

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ
ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

На правах рукопису
УДК 519.2

До захисту допущено
Завідувач кафедри ММСА
Оксана ТИМОЩУК
«___» _____ 2022 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра за спеціальністю 124 «Системний аналіз»
на тему: «Пуассонівські випадкові міри»

Виконала:

студентка 2 курсу, групи КА-13мп
Горбенко Надія Олександрівна

Керівник:

д.ф.-м.н., проф. Пилипенко А.Ю.

Рецензент: доцент кафедри математичного аналізу
та теорії ймовірностей
КПІ ім. Ігоря Сікорського
к.т.н., доц. Боднарчук С. В.

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації
немає запозичень з праць інших авторів
без відповідних посилань
Студент (підпис): _____

Київ 2022

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ
ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Рівень вищої освіти — другий (магістерський)

Спеціальність (ОПП) — 124 «Системний аналіз» («Системний аналіз фінансового ринку»)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри ММСА

Оксана ТИМОЩУК

«___» _____ 2022 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студентці Горбенко Надії Олександрівні

1. Тема дисертації: «Пуассонівські випадкові міри», науковий керівник дисертації Пилипенко Андрій Юрійович, д.ф.-м.н., професор, затверджені наказом по університету від «03» листопада 2022 р. № 4046-с

2. Термін подання студентом дисертації: 12.12.2022 р. _____

3. Об'єкт дослідження: методи розв'язку задач, пов'язаних із пуассонівськими випадковими точковими мірами

4. Предмет дослідження: пуассонівські точкові випадкові міри.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

- 1) здійснити огляд технічної літератури за темою роботи;
- 2) дослідити актуальність обраної теми;
- 3) ознайомитись із існуючими методами оцінювання пуассонівських точкових випадкових мір;
- 4) розглянути методи та підходи до розв'язання різних задач з пуассонівськими випадковими мірами;
- 5) побудувати конзистентні оцінки, обчислити математичні сподівання, вивести функцію розподілу та щільності для пуассонівського випадкового поля із заданої мірою інтенсивності, яка містить декілька невідомих параметрів;
- 6) знайти чисельні відповіді в конкретних задачах та вивести аналітичні формули;
- 7) провести аналіз результатів;
- 8) провести аналіз ринкових можливостей запуску стартап проекту;
- 9) розробити концептуальні висновки;
- 10) підготувати ілюстративний матеріал;
- 11) оформити пояснювальну записку.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу:

- 1) методи, що використовувалися для дослідження пуассонівських випадкових мір;
- 2) приклад результатів використання програми «Wolfram Alpha»;
- 3) розрахункові таблиці з результатами.

7. Орієнтовний перелік публікацій:

- 1) Горбенко Н.О., Пилипенко А.Ю. Інтегрування пуассонівських випадкових мір та знаходження їх асимптотик та оцінка параметрів пуассонівських випадкових полів: збірник доповідей І науково-практичної конференції «Системні науки та інформатика», 22–29 листопада 2022 року, Київ. – К., НН ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. С. 181-185..

8. Дата видачі завдання: 1 вересня 2022 року.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Отримання завдання на магістерську дисертацію	01.09.2022 – 05.09.2022	Виконано
2.	Огляд технічної літератури за темою	06.09.2022 – 12.09.2022	Виконано
3.	Концептуальний вступ дисертації. Формулювання об'єкта, предмета, цілі, завдань, новизни, практичної значущості результатів. Дослідження актуальності обраної тем	13.09.2022 – 19.09.2022	Виконано
4.	Перший розділ. Аналіз предметної області.	20.09.2022 – 26.09.2022	Виконано
5.	Другий розділ. Теоретичні відомості	27.09.2022 – 03.10. 2022	Виконано
6.	Третій розділ. Математична постановка задач. Вибір методів оцінки.	04.10.2022 – 10.10.2022	Виконано
7.	Виведення аналітичних формул, знаходження останніх чисельних відповідей у задачах.	11.10.2022 – 17.10.2022	Виконано
8.	Аналіз результатів	18.10.2022 – 24.10.2022	Виконано
9.	Проведення аналізу ринкових можливостей стартап – проекту	25.10.2022 – 31.10.2022	Виконано
10.	Підготовка ілюстративного матеріалу	01.11.2022 – 14.11.2022	Виконано
11.	Оформлення пояснювальної записки	15.11.2022 – 26.11.2022	Виконано

Студент

Надія ГОРБЕНКО

Науковий керівник дисертації

Андрій ПИЛИПЕНКО

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 81 с., 10 рис., 20 табл., 18 джерел.

ПУАССОНІВСЬКІ ТОЧКОВІ ВИПАДКОВІ МІРИ, РЕКОРДИ,
СТАТИСТИКА ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ, КОНЗИСТЕНТНІ
ОЦІНКИ, ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ.

Об'єктом дослідження є методи розв'язку задач, пов'язаних із пуассонівськими випадковими точковими мірами.

Предметом дослідження є пуассонівські точкові міри.

Мета дослідження:

- 1) дослідження пуассонівських точкових випадкових мір, а саме: знаходження асимптотичної поведінки екстремальних значень,
- 2) побудова конзистентних оцінок параметрів полів, тощо.

Актуальність теми: процес Пуассона є одним із найпростіших стохастичних процесів, і тому його часто вважають першою математичною моделлю в багатьох випадках. Водночас ідентифікація багатьох важливих моделей пуассонівських процесів (як і загальна теорія оцінювання) ще недостатньо розроблена, і така спроба допомогла б покрити цю прогалину.

Результат роботи: розглянуто методи та підходи до обчислень різних задач з пуассонівськими випадковими мірами, знайдено чисельні відповіді в конкретних задачах та виведено аналітичні формули.

Новизна роботи: досліджено нові прикладні задачі пов'язані з пуассонівськими випадковими мірами та розроблено нові методи для їх розв'язання.

ABSTRACT

Master's Thesis 81 pp., 10 Fig., 20 tables, 18 sources.

POISSON POINT RANDOM MEASURES, RECORDS, STATISTICS OF RANDOM PROCESSES, CONSISTENT ESTIMATES, LAW OF LARGE NUMBERS.

The object of the study is methods of solving problems related to Poisson random point measures.

The subject of the study is Poisson point measures.

- 1) the aim of the study: the study of Poisson point random measures, namely: finding the asymptotic behavior of extreme values,
- 2) construction of consistent estimates of field parameters, etc.

Relevance of the topic: the Poisson process is one of the simplest stochastic processes and therefore is often considered as the first mathematical model in many cases. At the same time, the identification of many important models with Poisson processes (as well as the general theory of estimation) is not yet sufficiently developed, and such an attempt would help to fill this gap.

The result of the work: methods and approaches to the calculation of various problems with Poisson random measures were considered, numerical answers were found in specific problems, and analytical formulas were derived.

Novelty of work: new applied problems related to Poisson random measures were investigated and new methods for their solution were developed.

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1 ДОСЛІДЖЕННЯ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ	11
1.1 Актуальність	11
1.2 Приклади застосування процесу Пуассона	11
1.3 Екстремальні значення та їх застосування	12
1.4 Конзистентні оцінки	13
Висновки до розділу 1	14
РОЗДІЛ 2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ	15
2.1 Моделі Пуассона	15
2.2 Розподіл Пуассона	18
2.3 Неатомарність розподілу Пуассона	25
2.4 Пуассонівська випадкова точкова міра, визначення та основні властивості	27
2.5 Теорема суперпозиції	32
2.6 Теорема про відображення	35
2.7 Теорема про існування	35
2.8 Марковані пуассонівські процеси	37
2.9 Представлення простору поля	40

	8
Висновки до розділу 2	41
РОЗДІЛ 3 ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ТА ЇХ РОЗВ’ЯЗКИ	42
3.1 Допоміжні приклади	42
3.2 Основні задачі:	47
РОЗДІЛ 4 РОЗРОБКА ВЛАСНОГО СТАРТАП ПРОЕКТУ	58
4.1 План розробки стартапу та масштабування його на ринок	59
4.2 Опис ідеї стартап-проекту	60
4.3 Технологічний аудит ідеї проекту	62
4.4 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту	64
4.5 Розроблення ринкової стратегії стартап-проекту	72
4.6 Розроблення маркетингової програми стартап-проекту	75
Висновки до розділу 4	78
ВИСНОВКИ	79
ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ	80

ВСТУП

Теорія екстремальних значень – це елегантна та математично захоплююча теорія, а також наука, який пронизує величезну різноманітність застосувань. Розглянемо такі приклади: станції моніторингу забруднення повітря, які розташовані в різних місцях міста, урядові постанови вимагають, щоб концентрація забруднення, виміряна на кожному місці, була нижче певного рівня, тому якраз ці максимальні значення нас і цікавлять; гірничодобувна компанія відбирає зразки керна в певному регіоні, продовження буріння відбуватиметься в напрямку максимального зосередження руди; в спортивних змаганнях нецікаві другі, треті місця, а цікавлять в першу чергу рекорди України, світові і т.п. [1].

Загальною рисою цих ситуацій є те, що найбільший інтерес представляють найбільші або найменші значення спостережень. Рішення в прикладних задачах іноді приймаються на основі поведінки екстремальних значень [2].

Мета роботи полягає в дослідженні пуассонівських точкових випадкових мір, а саме: знаходження асимптотичної поведінки екстремальних значень, побудові конзистентних оцінок параметрів полів, тощо.

Об'єктом дослідження є методи розв'язку задач, пов'язаних із пуассонівськими випадковими точковими мірами. Предметом дослідження магістерської дисертації є пуассонівські точкові міри.

Методи дослідження ґрунтуються на вичерпному використанні знань, отриманих під час вивчення дисципліни «Теорія випадкових процесів» та «Математична статистика».

Основний зміст роботи:

Перший розділ даної роботи присвячений аналізу предметної області. В ньому буде розказано більш детально про актуальність пуассонівських процесів, використання екстремальних значень та побудову конзистентних оцінок. Наведено приклади використання.

У другому розділі описано основну теоретичну частину, яка потрібна нам для розв'язку нашої задачі.

Третій розділ присвячено формулюванню наших задач, описані різні методи розв'язку.

Четвертий розділ висвітлює стартап проекту магістерської дисертації.

РОЗДІЛ 1 ДОСЛІДЖЕННЯ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ

1.1 Актуальність

Процес Пуассона є одним із найпростіших стохастичних процесів, і тому його часто вважають першою математичною моделлю в багатьох випадках. Існує велика кількість літератури про застосування моделей процесів Пуассона в різних областях (астрономії, біології, аналізі зображень, медицині, фізиці, теорії надійності тощо). Водночас ідентифікація багатьох важливих моделей пуассонівських процесів (як і загальна теорія оцінювання) ще недостатньо розроблена, і така спроба допомогла б покрити цю прогалину [2].

1.2 Приклади застосування процесу Пуассона

Роботу Симеона Дені Пуассона «Дослідження про ймовірність вироків у кримінальних та цивільних справах», в якій було введено розподіл, в подальшому названий його ім'ям, було опубліковано в 1837. Завдяки цій роботі було теоретизовано кількість несправедливих засуджень в тій чи іншій країні; автор сфокусувався на деяких випадкових величинах N , що описують кількість дискретних явищ (подій), які мають місце на інтервалі часу заданої довжини [3].

Ладіслав Борткевич в 1898 році розробив практичне застосування для цього розподілу, його завданням стало дослідження числа солдатів пруської армії, яких випадково забили коні ногами [4].

Приклади інших ситуацій, які можна змодельовати, застосувавши цей розподіл: поломки обладнання, тривалість виконання ремонтних робіт співробітником, що стабільно працює, помилка друку, зростання колонії бактерій у чашці Петрі, дефекти в довгій стрічці або ланцюгу, імпульси лічильника

радіоактивного випромінювання, кількість забитих голів футбольною командою та ін. [4].

Пуассонівська модель зазвичай описує схему рідкісних подій. Прикладами можуть служити кількість частинок радіоактивного розпаду, зареєстрованих лічильником протягом деякого часу t , кількість викликів, що надійшли на телефонну станцію за час t , кількість дефектів у шматку тканини фіксованої довжини, кількість родзинок у кексі і т.д.

Нарешті, розподіл Пуассона дає хорошу апроксимацію біноміального розподілу для великих значень n і малих значень p : $Bin(n, p) \sim Pois(np)$, якщо np невелике. Ця властивість дозволяє значно спростити обчислення у біноміальній моделі за зазначених умов.

Цей розподіл широко використовується у картах контролю якості, теорії масового обслуговування, телекомунікації, медичної статистики тощо.

При зростанні n , малому p і фіксованому значенні $np = \lambda > 0$ біноміальний розподіл сходиться до розподілу Пуассона.[4]

1.3 Екстремальні значення та їх застосування

За допомогою діаграм, графіків та описових статистик попередньо виявляють наявність можливих трендів та зокрема екстремальних значень, тобто значень, які суттєво перевищують всі інші значення вибірки, але не відносяться до похибок вимірів. [5]

Статистичні питання, що виникають при моделюванні екстремальних значень випадкової вибірки, успішно використовуються в найрізноманітніших областях, таких як біометрія, фінанси, страхування та теорія ризику. Статистика екстремальних ситуацій предмет нещодавно зазнала значного розвитку, частково через те, що рідкісні події можуть мати катастрофічні наслідки для людської

діяльності через їх вплив на природне та штучне середовище. Розглянемо такі ситуації, коли ми знаходимо екстремальні значення, а саме максимальні [5]:

1. Планується побудува хмарочосу біля озера Мічіган, і тому він буде піддаватися вітровим навантаженням з кількох напрямків. Розрахункова міцність повинна бути достатньою, щоб протистояти цим вітрам.

2. Подібним чином такий механічний компонент, як крило літака, повинен бути розроблений таким чином, щоб витримувати навантаження з кількох джерел.

3. Дамби в місцях уздовж водойми, наприклад річки чи моря, мають бути побудовані достатньо високо, щоб перевищувати максимальну висоту води [1].

У всіх цих випадках не важко помітити, що ми шукаємо саме максимально можливі значення і нас цікавить їх подальша поведінка.

1.4 Конзистентні оцінки

Математична статистика – це розділ математики, який базується на теорії ймовірностей та призначений для формулювання і доведення статистичних висновків про властивості ймовірнісного простору за результатами спостережень над відповідним стохастичним експериментом [6].

Тому умовно задачі математичної статистики можна розбити на групи:

- задачі статистичного оцінювання, що спрямовані на побудову кількісних оцінок невідомих параметрів;
- задачі перевірки статистичних гіпотез, в яких встановлюються якісні властивості ймовірнісного простору.

На практиці можна побудувати оцінку як функцію доступної вибірки розміром n , а потім уявити собі можливість продовжувати збирати дані та розширювати вибірку до нескінченності. Таким чином, можна отримати послідовність оцінок з індексом n , а конзистентність є властивістю того, що

відбувається, коли розмір вибірки «росте до нескінченності». Якщо можна математично показати, що послідовність оцінок збігається за ймовірністю до справжнього значення, її називають конзистентною [5].

Коли ми замінюємо збіжність за ймовірністю на збіжність майже напевно, тоді оцінка називається строго конзистентною.

Висновки до розділу 1

У даному розділі було розглянуто процес Пуассона та науку про екстремальні значення та галузі їх застосування. Ми впевнились, що це дійсно дуже актуальні галузі і вони тісно вплелися в більшість сфер нашого життя. Саме тому, наприклад, процес Пуассона є дуже важливим і при цьому широко використовується. Також не менш цікавою є наука про екстремальні значення, але вона є менш дослідженою, тому і буде більше розкрита саме в моїй роботі.

Проте для більш складних задач не достатньо лише апарату теорії випадкових процесів, тому ми ближче познайомились з математичною статистикою, а саме з конзистентними оцінками, які і будемо в подальшому застосовувати в нашій роботі. Вони є не менш важливими, адже допомагають в дуже різноманітних проблемах. Наприклад в моїй роботі вони були використанні для задачі пов'язаної з дослідження забруднення навколишнього середовища, а збереження навколишнього середовища – це дуже важливо в нашому житті.

РОЗДІЛ 2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1 Моделі Пуассона

Процес Пуассона може відображати положення видимих зірок на ділянці неба, положення (погляд зверху) дерев у лісовій місцевості або місця археологічних розкопок. Немає чіткої закономірності, точки розподілені хаотично без явної закономірності чи тенденцій у щільності.

Подібні ситуації можуть виникати в трьох вимірах або в одному, або в більш складних геометріях. Наприклад, якщо ми подивимося на все небо, зірки виглядають розподіленими по поверхні сфери. Пуассонівські процеси є моделями таких явищ, які використовують теорію ймовірності для опису такого роду надзвичайно випадкової поведінки. Їхньою характерною рисою є властивість статистичної незалежності.

Щоб пояснити це, припустимо, що деякі «тестові набори» $A_1, A_2, \dots$ були введені в простір (рис. 2.1), їх форми та положення визначаються без прив'язки до випадкових точок (рис. 2.2). Позначимо через $N(A)$ кількість точок, що потрапляють у множину A . Тоді числа $N(A_j)$ є цілочисельними випадковими величинами. Припускаємо, що доки множини $A_1, A_2, \dots$ не перекриваються (перетинаються), ці випадкові величини є статистично незалежними [2].

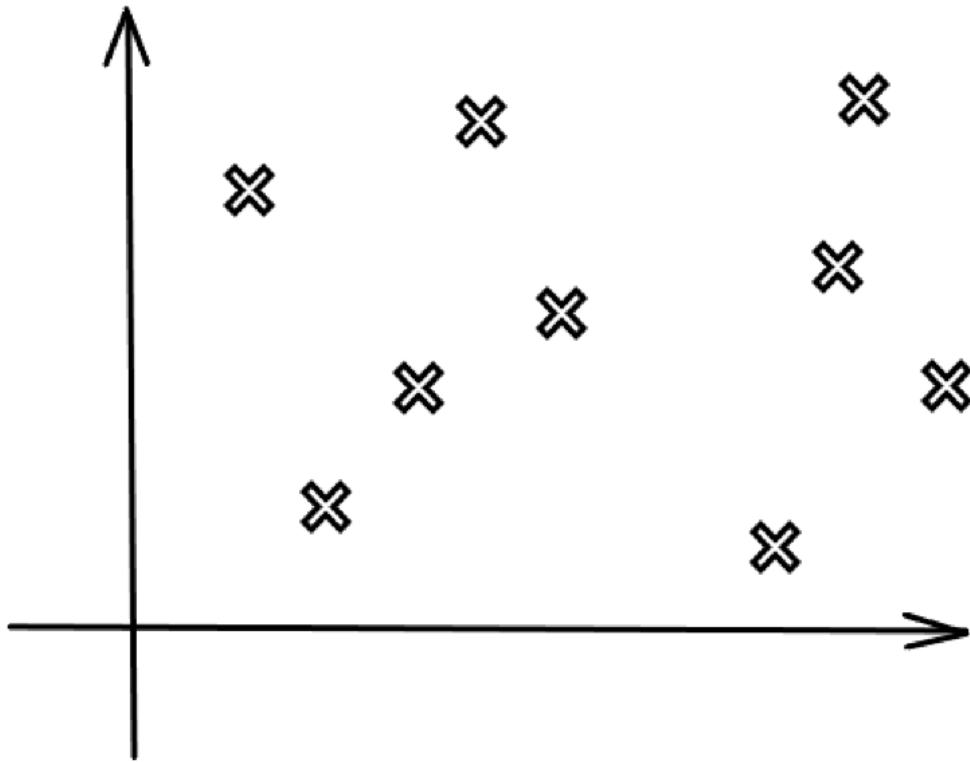


Рис. 2.1 – Двовимірний процес Пуассона.

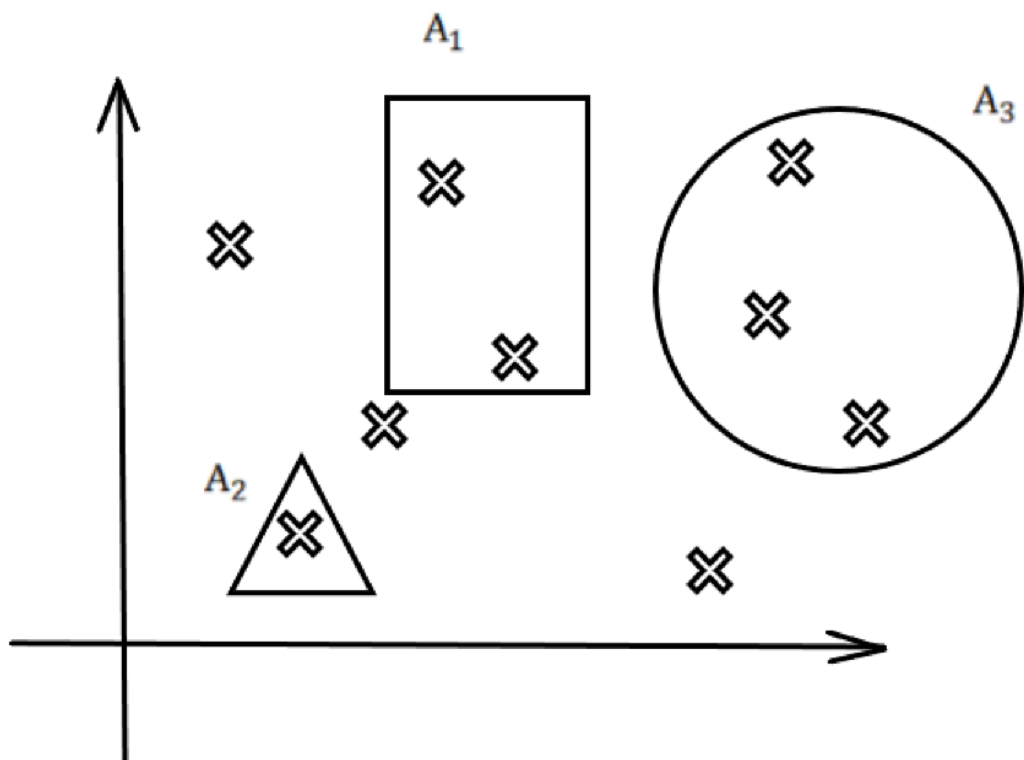


Рис. 2.2 – Тестові набори

Виходячи з рис. 2.2 бачимо, що $N(A_1) = 2, N(A_2) = 1, N(A_3) = 3$.

Ледь помітні ефекти однієї точки на іншу можливо є. Присутність точок в одній області може впливати на точки в іншій. Також не виключені обмеження, які не дозволяють двом точкам бути занадто близько одна до одної. Можуть бути несподівані геометричні візерунки або закономірності (наприклад, в археології). Модель Пуассона зазвичай є найпростішим і, у певному сенсі, найбільш випадковим способом опису будь-якого конкретного явища.

Назва Пуассона походить від однойменного розподілу ймовірностей, який відіграє центральну роль у теорії. Це, в свою чергу, є обмеженим випадком біноміального розподілу, і він як такий сходиться до роботи С.Д. Пуассона (1837). Таким чином, якщо монету підкидають n разів і підкидання є незалежними та мають однакову ймовірність p появи “орлів”, ймовірність того, що є r “орлів” і $n - r$ “решок”, дорівнює [7]

$$P(X = r) = C_n^r p^r (1 - p)^{n-r}, \quad (2.1)$$

Якщо $\mu = np$, середня кількість “орлів”, залишається постійною, тоді як n стає великим, а p малим, вираз (2.1) має границю

$$\begin{aligned} \pi_r(\mu) &= \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^r \left(\frac{\mu}{n}\right)^r \left(1 - \left(\frac{\mu}{n}\right)\right)^{n-r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{r!} \left(\frac{\mu}{n}\right)^r \left(1 - \left(\frac{\mu}{n}\right)\right)^{n-r} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu^r}{r!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) \left(1 - \left(\frac{\mu}{n}\right)\right)^n \left(1 - \left(\frac{\mu}{n}\right)\right)^{-r} \end{aligned}$$

з цього легко побачити, що

$$\pi_r(\mu) = \frac{\mu^r e^{-\mu}}{r!}, \quad (2.2)$$

при $r = 0, 1, 2 \dots$ це називається розподілом Пуассона з параметром μ , який ми позначаємо $Pois(\mu)$. Подібним чином біноміальний розподіл (2.1) позначається як $Bin(n, p)$.

Процес Пуассона, на відміну від розподілу Пуассона, спочатку виник в одному вимірі, що представляє час. Одновимірний процес Пуассона (рис. 2.1) виглядала б як рис. 2.3, де тепер точки можуть представляти випадкову серію подій, що відбуваються в часі. Фізики використовують процеси Пуассона для опису випромінювання радіоактивних частинок, тоді як інженери телетрафіку використовували їх для обліку часу надходження телефонних дзвінків на станцію [2].

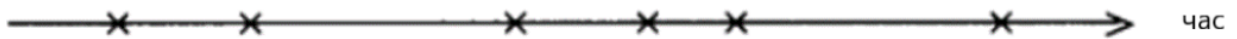


Рис. 2.3 – Одновимірний процес Пуассона.

Це природно, якщо розглядати події, які витікають з різних атомів (у першому випадку) або абонентів (у другому), які діють незалежно один від одного. Малоімовірно, що будь-який атом внесе подію в певний проміжок часу, але таких багато, і ймовірно, що деякі з них зроблять це. Це саме та ситуація, в якій біноміальна ймовірність (2.1) добре апроксимується розподілом Пуассона (2.2).

Таким чином, ми будемо припускати, що кількості $N(A)$ не просто незалежні для неперетинних A , але також що кожен має розподіл Пуассона $Pois(\mu)$ для відповідного вибору μ .

2.2 Розподіл Пуассона

Випадкова величина X має розподіл Пуассона $Pois(\mu)$, якщо її можливі значення є невід'ємними, цілими числами і якщо

$$P(X = r) = \pi_r(\mu) = \frac{\mu^r e^{-\mu}}{r!},$$

для $r = 0, 1, 2, \dots$. Тут μ може приймати будь-яке значення $\mu > 0$, а тотожність

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \pi_n(\mu) = \mu,$$

показує, що μ є середнім значенням розподілу $Pois(\mu)$:

$$E(X) = \mu. \quad (2.3)$$

Іноді корисно розширити визначення $Pois(\mu)$, щоб включити граничні випадки 0 і ∞ . Таким чином, $Pois(0)$ означатиме розподіл, зосереджений в 0:

$$P\{X = 0\} = 1,$$

і $Pois(\infty)$ розподіл, зосереджений в $+\infty$:

$$P\{X = +\infty\} = 1,$$

Якщо z є будь-яким дійсним або комплексним числом в $|z| \leq 1$, випадкова змінна z^X є обмеженою, так що

$$E(z^X) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(\mu) z^n = e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu z)^n}{n!} = e^{-\mu(1-z)},$$

і це справедливо для $0 \leq \mu < \infty$. Тоді тотожності для моментів X можна отримати диференціюванням і встановленням $z = 1$ (або прямим підсумовуванням)[2]:

$$E(X) = \mu,$$

$$E(X(X-1)) = \mu^2,$$

$$E(X(X-1)(X-2)) = \mu^3, \dots$$

з цього ми можемо вивести, що

$$E(X^2) = \mu + \mu^2, D(X) = \mu,$$

то

$$E(X^3) = \mu + 3\mu^2 + \mu^3,$$

і т.д.

Диференціюючи π_n відносно μ , маємо

$$\frac{d\pi_n}{d\mu} = \pi_{n-1} - \pi_n,$$

з умовою, що $\pi_{n-1} = 0$. Таким чином

$$\frac{dP_n}{d\mu} \left(\sum_{k=0}^n \pi_k \right) = -\pi_n,$$

Інтегрування від 0 до μ дає корисну тотожність

$$\sum_{k=0}^n \pi_k(\mu) = 1 - \int_0^\mu \pi_n(\lambda) d\lambda.$$

Важливою особливістю розподілу Пуассона є його адитивність. Якщо X і Y незалежні випадкові величини з розподілом Пуассона $Pois(\lambda)$ та $Pois(\mu)$ відповідно, то для $r, s \geq 0$,

$$P\{X = r, Y = s\} = \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!} \frac{\mu^s e^{-\mu}}{s!}. \quad (2.4)$$

Ми можемо знайти розподіл випадкової величини $X + Y$ шляхом сумування (2.4) над значеннями r і s при фіксованому $r + s$;

$$\begin{aligned} P\{X + Y = n\} &= \sum_{r=0}^n P\{X = r, Y = n - r\} \\ &= \sum_{r=0}^n \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!} \frac{\mu^{n-r} e^{-\mu}}{(n-r)!} = \frac{e^{-(\mu+\lambda)}}{n!} \sum_{r=0}^n C_n^r \lambda^r \mu^{n-r} \\ &= \frac{e^{-(\mu+\lambda)} (\mu + \lambda)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Таким чином $X + Y$ має розподіл $Pois(\lambda + \mu)$. Це поширюється індукцією на суму будь-якої скінченної кількості незалежних випадкових величин, що мають розподіл Пуассона. Однак нам знадобиться ще потужніший результат, який охоплює нескінченні суми та дає умови для збіжності [3].

Теорема зліченної адитивності.

Нехай $X_j (j = 1, 2, \dots)$ — незалежні випадкові величини, і припустимо, що X_j має розподіл $Pois(\mu_j)$ для кожного j . Якщо ряд

$$\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \quad (2.5)$$

збіжний, то ряд

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} X_j$$

збігається з імовірністю 1, а S має розподіл $Pois(\sigma)$. З іншого боку, якщо ряд (2.5) розбіжний, то S розбігається з імовірністю 1.

Доведення

■ За індукцією по n ,

$$S_n = \sum_{j=1}^n X_j$$

має розподіл $Pois(\sigma_n)$, де

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^n \mu_j.$$

Отже, для будь-якого r

$$P\{S \leq r\} = \sum_{k=0}^r \pi_k(\sigma_n).$$

Послідовність подій $\{S_n \leq r\}$, $n \geq 1$ монотонно спадає для фіксованого r , а їх перетин є $\{S \leq r\}$. Таким чином

$$P\{S \leq r\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{S_n \leq r\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^r \pi_k(\sigma_n).$$

Якщо σ_n збігається до σ , неперервність π_k показує, що

$$P\{S \leq r\} = \sum_{k=0}^r \pi_k(\sigma)$$

так що

$$P\{S = r\} = \pi_r(\sigma)$$

і тому S є скінченною із розподілом $Pois(\sigma)$. Але якщо $\sigma_n \rightarrow \infty$, то

$$\sum_{k=0}^r \pi_k(\sigma_n) = e^{-\sigma_n} \sum_{k=0}^r \frac{\sigma_n^k}{k!} \rightarrow 0,$$

так що

$$P\{S > r\} = 1.$$

Оскільки це справедливо для всіх r , то $S = +\infty$ з ймовірністю 1, і доведення завершено. ■

Ця теорема показує природність традиційних визначень $Pois(0)$ і $Pois(\infty)$. Якщо незалежні випадкові величини X_j мають розподіли $Pois(\mu_j)$ відповідно, то їх сума має розподіл $Pois(\sum \mu_j)$. Це вірно незалежно від того, чи є їх скінченно чи нескінченно багато, і навіть якщо деякі з μ_j дорівнюють нулю або нескінченності [7].

Нехай $X_1, X_2, \dots, X_n$ незалежні, і нехай X_j має розподіл $Pois(\mu_j)$ для всіх j . Тоді $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ має розподіл $Pois(\sigma)$, де $\sigma = \sum \mu_j$ отже, коли $r_1 + r_2 + \dots + r_n = s$,

$$\begin{aligned} P\{X_1 = r_1, X_2 = r_2, \dots, X_n = r_n | S = s\} &= \frac{\prod_{j=1}^n \frac{\mu_j^{r_j} e^{-\mu_j}}{r_j!}}{\frac{\sigma^s e^{-\sigma}}{s!}} \\ &= \frac{s!}{r_1! r_2! \dots r_n!} \left(\frac{\mu_1}{\sigma}\right)^{r_1} \left(\frac{\mu_2}{\sigma}\right)^{r_2} \dots \left(\frac{\mu_n}{\sigma}\right)^{r_n}. \end{aligned}$$

Це ймовірності поліноміального розподілу $M(s; p_1 \cdots, p_n)$, де $p_j = \mu_j/\sigma$.

В окремому випадку, коли $n = 2$, це зводиться до того, що якщо X і Y незалежні випадкові величини з розподілом Пуассона, то умовний розподіл співпадає з біноміальним $Bin(r, p)$, де

$$p = \frac{E(X)}{E(X) + E(Y)}.$$

Таким чином, біноміальний і поліноміальний розподіли можна отримати шляхом апроксимації відповідних розподілів Пуассона [7].

Існує частковий зворотний зв'язок, який іноді корисний. Припустимо, що N це Пуассоновий процес із середнім μ і що M має розподіл $Bin(N, p)$ для фіксованої константи p . Під цим ми маємо на увазі, що для $0 \leq t \leq s$,

$$P\{M = t | N = s\} = Bin(s, p; t)$$

Тоді, для $m, k \geq 0$,

$$\begin{aligned} P\{M = m, N - M = k\} &= P\{N = m + k\}P\{M = m | N = m + k\} \\ &= \frac{e^{-\mu} \mu^{m+k}}{(m+k)!} C_m^{m+k} p^m (1-p)^k = \frac{e^{-\mu p} (\mu p)^m}{m!} \frac{e^{-\mu(1-p)} (\mu(1-p))^k}{k!}. \end{aligned}$$

Таким чином, M і $N - M$ є незалежними випадковими величинами з розподілом Пуассона із середніми значеннями μp і $\mu(1-p)$.

2.3 Неатомарність розподілу Пуассона

Розглянемо A_t , який у двовимірному просторі є колом радіуса t (хоча це також може бути квадрат зі стороною t). Запишемо

$$\begin{aligned} p_n(t) &= P\{N(A_t) = n\}, \\ q_n(t) &= P\{N(A_t) \leq n\}. \end{aligned}$$

Оскільки $N(A_t)$ зростає з t , q_n зменшується, так що q_n і p_n мають лише стрибкові розриви та диференційовані майже всюди. Наведемо евристичний висновок диференціального рівняння для p_n [2].

Випадкова змінна $N(A_t)$ стрибає від n до $n + 1$, коли її розширена межа перетинає одну з випадкових точок. Імовірність того, що це відбувається між t і $t + h$, є ймовірністю того, що в кільці є точка між A_t і A_{t+h} , яку ми вважаємо малою, коли h мале. Якщо ми ігноруємо ймовірність двох або більше точок в цьому кільці, ця ймовірність (враховуючи кількість в A_t) буде такою ж, як $\mu(t + h) - \mu(t)$, де

$$\mu(t) = E\{N(A_t)\}.$$

Якщо це не залежить від кількості точок у A_t , то для малих h ,

$$q_n(t) - q_n(t + h) = p_n(t)\{\mu(t + h) - \mu(t)\}.$$

Нехай $h \rightarrow 0$,

$$\frac{-dq_n}{dt} = p_n \frac{d\mu}{dt}.$$

Оскільки $p_n = q_n - q_{n-1}$, це означає, що

$$\frac{-dp_0}{dt} = -p_0 \frac{d\mu}{dt}, \frac{dq_n}{dt} = (p_{n-1} - p_n) \frac{d\mu}{dt} \quad (n \geq 1). \quad (2.6)$$

Перше з цих рівнянь показує, що

$$\frac{d}{dt}(\log p_0 + \mu) = 0$$

і оскільки $p_0(0) = 1, \mu(0) = 0$,

$$\log p_0 + \mu = 0$$

так що

$$p_0(t) = e^{-\mu(t)} \quad (2.6)$$

для всіх t . Друге рівняння в (2.6) можна записати

$$\frac{d}{dt}(p_n e^\mu) = p_{n-1} e^\mu \frac{d\mu}{dt},$$

так що, оскільки

$$p_n(t) = e^{-\mu(t)} \int_0^1 p_{n-1}(s) e^{\mu(s)} \frac{d\mu}{ds} ds,$$

Звідси індукцією по n , починаючи з (2.6), випливає, що

$$p_n(t) = \frac{e^{-\mu(t)} \mu(t)^n}{n!},$$

так що $N(A_t)$ має розподіл $Pois(\mu(t))$.

2.4 Пуассонівська випадкова точкова міра, визначення та основні властивості

Простір станів S , у якому знаходяться точки випадкової точкової міри Пуассона, зазвичай є евклідовим простором деякої розмірності d або, у більш загальному вигляді, еквівалентним R^d . Теорія, однак, не використовує особливі властивості евклідового простору, а потребує лише розумного сімейства підмножин, які будуть використовуватися як тестові набори для підрахунку випадкових точок. Тобто нам потрібні набори, для яких підрахунок функції є чітко визначеною випадковою величиною [2].

Природний спосіб зробити це — припустити, що S є вимірним простором. Ми припускаємо, тобто, що певні підмножини S називаються вимірними, і що вимірні множини утворюють σ -поле в тому сенсі, що:

- порожня множина вимірна;
- доповнення вимірної множини є вимірним;
- об'єднання зліченної кількості вимірних множин є вимірним.

Нам також потрібно переконатися, що існує достатня кількість вимірних наборів, виділити окремі точки. Це можна зробити через слабе припущення, що діагональ

$$D = \{(x, y); x = y\}$$

є вимірною у просторі $S \times S$. Це автоматично означає, що кожен одиночний набір $\{x\}$ у S є вимірним.

Коли $S = R^d$, вимірні множини завжди вважаються борелівськими множинами найменшого σ -поля, що містить відкриті множини. Діагональне припущення, безсумнівно, виконується, оскільки D замкнуте в просторі поля R^{2d} .

Тоді випадкова точкова міра Пуассона на S є випадковою зліченною підмножиною Π з S , такою, що

- 1) для будь-яких неперетинних вимірних підмножин $A_1, A_2, \dots, A_n$ з S , випадкові величини $N(A_1), N(A_2), \dots, N(A_n)$ є незалежними;
- 2) $N(A)$ має розподіл Пуассона $Pois(\mu)$, де $\mu = \mu(A)$ лежить від $0 \leq \mu \leq \infty$.

Таким чином, якщо $\mu(A)$ є скінченним, $\Pi \cap A$ є з імовірністю 1 скінченним набором, порожнім, якщо $\mu(A) = 0$. Якщо $\mu(A) = \infty$, $\Pi \cap A$ є незліченними з імовірністю 1.

За (2.3)

$$\mu(A) = E\{N(A)\}.$$

Якщо $A_1, A_2, \dots$ не перетинаються та мають об'єднання A ,

$$N(A) = \sum_{n=1}^{\infty} N(A_n),$$

і також

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

Таким чином, μ є мірою на S , яку ми будемо називати середньою мірою процесу Пуассона Π .

Якщо ми знаємо середню міру, ми можемо записати, використовуючи 1) і 2), усі спільні розподіли кількостей $N(A)$ для різних наборів A . Щоб побачити це, припустимо, що $A_1, A_2, \dots, A_n$ є вимірними, але не обов'язково неперетинними. Розглянемо всі набори форм

$$B = A_1^* \cap A_2^* \cap \dots \cap A_n^*$$

де кожен A_j^* є або A_j , або його доповненням. Їх 2^n , і вони не перетинаються. Якщо вони вказані як $B_1, B_2, \dots, B_{2^n}$, тоді

$$A_j = \bigcup_{i \in y_j} B_i$$

де y_j є підмножиною $\{1, 2, \dots, 2^n\}$. Отже

$$N(A) = \sum_{i \in y_j} N(B_i),$$

і $N(B_i)$ є незалежними з відомими розподілами Пуассона $Pois(\mu(B_i))$. Звідси можна записати ймовірність будь-якої події, визначеної в термінах випадкових величин $N(A_1), N(A_2), \dots, N(A_n)$.

Наприклад, якщо $n = 2$, перелік можна зробити так, щоб

$$A_1 = B_1 \cup B_2, \quad A_2 = B_1 \cup B_3$$

і тоді

$$N(A_1) = N(B_1) + N(B_2), \quad N(A_2) = N(B_1) + N(B_3).$$

Припустимо, наприклад, що нам потрібна коваріація $N(A_1)$ і $N(A_2)$.

Обчислюємо

$$\begin{aligned} E\{N(A_1) N(A_2)\} &= E \{ N(B_1)^2 + N(B_1)N(B_3) + N(B_2)N(B_1) + N(B_2)N(B_3) \} = \\ &= \{ \mu(B_1)^2 + \mu(B_1) \} + \mu(B_1)\mu(B_3) + \mu(B_2)\mu(B_1) + \mu(B_2)\mu(B_3) = \mu(A_1)\mu(A_2) + \\ &+ \mu(B_1). \end{aligned}$$

Оскільки $B_1 = A_1 \cap A_2$, це показує, що

$$\text{cov}\{N(A_1), N(A_2)\} = \mu(A_1 \cap A_2).$$

Не кожна міра може бути середньою мірою. Припустимо, що міра μ на S має атом в точці x , так що μ приєднує ненульову міру до одного елементу $\{x\}$; $m = \mu(\{x\}) > 0$. Тоді з $A = \{x\}$ показує, що процес Пуассона із середньою мірою μ буде таким, що

$$P\{N(\{x\}) \geq 2\} = 1 - e^{-m} - me^{-m} > 0.$$

Це явно суперечить (2.1) і показує, що μ не може бути середньою мірою. Таким чином, середня міра має бути неатомарною в тому сенсі, що

$$\mu(\{x\}) = 0 \text{ для всіх } x \in S.$$

Чудовий факт, що цієї умови майже достатньо для існування пуассонівської випадкової точкової міри. Далі ми покажемо, що за дуже слабкої умови скінченності кожна неатомарна міра є середньою мірою деякого пуассонівської випадкової точкової міри. Таким чином, змінюючи міру μ на S , ми отримуємо широкий спектр пуассонівської випадкової точкової міри на даному просторі станів S [3].

Коли $S = R^d$, середня міра в більшості цікавих випадків дається в термінах швидкості або інтенсивності. Це позитивна вимірна функція λ на S , в термінах якої μ задано інтегруванням λ відносно d -вимірної міри:

$$\mu(A) = \int_A \lambda(x) dx, \quad (2.7)$$

(де dx означає $dx_1 dx_2 \dots dx_d$). Слово швидкість найчастіше використовується, коли $d = 1$ і S є часовою віссю, тоді як інтенсивність зазвичай використовується, коли S має просторову інтерпретацію. Якщо A неперервна в точці x , то (2.7) впливає, що для малих околиць A точки x ,

$$\mu(A) \sim \lambda(x)|A|,$$

ми говоримо про рівномірну або однорідну пуассонівську випадкову точкову міру. Такий випадковий набір має стохастичні властивості, які не змінюються при поворотах S , і є єдиною випадковою точковою мірою Пуассона (кінцевим на обмежених наборах) з цією властивістю [2].

Проте ми не припускаємо, що інтеграл у (2.7) обов'язково збігається навіть на обмежених множинах. У більшості задач це так, так що $\mu(A)$, а отже, $N(A)$, є скінченним на обмежених множинах. Тоді з імовірністю 1 множина Π є локально скінченною і не має кінцевих граничних точок.

Розглянемо тепер випадок $S = R$ і припустимо, що $\mu(A)$ є скінченним на обмежених множинах A (але не обов'язково заданим функцією швидкості λ). Тоді міра μ однозначно визначається своїми значеннями на інтервалах $(a, b]$. Запишемо

$$\begin{aligned} M(t) &= \mu(0, t] = \mathbf{E}\{N(0, t]\} \quad (t \geq 0), \\ M(t) &= -\mu[t, 0) = -\mathbf{E}\{N(t, 0]\} \quad (t < 0), \end{aligned}$$

так що M є зростаючою функцією і

$$\mu(a, b] = M(b) - M(a) \quad (a < b).$$

Тоді μ визначається функцією M і називається мірою Стільтєса, пов'язаною зі зростаючою функцією M .

Міра μ є неатомарною тоді і тільки тоді, коли M неперервна. Її можна виразити або не виразити як інтеграл

$$M(t) = \int_0^t \lambda(x) dx,$$

і якщо він такої форми, то μ задано як (2.7). Зокрема, однорідний процес Пуассона зі швидкістю λ відповідає

$$M(t) = \lambda t,$$

де λ тепер є константою.

2.5 Теорема суперпозиції

Пуассонівська точкова міра має низку особливих властивостей, які роблять її використання та розрахунок пов'язаних з ним ймовірностей часто наочним простим [7].

Три найважливіші – це властивість суперпозиції, яка є предметом цього розділу, властивість відображення і різноманітні пов'язані теореми про відбір, забарвлення та маркування.

Властивість суперпозиції є майже безпосереднім наслідком з теореми про зліченну адитивність, за винятком незручної технічної деталі, яка розглядається в наступній лемі.

Лема про диз'юнктність.

Нехай Π_1 і Π_2 — незалежні точкові міри Пуассона на S , і нехай A — вимірنا множина з скінченними $\mu_1(A)$ і $\mu_2(A)$. Тоді Π_1 і Π_2 не перетинаються з ймовірністю 1 на A :

$$P\{\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap A = \emptyset\} = 1.$$

Теорема суперпозиції

Нехай $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ зліченна сукупність незалежних пуассонівських точкових мір на S і нехай Π_n має середню міру μ_n для кожного n .

Потім їх суперпозиція

$$\Pi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n,$$

це Пуассонівська точкова міра із середньою мірою

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n. \quad (2.8)$$

Доведення.

Нехай $N_n(A)$ — це кількість точок Π_n у вимірній множині A . Якщо $\mu_n(A) < \infty$ для всіх n , лема показує, що випадкові множини Π_n є непересічними на A , тому кількість точок Π в A є

$$N(A) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n(A), \quad (2.9)$$

Згідно з теоремою про зліченну адитивність $N(A)$ має розподіл $Pois(\mu)$, де $\mu = \mu(A)$ задано як (2.8). З іншого боку, якщо $\mu_n(A) = \infty$ для деякого n , то $N_n(A) = N(A) = \infty$ і (2.9) виконується тривіально.

Для доведення теореми потрібно лише довести, що $N(A_1), N(A_2), \dots, N(A_k)$, незалежні, якщо множини A_j неперетинні. Це зрозуміло, оскільки подвійний масив випадкових величин

$$N_n(A_j), n = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, k$$

всі незалежні, а $N(A_j)$ визначається в термінах підмножини цих випадкових величин, відмінних від величин для інших j .

Це завершує доведення, який для загальності було наведено для злічених суперпозицій; він містить як очевидний наслідок відповідний результат для скінченних суперпозицій [2].

Теорема звуження.

Нехай Π — пуассонівська точкова міра із середньою мірою μ на S , і нехай S_1 — вимірна підмножина S . Тоді випадкова зліченна множина

$$\Pi_1 = \Pi \cap S_1,$$

можна розглядати або як точкову міра Пуассона на S із середньою мірою

$$\mu_1(A) = \mu(A \cap S_1),$$

або як точкову міра Пуассона на S_1 , середньою мірою якого є обмеження μ на S_1 .

2.6 Теорема про відображення

Нехай Π – точкова міра Пуассона з σ скінченною середньою мірою μ у просторі станів S і нехай $f: S \rightarrow T$ вимірювана функція, така що індукована міра не має атомів. Тоді $f(\Pi)$ є точковою мірою Пуассона на T , що має індуковану міру μ^* як середню міру [8].

2.7 Теорема про існування

Нехай μ – неатомарна міра на S , яку можна виразити у формі

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n, \quad \mu_n(S) < \infty.$$

Тоді на S існує точкова міра Пуассона, середня міра якого μ .

Доведення.

■ Не втрачаючи загальності, припустимо, що $\mu_n(S) > 0$ для всіх n . На відповідному ймовірнісному просторі побудувати незалежні випадкові величини

$$N_n, X_{nr} \quad (n, r = 1, 2, 3, \dots)$$

такий, що розподіл N_n це $Pois(\mu_n(S))$ і розподіл X_{nr} це

$$p_n(\cdot) = \frac{\mu_n(\cdot)}{\mu_n(S)}.$$

Запишемо

$$\Pi_n = \{X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nN_n}\} \text{ і } \Pi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n. \quad 2.9$$

Запишемо

$$N_n(A) = \# \{ \Pi_n \cap A \}$$

маємо для неперетинних $A_1, A_2, \dots, A_k$ і написання A_0 для доповнення їх об'єднання,

$$\begin{aligned} P\{N_n(A_1) = m_1, N_n(A_2) = m_2, \dots, N_n(A_k) = m_k \mid N_n = m\} \\ = \frac{m!}{m_0! m_1! \dots m_k!} p_n(A_0)^{m_0} p_n(A_1)^{m_1} \dots p_n(A_k)^{m_k} \end{aligned}$$

якщо $m_0 = m - m_1 - m_2 - \dots - m_k$.

Отже,

$$\begin{aligned} P\{N_n(A_1) = m_1, N_n(A_2) = m_2, \dots, N_n(A_k) = m_k\} \\ = \sum_{m=\sum m_j}^{\infty} \frac{e^{-\mu_n(S)} \mu_n(S)^m}{m!} \frac{m!}{m_0! m_1! \dots m_k!} \prod_{j=0}^k p_n(A_j)^{m_j} \\ = \sum_{m=\sum m_j}^{\infty} \pi_{m-\sum m_j}(\mu_n(A_0)) \prod_{j=0}^k \pi_{m_j}(\mu_n(A_j)) = \prod_{j=0}^k \pi_{m_j}(\mu_n(A_j)). \end{aligned}$$

Таким чином, $N_n(A_j)$ є незалежними випадковими величинами з розподілами $Pois(\mu_n(A_j))$, так що Π_n є незалежними Пуассонівськими точковими мірами з відповідними середніми мірами μ_n . Теорема суперпозиції показує, що (2.9) визначає пуассонівську точкову міру із середньою мірою μ , тому теорема доведена.

■

2.8 Марковані пуассонівські процеси

У розділі 1.2 було зазначено, що розподіл Пуассона має характерну властивість по відношенню до біноміального розподілу. Якщо випадкова величина N має розподіл $Pois(\mu)$ і якщо друга випадкова величина M має умовний розподіл за N у формі $Bin(N, p)$, то M і $N - M$ - незалежні Пуассонівські випадкові величини з відповідними середніми $p\mu$ і $(1 - p)\mu$ [7].

Нехай Π — процес Пуассона на загальному просторі станів S із середньою мірою μ . Розфарбуйте точки Π випадковим чином у червоний або зелений колір, де кольори різних точок є незалежними, відповідні ймовірності червоного та зеленого - p і $q = 1 - p$.

Для будь-якого $A \subseteq S$ запишемо $N(A)$, $N_r(A)$, $N_g(A)$, як кількість точок Π в A , кількість червоних точок і кількість зелених точок. Якщо $N(A)$, умовний розподіл $N_r(A)$, який має розподіл $Bin(N(A), p)$, то $N(A)$ має розподіл $Pois(\mu(A))$. Отже, $N_r(A)$ і $N(A) - N_r(A) = N_g(A)$ незалежні, з розподілами $Pois(p\mu(A))$, $Pois(q\mu(A))$.

Крім того, якщо $A_1, A_2, \dots, A_n$ — неперетинні множини в S , трійки випадкових величин

$$(N(A_j), N_r(A_j), N_g(A_j)), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

незалежні. Звідси $2n$ випадкових величин

$$N_r(A_j), N_g(A_j), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

незалежні. З цього випливає, що множина червоних точок і множина зелених точок є незалежними процесами Пуассона з відповідними середніми мірами $p\mu$, $q\mu$.

Цей результат поширюється індукцією по k на розфарбування будь-якою скінченною кількістю k кольорів, і ми маємо наступну теорему.

Теорема про забарвлення

Нехай Π — процес Пуассона на S із середньою мірою μ . Нехай точки Π випадковим чином пофарбовані в k кольорів, ймовірність того, що точка отримає i -й колір, дорівнює p_i , а кольори різних точок є незалежними (один від одного та від положення точок). Нехай Π_i — множина точок i -го кольору. Тоді Π_i є незалежними процесами Пуассона із середніми мірами

$$\mu_i = p_i \mu.$$

Зауважте, що це узгоджується з теоремою суперпозиції, оскільки Π є суперпозицією незалежних Π_i і

$$\mu = \sum_{i=1}^k p_i \mu = \sum_{i=1}^k \mu_i.$$

Коли доводиться застосовувати цю теорему, швидко стає зрозуміло, що вона надто обмежувальна. Спроби її узагальнення приводять до теорії маркованих пуассонівських точкових мір, яка є основною темою цього розділу.

Щоб побачити, якого узагальнення потрібно шукати, розглянемо простий приклад. Припустимо, що довгим відрізком дороги рухаються автомобілі. Взявши дорогу за лінію R і представивши кожен автомобіль як точку, знімок дороги в момент часу t покаже підмножину R (без, заради безпеки, кінцевих граничних точок). Було б реально змодельовати це як процес Пуассона.

Розподіл буде змінюватися з часом, тому що автомобілі рухаються з різною швидкістю. Можна запитати, якщо автомобілі формують процес Пуассона при $t = 0$, вони все ще формують такий процес у наступні моменти часу t .

На це запитання легко відповісти, якщо швидкості автомобілів є випадковими величинами, незалежними одна від одної та від положення на дорозі, якщо вони не змінюються з часом і, зокрема, якщо обгін необмежений, і якщо вони приймають лише кінцеву кількість значень. Якщо можливі швидкості $v_1, v_2, \dots, v_k$, а Π_i позначає набори автомобілів зі швидкістю v_i при $t = 0$, тоді теорема про розфарбовування показує, що Π_i є незалежними пуассонівськими точковими мірами. Пізніше положення цих автомобілів утворюють пуассонівську точкову міру $\Pi_i + v_i t$, отриманий переміщенням Π_i на величину $v_i t$ (і використанням теореми про відображення). Тоді положення всіх автомобілів у момент часу t є суперпозицією

$$\Pi(t) = \bigcup_{i=1}^k (\Pi_i + v_i t),$$

який за теоремою суперпозиції знову є пуассонівською точковою мірою.

Середнє значення $\Pi(t)$ легко обчислюється. Припустимо для простоти, що Π має швидкість $\lambda(x)$. Тоді Π_i має швидкість $p_i \lambda(x)$, якщо p_i є ймовірністю швидкості v_i , а $\Pi_i + v_i t$ має швидкість $p_i \lambda(x - v_i t)$. З цього випливає, що $\Pi(t)$ має швидкість

$$\lambda_t(x) = \sum_{i=1}^k p_i \lambda(x - v_i t). \quad (2.10)$$

Зокрема, якщо $\lambda(x)$ є сталою λ , (2.10) показує, що

$$\lambda_t(x) = \lambda \text{ для всіх } t > 0;$$

якщо автомобілі утворюють однорідний Пуассонівський процес при $t = 0$, вони утворюють подібний процес у всі наступні моменти часу.

Проте цей надзвичайно простий результат було доведено за дуже обмежених умов. Вимогу наявності лише кінцевої кількості можливих швидкостей можна

зняти аргументом наближення. Більш серйозним є припущення, що розподіл швидкості не залежить від положення, і що швидкість залишається постійною.

Щоб подолати труднощі, потрібен спосіб «позначення» кожної точки таким чином, щоб позначки були незалежними одна від одної, але могли залежати від положення позначених точок. Позначки можуть мати дуже загальну форму, але тоді існує потужне узагальнення теореми про забарвлення, яка відразу стосується таких проблем, як описана вище [2].

2.9 Представлення простору поля

Ідея в основному дуже проста, але її чітке формулювання вимагає певної обережності. Нехай Π — процес Пуассона на S із середньою мірою μ . Припустимо, що з кожною точкою X випадкової множини Π ми асоціюємо випадкову величину m_x (мітка X), яка приймає значення в деякому просторі M . Розподіл m_x може залежати від X , але не від інших точок Π , і m_x для різних $X \in \Pi$ є незалежними [7].

Тоді пару (X, m_x) можна розглядати як випадкову точку X^* у простір поля $S \times M$. Сукупність точок X^* утворює випадкову зліченну підмножину

$$\Pi^* = \{(X, m_x); X \in \Pi\},$$

з $S \times M$. Фундаментальний результат, з якого випливає все інше, полягає в тому, що Π^* є процесом Пуассона на просторі продукту $S \times M$.

Формальне визначення відбувається наступним чином. Простори S і M мають вимірну структуру. Ми починаємо з процесу Пуассона Π на S із середньою мірою μ і розподілом ймовірностей $p(x, \cdot)$ на M , що залежить від $x \in S$ таким чином, що для $B \subseteq M$, $p(\cdot, B)$ є вимірною функцією на S . Замарковане Π є випадковою

підмножиною $S \times M$, проекція якої на S є Π і яка така, що умовний розподіл Π^* заданого Π робить t_x незалежним з відповідними розподілами $p(X, \cdot)$ [7].

Теорема про маркування

Випадкова підмножина Π^* є пуассонівською точковою мірою на $S \times M$ із середньою мірою μ^* , заданою як

$$\mu^* = \iint_{(x,m) \in C} \mu(dx) p(x, dm).$$

Висновки до розділу 2

У цьому розділі представлено теоретичні відомості, які необхідні нам для дослідження пуассонівських точкових випадкових мір, а саме: знаходження асимптотичної поведінки екстремальних значень, побудові конзистентних оцінок параметрів полів. Зокрема, наведені визначення пуассонівських точкових мір. Також розглянуто основні визначення, теореми, леми з теорії пуассонівських точкових мір, які в подальшому будуть застосовуватися до наших задач.

РОЗДІЛ 3 ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ТА ЇХ РОЗВ'ЯЗКИ

3.1 Допоміжні приклади

1. Наведемо деякі приклади, які в подальшому знадобляться для розв'язку основних задач:

Приклад 1.

Нехай $\xi_k \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$, ξ_k — незалежні випадкові величини.

Перевіримо, що

$$P\left(\overline{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\xi_k}{\ln k}} = \frac{1}{\alpha}\right) = 1. \quad (3.1)$$

Розв'язання

Для кращої візуалізації наведемо рис. 3.1.

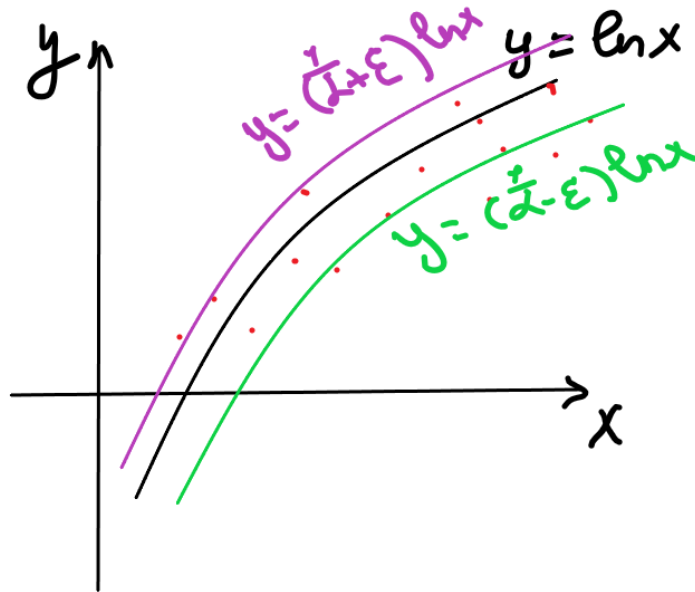


Рис.3.1 – Графічне відображення задачі на малюнку

Для того, щоб перевірити твердження (3.1), потрібно довести, що

- 1) $\frac{\xi_k}{\ln k} > \frac{1}{\alpha} + \varepsilon$ – таких точок лише скінченна кількість з імовірністю 1;
- 2) $\frac{\xi_k}{\ln k} > \frac{1}{\alpha} - \varepsilon$ – таких точок лише нескінченна кількість з імовірністю 1;

Доведемо

1)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_k}{\ln k} > \frac{1}{\alpha} + \varepsilon\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi_k > (\frac{1}{\alpha} + \varepsilon) \ln k) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(\frac{1}{\alpha} + \varepsilon) \ln k}^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = \dots = -e^{-\alpha x} \Big|_{(\frac{1}{\alpha} + \varepsilon) \ln k}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha (\frac{1}{\alpha} + \varepsilon) \ln k} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{(-1 - \alpha \varepsilon) \ln k} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\ln(k^{-1 - \varepsilon \alpha})} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1 + \varepsilon \alpha}} < \infty.
 \end{aligned}$$

Доведемо 2)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_k}{\ln k} > \frac{1}{\alpha} - \varepsilon\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi_k > (\frac{1}{\alpha} - \varepsilon) \ln k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(\frac{1}{\alpha} - \varepsilon) \ln k}^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = \dots = -e^{-\alpha x} \Big|_{(\frac{1}{\alpha} - \varepsilon) \ln k}^{\infty} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha(\frac{1}{\alpha} - \varepsilon) \ln k} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{(-1 + \alpha\varepsilon) \ln k} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\ln(k^{-1 + \alpha\varepsilon})} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1 - \varepsilon\alpha}} = \infty.
\end{aligned}$$

Отже, за теоремою Бореля-Кантеллі, бачимо що у випадку 1) лише скінченна кількість точок, а в випадку 2) нескінченна з ймовірністю 1, тому

$$P\left(\overline{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\xi_k}{\ln k} = \frac{1}{\alpha}}\right) = 1.$$

Приклад 2.

Нехай ξ – випадкова величина з щільністю

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^{\alpha+1}}, & x > -1; \\ 0, & x < -1. \end{cases}$$

де c – невідоме, $\alpha > 0$ – параметр.

Знайти функцію $g(x)$ таку, що

$$P\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\xi_k}{g(k)}\right) = 1.$$

Розв'язання

За властивістю нормування

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x) dx = 1.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{\alpha+1}} dx &= 1 \\ \int_1^{+\infty} cx^{-(\alpha+1)} dx &= \int_1^{+\infty} cx^{-\alpha-1} dx = c \frac{x^{-\alpha}}{-\alpha} = -\frac{c}{-\alpha} = \frac{c}{\alpha} \\ \frac{c}{\alpha} &= 1 \rightarrow c = \alpha. \end{aligned}$$

$$P\left(\frac{\xi_k}{g(k)} > 1\right) = P(\xi_k > g(k)) = \int_{g(k)}^{\infty} \frac{c}{x^{\alpha+1}} = \dots = \frac{-1}{x^{\alpha}} \Big|_{g(k)}^{\infty} = \frac{1}{(g(k))^{\alpha}}.$$

Отже, при $\frac{1}{(g(k))^{\alpha}} = \frac{1}{k^{1+\varepsilon}}$ скінченна кількість точок за теоремою Бареля-

Кантеллі, а при $\frac{1}{(g(k))^{\alpha}} = \frac{1}{k^{1-\varepsilon}}$ – нескінченна кількість точок.

Функція, яку ми шукали степенева $g(k) = k^{\alpha}$.

Відповідь. Функція $g(k) = k^{\alpha}$ така, що

$$P\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\xi_k}{g(k)}\right) = 1.$$

Приклад 3 (Знаходження розподілу максимуму).

Нехай ξ_k і η_k – випадкові незалежні величини.

$\{\xi_k\} \sim \text{Geom}(\alpha)$, а $\eta \sim \text{Geom}(p)$.

Знайти функцію розподілу $\max_{1 \leq k \leq \eta} \xi_k$.

Розв'язання

$$\begin{aligned}
 P\left(\max_{1 \leq k \leq \eta} \xi_k \leq x\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\eta = n, \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k \leq x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\eta = n) P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \xi_k \leq x\right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} P(\eta = n) \left(F_{\xi}(x)\right)^n \\
 P(\eta = n) &= q^{n-1}p, \quad n \geq 1, \quad q = 1 - p; \\
 P(\xi = k) &= \beta^{k-1}\alpha, \quad k \geq 1, \quad \beta = 1 - \alpha.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{\max_{1 \leq k \leq \eta} \xi_k}(x) &= P\left(\max_{1 \leq k \leq \eta} \xi_k \leq x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}p \left(F_{\xi}(x)\right)^n = \left[\begin{array}{l} \text{геометрична} \\ \text{прогресія} \\ a_1 = pF_{\xi}(x) \\ q_0 = qF_{\xi}(x) \end{array} \right] \\
 &= \frac{pF_{\xi}(x)}{1 - qF_{\xi}(x)} = \frac{p(1 - \beta^x)}{1 - (1 - p)(1 - \beta^x)}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } F_{\max_{1 \leq k \leq \eta} \xi_k}(x) = \frac{p(1 - \beta^x)}{1 - (1 - p)(1 - \beta^x)}.$$

3.2 Основні задачі:

Задача 1 (Про забруднення).

Пуассонівське випадкове поле на $[0; T] \times \mathbb{R}$ з інтенсивністю $\frac{c}{|x|^\alpha} dt dx, \alpha > 1, t \in [0; T], x \in \mathbb{R}$. Нехай t – моменти забруднення, x – величина забруднення.

Побудувати конзистентну оцінку для c та α , тобто функцію вибірки, яка прямує до c та α при $T \rightarrow \infty$ та знайти математичне сподівання рекорду, функцію розподілу та щільність.

Розв'язання

Для кращої візуалізації наведемо рис. 3.2.

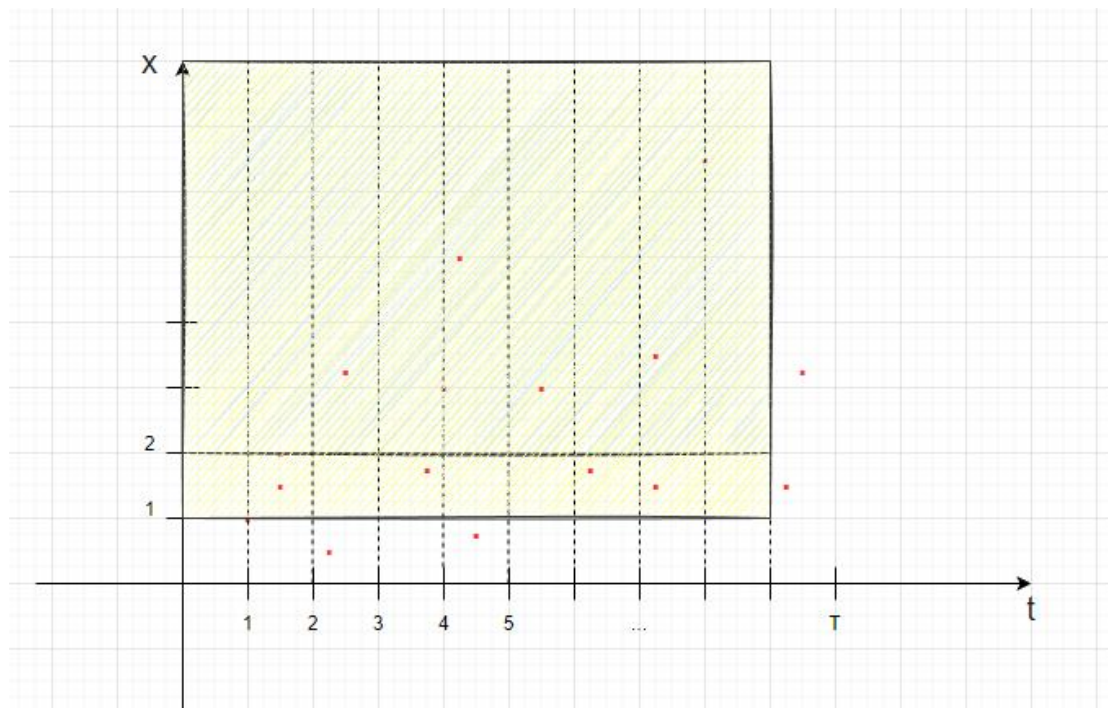


Рисунок 3.2 – Ілюстрація задачі

Позначимо через ν_1 - інтенсивність на полосі $[0; 1] \times [1; \infty)$ та ν_2 - інтенсивність на полосі $[0; 1] \times [2; \infty)$ та знайдемо їх:

$$\begin{aligned}
v_1 &= c \int_0^1 \int_1^\infty \frac{1}{|x|^\alpha} dx dt = c \int_0^1 \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^\infty dt = |\text{при } \alpha > 1| \\
&= c \int_0^1 \frac{1}{\alpha-1} dt = \frac{ct}{\alpha-1} \Big|_0^1 = \frac{c}{\alpha-1}. \\
v_2 &= c \int_0^1 \int_2^\infty \frac{1}{|x|^\alpha} dx dt = c \int_0^1 \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_2^\infty dt = |\text{при } \alpha > 1| \\
&= c \int_0^1 \frac{2^{-\alpha+1}}{\alpha-1} dt = \frac{c2^{-\alpha+1}t}{\alpha-1} \Big|_0^1 = \frac{c2^{-\alpha+1}}{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Нехай $E_1 = E_1(n)$ – це кількість точок, які потрапляють в полосу $[0; 1] \times [1; \infty)$, $E_2 = E_2(n)$ – це кількість точок, які потрапляють в полосу $[0; 1] \times [2; \infty)$.

За законом великих чисел

$$\begin{aligned}
\frac{E_1}{n} &\rightarrow \frac{c}{\alpha-1}, \quad \frac{E_2}{n} \rightarrow \frac{c2^{-\alpha+1}}{\alpha-1}. \\
\frac{E_2}{E_1} &\rightarrow 2^{-\alpha+1}, \\
\log_2 \frac{E_2}{E_1} &\rightarrow -\alpha + 1, \\
\alpha^* &= 1 - \log_2 \frac{E_2}{E_1}, \\
c^* &= \frac{(\alpha-1)E_1}{n}, \text{ де } \alpha \text{ беремо з (3.2).}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Знайдемо математичне сподівання максимуму [9].

Для кращої візуалізації наведемо рис.3.3

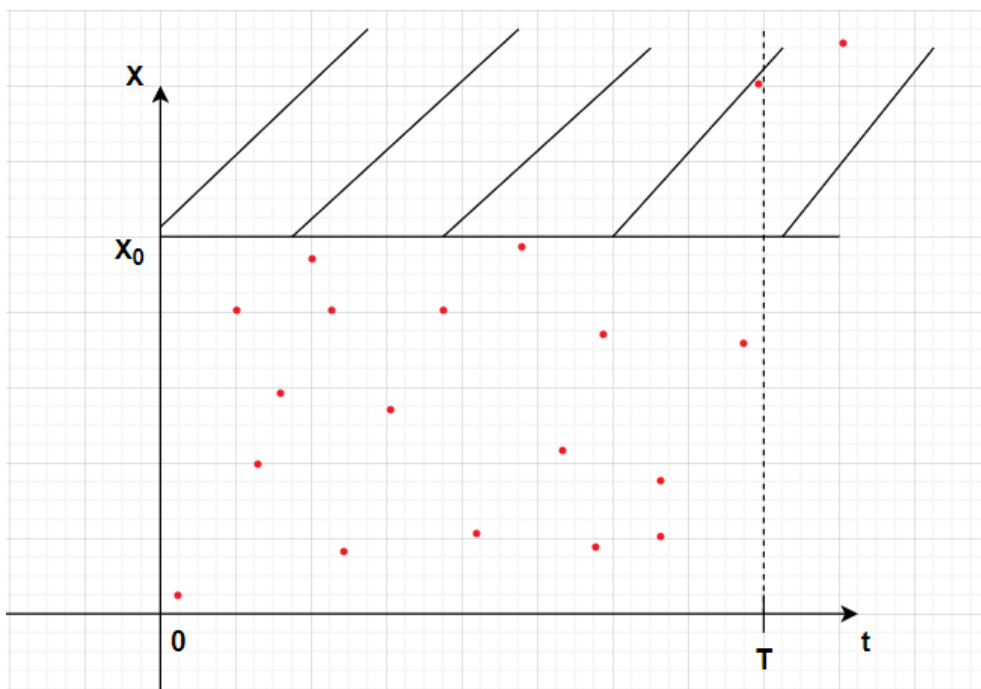


Рис.3.3 – Ілюстрація умови задачі

Для цього використаємо формулу:

$$E = \int_0^{\infty} xf(x)dx,$$

$$f(x) = (F(x))',$$

$$F(x_0) = P(X(t) \leq x_0) = P(N([0, t] \times (x_0, \infty)) = 0)$$

$$= P(Pois(v([0, t] \times (x_0, \infty)) = 0)) = \frac{A^0}{0!} e^{-A} = e^{-A}.$$

$$A = c \int_0^T \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{|x|^{\alpha}} dx dt = c \int_0^T \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_{x_0}^{\infty} dt = |\text{при } \alpha > 1| = c \int_0^T \frac{x_0^{-\alpha+1}}{\alpha-1} dt =$$

$$\frac{cx_0^{-\alpha+1}t}{\alpha-1} \Big|_0^T = \frac{cx_0^{-\alpha+1}T}{\alpha-1}, \text{ де } T = \text{const}, x_0 - \text{довільне.}$$

$$F(x_0) = e^{\frac{cx_0^{-\alpha+1}T}{\alpha-1}}.$$

$$f(x_0) = (e^{\frac{cx_0^{-\alpha+1}T}{\alpha-1}})' = \frac{cTe^{\frac{cx_0^{-\alpha+1}T}{\alpha-1}}}{x_0^{\alpha}}.$$

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^\infty x_0 f(x_0) dx_0 = \int_0^\infty x_0 \frac{cT e^{\frac{cx_0^{-\alpha+1}T}{\alpha-1}}}{x_0^\alpha} dx_0 = \int_0^\infty \frac{cT e^{\frac{cx_0^{-\alpha+1}T}{\alpha-1}}}{x_0^{\alpha-1}} dx_0 \\
&= \left(\frac{-cT}{\alpha-1} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \Gamma\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1} \right).
\end{aligned}$$

Відповідь: $\alpha^* = 1 - \log_2 \frac{E_2}{E_1}$, $c^* = \frac{E_1 \log_2 \frac{E_2}{E_1}}{n}$ – конзистентні оцінки, $F(x_0) = e^{\frac{cx_0^{-\alpha+1}T}{\alpha-1}}$, $f(x_0) = \frac{cT e^{\frac{cx_0^{-\alpha+1}T}{\alpha-1}}}{x_0^\alpha}$, $E = \left(\frac{-T}{\alpha-1} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \Gamma\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1} \right)$ – математичне сподівання рекорду, $f(x_0) = \frac{cT e^{\frac{cx_0^{-\alpha+1}T}{\alpha-1}}}{x_0^\alpha}$ – щільність рекорду та функція розподілу $F(x_0) = e^{\frac{cx_0^{-\alpha+1}T}{\alpha-1}}$.

З цього ми можемо вивести більш загальну формулу математичного сподівання рекорду для будь-якої функції $g(x)$:

$$\begin{aligned}
F(x) &= P(X(t) \leq x_0) = P(N([0, t] \times (x_0, \infty)) = 0) \\
&= P\left(Pois(v([0, t] \times (x_0, \infty))) = 0\right) = \frac{A^0}{0!} e^{-A} = e^{-A};
\end{aligned}$$

$$A = \int_0^T \int_{x_0}^\infty g(x) dx dt;$$

$$F(x) = e^{-\int_0^T \int_{x_0}^\infty g(x) dx dt};$$

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = (e^{-\int_0^T \int_{x_0}^\infty g(x) dx dt})';$$

$$E(x) = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty x \frac{dF}{dx} dx = \int_0^\infty x (e^{-\int_0^T \int_{x_0}^\infty g(x) dx dt})' dx.$$

Задача 2.

Спостерігається Пуассонове випадкове поле на $[0; T] \times \mathbb{R}$ з щільністю

$$1) \frac{1}{x^\alpha}, \alpha > 1,$$

$$2) e^{-|x|},$$

криві $x = t^\beta, x = a \ln t$.

Яка кількість екстремальних точок (скінченна чи нескінченна) буде потрапляти в заштриховану зону кривої? Позначимо $X(T)$ – максимальна точка пуассонівського поля на відрізку $[0, T]$. Знайти $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X(T)}{x(T)}$.

Розв'язання

Для кращої візуалізації наведемо рис.3.4 та рис.3.5

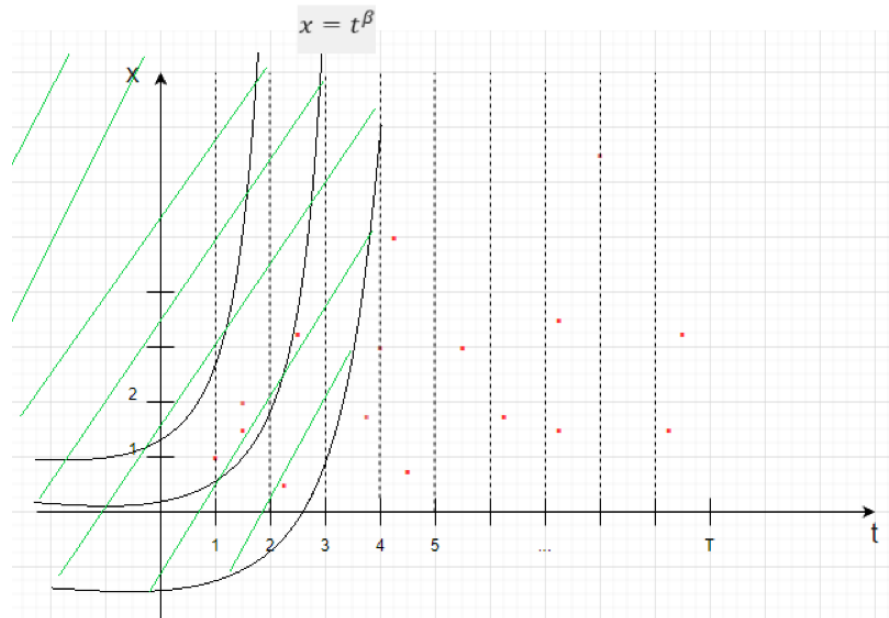


Рисунок 3.4 – Ілюстрація для кривої $x = t^\beta$

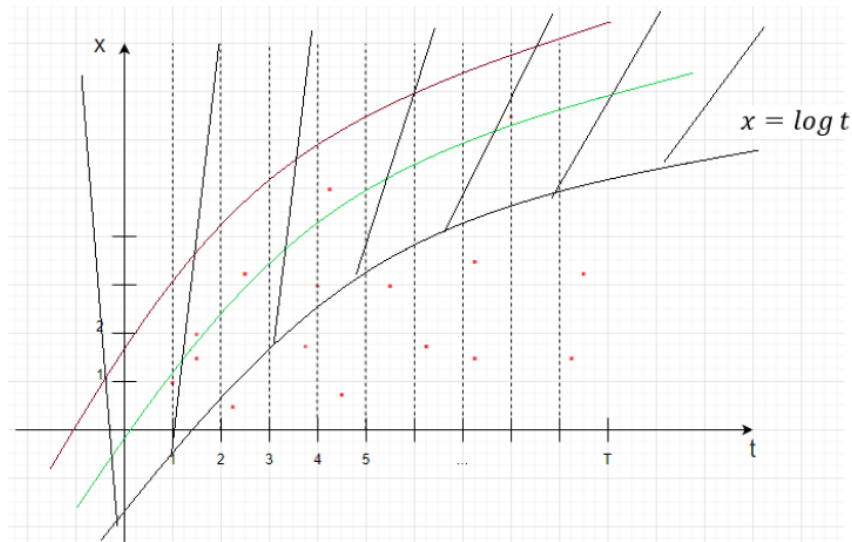


Рисунок 3.5 – Ілюстрація для кривої $x = a \log t$.

Наведемо два розв'язки з чотирьох, де буде скінченна і нескінченна кількість точок.

$$1) \quad \int_1^\infty \int_{a \ln t}^\infty e^{-|x|} dx dt = \int_1^\infty -e^{-x} \Big|_{a \ln t}^\infty dt = \int_1^\infty \frac{1}{t^a} dt = \frac{t^{a-1}}{a-1} \Big|_1^\infty = \frac{1}{1-a},$$

при $a < 1$ скінченна кількість точок лежить в цій зоні, отже $\max$ теж буде скінченна кількість точок і нескінченна при $a > 1$;

$$2) \quad \int_1^\infty \int_{t^\beta}^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx dt = \int_1^\infty \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_{t^\beta}^\infty dt = \int_1^\infty \frac{t^{(-\alpha+1)\beta}}{-\alpha+1} dt =$$

$$\frac{t^{(-\alpha+1)\beta+1}}{(-\alpha+1)((-\alpha+1)\beta+1)} \Big|_1^\infty = \frac{1}{(\alpha-1)((-\alpha+1)\beta+1)}, \text{ при } -\alpha\beta > \beta + 1.$$

Отже, скінченна кількість точок лежить в цій зоні, отже $\max$ теж буде скінченна кількість точок.

Відповідь: 1) при щільності $e^{-|x|}$ та кривій $\ln t$ скінченна кількість точок лежить вище від кривої та $\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{X(T)}{\ln t} = 1$ при $a < 1$ і нескінченна кількість при $a > 1$; 2) при

щільності $\frac{1}{x^\alpha}$ та кривій t^β скінченна кількість точок лежить вище від кривої для $\beta >$

$\frac{1}{1+\alpha}$ та $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X(T)}{x(T)} = 0$, а для $\beta < \frac{1}{1+\alpha}$ – нескінченна кількість точок $\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{X(T)}{x(T)} = \infty$ [9].

Задача 3.

Припустимо, що

$$\frac{c-t}{x^\alpha} \leq \nu([x, \infty) \times [0, t]) \leq \frac{c+t}{x^\alpha}, \text{ де } x \geq 0, t \geq 0.$$

Оцінити $E(X(t))$, де $X(t)$ – рекорд на $[0, t]$.

Розв'язання

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= P(X(t) > x_0) = P(N([0, T] \times (x_0, \infty)) = 0) \\ &= P(Pois(\nu([0, T] \times (x_0, \infty))) = 0) = 1 - \frac{A^0}{0!} e^{-A} = 1 - e^{-A}; \end{aligned}$$

Якщо $x \geq 0$ – невід'ємна випадкова величина, то

$$\begin{aligned} E(X(t)) &= \int_0^\infty (1 - F(x)) dx = \int_0^\infty x d(F(x)) = \int_0^\infty x d\left(1 - e^{-\left(\frac{ct}{x^\alpha}\right)}\right) = \\ &= \int_0^\infty -x \frac{ct}{x^{\alpha+1}} e^{-\left(\frac{ct}{x^\alpha}\right)} dx = \int_0^\infty -\frac{ct}{x^\alpha} e^{-\left(\frac{ct}{x^\alpha}\right)} dx = \left| \begin{array}{l} y = \frac{ct}{x^\alpha} \\ x = \frac{y^{\frac{1}{\alpha}}}{ct} \\ dx = \frac{y^{-1+\frac{1}{\alpha}}}{\alpha ct} \end{array} \right| = (c + \\ &t) \int_0^\infty -\frac{y^{-1+\frac{1}{\alpha}}}{\alpha ct} y e^{-y} dy = -\frac{1}{\alpha ct} \int_0^\infty y^{-1+\frac{1}{\alpha}+1} e^{-y} dy = -\frac{1}{\alpha ct} \int_0^\infty y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y} dy = -\frac{1}{\alpha ct} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

Відповідь: $E(X(t)) = -\frac{1}{\alpha ct} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$, де $X(t)$ – рекорд на $[0, t]$.

Задача 4.

Нехай $v([x, \infty) \times [0, t]) = \left(\frac{c_1}{x^{\alpha_1}} + \frac{c_2}{x^{\alpha_2}}\right)$, де c_1 та c_2 – відомі константи, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ – невідомі.

1. Побудувати конзистентну оцінку для α_1 та α_2 .
2. Що буде у випадку, якщо c_1 та c_2 теж невідомі.

Розв'язання

1. Знову ж таки як і в задачі про забруднення ми можемо взяти різні x , наприклад $x = 5$ та $x = 10$.

За законом великих чисел

$$E = \frac{\xi_k}{n} = \frac{c_1}{x^{\alpha_1}} + \frac{c_2}{x^{\alpha_2}}.$$

$$\begin{cases} \frac{c_1}{5^{\alpha_1}} + \frac{c_2}{5^{\alpha_2}} = \frac{\xi_k}{n}; \\ \frac{c_1}{10^{\alpha_1}} + \frac{c_2}{10^{\alpha_2}} = \frac{\xi_k}{n}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{c_1 5^{\alpha_2} + c_2 5^{\alpha_1}}{5^{\alpha_1 + \alpha_2}} = \frac{\xi_k}{n}; \\ \frac{c_1 10^{\alpha_2} + c_2 10^{\alpha_1}}{10^{\alpha_1 + \alpha_2}} = \frac{\xi_k}{n}. \end{cases}$$

На жаль, аналітично вивести формулу загального розв'язку неможливо, але коли ми задамо чіткі константи у вигляді чисел, наприклад $c_1 = 3$, а $c_2 = 4$, то тоді за допомогою того ж “Wolfram Alpha” ми отримаємо такий розв'язок для α_2 , на рис. 3.6, позначено α_1 як x , α_2 як y та $\frac{\xi_k}{n}$ як R :

```
In[3]:= Solve[{(3 / (5^x)) + (4 / (5^y)) == R, (3 / (10^x)) + (4 / (10^y)) == R}, {x, y}]
|розв'язати рівняння
```

$$\text{Out[3]} = \left\{ \left\{ y \rightarrow \frac{\text{Log} \left[\frac{2^x (-3 + 5^x R)}{-3 + 10^x R} \right]}{\text{Log}[2]} \right\} \right\}$$

Рис.3.6 – Розв'язок системи з “Wolfram Alpha”

2. Якщо c_1 та c_2 теж невідомі, то ми тоді візьмемо більшу кількість x і аналогічно до попереднього пункту, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{c_1}{5^{\alpha_1}} + \frac{c_2}{5^{\alpha_2}} = \frac{\xi_k}{n}; \\ \frac{c_1}{3^{\alpha_1}} + \frac{c_2}{3^{\alpha_2}} = \frac{\xi_k}{n}; \\ \frac{c_1}{10^{\alpha_1}} + \frac{c_2}{10^{\alpha_2}} = \frac{\xi_k}{n}; \\ \frac{c_1}{7^{\alpha_1}} + \frac{c_2}{7^{\alpha_2}} = \frac{\xi_k}{n}; \end{cases}$$

На жаль, аналітично вивести формулу загального розв'язку неможливо, але знову ж таки, ми можемо побачити, що задачі такого типу можна розв'язувати за допомогою таких систем.

Задача 5.

Нехай $v([x, \infty) \times [0, t]) = tF(x)$, де $(1 - F(x))x^\alpha \rightarrow 1, x \rightarrow \infty$.

Побудувати конзистентну оцінку для α .

Розв'язання

Для кращої візуалізації наведемо рис.3.7

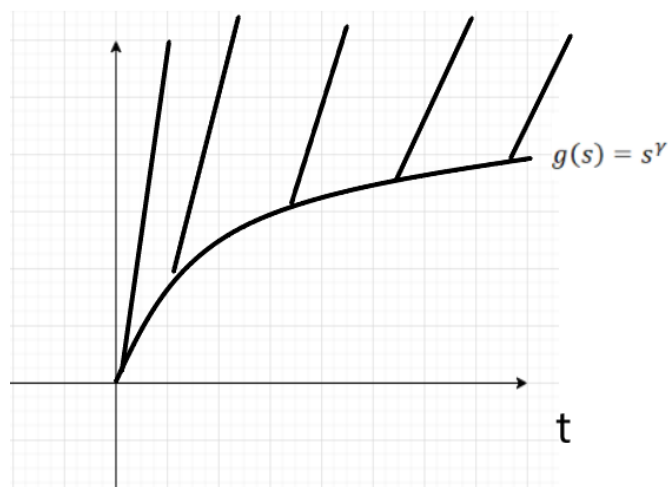


Рис.3.7 – Ілюстрація для кривої $y = s^\gamma$.

$$\begin{aligned}
v((S, x): S \in [0, t], x \geq g(t)) &= \int_0^t \left(\int_{g(t)}^{\infty} v dx \right) ds \\
&= \int_0^t \bar{F}(g(s)) ds \approx \left| \bar{F}(x) = \frac{c}{x^\alpha} \right| \approx \int_0^t \frac{1}{g^\alpha(s)} ds = \int_1^t \frac{1}{s^{\alpha\gamma}} ds \\
&= \frac{t^{\alpha\gamma-1}}{\alpha\gamma-1} - \frac{1^{\alpha\gamma-1}}{\alpha\gamma-1} = \frac{t^{\alpha\gamma-1} - 1}{\alpha\gamma-1}; \\
\frac{N(A(t))}{v(A(t))} &\rightarrow 1; \\
N(A(t)) &\rightarrow \frac{t^{\alpha\gamma-1} - 1}{\alpha\gamma-1}; \\
\ln(N(A(t))) &\rightarrow (\alpha\gamma-1) \ln(t-1) - \ln(\alpha\gamma-1); \\
\alpha^* \gamma &= \frac{\ln(N(A(t)))}{\ln(t-1)} - 1; \\
\alpha^* &= \frac{\frac{\ln(N(A(t)))}{\ln(t-1)} - 1}{\gamma}.
\end{aligned}$$

Відповідь: $\alpha^* = \frac{\frac{\ln(N(A(t)))}{\ln(t-1)} - 1}{\gamma}$ конзистентна оцінка α .

Висновки до розділу 3

У цьому розділі було розглянуто задачі, пов'язані з пуассоновими точковими мірами. Спочатку було розглянуто тренувальні приклади, які були застосовані у подальших основних задачах. Наприклад було використано лему Бореля – Контеллі для доведення певних корисних властивостей.

Далі було описано основні задачі. Перша задача про забруднення, де t – момент забруднення, x – величина забруднення і було побудовано конзистентну оцінку для c та α та знайдено математичне сподівання рекорду, функцію розподілу та щільність. Також виведено загальну формулу математичного сподівання

рекорду для будь-якої функції. В наступній задачі ми побачили, що в залежності від обраної функції та кривої математичне сподівання в деяких випадках існує, а в деяких ні. Далі ми продовжували будувати конзистентні оцінки для двох невідомих параметрів та для чотирьох, знаходили математичні сподівання для різних цікавих щільностей. Також побудували конзистентну оцінку для інтенсивності, яка не строго чомусь дорівнювала, а була приблизно рівна.

Всі аналітичні розрахунки були перевірені за допомогою пакету Wolfram Alpha.

РОЗДІЛ 4 РОЗРОБКА ВЛАСНОГО СТАРТАП ПРОЕКТУ

Зараз у сучасному світі існує велика потреба в системах, які оптимально можуть щось передбачати. Взагалі є багато прикладів, де можна застосувати Пуассонівські випадкові міри, наприклад: розглянемо роботу страхової компанії. Нехай клієнти щороку роблять страхові внески, а компанія робить виплати; кількість клієнтів вважається сталою і рівною N ; страхові події вважаються незалежними одна від одної, причому ймовірність настання страхової події у одного клієнта протягом року дорівнює a . Завдання: промодельовати кількість виплат з допомогою пуассонівського процесу. Розв'язання. Оскільки у першому наближенні ймовірність настання однієї страхової події на інтервалі $[0, h]$ дорівнює $N \cdot a \cdot h$ при $h \rightarrow 0$, ймовірність ненастання страхових подій на цьому інтервалі дорівнює $(1 - N \cdot a \cdot h)$, а ймовірність настання на цьому інтервалі двох чи більше подій — нескінченно мала порівняно з довжиною інтервалу, то легко можна зробити висновок, що кількість виплат зручно моделюється пуассонівським процесом з інтенсивністю $N \cdot a$.

Приклад про надходження заявок зі сталою інтенсивністю. Нехай на станцію таксі з сьомої до дев'ятої години ранку надходять заявки від клієнтів, причому інтенсивність цих заявок — є величиною приблизно сталою: в середньому надходить одна заявка за n секунд. Завдання: промодельовати кількість заявок з допомогою Пуассонівського процесу.

Розв'язання. Міркуваннями розв'язання до попередньої задачі можна встановити, що кількість заявок доцільно моделювати пуассонівським процесом з інтенсивністю $\frac{1}{n}$.

Як бачимо, цю розробку можна буде застосувати в багатьох сферах, оскільки Пуассонівські процеси широко застосовуються. Проте хотілось би це застосувати для спорту, наприклад на основі попередніх результатів спортсмена можна визначити його максимальний рекорд. Саме ця категорія людей дуже часто

отримує травми тому, коли ми визначимо межу, яку не треба перевищувати, вони зможуть менше травмуватись і довше мати свою кар'єру, займатись улюбленою справою. Як на мене здоров'я людини – це найважливіше, тому ця розробка буде дуже корисною.

4.1 План розробки стартапу та масштабування його на ринок

Для розробки стартап проекту та виведення його на ринок необхідно провести детальне дослідження, яке передбачає виконання наведених нижче чотирьох кроків. Спочатку треба провести маркетинговий аналіз, який включає в себе:

- формування ідеї самого проекту, визначення основних напрямків використання товару чи послуг та формулювання основних відмінностей від товарів/послуг конкурентів;
- проаналізувати ринкові можливості для його реалізації;
- розробити стратегію виведення товару на ринок, базуючись на аналізі ринкового середовища.

Наступним кроком являється організація самого стартапу. На цьому етапі мають бути:

- складений план та побудований таймлайн розробки та запуску продукту;
- запланований обсяг виробництва та оцінений потенційний обсяг ресурсу, який буде потрібен для виконання плану;
- розраховані витрати, необхідні для реалізації проекту, та витрати на запуск проекту.

Далі необхідно виконати фінансово-економічний аналіз та оцінити ризики стартап-проекту, в межах якого:

- визначити обсяг інвестиційних втрат;

- розрахувати основні фінансово-економічні показники проекту (собівартість, ціну продукту/послуги, податковий збір та чистий прибуток) та визначити показники інвестиційної привабливості проекту (рентабельність продажів, період окупності проекту);
- визначити основні ризики проекту та способи для їх запобігання.

Фінальним кроком являється розробка заходів з комерціалізації продукту.

Цей крок являється важливим для масштабування та збільшення розмірів продукту.

Для того, щоб залучити інвесторів та знайти різні способи фінансування проекту, необхідно:

- визначити цільову групу інвесторів та описати їх бізнес інтереси;
- скласти інвестиційну пропозицію, яка включає в себе як опис самого продукту та його теперішні розміри, так і можливі шляхи розширення та розвитку;
- обрати канали комунікації із потенційно зацікавленими персонами та заходи для просування офerti інвесторам.

Далі наведемо результати виконання кожного з описаних кроків.

4.2 Опис ідеї стартап-проекту

Стартап-проект полягає у вирішенні проблеми великої кількості травм у спорті за допомогою Пуассонівських випадкових мір. Суть продукту стартапу полягає у тому, що система обробляє дані, надані користувачем та повертає план тренувань, розроблений саме для цієї людини.

У таблиці 4.1 наведена інформаційна карта стартапу.

Таблиця 4.1 – Інформаційна карта стартап-проекту

Назва проекту	SafeSport
Автори проекту	Горбенко Надія Олександрівна
Коротка анотація	Додаток буде обробляти дані та видавати план тренувань.
Термін реалізації проекту	6 місяців
Необхідні ресурси	Приміщення з комп'ютерами, доступом до Інтернету, доступ до електромережі Програмне забезпечення для розробки, хмарне сховище для даних, антивірусні програми Фінансові кошти на оплату заробітної плати виконавцям на термін 6 місяців, а також на такі витрати як: оренда приміщення, комунальні послуги, оренда хмарного сховища тощо
Опис проблеми, яку вирішує проект	Продукт вирішує задачу зменшення кількості травм у спорті
Головні цілі та завдання проекту	Метою проекту є створення системи, яка буде автоматично обробляти дані надані користувачем та надавати покращені тренування.
Очікувані результати	Привернення технологічних компаній до нашого стартапу, автономна система для планування.

4.3 Технологічний аудит ідеї проекту

Тепер можна розібрати ідею стартапу та провести конкурентний аналіз. У таблиці 4.2 наведений опис ідеї стартапу.

Таблиця 4.2 – Опис ідеї стартапу

Зміст ідеї	Напрямки застосування	Вигоди для користувача
Основна ідея являється створення комплексної системи, яка буде приймати на вхід файли з даними зображення та повернення готових тренувань	Опрацювання даних і створення ідеального тренування персонально для цієї людини	Користувач зможе отримувати автоматично, без трати свого часу своє тренування
	Система збору відгуків про якість тренувань для онлайн моніторингу та подальшого покращення системи	Система буде оновлюватись і якість генерації тренувань буде покращуватись, персоналізація

Далі проведемо порівняльний аналіз конкурентів проекту та наведемо результати у таблиці 4.3.

Таблиця 4.3 – Порівняльний аналіз конкурентів проекту

№ п/ п	Техніко- економічні характерис тики ідеї	(потенційні) товари/концепції конкурентів				W	N	S
		Власний проект	Фітнес	Adidas Training	Фітнес і Бодибілдін г			
1	Якість генерації звіту	Надає доволі хороший результат	Свій власний алгорит м	Свій власний алгоритм	Свій власний алгоритм			+
2	Доступніст ь по ціні	Безкоштовн ий при запуску MVP	Повніст ю безкошт овний	Безкошто вний при запуску MVP	Безкоштов ний при запуску MVP		+	
3	Персоналіз ація генерації	Присутня	Присутн я, але не на достатнь ому рівні	Відсутні я	Відсутня		+	

Далі аналізуємо реальність технічно здійснити ідею проекту (таблиця 4.4).

Таблиця 4.4 – Технологічна здійсненність продукту

№ п/п	Ідея проекту	Технології реалізації	Наявність технологій	Доступність технологій
1	Створення комплексної системи, яка буде приймати на вхід файл з даними та повертатиме програму тренувань	Використання мови програмування Python	Наявні	Доступні
2		Використання мови програмування Java	Не наявні, необхідні допрацювання	Доступні
3		Використання мови програмування C++	Наявні, необхідні допрацювання	Доступні
Обрана технологія реалізації ідеї проекту: Python				

4.4 Аналіз ринкових можливостей запуску стартап-проекту

Далі проведемо попередній аналіз ринку для запуску стартап-проекту (таблиця 4.5).

Таблиця 4.5 – Попередня характеристика потенційного ринку стартап-проекту

№ п/п	Показники ринку (найменування)	Характеристика
1	Кількість головних гравців, од	3
2	Загальний обсяг продаж, грн/ум.од	359 800 грн

Продовження таблиці 4.5

3	Динаміка ринку (якісна оцінка)	Позитивна, зростає
4	Наявність обмежень для входу (вказати характер обмежень)	Відсутні
5	Специфічні вимоги до стандартизації та сертифікації	Відсутні
6	Середня норма рентабельності в галузі (або по ринку), %	10%

Тепер проведемо характеристику потенційних клієнтів, які можуть бути зацікавлені в проекті (таблиця 4.6).

Таблиця 4.6 – Характеристика потенційних клієнтів стартап-проекту

№ п/п	Потреби, що формує ринок	Цільова аудиторія (цільові сегменти ринку)	Відмінності у поведінці різних потенційних цільових груп клієнтів	Вимоги споживачів до товару
1	Покращення індивідуальних тренувань	Особисте використання користувачем	Кожного цікавлять різні вправи	Простота використання
2	Збереження здоров'я людини	Спортсмени або їхні організації	Цікавить відсутність ризику.	Високі вимоги до правильного генерування.

Обрахуємо фактори загроз (таблиця 4.7) та можливостей (таблиця 4.8). Проаналізуємо загрози, щоб зрозуміти можливі перешкоди при запуску продукту на

ринок. Фактори можливостей же треба обрахувати, щоб знати усі сприятливі умови та по можливості ними скористатися.

Таблиця 4.7 – Фактори загроз

№ п/п	Фактор	Зміст загрози	Можлива реакція компанії
1	Конкуренція	Хоча ринок є відкритим і неосвоєним, на ньому вже є кілька великих гравців, які відомі на ринку, які вже мають свою цільову групу покупців	Знайти точки додаткової цінності для користувача, адже зараз ринок не досконалий і не орієнтується на кожного користувача в залежності від його потреб
2	Ціна збуту	Конкуренти можуть коштувати менше через нижчу якість	Сфокусуватися на якості роботи застосунку та продумати маркетингову стратегію
3	Якість аналізу	Прогнозування не завжди є досить точним, а все ж таки приблизним, тому треба буде певний час, щоб покращувати і покращувати результат	Мати достатній штаб і ресурси, для побудови різних моделей для різних предметних областей

Таблиця 4.8 – Фактори можливостей

№ п/п	Фактор	Зміст можливості	Можлива реакція компанії
1	Універсальність	Саме такого продукту ще немає на ринку, тому це наша перевага	Зробити акцент при маркетингу, продовжувати розвиток як окремого продукту
2	Простота у використанні	Від користувача треба лише завантажити файл зображення	Реалізувати зручний інтерфейс для завантаження
3	Створення позитивного іміджу компанії	Надавати найбільш якісні послуги та сервіси	Пропонувати моделі з найкращими результатами, а також надавати усю необхідну технічну підтримку
4	Безкоштовний сервіс при MVP	Максимально швидко набрати базу своїх клієнтів та заявити про себе на ринку	Розгорнути широкий маркетинг, а також активно боротися за клієнтів конкурентів

Далі розглянемо питання конкуренції, а саме визначимо її тип та рівень (таблиця 4.9).

Таблиця 4.9 – Ступеневий аналіз конкуренції на ринку

Особливості конкурентного середовища	У чому проявляється дана характеристика	Вплив на діяльність підприємства (можливі дії компанії, щоб бути конкурентоспроможною)
1. Вказати тип конкуренції: недосконала конкуренція	Представлено мало продуктів та експертів	Зробити максимальним збут застосунку
2. За рівнем конкурентної боротьби: міжнародний	Наявні проекти, розроблені та можуть бути доступні у всьому світі	Розширити цільову аудиторію, розробити інтерфейс на різних мовах
3. За галузевою ознакою: внутрішньогалузева	Можуть працювати з різними галузями спорту	Покращити персоналізацію
4. Конкуренція за видами товарів: товарно-родова	Конкуренція між прогнозами інформаційних систем та команд аналітиків.	Збільшення точності та швидкості відправки результатів оцінки.
5. За характером конкурентних переваг: нецінова	Різні компанії пропонують різну якість	Розробляти якісніші алгоритми і моделі
6. За інтенсивністю: марочна	Бренд, що легко впізнається, дає великі переваги	Звернення великої уваги на розвиток бренду

Далі необхідно виконаємо аналіз конкуренції за моделлю 5 сил конкуренції Майкла Портера (таблиця 4.10).

Таблиця 4.10 – Аналіз конкуренції в галузі за М. Портером

Складові аналізу	Прямі конкуренти у галузі	Потенційні конкуренти	Постачальники	Клієнти	Товарозамінники
	Інші існуючі системи та продукти	Якість, ціни, кількість користувачів, капіталовкладення	Фактори сили постачальників	Контроль якості, порівняння цін	Сила бренду, якість, ціна, масштаби
Висновки	Конкуренція з невеликою інтенсивністю, а також підігрітий ринок	Можливості входження на ринок, нові потенційні конкуренти	Постачальники відсутні	Клієнти не диктують умови роботи на ринку	Товарозамінники відсутні

Результати аналізу конкурентного середовища свідчать про те, що на ринку сприятлива ситуація для створення і запуску даного стартап-проекту. Ґрунтуючись на проведеному аналізі конкуренції (таблиця 4.10), а також враховуючи характеристики ідеї стартап-проекту (таблиця 4.5), характеристики потенційних клієнтів і їх вимоги до продукту (таблиця 4.6) та фактори ринкового середовища (таблиці 4.7 та 4.8) було сформульовано та обґрунтовано перелік факторів конкурентоспроможності. Результати аналізу подано в таблиці 4.11.

Таблиця 4.11 – Обґрунтування факторів конкурентоспроможності

№ п/п	Фактор конкурентоспроможності	Обґрунтування (наведення чинників, що роблять фактор для порівняння конкурентних проектів значущим)
1	Низька конкуренція	В нашій країні при розробці стартапу не було знайдено конкурентів
2	Простота у використанні	Від користувача треба лише завантажити файл з даними
3	Якість та гарантії	Надавати найбільш якісні послуги та сервіси
4	Безкоштовний сервіс при MVP	Максимально швидко набрати базу своїх клієнтів та заявити про себе на ринку

Тепер можна провести аналіз сильних та слабких сторін продукту (таблиця 4.12).

Таблиця 4.12 – Порівняльний аналіз сильних та слабких сторін системи

№ п/п	Фактор конкурентоспроможності	Бали 1-20	Рейтинг товарів-конкурентів						
			-3	-2	-1	0	1	2	3
1	Низька конкуренція	20				+			
2	Простота у використанні	18				+			
3	Якість та гарантії	17		+					

Продовження таблиці 4.12

4	Безкоштовний сервіс при MVP	16				+			
---	-----------------------------	----	--	--	--	---	--	--	--

Далі проведемо SWOT-аналіз продукту (таблиця 4.13).

Таблиця 4.13 – SWOT-аналіз стартап-проекту

Сильні сторони Низька конкуренція Простота у використанні Якість та гарантії Безкоштовний сервіс при MVP	Слабкі сторони Відсутність сильного бренду Не сформована база клієнтів Не підключені альтернативні канали маркетингу
Можливості Покращення системи Персоналізація розширення списку мов для аналізу додавання нових предметних областей	Загрози Поява конкурентів Збут

Дякуючи проведенню SWOT-аналізу, ми змогли визначити сильні та слабкі сторони, можливості та загрози, пов'язані з конкуренцією та плануванням стартап-проекту. Далі спроектуємо альтернативну ринкову поведінку для інтеграції стартап-проекту на ринок та приблизний час реалізації системного комплексу, з урахуванням потенційних проектів, що можуть бути виведені на ринок та наведемо результати у таблиці 4.14.

Таблиця 4.14 – Альтернативи ринкового впровадження стартап проекту

№ п/п	Альтернатива (орієнтовний комплекс заходів) ринкової поведінки	Ймовірність отримання ресурсів	Строки реалізації
1	Вихід на ринок з нижчою якістю	30%	3 місяці
2	Пропонувати одразу платне використання	60%	6 місяців
3	Поступовий вихід з готовим продуктом. Висока якість та кокурентоспроможність цін	70%	6 місяців

У даному пункті був проведений детальний аналіз ринку та продукту. Також відповідно до результатів проведеного конкурентного аналізу, визначених факторів ринку та його сприятливості, описання ідеї та характеристик стартап-проекту, робимо висновок висновок, що існують дуже сприятливі умови для виходу продукту на ринок.

4.5 Розроблення ринкової стратегії стартап-проекту

Для розробки ринкової стратегії продукту, у першу чергу, необхідно проаналізувати цільову аудиторію проекту (таблиця 4.15).

Таблиця 4.15 – Вибір цільових груп потенційних споживачів

№ п/п	Опис профілю цільової групи потенційних клієнтів	Готовність споживачів сприйняти продукт	Орієнтовний попит у межах цільової групи (сегменту)	Інтенсивність конкуренції в сегменті	Простота входу у сегмент
1	Персональні користувачі	Висока	40%	Середня	Висока
2	Спортивні компанії	Середня	30%	Низька	Висока
4	Держава	Низька	15%	Низька	Середня
Які цільові групи обрано: 1, 2					

Маючи аналіз цільових груп, далі визначимо базову стратегію розвитку продукту (таблиця 4.16).

Таблиця 4.16 – Визначення базової стратегії розвитку

№ п/п	Обрана альтернатива розвитку проекту	Стратегія охоплення ринку	Ключові конкурентоспроможні позиції відповідно до обраної альтернативи	Базова стратегія розвитку*
1	1 та 2	Недиференційований маркетинг	Висока універсальність, багатогалузевість, висока ціна та якість.	Масовий маркетинг.

Для роботи в обраних сегментах ринку сформовано базову стратегію розвитку (таблиці 4.17, 4.18).

Таблиця 4.17 – Визначення базової стратегії конкурентної поведінки

Чи є проект «першопрохідцем» на ринку?	Чи буде компанія шукати нових споживачів, або забирати існуючих у конкурентів?	Чи буде компанія копіювати основні характеристики товару конкурента, і які?	Стратегія конкурентної поведінки*
Так	Так	Ні	Виклику лідера

Таблиця 4.18 – Визначення стратегії позиціонування

Вимоги до товару цільової аудиторії	Базова стратегія розвитку	Ключові конкурентоспро- можні позиції власного стартап- проекту	Вибір асоціацій, які мають сформувати комплексну позицію власного проекту (три ключових)
Універсальність Простота у використанні Якість результатів	Позиціонування як продукту, що використовує передові технології для аналізу	Універсальність Простота у використанні Якість та гарантії Безкоштовне використання при MVP	По іміджу. Позиціонування на низькій ціні Легкість у використанні

4.6 Розроблення маркетингової програми стартап-проекту

Після проведеного комплексного аналізу, можемо повноцінно описати ключові переваги концепції потенційного товару (таблиця 4.19) та побудувати концепцію маркетингових комунікацій (таблиця 4.20).

Таблиця 4.19 – Ключові переваги концепції потенційного товару

№ п/п	Потреба	Вигода, яку пропонує товар	Ключові переваги перед конкурентами (існуючі або такі, що потрібно створити)
1	Якісна генерація	Якісне проектування тренувань	Постійне покращення та покращення моделей, які зможуть аналізувати більше прикладних областей
2	Універсальність	Тренування розроблені саме під окремого користувача	Схожих аналогів на ринку поки немає
3	Простий інтерфейс	Система дуже проста у використанні	Система із інтуїтивно зрозумілим інтерфейсом, який вимагає всього лише завантаження файлу з даними

Таблиця 4.20 – Концепція маркетингових комунікацій

№ п/п	Специфіка поведінки цільових клієнтів	Канали комунікацій, якими користуються цільові клієнти	Ключові позиції, обрані для позиціонування	Завдання рекламного повідомлення	Концепція рекламного звернення
1	Пошук спеціалізованих систем	b2b продажі Зв'язок через теплі контакти Таргетована реклама у соціальних мережах Публікація в спеціалізованих виданнях, журналах	Точність Якість Універсальність	Поєднати повідомлення про те, що це якісна система, яка є незалежною	Таргетована реклама на цільову аудиторію
2	Пошук доступного та дешевого продукту	Рекламні банери в Інтернеті, форуми, реклами від інфлюенсерів	Простота Безкоштовне використання MVP	Вселити довіру у бренд та продукт	Реклама у лідерів думок Вивіски в публічних місцях Таргетована реклама на цільову аудиторію

Висновки до розділу 4

Даний розділ був присвячений дослідженню стартап-проекту. В якості такого була представлена система обробки даних спортсменів та видаватиме план тренувань.

У рамках розділу було досліджено розробку стратегій виходу на ринок та маркетинг-стратегії для цього. Зокрема, даний ринок являється сприятливим з невеликою кількістю представлених компаній конкурентів. Оскільки вони дають лише частину функцій, а запропонована система є універсальною та доступною, то у стартап-проекту є всі шанси стати монополістами на ринку.

Також були опрацьовані сильні та слабкі сторони проекту, SWOT аналіз, аналіз конкурентів та цільової аудиторії. На основі всіх досліджень був сформований концепт маркетингової стратегії для обраних цільових аудиторій.

ВИСНОВКИ

У вивченні випадкових процесів зазвичай обговорюються саме процес Пуассона. Він згадується майже у кожній книзі. Більшість авторів захоплюються красою та широкою застосовністю процесів Пуассона в одному чи кількох вимірах. Відзначимо також, що клас неоднорідних пуассонівських процесів досить багатий і є цікавою моделлю для статистичних досліджень. Функції інтенсивності інколи є досить складними і можуть відобразити реальні технічні проблеми, тому проблеми оцінювання не є тривіальними.

Для перевірки результатів було освоєно та використано програму “Wolfram Alpha”.

Головним досягненням магістерської дисертації можна вважати коректно знайдене математичне сподівання рекорду, функцію розподілу та щільність у першій задачі про забруднення. Також виведено загальну формулу знаходження математичного сподівання рекорду для будь-якої функції. В наступній задачі ми побачили, що в залежності від обраної функції та кривої математичне сподівання в деяких випадках існує, а в деяких ні. Також було побудовано конзистентну оцінку для інтенсивності, яка не строго чомусь дорівнювала, а була приблизно рівна.

Отже, наша перша задача має дійсно прикладний характер і є дуже корисною, тому цікаво знайти застосування всім іншим дослідженням, при цьому продовжити дослідження пуассонівських випадкових точкових мір.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Yu. A. Kutoyants Statistical Inference for Spatial Poisson Processes. 233 Spring Street, New York: Springer, 1998, 278 p. (20.08.2022).
2. Sidney I. Resnick Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes. 233 Spring Street, New York: Springer, 2007, 320 p. (11.10.2022).
3. Sidney I. Resnick Heavy-Tail Phenomena. Probabilistic and Statistical Modeling. 233 Spring Street, New York: Springer, 2007, 404 p.
4. П. І. Бідюк, Б. П. Ткач, Т. Харрінгтон Навчальний посібник: Математична статистика. Київ: ДП «Видавничий дім «Персонал», 2018, 346 с. (18.09.2022).
5. J. F. C. Kingman. Poisson Processes. Oxford: University of Bristol, 1993, 112 p. (11.10.2022).
6. Allan Gut. An Intermediate Course in Probability Springer. 2009. 303 с. (01.09.2022).
7. Горбенко Н.О., Пилипенко А.Ю. Інтегрування пуассонівських випадкових мір та знаходження їх асимптотик та оцінка параметрів пуассонівських випадкових полів: збірник доповідей І науково-практичної конференції «Системні науки та інформатика», 22–29 листопада 2022 року, Київ. – К., НН ІПСА КПП ім. Ігоря Сікорського, 2022. С. 181-185..
8. Thomas Mikosch. Non-Life Insurance Mathematic Springer. 2009. 432с. (20.09.2022).
9. Arrati R., Barbour, A. D., and Tavaré, S. Poisson process approximations for the Ewens sampling formula. Advances in Applied Probability. University of Southern California. 1992. 535p. (02.09.2022).
10. Anderson, C.W., Contributions to the Asymptotic Theory of Extreme Values, Ph.D. Thesis, University of London, 1971. 131p.
11. Gomes, M.I., Penultimate limiting forms in extreme value theory. Ann. Inst. Statist. Math, 36, 1984, 85p.

12. Haan, L. de and Resnick, S., Second order regular variation and rates of convergence in extreme value theory. *Annals of Probability* 24, 1996, 124 p.
13. Balakrishnan, N. & Chan, P.S.. Order statistics from extreme value distribution, II: best linear unbiased estimates and some other uses. *Comm. Statist. Simulation Comput.*, 21, 1992, P. 1219-1246.
14. Beirlant, J., Dierckx, G. & Guillou, A. Estimation of the extreme-value index and generalized quantile plots. *Bernoulli*, 2005, 970 p.
15. Chaouche, A. & Bacro, J.-N. A statistical test procedure for the shape parameter of a generalized Pareto distribution. *Comput. Statist. Data Anal.*, 45, 2004, 803 p.
16. Coles, S.G. *An Introduction to Statistical Modelling of Extreme Values*, Springer Series in Statistics, 2001, 198 p.
17. Васильків І.М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики: навч. посіб. – Львів: ЛНУ імені Франка, 2020. 184 с. URL: https://new.mmf.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2020/04/Vasyl-kiv-I.M.-TIMS_CHASTYNA_2.pdf (17.08.2022).
18. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения: в 2-х т. / пер. с англ. Ю.В. Прохоров. Москва: Мир, 1967. Т. 2. 752 с. (20.10.2022).