МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ, ЧАСТИНА І

Практикум, розрахункова робота

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальностей 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»,
144 «Теплоенергетика», 184 «Гірництво»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Вища математика: Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії, частина І: Практикум, розрахункова робота [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальностей 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», 144 «Теплоенергетика», 184 «Гірництво» /КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Н. Л. Денисенко, В. Ф. Зражевська. – Електронні текстові данні (1 файл: 1.2 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 42 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол №8 від 24.06.2021 р.) за поданням Вченої ради Інституту енергозбереження та енергоменеджменту (протокол № 12 від 31.05.2021 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ, ЧАСТИНА І

Практикум, розрахункова робота

Укладачі: *Денисенко Наталя Леонідівна*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Зражевська Віра Федорівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор *Дудкін М. Є.,* докт. фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент *Рева Н. В.*, канд. фіз.-мат. наук, ст. викладач кафедри математичної фізики НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»

Навчальний посібник забезпечує виконання розрахункової роботи, передбаченої навчальною програмою дисципліни «Вища математика 1» для спеціальностей 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», 144 «Теплоенергетика» та 184 «Гірництво». Тематика вказівок охоплює розділ навчальної програми, що стосується тем «Елементи векторної алгебри» та «Пряма на площині». У посібнику стисло наведено основний теоретичний матеріал, розібрано розв'язання типових прикладів. Посібник містить 40 варіантів завдань, які можуть бути використані викладачами при проведенні практичних занять та студентами очної та заочної форм навчання при роботі над матеріалом з даної темі.

ЗМІСТ

ВСТУП

Даний навчальний посібник місить 40 варіантів типового розрахунку, передбаченого навчальним планом курсу «Вища математика 1». Варіанти завдань охоплюють матеріал за темами «Елементи векторної алгебри» та «Пряма на площині». В посібнику наведено в стислій формі необхідні теоретичні відомості з формулюванням основних означень і формул. Значна увага приділена прикладам розв’язання задач з поясненнями методики розв’язання.

Даний посібник може бути корисним для студентів очної та заочної форм навчання для організації самостійної роботи. Запропоновані задачі можуть бути використані викладачами вищої математики технічних спеціальностей в умовах аудиторного і дистанційного навчання.

1. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

1.1. Основні поняття. Лінійні операції над векторами

Вектор – направлений відрізок. Якщо A – початок відрізка, а B – його кінець, то вектор позначається $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$. Вектор $\overrightarrow{BA}$ називається **протилежним** вектору $\overrightarrow{AB}$. Довжиною або **модулем** вектора $\vec{a}$ називається довжина відрізка і позначається $|\vec{a}|$. Вектор, довжина якого дорівнює 0, називається **нульовим** вектором и позначається $\vec{0}$. Вектор, довжина якого дорівнює 1, називається **одиничним** вектором. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, називається **ортом** вектора і позначається $\vec{a}^{\,0}$. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються **колінеарними** ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), якщо вони лежать на одній або на паралельних прямих. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються **рівними** ($\vec{a} = \vec{b}$), якщо вони колінеарні, однаково направлені і мають однакову довжину. Три вектори в просторі називаються **компланарними**, якщо вони лежать в одній або паралельних площинах.

Під лінійними операціями над векторами розуміють додавання, віднімання векторів і множення вектора на скаляр.

Сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{a}+\vec{b}$, який починається в початку вектора $\vec{a}$ і закінчується в кінці вектора $\vec{b}$, при умові, що кінець вектора $\vec{a}$ і початок вектора $\vec{b}$ суміщені. Таке правило знаходження суми векторів називається правилом трикутника.

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$: $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Якщо на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, відкладених із спільного початку, побудувати паралелограм, то одна діагональ буде сумою векторів, а інша – їх різницею.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, який колінеарний вектору $\vec{a}$, має довжину $|\lambda|\,|\vec{a}|$ і має напрям вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$ і протилежний напрям, якщо $\lambda < 0$.

Проєкція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l. Позначимо через A_1 і B_1 проєкції точок A і B на вісь l відповідно. Проєкцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l, $np_l\overrightarrow{AB}$, називається число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$ взяте зі знаком плюс, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь l співнапрямлені, і зі знаком мінус, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь l протилежно напрямлені.

Проєкція вектора на вісь має наступні властивості:

1. Проєкція вектора на вісь дорівнює добутку довжини вектора на косинус кута φ між віссю і вектором:

$$np_l\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi\,. \tag{1.1}$$

2. Проєкція суми векторів на ту ж саму вісь дорівнює сумі їх проєкцій на цю вісь, наприклад, для трьох векторів $np_l\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b} + np_l\vec{c}$.

3. При множенні вектора $\vec{a}$ на число λ його проєкція також множиться на це число: $np_l\lambda\vec{a} = \lambda\, np_l\vec{a}$.

1.2. Координати вектора. Напрямні косинуси

Розглянемо в просторі прямокутну декартову систему координат *Oxyz*, через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ позначимо орти на осях *Ox, Oy, Oz* відповідно. Візьмемо довільний вектор $\vec{a}$ і сумістимо його початок з початком відліку: $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ (Рис. 1.1).

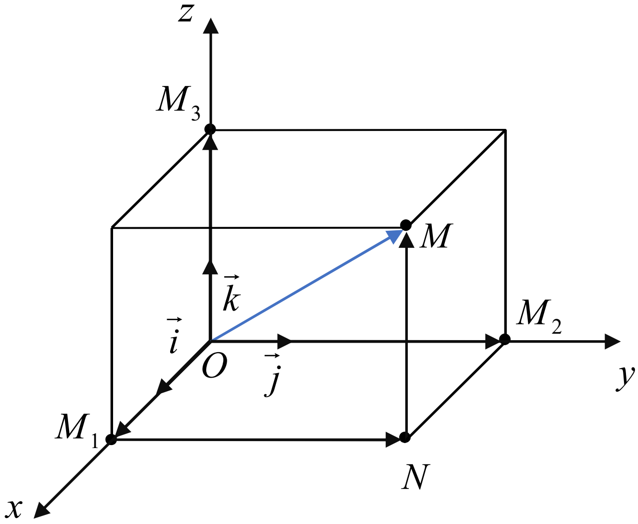


Рис. 1.1

Проведемо через точку M площини, паралельні координатним площинам, і точки перетину цих площин з осями *Ox, Oy, Oz* позначимо через M_1, M_2, M_3 відповідно. Тоді

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1N} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|\vec{i} + \left|\overrightarrow{OM_2}\right|\vec{j} + \left|\overrightarrow{OM_3}\right|\vec{k},$$

де $\left|\overrightarrow{OM_1}\right|, \left|\overrightarrow{OM_2}\right|, \left|\overrightarrow{OM_3}\right|$ – проєкції вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ на осі *Ox, Oy, Oz* відповідно. Позначимо $\left|\overrightarrow{OM_1}\right| = a_x$, $\left|\overrightarrow{OM_2}\right| = a_y$, $\left|\overrightarrow{OM_3}\right| = a_z$. Таким чином, отримаємо формулу:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \quad (1.2)$$

Формула (1.2) називається **розкладом вектора по ортах координатних осей**. Числа a_x, a_y, a_z – величини проєкції вектора $\vec{a}$ на координатні осі – називаються **координатами** вектора. Рівність (1.2) часто записують у вигляді: $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$.

Оскільки $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда (Рис. 1.1), то має місце рівність: $\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_3}\right|^2$, звідки випливає формула для знаходження модуля вектора за відомими його координатам:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.3)$$

Позначимо через α, β, γ кути між вектором $\vec{a}$ і осями *Ox, Oy, Oz* відповідно. Тоді за властивістю 1 проєкції маємо: $a_x = \left|\vec{a}\right|\cos\alpha$, $a_y = \left|\vec{a}\right|\cos\beta$, $a_z = \left|\vec{a}\right|\cos\gamma$, звідки, враховуючи (1.3):

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}},\ \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}}. \quad (1.4)$$

З (1.4), очевидно, випливає рівність: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються **напрямними косинусами** вектора $\vec{a}$.

Використовуючи властивості проєкції вектора на вісь, легко довести, що якщо $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ і $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, то:

1. При додаванні (відніманні) векторів їх відповідні координати додаються (віднімаються): $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$.
2. При множенні вектора на скаляр координати вектора множаться на цей скаляр: $\lambda\vec{a} = (\lambda a_x)\vec{i} + (\lambda a_y)\vec{j} + (\lambda a_z)\vec{k}$.
3. Два вектори рівні між собою тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати рівні: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x,\ a_y = b_y,\ a_z = b_z$.
4. Координати колінеарних векторів пропорційні: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$.

Якщо відомі координати точок $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$, то координати вектора $\overrightarrow{AB}$ можна знайти за формулою:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}. \quad (1.5)$$

<u>Приклад 1</u>. Знайти α, β, при яких вектори $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \beta\vec{j} + 3\vec{k}$ колінеарні.

Розв'язання. Оскільки за умовою $\vec{a} \parallel \vec{b}$, їх координати пропорційні: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{\beta} = \dfrac{\alpha}{3}$. Знаходимо β: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{\beta} \Rightarrow \beta = 6$. Аналогічно знаходимо α: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\alpha}{3} \Rightarrow \alpha = \dfrac{3}{2}$.

Приклад 2. Знайти одиничний вектор $\vec{x}$, який колінеарний до $\overrightarrow{AB}$, де A(0,-2,-3), B(-3,-2,1), і утворює гострий кут з віссю Ox.

Розв'язання. За формулою (1.5) знаходимо координати $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = \{-3, 0, 4\}$. Оскільки за умовою $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{x}$, то їх координати пропорційні, тому існує така стала $\lambda = const \neq 0$, що $\vec{x} = \{-3\lambda, 0\lambda, 4\lambda\}$. За умовою $\left|\vec{x}\right| = 1$: $\sqrt{9\lambda^2 + 16\lambda^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{25\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \dfrac{1}{25} \Rightarrow \lambda = \pm\dfrac{1}{5}$. Таким чином, знайдено два одиничні вектори, колінеарні вектору $\overrightarrow{AB}$: $\vec{x_1} = \left\{-\dfrac{3}{5}, 0, \dfrac{4}{5}\right\}$ і $\vec{x_2} = \left\{\dfrac{3}{5}, 0, -\dfrac{4}{5}\right\}$. Оскільки за умовою вектор $\vec{x}$ утворює гострий кут з віссю Ox, то $\cos\alpha > 0$ і, відповідно до формули (1.4), повинна виконуватись нерівність $a_x > 0$. Таким чином, вектором, який задовольняє всім умовам задачі, є вектор $\vec{x} = \left\{\dfrac{3}{5}, 0, -\dfrac{4}{5}\right\}$.

1.3. Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a}\vec{b}$, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута φ між ними:

$$\vec{a}\vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi. \tag{1.6}$$

Враховуючи формулу (1.1), формула (1.6) може бути записана у вигляді:

$$\vec{a}\vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}, \tag{1.7}$$

Властивості скалярного добутку векторів:

1. Комутативність: $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$.
2. Однорідність: $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$, $\vec{a}(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\vec{b})$, де λ - скаляр.
3. Дистрибутивність за додаванням: $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$, $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$.

4. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини: $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2 \geq 0$, $\vec{a}\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$.

5. Два ненульових вектори взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b} = 0$.

Якщо вектори задані своїми проєкціями $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ і $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, то скалярний добуток можна знайти за формулою:

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \tag{1.8}$$

тобто, скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат.

Приклад 3. Знайти кут φ, який утворюють одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що вектори $3\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{a} - 5\vec{b}$ взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. З умови перпендикулярності векторів маємо: $(3\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - 5\vec{b}) = 0$. Розпишемо скалярний добуток в лівій частині рівності, користуючись властивостями скалярного добутку і враховуючи, що $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$:

$(3\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - 5\vec{b}) = 0 \Rightarrow 3\vec{a}\vec{a} - \vec{b}\vec{a} - 15\vec{a}\vec{b} + 5\vec{b}\vec{b} = 0 \Rightarrow 3|\vec{a}|^2 - 16\vec{a}\vec{b} + 5|\vec{b}|^2 = 0 \Rightarrow$

$16\vec{a}\vec{b} = 8 \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = \dfrac{1}{2}$. Застосовуємо формулу (1.6): $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Приклад 4. Знайти внутрішній кут при вершині *A* в трикутнику *ABC*, де *A*(2,-1,-5), *B*(2,2,-1), *C*(0,3,-1).

Розв'язання. З формул (1.6), (1.8), (1.3) маємо формулу для знаходження кута між векторами $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ і $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{1.9}$$

Кут φ в даному прикладі це кут між векторами $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. За формулою (1.5) знаходимо координати векторів: $\overrightarrow{AB}=\{0,3,4\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-2,4,4\}$. Користуючись (1.9), знаходимо косинус кута при вершині A: $\cos\varphi=\dfrac{0\cdot(-2)+3\cdot4+4\cdot4}{\sqrt{0^2+3^2+4^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+4^2+4^2}}=\dfrac{28}{5\cdot6}=\dfrac{14}{15}$. Отже, кут φ при вершині A: $\varphi=\arccos\dfrac{14}{15}$.

<u>Приклад 5</u>. Знайти вектор $\vec{x}$, який колінеарний вектору $\vec{a}=\{2,-2,-1\}$ і задовольняє умову $\vec{x}\vec{a}=-18$.

Розв'язання. Оскільки за умовою $\vec{a}\,||\,\vec{x}$, то їх координати пропорційні: $\vec{x}=\lambda\vec{a}\ \Rightarrow\ \vec{x}=\{2\lambda,-2\lambda,-\lambda\}$, $\lambda=const\neq0$ Щоб знайти λ, розпишемо скалярний добуток в рівності $\vec{x}\vec{a}=-18$, скориставшись формулою (1.8): $4\lambda+4\lambda+\lambda=-18\ \Rightarrow\ \lambda=\dfrac{-18}{9}=-2$. Отже, $\vec{x}=\{-4,4,2\}$.

<u>Приклад 6</u>. Знайти α, при якому вектори $\vec{a}=\alpha\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}$ і $\vec{b}=\vec{i}+\alpha\vec{j}-3\vec{k}$ взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. Оскільки за умовою $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\vec{b}=0$. Отже, $\alpha+2\alpha+21=0\ \Rightarrow\ \alpha=-7$.

<u>Приклад 7</u>. Знайти проєкцію вектора $\vec{a}+3\vec{b}$ на вектор $2\vec{c}$, де $\vec{a}=\{3,1,-2\}$, $\vec{b}=\{1,2,-1\}$, $\vec{c}=\{1,1,-4\}$.

Розв'язання. Користуючись формулами (1.7), (1.8), (1.3), можна записати формулу для знаходження проєкції вектора $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ на вектор $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$:

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^{\,2}+b_y^{\,2}+b_z^{\,2}}}. \tag{1.10}$$

Для даного прикладу формула (1.10) набуває вигляду: $np_{2\bar{c}}(\vec{a}+3\vec{b})=\dfrac{(\vec{a}+3\vec{b})2\vec{c}}{\left|2\vec{c}\right|}$. Знаходимо координати векторів: $\vec{a}+3\vec{b}=\{3,\ 1,-2\}+3\{1,\ 2,-1\}=\{6,\ 7,-5\}$, $2\vec{c}=\{2,\ 2,-8\}$.

Тоді $np_{2\bar{c}}(\vec{a}+3\vec{b})=\dfrac{6\cdot 2+7\cdot 2+(-5)\cdot(-8)}{\sqrt{2^2+2^2+(-8)^2}}=\dfrac{66}{\sqrt{72}}=\dfrac{11}{\sqrt{2}}=\dfrac{11\sqrt{2}}{2}$.

***Приклад 8*.** Дано три сили $\overrightarrow{M}=\{-1,2,3\}$, $\vec{N}=\{4,0,-3\}$, $\vec{P}=\{2,-2,3\}$, що прикладені до однієї точки. Знайти роботу, яку виконує рівнодійна цих сил при переміщенні точки прикладання з положення B(1,-3,5) в положення C(-3,0,7), рухаючись прямолінійно.

Розв'язання. Знаходимо рівнодійну трьох сил: $\vec{F}=\overrightarrow{M}+\vec{N}+\vec{P}=\{-1+4+2,\ 2+0+(-2),\ 3+(-3)+3\}=\{5,\ 0,\ 3\}$. Робота A постійної сили $\vec{F}$ при переміщенні її точки прикладання по прямій дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення $\vec{S}$: $A=\vec{F}\vec{S}$. Знаходимо вектор переміщення: $\vec{S}=\overrightarrow{BC}=\{-4,\ 3,\ 2\}$. Отже, $A=\vec{F}\vec{S}=5\cdot(-4)+0\cdot 3+3\cdot 2=-14$ (од. роботи).

1.4. Векторний добуток векторів

Розглянемо впорядковану трійку некомпланарних векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Сумістимо початки векторів в одній точці. Упорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається **правою**, якщо з кінця вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки. Якщо найкоротший поворот видно за годинниковою стрілкою, то трійка називається лівою.

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який:

1. перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто $\vec{c}\perp\vec{a}$ і $\vec{c}\perp\vec{b}$;

2. $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3. вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку.

Векторний добуток позначається $[\vec{a}, \vec{b}]$ або $\vec{a} \times \vec{b}$.

Властивості векторного добутку векторів:

1. Антикомутативність: $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$.
2. Однорідність: $[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda \vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$, де λ – скаляр.
3. Дистрибутивність за додаванням: $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$ або $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$.
4. $[\vec{a}, \vec{a}] = 0$.
5. Два ненульових вектори колінеарні тоді і тільки тоді, коли їхній векторний добуток дорівнює нулю: $\vec{a} \,||\, \vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = 0$.
6. Модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на зведених до спільного початку векторах: $S = \left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|$.

Якщо вектори задані своїми проєкціями $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ і $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, то векторний добуток можна знайти по формулі:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}. \qquad (1.11)$$

Векторний добуток зручно шукати, склавши символічний визначник:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (1.12)$$

Розклавши визначник за елементами першого рядка, отримаємо формулу (1.11).

Розглянемо приклади задач, де використовується векторний добуток.

Приклад 9. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $3\overline{p} - \overline{q}$ і $\overline{p} + 4\overline{q}$, якщо $\left|\overline{p}\right| = 1, \left|\overline{q}\right| = 2$, кут φ між $\overline{p}$ і $\overline{q}$ дорівнює $\pi / 6$.

Розв'язання. За властивістю 6 векторного добутку маємо: $S=\left|[3\overline{p}-\overline{q},\ \overline{p}+4\overline{q}]\right|$. Розпишемо векторний добуток, скориставшись властивостями 2, 3:

$$[3\overline{p}-\overline{q},\ \overline{p}+4\overline{q}]=3[\overline{p},\overline{p}]-[\overline{q},\overline{p}]+12[\overline{p},\overline{q}]-4[\overline{q},\overline{q}].$$

Оскільки за властивістю 4 $[\overline{p},\overline{p}]=0, [\overline{q},\overline{q}]=0$, а за властивістю 1 $[\overline{q},\overline{p}]=-[\overline{p},\overline{q}]$, то $[3\overline{p}-\overline{q},\overline{p}+4\overline{q}]=[\overline{p},\overline{q}]+12[\overline{p},\overline{q}]=13[\overline{p},\overline{q}]$. Користуючись означенням векторного добутку, знаходимо площу паралелограма: $S=\left|[3\overline{p}-\overline{q},\overline{p}+4\overline{q}]\right|=13\left|[\overline{p},\overline{q}]\right|=13\left|\overline{p}\right|\left|\overline{q}\right|\sin\varphi=13\cdot1\cdot2\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=13$ (кв. од).

<u>Приклад 10</u>. Дано вершини трикутника $A(1,-5,0)$, $B(-1,2,3)$, $C(2,-3,2)$. Знайти: **1)** площу трикутника ABC, **2)** довжину висоти, опущену з вершини A на сторону BC.

Розв'язання. **1)** Оскільки за властивістю 6 модуль векторного добутку $[\vec{a},\vec{b}]$ визначає площу паралелограма, побудованого на зведених до спільного початку векторах, то площа трикутника знаходиться за формулою:

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|. \tag{1.13}$$

Розглянемо два вектори зі спільним початком $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. За формулою (1.5) знаходимо їхні координати: $\overrightarrow{AB}=\{-2,7,3\}$, $\overrightarrow{AC}=\{1,2,2\}$. Шукаємо векторний добуток $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$, склавши визначник (1.12):

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-2&7&3\\1&2&2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}7&3\\2&2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-2&3\\1&2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-2&7\\1&2\end{vmatrix}=$$

$$=(14-6)\vec{i}-(-4-3)\vec{j}+(-4-7)\vec{k}=8\vec{i}+7\vec{j}-11\vec{k}.$$

Отже, за формулою (1.13) маємо площу ΔABC:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 7^2 + (-11)^2} = \frac{\sqrt{234}}{2} = \frac{3\sqrt{26}}{2} \text{ (кв. од).}$$

2) Скористаємось формулою для площі трикутника: $S_\Delta = \frac{1}{2}|AH||BC|$, де $|AH|$ – довжина висоти, що опущена з вершини A на сторону BC. Знаходимо $|BC|$: $\overrightarrow{BC} = \{3,-5,-1\} \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{9+25+1} = \sqrt{35}$.

Отже, $|AH| = \frac{2S_\Delta}{|BC|} = \frac{3\sqrt{26}}{\sqrt{35}} = \frac{3\sqrt{910}}{35}$ (од.)

***Приклад 11*.** Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ і задовольняє умову $\vec{x}(\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = 56$.

Розв'язання. Оскільки вектор $\vec{x}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, і вектор $[\vec{a},\vec{b}]$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ за означенням векторного добутку, то вектори $\vec{x}$ і $[\vec{a},\vec{b}]$ колінеарні: $\vec{x} \,||\, [\vec{a},\vec{b}] \Rightarrow \vec{x} = \lambda[\vec{a},\vec{b}]$, $\lambda = const \neq 0$. Знаходимо $[\vec{a},\vec{b}]$:

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -13\vec{i} - \vec{j} - 8\vec{k}.$$

Тоді $\vec{x} = \lambda(-13\vec{i} - \vec{j} - 8\vec{k}) = \{-13\lambda, -\lambda, -8\lambda\}$.

Знайдемо λ з умови $\vec{x}(\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = 56$. Розпишемо скалярний добуток вектора $\vec{x} = \{-13\lambda, -\lambda, -8\lambda\}$ і вектора $\{1,-1,2\}$ в лівій частині умови: $-13\lambda + \lambda - 16\lambda = 56 \Rightarrow -28\lambda = 56 \Rightarrow \lambda = -2$. Отже, $\vec{x} = \{26, 2, 16\}$.

***Приклад 12*.** Сила $\vec{F} = \{-1, 2, -5\}$ прикладена до точки A(1,3,-4). Знайти величину і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки B(0, -2, 5).

Розв'язання. Якщо вектор сили $\vec{F}$ прикладений до точки *A*, а вектор $\vec{a}$ йде з деякої точки *B* у точку *A*, то вектор $[\vec{a},\vec{F}]$ представляє момент сили $\vec{F}$ відносно точки *B*. Знаходимо момент $\overrightarrow{M}$ сили $\vec{F}$ відносно точки *B*: $\vec{a}=\overrightarrow{BA}=\{1,5,-9\}$,

$$\overrightarrow{M}=[\vec{a},\vec{F}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 5 & -9\\ -1 & 2 & -5\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}5 & -9\\ 2 & -5\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & -9\\ -1 & -5\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & 5\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-7\vec{i}+14\vec{j}+7\vec{k}=\{-7,14,7\}.$$

Величина моменту: $\left|\overrightarrow{M}\right|=\sqrt{(-7)^2+(14)^2+(7)^2}=\sqrt{294}$. Напрямні косинуси моменту знаходимо за формулою (1.4): $\cos\alpha=\dfrac{-7}{\sqrt{294}}=\dfrac{-7\sqrt{294}}{294}$,

$\cos\beta=\dfrac{14}{\sqrt{294}}=\dfrac{7\sqrt{294}}{147}$, $\cos\gamma=\dfrac{7}{\sqrt{294}}=\dfrac{7\sqrt{294}}{294}$.

1.5. Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком векторів $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, що дорівнює векторному добутку $[\vec{a},\vec{b}]$, помноженому скалярно на вектор $\vec{c}$.

Позначається мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

<u>*Властивості мішаного добутку векторів*</u>:

1. Мішаний добуток не залежить від того, які вектори, що стоять рядом, перемножуються векторно: $[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}=\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]$
2. Кругова перестановка множників мішаного добутку не змінює його величини, а перестановки двох сусідніх множників міняє знак добутку на протилежний: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}$.
3. Мішаний добуток трьох некомпланарних векторів $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ як на ребрах, взятому зі

знаком “плюс”, якщо ці вектори утворюють праву трійку, і зі знаком “мінус”, якщо вектори утворюють ліву трійку.

4. Мішаний добуток векторів $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори компланарні.

Якщо вектори задані своїми проєкціями $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$ то мішаний добуток можна знайти, обчисливши визначник, складений з координат векторів:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{1.14}$$

<u>Приклад 13</u>. Довести, що вектори $\vec{p}=\vec{i}+8\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{q}=\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{r}=-\vec{i}-6\vec{j}-3\vec{k}$ не компланарні і знайти розклад вектора $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ за векторами $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$.

Розв'язання. Щоб довести, що вектори $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ не компланарні, обчислимо їх мішаний добуток за формулою (1.14) і покажемо, що він не дорівнює нулю:

$$\vec{p}\vec{q}\vec{r}=\begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -6 & -3 \end{vmatrix}=-9+(-24)+(-8)-(-12+(-6)+(-24))=1\neq 0.$$

Оскільки будь-який вектор $\vec{a}$ можна розкласти за трьома даними не компланарними векторами $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ і коефіцієнти розкладання визначаються єдиним чином, то треба знайти такі α,β,γ, що виконується рівність: $\vec{a}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}$. Виконавши дії над векторами в правій частині рівності і скориставшись тим, що два вектори рівні між собою тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати рівні, отримуємо систему для знаходження коефіцієнтів розкладання: $\begin{cases} \alpha+\beta-\gamma=1 \\ 8\alpha+3\beta-6\gamma=2 \\ 4\alpha+\beta-3\gamma=3 \end{cases}$. Розв'язок системи можна знайти, наприклад, застосувавши формули Крамера: $\alpha=-8,\ \beta=-4,\ \gamma=-13$. Таким чином, розклад вектора $\vec{a}$ за векторами $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ має вигляд: $\vec{a}=-8\vec{p}-4\vec{q}-13\vec{r}$.

Приклад 14. Довести, що чотири точки $A(1, 2,-1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ лежать в одній площині.

Розв'язання. Щоб довести, що чотири точки лежать в одній площині, треба довести, що три вектори, побудовані зі спільного початку, є компланарними. Розглядаємо вектори $\overrightarrow{AB}=\{-1,-1,6\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-2,0,2\}$, $\overrightarrow{AD}=\{1,-1,4\}$. За формулою (1.14) знаходимо їх мішаний добуток:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0+12-2-(0+2+8)=0 .$$

Таким чином, вектори $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$, зведені до спільного початку, лежать в одній площині, а значить і точки *A, B, C, D* лежать в одній площині.

Приклад 15. Дано вершини тетраедра $A(1, 2, 0)$, $B(-1, 2, 4)$, $C(3, 3, -1)$, $D(2, -5, 0)$. Знайти: **1)** об'єм тетраедра *ABCD*; **2)** довжину висоти, що опущена з вершини *D*.

Розв'язання. **1)** Розглянемо 3 вектори зі спільним початком $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$. Якщо ці вектори не компланарні, то модуль їх мішаного добутку $\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|$ визначає об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах як на ребрах. Тоді об'єм тетраедра *ABCD* буде дорівнювати: $V_{тетр}=\frac{1}{6}V_{парал}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|$. Знаходимо координати векторів: $\overrightarrow{AB}=\{-2,0,4\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2,1,-1\}$, $\overrightarrow{AD}=\{1,-7,0\}$. За формулою (1.14) знаходимо їх мішаний добуток:

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 4\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -7 & 0\end{vmatrix}=0-56+0-(4-14+0)=-46\ .$$

Тоді $V_{тетр}=\frac{1}{6}\left|-46\right|=\frac{23}{3}$(куб. од).

2) Позначимо через DH висоту, що проведена з вершини D. Тоді об'єм тетраедра $ABCD$ можна знайти за формулою: $V_{тетр}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot\left|DH\right|$. Для знаходження площі трикутника ABC скористаємось формулою (1.13). Отже, $V_{тетр}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot\left|DH\right|=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|\cdot\left|DH\right|\Rightarrow\left|DH\right|=\frac{6V_{тетр}}{\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|}$. Знайдемо за формулою (1.12) векторний добуток $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$:

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 0 & 4\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}0 & 4\\ 1 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-4\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}\ .$$

Тоді $\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|=\sqrt{(-4)^2+(6)^2+(-2)^2}=\sqrt{56}$ і $\left|DH\right|=\frac{6V_{тетр}}{\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|}=\frac{46}{\sqrt{56}}=\frac{23\sqrt{56}}{28}$ (од).

2. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

2.1. Основні рівняння прямої на площині

У прямокутній декартовій системі координат *Oxy* будь-яка пряма є рівнянням першого степеня відносно змінних *x, y* і, навпаки, кожне лінійне рівняння першого степеня відносно змінних *x, y* визначає пряму на площині.

Пряма l може бути задана одним із нижче наведених видів рівнянь.

1. ***Загальне рівняння прямої на площині***:

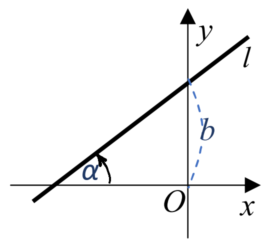
$$Ax + By + C = 0, \tag{2.1}$$

де C – вільний член рівняння.

2. ***Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:***

$$y = kx + b \tag{2.2}$$

де k – кутовий коефіцієнт прямої, b – величина відрізка, який відтинає пряма на осі *Oy*, рахуючи від початку координат.



Зауваження. Якщо $\alpha = \angle(l, Ox)$ – кут нахилу прямої l до додатного напряму осі *Ox*, то кутовий коефіцієнт цієї прямої $k = \mathrm{tg}\alpha$.

3. ***Рівняння прямої, яка проходить через задану точку*** $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ ***і має кутовий коефіцієнт*** k:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{2.3}$$

4. ***Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки*** $M_1(x_1;\, y_1)$ і $M_2(x_2;\, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{2.4}$$

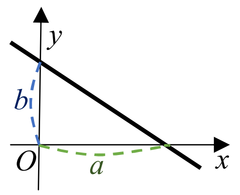
5. ***Рівняння прямої, яка проходить через задану точку*** $M_0(x_0;\, y_0)$ ***перпендикулярно до заданого вектора*** $\vec{n} = \{A; B\}$, який називається ***нормальним*** вектором прямої:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

6. ***Канонічні рівняння прямої***, що проходить через задану точку $M_0(x_0;\, y_0)$ ***паралельно*** вектору $\vec{s} = \{p;\, q\}$, який називають ***напрямним*** вектором прямої:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}.$$

7. ***Рівняння прямої у відрізках на осях***:



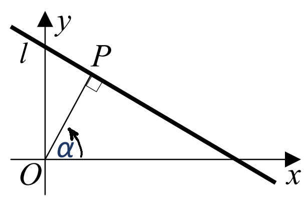
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (2.5)$$

де числа a і b – величини відрізків, які відтинає пряма на осях *Ox* і *Oy*.

8. ***Нормальне рівняння прямої***:

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0, \qquad (2.6)$$

де $p = |OP|$ – довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму; α – кут, що утворює цей перпендикуляр з додатним напрямом осі *Ox*.



Для того, щоб загальне рівняння прямої звести до нормального рівняння необхідно помножити всі доданки цього рівняння на нормуючий множник $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, де знак обираємо протилежним знаку вільного члена C.

2.2. Відстань від точки до прямої

Відстань від точки $M_0(x_0;\, y_0)$ до прямої $l:\ x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, яка задана нормальним рівнянням, обчислюється за формулою

$$d = \left| x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p \right|. \tag{2.7}$$

Число $\delta = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p$ називається ***відхиленням*** точки M_0 від прямої l. При цьому, якщо $\delta > 0$, то точка M_0 і початок координат лежать по різні сторони від прямої l; а якщо $\delta < 0$, то точка M_0 і початок координат лежать по одну сторону від заданої прямої l.

Зауваження. Якщо задано загальне рівняння прямої $l:\ Ax + By + C = 0$ і точка $M_0(x_0;\, y_0)$, яка не лежить на цій прямій, то відстань від точки M_0 до прямої l можна обчислювати за формулою

$$d(M_0, l) = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.8}$$

2.3. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих

Нехай відомі кутові коефіцієнти k_1 і k_2 двох прямих

$l_1 : y = k_1x + b_1$ і $l_2 : y = k_2x + b_2$.

- Один із кутів φ між цими прямими визначається за формулою

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

  Для знаходження гострого кута між прямими потрібно взяти праву частину формули по модулю.

- (умова паралельності двох прямих) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$.
- (умова перпендикулярності двох прямих) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$.

<u>Приклад 1</u>. Задано вершини трикутника *ABC*: *A*(9, –7), *B*(11, –3), *C*(–8, 3). Скласти:

а) рівняння висоти і медіани з вершини *C* в трикутнику *ABC*;

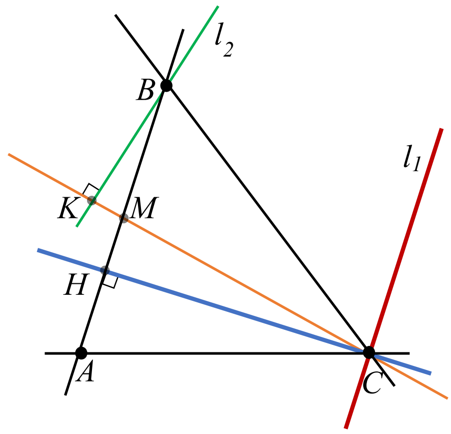
б) рівняння прямої, яка проходить через точку *C* паралельно прямій *AB*;

в)рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини *B* на медіану, яка проведена з вершини *C* на сторону *AB*;

г) відстань від точки *A* до медіани *CM*.

Розв'язання.

а) Відомо, що медіана *CM* ділить навпіл сторону *AB* заданого трикутника, тому знайдемо координати точки *M* із формул ділення відрізка *AB* навпіл:



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2},\; y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \quad \Rightarrow$$

$$x_M = \frac{9+11}{2} = 10,\; y_M = \frac{-7-3}{2} = -5 \quad \Rightarrow$$

$M(10,\ -5)$.

За формулою (2.4) знаходимо рівняння медіани *CM*, яка проходить через відомі точки *C* і *M*:

$$\frac{x+8}{10+8} = \frac{y-3}{-5-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+8}{9} = \frac{y-3}{-4} \quad \Rightarrow \quad -4(x+8) = 9(y-3)$$

і, спростивши, отримаємо рівняння медіани

$$CM:\ 4x + 9y + 5 = 0.$$

Для знаходження висоти трикутника, яка опущена з вершини С, спочатку знайдемо за формулою (2.4) рівняння прямої *AB*, яка проходить через задані точки *A* і *B*:

$$\frac{x-9}{11-9} = \frac{y+7}{-3+7}$$

або, спростивши, отримаємо рівняння

$$AB:\ 2x - y - 25 = 0.$$

Визначимо кутовий коефіцієнт k_{AB} цієї прямої $AB: \ y = 2x - 25 \quad \Rightarrow \quad k_{AB} = 2$. Оскільки висота *CH* перпендикулярна до сторони *AB*, то з умови перпендикулярності двох прямих

$$CH \perp AB \ \Rightarrow \ k_{CH} \cdot k_{AB} = -1,$$

знаходимо, що кутовий коефіцієнт прямої *CH* дорівнює $k_{CH} = -\dfrac{1}{k_{AB}} = -\dfrac{1}{2}$.

Отже, згідно з формулою (2.3) знаходимо рівняння висоти *CH*, яка проходить через задану точку C і має кутовий коефіцієнт k_{CH}:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \ \Rightarrow \ y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 8) \text{ або } CH: \ x + 2y + 2 = 0.$$

б) Для знаходження рівняння прямої l_1, яка проходить через точку C паралельно прямій *AB*, визначимо її кутовий коефіцієнт з умови паралельності двох прямих: $l_1 \parallel AB \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_{AB} = 2$. Тоді за формулою (2.3) знаходимо рівняння прямої l_1, яка проходить через задану точку C і має кутовий коефіцієнт k_1:

$$y - 3 = 2(x + 8) \quad \Rightarrow \quad y - 3 = 2x + 16 \quad \Rightarrow \quad l_1: \ 2x - y + 19 = 0.$$

в) Для знаходження рівняння перпендикуляра l_2, опущеного з вершини *B* на медіану *CM*, визначимо його кутовий коефіцієнт k_2 з умови

$$l_2 \perp CM \quad \Rightarrow \quad k_2 \cdot k_{CM} = -1.$$

Оскільки $CM: \ y = -\dfrac{4}{9}x - \dfrac{5}{9}$, то $k_{CM} = -\dfrac{4}{9} \Rightarrow k_2 = -\dfrac{1}{k_{CM}} = \dfrac{9}{4}$.

Далі за формулою (2.3) знаходимо рівняння прямої l_2, яка проходить через задану точку *B* і має кутовий коефіцієнт k_2:

$$y + 3 = \frac{9}{4}(x - 11) \quad \Rightarrow \quad 4(y + 3) = 9(x - 11) \quad \Rightarrow \quad l_2: \ 9x - 4y - 111 = 0$$

– рівняння шуканого перпендикуляра l_2.

г) Для знаходження відстані від точки *A* до медіани *CM* спочатку потрібно звести загальне рівняння прямої $CM: \ 4x + 9y + 5 = 0$ до нормального рівняння.

Для цього помножимо всі доданки цього рівняння на нормуючий множник (в μ вибираємо знак мінус, бо $C=5>0$) $\mu=-\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}=-\frac{1}{\sqrt{4^2+9^2}}=-\frac{1}{\sqrt{97}}$ і одержимо нормальне рівняння прямої

$$CM:\ -\frac{4}{\sqrt{97}}x-\frac{9}{\sqrt{97}}y-\frac{5}{\sqrt{97}}=0.$$

Використовуючи формулу (2.7), обчислюємо шукану відстань

$$d(A;l_{CM})=\left|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p\right|=\left|-\frac{4}{\sqrt{97}}\cdot 9-\frac{9}{\sqrt{97}}\cdot(-7)-\frac{5}{\sqrt{97}}\right|=\frac{22}{\sqrt{97}}=\frac{22\sqrt{97}}{97}.$$

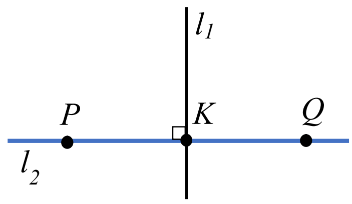
Зауваження. Відстань від точки $A(9,\ -7)$ до шуканої прямої $CM:\ 4x+9y+5=0$ також можна знайти за формулою (2.8):

$$d(A;l_{CM})=\frac{\left|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\left|4\cdot 9+9\cdot(-7)+5\right|}{\sqrt{4^2+9^2}}=\frac{22}{\sqrt{97}}=\frac{22\sqrt{97}}{97}.$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти точку Q, що симетрична точці $P(4,-9)$ відносно прямої $l_1: 5x+y+15=0$.

Розв'язання. Симетричні точки P і Q розташовані на одному перпендикулярі до заданої прямої l_1 і на однаковій відстані від неї. Розв'яжемо задачу в декілька кроків.

1. Знайдемо рівняння прямої l_2, яка проходить через точку P перпендикулярно до заданої прямої l_1. Визначимо кутовий коефіцієнт k_1 заданої прямої



$l_1: y=-5x+15 \quad\Rightarrow\quad k_1=-5.$

Оскільки $l_1\perp l_2$, то $k_1\cdot k_2=-1\Rightarrow$ кутовий коефіцієнт прямої l_2 дорівнює $k_2=-\frac{1}{k_1}=\frac{1}{5}$. Отже, за формулою (2.3): $y-y_P=k_2(x-x_P)$ запишемо рівняння прямої $l_2: y+9=\frac{1}{5}(x-4)$ або $l_2:\ x-5y-49=0$.

2. Знайдемо точку *K* перетину даної прямої l_1 з перпендикулярною до неї прямою l_2. Для цього розв'яжемо систему їх рівнянь: $\begin{cases} 5x + y + 15 = 0, \\ x - 5y - 49 = 0, \end{cases}$ звідки отримаємо координати точки *K*: $x = -1,\ y = -10$. Отже, точка $K(-1, -10)$ є проєкцією точки *P* на пряму l_1, тобто основою перпендикуляра проведеного з точки *P* на задану пряму.

3. Знайдемо тепер точку *Q* симетричну точці *P* відносно заданої прямої. Оскільки $PK = KQ$, то із формул ділення відрізка *PQ* навпіл маємо

$$x_K = \frac{x_P + x_Q}{2},\ y_K = \frac{y_P + y_Q}{2} \quad \Rightarrow$$

$$-1 = \frac{4 + x_Q}{2},\ -10 = \frac{-9 + y_Q}{2} \quad \Rightarrow \quad x_Q = -6,\ y_Q = 11.$$

Отже, точка $Q(-6, 11)$ симетрична точці *P* відносно заданої прямої.

<u>Приклад 3</u>. Знайти точку перетину висот у трикутнику ABC, де $A(5, -8),\ B(-6, 0),\ C(7, -3)$.

Розв'язання. Оскільки всі висоти трикутника перетинаються в одній точці *K*, то достатньо знайти рівняння двох висот трикутника, щоб визначити точку їх перетину. Розв'яжемо в декілька дій.

1. Знайдемо спочатку рівняння прямої l_1, яка проходить через точки *A* і *C* за формулою (2.4)

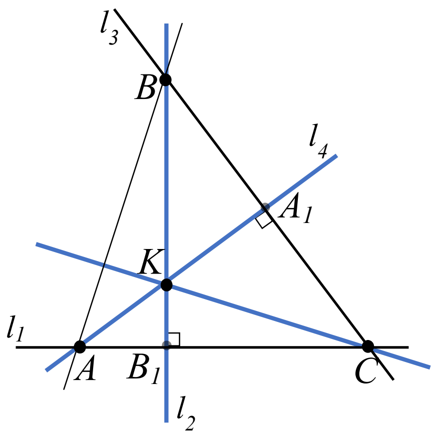
$$\frac{x-5}{7-5} = \frac{y+8}{-3+8}$$

або, спростивши, отримаємо рівняння

$$l_1:\ 5x - 2y - 41 = 0.$$

Визначимо кутовий коефіцієнт k_1 цієї прямої

$$l_1:\ y = \frac{5}{2}x - \frac{41}{2} \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{5}{2}.$$



Позначимо через l_2 рівняння висоти *BB₁*, тоді $l_1 \perp l_2 \;\Rightarrow\; k_1 \cdot k_2 = -1$, звідки знаходимо, що кутовий коефіцієнт прямої l_2 дорівнює $k_2 = -\dfrac{1}{k_1} = -\dfrac{2}{5}$.

Отже, за формулою (2.3) знаходимо рівняння висоти l_2, яка проходить через задану точку B і має кутовий коефіцієнт k_2:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \;\Rightarrow\; l_2:\; y - 0 = -\frac{2}{5}(x+5) \quad \text{або} \quad l_2:\; 2x + 5y + 10 = 0.$$

Знайдемо за формулою (2.4) рівняння прямої l_3, яка проходить через точки B і C: $\dfrac{x+5}{7+5} = \dfrac{y-0}{-3-0}$, або, спростивши, отримаємо рівняння $l_3:\; y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{5}{4}$, кутовий коефіцієнт якої дорівнює $k_3 = -1/4$.

Позначимо через l_4 рівняння висоти *AA₁*, тоді $l_3 \perp l_4 \;\Rightarrow\; k_3 \cdot k_4 = -1$, звідки знаходимо, що кутовий коефіцієнт висоти l_4 дорівнює $k_4 = -\dfrac{1}{k_3} = 4$.

Отже, за формулою (2.3) знаходимо рівняння висоти l_4, яка проходить через задану точку A і має кутовий коефіцієнт k_4: $y + 8 = 4(x - 5)$ або $l_4:\; 4x - y - 28 = 0$.

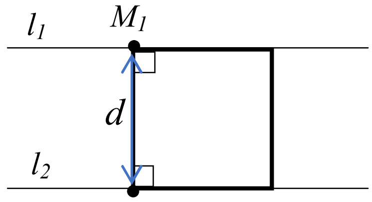
2. Знайдемо точку K перетину двох знайдених рівнянь висот l_2 і l_4. Для цього розв'яжемо систему їх рівнянь: $\begin{cases} 2x + 5y + 10 = 0, \\ 4x - y - 28 = 0, \end{cases}$ звідки отримаємо $x = \dfrac{65}{11},\; y = -\dfrac{48}{11}$. Отже, точка $K\left(\dfrac{65}{11}, -\dfrac{48}{11}\right)$ є точкою перетину висот трикутника *ABC*.

<u>Приклад 4</u>. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $l_1:\; x + 4y - 8 = 0$, $l_2:\; 2x + 8y + 7 = 0$.

Розв'язання. Площа квадрата дорівнює $S = a^2$, де a – довжина сторони квадрата.

Оскільки коефіцієнти при невідомих *x, y* в рівняннях прямих пропорційні $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}\neq\frac{-8}{7}$, то задані прямі l_1 і l_2 паралельні. Тому довжина сторони квадрата дорівнює відстані між даними паралельними прямими, яка, в свою чергу, дорівнює відстані від будь-якої точки на одній з прямих до іншої прямої:

$$a=d(l_1,\, l_2)=d(M_1,\, l_2)\,.$$



Поклавши, наприклад, в першому рівнянні $x=0$, одержимо $y=2$ і, таким чином, знаходимо точку $M_1\left(0;\, 2\right)$, яка належить прямій l_1.

Відстань від цієї точки M_1 до прямої l_2 за формулою (2.8) дорівнює

$$d(M_1,\, l_2)=\frac{\left|A\cdot x_1+B\cdot y_1+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\left|2\cdot 0+8\cdot 2+7\right|}{\sqrt{2^2+8^2}}=\frac{23}{\sqrt{68}}=\frac{23}{2\sqrt{17}}.$$

Отже, $a=\frac{23}{2\sqrt{17}}$ і площа квадрата дорівнює $S=\left(\frac{23}{2\sqrt{17}}\right)^2=\frac{529}{68}$ (од^2).

3. ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

з теми «Елементи векторної алгебри. Пряма на площині»

Варіант № 1

1. Знайти внутрішній кут при вершині C в трикутнику ABC, де $A(1, –2, 3)$, $B(5, 2, –4)$, $C(0, 3, –2)$.
2. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $2\overline{p}+\overline{q}$ і $\overline{p}-3\overline{q}$, якщо $\left|\overline{p}\right|=1, \left|\overline{q}\right|=3$, кут між $\overline{p}, \overline{q}$ дорівнює $\pi/6$.
3. Скласти рівняння висоти і медіани з вершини C в трикутнику ABC, де $A(1, –5)$, $B(3, –3)$, $C(1, –2)$.

Варіант № 2

1. Знайти вектор $\vec{x}$, колінеарний вектору $\vec{a}=\{1,-2,5\}$, що задовольняє умову $\vec{x}\vec{a}=2$.
2. Перевірити, чи лежать точки A(1, –2, 3), B(5, 2, –4), C(0, 3, –2) в одній площині.
3. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $3x-2y-6=0$, $9x-6y+1=0$.

Варіант № 3

1. Знайти α, β, при яких вектори $\alpha\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$, $3\vec{i}-\vec{j}+\beta\vec{k}$ колінеарні.
2. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=4\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ і задовольняє умову $\vec{x}(4\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})=2$.
3. Знайти точку перетину висот у трикутнику ABC, де $A\left(1,-2\right)$, $B\left(2,-4\right)$, $C\left(5,-7\right)$.

Варіант № 4

1. Знайти α, при якому вектори $\alpha\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$, $3\vec{i}+\alpha\vec{j}+3\vec{k}$ взаємно перпендикулярні.
2. Дано три сили $\overrightarrow{M}=\{1,-2,-4\}$, $\overrightarrow{N}=\{4,2,-5\}$, $\overrightarrow{P}=\{0,2,10\}$, що прикладені до точки A(1, 0, 5). Знайти величину і напрямні косинуси моменту рівнодіючої цих сил відносно точки B(3, 2, –5).
3. Задано вершини трикутника ABC A(1, –2), B(5, 4), C(–2, 2). Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини A на медіану, яка проведена з вершини C на сторону AB.

Варіант № 5

1. Знайти вектор $\vec{x}$ довжини 2, що колінеарний до $\overrightarrow{AB}$, де A(–5, 1, 0), B(1, 2, 4) і утворює гострий кут з віссю OX.
2. Знайти об’єм тетраедра ABCD, де A(1, –2, 3), B(5, 2, –4), C(0, 3, –2), D(4, 5, –2).
3. Знайти точку Q, що симетрична точці $P(2,\ 3)$ відносно прямої $x+6y+17=0$.

Варіант № 6

1. Дано три вектори $\vec{a}=\{1,2,4\}$, $\vec{b}=\{0,2,-5\}$, $\vec{c}=\{1,2,-1\}$. Знайти вектор $\vec{x}$, що задовольняє умовам $\vec{x}\vec{a}=5, \vec{x}\vec{b}=-5, \vec{x}\vec{c}=0$.
2. Дано три сили $\overrightarrow{M}=\{1,-2,-4\}$, $\overrightarrow{N}=\{4,2,-5\}$, $\overrightarrow{P}=\{0,2,10\}$, що прикладені до точки $A(1,\ 0,\ 5)$. Знайти величину і напрямні косинуси моменту рівнодіючої цих сил відносно точки $B(3,\ 2,\ -5)$.
3. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $5x+2y-4=0$, $10x+4y+3=0$.

Варіант № 7

1. Знайти кут φ, який утворюють одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що вектори $\vec{a} + 2\vec{b}$ і $3\vec{a} - 3\vec{b}$ взаємно перпендикулярні.
2. Знайти площу трикутника і довжину висоти, проведену з вершини A в трикутнику ABC, де A(1, 2, –3), B(0, –2, 4), C(–5, 3, 0).
3. Знайти проєкцію точки $P(0,\ 3)$ на пряму, що проходить через точки $A(-1, -2)$, $B(2, 0)$.

Варіант № 8

1. Знайти об’єм тетраедра ABCD, де A(0, –2, 0), B(–5, 2, 4), C(1, 3, 2), D(5, –1, –2).
2. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{p} + \overline{q}$ і $2\overline{p} - 2\overline{q}$, якщо $|\overline{p}| = 2, |\overline{q}| = 1$, кут між $\overline{p}, \overline{q}$ дорівнює $\pi / 6$.
3. Знайти точку Q, що симетрична точці P(2, 1) відносно прямої $x + 2y + 1 = 0$.

Варіант № 9

1. Довести, що вектори $\vec{p} = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{q} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{r} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ не компланарні і знайти розклад вектора $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.
2. Знайти площу трикутника ABC, де A(1, –2, 3), B(0, 2, –4), C(5, 3, –2).
3. Знайти гострий кут між двома прямими $3x + 6y - 1 = 0$, $x + 3y + 2 = 0$.

Варіант № 10

1. Знайти вектор $\vec{x}$ довжини 2, що колінеарний до $\overrightarrow{AB}$, де A(1, –2, 1), B(2, 2, 4) і утворює тупий кут з віссю OZ.
2. Знайти проєкцію вектора $\vec{a}-\vec{b}$ на вектор $2\vec{c}$, де $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-7\vec{j}-\overline{3k}$.
3. Дано пряму $2x+3y-1=0$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку B(2, 4) під кутом $\pi/6$ до даної прямої.

Варіант № 11

1. Знайти зовнішній кут при вершині *C* в трикутнику *ABC*, де *A*(–4, –1, –3), *B*(5, 0, –4), *C*(–1, 0, –2).
2. Дано три сили $\overrightarrow{M}=\{1,-2,-4\}$, $\vec{N}=\{4,2,-5\}$, $\vec{P}=\{0,2,10\}$, що прикладені до точки *A*(1, 0, 5). Знайти величину і напрямні косинуси моменту рівнодіючої цих сил відносно точки *B*(3, 2, –5).
3. Визначити, при яких значеннях *m* і *n* прямі $x-my+n=0$ і $2x+ny+3=0$ будуть: а) паралельні; б) перпендикулярні; в) співпадати.

Варіант № 12

1. Дано три вектори $\vec{a}=\{1,-5,3\}$, $\vec{b}=\{4,-2,-3\}$, $\vec{c}=\{8,-2,1\}$. Знайти вектор $\vec{x}$, що задовольняє умовам $\vec{x}\vec{a}=-10, \vec{x}\vec{b}=8, \vec{x}\vec{c}=4$.
2. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{p}-2\overline{q}$ і $\overline{p}-\overline{q}$, якщо $|\overline{p}|=3, |\overline{q}|=2$, кут між $\overline{p},\overline{q}$ дорівнює $\pi/4$.
3. Дано рівняння двох сторін прямокутника $2x-y+10=0$, $x+2y-5=0$ і одна з його вершин $A(1,-2)$. Скласти рівняння двох інших сторін цього прямокутника і діагоналі, що проходить через точку *A*.

Варіант № 13

1. Перевірити, чи лежать точки $A(1, 0, 5)$, $B(0, 2, 13)$, $C(1, -3, -3)$ в одній площині.
2. Знайти площу трикутника і довжину висоти, проведену з вершини B в трикутнику ABC, де $A(0, 2, 3)$, $B(5, -2, 3)$, $C(5, 1, 1)$.
3. Задано рівняння двох суміжних сторін паралелограма $x - 3y + 5 = 0$, $2x + y + 3 = 0$ і одна з його вершин $A(1; 0)$. Скласти рівняння двох інших сторін цього паралелограма і рівняння діагоналі, що проходить через точку A.

Варіант № 14

1. Знайти проєкцію $\vec{a} + 2\vec{b}$ на $\vec{c}$, де $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$. $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}$.
2. Довести, що вектори $\vec{p} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{q} = -2\vec{i} + 3\vec{k}$, $\vec{r} = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ не компланарні і знайти розклад вектора $\vec{a} = -4\vec{i} - 4\vec{j} + 14\vec{k}$ за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.
3. Задано три вершини прямокутника $ABCD$: $A(2; 1)$, $B(4; 2)$ і C $(-1; 7)$. Скласти рівняння всіх сторін цього прямокутника.

Варіант № 15

1. Знайти об’єм тетраедра ABCD, де A(0, 2, 6), B(-5,1,-4), C(1,3,2), D(7,0,-2).
2. Дано три сили $\overrightarrow{M} = \{1, -2, 0\}$, $\overrightarrow{N} = \{7, -1, 5\}$, $\overrightarrow{P} = \{3, 12, 0\}$, що прикладені до точки $A(-1, 4, 5)$. Знайти величину і напрямні косинуси моменту рівнодіючої цих сил відносно точки $B(2, 5, -9)$.
3. Знайти проєкцію точки $P(8, 3)$ на пряму, що проходить через точки $A(1, -2)$, $B(2, 4)$.

Варіант № 16

1. Знайти кут φ, який утворюють одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що вектори $3\vec{a}-2\vec{b}$ і $\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}$ взаємно перпендикулярні.
2. Довести, що вектори $\vec{p}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{q}=\vec{i}+2\vec{k}$, $\vec{r}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ не компланарні і знайти розклад вектора $\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}$ за векторами $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$.
3. Знайти точку перетину висот у трикутнику *ABC*, де *A*(2, –2), *B*(1, 0), *C*(3, –3).

Варіант № 17

1. Дано три сили $\overrightarrow{M}=\{3,-3,3\}$, $\overrightarrow{N}=\{-1,2,0\}$, $\overrightarrow{P}=\{2,2,-7\}$, що прикладені до точки *A*(1, 2, –5). Знайти величину і напрямні косинуси моменту рівнодіючої цих сил відносно точки *B*(6, –2, –5).
2. Знайти довжину висоти, що опущена з вершини *B* в тетраедрі *ABCD*, де *A*(1, 2, –1), *B*(–1, 2, 2), *C*(–1, 2, 7), *D*(6, –2, 0).
3. Знайти точку *Q*, що симетрична точці *P*(–2, 2) відносно прямої $x+y-2=0$.

Варіант № 18

1. Знайти проєкцію вектора $3\vec{b}$ на $\vec{a}+\vec{c}$, де $\vec{a}=4\vec{j}-2\vec{k}$. $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{c}=3\vec{i}-5\vec{k}$.
2. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $4\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $-3\vec{i}+\vec{j}-\overrightarrow{2k}$ і задовольняє умову $\vec{x}(\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k})=9$.
3. Задано вершини трикутника *ABC* *A*(–4, –2), *B*(5, 4), *C*(–2, 2). Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини *C* на медіану, яка проведена з вершини *B* на сторону *AC*.

Варіант № 19

1. Дано три вектори $\vec{a}=\{1,5,-4\}$, $\vec{b}=\{1,2,-1\}$, $\vec{c}=\{3,4,-3\}$. Знайти вектор $\vec{x}$, що задовольняє умовам $\vec{x}\vec{a}=19,\ \vec{x}\vec{b}=7,\ \vec{x}\vec{c}=17$.
2. Знайти довжину висоти, проведену з вершини *A* в трикутнику *ABC*, де *A*(1, –2, –4), *B*(1, –2, –4), *C*(1, 3, 2).
3. Задано вершини трикутника *ABC* *A*(–3, –2), *B*(1, 4), *C*(–3, 2). Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини *C* на медіану, яка проведена з вершини *A* на сторону *BC*.

Варіант № 20

1. Знайти вектор $\vec{x}$ довжини 3, який колінеарний до $\overrightarrow{AB}$, де *A*(5, –2, 0), *B*(7, –2, –4) і утворює гострий кут з віссю OY.
2. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$, $3\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ і задовольняє умову $\vec{x}(\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k})=1$.
3. Дано рівняння двох сторін прямокутника $3x-y-3=0$, $x+3y-11=0$ і одна з його вершин $A\left(-1,\ 2\right)$. Скласти рівняння двох інших сторін цього прямокутника та діагоналі, що проходить через точку *A*.

Варіант № 21

1. Знайти внутрішній кут при вершині *A* в трикутнику *ABC,* де *A*(2, –2, 6), *B*(0, 2, 4), *C*(2, 3, 2).
2. Перевірити, чи лежать точки *A*(1, 2, 12), *B*(0, 1, 10), *C*(2, 3, 14) в одній площині.
3. Скласти рівняння прямої, що проведена через точку перетину прямих $2x+y-1=0$, $3x+2y+3=0$ і яка: **а**) паралельна прямій $4x+3y+1=0$; **б**) перпендикулярна до прямої $4x+3y+1=0$.

Варіант № 22

1. Знайти α, β, при яких вектори $\alpha\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $3\vec{i} - \vec{j} + \beta\vec{k}$ колінеарні.
2. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $2\overline{p} + 3\overline{q}$ і $\overline{p} - 2\overline{q}$, якщо $|\overline{p}| = |\overline{q}| = 3$, кут між $\overline{p}, \overline{q}$ дорівнює $2\pi / 3$.
3. Дано $A(-1, 3)$, $B(-2, -1)$, $C(-2, 1)$. Скласти рівняння прямої через точку C, яка: **а**) паралельна прямій AB; **б**) перпендикулярна до прямої AB.

Варіант № 23

1. Знайти внутрішній кут при вершині B в трикутнику ABC, де $A(1, 2, -5)$, $B(1, 2, -4)$, $C(-7, -3, 2)$.
2. Перевірити, чи лежать точки $A(-1, 0, 8)$, $B(4, 3, 12)$, $C(0, 0, 7)$ в одній площині.
3. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $x + 4y - 8 = 0,\ 2x + 8y - 7 = 0$.

Варіант № 24

1. Знайти проєкцію $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{CD}$, де $A(1, -2, 3)$, $B(5, 2, -4)$, $C(0,3, -2)$, $D(4,5, -2)$.
2. Знайти об'єм тетраедра $ABCD$, де $A(6,2, -3)$, $B(0,2,4)$, $C(3,3, -2)$, $D(6, -5, 0)$.
3. Скласти рівняння висоти і медіани з вершини A у трикутнику ABC, де $A(1, -2)$, $B(1, 3)$, $C(5, -7)$.

Варіант № 25

1. Дано три вектори $\vec{a} = \{2, -1, 4\}$, $\vec{b} = \{7, -2, 0\}$, $\vec{c} = \{1, 0, -1\}$. Знайти вектор $\vec{x}$, що задовольняє умовам $\vec{x}\vec{a} = 19,\ \vec{x}\vec{b} = 1,\ \vec{x}\vec{c} = -4$.
2. Довести, що вектори $\vec{p} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{q} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{r} = \vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$ не компланарні і знайти розклад вектора $\vec{a} = 2\vec{i} + 8\vec{j} - 9\vec{k}$ за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.
3. Знайти гострий кут між двома прямими $x + 6y - 5 = 0$, $2x + 7y - 2 = 0$.

Варіант № 26

1. Знайти проєкцію $\overrightarrow{CD}$ на $\overrightarrow{AB}$, де A(-1, -2,6), B(0,2, -4), C(5,2, -2), D(4, -1, 0).
2. Перевірити, чи лежать точки A(5,0,2), B(3,3,13), C(-1,-2,2) в одній площині.
3. Визначити, при яких значеннях m і n прямі $mx+6y+n=0$ і $2x+ny-5=0$ будуть: а) паралельні; б) перпендикулярні; в) співпадати.

Варіант № 27

1. Знайти α, при якому вектори $\alpha\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}$, $3\vec{i}-2\vec{j}+\alpha\vec{k}$ взаємно перпендикулярні.
2. Знайти об’єм тетраедра $ABCD$, де A(-1,-2,0), B(5,0,-8), C(2,-3,-2), D(3,5,-1).
3. Задано вершини трикутника ABC A(1, –2), B(6, 4), C(–2, 2). Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини В на медіану, яка проведена з вершини A на сторону BC.

Варіант № 28

1. Знайти α,β, при яких вектори $\alpha\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$, $3\vec{i}-\beta\vec{j}+3\vec{k}$ колінеарні.
2. Знайти площу трикутника ABC, де A(7, –2, 7), B(3, –2, –4), C(2, –3, –2).
3. Скласти рівняння висоти і медіани з вершини В в трикутнику АВС, де A(5, –1), B(2, –4), C(1, 7).

Варіант № 29

1. Знайти вектор $\vec{x}$, колінеарний вектору $\vec{a}=\{2,2,-5\}$, що задовольняє умову $\vec{x}\vec{a}=10$.
2. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $2\overline{p}-3\overline{q}$ і $\overline{p}+3\overline{q}$, якщо $|\overline{p}|=|\overline{q}|=2$, кут між $\overline{p},\overline{q}$ дорівнює $\pi/4$.
3. Дано рівняння двох сторін прямокутника $4x+y-11=0$, $x-4y+10=0$ і одна з його вершин $A(-1,-2)$. Скласти рівняння двох інших сторін цього прямокутника.

Варіант № 30

1. Знайти α, β, при яких вектори $\alpha\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $3\vec{i} - 7\vec{j} + \beta\vec{k}$ колінеарні.
2. Дано три сили $\overrightarrow{M} = \{1, 0, -3\}$, $\overrightarrow{N} = \{-4, 2, -5\}$, $\overrightarrow{P} = \{0, -1, 1\}$, що прикладені до однієї точки. Знайти роботу, яку виконує рівнодійна цих сил при переміщенні точки прикладання з положення $B(1, -2, 0)$ в положення $C(1, 4, 7)$, рухаючись прямолінійно.
3. Дано $A(1, -4)$, $B(-2, -1)$, $C(-1, 3)$. Скласти рівняння прямої через точку A, яка: **а**) паралельна прямій BC; **б**) перпендикулярна до прямої BC.

Варіант № 31

1. Довести, що вектори $\vec{p} = \vec{i}$, $\vec{q} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{r} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, не компланарні і знайти розклад вектора $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$ за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.
2. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $3\vec{j} - \vec{k}$ і задовольняє умову $\vec{x}(4\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) = 1$.
3. Дано вершини трикутника ABC: $A(1, -2)$, $B(2, 4)$, $C(5, -7)$. Скласти рівняння прямої через точку A паралельно стороні BC.

Варіант № 32

1. Дано три сили $\overrightarrow{M} = \{0, 2, 4\}$, $\overrightarrow{N} = \{-4, -1, 5\}$, $\overrightarrow{P} = \{1, -2, 3\}$, що прикладені до точки $A(1, 3, -5)$. Знайти величину і напрямні косинуси моменту рівнодіючої цих сил відносно точки $B(1, 2, 7)$.
2. Знайти довжину висоти, що опущена з вершини D в тетраедрі $ABCD$, де $A(-1, 0, 1)$, $B(-1, 2, 3)$, $C(-1, 2, 0)$, $D(1, -4, -2)$.
3. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(2, 3)$ і відтинає на координатних осях відмінні від нуля відрізки однакової величини.

Варіант № 33

1. Перевірити, чи лежать точки $A(1,0,5)$, $B(0,2,13)$, $C(1, –3, –3)$ в одній площині.
2. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{i} - \vec{k}$ і задовольняє умову $\vec{x}(\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = 4$.
3. Знайти гострий кут між двома прямими $x - y - 5 = 0$, $x + 4y - 2 = 0$.

Варіант № 34

1. Знайти внутрішній кут при вершині *B* в трикутнику *ABC*, де $A(5, 1, 3)$, $B(9, 2, –4)$, $C(–4, 3, 2)$.
2. Знайти площу трикутника і довжину висоти, проведену з вершини *C* в трикутнику *ABC*, де $A(–1, –2, –3)$, $B(5, –2, 4)$, $C(5, –3, 7)$.
3. Визначити, при яких значеннях *m* і *n* прямі $mx - 3y + 2n = 0$ і $-x + ny + 7 = 0$ будуть: а) паралельні; б) перпендикулярні; в) співпадати.

Варіант № 35

1. Дано три сили $\overrightarrow{M} = \{1, -4, 3\}$, $\overrightarrow{N} = \{-2, 2, -2\}$, $\overrightarrow{P} = \{5, -1, 1\}$, що прикладені до однієї точки. Знайти роботу, яку виконує рівнодійна цих сил при переміщенні точки прикладання з положення $B(1, –2, 6)$ в положення $C(–1, 4, –3)$, рухаючись прямолінійно.
2. Знайти довжину висоти, що опущена з вершини *D* в тетраедрі *ABCD*, де $A(-1, 0, 1)$, $B(-1, 2, 3)$, $C(-1, 2, 0)$, $D(1, –4, –2)$.
3. Знайти відстань між паралельними прямими $x + 2y - 4 = 0$, $2x + 4y - 1 = 0$.

Варіант № 36

1. Знайти кут φ, який утворюють одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що вектори $4\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$ взаємно перпендикулярні.
2. Знайти площу трикутника *ABC*, де *A*(0, –1, 3), *B*(2, –2, 4), *C*(–5, 1, –2).
3. Задано вершини трикутника *ABC* *A*(–3, –2), *B*(1, 4), *C*(–3, 4). Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини *A* на медіану, яка проведена з вершини *B* на сторону *AC*.

Варіант № 37

1. Знайти зовнішній кут при вершині *C* в трикутнику *ABC*, де *A*(0, 0, 3), *B*(9, 2, –4), *C*(-4, 3, –2).
2. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\overline{p}-3\overline{q}$ і $2\overline{p}+2\overline{q}$, якщо $\left|\overline{p}\right|=1, \left|\overline{q}\right|=2$, кут між $\overline{p}, \overline{q}$ дорівнює $\pi/3$.
3. Знайти проєкцію точки *P*(1, 5) на пряму, що проходить через точки *A*(1, 0), *B*(–1, –4).

Варіант № 38

1. Знайти проєкцію $3\vec{b}-\vec{a}$ на $4\vec{c}$, де $\vec{a}=4\vec{i}+\vec{k}$. $\vec{b}=2\vec{i}-8\vec{j}$, $\vec{c}=3\vec{i}+\vec{k}$.
2. Знайти вектор $\vec{x}$, колінеарний вектору $\vec{a}=\{3,2,-5\}$, що задовольняє умову $\vec{x}\vec{a}=76$.
3. Дано вершини трикутника *ABC*: *A*(1, 4), *B*(2, 7), *C*(–5, 6). Скласти рівняння прямої через точку *B* паралельно стороні *AC*.

Варіант № 39

1. Дано три вектори $\vec{a} = \{2,-2,2\}$, $\vec{b} = \{3,2,-3\}$, $\vec{c} = \{6,0,-1\}$. Знайти вектор $\vec{x}$, що задовольняє умовам $\vec{x}\vec{a} = -2,\ \vec{x}\vec{b} = 13,\ \vec{x}\vec{c} = 13$.
2. Дано три сили $\overrightarrow{M} = \{3,-1,-1\}$, $\overrightarrow{N} = \{4,-2,-7\}$, $\overrightarrow{P} = \{-3,2,1\}$, що прикладені до точки $A(1, 2, -5)$. Знайти величину і напрямні косинуси моменту рівнодіючої цих сил відносно точки $B(-3, 1, -5)$.
3. Визначити, при яких значеннях m і n прямі $mx - y + n = 0$ і $x + ny + 4 = 0$ будуть: а) паралельні; б) перпендикулярні; в) співпадати.

Варіант № 40

1. Знайти α, при якому вектори $\vec{i} + \alpha\vec{j} - 3\vec{k}$, $\alpha\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$ взаємно перпендикулярні.
2. Знайти довжину висоти, проведену з вершини B в трикутнику ABC, де $A(0, 3, 3)$, $B(-1, -2, -4)$, $C(5, 2, 7)$.
3. Знайти гострий кут між двома прямими $x - 2y + 4 = 0$, $x + 7y + 2 = 0$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ І ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. I: Учеб. пособие для втузов.— 5-е изд., испр.— М.: Высш. шк., 1999.— 304 с.: ил.
2. *Дубовик В. П., Юрик І. І.* Вища математика: Навч. посібн.— К.: А.С.К., 2006.— 648 с.: ил.
3. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия: Учеб.: для вузов.— 5-е изд.— М.: Наука, Физматлит, 1999.— 224 с.
4. *Каплан И. А.* Практические занятия по высшей математике. Часть V.— 2-е изд.— Харьков, Издательство Харьковского университета, 1972.— 412 с.
5. *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии: Учеб. пособие для втузов.— СПб: «Специальная Литература», 1998.— 200 с.: ил.
6. *Кузнецов Л. А.* Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты): Учеб. пособие для втузов.— 2-е изд., доп.— М.: Высш. шк., 1994.— 206 с.: ил.
7. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. 1 часть.— М.: Рольф, 2002.— 288 с.: ил.