(\gamma a, q)}}{\sqrt{|E|} \operatorname{dn}^2(\gamma a, q)}$$

Таким чином, маємо наступні розв'язки хвильових функцій в відповідних областях:

$$\psi_{1,2} = q\gamma \frac{\operatorname{cn}(\gamma(a+d), q)}{\operatorname{dn}(\gamma(a+d), q)} e^{\sqrt{|E|(a+d \pm x)}}, \quad (3.57)$$

$$\psi_3 = \frac{\sqrt{|E|q^2\gamma^2 \operatorname{cn}^2(\gamma a, q) \cdot \operatorname{dn}^2(\gamma a, q) - q^2q'^4\gamma^4 \operatorname{sn}^2(\gamma a, q)}}{\sqrt{|E|} \operatorname{dn}^2(\gamma a, q)} \operatorname{ch}(\sqrt{|E|x}), \quad (3.58)$$

$$\psi_{4,5}(x) = \gamma q \frac{\operatorname{cn}(\gamma x, q)}{\operatorname{dn}(\gamma x, q)}. \quad (3.59)$$

Знайдемо повне число елементарних збурень за рахунок нелінійного середовища в потенціальних ямах:

$$N = 2 \left[\int_0^a |\psi_3|^2 dx + \int_a^{a+d} |\psi_5|^2 dx + \int_{a+d}^\infty |\psi_2|^2 dx \right] = 2 (I_1 + I_2 + I_3), \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{a+d}^\infty |\psi_2|^2 dx = \int_{a+d}^\infty A^2 e^{-2\sqrt{|E|x}} dx = -\frac{A^2}{2\sqrt{|E|}} e^{-2\sqrt{|E|x}} \Big|_{a+d}^\infty = \frac{A^2}{2\sqrt{|E|}} e^{-2\sqrt{|E|(a+d)}} = \\ &= \frac{q^2 \gamma^2}{2\sqrt{|E|}} \frac{\text{cn}^2(\gamma(a+d), q)}{\text{dn}^2(\gamma(a+d), q)} e^{2\sqrt{|E|(a+d)}} e^{-2\sqrt{|E|(a+d)}} = \frac{q^2 \gamma^2 \text{cn}^2(\gamma(a+d), q)}{2\sqrt{|E|} \text{dn}^2(\gamma(a+d), q)}; \\ I_2 &= \int_0^a |\psi_3|^2 dx = \int_0^a A_3^2 \left(e^{\sqrt{|E|x}} + e^{-\sqrt{|E|x}} \right)^2 dx = \\ &= A_3^2 \int_0^a \left(e^{2\sqrt{|E|x}} + 2 + e^{-2\sqrt{|E|x}} \right) dx = \\ &= A_3^2 \left[\frac{e^{2\sqrt{|E|x}}}{2\sqrt{|E|}} \Big|_0^a + 2x \Big|_0^a + \frac{e^{-2\sqrt{|E|x}}}{-2\sqrt{|E|}} \Big|_0^a \right] = \frac{A_3^2}{\sqrt{|E|}} \left(\text{sh}(2\sqrt{|E|}a) + 2a \right) = \\ &= \frac{|E| q^2 \gamma^2 \text{cn}^2(\gamma a, q) \cdot \text{dn}^2(\gamma a, q) - q^2 q'^4 \gamma^4 \text{sn}^2(\gamma a, q)}{2|E|^{\frac{3}{2}} \text{dn}^4(\gamma a, q)} \left(\text{sh}(2\sqrt{|E|}a) + 2a \right); \\ I_3 &= \int_a^{a+d} |\psi_5|^2 dx = \int_a^{a+d} q^2 \gamma^2 \cdot \frac{\text{cn}^2(\gamma x, q)}{\text{dn}^2(\gamma x, q)} dx = q^2 \gamma^2 \int_a^{a+d} \frac{\text{cn}^2(\gamma x, q)}{\text{dn}^2(\gamma x, q)} dx = \\ &= q^2 \gamma^2 \int_a^{a+d} \frac{1}{q^2} \left(1 - \frac{q'^2}{\text{dn}^2(\gamma x, q)} \right) dx = \gamma^2 d - \gamma q'^2 \int_a^{a+d} \frac{d(\gamma x)}{\text{dn}^2(\gamma x, q)} = \gamma^2 d - \gamma q'^2 I_3, \\ &\int_a^{a+d} \frac{dy}{\text{dn}^2(y, q)} = \int_a^{a+d} \text{dn}^{-2}(y, q) dy = -\frac{1}{q'^2} \frac{q^2 \text{sn}(y, q) \cdot \text{cn}(y, q)}{\text{dn}(y, q)} \\ &+ \frac{1}{q'^2} \int_0^{a+d} \text{dn}^2(y, q) dy = -\frac{1}{q'^2} \left[\frac{q^2 \text{sn}(y, q) \cdot \text{cn}(y, q)}{\text{dn}(y, q)} - E(\text{am}(y, q), q) \right], \\ I_3 &= -\frac{q^2}{q'^2} \frac{\text{sn}(\gamma x, q) \cdot \text{cn}(\gamma x, q)}{\text{dn}(\gamma x, q)} \Big|_a^{a+d} + \frac{1}{q'^2} E(\text{am}(\gamma x, q), q) \Big|_a^{a+d} = \\ &= -\frac{q^2}{q'^2} \left(\frac{\text{sn}(\gamma(a+d), q) \cdot \text{cn}(\gamma(a+d), q)}{\text{dn}(\gamma(a+d), q)} - \frac{\text{sn}(\gamma a, q) \cdot \text{cn}(\gamma a, q)}{\text{dn}(\gamma a, q)} \right) + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{q'^2} [E(\text{am}(\gamma(a+d), q), q) - E(\text{am}(\gamma a, q), q)]$$

. Тоді

$$\begin{aligned} I_3 = & \gamma^2 d + \gamma q'^2 \cdot \left\{ -\frac{q^2}{q'^2} \left[\frac{\text{sn}(\gamma(a+d), q) \cdot \text{cn}(\gamma(a+d), q)}{\text{dn}(\gamma(a+d), q)} - \frac{\text{sn}(\gamma a, q) \cdot \text{cn}(\gamma a, q)}{\text{dn}(\gamma a, q)} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{q'^2} [E(\text{am}(\gamma(a+d), q), q) - E(\text{am}(\gamma a, q), q)] \right\} \\ N = & 2\gamma^2 d - 2\gamma [E(\text{am}(\gamma(a+d), q), q) - E(\text{am}(\gamma a, q), q)] + \\ & + (2a + \text{sh} 2\sqrt{|E|}a) \cdot \frac{|E|q^2\gamma^2\text{cn}^2(\gamma a, q) \cdot \text{dn}^2(\gamma a, q) - q^2q'^4\gamma^4\sin^2(\gamma a, q)}{|E|^{\frac{3}{2}}\text{dn}^4(\gamma a, q)} + \\ & + 2\gamma q^2 [\Lambda_1(\gamma(a+d), q) - \Lambda_1(\gamma a, q)] + \frac{q^2\gamma^2\text{cn}^2(\gamma(a+d), q)}{\sqrt{|E|}\text{dn}^2(\gamma(a+d), q)}, \end{aligned}$$

де $\Lambda_1(\gamma, q) = \frac{\text{sn}(\gamma a, q) \cdot \text{cn}(\gamma a, q)}{\text{dn}(\gamma a, q)}$, $E(\varphi, q)$ - еліптичний інтеграл другого роду, та $\text{am}(\varphi, q) = \arcsin [\text{sn}(\varphi, q)]$ - еліптична амплітуда.

3.3. Лінійне середовище в потенціальних ямах і нелінійне оточуюче середовище.

Нелінійне оточуюче середовище можна описати наступними рівняннями:

$$E\psi_{1,2,3} = -\frac{d^2\psi_{1,2,3}}{dx^2} + 2\psi_{1,2,3}^3 \quad (3.61)$$

Розглянемо рівняння

$$E\psi_{1,2} = -\frac{d^2\psi_{1,2}}{dx^2} + 2\psi_{1,2}^3 \quad (3.62)$$

Домножимо обидві частини рівняння на ψ' :

$$\psi'' \cdot \psi' = (-E\psi + 2\psi^3) \cdot \psi'$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 \right) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{E}{2} \psi^2 + \frac{1}{2} \psi^4 \right)$$

Інтегруємо обидві частини:

$$\left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 = -\lambda \psi^2 + \psi^4 + C$$

$C = 0$ (при $x \rightarrow \infty$):

$$\left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 = \psi^4 - E\psi^2$$

Перепишемо:

$$\begin{aligned} \psi' &= \pm \psi \sqrt{\psi^2 - E} \\ \int \frac{d\psi}{\psi \sqrt{\psi^2 - E}} &= \pm \int dx \end{aligned} \quad (3.63)$$

Обчислимо інтеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\psi}{\psi \sqrt{\psi^2 - |E|}} &= \int \frac{d\psi}{\psi \sqrt{\psi^2 - \varepsilon_0^2}} = \left| \psi = \frac{\varepsilon_0}{\text{sh}(t)}, \quad t = \text{arcsch} \frac{\varepsilon_0}{\psi}, \quad d\psi = -\frac{\varepsilon_0 \text{ch}(t)}{\text{sh}^2(t)} dt \right| = \\ &= \int \frac{\varepsilon_0 \cdot \text{ch}(t) \cdot \text{sh}(t) dt}{\varepsilon_0 \cdot \text{sh}^2(t) \sqrt{\frac{\varepsilon_0^2}{\text{ch}^2(t)} + \varepsilon_0^2}} = \int \frac{\text{ch}(t) dt}{\varepsilon_0 \text{sh}(t) \frac{\sqrt{1+\text{sh}^2(t)}}{\text{sh}(t)}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \frac{\text{ch}(t) dt}{\text{ch}(t)} = \frac{t}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \text{arcsch} \frac{\varepsilon_0}{\psi} \end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \text{arcsch} \frac{\varepsilon_0}{\psi} = \pm x - x_0 \quad \Rightarrow \quad \text{arcsch} \frac{\varepsilon_0}{\psi} = \varepsilon_0 (|x| - x_0)$$

$$\varepsilon_0 = \sqrt{|E|}$$

В результаті отримуємо гіперболічний розв'язок:

$$\psi(x) = \mp \frac{\varepsilon_0}{\text{sh}(\varepsilon_0 (x \mp x_0))} \quad (3.64)$$

Розглянемо тепер рівняння

$$E \cdot \psi_s = -\frac{d^2 \psi_3}{dx^2} + 2 \cdot \psi_s^3, \quad (3.65)$$

розв'язок якого запишемо у вигляді

$$\psi = \frac{A}{\operatorname{cn}(Bx)}. \quad (3.66)$$

Шукаємо відповідні похідні:

$$\psi' = \frac{AB}{\operatorname{cn}^2(Bx)} \cdot \operatorname{sn}(Bx) \cdot \operatorname{dn}(Bx),$$

$$\psi'' = \frac{AB^2}{\operatorname{cn}^2(Bx)} \left(\operatorname{cn}(Bx) \cdot \operatorname{dn}^2(Bx) - q^2 \operatorname{sn}(Bx) \cdot \operatorname{cn}(Bx) - 2 \frac{\operatorname{sn}^2(Bx) \cdot \operatorname{dn}^2(Bx)}{\operatorname{cn}(Bx)} \right),$$

Підставимо в рівняння (3.65), маємо

$$\frac{AB^2}{\operatorname{cn}^2(Bx)} \left(\operatorname{cn}(Bx) \cdot \operatorname{dn}^2(Bx) - q^2 \cdot \operatorname{sn}^2(Bx) \cdot \operatorname{cn}(Bx) + 2 \frac{\operatorname{sn}^2(Bx) \cdot \operatorname{dn}^2(Bx)}{\operatorname{cn}(Bx)} \right) -$$

$$-\varepsilon_0^2 \frac{A}{\operatorname{cn}(Bx)} - 2 \frac{A^3}{\operatorname{cn}^3(Bx)} = 0,$$

$$AB^2 \left(\frac{1}{\operatorname{cn}(Bx)} - \frac{2q^2 \operatorname{sn}^2(Bx)}{\operatorname{cn}(Bx)} + \frac{2 \operatorname{sn}^2(Bx)}{\operatorname{cn}^3(Bx)} - \frac{2q^2 \operatorname{sn}^2(Bx)}{\operatorname{cn}^3(Bx)} + \frac{2q^2 \operatorname{sn}^2(Bx)}{\operatorname{cn}(Bx)} \right)$$

$$-\varepsilon_0^2 \cdot \frac{A}{\operatorname{cn}(Bx)} - 2 \cdot \frac{A^3}{\operatorname{cn}^3(Bx)} = 0,$$

$$AB^2 \left(\frac{1}{\operatorname{cn}(Bx)} + \frac{2q'^2}{\operatorname{cn}^3(Bx)} (1 - \operatorname{cn}^2(Bx)) \right) - \varepsilon_0^2 \cdot \frac{A}{\operatorname{cn}(Bx)} - 2 \cdot \frac{A^3}{\operatorname{cn}^3(Bx)} = 0,$$

$$AB^2 \left(\frac{1}{\operatorname{cn}(Bx)} + \frac{2q'^2}{\operatorname{cn}^3(Bx)} - \frac{2q'^2}{\operatorname{cn}(Bx)} \right) - \varepsilon_0^2 \cdot \frac{A}{\operatorname{cn}(Bx)} - 2 \cdot \frac{A^3}{\operatorname{cn}^3(Bx)} = 0,$$

де $q' = \sqrt{1 - q^2}$.

Маємо наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} B^2 - 2q'^2 B^2 - \varepsilon_0^2 = 0, \\ 2q'^2 B^2 - 2A^2 = 0. \end{cases}$$

Звідки

$$1 - 2q'^2 = 1 - 2(1 - q^2) = 2q^2 - 1.$$

$$B = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2q^2 - 1}},$$

за умови, що $\frac{1}{\sqrt{2}} < q \leq 1$, відповідно

$$A = q' B = q' \cdot \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2q'^2 - 1}}.$$

Позначимо $\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2q^2 - 1}} = \gamma_3$, $q = q_3$, маємо розв'язок рівняння (3.65):

$$\psi_3 = \frac{q' \gamma_3}{\text{cn}(\gamma_3 x, q)}. \quad (3.67)$$

Лінійне середовище в потенціальних ямах описується рівнянням (3.2)

$$E \cdot \psi_{4,5} = -\frac{d^2 \psi_{4,5}}{dx^2} - U_0 \cdot \psi_{4,5}, \quad (3.68)$$

розв'язки яких мають вигляд

$$\psi_{4,5} = C_{4,5} \cos(\varepsilon x) + D_{4,5} \sin(\varepsilon x). \quad (3.69)$$

Для знаходження параметрів C_i та D_i ($i = 4, 5$) скористаємося крайовими умовами (2.2):

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{\text{sh}(\varepsilon_0(a+d+x_0))} = C_4 \cos \varepsilon(a+d) - D_4 \sin \varepsilon(a+d), \\ \frac{\varepsilon_0^2 \text{ch}(\varepsilon_0(a+d+x_0))}{\text{sh}^2(\varepsilon_0(a+d+x_0))} = \varepsilon C_4 \sin \varepsilon(a+d) + \varepsilon D_4 \cos \varepsilon(a+d); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon_0}{\text{sh}(\varepsilon_0(a+d+x_0))} = C_5 \cos \varepsilon(a+d) + D_5 \sin \varepsilon(a+d), \\ \frac{\varepsilon_0^2 \text{ch}(\varepsilon_0(a+d+x_0))}{\text{sh}^2(\varepsilon_0(a+d+x_0))} = \varepsilon C_5 \sin \varepsilon(a+d) - \varepsilon D_5 \cos \varepsilon(a+d); \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_4 \cos(\varepsilon a) - D_4 \sin(\varepsilon a) = \frac{q' \gamma_3}{\operatorname{cn}(\gamma_3 a, q)}, \\ \varepsilon C_4 \sin(\varepsilon a) + \varepsilon D_4 \cos(\varepsilon a) = \frac{q' \gamma_3^2}{\operatorname{cn}^2(\gamma_3 a, q)} \operatorname{sn}(\gamma_3 a, q) \operatorname{dn}(\gamma_3 a, q); \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_5 \cos(\varepsilon a) + D_5 \sin(\varepsilon a) = \frac{q' \gamma_3}{(\gamma_3 a, q)}, \\ \varepsilon C_5 \sin(\varepsilon a) - \varepsilon D_5 \cos(\varepsilon a) = \frac{q' \gamma_3^2}{2(\gamma_3 a, q)} (\gamma_3 a, q) (\gamma_3 a, q); \end{cases}$$

Аналогічно знаходимо

$$C_4 = \frac{q' \gamma_3}{\operatorname{cn}(\gamma_3 a, q)} \left[\gamma_3 \frac{\operatorname{sn}(\gamma_3 a, q) \cdot \operatorname{dn}(\gamma_3 a, q)}{\operatorname{cn}(\gamma_3 a, q)} \sin \varepsilon a + \cos \varepsilon a \right],$$

$$D_4 = \frac{q' \gamma_3}{\operatorname{cn}(\gamma_3 a, q)} \left[\gamma_3 \frac{\operatorname{sn}(\gamma_3 a, q) \cdot \operatorname{dn}(\gamma_3 a, q)}{\operatorname{cn}(\gamma_3 a, q)} \cos \varepsilon a - \sin \varepsilon a \right].$$

Відповідно

$$C_5 = \frac{q' \gamma_3}{\operatorname{cn}(\gamma_3 a, q)} \left[\gamma_3 \frac{\operatorname{sn}(\gamma_3 a, q) \cdot \operatorname{dn}(\gamma_3 a, q)}{\operatorname{cn}(\gamma_3 a, q)} \sin \varepsilon a + \cos \varepsilon a \right],$$

$$D_5 = \frac{q' \gamma_3}{\operatorname{cn}(\gamma_3 a, q)} \left[-\gamma_3 \frac{\operatorname{sn}(\gamma_3 a, q) \cdot \operatorname{dn}(\gamma_3 a, q)}{\operatorname{cn}(\gamma_3 a, q)} \cos \varepsilon a + \sin \varepsilon a \right]. \quad (3.70)$$

Отже, розв'язки рівняння (3.68) мають вигляд

$$\Psi_{4,5} = \frac{q' \gamma_3}{\operatorname{cn}(\gamma_3 a, q)} [\gamma_3 \Lambda_2(\gamma_3 a, q) \cdot \sin \varepsilon(a \pm x) + \cos \varepsilon(a \pm x)], \quad (3.71)$$

$$\Lambda_2(\gamma_3, a, q) = \frac{\operatorname{sn}(\gamma_3 a, q) \cdot \operatorname{dn}(\gamma_3 a, q)}{\operatorname{cn}(\gamma_3 a, q)}$$

Знайдено повне число елементарних збурень, яке залежить від параметрів обох потенціальних ям і обумовлене нелінійним середовищем між ямами та поза ними:

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx = 2 \left(\int_{a+d}^{+\infty} |\psi_1|^2 dx + \int_0^a |\psi_3|^2 dx + \int_a^{a+d} |\psi_4|^2 dx \right) =$$

$$= 2(J_1 + J_2 + J_3) \quad (3.72)$$

Обчислимо J_1 :

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{a+d}^{+\infty} |\psi_1|^2 dx = \int_{a+d}^{+\infty} \left[\frac{\mp \varepsilon_0}{\operatorname{sh}(\varepsilon_0(x \mp x_0))} \right]^2 dx = \varepsilon_0^2 \int_{a+d}^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{sh}^2(\varepsilon_0(x \mp x_0))} = \\ &= -\varepsilon_0 \cdot \operatorname{cth}(\varepsilon_0(x \mp x_0)) \Big|_{a+d}^{+\infty} = -\varepsilon_0 [1 - \operatorname{cth}(\varepsilon_0(a + d + x_0))] \end{aligned}$$

Обчислимо J_2 :

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^a |\Psi_3|^2 dx = \int_0^a \frac{q'^2 \gamma_3^2}{\operatorname{cn}^2(\gamma_3 x, q)} dx = q'^2 \gamma_3^2 \int_0^a \frac{d(\gamma_3 x,)}{\operatorname{cn}^2(\gamma_3 x, q)} = \\ &= q'^2 \gamma_3 \left\{ -\frac{1}{q'^2} \left[-\frac{\operatorname{sn}(\gamma_3 x, q) \operatorname{dn}(\gamma_3 x, q)}{\operatorname{cn}(\gamma_3 x, q)} + E(\operatorname{am}(\gamma_3 x, q)) - q'^2 \gamma_3 x \right] \right\} \\ &= \gamma_3 \left[\frac{\operatorname{sn}(\gamma_3 x, q) \operatorname{dn}(\gamma_3 x, q)}{\operatorname{cn}(\gamma_3 x, q)} - E(\operatorname{am}(\gamma_3 x, q)) + q'^2 \gamma_3 x \right] \Big|_0^a \\ &= \gamma_3 \left[\frac{\operatorname{sn}(\gamma_3 a, q) \operatorname{dn}(\gamma_3 a, q)}{\operatorname{cn}(\gamma_3 a, q)} - E(\operatorname{am}(\gamma_3 a, q)) + q'^2 \gamma_3 a \right], \\ \int \frac{1}{\operatorname{cn}^2(\gamma_3 x, q)} dx &= \frac{1}{q^2} \left[\frac{\operatorname{sn}(\gamma_3 x, q) \operatorname{dn}(\gamma_3 x, q)}{\operatorname{cn}(\gamma_3 x, q)} - q^2 \int \operatorname{cn}^2(\gamma_3 x, q) dx \right], \\ \int \operatorname{cn}^2(\gamma_3 x, q) dx &= \frac{1}{q^2} (E(\operatorname{am}(\gamma_3 x, q)) - q'^2 \gamma_3 x) \\ J_2 &= \gamma_3^2 \left[\frac{\operatorname{sn}(\gamma_3 a, q) \operatorname{dn}(\gamma_3 a, q)}{\operatorname{cn}(\gamma_3 a, q)} - E(\operatorname{am}(\gamma_3 a, q)) + q'^2 \gamma_3 a \right]. \\ J_3 &= \int_a^{a+d} |\psi_4|^2 dx = \int_a^{a+d} [C_4 \cos(\varepsilon x) + D_4 \sin(\varepsilon x)]^2 dx = \\ &= \int_a^{a+d} (C_4^2 \cos^2(\varepsilon x) + 2C_4 D_4 \cos(\varepsilon x) \sin(\varepsilon x) + D_4^2 \sin^2(\varepsilon x)) dx = \\ &= C_4^2 \int_a^{a+d} \frac{1 + \cos(2\varepsilon x)}{2} dx + \frac{C_4 D_4}{\varepsilon} \int_a^{a+d} \sin(2\varepsilon x) dx + D_4^2 \int_a^{a+d} \frac{1 - \cos(2\varepsilon x)}{2} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_4^2 \left[\frac{d}{2} + \frac{1}{4\varepsilon} \sin 2(\varepsilon x) \right]_a^{a+d} - \frac{C_4 D_4}{2\varepsilon} \cos 2(\varepsilon x) \Big|_a^{a+d} + D_4^2 \left[\frac{d}{2} - \frac{1}{4\varepsilon} \sin 2(\varepsilon x) \right]_a^{a+d} \\
&= C_4^2 \left[\frac{d}{2} + \frac{1}{4\varepsilon} (\sin 2\varepsilon(a+d) - \sin 2(\varepsilon a)) \right] - \frac{C_4 D_4}{2\varepsilon} [\cos 2\varepsilon(a+d) - \cos 2(\varepsilon a)] + \\
&\quad + D_4^2 \left[\frac{d}{2} - \frac{1}{4\varepsilon} (\sin 2\varepsilon(a+d) - \sin 2(\varepsilon a)) \right] = \\
&= (C_4^2 + D_4^2) \frac{d}{2} + \frac{C_4^2 - D_4^2}{4\varepsilon} (\sin 2\varepsilon(a+d) - \sin 2(\varepsilon a)) - \frac{C_4 D_4}{2\varepsilon} (\cos 2\varepsilon(a+d) - \cos 2(\varepsilon a))
\end{aligned}$$

В результаті з (3.72) маємо:

$$\begin{aligned}
N = 2(J_1 + J_2 + J_3) = 2 \Big\{ &- 2\varepsilon_0 [1 - \text{cth}(\varepsilon_0(a+d+x_0))] + \\
&+ \gamma_3^2 \left[\frac{\text{sn}(\gamma_3 a, q) \text{dn}(\gamma_3 a, q)}{\text{cn}(\gamma_3 a, q)} - E(\text{am}(\gamma_3 a, q)) + q'^2 \gamma_3 a \right] + (C_4^2 + D_4^2) \frac{d}{2} + \\
&+ \frac{C_4^2 - D_4^2}{4\varepsilon} [\sin 2\varepsilon(a+d) - \sin 2(\varepsilon a)] - \frac{C_4 D_4}{2\varepsilon} [\cos 2\varepsilon(a+d) - \cos 2(\varepsilon a)] \Big\},
\end{aligned}$$

де:

$$\begin{aligned}
C_4^2 + D_4^2 &= \frac{q'^2 \gamma_3^2}{\text{cn}^2(\gamma_3 a, q)} \left[\gamma_3^2 \frac{\text{sn}^2(\gamma_3 a, q) \text{dn}^2(\gamma_3 a, q)}{\text{cn}^2(\gamma_3 a, q)} + 1 \right]; \\
C_4^2 - D_4^2 &= \frac{q'^2 \gamma_3^2}{\text{cn}^2(\gamma_3 a, q)} \left[\cos 2(\varepsilon a) + \gamma_3 \frac{\text{sn}(\gamma_3 a, q) \text{dn}(\gamma_3 a, q)}{\text{cn}(\gamma_3 a, q)} \sin 2(\varepsilon a) - \right. \\
&\quad \left. - \gamma_3^2 \frac{\text{sn}^2(\gamma_3 a, q) \text{dn}^2(\gamma_3 a, q)}{\text{cn}^2(\gamma_3 a, q)} \cos 2(\varepsilon a) \right]; \\
C_4 D_4 &= \frac{q'^2 \gamma_3^2}{\text{cn}^2(\gamma_3 a, q)} \left[\gamma_3 \frac{\text{sn}(\gamma_3 a, q) \text{dn}(\gamma_3 a, q)}{\text{cn}(\gamma_3 a, q)} \cos 2(\varepsilon a) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\gamma_3 \text{sn}^2(\gamma_3 a, q) \text{dn}^2(\gamma_3 a, q)}{2 \text{cn}^2(\gamma_3 a, q)} \sin 2(\varepsilon a) - \frac{1}{2} \sin 2(\varepsilon a) \right].
\end{aligned}$$

Таким чином, маємо:

$$N = 2 \left\{ \gamma_3 [q'^2 \gamma_3 a + \Lambda_2(\gamma_3 a, q) - E(\text{am}(\gamma_3 a, q), q)] + \varepsilon_0 [\text{cth}(\varepsilon_0(a+d+x_0)) - 1] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{q'^2 \gamma_3^2}{2 \operatorname{cn}^2(\gamma_3 a, q)} \left[d (1 + \gamma_3^2 \Lambda_2^2(\gamma_3 a, q)) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2\varepsilon} [4\gamma_3 \Lambda_2(\gamma_3 a, q) \sin^2 \varepsilon d + (1 - \gamma_3^2 \Lambda_2(\gamma_3 a, q)) \sin(2\varepsilon d)] \right] \Bigg\}
\end{aligned}$$

де

$$\Lambda_2(\gamma_3 a, q) = \frac{\operatorname{sn}(\gamma_3 a, q) \operatorname{dn}(\gamma_3 a, q)}{\operatorname{cn}(\gamma_3 a, q)}$$

Висновки до Розділу 3

У третьому розділі було розглянуто три випадки просторового розподілу нелінійності в системі:

- лінійне середовище в потенціальних ямах і лінійне оточуюче середовище;
- нелінійне середовище в потенціальних ямах і лінійне оточуюче середовище;
- лінійне середовище в потенціальних ямах і нелінійне оточуюче середовище.

Для кожного з випадків були побудовані аналітичні розв'язки рівняння Гросса–Пітаєвського, що описують локалізовані стани. Розв'язки було отримано у вигляді тригонометричних, гіперболічних або еліптичних функцій залежно від типу середовища. Проведено зшивання цих функцій на межах між лінійними та нелінійними областями, з урахуванням неперервності як самої хвильової функції, так і її похідної. Особливу увагу приділено виконанню умови нормування хвильової функції — збереженню повного числа частинок N , що забезпечує фізичну допустимість отриманого стану.

Аналіз показав, що локалізація та форма хвильової функції, а також відповідні значення хімічного потенціалу залежать не лише від глибини потенціалу, але й від того, де саме в системі присутня нелінійність. Наявність

нелінійної взаємодії в оточенні або в ямах змінює характер локалізованого стану та впливає на розподіл густини частинок.

ВИСНОВКИ

У цій роботі було проведено теоретичне дослідження того, як поводить ся Бозе–Ейнштейнівський конденсат у спеціальному періодичному потенціалі — оптичній ґратці. Основна увага приділялася локалізованим станам, тобто таким, у яких хвильова функція конденсату зосереджена в певних обмежених зонах простору.

Для моделювання було обрана система з двома потенціальними ямами. У кожній області середовище могло бути лінійним або нелінійним. Це дозволило розглянути різні ситуації, близькі до реальних експериментів. Рівняння Гросса–Пітаєвського, яке описує динаміку БЕК, розв’язувалося аналітично окремо в кожній зоні. У лінійних областях використовувались прості математичні функції, а в нелінійних — спеціальні функції Якобі.

Після побудови розв’язків для кожної області, вони були об’єднані в єдину формулу шляхом «зшивки» на межах між областями. Такий підхід дозволив точно описати просторову структуру конденсату в заданому потенціалі.

Під час аналізу отриманих рішень було показано, що зміна глибини ям, їх ширини або сили нелінійності суттєво впливає на вигляд і властивості локалізованих станів. У деяких випадках утворюються симетричні профілі, в інших — несиметричні, і це залежить від параметрів середовища.

Результати підтверджують, що аналітичні методи добре підходять для вивчення БЕК у складних потенціалах. Отримані розв’язки можуть бути корисними для подальших обчислень, перевірки стабільності таких станів і створення моделей для майбутніх експериментів. Також вони можуть знайти застосування в дослідженнях з фізики ультрахолодних атомів і в області квантових технологій.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Laun V. O., Gerasimchuk I. V. Локалізовані стани Бозе–Ейнштейнівського конденсату в оптичних ґратках // Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених. — 2025. — С. 55—58.
2. Kevrekidis P., Frantzeskakis D., Carretero-Gonzalez R. Basic Mean-Field Theory for Bose-Einstein Condensates // Т. 45. — 01.2008. — С. 3—21. — ISBN 978-3-540-73590-8. — DOI: [10.1007/978-3-540-73591-5_1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-73591-5_1).
3. Jesse Emspak T. G. Bose-Einstein condensate: The fifth state of matter. — 29.03.2024. — URL: <https://www.livescience.com/54667-bose-einstein-condensate.html>.
4. Küçük E. V. The Birth of Quantum Mechanics: A Historical Study Through the Canonical Papers. — 2025. — arXiv: [2503.13630](https://arxiv.org/abs/2503.13630) [physics.hist-ph].
5. CERN. The Standard Model. — URL: <https://home.cern/science/physics/standard-model>.
6. Giberson K. Bosons. — 2022. — URL: <https://www.ebsco.com/research-starters/physics/bosons>.
7. The Nobel Prize Organization. The 2001 Nobel Prize in Physics. — 2001. — URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2001/popular-information>.
8. Bose–Einstein Condensation Revisited. — 04.12.2001. — URL: <https://cerncourier.com/a/bose-einstein-condensation-revisited/>.
9. Mittar V. Bose-Einstein condensation: what, how and beyond. — 2022. — arXiv: [2203.07038](https://arxiv.org/abs/2203.07038) [cond-mat.stat-mech].

10. Davis M. J. [Finite Temperature Effects in Bose–Einstein Condensates](#) : PhD dissertation / Davis Matthew J. — Brisbane, Australia : The University of Queensland, 2001.
11. Andersen H. K. [Bose–Einstein Condensates in Optical Lattices](#) : PhD dissertation / Andersen Henrik Kjær. — Aarhus, Denmark : University of Aarhus, 2008.
12. Gerasimchuk V. S., Gerasimchuk I. V., Dranik N. I. Solutions of Nonlinear Schrödinger Equation with Two Potential Wells in Linear/Nonlinear Media // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. — 2016. — T. 12, № 2. — C. 168—176.
13. Janke E., Emde F., Lösch F. Special Functions (Formulas, Graphs, Tables). — Moscow : Nauka, 1964. — C. 344.
14. Kosevich A. M., Kovalev A. S. Vvedenie v nelineinuyu fizicheskuyu mekhaniku. — Kyiv : Naukova Dumka, 1989. — C. 304. — ISBN 5-12-000865-8.