

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені Ігоря Сікорського»

О.І. Толочко

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня магістра
за спеціальністю 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»,
Спеціалізація "Електромеханічні системи автоматизації та електропривод"*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Рецензент: *Островерхов М.Я.*, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної електротехніки

Відповідальний редактор: *Пересада С.М.*, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматизації електромеханічних систем та електроприводу

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 6 від 31.01.2020 р.) за поданням факультету електроенергетехніки та автоматики (протокол №5 від 28.12.2019 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Толочко Ольга Іванівна, д-р техн. наук, проф.

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ

Оптимальне керування в електромеханічних системах [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» з дисципліни «Системи оптимального та інтелектуального керування» / О. І. Толочко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 2865 кБ). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 116 с.

Навчальний посібник присвячено питанням оптимального керування електромеханічними об'єктами. Посібник складається із вступу та методичних вказівок до 8 практичних занять. Вказівки до кожного заняття складаються з теоретичних положень, завдання, рекомендацій щодо його виконання та контрольних запитань. Практичні завдання виконуються на комп'ютерах в середовищі пакету *MATLAB* та його додатку *Simulink*. Завдання до практичних занять спрямовані на застосування методів варіаційного числення для оптимізації систем керування електроприводом. У якості критеріїв оптимізації застосовуються мінімізація часу керування та мінімізація теплових втрат у статичних та динамічних режимах. Розглядаються задачі на безумовний та умовний екстремуми з використанням методів Ейлера та Ейлера-Лагранжа, а також задачі на досягнення максимальної швидкодії з використанням принципу максимуму Понтрягіна.

Посібник призначений для використання магістрантами спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» спеціалізації "Електромеханічні системи автоматизації та електропривод" при вивченні дисципліни «Інтелектуальне та оптимальне керування в електромеханічних та електротехнічних системах» та при виконанні магістерських дипломних робіт. Він може бути також використаний аспірантами при підготовці кандидатських дисертацій.

© О.І. Толочко, 2019
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019

ВВЕДЕННЯ

Кредитний модуль «Системи інтелектуального та оптимального керування в електромеханічних системах» призначений для вивчення студентами спеціальності 141 "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка" спеціалізації "Електромеханічні системи автоматизації та електропривод". Даний посібник уявляє собою методичні вказівки до практичних занять, присвячених придбання практичних навичок з оптимального керування електромеханічними об'єктами. Серед величезної кількості оптимізаційних задач виділяється клас задач, які приходиться вирішувати на етапах структурного та параметричного синтезу задавальних пристроїв та оптимальних регуляторів для систем електроприводу.

Використання методів теорії оптимального керування є одним з найперспективніших способів підвищення якості систем автоматичного керування (САК), що проектуються. Теорія оптимального керування (ТОК) – це розділ теорії автоматичного керування, де досліджуються властивості траєкторій динамічних систем, що є оптимальними за певним критерієм (мінімум часу переходу з одного стану в інший, максимально можлива точність виконання завдання керування, мінімум витрат енергії, максимальна продуктивність тощо) при дотриманні деяких обмежень [1-6].

Метою практичних занять є отримання студентом необхідних навичок розв'язання задач оптимального керування електромеханічними об'єктами [7-26] для подальшого їх використання при виконанні магістерської випускної роботи. Для виконання завдань, сформульованих у даному посібнику, студенти, крім методів оптимального керування, повинні знати математичний опис електромеханічних об'єктів на базі асинхронного двигуна (АД), синхронних двигунів з постійними магнітами (СДПМ) та двигунів постійного струму (ДПС) з незалежним збудженням [27-30], володіти методикою синтезу систем підпорядкованого керування [27-28], мати навички структурного математичного моделювання у середовищі програми *Simulink* пакету *MATLAB* [29-31].

У методичних вказівках до кожного практичного заняття викладено ґрунтовні теоретичні відомості, необхідні для розуміння сенсу задачі та методу її розв'язання, сформульовано конкретне завдання, запропоновані рекомендації до його виконання. Для перевірки якості засвоєння матеріалу вказівки закінчуються контрольними запитаннями. Для поглибленого вивчення матеріалу необхідно звернутися до рекомендованої літератури.

Заключний етап практичного заняття – оформлення звіту з його виконання, який подається на аркушах паперу формату А4 з урахуванням вимог ЄСКД.

Звіт з кожного практичного заняття має містити наступні матеріали:

1. Титульний аркуш.
2. Основні теоретичні відомості, необхідні для виконання завдання.
3. Умови завдання.
4. Тексти програмних модулів, написані алгоритмічною мовою *MatLab* за заданими умовами завдання та (або) структурні моделі типових та оптимальних систем.
5. Результати виконання кожної програми та (або) результати моделювання.
6. Висновки по виконанню завдання.

Практичне заняття 1

ЗНАЙОМСТВО ЗІ ВЛАСТИВОСТЯМИ ЕПЦИКЛОЇДИ ТА БРАХІСТОХРОНИ

1.1 Теоретичні положення

1.1.1 Історія виникнення задачі про брахістохрону

Історично важливою задачею, що дала поштовх до розвитку сучасного варіаційного числення, що є одним із розділів теорії оптимального керування, стала *задача про брахістохрону* (1696 р.).

У 1696 р. Іоганн Бернуллі опублікував лист, у якому пропонував увазі математиків задачу про лінію найшвидшого спуску – брахістохрону. У цій задачі необхідно визначити лінію, що з'єднує дві задані точки A і B , що не лежать на одній вертикальній прямій і мають ту властивість, що матеріальна точка скачується по цій лінії під дією власної сили тяжіння (без врахування тертя) з точки A в точку B за найкоротший час [1, 8].

Розв'язок задачі дав спочатку Лейбніц, а трохи пізніше Ньютон, Якоб Бернуллі та Лопіталь. Усі вони знайшли, що лінією найскорішого спуску (скату) є перегорнута циклоїда, названа брахістохроною (від грецьких слів «брахістос» – найменший і «хронос» – час).

1.1.2 Властивості циклоїди

Циклоїда визначається як траєкторія фіксованої точки кола радіуса R , що котиться без ковзання по прямій. Простіше кажучи це траєкторія цвяха, забитого в колесо. Якщо пряма, по якій котиться коло, – горизонталь, то, як впливає з рис. 1.1, *параметричний опис циклоїди* має вигляд:

$$\begin{cases} x = R\alpha - R\sin\alpha = R(\alpha - \sin\alpha), \\ y = R - R\cos\alpha = R(1 - \cos\alpha), \end{cases} \quad (1.1)$$

звідкіля

$$x = y \frac{\alpha - \sin\alpha}{1 - \cos\alpha}. \quad (1.2)$$

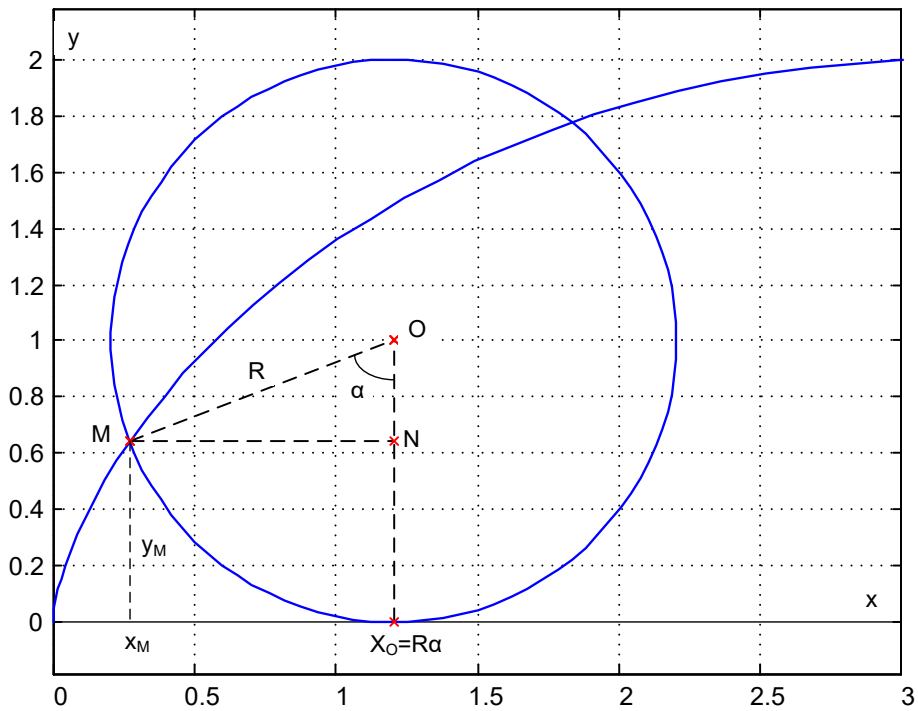
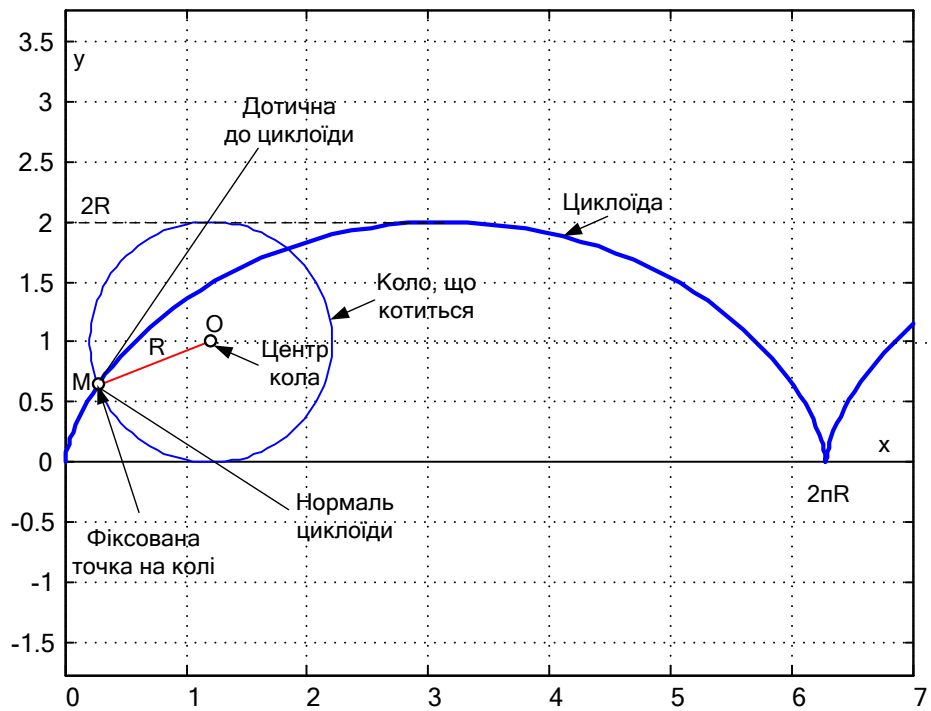


Рис.1.1. Графіки циклоїди

Враховуючи, що

$$\cos \alpha = \frac{R-y}{R}, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{R} \sqrt{2Ry - y^2}, \quad R = \arccos \frac{R-y}{R}, \quad (1.3)$$

підстановкою (1.3) в (1.2), отримуємо *рівняння циклоїди в Декартових координатах*:

$$x = R \arccos \frac{R-y}{R} - \sqrt{2Ry - y^2}. \quad (1.4)$$

Знайдемо диференціальне рівняння циклоїди. Для цього продиференціюємо рівняння (1.1) за часом, враховуючи, що кут α також є функцією часу

($\frac{d\alpha(t)}{dt} = \omega(t)$ – кутова швидкість колеса):

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = R \frac{d\alpha}{dt} \sin \alpha, \\ \frac{dx}{dt} = R \frac{d\alpha}{dt} (1 - \cos \alpha). \end{cases} \quad (1.5)$$

При діленні першого рівняння системи (1.5) на друге, отримуємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}. \quad (1.6)$$

Виразимо чисельник і знаменник похідної (1.6) через y , використовуючи вирази (1.1) і (1.3):

$$1 - \cos \alpha = \frac{y}{R}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{2Ry - y^2}}{R}. \quad (1.7)$$

Після підстановки (1.7) в (1.6), отримуємо **нелінійне диференціальне рівняння циклоїди**:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2R-y}{y}}, \quad (1.8)$$

або

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2R-y}{y}. \quad (1.9)$$

Із рис. 1.1 та рівнянь (1.4) та (1.8) випливає, що ордината циклоїди може змінюватися тільки в діапазоні $y \in [0, 2R]$; період циклоїди складає $2\pi R$, абсциса першого екстремуму – $x_{\max 1} = \pi R$, максимальне значення (амплітуда) циклоїди – $y_{\max} = 2R$.

Циклоїда має ще такі властивості:

- Для проведення дотичної до циклоїди в довільній її точці M досить з'єднати цю точку з верхньою точкою кола. Поєднавши M з нижньою точкою кола, отримують нормаль циклоїди..
- Довжина арки циклоїди дорівнює $8R$. Цю властивість відкрив Крістофер Рен (1658).
- Площа під кожною аркою циклоїди втричі більше, ніж площа кола, що її породжує. Торрічеллі повідомив, що цей факт Галілей відкрив експериментально: порівняв вагу пластинок з колом і з аркою циклоїди. Математично цей факт першим довів Роберваль (1634 р.).
- Радіус кривизни у першій арці циклоїди дорівнює $4R \sin(\alpha/2)$.

1.1.3 Властивості брахістохрони

Графік брахістохрони з початковою точкою A , поміщеною у центр системи координат ($x(0) = x_0 = x_A = 0$, $y(0) = y_0 = y_A = 0$), уявляє собою перегорнуту половинку першого періоду циклоїди, тобто $-y(x)$ при $x \in [0, \pi R]$, $y \in [0, 2R]$. Графіки брахістотрон для 3-х значень радіусу: $R = [0.5, 1, 2]$ зображені на рис. 1.2.

Брахістрона має властивість **тавтохронності**: важке тіло, розташоване в будь-якій точці арки брахістохрони, досягає горизонталі за один і той же час. Звідси випливає, що період коливань матеріальної точки, що рухається по перегорнутій циклоїді, не залежить від амплітуди. Цей факт був використаний Гюйгенсом для створення точного механічного годинника.

Наступною задачею при формуванні брахістохрони є визначення радіусу, що забезпечує проходження кривої через задану точку.

$$x(t_f) = x_f = x_B, \quad y(t_f) = y_f = y_B. \quad (1.10)$$

Рівняння (1.4) для правого кінця оптимальної траєкторії має вигляд:

$$x_f = R \arccos \frac{R - y_f}{R} - \sqrt{2Ry_f - y_f^2}. \quad (1.11)$$

Розв'язуючи його чисельними методами відносно R , знаходимо шукану величину. Складність чисельного рішення полягає у правильному виборі початкового наближення розв'язку або інтервалу пошуку.

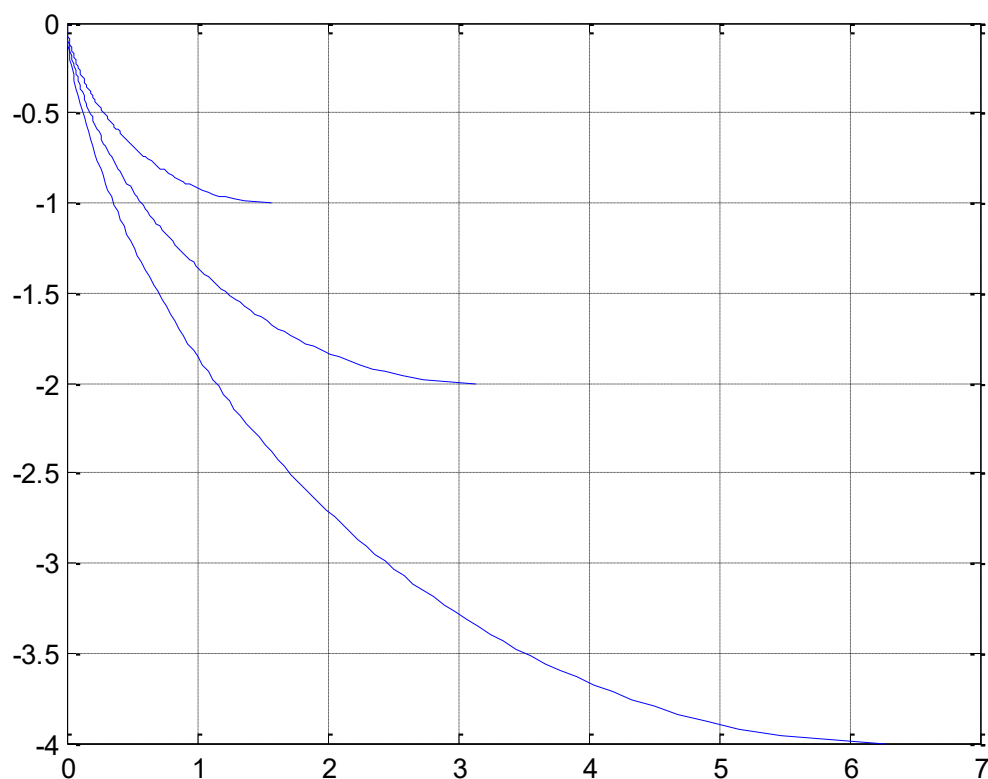


Рис.1.2. Графіки брахістохрон при $R=[0.5 \ 1 \ 2]$

Щоб впоратися з цією проблемою, можна спочатку при заданому значенні y_f побудувати на деякому інтервалі зміни R , графік функції $x_f(R)$ за рівнянням (1.11) і, аналізуючи отриманий графік, зробити висновок про значення, які можуть належати оптимальній траєкторії, та про початкові наближення до цих значень.

Наприклад, на рис.1.3. подано графік $x_f(R)$ при $y_f = 4$, із якого видно, для яких значень x_f можна отримати оптимальну траєкторію, а для яких ні. Для розв'язання рівняння (1.11) при $x_f = 5$ можна задатися інтервалом існування кореня $[R_{left} \ R_{right}] = [2 \ 3]$. В результаті отримаємо $R = 2.0686$. Брахістохрона, що проходить через точки з координатами $[0,0]$ і $[5,4]$, одержана за описаною вище методикою, зображена на рис. 1.4.

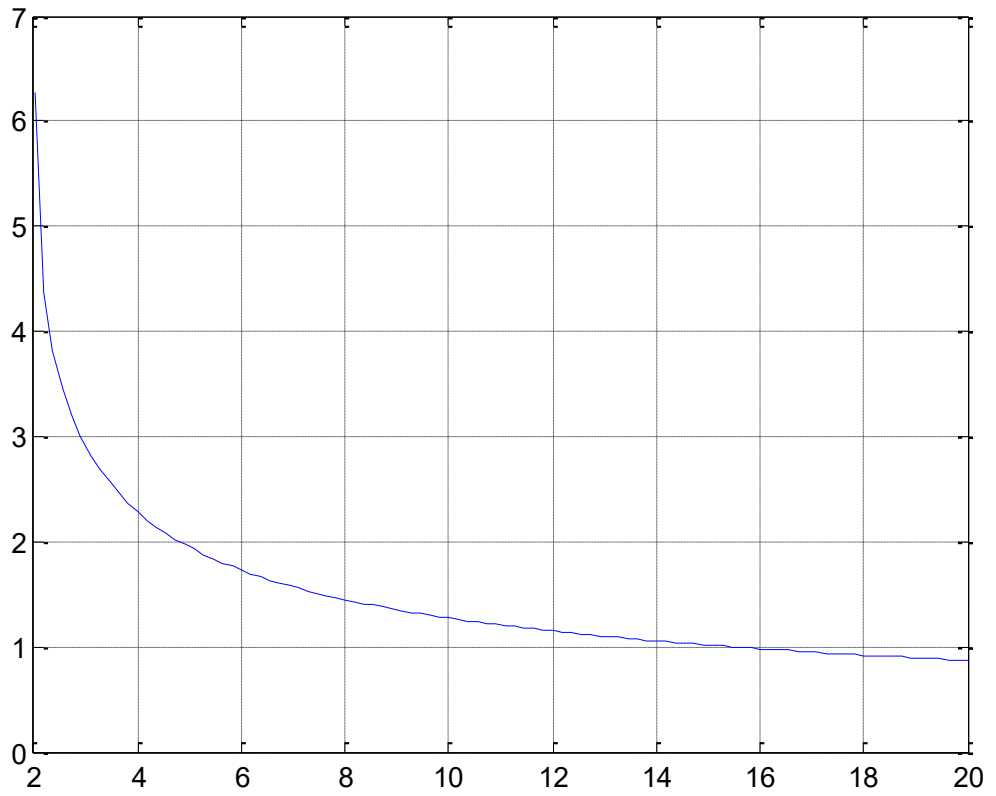


Рис.1.3. Графік $x_f(R)$ при $y_f = 4$

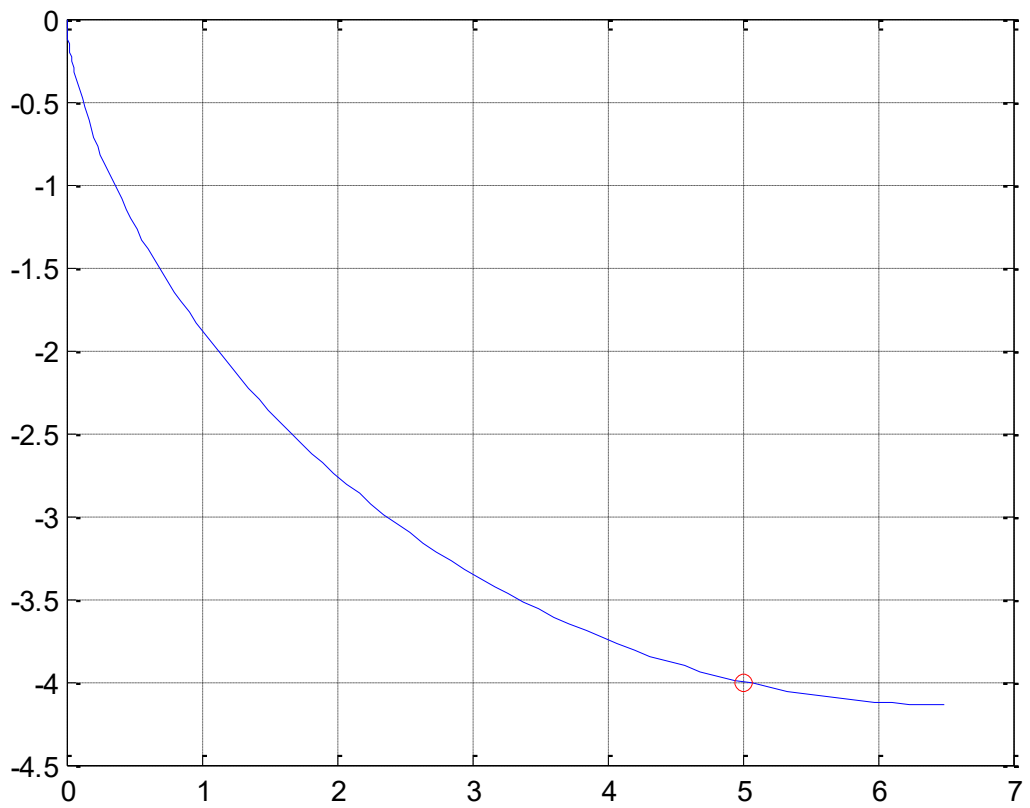


Рис. 1.4. Брахістотрона, що проходить через 2 задані точки

1.2 Завдання

- 1) Побудувати графіки циклоїди, та кола, що її породжує, у вигляді рис. 1.1.
- 2) Побудувати брахістохрони для декількох значень радіусу кола за зразком рис. 1.2.
- 3) Побудувати брахістохрону, що проходить через початок координат і точку з заданими координатами за зразком рис.1.4.

1.3 Методичні рекомендації до виконання завдання

1) При побудові графіка циклоїди за рис. 1.1а задайте діапазон зміни кута повороту колеса від 0 до $2.5\pi R$ оператором `linspace`.

2) Точки кола, що породжує брахістохрону, розраховуйте за параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = R \sin \varphi + x_0, \\ y = R \cos \varphi + R, \end{cases}$$

де $x_0 = \alpha_0 \pi$, $\alpha_0 \approx \pi/3 + \pi/20$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

3) Щоб змінити масштаб зображення графіка застосуйте оператор `xlim` (`[xmin, xmax]`).

4) Щоб коло не походило на еліпс, застосуйте оператор `axis equal`.

1.4 Контрольні питання та завдання

- 1) Що таке циклоїда?
- 2) Виведіть параметричні рівняння циклоїди.
- 3) Знайдіть рівняння циклоїди у Декартових координатах.
- 4) Яким диференціальним рівнянням описується циклоїда?
- 5) Які властивості циклоїди Ви знаєте?
- 6) Що таке брахістохрона?
- 7) Які властивості брахістохрони Ви знаєте?
- 8) Як побудувати графік брахістохрони, що проходить через дві задані точки?

Практичне заняття 2

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ НАЙСКОРІШОГО СПУСКУ

2.1 Теоретичні положення

Задача найскорішого пуску сформульована у попередньому розділі. Там же наведено без доказу рівняння траєкторії найскорішого пуску, що зветься брахістохроною, у різних формах.

Доведемо, що перегорнута циклоїда є брахістохроною, для чого виведемо диференціальне рівняння руху тіла за довільною траєкторією в одній площині під дією сили тяжіння, знайдемо вираз для часу пересування і шляхом його мінімізації визначимо рівняння брахістохрони в Декартових координатах.

У відповідності із законом збереження енергії при переміщенні тіла з точковою масою m у вертикальній площині справедливе рівняння [8]

$$\frac{mv^2}{2} = mgy, \quad (2.1)$$

звідкіля

$$v = \sqrt{2gy}. \quad (2.2)$$

Знайдемо диференціал від шляху:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Тоді

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$v = v_x \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Із останнього виразу зі врахуванням (2.2) знаходимо горизонтальну складову швидкості:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2gy}{1 + (y')^2}}. \quad (2.3)$$

Із (2.3) випливає:

$$dt = \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}} dx. \quad (2.4)$$

Шляхом інтегрування обох частин рівняння (2.4) отримуємо час пересування тіла, який у задачі про найскоріший спуск є мінімізованим функціоналом:

$$t = \int_0^{x_f} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}} dx = J. \quad (2.5)$$

Отже, для розв'язання задачі про брахістохрону треба знайти рівняння екстремалі $y(x)$, що забезпечує мінімум функціоналу (2.5) при заданих граничних умовах

$$y(0) = y_0, \quad y(x_f) = y_f. \quad (2.6)$$

Використовуючи положення класичної теорії варіаційного числення, можна показати, що сформульована задача належить до задач на безумовний екстремум, а функціонал (2.5) є окремим випадком найпростішого функціоналу

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F(y(t), y'(t), t) dt, \quad (2.7)$$

в якому відсутня незалежна змінна:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F(y(t), y'(t)) dt. \quad (2.8)$$

Функцію $y(t)$ вважаємо тричі диференційованою.

Рівнянням екстремалі, що мінімізує функціонал (2.7), є **рівняння Ейлера**:

$$\frac{\partial F(y, y', t)}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(y, y', t)}{\partial y'} \right) = 0, \quad (2.9)$$

або в розгорнутій формі

$$\frac{\partial F(y, y', t)}{\partial y} - \frac{\partial^2 F(y, y', t)}{\partial y' \partial t} - \frac{\partial^2 F(y, y', t)}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^2 F(y, y', t)}{\partial y' \partial y'} y'' = 0. \quad (2.10)$$

Для окремого випадку, коли функціонал має вигляд (2.8), рівняння Ейлера спрощується і набуває вигляду:

$$\frac{d}{dt} \left(F(y, y') - \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} y' \right) = 0, \quad (2.11)$$

або

$$F(y, y') - \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} y' = C. \quad (2.12)$$

Застосуємо рівняння (2.21) до функціоналу (2.5), в якому підінтегральна функція має вигляд

$$F(y, y') = \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}}. \quad (2.13)$$

Знайдемо від'ємне в рівнянні (2.12) для підінтегральної функції (2.13):

$$\frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} y' = y' \frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}} = \frac{(y')^2}{\sqrt{2gy} \cdot \sqrt{1 + (y')^2}}. \quad (2.14)$$

Підстановкою виразів (2.13) та (2.14) у спрощене рівняння Ейлера (2.12) отримуємо

$$\sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{2gy} \cdot \sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{1}{\sqrt{2gy} \cdot \sqrt{1 + (y')^2}} = C,$$

звідкіля

$$1 + (y')^2 = \frac{1}{2gC^2 y},$$

або дещо в іншому вигляді

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{1}{2gC^2 y} - 1 = \frac{1 - 2gC^2 y}{2gC^2 y} = \frac{1}{2gC^2 y} - y. \quad (2.15)$$

Порівнюючи останнє диференціальне рівняння з диференціальним рівнянням циклоїди (1.9)

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{2R - y}{y},$$

бачимо, що вони збігаються при

$$\frac{1}{2gC^2} = 2R. \quad (2.16)$$

Визначити час спуску тіла по брахістохроні під дією власного тяжіння можна за допомогою *Simulink*-моделі. Для цього треба спочатку за методикою, викладеною в попередньому розділі, визначити параметр R , що забезпечує проходження брахістохрони, що починається у точці з нульовими координатами, через задану точку і зупинити моделювання в момент часу, коли тіло пересунеться у точку з заданими координатами. Можна також порівняти отриманий час із часом переміщення того ж самого тіла з однієї заданої точки в іншу по прямолінійній траєкторії, тобто по ідеальній похилій площині.

2.2 Завдання

1. За диференціальним рівнянням (2.15) з урахуванням (2.16) побудуйте *Simulink*-модель переміщення матеріальної точки по брахістохроні із точки з координатами $(0,0)$ в точку з координатами $(\pi R, -2R)$ і визначте час переміщення за формулою (2.5). Можливий варіант моделі наведено на рис. 2.1.

2. Побудуйте *Simulink*-модель руху точкової маси з точки А в точку В по похилій площині. Зафіксуйте час пересування. Порівняйте його з часом пересування по брахістохроні. Приклад моделі наведено на рис. 2.2.

2.3 Методичні рекомендації до виконання завдання

1. Не забувайте, що в диференціальному рівнянні (2.15) незалежною змінною є не час, а абсциса брахістохрони. Тому час моделювання треба встановити таким, що чисельно дорівнює πR .

2. Щоб запобігти ділення на нуль у початковій точці оптимальної траєкторії при обчисленні похідної другого порядку згідно з формулою (2.15) або (1.9) та формулою (2.5), модифікуйте їх у такий спосіб:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2R-y}{\max(y,\varepsilon)}, \quad t = \int_0^{x_f} \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g\max(y,\varepsilon)}} dx = J,$$

де ε – мала константа ($[\varepsilon] \ll 1$). Для реалізації цих формул скористайтесь функцією *max* блоку *MinMax* із математичної бібліотеки *Math Operations*.

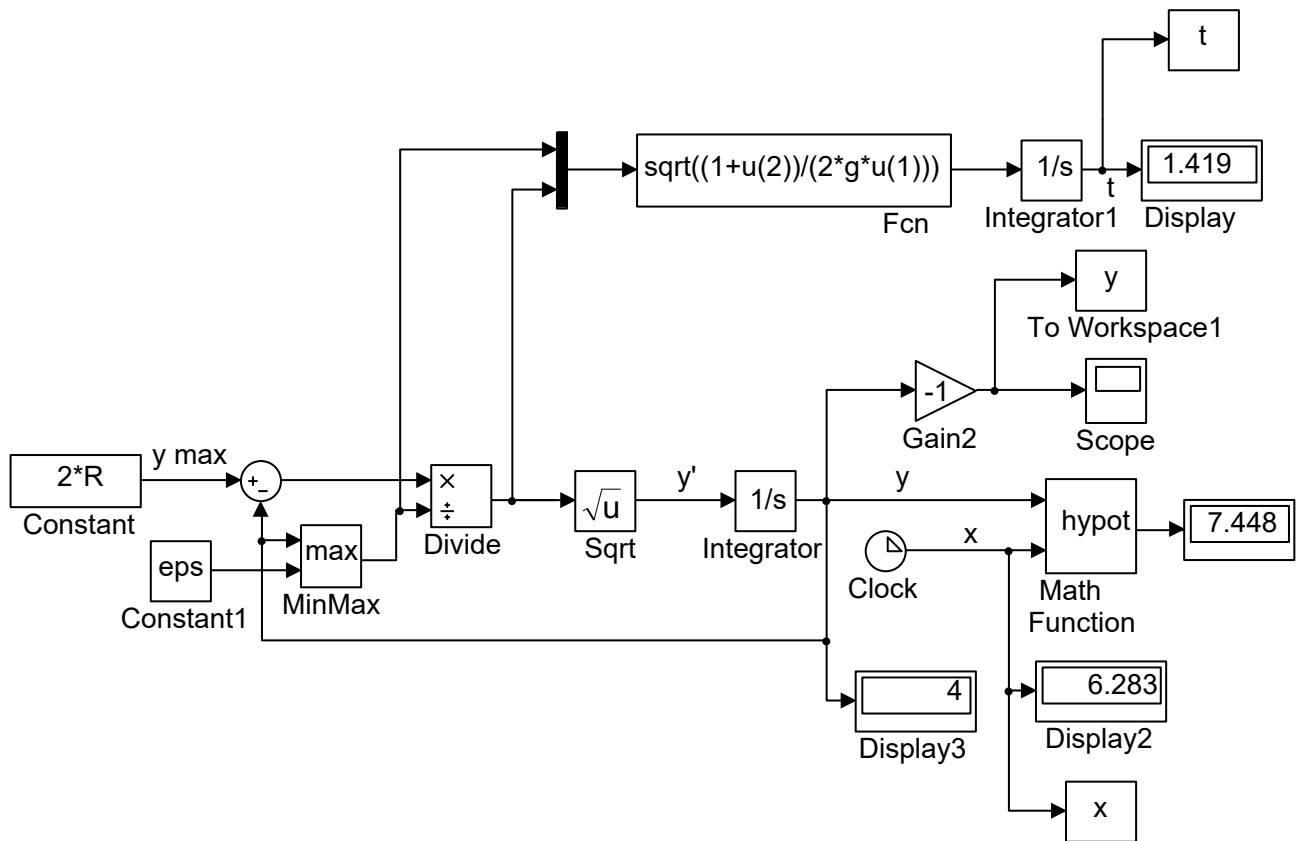


Рис. 2.1. *Simulink*-модель руху тіла по брахістохроні

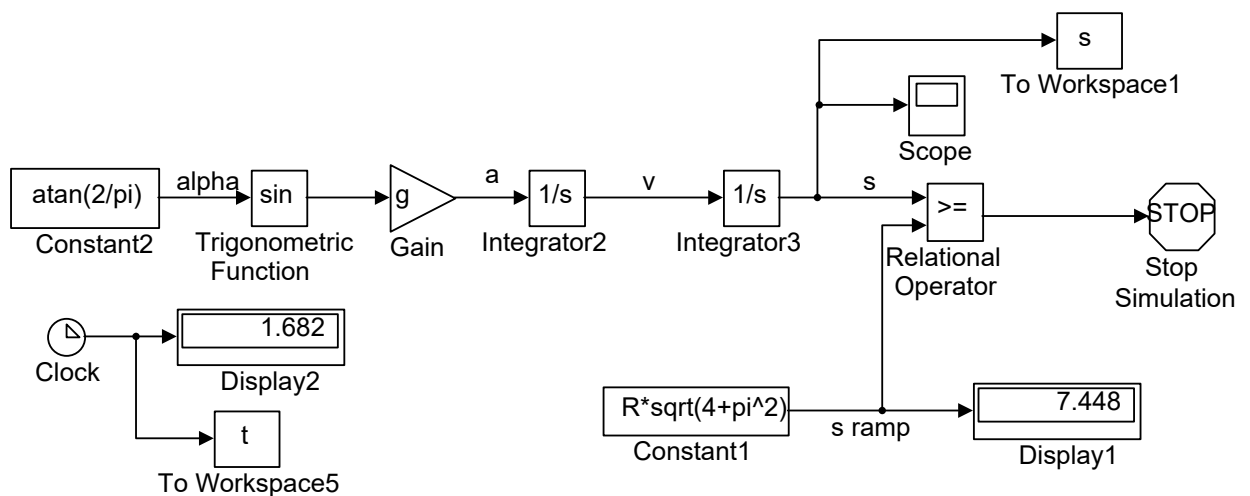


Рис. 2.2. *Simulink*-модель руху тіла по похилій площині

3. Для моделювання руху тіла по похилій площині виконайте послідовно такі дії:

- розрахуйте кут нахилу рампи та загальний шлях, який пройде тіло, що котиться із тієї ж точки А у ту ж саму точку В тільки не по брахістохроні, а по прямолінійній траєкторії:

$$\alpha = \arctg \frac{y_{\max}}{x_{\max}} = \arctg \frac{2R}{\pi R} = \arctg \frac{2}{\pi}, \quad s_{ramp} = \sqrt{x_{\max}^2 + y_{\max}^2} = R\sqrt{\pi^2 + 4};$$

- складіть структурну модель за рівняннями

$$mg \cdot \sin \alpha = m \frac{dv(t)}{dt}, \quad \frac{ds(t)}{dt} = v(t);$$

- зупиняйте моделювання за допомогою блоку *Stop Simulation* при виконанні умови $s(t) \geq s_{ramp}$, перевірку якої здійснюйте блоком *Relational Operator*;
- час руху фіксуйте за допомогою блоку *Display*, приєднаного до блоку *Clock*.

Можливі варіанти *Simulink*-моделей руху тіла по брахістохроні та по похилій площині, сконструйовані зі врахуванням наведених вище рекомендацій показані на. Залежності $t_f(R)$, отримані за допомогою моделей рис. 2.1 та рис. 2.2 представлені на рис. 2.3.

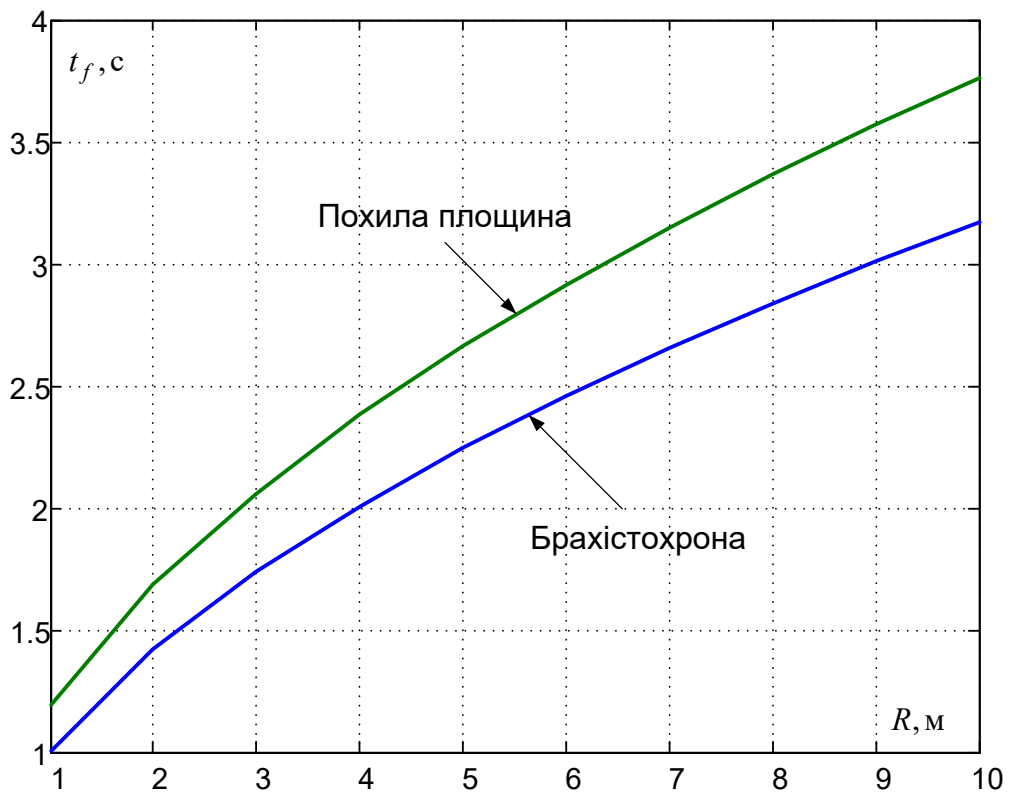


Рис. 2.3. Графіки залежності $t_f(R)$ для брахістохрони та похилої площини

2.4 Контрольні питання та завдання

1. Що таке задача на безумовний екстремум?
2. Яке рівняння у варіаційному численні має назву рівняння Ейлера? Який функціонал воно мінімізує?
3. До якого окремого випадку належить задача про брахістохрону? Як виглядає рівняння Ейлера у цьому випадку?
4. Знайдіть вираз для часу пересування тіла під дією власного тяжіння по довільній траєкторії.

Практичне заняття 3

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ АСИНХРОННИМ ЕЛЕКТРОПРИВОДОМ ЗА СТРАТЕГІЯМИ «МАКСИМАЛЬНИЙ МОМЕНТ НА АМПЕР» ТА «МІНІМІЗАЦІЯ ВТРАТ У МІДІ»

3.1 Теоретичні положення

Відомо, що більш, ніж 50% генерованої електроенергії споживають системи електроприводу. Значну долю серед них складають векторно керовані асинхронні двигуни (АД). Одним із недоліків таких електромеханічних систем є зниження коефіцієнту корисної дії (ККД) при зменшенні навантаження при номінальному потокозчепленні ротора. Розв'язання цієї проблеми дозволяє не тільки підвищити ефективність споживання електроенергії та знизити собівартість виробництва, але й збільшити тривалість інтервалів часу між підзарядками автономних джерел живлення електричних транспортних засобів.

3.1.1 Математичний опис асинхронного двигуна

При синтезі регуляторів та при дослідженні векторно керованого АД зручно використовувати математичний опис двигуна в системі координат dq , орієнтованій за просторовим вектором потокозчеплення ротора [31-33]:

$$\begin{cases} u_{sd} + \frac{k_r}{T_r} \Psi_r + \omega_k \sigma L_s i_{sq} = i_{sd} R_{sr} (\tau_{sr} s + 1), \\ u_{sq} - \omega_k \sigma L_s i_{sd} - z_p \omega k_r \Psi_r = i_{sq} R_{sr} (\tau_{sr} s + 1), \\ L_m i_{sd} = \Psi_r (\tau_r s + 1), \\ \omega_k = k_r R_r \frac{i_{sq}}{\Psi_r} + z_p \omega, \\ T = k_T \Psi_r i_{sq}, \\ T - T_L = J \omega s, \end{cases} \quad (3.1)$$

де s – оператор Лапласа; T – електромагнітний момент (*Torque*) двигуна; T_L – момент статичного навантаження (*Load Torque*); $i_{sd}, i_{sq}, u_{sd}, u_{sq}$ – потокоутворючі (d) та моментоутворюючі (q) ортогональні складові струму та напруги статора відповідно; Ψ_r – амплітуда потокозчеплення ротора; R_s, R_r – активні опори статора і ротора; L_s, L_r, L_m – індуктивності статора, ротора та намагнічування; z_p – кількість пар полюсів; $\tau_r = L_r / R_r$ – електромагнітна стала

часу ротору; $k_T = 3z_p k_r / 2$ – коефіцієнт моменту; $k_r = L_m / L_r$ – коефіцієнт магнітного зв'язку ротора; J – момент інерції; ω_k – швидкість обертання системи координат;

$$R_{sr} = R_s + k_r^2 R_r, \quad \tau_{sr} = \sigma L_s / R_{sr}, \quad \sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}. \quad (3.2)$$

Різницю між швидкістю обертання вектору потокозчеплення ротора ω_k (кругова частота потокозчеплення ротора, яку досить часто позначають як ω_e , тобто $\omega_e = \omega_k$) та «електричною» швидкістю ротора

$$\omega_r = \omega z_p \quad (3.3)$$

називають **абсолютним ковзанням**:

$$\omega_{slip} = \omega_k - \omega z_p = k_r R_r i_{sq} / \psi_r. \quad (3.4)$$

3.1.2 Загальна характеристика втрат у системах асинхронного електроприводу

Енергетична ефективність роботи будь-якого електродвигуна залежить від сумарних втрат, які можна розділити на такі групи:

- втрати в обмотках статора та ротора (втрати в міді, англ. *Copper Losses*);
- втрати в магнітопроводі (втрати в сталі, англ. *Iron Losses* или *Core Losses*), які розподіляються на втрати від вихрових струмів (*Eddy Current Losses*) та втрати на перемагнічування (*Hysteresis Losses*);
- втрати у перетворювачі (*Converter Losses*), що складаються зі втрат на перемикання та кінечну провідність силових ключів інвертора, втрат у міді дроселів та фільтрів ланок постійного струму та втрат від наявності вищих гармонік (*Stray Losses*), які залежать від алгоритму модуляції та її частоти;
- втрати на розсіювання (*Stray Losses*);
- механічні втрати (*Mechanic Losses*), зумовлені наявністю сухого та в'язкого тертя.

Втрати в обмотках двигунів та у перетворювачі залежать від навантаження. Вони пропорційні квадрату відповідних струмів.

Втрати у міді для АД:

$$P_{Cu} = 3(R_s I_s^2 + R_r I_r^2) = \frac{3}{2}(R_s i_s^2 + R_r i_r^2), \quad I_s = i_s / \sqrt{2}, \quad (3.5)$$

де I_s, I_r – діючі значення струмів статора і ротора (**rms-value**), i_s, i_r – амплітудні значення струму (**peak-value**), R_s, R_r – активні опори обмоток статора і ротора, є найбільш суттєвими з усіх розглянутих вище втрат. Зазвичай вони становлять від 55% до 60% загальних втрат.

Як правило, ККД сучасних перетворювачів частоти складає 95-99%, а втрати в перетворювачі (**Rectifier and DC link inverter losses**)

$$P_{Inv} = \frac{3}{2} R_{inv} i_s^2. \quad (3.6)$$

значно менші, ніж втрати у двигуні. Тому ними зазвичай нехтують.

Втрати на розсіювання важко вимірювати безпосередньо або обчислювати, але, як правило, вони пропорційні квадрату струму ротора. Стандарти IS та IEC приймають фіксовану величину, рівну 0,5% від загальних втрат. Стандарт IEC-112 пропонує значення від 0,9% до 1,8% в залежності від потужності двигуна (див. табл. 3.1). Такими величинами втрат можна знехтувати.

Таблиця 3.1

Потужність двигуна	Втрати на розсіювання
1 – 100 Вт	1,8 %
100 – 375 Вт	1,5 %
375 – 1875	1,2 %
1875 Вт і більше	0,9 %

Втрати у сталі (Iron losses / Core losses) визначаються за емпіричною формулою

$$P_{Fe} = \frac{3}{2}(k_{ec} \omega_e^2 \Psi_m^2 + k_h \omega_e \Psi_m^2), \quad (3.7)$$

де k_{ec} – коефіцієнт втрат від вихрових струмів (**Eddy Current Losses**); k_h – коефіцієнт втрат від гістерезису (**Hysteresis Losses**);

$$\Psi_m = L_m i_m \quad (3.8)$$

– потокозчеплення намагнічування;

$$i_m = i_s + i_r \quad (3.9)$$

– струм намагнічування.

Легко довести, що в усталеному режимі, для якого $i_{rd} = 0$, а $i_{rq} = -k_r i_{sq}$

$$i_{md} = i_{sd}, \quad i_{mq} = (1 - k_r) i_{sq}, \quad \psi_{md} = \psi_r, \quad \psi_{mq} = k_r L_{r\sigma} i_{sq}, \quad (3.10)$$

$$\psi_m^2 = \psi_{md}^2 + \psi_{mq}^2 = \psi_r^2 + (k_r L_{r\sigma} i_{sq})^2. \quad (3.11)$$

Враховуючи, що

$$\psi_m = e_m / \omega_e, \quad (3.12)$$

де $e_m = u_s - i_s R_s - L_s \cdot di_s / dt$,

$$P_{Fe} = \frac{3}{2} (k_{ec} e_m^2 + k_h e_m^2 / \omega_e). \quad (3.13)$$

Із аналізу розмірностей сигналів в останньому виразі випливає, що коефіцієнт вихрових струмів повинен мати розмірність 1/Ом, а коефіцієнт гістерезису – 1/Гц. Це дозволяє подати ці параметри у вигляді

$$k_{ec} = \frac{1}{R_{ec}}, \quad k_h = \frac{1}{L_h}, \quad (3.14)$$

де R_{ec}, L_h – активний опір та індуктивність фіктивних пасивних елементів, які можна включити у гілку намагнічування Т-подібної схеми заміщення АД паралельно до взаємоіндуктивності L_m для того, щоб можна було при досліджуванні двигуна враховувати втрати не тільки в міді, але й у сталі.

Тоді формула (3.13) набуває вигляду:

$$P_{Fe} = \frac{3}{2} \left(\frac{e_m^2}{R_{ec}} + \frac{e_m^2}{\omega_e L_h} \right), \quad (3.15)$$

Складність використання формули (3.13) полягає у визначенні опору та індуктивності фіктивних елементів, які до того ж є нелінійними функціями швидкості, хоча досить часто цією особливістю можна знехтувати.

Експериментально встановлено, що втрати у сталі зростають з підвищенням швидкості двигуна. Тому їх доля у складі сумарних втрат стає більш суттєвою при регулюванні швидкості у другій зоні.

Механічні втрати сухого тертя виникають у підшипниках, а в'язкого тертя – від циркуляції повітря через двигун та від опору вітру або рідини в турбомеханізмах (насоси, вентилятори, вітрогенератори) та транспортних засобах. Вони не залежать від навантаження, зростають при підвищенні швидкості і становлять (8-12)% від загальних втрат. Ці втрати не можуть бути зниженими методами автоматичного керування, тому їх також можна не враховувати.

Отже, них визначальними при однозонному регулюванні швидкості є втрати в міді, причому втрати в статорі превалюють над втратами в роторі.

3.1.3. Синтез стратегії «Максимальний момент на ампер»

Одним із простих та досить ефективних методів зменшення теплових втрат є стратегія «Максимальний момент на ампер» (ММА, англ. *MTPA – Maximum Torque pro Ampere*), яка полягає у забезпеченні максимально можливого відношення електромагнітного моменту двигуна до струму статора [7-9]. Така стратегія приводить до мінімізації теплових втрат у міді статора і сприяє підвищенню ККД в усталеному режимі.

З рівняння моменту (п'яте рівняння системи (3.1)) випливає, що величину електромагнітного моменту двигуна можна змінювати регулюванням як моментоутворюючої складової струму статора, так і потокозчеплення ротора, яке у свою чергу залежить від потокоутворюючої складовою струму статора. Отже, задача полягає у пошуку такого співвідношення між складовими струму статора, які утворюють заданий момент при мінімально можливій амплітуді струму.

Щоб знайти це співвідношення, виразимо потокоутворюючу складову струму статора через потокозчеплення ротора, а моментоутворюючу – через електромагнітний момент та потокозчеплення (третє та п'яте рівняння системи (3.1)) в усталеному режимі (при $s=0$):

$$i_{sd} = \psi_r / L_m, \quad i_{sq} = T / (k_T \psi_r), \quad (3.16)$$

знайдемо амплітуду струму статора

$$i_s = \sqrt{i_{sd}^2 + i_{sq}^2} = \sqrt{\psi_r^2 / L_m^2 + T^2 / (k_T^2 \psi_r^2)}$$

та відношення цієї амплітуди до моменту як функцію, що треба мінімізувати:

$$f(\psi_r) = i_s / T = \sqrt{\psi_r^2 / (L_m^2 T^2) + 1 / (k_T^2 \psi_r^2)} \rightarrow \min. \quad (3.17)$$

Визначимо похідну від функції (3.4) та прирівняєм її до нуля:

$$\frac{2\Psi_r/(L_m^2 T^2) - 2/(k_T^2 \Psi_r^3)}{2\sqrt{\Psi_r^2/(L_m^2 T^2) + 1/(k_T^2 \Psi_r^2)}} = 0.$$

Після спрощення останнього рівняння отримуємо

$$\Psi_r^4 k_T^2 - L_m^2 T^2 = 0, \quad (3.18)$$

звідкіля

$$\Psi_{rMTPA}(T) = \sqrt{\frac{L_m}{k_T} T} = \sqrt{\frac{2L_r}{3z_p} T} \quad (3.19)$$

Підставляючи (3.19) у (3.16), отримуємо залежності d - і q -складових струму статора від моменту:

$$i_{sdMTPA}(T) = i_{sqMTPA}(T) = \sqrt{\frac{T}{k_T L_m}}, \quad (3.20)$$

що приводить також до мінімізації електричних втрат в обмотках статора:

$$\Delta P_{sCu} = 3R_s I_s^2 = \frac{3}{2} R_s (i_{sd}^2 + i_{sq}^2) = \frac{3}{2} R_s i_s^2 \rightarrow \min, \quad (3.21)$$

де I_s, i_s – діюче (*root mean square*) та амплітудне (*peak*) значення фазного струму статора відповідно.

Із (3.21) з урахуванням (3.20) випливає

$$i_{s \min}(T) = \sqrt{\frac{2T}{k_T L_m}}. \quad (3.22)$$

З рівнянь (3.16) можна виразити i_{sq} через i_{sd} при заданому значенні моменту:

$$i_{sq} = T / (k_T L_m i_{sd}). \quad (3.23)$$

Сімейство гіпербол $i_{sq}(i_{sd})$ для 3-х значень моменту, розраховане за рівнянням (3.23), зображено на рис. 3.1. Там же наведені 3 кола однакових струмів з радіусами, розрахованими для кожного моменту за формулою (3.22), та траєкторія, оптимальна згідно зі стратегією *MTPA*.

3.1.4 Синтез стратегії «Мінімізація втрат у міді»

Ще більше підвищити ККД двигуна можна, враховуючи сумарні втрати в міді статора і ротора (також в усталеному режимі).

$$\Delta P_{\Sigma Cu} = \frac{3}{2} [R_s i_s^2 + R_r i_r^2] = \frac{3}{2} [R_s (i_{sd}^2 + i_{sq}^2) + R_r (i_{rd}^2 + i_{rq}^2)] \rightarrow \min. \quad (3.24)$$

З виразу потокозчеплення ротора через потокоутворюючі складові струмів

$$\Psi_r = L_m i_{sd} + L_r i_{rd}$$

видно, що в усталеному режимі

$$i_{rd} = 0, \quad i_{rq} = -k_r i_{sq}.$$

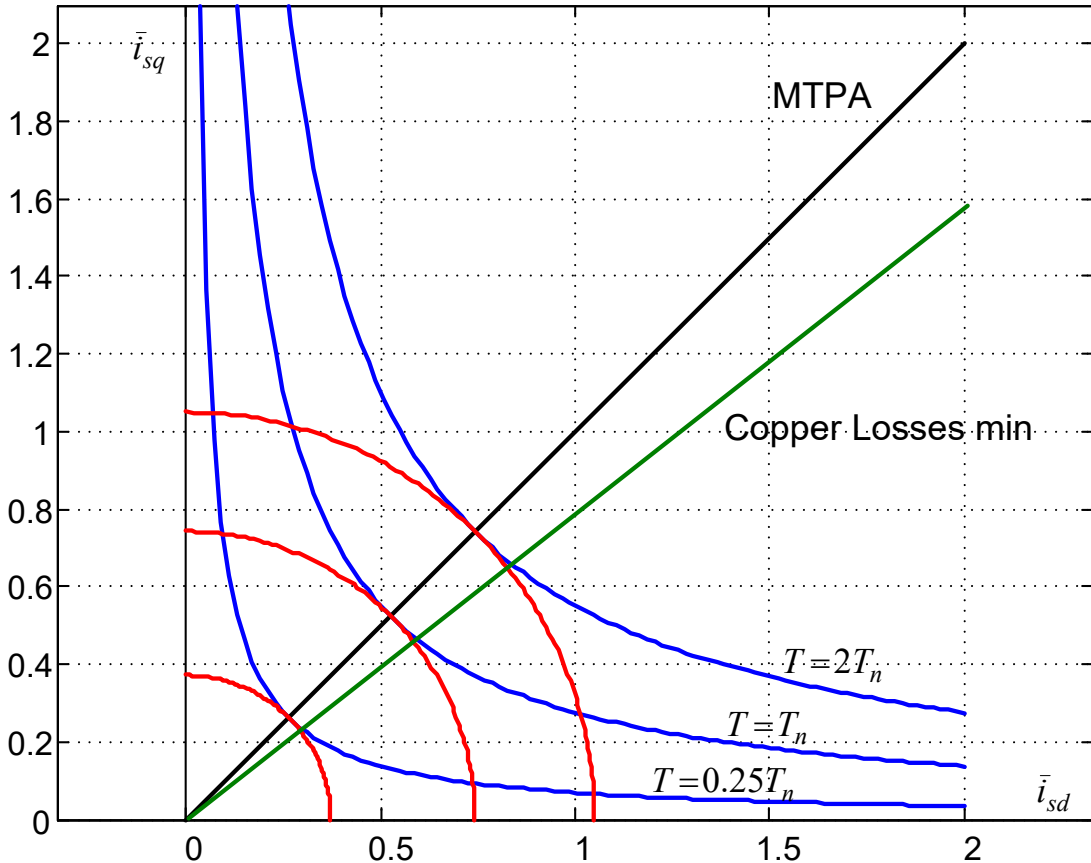


Рис. 3.1. Гіперболи рівних моментів, кола рівних струмів та оптимальні траєкторії

Тоді

$$R_s i_{sq}^2 + R_r i_{rq}^2 = R_s i_{sq}^2 + k_r^2 R_r i_{sq}^2 = (R_s + k_r^2 R_r) i_{sq}^2,$$

і рівняння (3.24) спрощується:

$$\Delta P_{\Sigma Cu} = \frac{3}{2} [R_s i_{sd}^2 + (R_s + k_r^2 R_r) i_{sq}^2] \rightarrow \min, \quad (3.25)$$

що приводить після підстановки в (3.25) виразів (3.16) і дослідження отриманої функції потокозчеплення на екстремум до результатів

$$\Psi_{r opt} = \sqrt{\frac{2TL_r}{3z_p}} \lambda, \quad \lambda = \sqrt{\frac{R_{sr}}{R_s}} = \sqrt{1 + \frac{k_r^2 R_r}{R_s}} > 1; \quad (3.26)$$

$$i_{sd opt} = \sqrt{\frac{T}{k_T L_m}} \lambda, \quad i_{sq opt} = \sqrt{\frac{T}{k_T L_m}} \lambda, \quad \frac{i_{sd opt}}{i_{sq opt}} = \lambda. \quad (3.27)$$

Оптимальна траєкторія, що відповідає рівнянням (3.14), позначена на рис. 3.1 як “*Copper Losses min*”.

Визначимо мінімізовані втрати та ККД, що досягається при їх мінімізації та при нехтуванні іншими видами втрат:

$$\begin{aligned} \Delta P_{\Sigma Cu min} &= \frac{3}{2} \left[R_s i_{sd opt}^2 + (R_s + k_r^2 R_r) i_{sq opt}^2 \right] = \frac{3}{2} \left[R_s \frac{T}{k_T L_m} \sqrt{\frac{R_{sr}}{R_s}} + R_{sr} \frac{T}{k_T L_m} \sqrt{\frac{R_s}{R_{sr}}} \right] = \\ &= \sqrt{R_s R_{sr}} \frac{T}{L_m z_p k_r}, \\ \eta_{u opt} &= \frac{P_m}{P_m + \Delta P_{\Sigma Cu min}} = \frac{T\omega}{T\omega + \sqrt{R_s R_{sr}} \frac{T}{L_m z_p k_r}} = \frac{\omega p k_r L_m}{\omega z_p k_r L_m + \sqrt{R_s R_{sr}}} \end{aligned} \quad (3.28)$$

З останньої формули видно, що при мінімізації втрат у міді з нехтуванням інших видів втрат усталене значення ККД не залежить від величини моменту.

При нерегульованому потокозчепленні ротора (типова система векторного керування)

$$\begin{aligned} \Delta P_{\Sigma Cu} &= \frac{3}{2} \left[R_s i_{sd opt}^2 + (R_s + k_r^2 R_r) i_{sq opt}^2 \right] = \frac{3}{2} \left[R_s \frac{T}{k_T \Psi_{r0}} + R_{sr} \frac{\Psi_{r0}}{L_m} \right], \\ \eta_u &= \frac{P_m}{P_m + \Delta P_{\Sigma Cu min}} = \frac{\omega}{\omega + \frac{3}{2} \left[R_s \frac{1}{k_T \Psi_{r0}} + R_{sr} \frac{\Psi_{r0}}{L_m T} \right]}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

звідкіля видно, що при зменшенні моменту знижується і ККД.

Номінальне поткозчеплення Ψ_{rn} ротора являє собою величину, яка в номінальному режимі роботи двигуна забезпечує максимальний ККД, а, отже, і мінімум сумарних втрат. Цієї величини потокозчеплення ротора набуває при прямому пуску асинхронного приводу в номінальному режимі. Зазвичай при

$0 < \psi_r < \psi_{rn}$ двигун працює практично на лінійній ділянці кривої намагнічування, а величини (3.19) і (3.26) при $T = T_n$ переводять машину в режим насичення.

Щоб цього не сталося, необхідно обмежувати потокозчеплення ротора на рівні номінального величини. Визначити граничну величину електромагнітного моменту, при якому потокозчеплення досягне рівня обмеження, можна з формули

$$\psi_{rMTPA}(T_{lim}) = \sqrt{\frac{2L_r}{3z_p} T_{lim}} = \psi_m,$$

звідкіля

$$T_{limMTPA} = \frac{3p}{2L_r} \psi_{rn}^2 = T_n \left(\frac{\psi_{rn}}{\psi_{rMTPA}(T_n)} \right)^2. \quad (3.30)$$

Відповідно при мінімізації сумарних втрат у міді

$$T_{limopt} = \frac{3p}{2L_r \lambda} \psi_{rn}^2 = T_n \left(\frac{\psi_{rn}}{\psi_{ropt}(T_n)} \right)^2. \quad (3.31)$$

3.1.5 Структурна реалізація оптимальних стратегій

Структурна схема найпростішої реалізації стратегії МТРА при спрощеному поданні замкнених контурів струмів КРСd та КРСq та пропорційному регулятору швидкості (П-РШ), що формує завдання на момент двигуна, наведена на рис. 3.2.

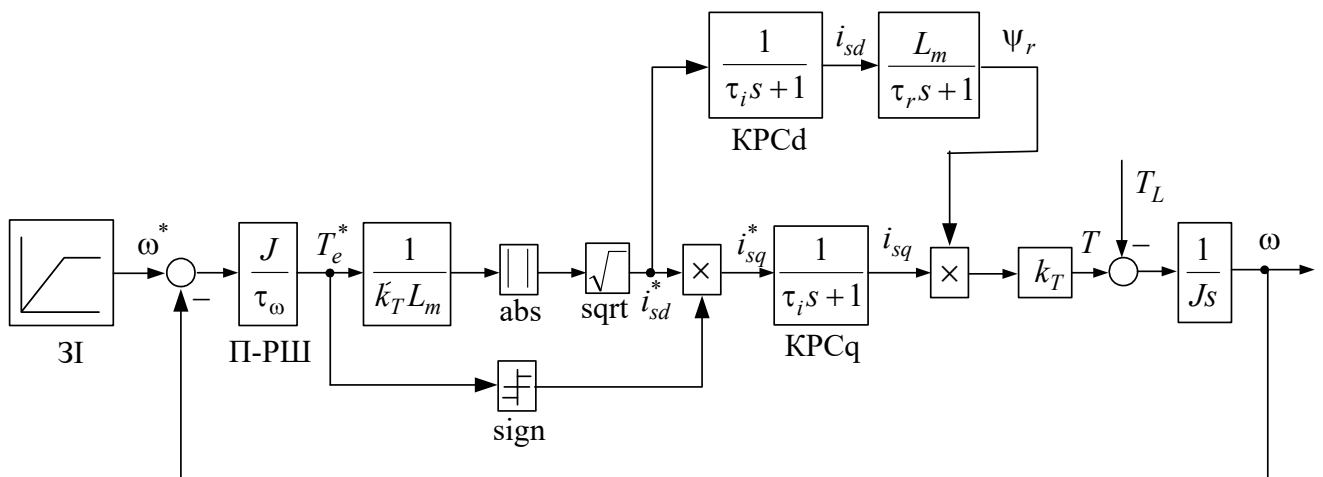


Рис. 3.2. Структурна схема найпростішого варіанту реалізації стратегії МТРА для АД

На схемі $\tau_i, \tau_\omega = 2\tau_i$ – сталі часу розімкнених контурів струму та швидкості.

Перехідні процеси в такій системі показані на рис. 3.3.

Для порівняння на рис. 3.4 наведені перехідні процеси у типовій системі векторного керування швидкості АД з постійним потокозчепленням. У цій системі ККД при зменшенні навантаження знижується. Зокрема, в режимі холостого ходу це зниження досягає 8%.

В системі оптимального керування (див. рис. 3.3) ККД при зниженні навантаження відновлюється за рахунок зменшення потокозчеплення але одночасне керування потокозчепленням і моментом без наявності регулятора потокозчеплення та без урахування його зміни на налаштування контуру швидкості приводить до погіршення якості перехідних процесів.

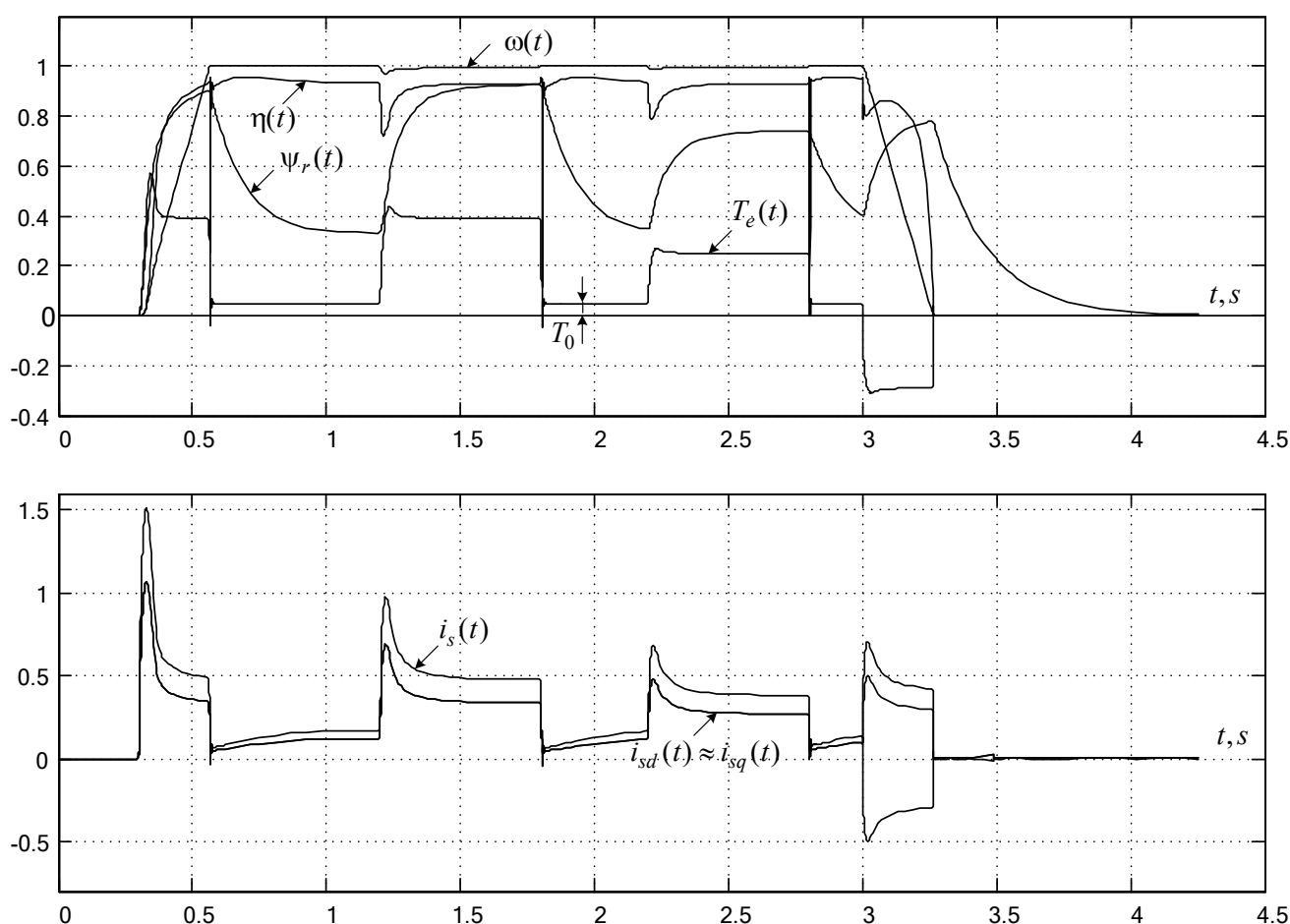


Рис. 3.3. Перехідні процеси в системі рис. 3.1

Цих недоліків можна позбутися при безпосередньому регулюванні потокозчеплення ротора у функції моменту згідно з формулою (3.6), як це показано на структурній схемі рис. 3.4 [8, 9].

Перехідні процеси у схемі рис. 3.4 зображені на рис. 3.5.

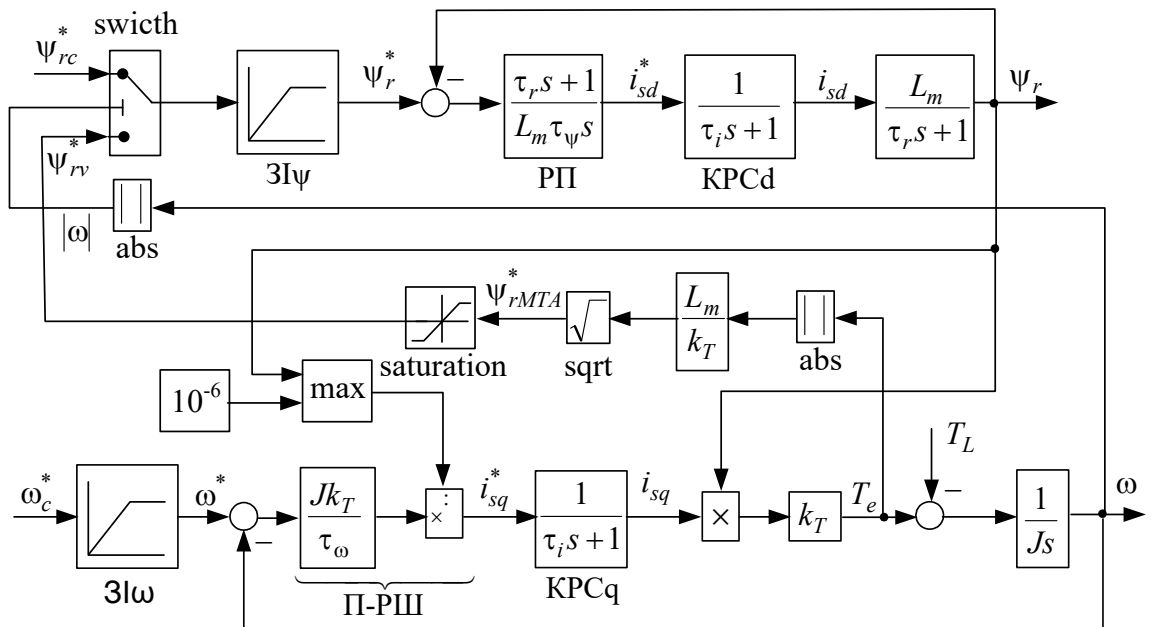


Рис. 3.4. Структурна схема реалізації стратегії МТРА для АД з регулюванням потокозчеплення ротора у функції моменту

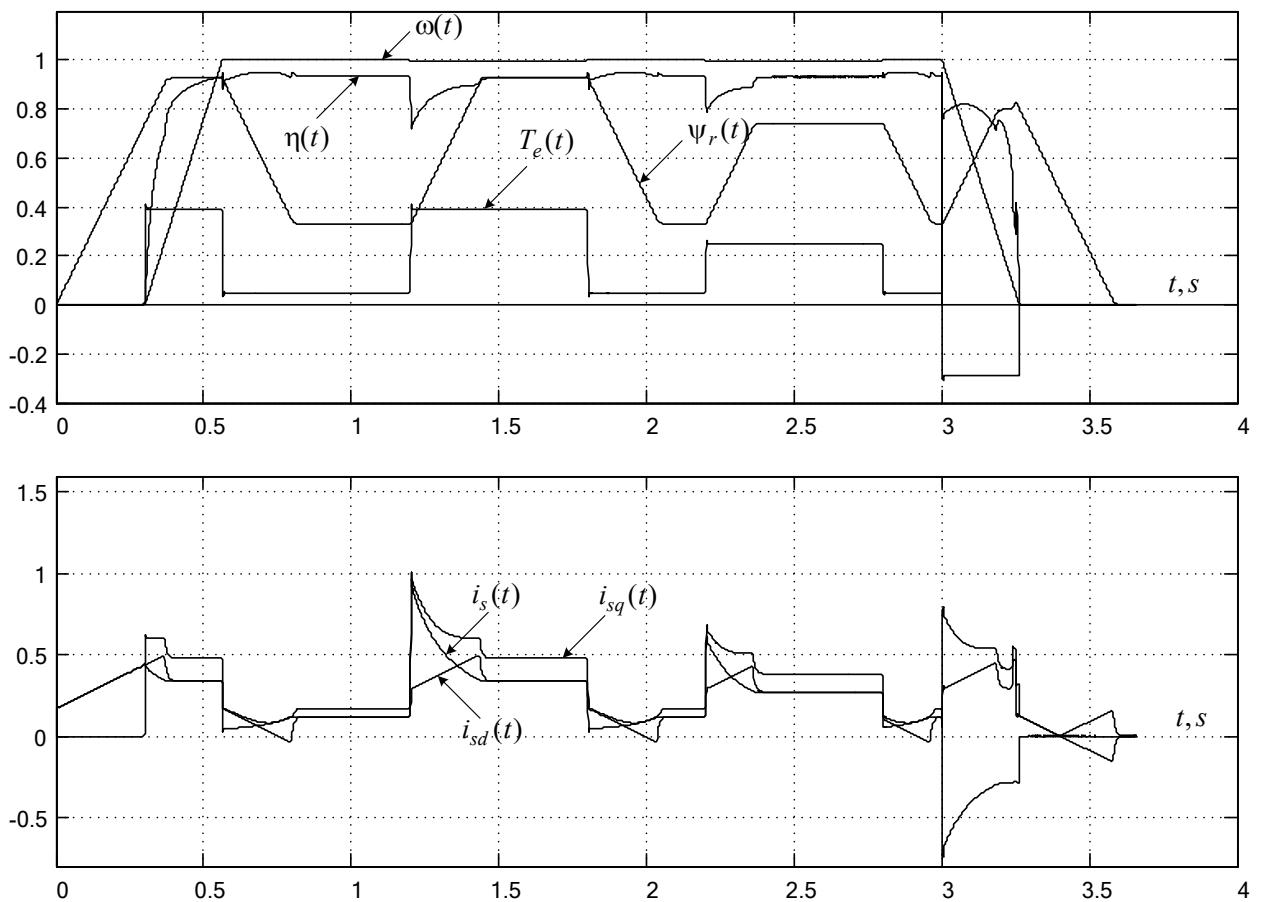


Рис. 3.5. Перехідні процеси в системі рис. 3.4

Завдання на швидкість та на потокозчеплення ротора у схемі рис. 3.4 формується задатчиками інтенсивності $Z\omega$ та $Z\psi$ за лінійним законом. Завдання на потокозчеплення ротора обмежено ланкою *saturation* на номінальному рівні. При малій або нульовій швидкості завдання на потокозчеплення формується незалежно від величини моменту, що забезпечується керованим ключем *swicth* та дозволяє намагнічувати двигун до початку його руху та розмагнічувати після зупинки. В регуляторі швидкості передбачено ділення на сигнал зворотного зв'язку за потокозчепленням, що адаптує контур швидкості до зміни магнітного поля та перешкоджає спотворенню перехідних процесів, що можна побачити на графіках рис. 3.5.

Для порівняння на рис. 3.6 приведені графіки перехідних процесів у типовій системі векторного керування АД (без застосування будь-яких оптимальних стратегій), які демонструють зменшення ККД при малих навантаженнях (наприклад, в режимі холостого ходу).

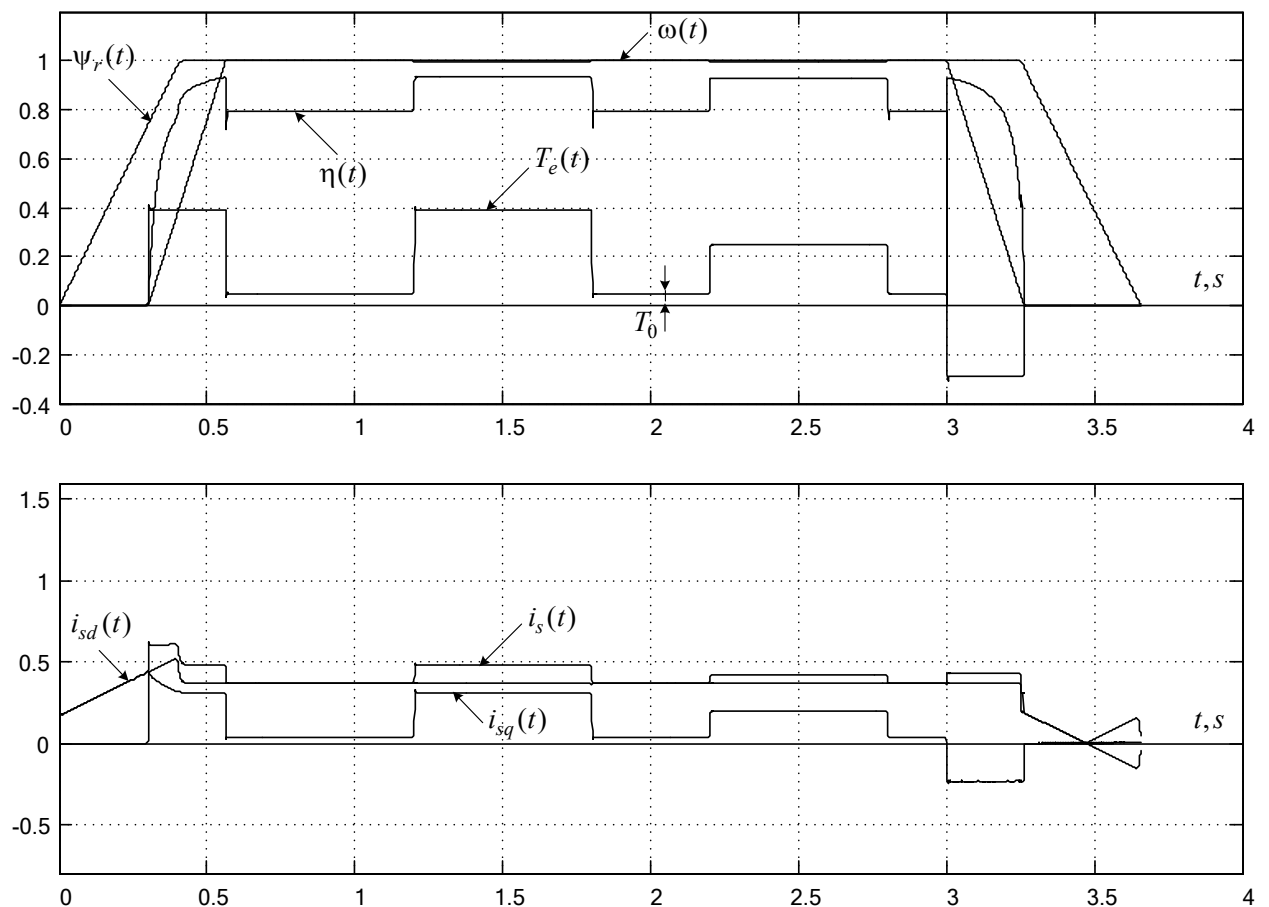


Рис. 3.6. Перехідні процеси в типовій системі векторного керування АД з постійним потокозчепленням

В системах із застосуванням стратегії МТРА ККД при зменшенні навантаження спочатку зменшується, але потім відновлюється за рахунок зміни потокозчеплення ротора.

При аналізі енергоефективності досліджуваних систем слід мати на увазі, що на регулювання потокозчеплення ротора також витрачається електроенергія. Тому, якщо зміни навантаження відбуваються через невеликі проміжки часу, то сумарні втрати енергії в міді при оптимальному керуванні можуть навіть збільшитися, не зважаючи на відновлення ККД. Це пов'язано з тим, що розглянута стратегія оптимізація справедлива тільки для статичних режимів. Отже її доцільно застосовувати тільки для електроприводів з тривалими режимами роботи (турбомеханізми, вантажопідйомні механізми тощо).

Схеми рис. 3.2 та рис. 3.4 легко трансформуються у схеми, що мінімізують сумарні втрати. Це виконується множенням сигналів i_{sd}^* та ψ_r^* на $\sqrt{\lambda}$, а сигналу i_{sq}^* – на $1/\sqrt{\lambda}$.

3.2 Завдання

1. Зберіть модель асинхронного двигуна в ортогональній системі координат dq , орієнтованій за потокозчепленням ротора, за рівняннями (3.1).

2. Розрахуйте усі необхідні для моделювання данні для двигуна з такими параметрами: $P_n = 2,2$ кВт; $U_n = 220$ В; $z_p = 1$; $J = 0,021$ кг/м²; $\eta = 83\%$; $I_{sn} = 4,6$ А; $T_n = 7,04$ Нм; $R_s = 3,54$ Ом; $R_r = 2,28$ Ом; $L_m = 0,41$ Гн; $L_{\sigma\sigma} = 0,007$ Гн; $L_{r\sigma} = 0,013$ Гн; $s_n = 0,0053$.

3. Зберіть типову модель системи векторного керування швидкості, систему, керовану за стратегією МТРА (рис. 3.2) та систему, що мінімізує втрати в міді в усталеному режимі.

4. Обидві останні системи доповніть вузлом обмеження потокозчеплення ротора. Розрахуйте для них максимальні значення електромагнітного моменту, які обмежують діапазон регулювання потокозчеплення.

5. Додайте до кожної моделі блоки реєстрації теплових втрат і ККД.

6. Отримайте графіки перехідних процесів кожної системи, аналогічні графікам, зображеним на рис. 3.3, 3.4 та 3.6.

7. Порівняйте динамічні та енергетичні характеристики досліджуваних систем. За результатами виконаних досліджень сформулюйте висновки.

3.3 Методичні вказівки та рекомендації

1. При виконанні пункту 1 завдання скористайтесь моделлю, поданою на рис. 3.6. Зверніть увагу на спосіб запобігання ділення на 0 при визначенні абсолютного ковзання.

2. При виконанні пункту 2 завдання знехтуйте прямими та зворотними перетвореннями координат, тобто застосовуйте у якості об'єкту керування модель рис. 3.6.

3. При розробці моделей систем векторного керування АД знехтуйте інерційністю перетворювача частоти та покладіть його коефіцієнт підсилення рівним 1.

4. Синтезуйте регулятори струму, регулятор швидкості та регулятор потокозчеплення ротора методом підпорядкованого керування [13, 14] при нехтуванні перехресними та зворотними зв'язками моделі АД в системі координат dq .

5. Компенсуйте внутрішні перехресні та зворотні зв'язки АД шляхом заведення цих зв'язків з протилежними знаками на входи моделей перетворювача в системі dq .

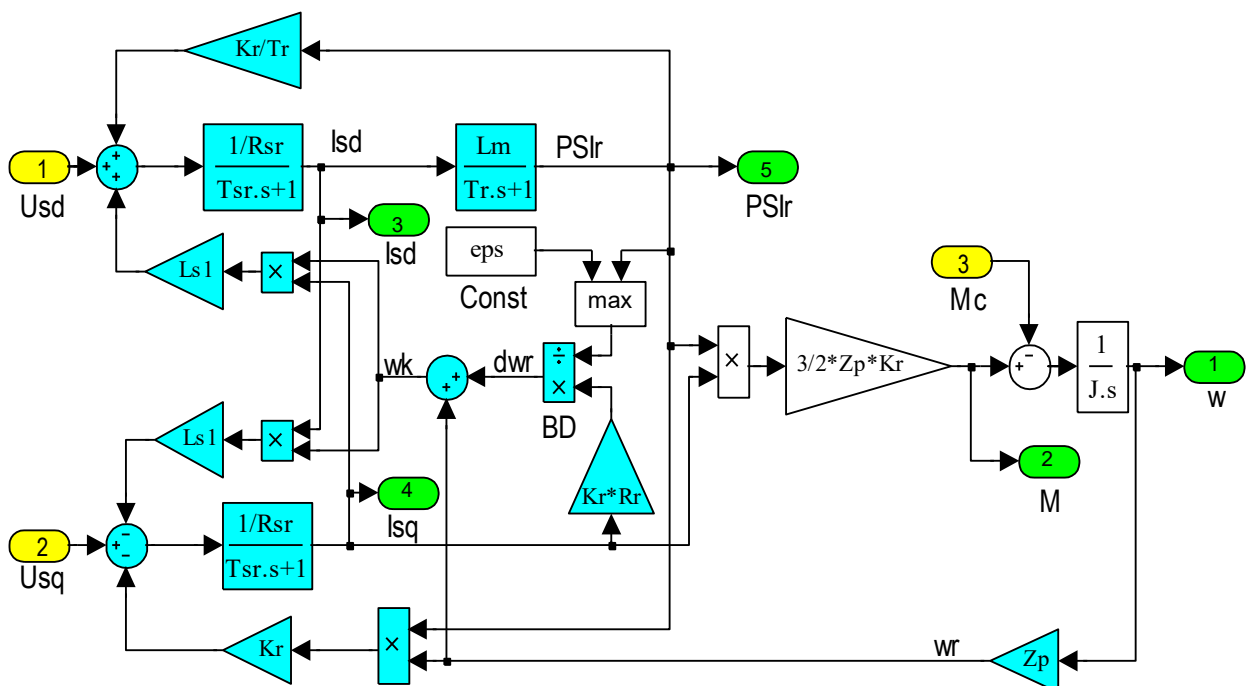


Рис. 3.6. Структурна модель асинхронного двигуна в ортогональній системі координат dq , орієнтованій за потокозчепленням ротора

3.4 Контрольні питання та завдання

1. Поясніть сенс стратегії керування «Максимальний момент на ампер». Яка функція при цьому мінімізується? Сформулюйте результат такої оптимізації.
2. Обґрунтуйте доцільність використання критерію «Мінімізація втрат у міді». Яка функція при цьому мінімізується? Сформулюйте результат цієї оптимізації. Чим він відрізняється від стратегії МТРА?
3. Поясніть структурну схему рис. 3.2.
4. Чи можна використовувати розглянуті оптимальні стратегії при навантаженнях, що перевищують номінальне? Якщо ні, то чому?
5. При яких умовах розглянуті стратегії зменшують сумарні втрати електроенергії в обмотках?

Практичне заняття 4

ОПТИМАЛЬНІ ЗАКОНИ НАМАГНІЧУВАННЯ ТА РОЗМАГНІЧУВАННЯ ВЕКТОРНО-КЕРОВАНОГО АСИНХРОННОГО ДВИГУНА В ПАУЗАХ ПОВТОРНО-КОРОТКОЧАСНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ

4.1 Теоретичні положення

4.1.1 Постановка задачі оптимального керування

В системах полеорієнтованого векторного керування (FOC) асинхронним приводом двигун спочатку намагнічують шляхом подачі сигналу завдання на потокозчеплення ротора ψ_r , або на потокоутворюючу складову струму статора i_{sd} , а потім приступають до регулювання механічних координат: моменту, швидкості або положення. При роботі електроприводу в напруженому повторно-короткочасному режимі, двигун під час паузи, як правило, не розмагнічують, що приводить до додаткових теплових втрат в обмотках статора у процесі підтримки потокозчеплення ротора на бажаному рівні.

При достатній тривалості пауз ці втрати можна зменшити за рахунок розмагнічування асинхронного двигуна (АД) на початку паузи і намагнічування його перед початком нового робочого циклу.

Метою практичного заняття є визначення оптимального за тепловими втратами закону регулювання потокозчеплення векторно-керованого АД під час розмагнічування та намагнічування його в зупиненому стані.

Спрощена структурна схема системи полеорієнтованого векторного керування АД при зупиненому двигуні в обертовій ортогональній системі координат dq , орієнтованій за вектором потокозчеплення ротора, зображена на рис. 4.1. В схемі використано такі позначення: РП – регулятор потокозчеплення; КРСd – замкнений контур регулювання d -складової струму статора; Ψ_r^* , i_{sd}^* – сигнали завдання на потокозчеплення ротора та потокоутворюючу складову струму статора; $\tau_r = L_r/R_r$ – стала часу ротора; L_r , R_r – індуктивність та активний опір ротора; $k_r = L_m/L_r$ – коефіцієнт магнітного зв'язку ротора; τ_i , τ_ψ – сталі часу інтегрування розімкнених контурів струму та потокозчеплення відповідно.

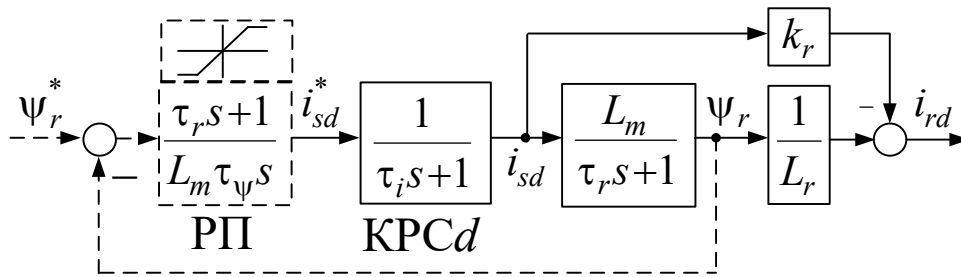


Рис. 4.1 – Структурна схема системи векторного керування АД при нерухомому двигуні

При прямому керуванні (DFOC) система складається з контуру потокозчеплення і підпорядкованого йому контуру струму, а при непрямому керуванні (IFOC) регулятор потокозчеплення відсутній.

Сумарні теплові втрати в обмотках статора і ротора, зумовлені потокоутворюючими складовими струмів статора та ротора, що підлягають мінімізації, обчислюються за формулою:

$$\Delta W = \int_0^{t_f} \Delta P(t) dt = 3 \int_0^{t_f} [R_s I_s^2(t) + R_r I_r^2(t)] dt = \frac{3}{2} \int_0^{t_f} [R_s i_{sd}^2(t) + R_r i_{rd}^2(t)] dt, \quad (4.1)$$

де ΔP , ΔW – потужність та енергія втрат відповідно; I_s , I_r – ефективні значення фазних струмів статора і ротора; i_{sd} , i_{rd} – потокоутворюючі складові струмів статора і ротора, які при нерухомому двигуні (за умов $i_{sq} = 0$, $i_{rq} = 0$) дорівнюють амплітудним значенням цих струмів, внаслідок чого $i_{sd} = \sqrt{2}I_s$, $i_{rd} = \sqrt{2}I_r$.

З точки зору теорії оптимального керування енергія втрат являє собою мінімізований функціонал, а потужність втрат – підінтегральну функцію цього функціоналу.

4.1.2 Розв'язання задачі оптимального керування розмагнічуванням та намагнічуванням АД

Щоб скористатися методом безумовної оптимізації Ейлера, виразимо струми статора і ротора через потокозчеплення ротора та його першу похідну.

Згідно з передавальною функцією

$$\frac{\Psi_r(s)}{i_{sd}(s)} = \frac{L_m}{\tau_r s + 1} \quad (4.2)$$

запишемо диференційне рівняння

$$i_{sd}(t) = \frac{1}{L_m} [\psi_r(t) + \tau_r \psi'_r(t)]. \quad (4.3)$$

З виразу потокозчеплення ротора через потокоутворюючі складові струмів

$$\psi_r = L_m i_{sd} + L_r i_{rd} \quad (4.4)$$

та з урахуванням (4.3) знаходимо i_{rd} :

$$i_{rd}(t) = \frac{1}{L_r} [\psi_r(t) - L_m i_{sd}(t)] = -\frac{\tau_r}{L_r} \psi'_r(t) = -\frac{\psi'_r(t)}{R_r}. \quad (4.5)$$

Після підстановки виразів (4.3) і (4.6) в підінтегральну функцію функціоналу (4.1) отримуємо

$$F = R_s i_{sd}^2 + R_r i_{rd}^2 = \frac{R_s}{L_m^2} (\psi_r^2 + 2\tau_r \psi_r \psi'_r + \tau_r^2 (\psi'_r)^2) + R_r \frac{\tau_r^2}{L_r^2} (\psi'_r)^2$$

Виконаємо приведення подібних:

$$\begin{aligned} \frac{R_s}{L_m^2} \tau_r^2 (\psi'_r)^2 + R_r \frac{\tau_r^2}{L_r^2} (\psi'_r)^2 &= \frac{\tau_r^2}{L_m^2} \left(R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r^2} \right) (\psi'_r)^2 = \\ &= \frac{\tau_r^2}{L_m^2} (R_s + R_r k_r^2) (\psi'_r)^2 = \frac{\tau_r^2 R_s}{L_m^2} \cdot \frac{R_s + R_r k_r^2}{R_s} (\psi'_r)^2 \end{aligned}$$

Позначивши

$$R_{sr} = R_s + k_r^2 R_r, \quad \lambda^2 = \frac{R_{sr}}{R_s} = 1 + k_R, \quad k_R = \frac{k_r^2 R_r}{R_s}, \quad (4.6)$$

остаточно маємо

$$F = R_s i_{sd}^2(t) + R_r i_{rd}^2(t) = \frac{R_s}{L_m^2} \cdot [\psi_r^2 + 2\tau_r \psi_r \psi'_r + \lambda^2 \tau_r^2 (\psi'_r)^2]. \quad (4.7)$$

Рівняння Ейлера, розв'язок якого забезпечує екстремум функціонала (4.7), має такий загальний вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial \psi_r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \psi'_r} \right) = 0. \quad (4.8)$$

Знаходимо послідовно похідні останнього рівняння для функції (4.7):

$$\frac{\partial F}{\partial \psi_r} = \frac{2R_s}{L_m^2} (\psi_r + \tau_r \psi'_r), \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \psi'_r} = \frac{2R_s}{L_m^2} (\tau_r \psi_r + \lambda^2 \tau_r^2 \psi'_r), \quad (4.10)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \psi'_r} \right) = \frac{2R_s}{L_m^2} \cdot (\tau_r \psi'_r + \lambda^2 \tau_r^2 \psi''_r). \quad (4.11)$$

Після підстановки (4.9)-(4.11) у (4.8) і деяких перетворень отримуємо однорідне диференційне рівняння (ДР)

$$\psi_r - \lambda^2 \tau_r^2 \psi''_r = 0. \quad (4.12)$$

Позначимо $\tau_o^2 = \lambda^2 \tau_r^2$, звідки маємо

$$\tau_o = \lambda \tau_r \quad (4.13)$$

– стала часу оптимального перехідного процесу;

ДР (4.12) відповідає характеристичне рівняння

$$\tau_o^2 s^2 - 1 = (\tau_o s + 1)(\tau_o s - 1) = 0 \quad (4.14)$$

з двома дійсними полюсами

$$p_{1,2} = \pm \frac{1}{\tau_o} = \pm \Omega_o, \quad (4.15)$$

через які можна записати формули перехідних процесів при розмагнічуванні і намагнічуванні двигуна, як розв'язок ДР (4.12):

$$\psi_r^{\text{розм}}(t) = C_1 e^{-\Omega_o t} + C_2 e^{\Omega_o t}, \quad (4.16)$$

$$(\psi_r^{\text{розм}})'(t) = -C_1 \Omega_o e^{-\Omega_o t} + C_2 \Omega_o e^{\Omega_o t}. \quad (4.17)$$

Невідомі константи C_1 та C_2 у рівняннях (4.16) та (4.17) знаходимо з граничних умов

$$\psi_r^{\text{розм}}(0) = \psi_{r0} = C_1^{\text{розм}} + C_2^{\text{розм}}, \quad \psi_r^{\text{розм}}(t_f) = 0 = C_1^{\text{розм}} e^{-\Omega_o t_f} + C_2^{\text{розм}} e^{\Omega_o t_f}, \quad (4.18)$$

$$\psi_r^{\text{нам}}(0) = 0 = C_1^{\text{нам}} + C_2^{\text{нам}}, \quad \psi_r^{\text{нам}}(t_f) = \psi_{r0} = C_1^{\text{нам}} e^{-\Omega_o t_f} + C_2^{\text{нам}} e^{\Omega_o t_f}, \quad (4.19)$$

де

$$\psi_{r0} = L_m i_{sd0} \quad (4.20)$$

– потокозчеплення холостого ходу ротора, а i_{sd0} – струм холостого ходу статора (струм намагнічування).

Після підстановки виразів шуканих констант у (4.16) та (4.17) отримуємо такі **закони оптимального керування**:

$$\Psi_r^{\text{розм}}(t) = \Psi_{r0} \frac{\text{sh}(\Omega_o(t_f - t))}{\text{sh}(\Omega_o t_f)}, \quad \Psi_r^{\text{нам}}(t) = \Psi_{r0} \frac{\text{sh}(\Omega_o t)}{\text{sh}(\Omega_o t_f)}. \quad (4.20)$$

Слід нагадати, що

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1,$$

$$\text{sh}(2x) = 2\text{sh}(x)\text{ch}(x), \quad \text{ch}(2x) = \text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x).$$

Підстановкою (4.20) у (4.7) з подальшим інтегруванням згідно з (4.1) одержимо вирази для **енергії втрат при оптимальному керуванні**:

$$\Delta W_{\text{розм}} = \Delta W_c \frac{\lambda \text{sh}(2\Omega_o t_f) - \text{ch}(2\Omega_o t_f) + 1}{2\text{sh}^2(\Omega_o t_f)} = \Delta W_c [\lambda \cdot \text{cth}(\Omega_o t_f) - 1], \quad (4.21)$$

$$\Delta W_{\text{нам}} = \Delta W_c \frac{\lambda \text{sh}(2\Omega_o t_f) + \text{ch}(2\Omega_o t_f) - 1}{2\text{sh}^2(\Omega_o t_f)} = \Delta W_c [\lambda \cdot \text{cth}(\Omega_o t_f) + 1], \quad (4.22)$$

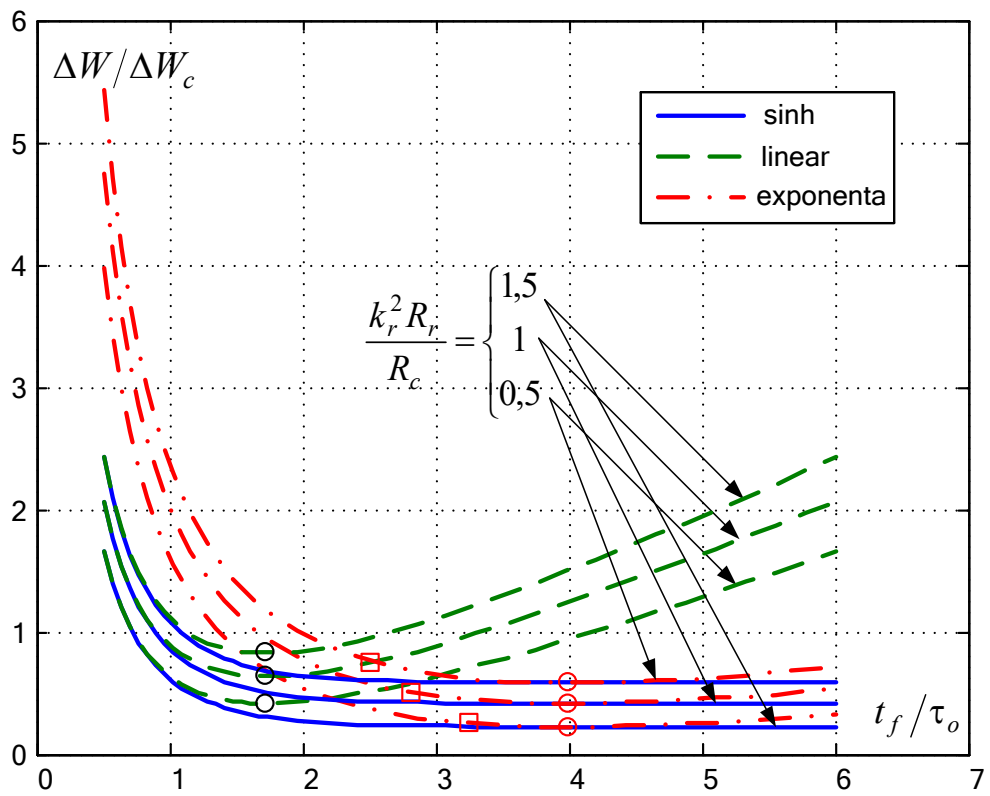
де

$$\Delta W_c = \frac{3}{2} \cdot \frac{R_s \Psi_{r0}^2 \tau_r}{L_m^2} = \frac{3}{2} R_s i_{sd0}^2 \tau_r, \quad i_{sd0} = \frac{\Psi_{r0}}{L_m}. \quad (4.23)$$

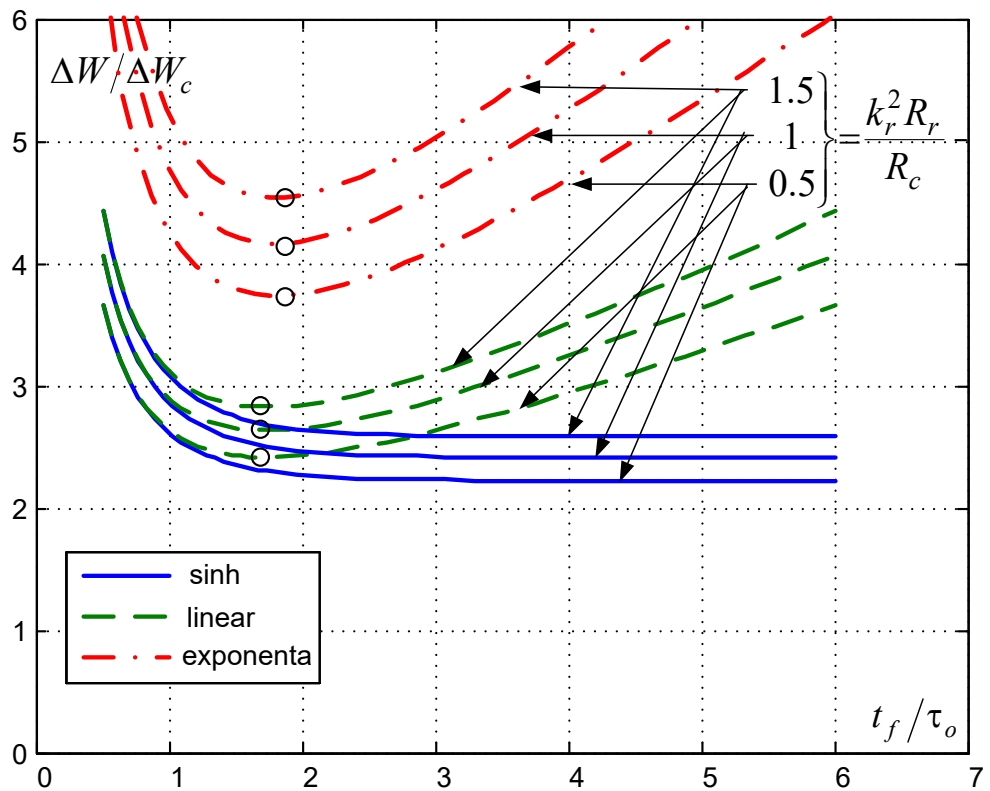
Порівнюючи вирази (4.21) та (4.22), можна довести, що різниця між втратами при намагнічуванні в будь-який момент часу перевищує втрати при розмагнічуванні на $2\Delta W_c$.

Слід зауважити, що при формуванні законів зміни потокозчеплення за рівняннями (4.20) необхідно обов'язково обмежити керований сигнал на рівні Ψ_{r0} зверху при намагнічуванні та на рівні 0 знизу при розмагнічуванні.

Графіки залежності втрат при намагнічуванні та розмагнічуванні від часу перехідного процесу, що забезпечують їх мінімізацію, зображені на рис. 4.2 суцільними лініями.



a)



б)

Рис. 4.2. Діаграми теплових втрат в обмотках статора і ротора нерухомого асинхронного двигуна при його розмагнічуванні (а) та намагнічуванні (б)

Аналіз виразів (4.21) і (4.22) показує, що вони прагнуть до мінімуму при $t_f \rightarrow \infty$:

$$\Delta W_{\text{розм min}} = \Delta W_c (\lambda - 1), \quad (4.24)$$

$$\Delta W_{\text{нам min}} = \Delta W_c (\lambda + 1). \quad (4.25)$$

Але практично втрати майже не змінюються при $t_f \gg 2.5T_o$.

Слід зауважити, що при формуванні законів зміни поточкозчеплення за рівняннями (4.20) необхідно обов'язково обмежити керований сигнал на рівні ψ_{r0} зверху при намагнічуванні та на рівні 0 знизу при розмагнічуванні.

4.1.3 Розв'язання задач квазіоптимального керування розмагнічуванням та намагнічуванням АД

Враховуючи відносну складність формування синустіперболічних законів зміни поточкозчеплення, виникає *задача квазіоптимального (майже оптимального) керування: знайти часові параметри для більш простих в реалізації законів керування з умов мінімізації втрат у міді*. До таких законів належать насамперед експоненціальний та лінійний закон. Для формування експоненціального закону достатньо пропустити стрибкоподібний сигнал через аперіодичну ланку, а для формування лінійного – через пристрій, що називають задатчиком інтенсивності. Отже, квазіоптимальним будемо називати задане керування з оптимальними параметрами на відміну від оптимального керування, коли ми шукаємо рівняння екстремалі, а не її параметри.

4.1.3.1 Пошук оптимальних стали часу експоненціальних законів розмагнічування та намагнічування АД

Перехідні процеси розмагнічування та намагнічування за експоненціальним законом та їх похідні описуються рівняннями

$$\psi_{r \text{ exp}}^{\text{розм}}(t) = \psi_{r0} e^{-\Omega_e t}, \quad \psi_{r \text{ exp}}^{\text{нам}}(t) = \psi_{r0} (1 - e^{-\Omega_e t}), \quad (4.26)$$

$$(\psi_{r \text{ exp}}^{\text{розм}})'(t) = -\Omega_e \psi_{r0} e^{-\Omega_e t}, \quad (\psi_{r \text{ exp}}^{\text{нам}})'(t) = \Omega_e \psi_{r0} e^{-\Omega_e t}, \quad (4.27)$$

де $\Omega_e = 1/\tau_e$, τ_e – стала часу експоненти.

Визначимо миттєві та інтегральні втрати для цих випадків:

$$P_{\text{exp}}^{\text{розм}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R_s \Psi_{r0}^2 e^{-2\Omega_e t}}{L_m^2} \cdot [1 - 2\tau_r \Omega_e + \tau_o^2 \Omega_e^2],$$

$$\Delta W_{\text{exp}}^{\text{розм}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R_s \Psi_{r0}^2}{L_m^2} \cdot [1 - 2\tau_r \Omega_e + \tau_o^2 \Omega_e^2] \int_0^{\infty} e^{-2\Omega_e t} dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{R_s \Psi_{r0}^2}{2L_m^2 \Omega_e} [1 - 2\tau_r \Omega_e + \tau_o^2 \Omega_e^2]. \quad (4.28)$$

$$P_{\text{exp}}^{\text{нам}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R_s \Psi_{r0}^2}{L_m^2} \cdot [1 + 2(\tau_r \Omega_e - 1)e^{-\Omega_e t} + (1 - 2\tau_r \Omega_e + \tau_o^2 \Omega_e^2)e^{-2\Omega_e t}],$$

$$\Delta W_{\text{exp}}^{\text{нам}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R_s \Psi_{r0}^2}{L_m^2} \cdot \int_0^{4/\Omega_e} [1 + 2(\tau_r \Omega_e - 1)e^{-\Omega_e t} + (1 - 2\tau_r \Omega_e + \tau_o^2 \Omega_e^2)e^{-2\Omega_e t}] dt.$$

Після інтегрування останнього виразу і деяких перетворень отримуємо:

$$\Delta W_{\text{exp}}^{\text{нам}} = \frac{\Delta W_c}{2} \cdot \left[\frac{(5 + 4e^{-4} - e^{-8})}{\tau_r \Omega_e} + 2(1 - 2e^{-4} + e^{-8}) + \lambda^2 \tau_r \Omega_e (1 - e^{-8}) \right]. \quad (4.29)$$

Для визначення оптимальних сталих часу знаходимо похідні від енергії втрат і прирівнюємо їх до нуля. Після спрощень маємо:

$$\Omega_{e \text{opt}}^{\text{розм}} = 1/\tau_o, \quad \tau_{e \text{opt}}^{\text{розм}} = \tau_o; \quad (4.30)$$

$$W_{\text{expopt}}^{\text{розм}} = \Delta W_c (\lambda - 1); \quad (4.31)$$

$$\Omega_{e \text{opt}}^{\text{нам}} = \frac{1}{\tau_o} \sqrt{\frac{5 + 4e^{-4} - e^{-8}}{1 - e^{-8}}} \approx 2.25/\tau_o, \quad \tau_{e \text{opt}}^{\text{нам}} = \tau_o \sqrt{\frac{1 - e^{-8}}{5 + 4e^{-4} - e^{-8}}} \approx 0.44\tau_o \quad (4.32)$$

$$W_{\text{expopt}}^{\text{нам}} = \Delta W_c \left[\lambda \sqrt{(5 + 4e^{-4} - e^{-8})(e^{-8} - 1)} + (1 - 2e^{-4} + e^{-8}) \right] \approx \Delta W_c (2.25\lambda - 0.96). \quad (4.33)$$

Для побудови графіків $(\Delta W/\Delta W_c)(t_f/\tau_o)$ при експоненціальних законах розмагнічування та намагнічування за допомогою підстановки $\Omega_e \approx 4/t_f$ перетворимо формули (4.28) та (4.29) до вигляду

$$\Delta W_{\text{exp}}^{\text{розм}} = \Delta W_c \left[\frac{1}{2\tau_r \Omega_e} - 1 + \frac{\lambda^2 \tau_r \Omega_e}{2} \right] = \Delta W_c \left[\frac{2t_f}{\tau_r} - 1 + \frac{2\lambda^2 \tau_r}{t_f} \right] = \Delta W_c \left[\frac{\lambda}{8} \cdot \frac{t_f}{\tau_o} - 1 + 2\lambda \frac{\tau_o}{t_f} \right]. \quad (4.34)$$

$$\Delta W_{\text{exp}}^{\text{нам}} = \Delta W_c \cdot \left[\frac{4}{\tau_r \Omega_e} + \frac{2(\tau_r \Omega_e - 1)}{\tau_r \Omega_e} (e^{-4} - 1) - \frac{(1 - 2\tau_r \Omega_e + \tau_o^2 \Omega_e^2)}{2\tau_r \Omega_e} (e^{-8} - 1) \right] =$$

$$= \Delta W_c \cdot \left[\lambda \frac{t_f}{\tau_o} - 2 \left(1 - \frac{\lambda t_f}{4 \tau_o} \right) (e^{-4} - 1) - \left(\frac{\lambda t_f}{8 \tau_o} - 1 + 2\lambda \frac{\tau_o}{t_f} \right) (e^{-8} - 1) \right]. \quad (4.35)$$

Залежності теплових втрат від часу розмагнічування експоненціального закону керування наведені на рис. 4.2 штрих-пунктирними лініями.

Із наведених графіків видно, що експоненціальний закон намагнічування (4.27) характеризується значно більшими втратами, ніж синусгіперболічний, а експоненціальний закон розмагнічування (4.26) з оптимальною сталою часу (4.30) забезпечує мінімальні втрати (4.31).

Можна показати, що *експоненціальний закон розмагнічування з оптимальною сталою часу забезпечує навіть менші теплові втрати, ніж при миттєвому розмиканні кола статора, при якому поточозчеплення змінюється зі сталою часу τ_r .*

$$\Psi_r^{\text{розм}}(t) = \Psi_{r0} e^{-t/\tau_r} = \Psi_{r0} e^{-\Omega_r t}, \quad \Omega_r = 1/\tau_r, \quad (4.31)$$

а втрати мають значення

$$\Delta W_r = \Delta W_c (1 - 2 + \lambda^2) = \Delta W_c (\lambda^2 - 1). \quad (4.32)$$

Знайдемо, за яких умов втрати ΔW_r перевищують оптимальні:

$$\frac{\Delta W_r}{\Delta W_{\text{розм min}}} = \frac{\lambda^2 - 1}{(\lambda - 1)} = \lambda + 1 > 1. \quad (4.33)$$

Нерівність (4.33) є тотожною.

На рис. 4.3 наведено графік залежності відношення теплових втрат на розмагнічування при стрибкоподібному зменшенні i_{sd} до 0 до втрат при оптимальному експоненціальному керуванні від параметру k_R , що демонструє підвищення ефективності оптимального керування при збільшенні поточозчеплення ротора. На рис. 4.4. подано сімейство графіків залежності теплових втрат в обмотках двигуна при експоненціальній зміні поточозчеплення ротора від сталої часу експоненціального закону при різних значеннях параметру k_R , які доводять наявність мінімуму у наведених характеристиках та підтверджують результати аналітичних досліджень.

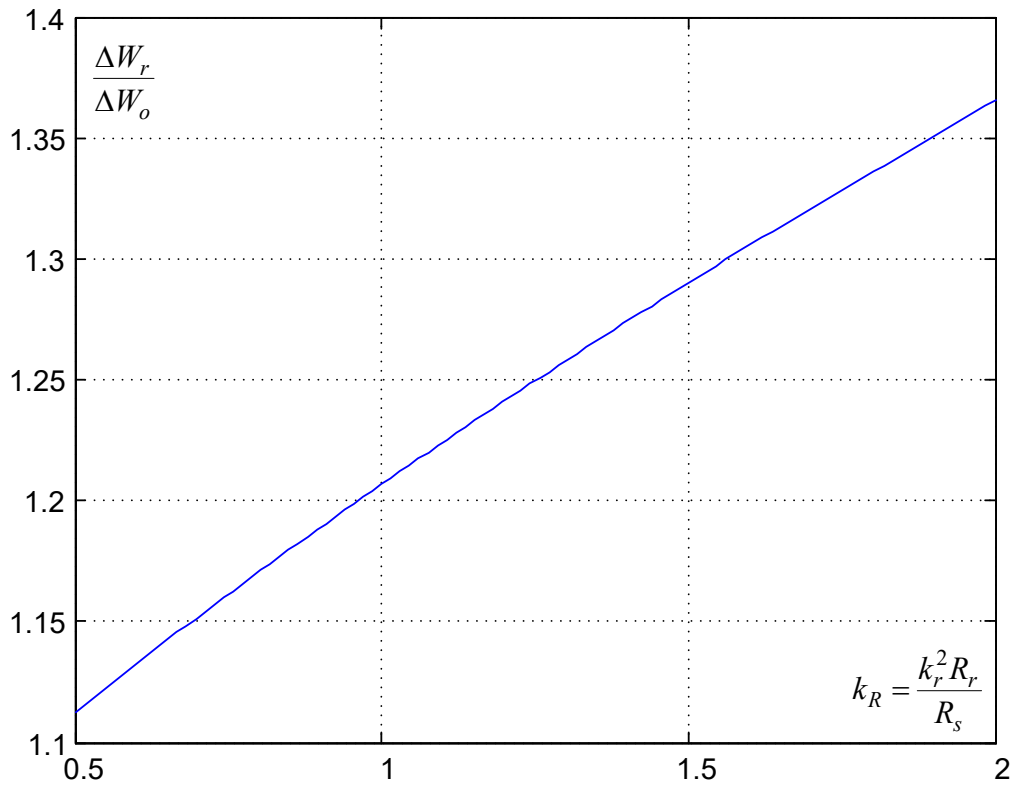


Рис. 4.3. Залежність відношення теплових втрат на розмагнічування при стрибкоподібному зменшенні i_{sd} до 0 до втрат при оптимальному експоненціальному керуванні від параметру k_R

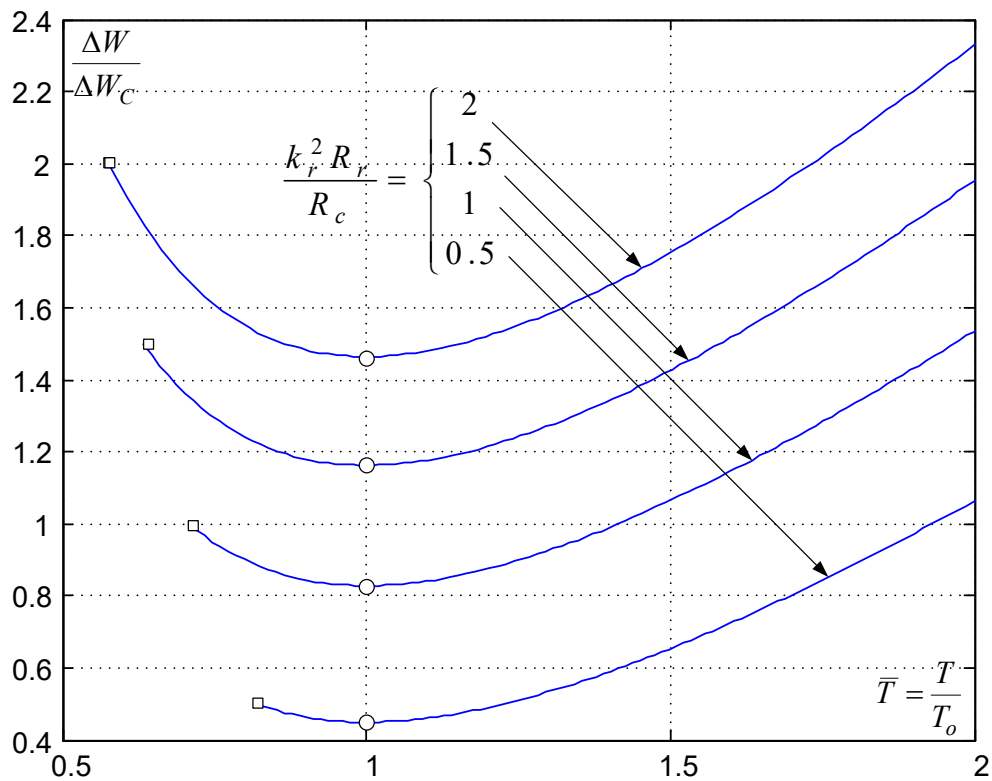
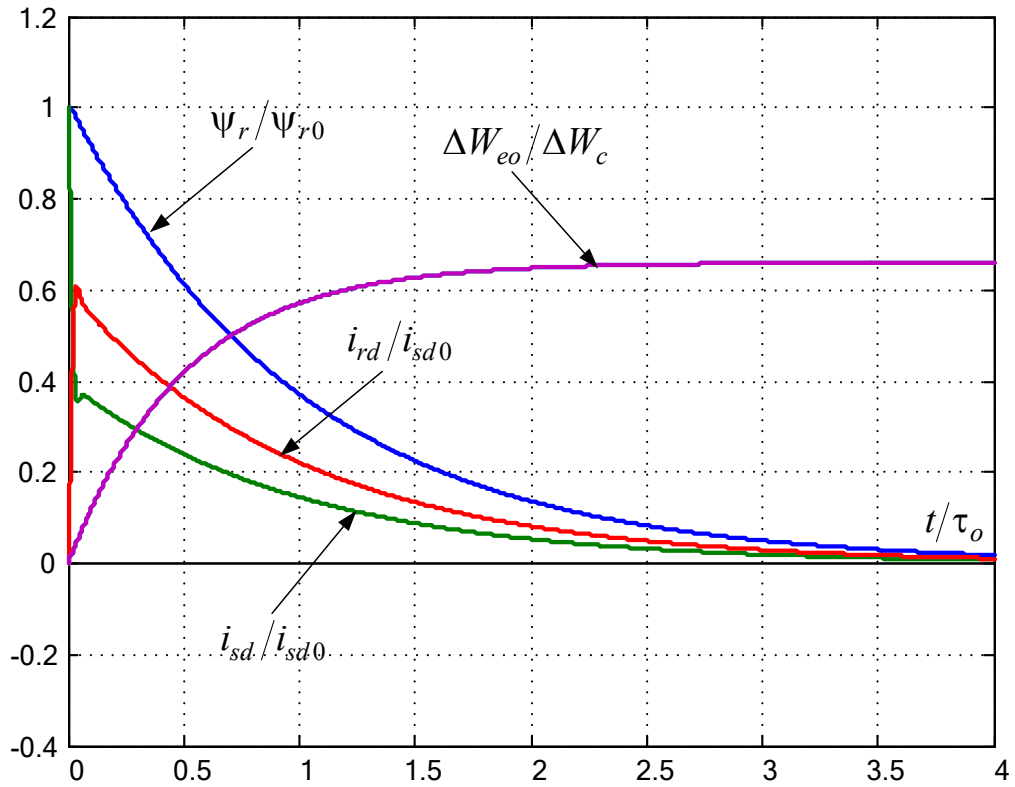
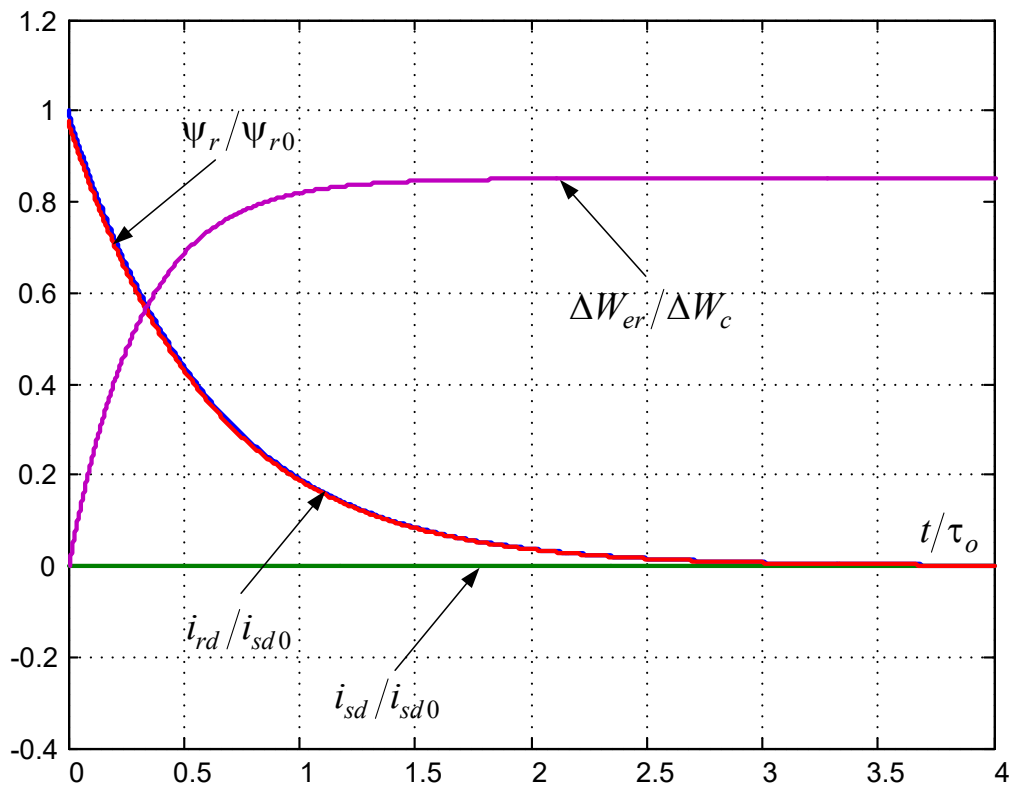


Рис. 4.4. Графіки залежностей теплових втрат від сталої часу експоненціального перехідного процесу розмагнічування

Перехідні процеси при розмагнічуванні двигуна за експоненціальним законом зміни потокозчеплення ротора зображені на рис. 4.5.



a)



б)

Рис. 4.5 Перехідні процеси при експоненціальному розмагніченні нерухомого двигуна при $\tau_e = \tau_0 = \lambda \tau_r$ (а) і $\tau_e = \tau_r$ (б)

Як бачимо, при оптимальному керуванні розмагнічування відбувається дещо повільніше, але з меншими втратами.

4.1.3.2 Пошук оптимального часу намагнічування та розмагнічування АД при зміні поточозчеплення ротора за лінійним законом

Процеси розмагнічування та намагнічування АД при зміні поточозчеплення ротора за лінійним законом описуються рівняннями

$$\psi_{r lin}^{розм}(t) = \psi_{r0} \left(1 - \frac{t}{t_f}\right), \quad \psi_{r lin}^{нам}(t) = \psi_{r0} \frac{t}{t_f}, \quad (4.34)$$

Втрати (4.1) зі врахуванням (4.3) та (4.5) для досліджуваного випадку (4.34) запишуться як

$$\Delta W_{lin}^{розм} = \Delta W_c \left(\frac{\lambda \tau_o}{t_f} - 1 + \frac{\lambda t_f}{3\tau_o} \right), \quad \Delta W_{lin}^{нам} = \Delta W_c \left(\frac{\lambda \tau_o}{t_f} + 1 + \frac{\lambda t_f}{3\tau_o} \right). \quad (4.35)$$

Аналіз отриманих виразів на екстремум показує, що мінімум втрат досягається при

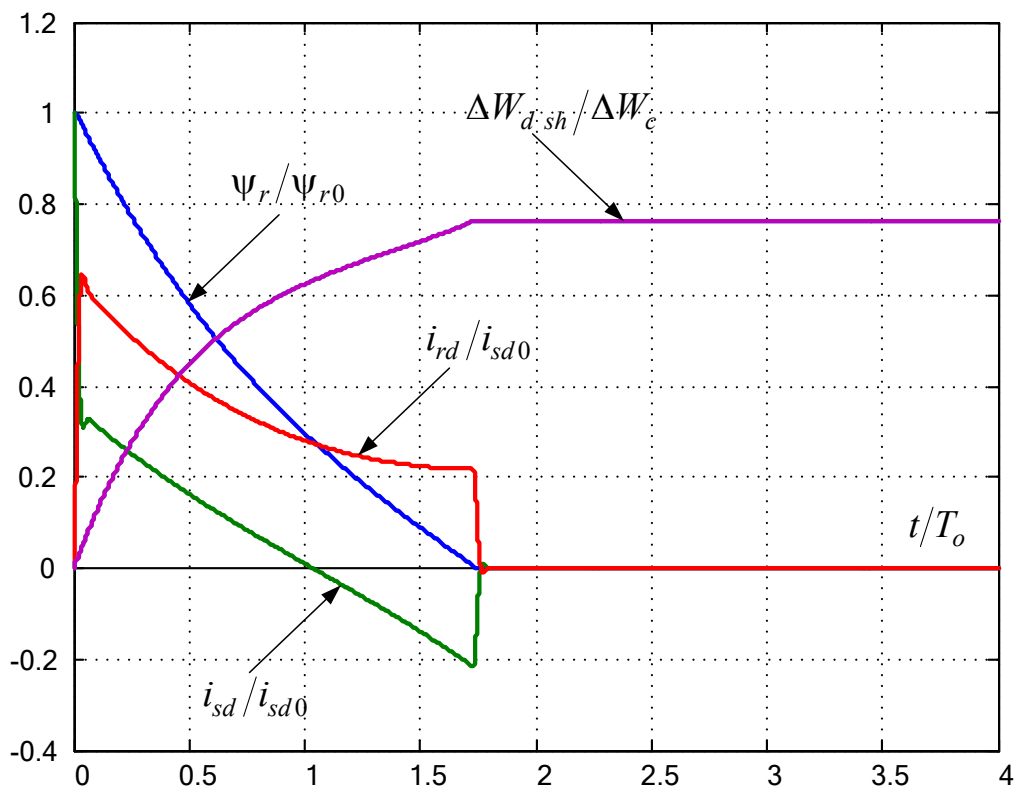
$$t_f = t_{folin} = \sqrt{3} \lambda \tau_r = \sqrt{3} \tau_o. \quad (4.36)$$

Величини мінімізованих втрат складають

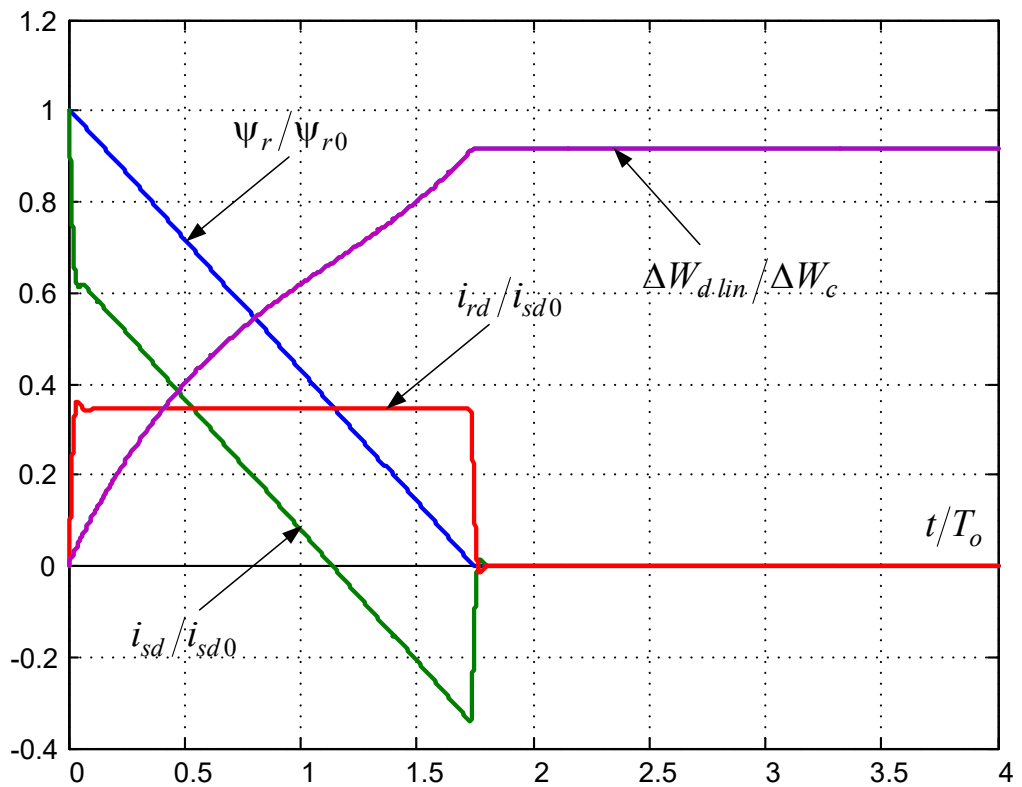
$$\Delta W_{lin min}^{розм} = \Delta W_c \left(\frac{2\lambda}{\sqrt{3}} - 1 \right), \quad \Delta W_{lin min}^{нам} = \Delta W_c \left(\frac{2\lambda}{\sqrt{3}} + 1 \right). \quad (4.37)$$

Графіки втрат при лінійному намагнічуванні та розмагнічуванні АД у функції тривалості перехідного процесу показані на рис. 4.2 пунктирними лініями. З аналізу цих графіків випливає, що при $t_f < \tau_o$ втрати при лінійному та синусгіперболічному законах зміни поточозчеплення ротора практично збігаються. При збільшенні часу перехідного процесу перевагу слід віддати синусгіперболічному закону. Максимальна тривалість намагнічування та розмагнічування має складати $t_{f max} = 4\tau_o$. У цьому випадку розмагнічувати двигун краще всього за експоненціальним законом.

Графіки перехідних процесів при лінійному та синусгіперболічному розмагнічуванні показані на рис. 4.6, а такі ж графіки при намагнічуванні – на рис. 4.7.

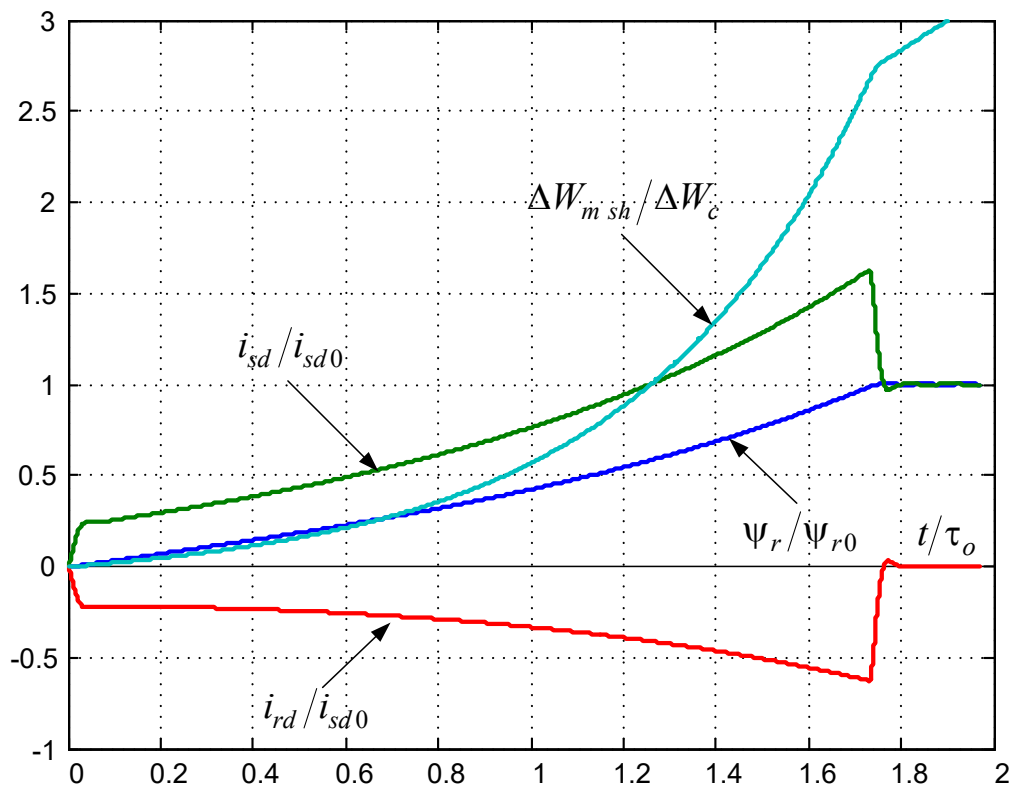


a)

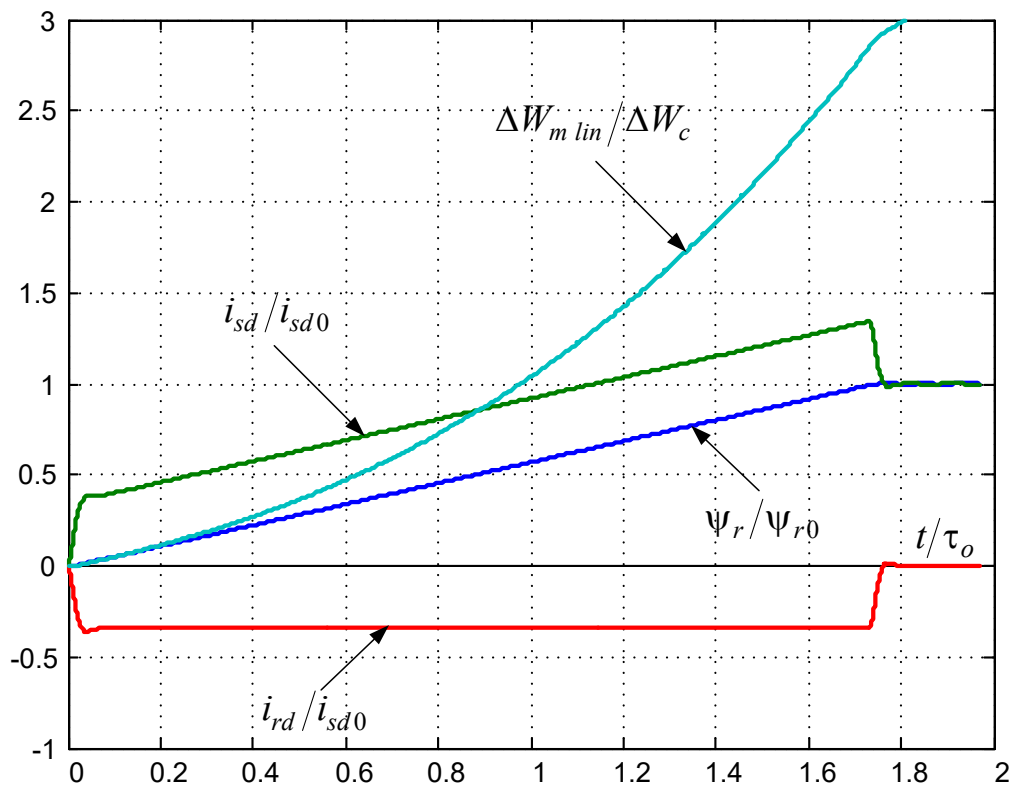


б)

Рис. 4.6. Перехідні процеси при синусгіперболічному (а) та лінійному (б) розмагніченні нерухомого двигуна



a)



б)

Рис. 4.7. Перехідні процеси при синусгіперболічному (а) та лінійному (б) намагнічуванні нерухомого двигуна

В обох випадках тривалість перехідного процесу відповідає мінімальним втратам при лінійному законі (4.36). Наведені графіки наочно демонструють переваги і недоліки кожного з досліджуваних законів керування. Для порівняння на рис. 4.8 приведені перехідні процеси при стрибкоподібній зміні завдання на потокоутворючу складову струму статора.

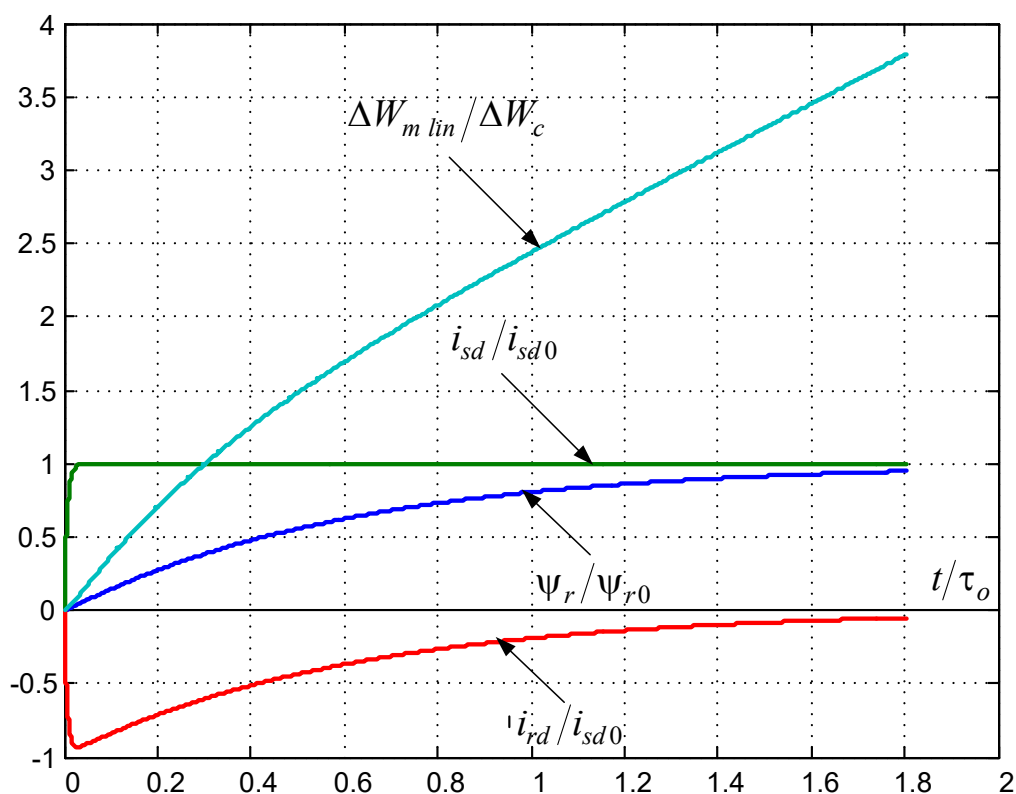


Рис. 4.8. Перехідні процеси при стрибкоподібній зміні завдання на потокоутворючу складову струму статора

Основні результати досліджень зведені в табл. 4.1.

Щоб оцінити доцільність керування потокозчепленням ротора в паузах повторнокороткочасного режиму, порівняємо втрати при підтримці потокозчеплення на сталому рівні ΔW_0 зі втратами при його оптимальному керуванні $\Delta W_\Sigma = \Delta W_o^{розм} + \Delta W_o^{нам}$ у функції тривалості паузи t_p .

$$\Delta W_0 = \frac{3}{2} i_{sd0}^2 R_s t_p = \Delta W_c \frac{t_p}{\tau_r}. \quad (4.38)$$

Таблиця 4.1

$\Psi_r(t)/\Psi_{r0}$	$\Delta W(t_f)/\Delta W_c$	t_{f0}/τ_o	$\Delta W_o(\lambda)/\Delta W_c$
Розмагнічування			
$\frac{\text{sh}(\Omega_o(t_f - t))}{\text{sh}(\Omega_o t_f)}$	$\lambda \cdot \text{cth}(\Omega_o t_f) - 1$	$2,5 \div \infty$	$\lambda - 1$
$e^{-\Omega_e t}$, $\Omega_e = \frac{1}{\tau_e} \approx \frac{4}{t_f}$	$\left(\frac{\lambda t_f}{8\tau_o} - 1 + \frac{2\lambda\tau_o}{t_f} \right)$	$3 \div 5$	$\lambda - 1$
$1 - \frac{t}{t_f}$	$\frac{\lambda\tau_o}{t_f} - 1 + \frac{\lambda t_f}{3\tau_o}$	$\sqrt{3} \approx 1.73$	$\frac{2\lambda}{\sqrt{3}} - 1 \approx 1.15\lambda - 1$
Намагнічування			
$\frac{\text{sh}(\Omega_o t)}{\text{sh}(\Omega_o t_f)}$	$\lambda \cdot \text{cth}(\Omega_o t_f) + 1$	∞	$\lambda + 1$
$1 - e^{-\Omega_e t}$, $\Omega_e = \frac{1}{\tau_e} \approx \frac{4}{t_f}$	$\left(\frac{\lambda t_f}{8\tau_o} - 1 + \frac{2\lambda\tau_o}{t_f} \right)$	1.77	$2.25\lambda + 0.96$
$1 - \frac{t}{t_{dl}}$	$\frac{\lambda\tau_o}{t_f} + 1 + \frac{\lambda t_f}{3\tau_o}$	$\sqrt{3} \approx 1.73$	$\frac{2\lambda}{\sqrt{3}} + 1 \approx 1.15\lambda + 1$

Для синусгіперболічного закону використання формул (4.21) та (4.22) при $t_f = t_p/2$ дає результат

$$\Delta W_{\Sigma sh} = 2\Delta W_c \lambda \cdot \text{cth}\left(\frac{t_p}{2\tau_r}\right). \quad (4.39)$$

Для лінійного керування вирази (4.35) використовуються при $t_p < 2\sqrt{3}\tau_o$, а вирази (4.37) – при $t_p \geq 2\sqrt{3}\tau_o$:

$$\Delta W_{\Sigma lin} = \begin{cases} \Delta W_c \lambda \left(\frac{4\tau_r}{t_p} + \frac{t_p}{3\tau_r} \right) & \text{при } t_p < 2\sqrt{3}\tau_o \\ 4\Delta W_c \lambda / \sqrt{3} & \text{при } t_p \geq 2\sqrt{3}\tau_o \end{cases}. \quad (4.40)$$

Графіки $(\Delta W_o/\Delta W_{\Sigma})(t_p/\tau_o)$ зображені на рис. 4.9.

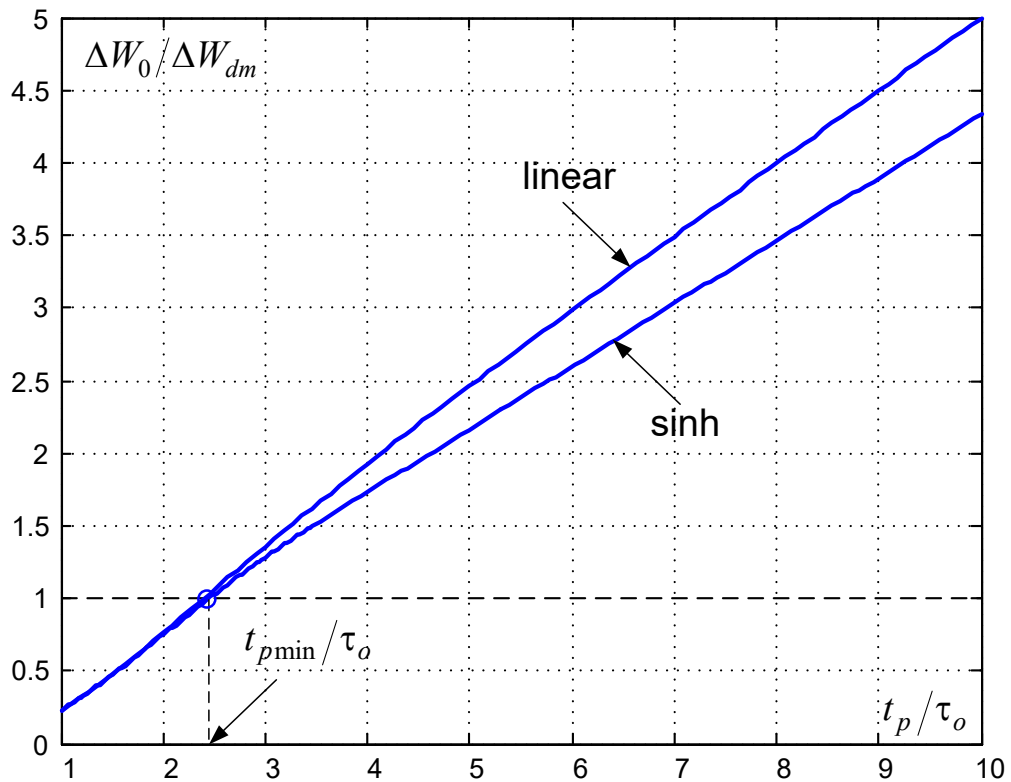


Рис. 4.9. Залежності відношення втрат на підтримку намагнічування АД до сумарних втрат на розмагнічування та намагнічування від тривалості паузи

Отже, мінімальна пауза, при якій розмагнічування та подальше намагнічування АД стає економічно вигідним, складає $t_{p\min} = 2,4\tau_0$. Аналіз параметрів АД показує, що для двигунів малої та середньої потужності цей час становить (0,2-0,5) с, а для потужних двигунів – (1-2) с.

4.2 Завдання

1. Модифікуйте модель АД з попередньої роботи для дослідження перехідних та енергетичних режимів при намагнічуванні та розмагнічуванні нерухомого двигуна.

2. Отримайте графіки перехідних процесів потокоутворюючих складових струмів статора та ротора, модуля потокозчеплення ротора та енергії теплових втрат при намагнічуванні та розмагнічуванні АД у таких умовах:

а) при стрибкоподібній зміні завдання на потокозчеплення ротора з обмеженням завдання на потокоутворюючу складову струму статора на рівні i_{sd0} , $2i_{sd0}$ та $4i_{sd0}$;

- b) при зміні завдання на потокозчеплення ротора за експоненціальним законом зі сталою часу τ_r , $\tau_o = \lambda \tau_r$ та $2\tau_o$;
- c) при зміні завдання за лінійним законом за час $\sqrt{3}\tau_o/2$, $\sqrt{3}\tau_o$ та $2\sqrt{3}\tau_o$;
- d) при зміні завдання за синусгіперболічним законом за час $\sqrt{3}\tau_o/2$, $\sqrt{3}\tau_o$ та $2\sqrt{3}\tau_o$.

3. Занесіть значення енергії теплових втрат для кожного з досліджуваних випадків у таблицю. Порівняйте їх між собою та зробіть висновки.

4.3 Методичні вказівки та рекомендації

1. Для обмеження ПІ-регулятора струму необхідно його деталізувати, тобто подати у вигляді суми пропорційної та інтегральної складових і обмежити на однаковому рівні виходи інтегратора та суматора. Для обмеження інтегратора не можна застосовувати послідовне з'єднання блоків *Integrator* та *Saturation*. Замість цього необхідно встановити обмеження у вікні параметрів інтегратора.

2. При моделюванні процесу розмагнічування необхідно задати початкові умови на усіх динамічних ланках моделі, для чого необхідно деталізувати динамічні ланки або скористатися бібліотекою динамічних ланок з початковими умовами. Інший підхід полягає в тому, щоб спочатку намагнітити двигун, а потім його розмагнітити. Але в цьому разі для вимірювання енергії втрат слід застосувати інтегратор зі скиданням у нуль на початку розмагнічування.

3. Для формування експоненціального закону зміни потокозчеплення з'єднайте послідовно блок *Step* та аперіодичну ланку. Для формування лінійного закону зручно використати послідовне з'єднання блоків *Clock* та *Look Up Table*, а для формування синусгіперболічного закону – блоків *Clock*, *Fn* та *Saturation*.

4.4 Контрольні питання та завдання

1. Поясніть сенс оптимального керування процесами намагнічування та розмагнічування нерухомого АД. Який функціонал при цьому мінімізується? Чим відрізняється постановка задачі «Мінімізація втрат у міді» для нерухомого АД та для АД, що рухається?

2. Якими математичними залежностями пов'язані між собою потокоутворюючі складові струмів статора і ротора та потокозчеплення ротора?

3. Яке рівняння використано для розв'язання задачі оптимального керування? Чому?

4. Який загальний вигляд повинна мати підінтегральна функція мінімізованого функціоналу, щоб пошук екстремалі можна було б здійснити методом Ейлера?

5. Запишіть рівняння Ейлера у загальному вигляді.

6. Запишіть рівняння оптимальних за тепловими втратами законів зміни потокозчеплення ротора при намагнічуванні та розмагнічуванні АД. При якій тривалості цих процесів втрати можна вважати мінімально можливими?

7. Яка стала часу експоненціального закону зміни потокозчеплення ротора забезпечує мінімальні втрати в міді при розмагнічуванні?

8. При якому темпі зміни потокозчеплення за лінійним законом забезпечується мінімізація втрат в обмотках АД при його намагнічуванні та розмагнічуванні?

9. Починаючи з якої тривалості паузи доцільно застосовувати намагнічування та розмагнічування АД.

Практичне заняття 5

ОПТИМАЛЬНІ СТРАТЕГІЇ КЕРУВАННЯ СИНХРОННИМИ ДВИГУНАМИ З ПОСТІЙНИМИ МАГНІТАМИ

5.1 Теоретичні положення

5.1.1 Загальна характеристика синхронних двигунів з постійними магнітами

В даний час великий інтерес представляють електроприводи на основі синхронного двигуна з постійними магнітами (СДПМ). Такий двигун являє собою машину змінного струму з трифазною обмоткою на статорі та постійними магнітами, встановленими на роторі.

СДПМ отримали значний поштовх у розвитку завдяки появі нових рідкоземельних матеріалів, які використовуються в якості постійних магнітів. У наш час виготовляються двигуни в діапазоні малих і середніх потужностей.

Основними сферами застосування даного типу двигунів є:

- промисловість (турбомеханізми, транспортне обладнання, підйомники, верстати, нафтовидобувні механізми, верстати, автоматика, робототехніка і т.д.);
- комунальна сфера (насоси, вентилятори, компресори, обладнання підприємств громадського харчування, пральні машини і т.д.);
- домашній побут (кухонне обладнання, іграшки і т.д.);
- інформаційне та офісне обладнання зокрема комп'ютери і принтери;
- транспортні засоби малої та середньої потужності (ліфти, ескалатори, тролейбуси, електромобілі, гібридні автомобілі, сігвеї, інвалідні візки);
- військова та космічна промисловість, медичне обладнання, інструмент, поновлювані джерела енергії, дослідницьке устаткування.

У порівнянні з АД та двигунами постійного струму (ДПС) СДПМ мають ряд переваг. Основні з них наступні:

- висока щільність потоку в повітряному зазорі;
- високе відношення потужність / вага;

- велике співвідношення електромагнітного моменту до моменту інерції;
- малий рівень пульсацій моменту у всьому діапазоні регулювання швидкості;
- можливість регулювання моменту при нульовій швидкості;
- висока перевантажувальна здатність за моментом;
- високий ККД завдяки малим втратам в роторі;
- покращені масогабаритні показники;
- простота охолодження;
- широкі можливості зміни пропорцій (від довгого циліндру до диску);
- простота виготовлення безредукторних приводів (двигун-колесо, двигун-інструмент).

За напрямком магнітного потоку розрізняють двигуни з *радіальним полем*, тобто поле спрямоване уздовж радіуса машини, і *аксіальним (осьовим) полем*, коли поле направлено вздовж осі ротора. Найбільш часто використовують машини з радіальним полем, які мають витягнутий циліндричний ротор, але двигуни з аксіальним полем мають свою нішу внаслідок своєї дископодібної форми, компактної конструкції та високої питомої потужності. Вони набули поширення в електромобілях, насосах, вентиляторах, ліфтах, верстатах, роботах. Виготовлення машин з аксіальним полем вимагає більших витрат у порівнянні з машинами з радіальним полем.

За розташуванням ротора бувають двигуни з *внутрішнім і зовнішнім ротором*. Найбільш поширеними є двигуни з внутрішнім ротором. Зовнішнє розташування ротора найчастіше використовується для механізмів, які вимагають сталості швидкості, наприклад, вентилятори та повітрорудки. В даному випадку високий момент інерції ротора є перевагою.

При установці магнітів на поверхні ротора збільшується повітряний зазор і зменшується реакція якоря, сталі часу статора, практично відсутня електрична асиметрія ротора (індуктивності за подовжною і поперечною осями приблизно однакові).

Установка магнітів всередині ротора призводить до підвищення механічної міцності ротора, що дозволяє працювати на високих швидкостях.

Також при цьому, внаслідок нерівномірності повітряного зазору (магнітна проникність повітря і постійних магнітів приблизно однакова), виникає електромагнітна асиметрія. Даний ефект призводить до появи поряд з основною складовою моменту (результат взаємодії поперечної складової струму статора і потоку постійних магнітів) додаткової реактивної складової, за рахунок використання якої можна отримати більше відношення потужність/вага в порівнянні з раніше розглянутим варіантом.

5.1.2 Математичний опис СДПМ

Математичний опис *СДПМ із поверхневими магнітами (SPMSM – Surface Permanent Magnet Synchronous Machine)* в системі dq , для яких справедливе співвідношення $L_d = L_q = L$, має вигляд:

$$\begin{cases} u_d = Ri_d + L \frac{di_d}{dt} - z_p \omega \psi_q, \\ u_q = Ri_q + L \frac{di_q}{dt} + z_p \omega \psi_d, \\ T = \frac{3}{2} z_p \psi_{pm} i_q, \\ J \frac{d\omega}{dt} = T - T_L, \end{cases} \quad (5.1)$$

де

$$\psi_d = i_d L + \psi_{pm}, \quad \psi_q = i_q L \quad (5.2)$$

– магнітні потоки статора по каналам d і q ; R – активний опір фази статора; z_p – кількість пар полюсів; ω – кутова швидкість ротора; ψ_{pm} – потокозчеплення постійних магнітів; T, T_L – електромагнітний момент двигуна і момент статичного опору; J – момент інерції.

Керування у першій зоні зазвичай здійснюють при $i_d = 0$.

Для *СДПМ зі вбудованими магнітами (IPMSM – Interior Permanent Magnet Synchronous Machine)*, для яких $L_d \neq L_q$, з урахуванням (5.2) та з

використанням позначень $\omega_e = z_p \omega$, $k_T = \frac{3}{2} z_p$ маємо:

$$\begin{cases} u_d = Ri_d + L_d \frac{di_d}{dt} - \omega_e \Psi_q, \\ u_q = Ri_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega_e \Psi_{pd}, \\ T = k_T [\Psi_{pm} i_q + (L_d - L_q) i_d i_q] = T_a + T_r, \\ J \frac{d\omega}{dt} = T - T_L, \end{cases} \quad (5.3)$$

де

$$\Psi_d = i_d L_d + \Psi_{pm}, \quad \Psi_q = i_q L_q, \quad (5.4)$$

тобто у рівнянні моменту внаслідок магнітної асиметрії з'являється, крім активної складової $T_a = k_T \Psi_{pm} i_q$, так звана реактивна складова $T_r = k_T (L_d - L_q) i_d i_q$.

Такому математичному опису відповідає структурна модель, зображена на рис. 5.1.

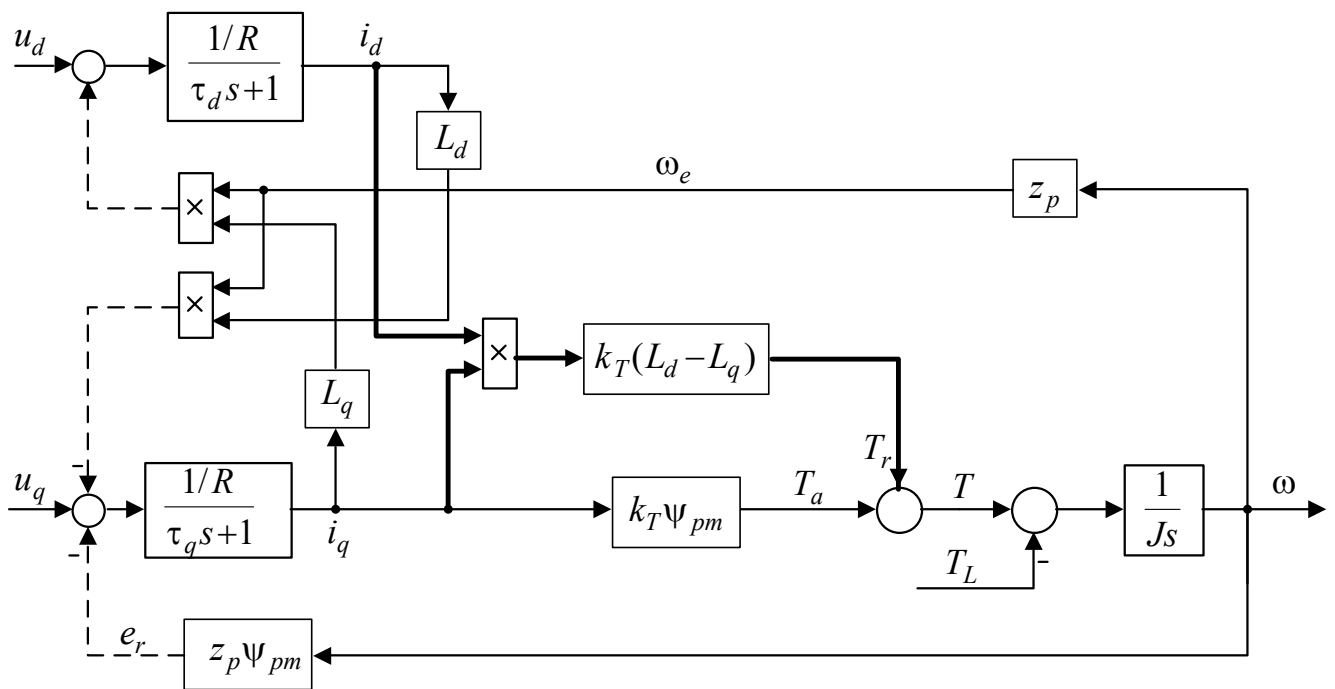


Рис. 5.1. Структурна модель *IPMSM*

5.1.3 Основні втрати потужності в СДПМ

У пункті 3.1.2 проаналізовані основні втрати потужності в системах електроприводу і визначено, що основними втратами в електроприводах на базі АД є втрати в міді та втрати в сталі. Те ж саме можна сказати і про втрати в *PMSM*. Але при визначенні цих втрат в *PMSM* існують деякі особливості.

По-перше, в *PMSM* відсутня обмотка ротора. Тому втрати в міді (*Copper Losses*) визначаються за формулою:

$$P_{Cu} = 3R_s I_s^2 = \frac{3}{2} R_s i_s^2 = \frac{3}{2} R i^2, \quad I_s = i_s / \sqrt{2}. \quad (5.5)$$

По-друге, втрати в сталі (*Iron losses / Core losses*) складаються переважно із втрат від вихрових струмів (*Eddy current losses*)

$$P_{Fe} = \frac{3}{2} k_{ec} \omega_e^2 \Psi_m^2, \quad (5.6)$$

де

$$\Psi_m = e_m / \omega_e = \sqrt{\Psi_d^2 + \Psi_q^2} = \sqrt{(\Psi_{pm} + L_d i_d)^2 + (L_q i_q)^2}. \quad (5.7)$$

По-третє, швидкість обертання системи координат збігається з «електричною» швидкістю ротора, тобто

$$\omega_k = \omega_e = z_p \omega. \quad (5.8)$$

Отже, враховуючи позначення (3.14),

$$P_{Fe} = \frac{3}{2} \cdot \frac{e_m^2}{R_{ec}} \approx \frac{3}{2} \cdot \frac{u_s^2}{R_{ec}}. \quad (5.9)$$

5.1.4 Характеристика оптимальних стратегій керування *IPMSM*

Оскільки в *IPMSM* один і той же момент можна забезпечити при різних сполученнях повздовжньої та поперечної складових струму статора, то виникає задача, як їх розподілити між собою, щоб сумарний струм $i = \sqrt{i_q^2 + i_d^2}$ в усталеному режимі був мінімально можливим. Така стратегія керування, як вже відзначалося у розділі 3, получила назву **максимальний момент на ампер** (**ММА, англ. MTPA – Maximum Torque per Ampere**). Її сенс полягає в тому, щоб забезпечити в умовах обмеження на струм максимально можливий момент (максимальна продуктивність), або сформулювати бажане значення електромагнітного моменту при мінімальному струмі. Для *PMSM* ця стратегія співпадає з **мінімізацією втрат у міді** (5.5).

При роботі у другій зоні двигун може досягти рівня обмеження за напругою статора. Тоді умовою максимальної продуктивності стає **критерій максимальний момент на вольт** (**ММВ, англ. MTPV – Maximum Torque per Volt**). Якщо напруга не досягла рівня обмеження, то цей критерій забезпечує бажане значення

моменту при мінімально можливій напрузі статора, а це, у свою чергу, веде до мінімізації втрат у сталі (5.9).

Синтез оптимальних стратегій керування належить до задач на **умовний (зв'язаний) екстремум**. Задачі на умовний екстремум – це такі задачі варіаційного числення, коли криві, на яких реалізується функціонал, крім граничних умов повинні задовольняти іншим умовам. Найчастіше ці умови формулюються у вигляді диференціальних рівнянь математичної моделі керованого об'єкта, які у даному випадку називають **рівняннями зв'язку чи додатковими зв'язками**.

5.1.5 Розв'язання окремого випадку задачі на умовний екстремум

Окремим випадком задачі на умовний екстремум є задача, в якій мінімізації підлягає не функціонал якості, а деяка цільова функція, а додаткові умови задаються не у вигляді диференціальних рівнянь або обмежених функціоналів, а у вигляді алгебраїчних рівнянь. Зазвичай такі задачі виникають при оптимізації статичних режимів.

Найпростіша з описаних задач формулюється у такий спосіб.

Мінімізувати скалярну функцію n змінних

$$y = f(\mathbf{x}) \rightarrow \min \quad (5.10)$$

так, щоб екстремаль задовольняла додатковій умові, заданій у вигляді неявної гладкої функції

$$g(\mathbf{x}) = 0. \quad (5.11)$$

Вираз $g(\mathbf{x})$ визначає гіперповерхню S і є умовою, що обмежує можливі рішення задачі пошуку точок екстремуму функції.

Введемо функцію Лагранжа

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x}). \quad (5.12)$$

Рівняння Ейлера-Лагранжа в цьому випадку мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(\mathbf{x}) = 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

Отримана система $n+1$ рівняння використовується для знаходження значень x та λ , які відповідають шуканій стаціонарній точці.

5.1.6 Синтез стратегії «Максимальний момент на ампер»

Для стратегії МТРА мінімізована функція (5.7), додаткова умова (5.8) і функція Лагранжа (5.9) мають вигляд

$$\begin{aligned} f(i_d, i_q) &= i_q^2 + i_d^2 \rightarrow \min, \\ g(i_d, i_q) &= T - k_T [\Psi_{pm} i_q + (L_d - L_q) i_d i_q] = 0, \\ L &= i_d^2 + i_q^2 + \lambda [T - k_T \Psi_{pm} i_q - k_m (L_d - L_q) i_d i_q]. \end{aligned}$$

Із них складаємо рівняння Ейлера-Лагранжа за зразком (5.13):

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial i_d} = 2i_d - \lambda k_T (L_d - L_q) i_q = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial i_q} = 2i_q - \lambda k_T (L_d - L_q) i_d - \lambda k_T \Psi_{pm} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = T - k_T \Psi_{pm} i_q - k_T (L_d - L_q) i_d = 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

Виразимо коефіцієнт Лагранжа із першого та другого рівнянь системи Ейлера-Лагранжа та прирівняємо їх:

$$\lambda = \frac{2}{k_T} \cdot \frac{i_d}{(L_d - L_q) i_q} = \frac{2}{k_T} \cdot \frac{i_q}{\Psi_{pm} + (L_d - L_q) i_q},$$

звідкіля можна отримати квадратне рівняння:

$$(L_d - L_q) i_d^2 + \Psi_{pm} i_d - (L_d - L_q) i_q^2 = 0.$$

Розв'яжемо його відносно i_d :

$$i_d = -\frac{\Psi_{pm}}{2(L_d - L_q)} \pm \sqrt{\frac{\Psi_{pm}^2}{4(L_d - L_q)^2} + i_q^2}. \quad (5.15)$$

Визначимо, який знак в останній формулі слід застосувати, щоб забезпечити саме мінімум цільової функції. Згідно з *умовою Лежандра* екстремаль забезпечує мінімум, якщо усі другі похідні від Лагранжіана будуть додатними. Знайдемо ці похідні:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial^2 i_d} = 2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial i_q \partial i_d} = -\lambda k_T (L_d - L_q), \quad \frac{\partial^2 L}{\partial i_d \partial i_q} = -\lambda k_T (L_d - L_q) \quad \frac{\partial^2 L}{\partial^2 i_q} = 2.$$

Для СДПМ справедлива нерівність $L_d \leq L_q$. За цієї умови друга та третя з умов Лежандра будуть додатними при додатному значенні коефіцієнта Лагранжа λ , а це можна забезпечити при роботі у двигунному режимі ($i_q > 0$) тільки при від'ємному значенні складової i_d . Для виконання останньої умови у формулі (5.16) треба залишити знак «-», тобто

$$i_d = -\frac{\Psi_{pm}}{2(L_d - L_q)} - \sqrt{\frac{\Psi_{pm}^2}{4(L_d - L_q)^2} + i_q^2}. \quad (5.16)$$

Щоб пов'язати q -складову струму статора з величиною моменту треба прирівняти i_d за формулою (5.16) до i_d , знайденого з рівняння моменту, тобто

$$i_d = -\frac{\Psi_{pm}}{2(L_d - L_q)} - \sqrt{\frac{\Psi_{pm}^2}{4(L_d - L_q)^2} + i_q^2} = \frac{T - k_T \Psi_{pm} i_q}{k_T (L_d - L_q) i_q}. \quad (5.17)$$

Із (5.17) знаходимо рівняння, що пов'язує між собою i_q та T :

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_{pm}^2}{4(L_d - L_q)^2} + i_q^2 &= \left(\frac{T - k_T \Psi_{pm} i_q}{k_T (L_d - L_q) i_q} + \frac{\Psi_{pm}}{2(L_d - L_q)} \right)^2, \\ \frac{\Psi_{pm}^2 + 4(L_d - L_q)^2 i_q^2}{4(L_d - L_q)^2} &= \frac{(2T - k_T \Psi_{pm} i_q)^2}{4k_T^2 (L_d - L_q)^2 i_q^2}, \\ k_T^2 (L_d - L_q)^2 i_q^4 + T k_T \Psi_{pm} i_q - T^2 &= 0, \\ i_q^4 + \frac{T \Psi_{pm}}{k_T (L_d - L_q)^2} i_q - \left(\frac{T}{k_T (L_d - L_q)} \right)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Недоліком рівняння (5.18) є відсутність його аналітичного розв'язку, внаслідок чого його або треба вирішувати на кожному кроці в реальному часі, або реалізувати у вигляді попередньо розрахованих таблиць *Look Up Table*.

5.1.7 Синтез стратегії «Максимальний момент на вольт»

Для синтезу стратегії *MTPV* напишемо рівняння напруг без врахування падіння напруги на активному та індуктивному опорах, тобто фактично перейдемо від напруг до ЕРС обертання:

$$u_d = -\omega_e L_q i_q, \quad u_q = \omega_e (L_d i_d + \psi_{pm}). \quad (5.19)$$

Складемо мінімізовану функцію, додаткову умову та утворимо Лангранжіан:

$$f(i_d, i_q) = u_d^2 + u_q^2 = \omega_e^2 [L_q^2 i_q^2 + (L_d i_d + \psi_{pm})^2] \rightarrow \min,$$

$$g(i_d, i_q) = M - k_m [\psi_{pm} i_q + (L_d - L_q) i_d i_q] = 0,$$

$$L = \omega_e^2 [L_q^2 i_q^2 + (L_d i_d + \psi_{pm})^2] + \lambda [M - k_m \psi_{pm} i_q - k_m (L_d - L_q) i_d i_q].$$

Напишемо рівняння Ейлера-Лагранжа за зразком (5.13):

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial i_d} = 2\omega_e^2 L_d (L_d i_d + \psi_{pm}) - \lambda k_m (L_d - L_q) i_q = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial i_q} = 2\omega_e^2 L_q^2 i_q - \lambda k_T (L_d - L_q) i_d - \lambda k_T \psi_{pm} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = T - k_T \psi_{pm} i_q - k_T (L_d - L_q) i_d = 0. \end{cases} \quad (5.20)$$

Виразимо коефіцієнт Лагранжа із першого та другого рівнянь системи (5.20) та прирівняємо їх:

$$\lambda = \frac{2\omega_e^2 L_d (L_d i_d + \psi_{pm})}{k_T (L_d - L_q) i_q} = \frac{2\omega_e^2 L_q^2 i_q}{k_T [(L_d - L_q) i_d + \psi_{pm}]}$$

Виконаємо перетворення останнього рівняння з метою виразити i_d через i_q :

$$\begin{aligned} i_d^2 + \frac{\psi_{pm}}{L_d - L_q} \cdot \frac{2L_d - L_q}{L_d} i_d + \left[\frac{\psi_{pm}^2}{L_d (L_d - L_q)} - \left(\frac{L_q}{L_d} i_q \right)^2 \right], \\ i_d = -\frac{\psi_{pm}}{2(L_d - L_q)} \cdot \frac{2L_d - L_q}{L_d} \pm \sqrt{\frac{\psi_{pm}^2}{4(L_d - L_q)^2} \cdot \frac{(2L_d - L_q)^2}{L_d^2} - \frac{\psi_{pm}^2}{L_d (L_d - L_q)} - \left(\frac{L_q}{L_d} i_q \right)^2} = \\ = -\frac{\psi_{pm}}{2(L_d - L_q)} \cdot \left(2 - \frac{L_q}{L_d} \right) \pm \sqrt{\frac{\psi_{pm}^2 (2L_d - L_q)^2 - 4\psi_{pm}^2 L_d (L_d - L_q)}{4(L_d - L_q)^2 L_d^2} - \left(\frac{L_q}{L_d} i_q \right)^2}. \end{aligned}$$

Після спрощення виразу у чисельнику під коренем

$$\psi_{pm}^2(2L_d - L_q)^2 - 4\psi_{pm}^2 L_d(L_d - L_q) = \psi_{pm}^2(4L_d^2 - 4L_d L_q + L_q^2 - 4L_d^2 + 4L_d L_q) = \psi_{pm}^2 L_q^2$$

остаточно маємо:

$$i_d = -\frac{\psi_{pm}}{2(L_d - L_q)} \cdot \left(2 - \frac{L_q}{L_d}\right) - \frac{L_q}{L_d} \sqrt{\frac{\psi_{pm}^2}{4(L_d - L_q)^2} - i_q^2}. \quad (5.21)$$

Знак «-» на відміну від знаку «+» перед коренем у формулі (18) забезпечує від'ємне значення d-складової струму, що і треба.

5.2 Завдання

1. Синтезувати систему регулювання швидкістю IPMSM з типовою системою векторного керування та з використанням оптимальних стратегій *МТРА* і *МТРV*.

2. Розробити відповідні структурні моделі для двигуна, дані якого відображені у табл. 5.1.

3. Отримати графіки перехідних процесів.

4. Порівняти динамічні та енергетичні показники досліджуваних систем.

Сформулювати висновки.

Таблиця 5.1

Параметр	Значення
Номінальна швидкість n_n , об/хв	2000
Номінальний момент T_n , Нм	1,67
Номінальний струм статора I_n , А	5
Сумарний момент інерції J , кгм ²	0,0005
Кількість пар полюсів	2
Активний опір фази статора R , Ом	0,57
Індуктивність за поздовжньою віссю L_d , мГн	8,72
Індуктивність за поперечною віссю L_q , мГн	22,78
Потік від постійних магнітів ψ_{pm} , Вб	0,0785

5.3 Методичні вказівки та рекомендації

Фрагменти структурних схем типової та найпростішої оптимальної систем векторного керування швидкістю *IPMSM* зображені на рис. 5.2, де РШ – регулятор швидкості, РСd та РСq – регулятори струмів, ФП – функціональний перетворювач. Регулятори мають передавальні функції

$$w_{pcd}(s) = \frac{(\tau_d s + 1)R}{\tau_i s}, \quad w_{pcq}(s) = \frac{(\tau_q s + 1)R}{\tau_i s}, \quad k_{pш} = \frac{i_q^*(s)}{\varepsilon_\omega(s)} = \frac{J}{k_T \Psi_{pm} \tau_\omega}, \quad (5.22)$$

де $\tau_d = L_d/R$, $\tau_q = L_q/R$, τ_i , $\tau_\omega = 2\tau_i$ – сталі часу розімкнених контурів струму та контуру швидкості. τ_i залежить від частоти широтно-імпульсної модуляції f_M та при нехтуванні інерційністю перетворювача частоти може бути визначеною за формулою $\tau_i = (2-4)/f_M$. Зазвичай можна прийняти $\tau_i = (0.1 \div 0.5)$ мс.

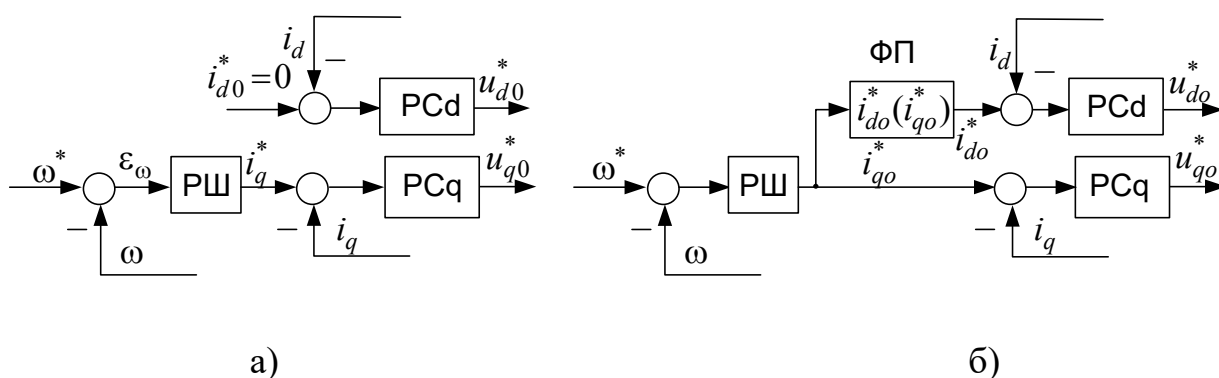


Рис. 5.2. Фрагменти блок-схем типової (а) та найпростішої оптимальної (б) систем векторного керування швидкістю *IPMSM*

Функціональний перетворювач ФП формує оптимальні залежності за формулами (5.16) при використанні критерію *МТРА* або (5.21) при використанні критерію *МТРА*.

Недоліком схеми рис. 5.2б є погіршення якості перехідних процесів, зумовлене наявністю реактивної складової реактивного моменту, що не враховано при синтезі регулятора швидкості. Цього недоліку можна позбутися, якщо РШ примусити формувати завдання, а на момент двигуна, а завдання на моментоутворюючу складову струму розраховувати з рівняння електромагнітного моменту із сигналу завдання на момент та сигналу зворотного

зв'язку за потокоутворюючою складовою струму. Фрагмент такої структурної схеми зображено на рис. 5.3, де

$$k_{\text{рш}} = \frac{T^*(s)}{\varepsilon_{\omega}(s)} = \frac{J}{\tau_{\omega}}, \quad i_q^* = \frac{T^*}{k_T[\psi_{pm} + (L_d - L_q)i_d]} \quad (5.23)$$

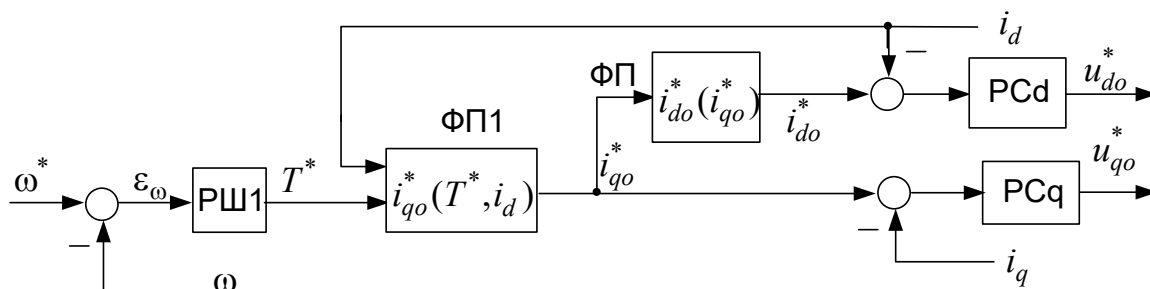


Рис. 5.2. Фрагмент блок-схем оптимальної систем векторного керування швидкістю IPMSM з покращеною якістю перехідних процесів

5.4 Контрольні завдання і запитання

1. Що таке задача на умовний екстремум?
2. Сформулюйте у математичному вигляді оптимізаційні задачі по визначенню алгоритмів *МТРА* і *МТРV*.
3. Які переваги і недоліки мають розглянуті оптимальні стратегії керування?
4. Які способи структурної реалізації оптимальних стратегій керування Ви знаєте?
5. Чим відрізняється стратегія *МТРА* для АД і СДПМ?

Практичне заняття 6

СИНТЕЗ ТА АНАЛІЗ ЗАДАВАЛЬНИХ ПРИСТРОЇВ, ЩО РЕАЛІЗУЮТЬ ОПТИМАЛЬНІ ТА КВАЗІОПТИМАЛЬНІ ЗА ТЕПЛОВИМИ ВТРАТАМИ ЗАКОНИ КЕРУВАННЯ ПОЗИЦІЙНИМ ПРИВОДОМ

6.1 Теоретичні положення

Пошук оптимального керування для систем позиційного керування при врахуванні теплових втрат є типовою задачею на умовний екстремум, визначення якої дано у попередньому розділі.

6.1.1 Розв'язання задачі на умовний екстремум в загальному вигляді

Розглянемо задачу на умовний екстремум в загальному вигляді. Нехай задана математична модель об'єкту керування:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (6.1)$$

або

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \mathbf{x}' = 0 \quad (6.2)$$

і мінімізований функціонал

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \quad (6.3)$$

Потрібно визначити екстремалі функціоналу $\mathbf{x}(t)$ і $\mathbf{u}(t)$, що задовольняють граничним умовам

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f \quad (6.4)$$

і рівнянням зв'язку, тобто системі диференціальних рівнянь (6.1).

Підінтегральна функція є неперервною по всім змінним і має неперервні часткові похідні. Сформульована задача на умовний екстремум одержала назву *задачі Лагранжа*. Вона зводиться до задачі на безумовний екстремум шляхом введення нового функціоналу

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}, t) dt \quad (6.5)$$

де

$$L = \psi_0 F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) [f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - x_i'] \quad (6.6)$$

– *функція Лагранжа (Лагранжіан), $\psi(t)$ – множники Лагранжа.*

Мінімізація функціонала (6.6) можлива, якщо усі множники Лагранжа не стають одночасно тотожно рівними 0. При $\psi_0 = 0$ Лагранжіан не залежить від вихідної підінтегральної функції, і задача оптимізації втрачає свій сенс. Це можливо, якщо задача фізично поставлена не коректно. Такий випадок називають особливим. Ми будемо розглядати неособливий випадок, коли $\psi_0 \neq 0$.

Множники Лагранжа входять у рівняння (6.6) лінійно і однорідно. Тому рівняння не зміняться, якщо всі множники помножити на будь-яку константу. Домовимося в неособливому випадку приймати

$$\psi_0 = -1. \quad (6.7)$$

Тоді

$$L = -F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) [f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - x_i']. \quad (6.8)$$

Для функції Лагранжа (6.13) складаються рівняння Ейлера, аналогічні (1.27):

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i'} \right) = 0, & i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial L}{\partial \psi_i} = f_i - x_i' = 0, & i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial L}{\partial u_j} = 0, & j = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (6.9)$$

Які зазвичай називають *рівняннями Ейлера-Лагранжа.*

З цих рівнянь при відомих граничних умовах знаходять невідомі функції $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{x}(t)$ і $\psi(t)$ або $\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Функцію Лагранжа (6.6) можна записати через функцію Гамільтона:

$$H = \sum_{i=0}^n \psi_i(t) f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = -F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (6.10)$$

Порівнюючи (6.10) та (6.8), маємо

$$L = H - \sum_{i=1}^n \Psi_i(t)x_i', \quad (6.11)$$

звідкіля, враховуючи, що Гамільтоніан не залежить від похідних вектору стану, перше рівняння системи (6.9) можна подати у вигляді

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i'} - \Psi_i \right) = \frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i'} \right) + \Psi_i' = \frac{\partial H}{\partial x_i} + \Psi_i' = 0,$$

внаслідок чого рівняння (6.9) приймають вид:

$$\begin{cases} \Psi_i' = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, & i = 1, 2, \dots, n \\ x_i' = \frac{\partial H}{\partial \Psi_i}, & i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial H}{\partial u_j} = 0, & j = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (6.12)$$

Останні рівняння називають *канонічною формою рівнянь Ейлера-Лагранжа*.

6.1.2 Формулювання задач оптимального керування позиційним приводом

Задача позиційного електроприводу полягає у переміщенні робочого органу механізму з однієї заданої позиції в іншу. Основними параметрами цього процесу є величина переміщення α_f , час переміщення t_f та теплові втрати ΔQ .

Теплові втрати – це втрати від нагрівання струмами елементів електромеханічної системи з активними опорами:

$$\Delta Q = \sum_{k=1}^n \left(R_k \int_0^{t_f} i_k^2(t) dt \right). \quad (6.13)$$

У системах електроприводу струми розподіляються на моментоутворюючі та потокоутворюючі. До першої групи у двигуна постійного струму (ДПС) належить струм якоря $i_\alpha(t)$, а до другої – струм збудження $i_\beta(t)$, а у АД та СДПМ – ортогональні складові струму статора в обертальній системі координат, орієнтованій за потокозчепленням ротора: $i_{sq}(t)$ та $i_{sd}(t)$ відповідно. У свою чергу

моментоутворюючі складові струмів розподіляються на ті, що виникають під дією статичного моменту $M_c(t)$ та ті, що створюють динамічний момент

$$M_j(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} = J\varepsilon(t). \quad (6.14)$$

У найпростішому випадку при оптимізації систем позиційного електроприводу нехтують втратами на підтримку електродвигунів у намагніченому стані та на урівноваження моменту статичного опору і приймають до уваги тільки «динамічні» теплові втрати

$$\Delta Q_j = R \int_0^{t_f} I_j^2(t) dt = \frac{R}{c} \int_0^{t_f} M_j^2(t) dt = \frac{JR}{c} \int_0^{t_f} \varepsilon^2(t) dt. \quad (6.15)$$

У рівнянні (6.15) для ДПС, СДПМ, та АД

$$R_{\text{ДПС}} = R_{\text{я}}, \quad R_{\text{СДПМ}} = R_s, \quad R_{\text{АД}} = R_s + k_r^2 R_r;$$

$$c_{\text{ДПС}} = k\Phi_n, \quad c_{\text{СДПМ}} = \frac{3}{2} z_p \Psi_{pm}, \quad c_{\text{АД}} = \frac{3}{2} z_p k_r \Psi_{rn}.$$

Задачу оптимального керування позиційним електроприводом, у якій пов'язані між собою величина переміщення, час, за який воно здійснюється, та теплові втрати, формулюють у 3-х варіантах [1-5, 7,8]:

1) Знайти оптимальне керування, що забезпечує мінімальні теплові втрати при пересуванні об'єкта на задану відстань за заданий час – **задача на мінімізацію теплових втрат (енергоефективне керування)**, що розв'язується мінімізацією функціоналу (6.15).

2) Знайти оптимальне керування, що забезпечує мінімальний час пересування об'єкта на задану відстань при заданих теплових втратах – **термінальна задача оптимального керування**, для розв'язання якої треба мінімізувати функціонал

$$J = \int_0^{t_f} dt = t_f. \quad (6.16)$$

3) Знайти оптимальне керування, що забезпечує максимальну величину переміщення об'єкта за заданий час із заданими тепловими втратами – *задача на максимальну продуктивність*, в якій треба забезпечити максимум функціонала

$$J = \int_0^{t_f} \omega(t) dt = \alpha_f. \quad (6.17)$$

Термінальну задачу не слід плутати з *задачею на максимальну швидкість*, в якій теплові втрати не обмежуються, а обмежуються величини прискорення та швидкості, тобто обмеження накладається не тільки на координати, а і на керування. Остання задача вирішується з використанням принципу максимуму Понтрягіна.

В усіх трьох випадках об'єкт керування описується диференційними рівняннями

$$\alpha' = \omega, \quad \omega' = \varepsilon \quad (6.18)$$

і лінійним алгебраїчним рівнянням

$$M_j = cI_j = J\varepsilon, \quad (6.19)$$

де вхідною координатою об'єкту регулювання (ОР) з вектором стану

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \omega \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

можна вважати кутове прискорення, пропорційне динамічному моменту і динамічному струму

$$u = \varepsilon. \quad (6.21)$$

Граничні умови мають вигляд:

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(t_f) = \alpha_f, \quad \omega(0) = 0, \quad \omega(t_f) = 0. \quad (6.22)$$

Крім того, існують обмеження на керуючий вплив:

$$\varepsilon(0_-) = 0, \quad \varepsilon(t \geq t_f) = 0. \quad (6.23)$$

6.1.3 Розв'язання задач оптимального керування позиційним електроприводом

Розглянемо першу із сформульованих вище задач, яка полягає в мінімізації функціоналу (6.15), в якому підінтегральною функцією є

$$F = \varepsilon^2(t). \quad (6.24)$$

Складемо функцію Гамільтона:

$$H = -\varepsilon^2 + \psi_1 \omega + \psi_2 \varepsilon$$

і запишемо рівняння Ейлера-Лагранжа:

$$\begin{cases} \psi_1' = -\frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0 \\ \psi_2' = -\frac{\partial H}{\partial \omega} = -\psi_1 \\ \frac{\partial H}{\partial \varepsilon} = \psi_2 - 2\varepsilon = 0 \\ \alpha' = \omega \\ \omega' = \varepsilon \end{cases}$$

Із першого рівняння

$$\psi_1 = C_1 = \text{const},$$

із другого –

$$\psi_2 = -C_1 t + C_2,$$

із третього –

$$\varepsilon = \frac{\psi_2}{2} = \frac{-C_1 t + C_2}{2}.$$

Підставляємо отриманий вираз у останнє диференціальне рівняння і інтегруємо його. В результаті одержимо:

$$\omega(t) = -\frac{C_1 t^2}{4} + \frac{C_2 t}{2} + C_3.$$

Знаходимо похідну і інтеграл від кутової швидкості:

$$\varepsilon(t) = \omega'(t) = -\frac{C_1 t}{2} + \frac{C_2}{2}$$

$$\alpha(t) = \int \omega(t) dt = -\frac{C_1 t^3}{12} + \frac{C_2 t^2}{4} + C_3 t + C_4.$$

Використовуючи граничні умови одержуємо:

$$\alpha(0) = C_4 = 0, \quad \omega(0) = C_3 = 0,$$

$$\omega(t_f) = -\frac{C_1 t_f^2}{4} + \frac{C_2 t_f}{2} = 0, \quad \alpha(t_f) = -\frac{C_1 t_f^3}{12} + \frac{C_2 t_f^2}{4} = \alpha_f.$$

Розв'язанням системи двох останніх рівнянь одержуємо:

$$C_1 = \frac{24\alpha_f}{t_f^3}, \quad C_2 = \frac{12\alpha_f}{t_f^2}.$$

Підстановкою знайдених виразів для констант у рівняння екстремалей, остаточно маємо:

$$\varepsilon(t_f) = -\frac{6\alpha_f}{t_f^2}, \quad \omega(t) = \frac{6\alpha_f}{t_f} \left(-\frac{t^2}{t_f^2} + \frac{t}{t_f} \right), \quad \alpha(t) = \alpha_f \left(-2\frac{t^3}{t_f^3} + 3\frac{t^2}{t_f^2} \right). \quad (6.25)$$

Із останніх рівнянь видно, що вони задовольняють граничним умовам.

Визначимо максимальне значення швидкості. Нульове прискорення і екстремум швидкості мають місце при

$$-2\frac{t_{\max}}{t_f} + 1 = 0,$$

звідкіля

$$t_{\max} = \frac{t_f}{2}, \quad \omega_{\max} = \frac{1.5\alpha_f}{t_f}; \quad (6.26)$$

мінімізовані втрати дорівнюють

$$\Delta Q_\varepsilon = \int_0^{t_f} \varepsilon^2(t) dt = \frac{12\alpha_f^2}{t_f^3}, \quad \Delta Q_j = \frac{J^2 R}{c^2} \Delta Q_\varepsilon = \frac{12J^2 R \alpha_f^2}{c^2 t_f^3}. \quad (6.27)$$

Графіки, які можна побудувати за рівняннями (6.25) або за допомогою структурної моделі рис. 6.1, зображені на рис. 6.2.

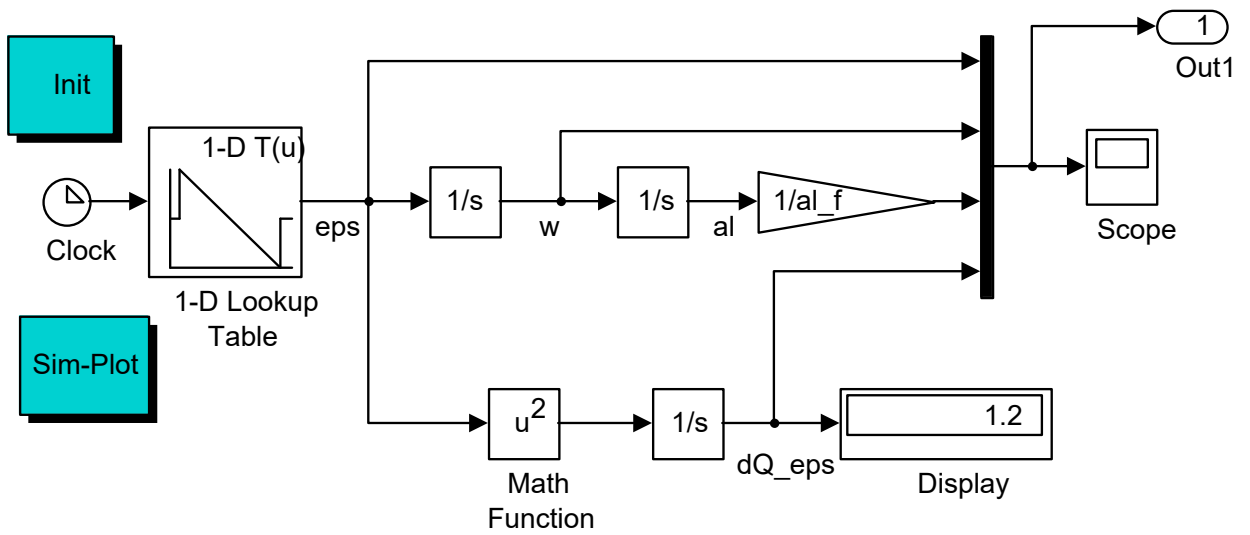


Рис. 6.1. Структурна модель, що формує оптимальні за тепловими втратами траєкторії руху

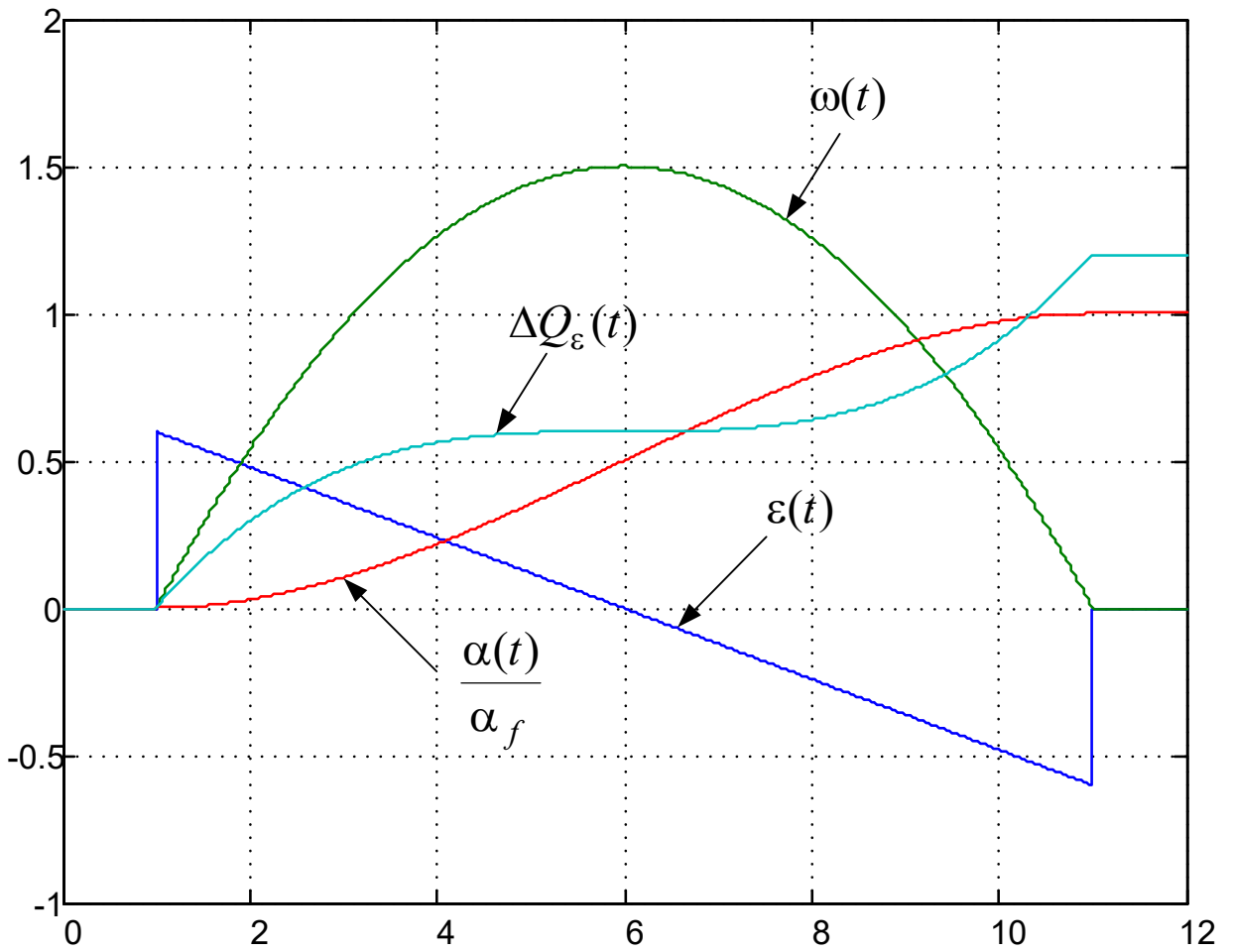


Рис. 6.2 – Оптимальні за тепловими втратами закони зміни прискорення, швидкості та положення

Усі 3 сформульовані у цьому підрозділі задачі оптимального керування пов'язані між собою, і мають однакові рівняння екстремалей (6.25), у які у другому випадку треба підставити мінімальний час

$$t_{f \min} = \sqrt[3]{\frac{12\alpha_f^2}{\Delta Q_\varepsilon}}, \quad (6.28)$$

а у третьому – максимальний шлях

$$\alpha_{f \max} = \sqrt{\frac{\Delta Q_\varepsilon t_f^3}{12}}, \quad (6.29)$$

які знаходимо з рівняння втрат (6.27).

6.1.4 Квазіоптимальне керування позиційним електроприводом

Недоліком оптимального керування позиційним електроприводом з параболічними тахограмами, яке розглянуто у попередньому пункті, є необхідність формування завдання на положення в розімкненій структурі з наявністю двох послідовно включених інтеграторів з попереднім розрахунком сигналу завдання на прискорення, який ускладнюється при наявності обмежень на прискорення і швидкість, а також при цифровій реалізації, що супроводжується квантуванням за часом та екстраполяцією нульового порядку (запам'ятовуванням розрахованих сигналів на періоді дискретності). Будь-які похибки у формуванні завдання на прискорення накопичуються при перетворенні їх цифровими інтеграторами.

Набагато простіше реалізувати відпрацювання заданих переміщень за трикутними або трапецоїдальними тахограмами. При використанні їх з максимально можливими значеннями прискорення та швидкості отримуємо закони керування, оптимальні за швидкодією. Але при варіюванні параметрів трапецоїдальної та трикутної тахограм змінюються теплові втрати.

На рис 6.3 показано, що одно й те ж переміщення $\bar{\varphi}_3$ за заданий час τ_0 може бути відпрацьовано при різних співвідношеннях тривалостей розгону τ_p , гальмування τ_r і руху з усталеною швидкістю τ_y .

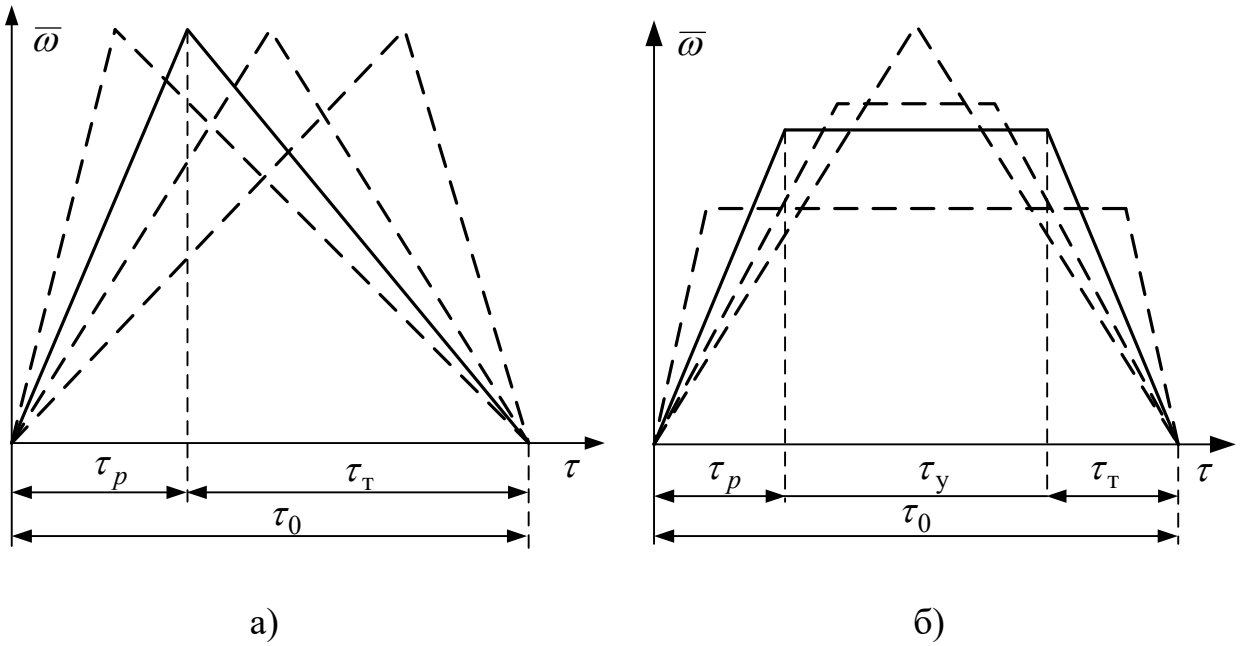


Рис. 6.3. Варіанти тахограм при відпрацюванні одного і того ж переміщення:
а) трикутна б) трапецоїдальна

Отже, в даному випадку виникає задача квазіоптимального керування, що полягає у визначенні таких часових параметрів досліджуваних тахограм, які забезпечують при відпрацюванні заданого переміщення за заданий час мінімальні теплові втрати ΔQ_ε .

Для трикутної тахограми

$$\alpha_f = \frac{\omega_{\max} t_f}{2}, \text{ звідкіля } \omega_{\max} = \frac{2\alpha_f}{t_f}.$$

$$\varepsilon_r = \frac{\omega_{\max}}{t_r}, \quad \varepsilon_t = \frac{\omega_{\max}}{t_t} = \frac{\omega_{\max}}{t_f - t_r}.$$

$$\Delta Q_\varepsilon = \varepsilon_r^2 t_r + \varepsilon_t^2 (t_f - t_r) = \frac{\omega_{\max}^2}{t_r} + \frac{\omega_{\max}^2}{t_f - t_r} = \frac{4\alpha_f^2}{t_f^3} \left(\frac{1}{t_r} - \frac{1}{t_f - t_r} \right) = \frac{4\alpha_f^2}{t_f^3} \cdot \frac{1}{\beta(1-\beta)}, \quad (6.30)$$

де $\beta = \frac{t_r}{t_f}$, $0 < \beta < 1$.

Мінімум функції $\Delta Q_\varepsilon(\beta)$ має місце при виконанні умови

$$\frac{d}{d\beta}(\Delta Q_\varepsilon) = 0,$$

яка утворює рівняння

$$\frac{2\beta_{\min} - 1}{\beta_{\min}^2 (\beta_{\min} - 1)^2} = 0,$$

звідкіля випливає

$$\beta_{\min} = \frac{1}{2}, \quad \Delta Q_{\varepsilon \min} = \frac{16\alpha_f^2}{t_f^3}, \quad \omega_{\max} = \frac{2\alpha_f}{t_f}, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_t = 4 \frac{\alpha_f}{t_f^2}. \quad (6.31)$$

Для трапеціодальної тахограми при $t_r = t_t$

$$\alpha_f = \omega_{\max} (t_r + t_u) = \omega_{\max} (t_f + t_r), \text{ звідкіля } \omega_{\max} = \frac{\alpha_f}{t_f - t_r}.$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_t = \frac{\omega_{\max}}{t_r}.$$

$$\Delta Q_{\varepsilon} = 2\varepsilon_r^2 t_r = \frac{2\omega_{\max}^2}{t_r} = \frac{2\alpha_f^2}{t_r(t_f - t_r)^2} = \frac{2\alpha_f^2}{t_f^3} \cdot \frac{1}{\beta(1-\beta)^2}, \quad (6.32)$$

де $\beta = \frac{t_r}{t_f}$, $0 < \beta < 1/2$.

$$\frac{d}{d\beta} \left[\frac{1}{\beta(1-\beta)^2} \right] = \frac{1-3\beta}{\beta^2 - (\beta-1)^3}.$$

Прирівнявши останній вираз до 0, отримуємо

$$\beta_{\min} = \frac{1}{3}, \quad \Delta Q_{\varepsilon \min} = 13,5 \frac{\alpha_f^2}{t_f^3}, \quad \omega_{\max} = 1,5 \frac{\alpha_f}{t_f}, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_t = 4,5 \frac{\alpha_f}{t_f^2}. \quad (6.33)$$

Графіки залежностей $\bar{Q}(\beta)$, побудовані за рівняннями (6.30) і (6.32) подані на рис 6.4.

Вони підтверджують, що мінімальні «динамічні» теплові втрати мають місце для трикутної тахограми при $\tau_p = \tau_T = \tau_0/2$, а для трапеціодальної – при $\tau_p = \tau_T = \tau_y = \tau_0/3$.

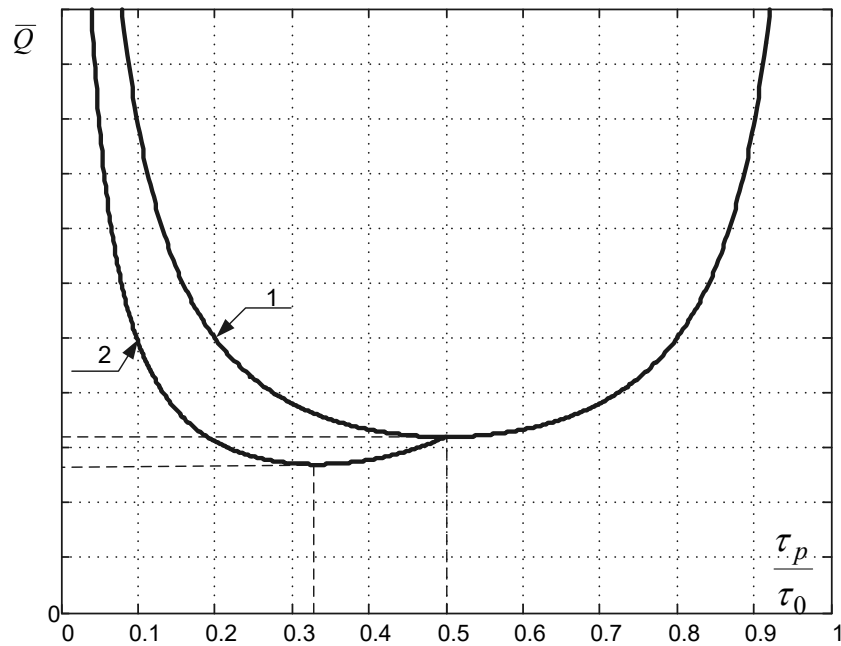


Рис. 6.4. Графіки залежностей теплових втрат від параметрів тахограм:
1) трикутних 2) трапецоїдальних

В таблиці 6.1 приведені вирази для основних параметрів розглянутих діаграм. Аналіз показує, що теплові втрати в системах позиційного електроприводу зворотно пропорційні кубу часу відпрацювання переміщення. Отже, навіть незначне збільшення часу τ_0 може привести до суттєвого зменшення теплових втрат.

Рух за параболічною тахограмою характеризується мінімальними втрати Q_ε , але найбільше значення максимального прискорення (в 1,5 рази вище, ніж при використанні трикутної та в 1,33 рази вище, ніж у при використанні трапецеїдальної квазіоптимальних тахограм). Квазіоптимальна трапецоїдальна тахограма з таким же, як і у оптимальної діаграми, значенням максимальної швидкості $\bar{\omega}_M$, характеризується тепловими втратами, що перевищують мінімально можливі $Q_{\varepsilon\min}$ на 12,5%. Трикутна квазіоптимальна тахограма характеризується мінімальним прискоренням, але найбільшим значенням максимальної швидкості ω_{\max} та втрат (на 33% вище, ніж $Q_{\varepsilon\min}$).

Основні параметри діаграм відпрацювання заданого переміщення

Тип діаграми		Параметри				
		ε_{\max}	ω_{\max}	$\tau_p = \tau_T$	τ_y	Q_ε
Оптимальна за тепловими втратами		$6 \frac{\alpha_f^2}{\tau_0^2}$	$\frac{1.5\alpha_f}{\tau_0}$	$\tau_0/2$	0	$12 \frac{\alpha_f^2}{\tau_0^3}$
Квазіоптимальна за тепловими втратами	Трикутна	$4 \frac{\alpha_f^2}{\tau_0^2}$	$2 \frac{\alpha_f}{\tau_0}$	$\tau_0/2$	0	$16 \frac{\alpha_f^2}{\tau_0^3}$
	Трапецоїдальна	$4.5 \frac{\alpha_f^2}{\tau_0^2}$	$\frac{1.5\alpha_f}{\tau_0}$	$\tau_0/3$	$\tau_0/3$	$13,5 \frac{\alpha_f^2}{\tau_0^3}$

6.2 Завдання

1. Зберіть структурні моделі механічних систем, які відпрацьовують однакові переміщення за однаковий час за оптимальною параболічною тахограмою та квазіоптимальними трапецоїдальною і трикутною тахограмами.

2. Виміряйте теплові втрати в усіх трьох випадках та порівняйте їх зі значеннями, розрахованими за формулами з табл.6.1.

3. Спробуйте змінити параметри трикутної та трапецоїдальної тахограм, не змінюючи величини переміщення та часу його відпрацювання (див. рис. 6.3). Переконайтесь у збільшенні втрат при відхиленні параметрів від оптимальних значень.

6.3 Методичні рекомендації до виконання завдання

1. Розробіть спочатку модель оптимального руху, а потім розрахуйте параметри квазіоптимальних переміщень згідно з формулами, наведеними у табл. 3.1.

2. При варіації параметрів трикутної та трапецоїдальної тахограми дотримуйтесь таких правил:

- змінюйте прискорення зворотно пропорційно часу розгону або гальмування;

- добутки прискорення на час його дії при розгоні та при гальмуванні повинні бути однаковими.

3. У звіті наведіть моделі перехідні процеси та таблицю параметрів досліджених діаграм.

6.4 Контрольні питання та завдання

1. Сформулюйте задачу оптимального керування на умовний (зв'язаний) екстремум.

2. В чому відмінність варіаційної задачі на умовний екстремум від задачі на безумовний екстремум?

3. Напишіть функції Лагранжа та Гамільтона, визначте зв'язок між ними.

4. Запишіть рівняння Ейлера-Лагранжа у звичайній та канонічній формах.

5. Сформулюйте три задачі оптимального керування позиційним приводом з урахуванням теплових втрат при переміщенні.

6. Запишіть вихідні рівняння та мінімізовані функціонали для кожної з задач.

7. Охарактеризуйте оптимальні та квазіоптимальні діаграми відпрацювання заданого переміщення.

Практичне заняття 7

СИНТЕЗ ТА АНАЛІЗ ОПТИМАЛЬНИХ ЗА ШВИДКОДІЄЮ СИСТЕМ ПОЗИЦІЙНОГО ЕЛЕКТРОПРИВОДУ

7.1 Теоретичні положення

7.1.1 Принцип максимуму Л.С. Понтрягіна

Подальшим розвитком класичного варіаційного числення і його узагальненням на випадки, коли оптимальні керування обмежені і становлять кусково-неперервні функції з точками розриву першого роду, кількість яких невідома, є метод, який називається *принципом максимуму*. Цей метод розроблено Л. С. Понтрягіним та його школою в 1956 р.

Принцип максимуму Понтрягіна (ПМП) є необхідною і достатньою ознакою оптимальності процесу лише для лінійних об'єктів. У загальному випадку для нелінійних об'єктів він є тільки необхідним. Це означає, що принцип максимуму дає можливість визначити не оптимальне керування, а деяку звужену групу допустимих керувань. Оптимальне керування, якщо воно взагалі існує, буде належати саме до цієї групи.

Розглянемо найбільш поширений випадок застосування ПМП: оптимальне за швидкодією керування лінійним об'єкт регулювання (ОР) з обмеженням на скалярне керування.

В цьому випадку ОР описується лінійною системою диференціальних рівнянь (ДР):

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u, \quad (7.1)$$

або

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i u, \quad (7.2)$$

а Гамільтоніан має вигляд

$$H = \sum_{i=1}^n \psi_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right) + u \sum_{i=1}^n \psi_i b_i, \quad (7.3)$$

Як видно, отриманий у такий спосіб Гамільтоніан (7.3) є лінійно залежним від шуканого керування. В цьому разі похідна від функції Гамільтона за керуванням має сталі значення, тобто не залежить від u :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \sum_{i=1}^n \psi_i b_i = \text{const}.$$

Тому, якщо u не має обмеження, то не існує значення u , при якому досягається екстремум. Якщо функція u розглядається у замкнутому інтервалі $u \in [-u_{\max}, +u_{\max}]$, то вона набуває максимуму на межах інтервалу (рис. 7.1): при

$$u = \begin{cases} u_{\max}, & \text{якщо } \sum_{i=1}^n \psi_i b_i > 0, \\ -u_{\max}, & \text{якщо } \sum_{i=1}^n \psi_i b_i < 0. \end{cases} \quad (7.4)$$

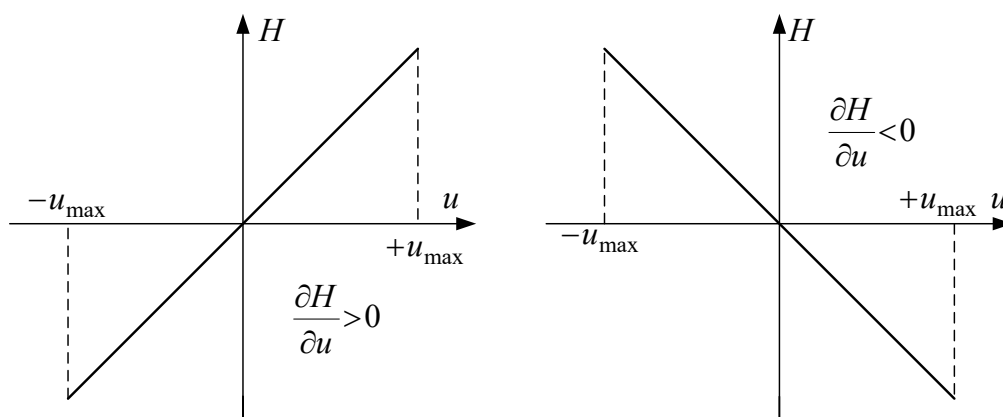


Рис. 7.1. Залежності функції Гамільтона від керування

Рівняння (7.4) можна переписати у вигляді:

$$u = u_{\max} \cdot \text{sign}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) = u_{\max} \cdot \text{sign}\left(\sum_{i=1}^n \psi_i b_i\right). \quad (7.5)$$

Цей вираз показує, що **керування в лінійних системах, оптимальних за швидкістю, має бути релейним.**

Одна з окремих, але досить важливих задач оптимальної швидкодії розв'язана в 1953 р. у працях Фельдбаума незалежно від праць Понтрягіна. Фельдбаум довів таку теорему: для об'єктів, що описуються лінійним

диференціальним рівнянням n -го порядку зі сталими коефіцієнтами, корені характеристичного рівняння якого є дійсними від'ємними або нульовими, *оптимальне керування має не більше, ніж n інтервалів максимального значення $|u|=u_{\max}$ та $n-1$ моментів перемикання.*

Ця теорема дістала назву *теорема Фельдбаума про n інтервалів.*

Теорема про n інтервалів може бути поширена також на випадок, коли обмеження накладаються не тільки на керування u , але й на змінні стану системи. У цьому разі кількість інтервалів оптимального керування збільшується, тому що крім інтервалів, у яких максимального значення набуває керування, додаються ще й інтервали, коли обмежені змінні стану системи мають свої граничні значення.

Сама по собі теорема про n інтервалів не дає правила вибору знаку керування на першому інтервалі та способів визначення тривалості інтервалів або моментів перемикання.

У багатьох випадках знак керуючого сигналу на початку процесу визначається потрібним напрямком змінювання вихідного сигналу x . Одним з способів знаходження моментів перемикання є *метод стикування розв'язків диференціальних рівнянь із знакозмінною правою частиною.*

Для задач, у яких на клас шуканих екстремалей не накладені обмеження, принцип максимуму дає ті ж результати, що і метод класичного варіаційного числення при рішенні задач на умовний екстремум.

Однак, на відміну від класичного варіаційного числення, принцип максимуму дозволяє знаходити екстремалі у вигляді кусочно-неперервних функцій і враховувати наявність обмеження на керування.

Отже, порядок розв'язання задач синтезу систем, оптимальних за швидкістю з обмеженням на керування такий [1-3, 7]:

1. Складають функцію Гамільтона.
2. Знаходять часткові похідні від Гамільтоніана за керуваннями i , прирівнюючи їх до 0, знаходять залежності оптимальних керувань від допоміжних функцій Лагранжа. У разі лінійної залежності функції

Гамільтона від керувань, оптимальні керування є релейними. Моменти зміни знаку керувань називають моментами перемикання.

3. Для визначення допоміжних функцій Лагранжа, що входять у вирази для оптимальних керувань, складають і розв'язують систему спряжених рівнянь Гамільтона.
4. У випадку розімкненої системи встановлюють кількість перемикань і знаходять їх часи методом стиковки рішень ДР зі знаковмінною правою частиною. При цьому в загальному випадку отримують систему трансцендентних рівнянь, розв'язок якої можливо знайти тільки чисельними методами. Винятком є системи із кратними нульовими полюсами.
5. У випадку замкненої системи шукають залежність керування від регульованої координати. При цьому моменти перемикання визначаються автоматично.

Насправді для лінійних систем перші 3 пункти можна не виконувати, тому що результат виконання цих пунктів є відомим.

7.1.2 Оптимальне за швидкодією керування позиційним приводом при обмеженні прискорення

Маємо механічну систему, що описується лінійною системою звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \end{cases} \quad (7.6)$$

і має ненульові початкові умови:

$$\omega(0) = \omega_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \quad (7.7)$$

7.1.2.1 Синтез оптимального закону керування у функції часу

При синтезі оптимального керування задача полягає у пошуку такої функції часу $u(t) = \varepsilon(t)$, яка при наявності обмеження

$$|\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \quad (7.8)$$

за мінімально можливий час t_f переведе об'єкт у стан

$$\omega(t_f) = 0, \quad \alpha(t_f) = 0. \quad (7.9)$$

Введемо позначення змінних стану:

$$\mathbf{x} = [\alpha \ \omega]^T,$$

тобто

$$\alpha = x_1, \quad \omega = x_2.$$

Складемо функцію Гамільтона

$$H = \psi_1 \omega + \psi_2 \varepsilon \quad (7.10)$$

і запишемо спряжені рівняння системи канонічних рівнянь Понтрягіна-Гамільтона:

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{dH}{d\alpha} = 0, \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{dH}{d\omega} = -\psi_1, \end{cases} \quad (7.11)$$

інтегруванням яких отримуємо

$$\psi_1 = C_1, \quad \psi_2 = C_2 - C_1 t.$$

Враховуючи, що $\frac{\partial H}{\partial \varepsilon} = \psi_2$, отримуємо шукане керування у вигляді

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot \text{sign}(\psi_2) = \varepsilon_0 \cdot \text{sign}(C_2 - C_1 t), \quad (7.12)$$

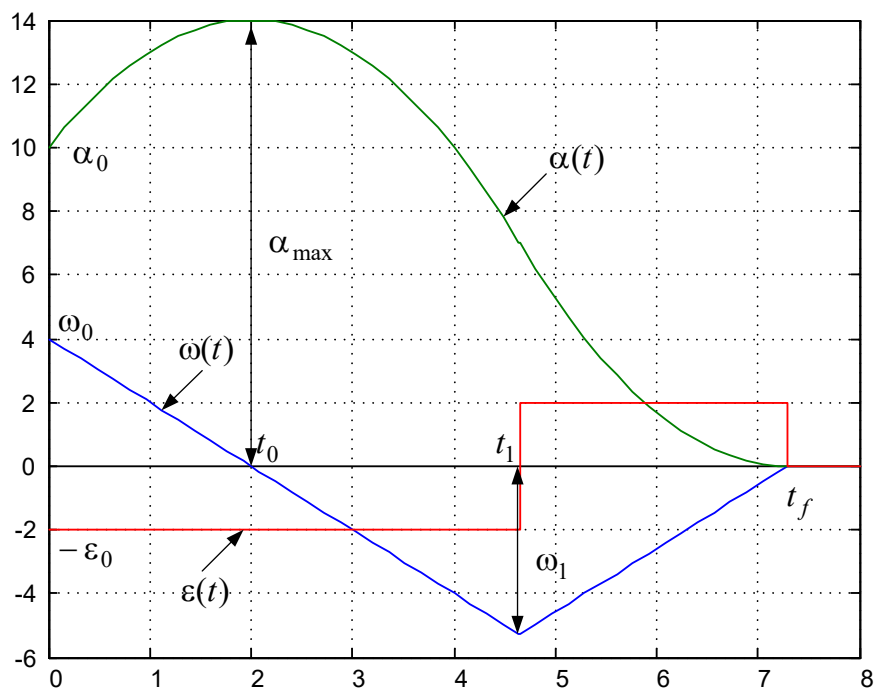
до якого треба додати граничні умови:

$$\varepsilon(-0) = 0, \quad \varepsilon(t_f) = 0. \quad (7.13)$$

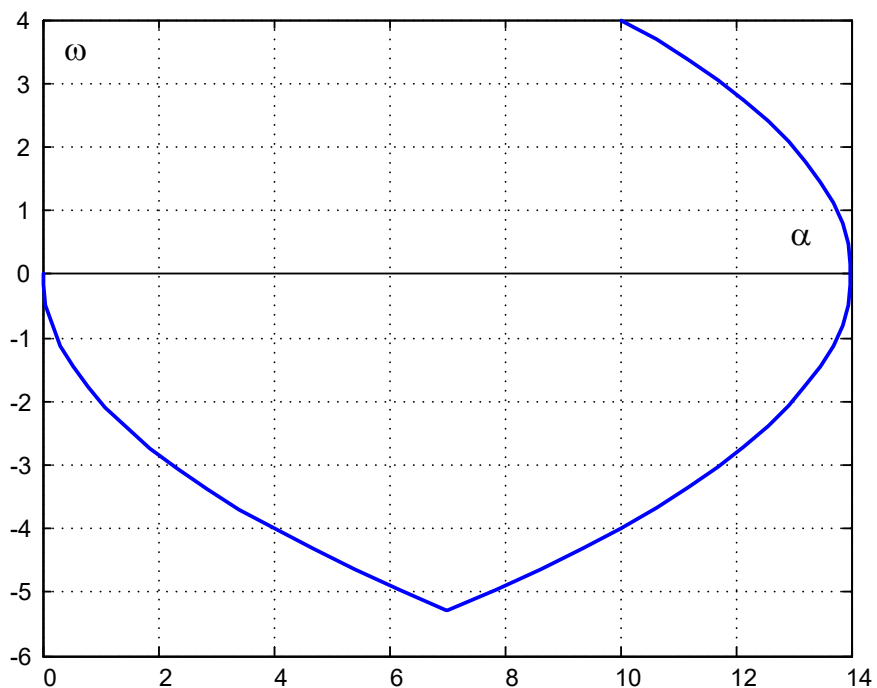
Згідно з теоремою про інтервали та отриманим виразом (7.11) релейна функція може змінювати знак не більше 1-го разу, тобто або 1 раз, або жодного разу. Початковий знак керування визначаємо за фізикою процесів, що описуються ДР (7.6). В даному випадку знак прискорення на початку перехідного процесу залежить від граничних умов (7.7), (7.9). Розглянемо випадок, коли в початковому стані швидкість та положення додатні, тобто

$$\omega_0 > 0. \quad \text{і} \quad \alpha_0 > 0 \quad (7.14)$$

В цьому разі швидкість треба спочатку знизити до 0 (за цей час відхилення положення від 0 навіть дещо збільшиться), а потім привести положення в 0 за симетричною трикутною тахограмою у від'ємному напрямку так, як це показано на рис. 7.1.



а)



б)

Рис. 7.1. Оптимальні перехідні процеси (а) та фазова траєкторія (б) при $\alpha_0 = 10$, $\omega_0 = 4$, $\varepsilon_0 = 2$

Позначимо час гальмування з початкової швидкості до 0 як t_0 . Тоді

$$t_1 = \frac{t_0 + t_f}{2}, \quad t_0 = \frac{\omega_0}{\varepsilon_0}. \quad (7.15)$$

Згідно з геометричним сенсом визначеного інтеграла

$$\alpha_f = \alpha_0 + \frac{\omega_0 t_0}{2} + \frac{\omega_1 (t_f - t_0)}{2} = 0, \quad (7.16)$$

де

$$\omega_1 = \omega(t_1) = \omega_0 - \varepsilon t_1 = \omega_0 - \varepsilon \frac{t_f + t_0}{2}. \quad (7.17)$$

Після підстановки (7.17) у (7.16), приведення до спільного знаменника та приведення подібних отримуємо

$$4\alpha_0 + 2\omega_0 t_f - \varepsilon_0 (t_f^2 - t_0^2) = 0.$$

Далі ділимо усі члени останнього рівняння на $-\varepsilon_0$ і одержуємо таке квадратне рівняння відносно t_f :

$$t_f^2 - 2t_0 t_f - \left(4 \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0} + t_0^2 \right) = 0. \quad (7.18)$$

Його розв'язок має вигляд:

$$t_f = t_0 + \sqrt{2t_0^2 + \frac{4\alpha_0}{\varepsilon_0}}.$$

Тепер можна визначити і час перемикання (7.19)

$$t_1 = \frac{t_0}{2} + \frac{t_f}{2} = t_0 + \sqrt{\frac{t_0^2}{2} + \frac{\alpha_0}{\varepsilon_0}}. \quad (7.20)$$

Окремим випадком отриманих формул будуть формули при $\omega_0 = 0$, коли і $t_0 = 0$:

$$t_1 = \sqrt{\frac{\alpha_0}{\varepsilon_0}}, \quad t_f = 2t_1. \quad (7.21)$$

Графіки перехідних процесів, отримані при розрахунку прискорення за наведеними формулами при $\alpha_0 = 10$, $\omega_0 = 4$, $\varepsilon_0 = 2$ наведені на рис. 7.2. На рис. 7.3 для цього ж випадку зображено фазову траєкторію.

Недоліком наведеного методу розв'язку є те, що для різних сполучень початкових умов форма перехідних процесів буде змінюватися, як буде показано пізніше (див. рис. 7.6). При цьому будуть змінюватися і формули для розрахунку часів перемикавання прискорення.

7.1.2.2 Синтез замкненого задатчика положення

Спробуємо розв'язати поставлену задачу шляхом створення замкненого задатчика положення, який автоматично буде переводити змінні стану задавального пристрою з однієї заданої позиції в іншу при будь-яких початкових умовах.

Для цього поділимо перше ДР на друге:

$$\frac{d\alpha}{d\omega} = \frac{\omega}{\varepsilon}, \quad (7.22)$$

звідкіля на ділянках роботи з постійним прискоренням знаходимо рівняння фазових траєкторій у системі координат α, ω :

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_{\min} + \frac{\omega^2}{2\varepsilon_0} & \text{при } \varepsilon = \varepsilon_0 \\ \alpha_{\max} - \frac{\omega^2}{2\varepsilon_0} & \text{при } \varepsilon = -\varepsilon_0 \end{cases} \quad (7.23)$$

Екстремуми парабол, що мають місце на першій ділянці релейного керування при $\omega = 0$, можна визначити із початкових умов:

$$\alpha_{\max} = \alpha_0 + \frac{\omega_0^2}{2\varepsilon_0}, \quad \alpha_{\min} = \alpha_0 - \frac{\omega_0^2}{2\varepsilon_0}. \quad (7.24)$$

Але для того, щоб система прийшла у стан рівноваги ($\omega = 0$, $\alpha = 0$) її треба перевести на фазову траєкторію, що проходить через початок координат і носить назву лінії переключення. Вона складається з частин парабол

$$\alpha_p = -\frac{\omega_p^2}{2\varepsilon_0} \operatorname{sign} \omega = \frac{\omega_p |\omega_p|}{2\varepsilon_0} = \begin{cases} \frac{\omega_p^2}{2\varepsilon_0} & \text{при } \varepsilon_p = \varepsilon_0 \rightarrow \omega_p < 0, \\ -\frac{\omega_p^2}{2\varepsilon_0} & \text{при } \varepsilon_p = -\varepsilon_0 \rightarrow \omega_p > 0. \end{cases}$$

або

$$\omega_p = -\sqrt{2\varepsilon_0 |\alpha|} \cdot \operatorname{sign} \alpha, \quad (7.25)$$

як це показано на рис. 7.3.

На цьому ж рисунку за формулою (7.23) побудовані і початкові фазові траєкторії (до перемикання).

Із рис. 7.3 видно, що при початкових умовах, які знаходяться вище лінії перемикання, оптимальний перехідний процес починається з від'ємного прискорення, а при початкових умовах, які знаходяться нижче лінії перемикання, – з додатного прискорення.

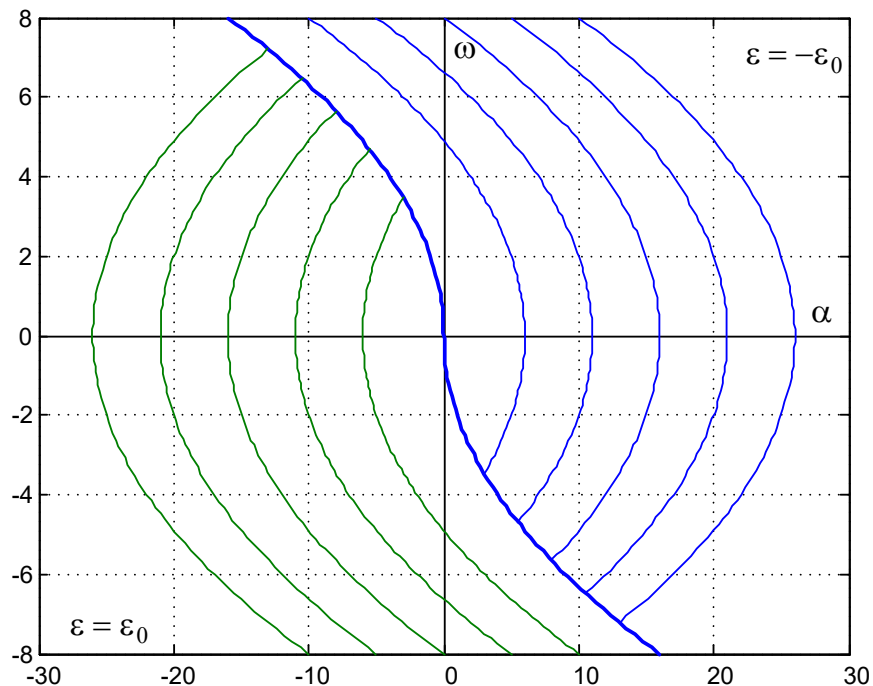
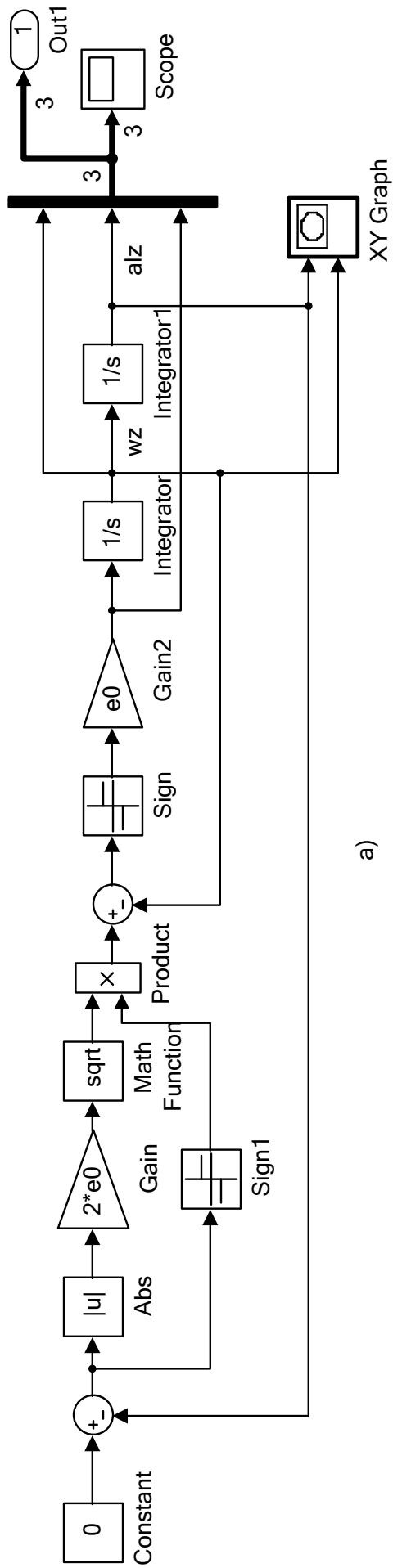
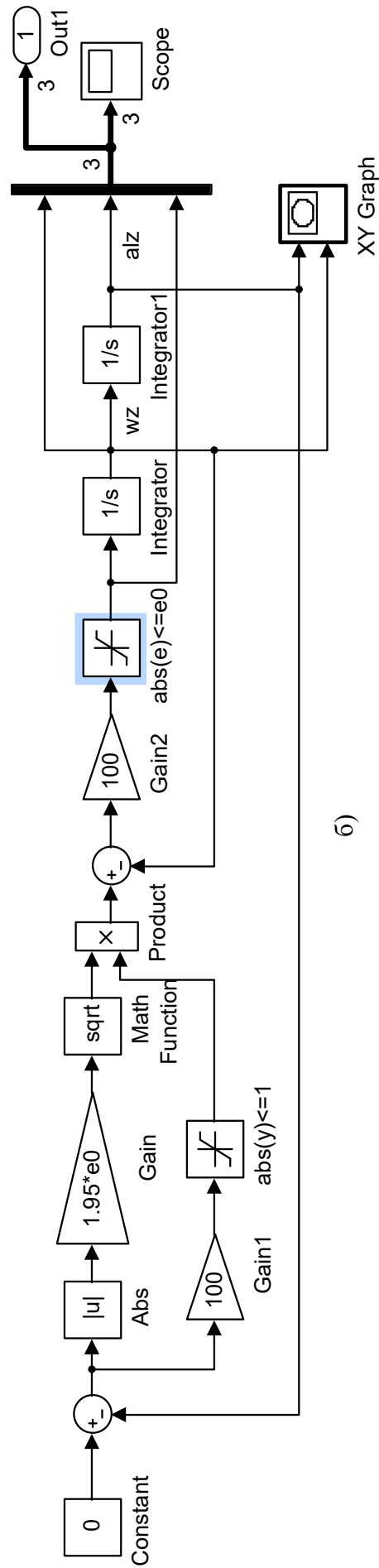


Рис. 7.3. Лінія перемикання і сукупність фазових траєкторій до перемикання

Покладаючись на останню формулу можна доповнити задатчик інтенсивності (ЗІ), який формує трикутні та трапецеїдальні тахограми з заданим прискоренням, до задатчика положення (ЗП). Структурна модель такого ЗП зображена на рис. 7.4а.



a)



б)

Рис. 7.4. Структурні моделі задачника положення з релейними елементами (а) та та з обмеженими похідними (б)

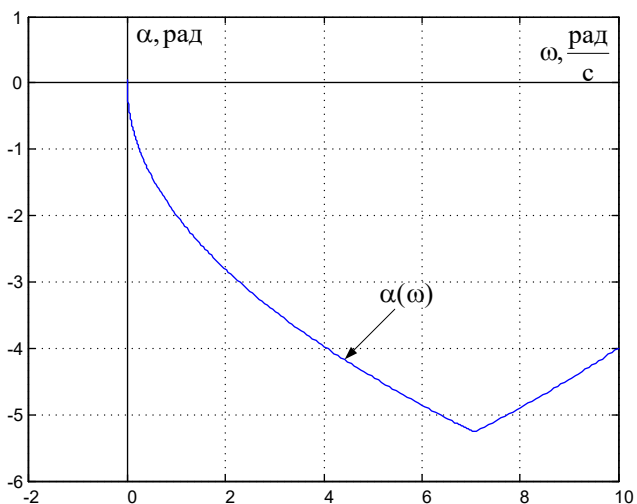
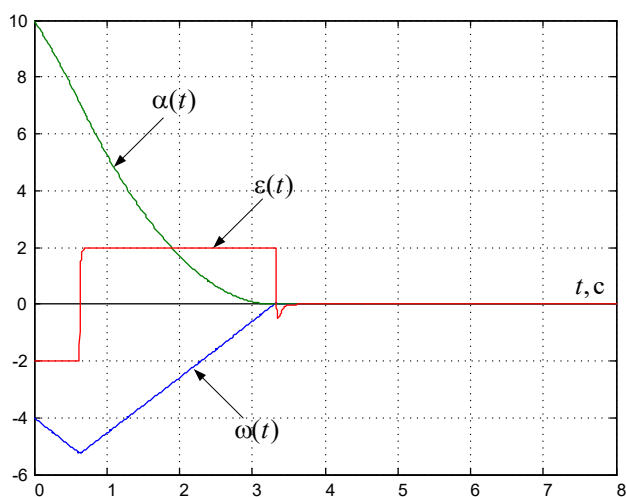
Її недоліком є те, що із-за наявності в замкнених контурах блоків з безкінечним коефіцієнтом підсилення, вони в усталеному режимі із-за дискретності за часом не приходять в нульову позицію, а перемикаються між додатним та від'ємним обмеженнями. Тому вони не можуть розраховуватися методами з автоматичним вибором кроку чисельного інтегрування, а при використанні методів з постійним кроком цей крок треба обирати дуже малим.

На рис. 7.4б подана та ж сама модель, в якій блоки з безкінечним коефіцієнтом підсилення замінено блоками з великим але скінченним коефіцієнтом, а лінію переключення фазових траєкторій з урахуванням цієї обставини, дещо наближено до осі абсцис (коефіцієнт 2 у формулі (7.25) знижено до 1.95). Перехідні процеси при різноманітних варіантах початкових умов, отримані за допомогою останньої моделі показані на рис. 7.5.

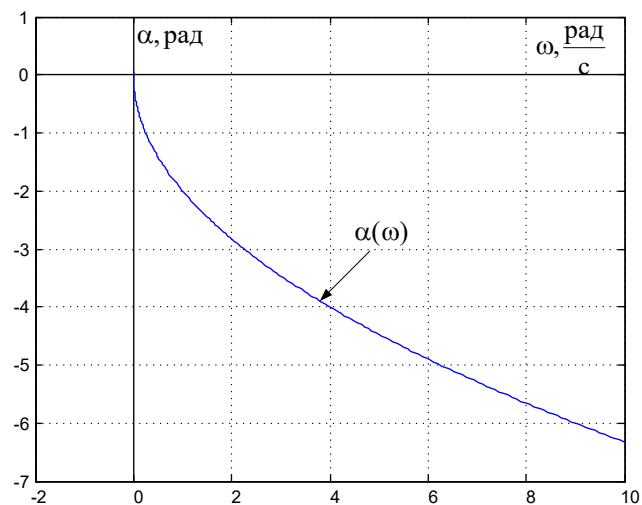
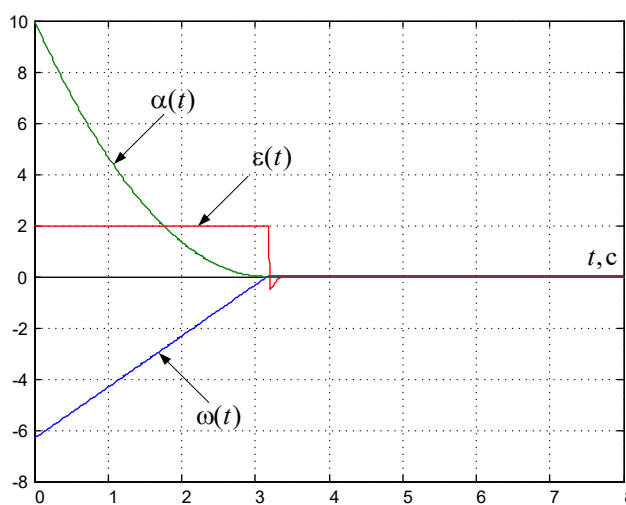
Крім того, що в такій системі не треба знаходити аналітичні залежності для розрахунку часу перемикання керуючої дії, за рахунок зворотного зв'язку систему можна переводити не тільки в нульове положення, а в будь-яку бажану позицію, яку треба задати у блоку *Const*.

Із аналізу графіків рис. 7.2, 7.3 та 7.5 випливає:

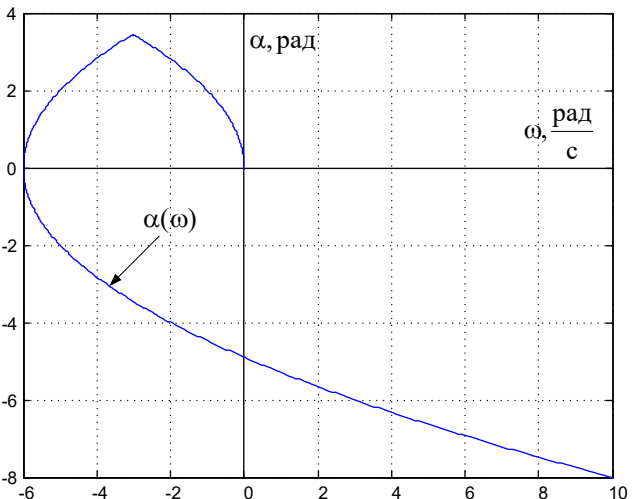
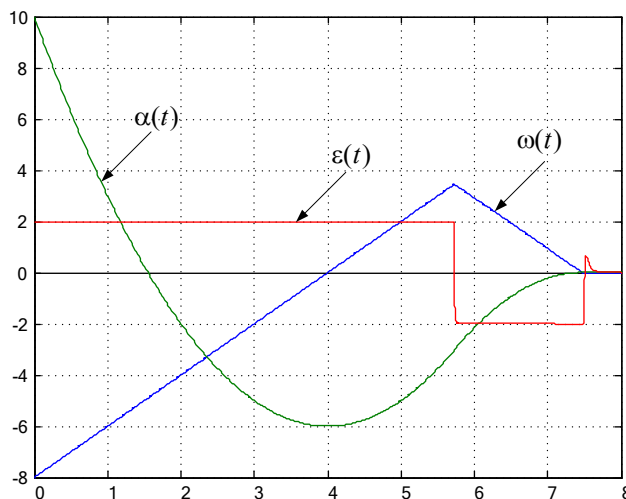
- 1) при початкових умовах, які знаходяться вище лінії перемикання, оптимальний перехідний процес починається ділянкою з від'ємним прискоренням, а закінчується ділянкою з додатним прискоренням;
- 2) при початкових умовах, які знаходяться нижче лінії перемикання, оптимальний перехідний процес починається ділянкою з від'ємним прискоренням, а закінчується ділянкою з додатним прискоренням;
- 3) при початковому знаходженні зображуючої точки на лінії перемикання оптимальний перехідний процес відбувається в один етап (без перемикань): з додатним максимальним прискоренням при знаходженні точки у 4-му квадранті та з від'ємним прискоренням при знаходженні її у другому квадранті;
- 4) чим ближче знаходиться точка з початковими координатами до лінії перемикання, тим менше час перехідного процесу.



а)



б)



в)

Рисунок 7.5. Перехідні процеси та фазові траєкторії при різних початкових положеннях зображуючої точки:
 а) вище лінії перемикання (ЛП); б) на ЛП; в) нижче ЛП

7.2 Завдання

1. Зібрати модель задатчика положення (ЗП) за схемою рис. 7.4а. Виявити її недоліки.
2. Зібрати модель ЗП за схемою рис. 7.4б. Отримати графіки перехідних процесів при різних завданнях та різних початкових умовах.
3. Додати до ЗП замкнену систему регулювання положення (СРП) з пропорційним регулятором швидкості та лінійним регулятором положення.
4. Розробити модель системи позиційного електроприводу без ЗП з лінійним регулятором швидкості.
5. Розробити модель системи позиційного електроприводу без ЗП з нелінійним регулятором швидкості.
6. Порівняти якість перехідних процесів у системі з нелінійним РП без ЗП та у системі з нелінійним РП без ЗП.

Пункти 4-6 завдання виконуються за бажанням при наявності часу.

7.3 Методичні рекомендації до виконання завдання

1. При моделюванні систем, оптимальних за швидкодією, ретельно обирайте метод розв'язання диференціальних рівнянь та його параметри.
2. Обмежити темп зміни релейного сигналу можна ще блоком Rate Limiter.
3. При моделюванні оптимальної за швидкодією системи позиційного електроприводу без задатчика положення реалізуйте нелінійний регулятор положення блоком *Look Up Table*.

7.4 Контрольні питання та завдання

1. Які варіаційні задачі розв'язують за допомогою принципу максимуму Понтрягіна?
2. Який вигляд має керування, оптимальне за швидкодією?
3. Сформулюйте теорему Фельдбаума про n інтервалів.
4. Яким методом знаходять тривалість інтервалів релейного керування?
5. Виведіть формулу нелінійного регулятора положення без врахування інерційності контуру швидкості.

Практичне заняття 8

ОПТИМАЛЬНЕ ТА КВАЗІОПТИМАЛЬНЕ ЗА ШВИДКОДІЄЮ ГАСІННЯ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ ВІЗОК-ВАНТАЖ МОСТОВОГО КРАНУ

8.1 Теоретичні положення

При переміщенні вантажів крановими установками вантаж, причеплений за допомогою гнучкого канату до візка, що рухається по мосту козлового чи мостового крану, або по стрілі поворотного крану, розгойдується. При додаванні до руху візка руху механізму, на якому встановлено візок (поступовий рух моста або круговий рух стріли), коливання у різних площинах з різною амплітудою приводять ще й до скручування канату. В результаті скорочується термін його експлуатації. Коливання вантажу приводять до значного збільшення часу транспортування із-за необхідності вичікувати в кінці переміщення їхнього природного або примусового загасання, яке здебільш виконується вручну, щоб забезпечити бажану точність позиціонування. Це може привести до травм обслуговуючого персоналу. При розгойдуваннях вантажу також зростають навантаження на механічні конструкції кранових установок.

Тому автоматичне гасіння коливань вантажу засобами електроприводу є актуальною задачею.

8.1.1 Аналіз механічної системи візок-вантаж як об'єкту керування

Розглянемо найпростіший випадок: рух візка по лінійній траєкторії з підвішеним до нього за допомогою гнучкого канату постійної довжини вантажем. Схематичне зображення такого механічного об'єкту подано на рис. 8.1, де прийнято такі позначення: M – маса візка, m – маса вантажу, L – довжина канату, F – зусилля, прикладене до візка, v – горизонтальна швидкість візка, s – горизонтальне переміщення візка, φ – кут відхилення вантажу від вертикалі, ω – кутова швидкість коливань вантажу.

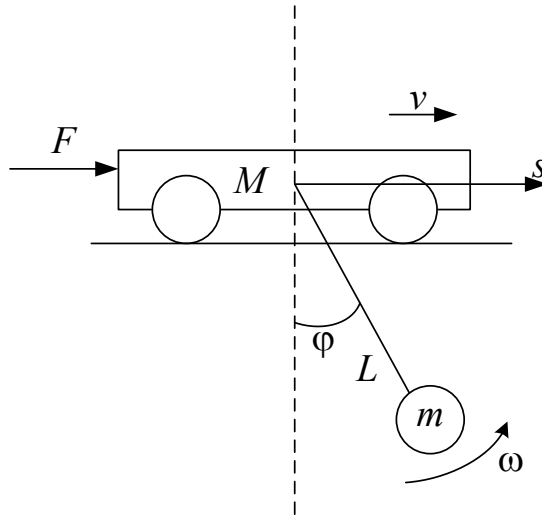


Рисунок 8.1. Схематичне зображення візка з підвішеним вантажем

Математичний опис такого об'єкту керування визначається шляхом використання рівняння Лагранжа другого роду і має вигляд [Аккер, Гер.,]

$$\begin{cases} (M + m) \frac{dv(t)}{dt} + mL \cos \varphi(t) \frac{d\omega(t)}{dt} - mL \omega(t)^2 \sin \varphi(t) = F(t), \\ \cos \varphi(t) \frac{dv(t)}{dt} + L \frac{d\omega(t)}{dt} + g \sin \varphi(t) = 0, \end{cases} \quad (8.1)$$

$$\begin{cases} \frac{ds(t)}{dt} = v(t), & \frac{dv(t)}{dt} = a(t), \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega(t), & \frac{d\omega(t)}{dt} = \varepsilon(t), \end{cases} \quad (8.2)$$

де $a(t)$ – лінійне прискорення візка; $\varepsilon(t)$ – кутове прискорення вантажу;

Структурна модель, що відповідає рівнянням (8.1), (8.2) наведена на рис. 8.2.

Рівняння (8.1) є нелінійними, що ускладнює процес оптимізації. При пересуванні візка кут відхилення канату від вертикалі має невеликі значення, завдяки чому можна прийняти:

$$\cos \varphi \approx 1, \quad \sin \varphi \approx \varphi, \quad \omega^2 \approx 0. \quad (8.3)$$

В такому випадку рівняння (8.1) стають лінійними:

$$\begin{cases} (M + m) \frac{dv(t)}{dt} = F(t) + mL\varepsilon(t), \\ L \frac{d\omega(t)}{dt} = a(t) - g\varphi(t). \end{cases} \quad (8.4)$$

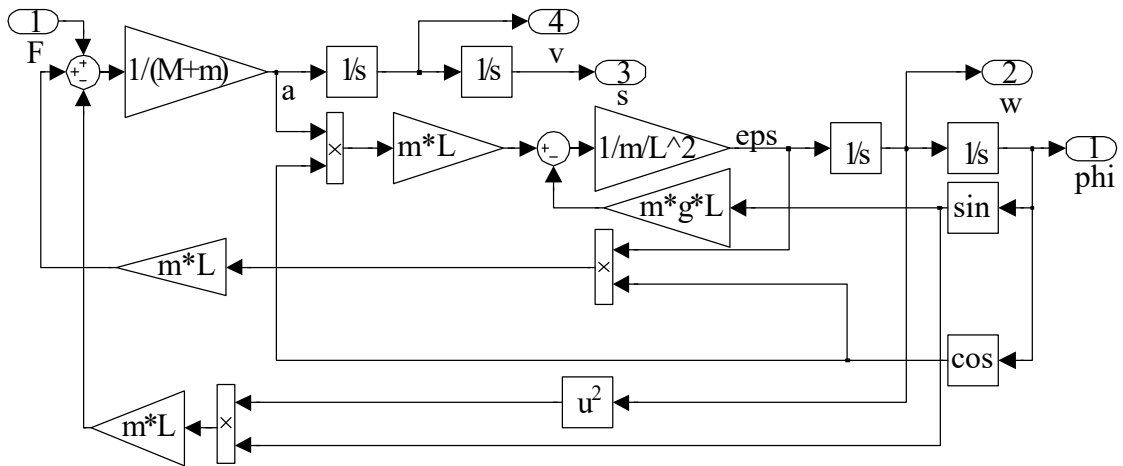


Рис. 8.2. Нелінійна структурна модель механічної системи «візок-вантаж»

Системі рівнянь (8.4) відповідає структурна схема, наведена на рис. 8.3.

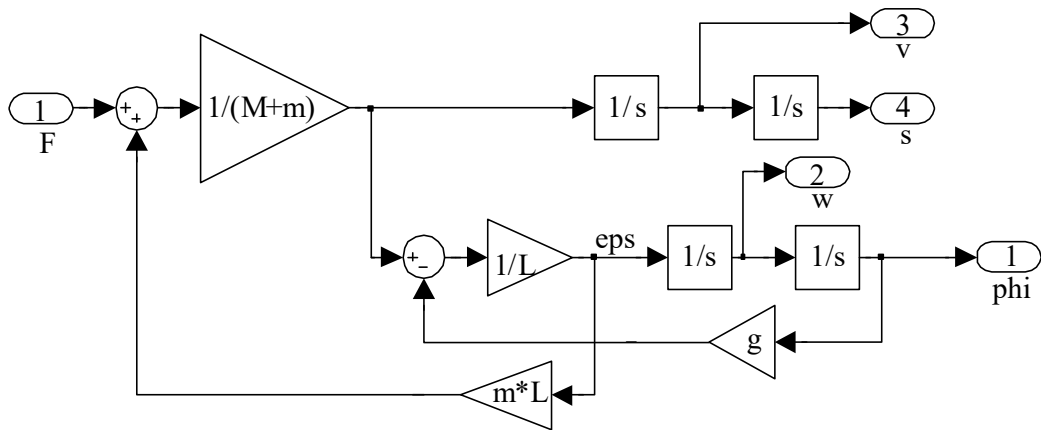


Рис. 8.3. Лінеаризована структурна модель системи «візок-вантаж»

Із цієї схеми знаходимо передавальні функції (ПФ) об'єкту регулювання:

$$\frac{\varphi(p)}{F(p)} = \frac{1}{(M+m)g} \cdot \frac{1}{(T^2 p^2 + 1)}, \quad (8.5)$$

$$\frac{a(p)}{F(p)} = \frac{1}{(M+m)} \cdot \frac{(T_0^2 p^2 + 1)}{(T^2 p^2 + 1)} \quad (8.6)$$

де

$$T_0 = \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (8.7)$$

– стала часу коливань ідеального маятника ($M = \infty, v = 0$), тобто вантажу, підвішеного до нерухомої основи на невагомому, абсолютно жорсткому канаті;

$$T = \sqrt{\frac{L}{g} \cdot \frac{M}{M+m}} = T_0 \sqrt{\frac{M}{M+m}} \quad (8.8)$$

– стала часу коливань вантажу, підвішеного до візка (двомасової механічної системи візок-вантаж).

Діленням (8.8) на (8.7) отримуємо:

$$\frac{\varphi(p)}{a(p)} = \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{(T_0^2 p^2 + 1)}. \quad (8.9)$$

Із ПФ (8.5) знаходимо реакцію вантажу на стрибок зусилля $F(t) = F_0 \cdot 1(t)$ при нульових початкових умовах:

$$\varphi(t) = \frac{F_0}{(M+m)g} \left(1 - \cos \frac{t}{T} \right), \quad (8.10)$$

що відповідає коливанням вантажу з періодом (8.8) навколо похилої осі від 0 до

$$\varphi_{\max} = \frac{2F_0}{(M+m)g}.$$

Похідна за часом від (8.10) визначає кутову швидкість коливань вантажу

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{F_0}{(M+m)gT} \sin \frac{t}{T} = \frac{F_0}{\sqrt{Lg(M+m)M}} \sin \frac{t}{T}. \quad (8.11)$$

Згідно з (8.6) прискорення візка теж має коливальний характер:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{F_0}{(M+m)} \left[\left(1 - \cos \frac{t}{T} \right) + T_0^2 \frac{d^2}{dt^2} \left(1 - \cos \frac{t}{T} \right) \right] = \\ &= \frac{F_0}{(M+m)} \left(1 - \cos \frac{t}{T} + \frac{T_0^2}{T^2} \cos \frac{t}{T} \right) = \frac{F_0}{(M+m)} \left[1 + \left(\frac{T_0^2}{T^2} - 1 \right) \cos \frac{t}{T} \right], \end{aligned}$$

або з врахуванням (8.7) та (8.8)

$$a(t) = \frac{F_0}{(M+m)} \left[1 + \frac{m}{M} \cos \frac{t}{T} \right] = a_0 \left[1 + \frac{m}{M} \cos \frac{t}{T} \right], \quad (8.12)$$

де

$$a_0 = \frac{F_0}{(M+m)} \quad (8.13)$$

– середнє прискорення візка, що виникає під дією зусилля $F(t) = F_0 = const$.

Перехідні процеси коливань вантажу і візка при стрибкоподібній зміні зусилля, отримані при симуляції структурної моделі рис. 8.3, показані на рис. 8.4.

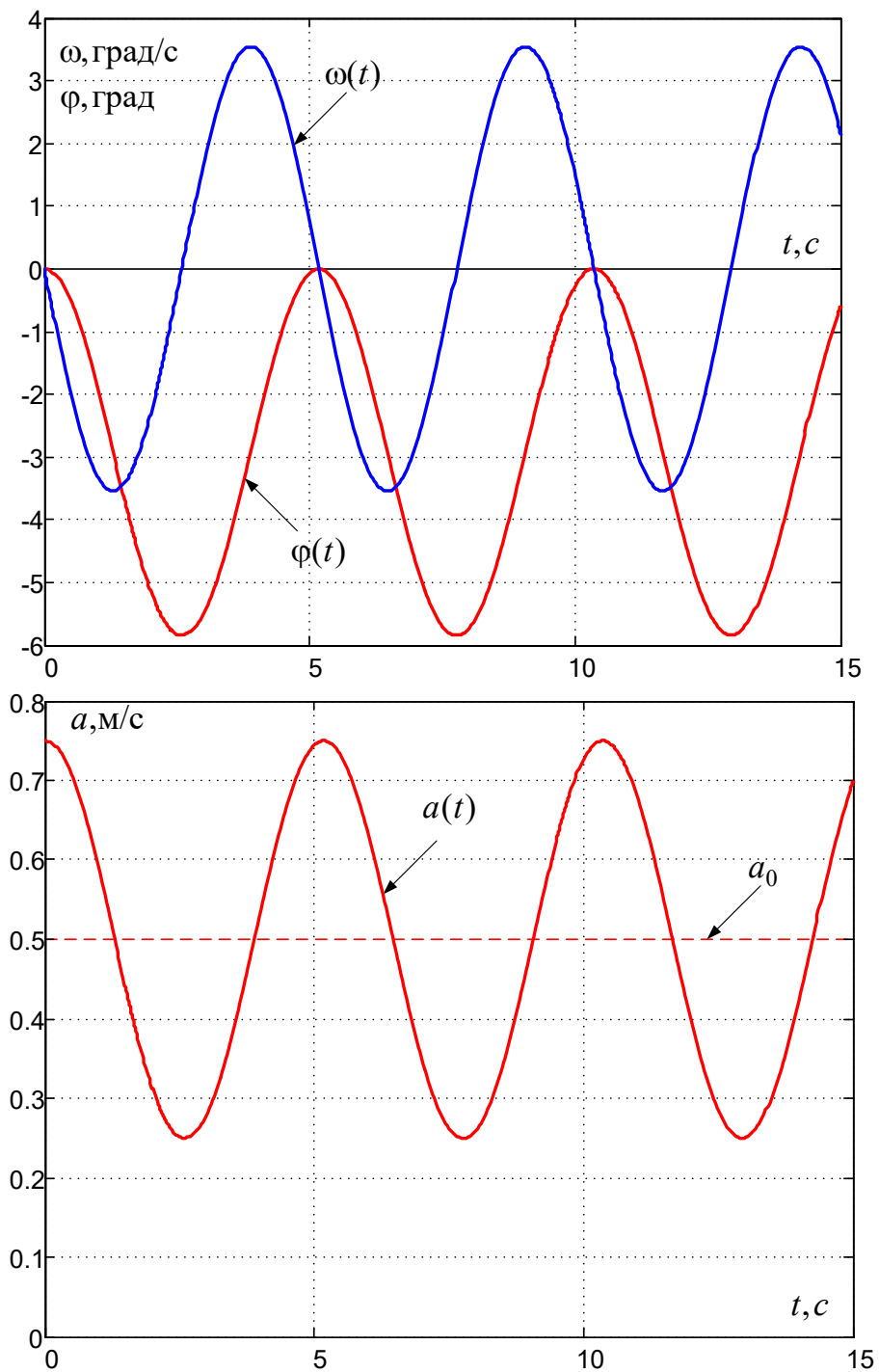


Рис. 8.4. Реакція механічної системи візок-вантаж на стрибок сили $F(t)=F_0 \cdot 1(t)$

При моделюванні використано такі параметри: маса візка $M=1000$ кг, маса вантажу $m=500$ кг, довжина канату $l=10$ м, середнє прискорення $a_0=0.5$ м/с², $F_0=a_0(M+m)=750$ Нм.

З рівнянь (8.10), (8.12) випливає, що в моменти часу, кратні періоду коливань ($t_k = 2\pi kT, k=1,2,\dots$) $a(t_k) = a_{\max} = F_0/M$, $a'(t_k) = 0$, $\varphi(t_k) = 0$, $\omega(t_k) = 0$, $v(t_k) = a_0(M+m) = v_0$. Це підтверджується графіками рис. 8.4.

8.1.2 Синтез алгоритмів пересування візка з умов оптимального за швидкодією гасіння коливань вантажу без врахування обмеження на прискорення

При стрибкоподібному зменшенні зусилля до 0, що необхідно для завершення розгону, розв'язок однорідного ДР, узгодженого з ПФ (8.5), при $F = 0$ з початковими умовами має вигляд

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \frac{t}{T} + \omega_0 T \sin \frac{t}{T}, \quad (8.14)$$

звідки випливає, що відхилення вантажу від вертикалі після зменшення зусилля до нуля змінюється у часі за гармонійним законом з амплітудою, що залежить від значень координат вантажу в момент переключення.

Задачею оптимального за швидкодією релейного керування в даному разі є визначення кількості переключень керуючої дії та пошук таких моментів переключення, при яких кут відхилення вантажу від вертикалі та кутова швидкість цього руху при завершенні розгону ($t=t_p$) будуть нульовими, а лінійна швидкість візка досягне заданого усталеного значення v_0 :

$$\varphi(t_p)=0, \quad \omega(t_p)=0, \quad v(t_p)=v_0. \quad (8.15)$$

Це забезпечить рух візка на усталеній швидкості без коливань вантажу. Якщо у такий же спосіб здійснювати керування гальмуванням візка, то коливань не буде і при досягненні візком цільового пункту (положення).

Як показав виконаний у попередньому пункті аналіз об'єкту регулювання, він має комплексно спряжені корені. Тому до нього не можна застосувати викладену в пункті 7.1.1 теорему Фельдбаума про n інтервалів.

Тому розв'яжемо задачу оптимального керування з одним та трьома інтервалами існування максимальної за модулем керуючої дії (*одноетапне та триетапне керування*). Двоетапне керування виключаємо із розгляду, тому що воно при будь-яких параметрах алгоритму керування приводить до перевищення швидкістю візка максимально припустимого значення v_0 .

8.1.2.1 Синтез одноетапного релейного керування зусиллям

При одноетапному релейному керуванні зусиллям розгін від нуля до усталеної швидкості та гальмування з усталеної швидкості до нуля здійснюється в один етап при постійній величині зусилля.

Розв'язок одноетапного оптимального керування впливає із аналізу, виконаного в пункті 8.1.1. Згідно до нього вантаж при перемиканні зусилля з максимального значення на нульове перестане коливатися при тривалості дії зусилля протягом часу, кратного періоду коливань.

Для розгону візка з вантажем до заданої усталеної швидкості v_0 за 1 період власних коливань двомасової системи

$$T_k = 2\pi T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g} \cdot \frac{M}{M+m}} \quad (8.16)$$

до візка треба прикласти зусилля

$$F_1 = (M+m)a_1, \quad a_1 = v_0/T_k. \quad (8.17)$$

Графіки перехідних процесів для такого випадку при $v_0 = 1$ м/с зображені на рис. 8.5.

Недоліком такого способу гасіння коливань є значне зменшення середнього прискорення і збільшення часу відпрацювання заданих переміщень, що приводить до зменшення продуктивності кранових установок. Цей недолік зумовлений тим, що періоди коливань двомасової системи візок-вантаж для більшості кранових механізмів зазвичай мають такі значення, що для досягнення мети оптимального керування середнє прискорення та відповідне йому зусилля доводиться зменшувати.

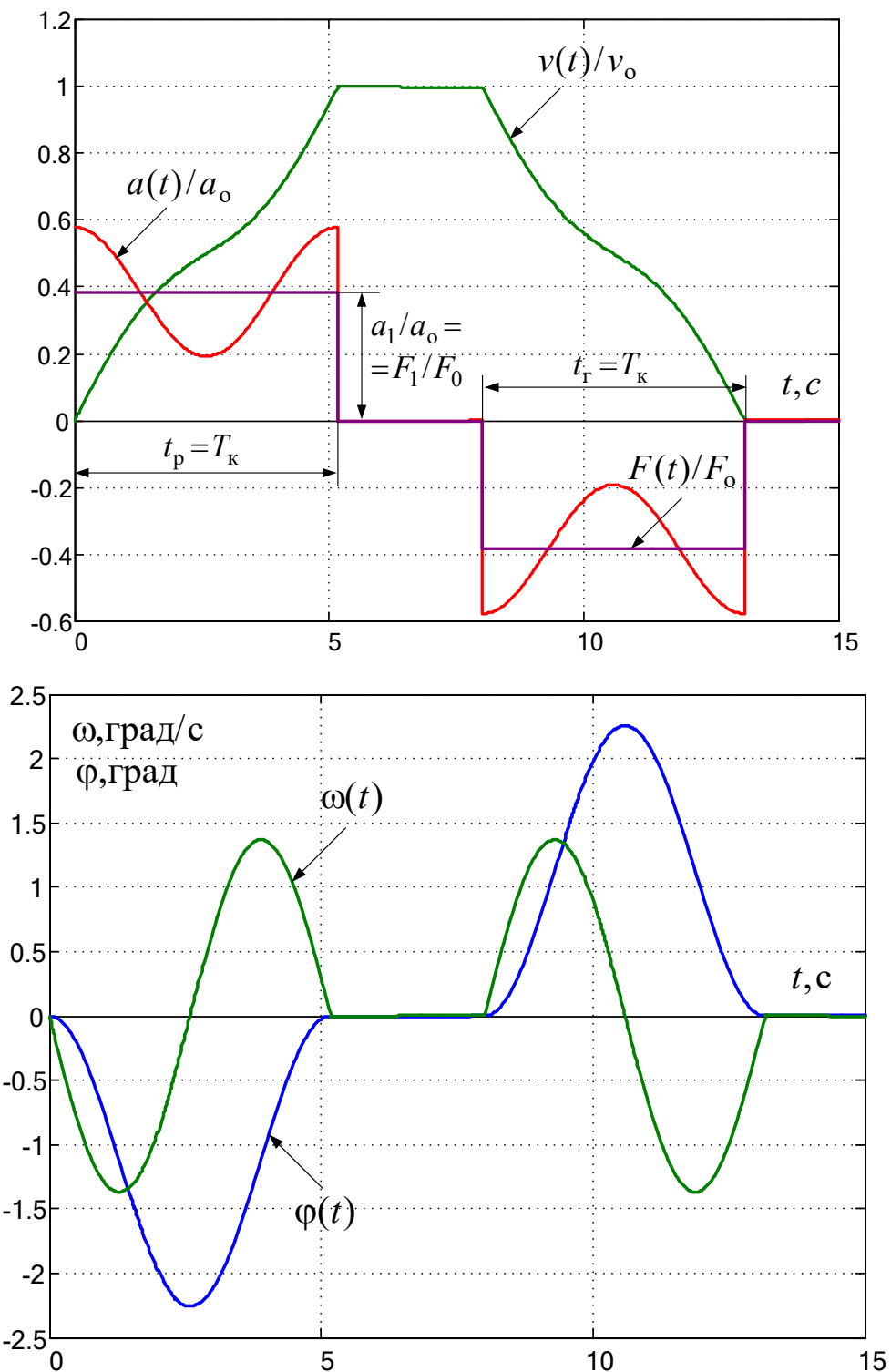


Рис. 8.5. Гасіння коливань вантажу при одноетапному релейному керуванні силою

8.1.2.2 Синтез триетапного релейного керування зусиллям

При триетапному керуванні керуюча дія (динамічне зусилля, що діє на візок) на ділянках розгону та гальмування стрибкоподібно змінюється тричі від максимального значення до мінімального та навпаки. Пошук часів перемикання

здійснюється методом стикування перехідних процесів на кожному етапі розгону з виконанням умов (8.15). Рівняння перехідних процесів на кожній ділянці знаходять шляхом розв'язання лінеаризованих диференціальних рівнянь руху візка із вантажем при різних початкових умовах, причому кінцеві значення координат попередньої ділянки слугують початковими значеннями наступної ділянки.

З отриманої системи трьох нелінійних рівнянь з трьома невідомими і визначаються три часових інтервали, що згідно з принципом максимуму Понтрягіна забезпечують у сукупності мінімальний час розгону, після закінчення якого вантаж коливатися не буде.

Докладне виведення цих рівнянь та виразів для розрахунку моментів перемикання зусиль наведено в [10, 12]. Згідно з [12] розрахунок виконують у такому порядку:

- 1) знаходять фіктивний час розгону системи візок-вантаж, який мала би ця система, якщо б вантаж був прикріпленим до візка не гнучким канатом, а жорстким кінематичним зв'язком, наприклад, телескопічною колоною:

$$t_{p0} = \frac{v_0}{a_0} = \frac{v_0(M+m)}{F_0}; \quad (8.18)$$

- 2) визначають тривалість другої ділянки числовим розв'язанням тригонометричного рівняння

$$\sin\left(\frac{t_2 - t_{p0}/2}{T}\right) - 2\sin\left(t_2 - \frac{t_{p0}}{2T}\right) = 0; \quad (8.19)$$

- 3) розраховують час розгону пружної системи візок-вантаж:

$$t_p = t_{p0} + 2t_2; \quad (8.20)$$

- 4) визначають тривалості першої та третьої ділянок:

$$t_1 = t_3 = (t_p - t_2)/2.$$

Перехідні процеси механічної пружної системи візок-вантаж при релейному оптимальному за швидкодією керуванні зусиллям, що забезпечує відпрацювання заданого положення з триетапному розгоном, рухом з усталеною швидкістю та триетапним гальмуванням, подані на рис. 8.6.

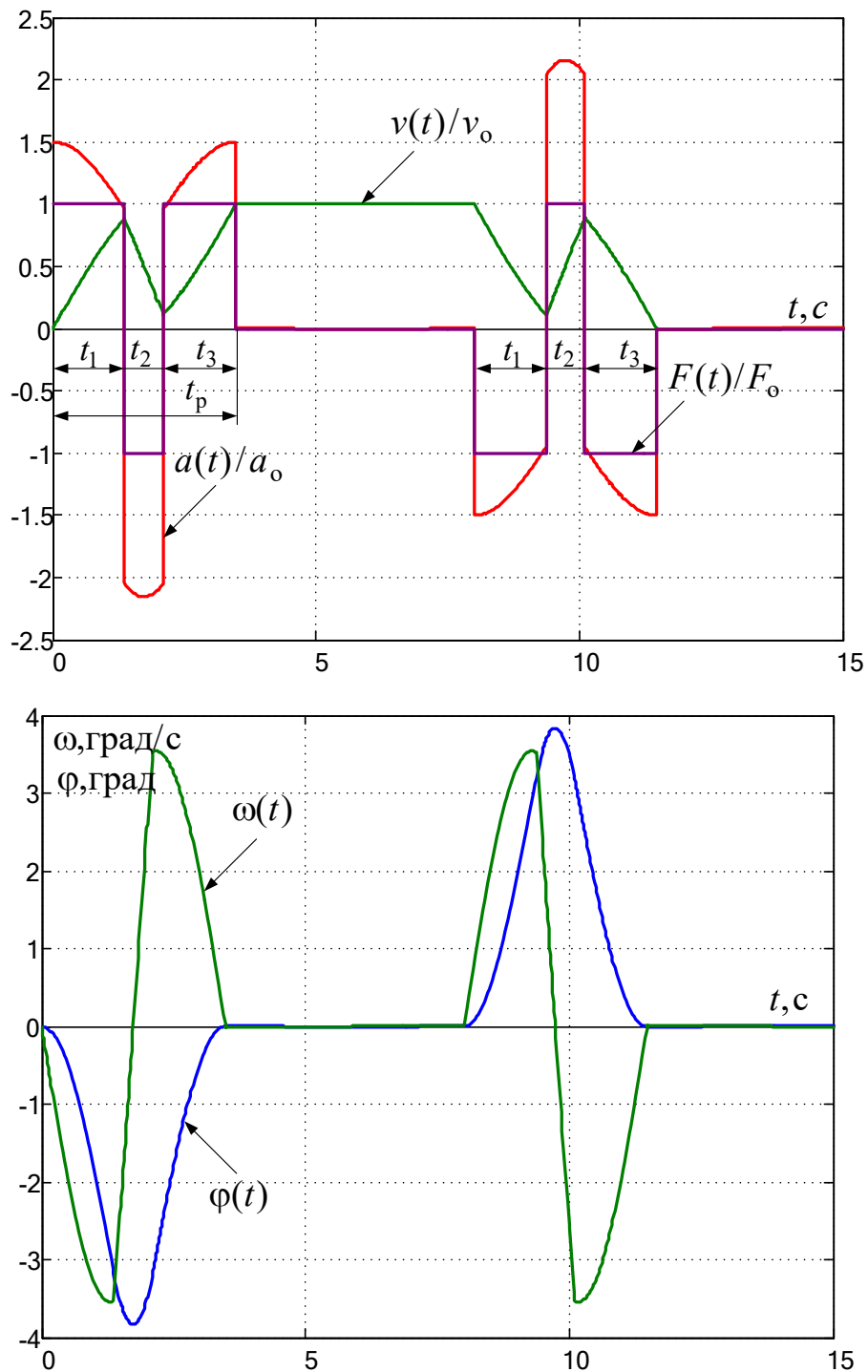


Рис. 8.6. Гасіння коливань вантажу при триетапному релейному керуванні силою

Як бачимо, коливання на усталеній швидкості та в цільовій точці відсутні. Розгін та гальмування за триетапними тахограмами відбуваються швидше, ніж при використанні одноетапних діаграм.

Недоліками розглянутого методу є залежність періоду коливань від маси вантажу, та значне збільшення прискорення та на другому етапі та ривків при перемиканні зусилля, що може привести до пробуксовок візка.

8.1.2.3 Синтез релейних керувань прискоренням

Якщо систему керування рухом візка замкнути за швидкістю або за положенням, то можна сформулювати завдання на релейну зміну не сили, а прискорення візка. Якщо знехтувати інерційністю замкнених контурів регулювання моментоутворюючим струмом, швидкістю та положенням, то для дослідження системи візок-вантаж з завданням на прискорення можна використати структурну математичну модель, подану на рис. 8.7.

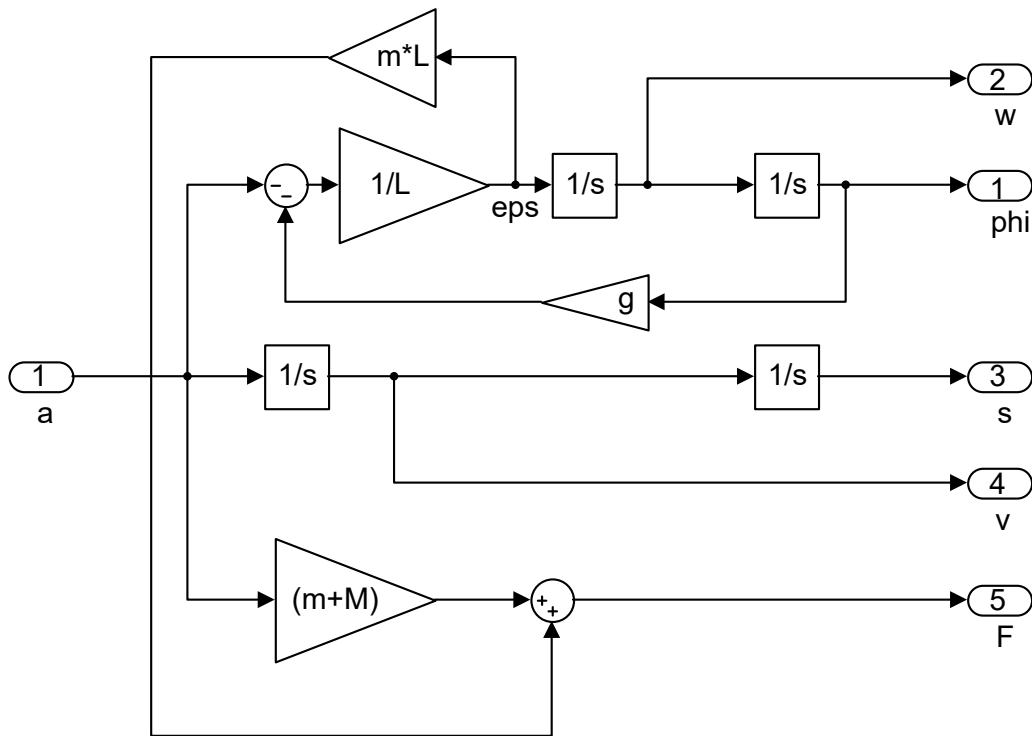


Рис. 8.7. Структурна модель системи візок вантаж для дослідження релейного керування прискоренням

З рівняння (8.9) випливає, що період коливань такої системи збігається з періодом коливань ідеального маятника та не залежить від мас візка та вантажу. Це підтверджується графіками, що відображають реакцію системи на стрибок прискорення (див. рис. 8.8).

У моменти часу, кратні періоду коливань, кут відхилення вантажу від вертикалі та кутова швидкість дорівнюють нулю, що є підґрунтям для синтезу *оптимального одноступінчатого релейного керування прискоренням*. Графіки відповідних перехідних процесів зображені на рис. 8.9.

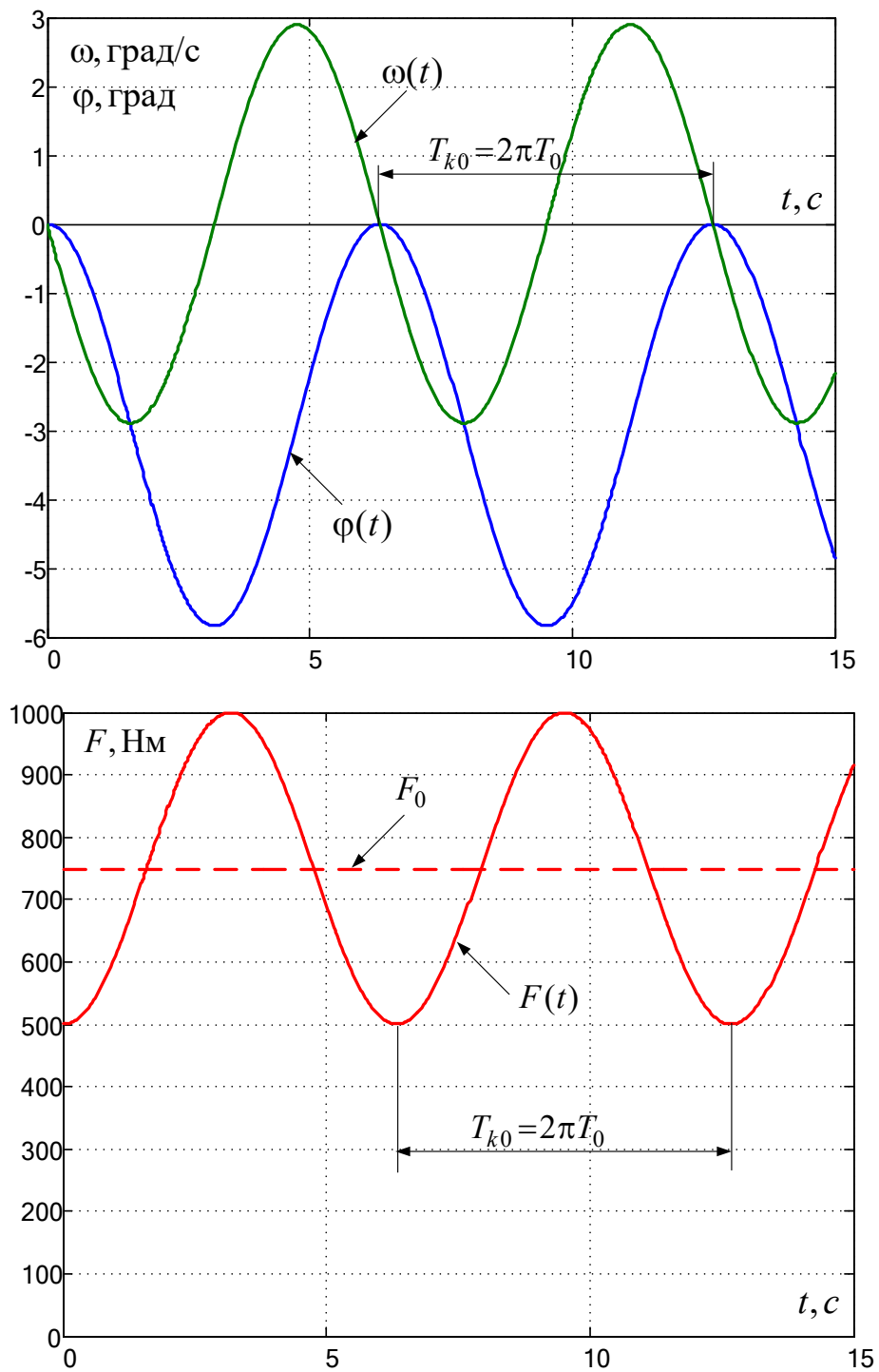


Рис. 8.8. Реакція механічної системи візок-вантаж на стрибок прискорення
 $a(t) = a_0 \cdot 1(t)$

Завдання на прискорення в цьому випадку розраховується за формулою

$$a_{01} = \frac{v_0}{T_{k0}} = a_0 \frac{t_{p0}}{T_{k0}}. \quad (8.21)$$

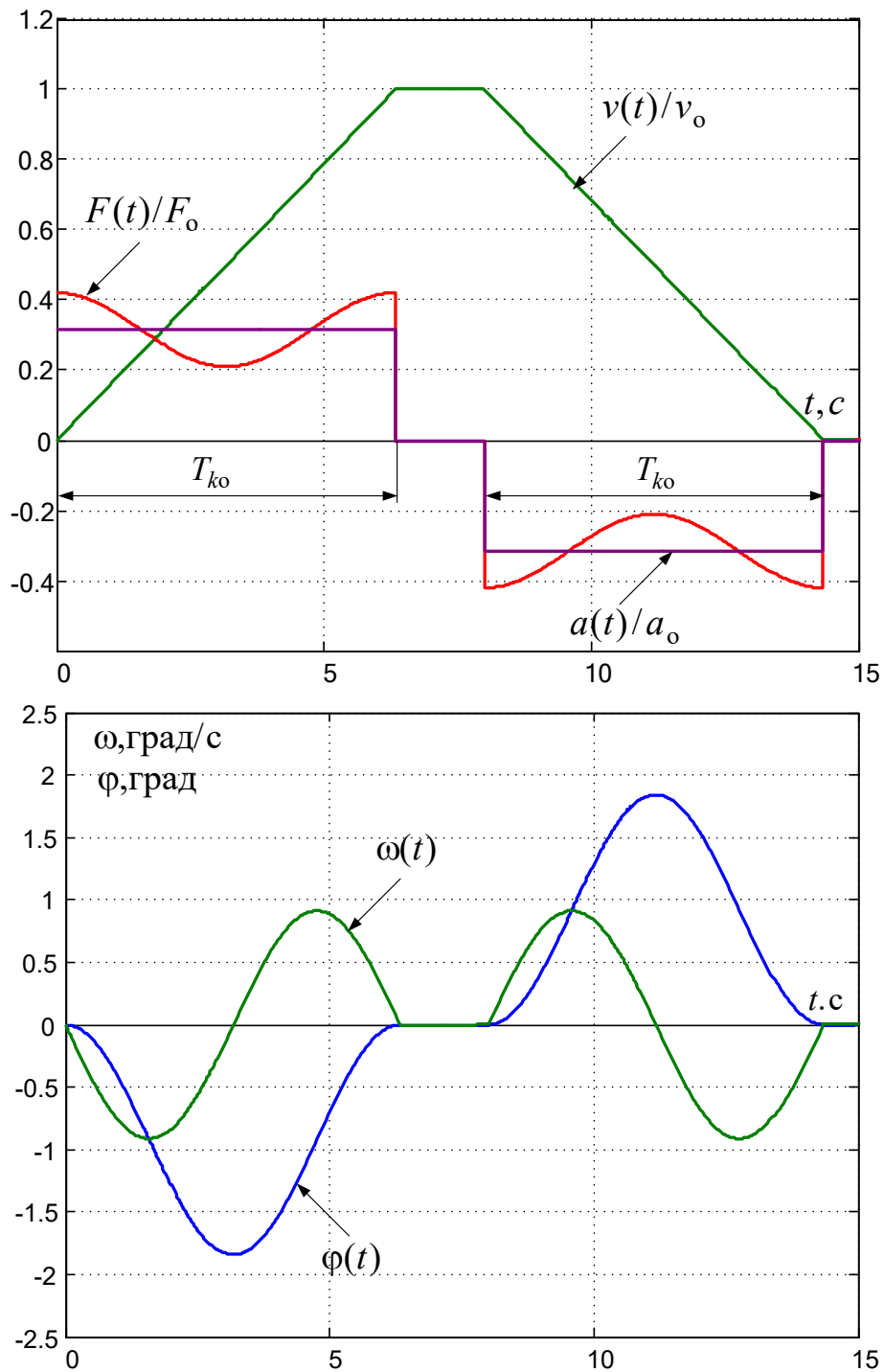


Рис. 8.9. Гасіння коливань вантажу при одноетапному релейному керуванні прискоренням

Задача оптимального за швидкістю триетапного керування прискоренням має такий розв'язок [12]:

$$t_p = \alpha T_0, \quad t_2 = \beta T_0, \quad t_1 = t_3 = (t_p - t_2)/2, \quad (8.22)$$

де параметр α знаходиться чисельним рішенням трансцендентного рівняння

$$\alpha - 4 \arcsin\left(\frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2}\right) - t_{p0}/T_0 = 0, \quad (8.23)$$

а коефіцієнт β розраховується за формулою

$$\beta = 2 \arcsin \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right]. \quad (8.24)$$

Перехідні процеси рухів візка і вантажу при використанні триетапних діаграм з релейним регулюванням прискорення показані на рис. 8.10.

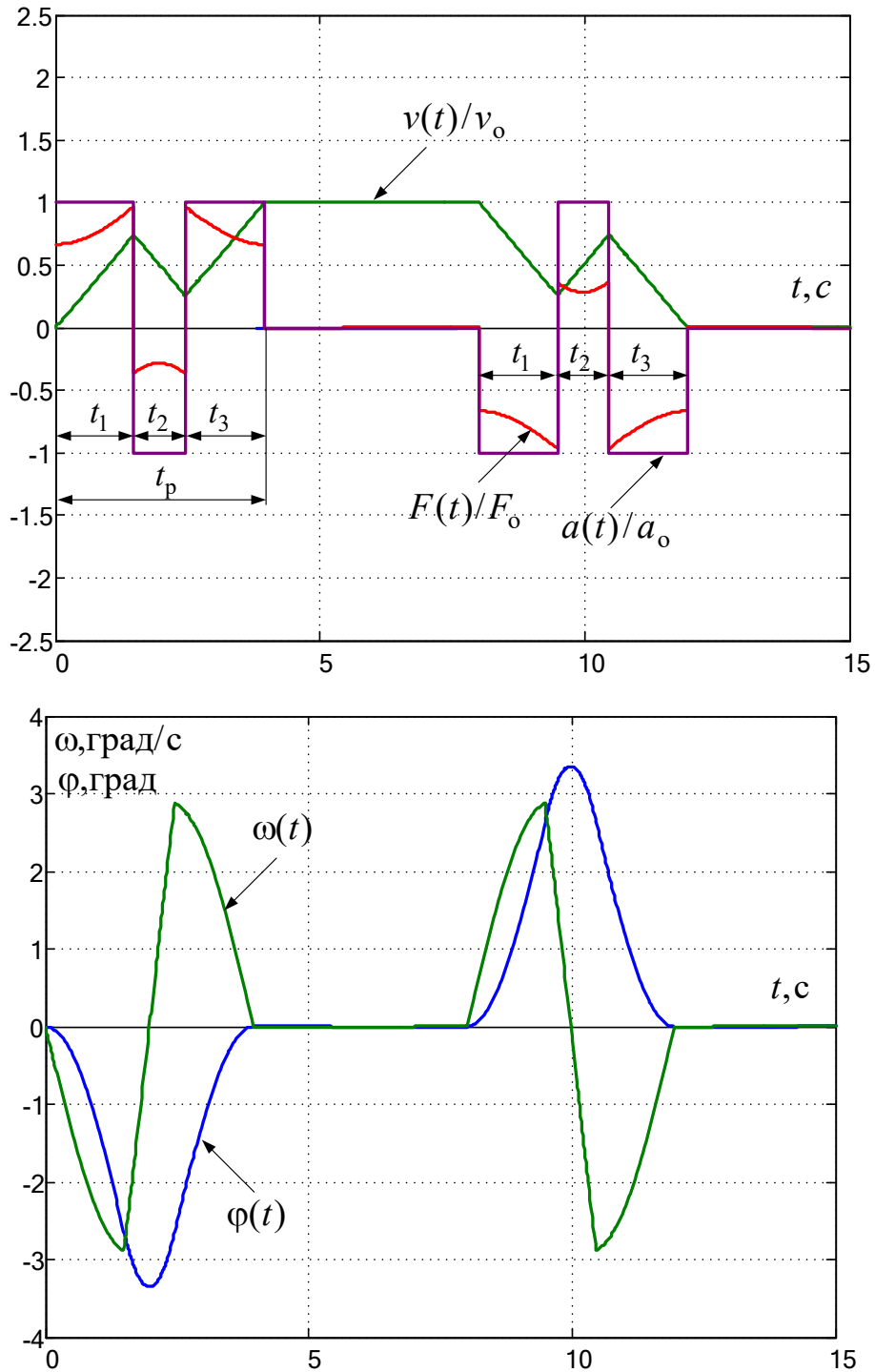


Рис. 8.10. Перехідні процеси при використанні оптимальної за швидкодією триетапної діаграми з релейною зміною прискорення від a_0 до $-a_0$

Як бачимо (рис. 8.10), оптимальне керування прискоренням характеризується більш повільними пуско-гальмівними режимами, ніж оптимальне керування зусиллями (рис. 8.8), але при цьому прискорення і зусилля не перевищують максимально припустимих значень.

Недоліком обох порівнюваних способів гасіння коливань є можливість перевищення швидкістю максимально припустимого значення на першій ділянці та можливість реверсування візка на другій ділянці.

Альтернативою цим двом оптимальним за швидкодією способам гасіння коливань вантажу є **триетапне релейне керування прискоренням, при якому керування на другому етапі розгону відбувається не з максимальним від'ємним прискоренням, що приводить до пригальмовування, а з нульовим прискоренням**. Керування, як і в попередніх випадках, залишається релейним, а пошук тривалості окремих ділянок розгону відбувається з умов відсутності коливань при досягненні візком усталеної швидкості та при його зупинці. Результат розв'язання такої задачі має вигляд [11, 12]:

$$t_1 = t_3 = \frac{v_0}{2a_0}, \quad t_2 = \frac{T_{k0}}{2} = \pi T_0, \quad (8.25)$$

тобто на першому етапі розгону швидкість збільшується від 0 до половинної швидкості, а на другому – від половинної швидкості до максимальної, а тривалість двох перших етапів дорівнює половині періоду коливання вантажу, прикріпленого до нерухомої основи.

Перехідні процеси сигналів, що характеризують рух візка та коливання вантажу представлені на рис. 8.11.

Порівняльний аналіз графіків рис. 8.10 та рис. 8.11 показує, що, не зважаючи на збільшення тривалості пуско-гальмівних режимів у другому випадку, час відпрацювання заданого положення майже не змінюється, а розгін і гальмування відбуваються при менших зусиллях, що дозволяє зменшити теплові втрати. Саме цьому останній із проаналізованих режимів керування закладено у проекти для кранових електроприводів провідними фірмами (наприклад, *Schneider Electric*).

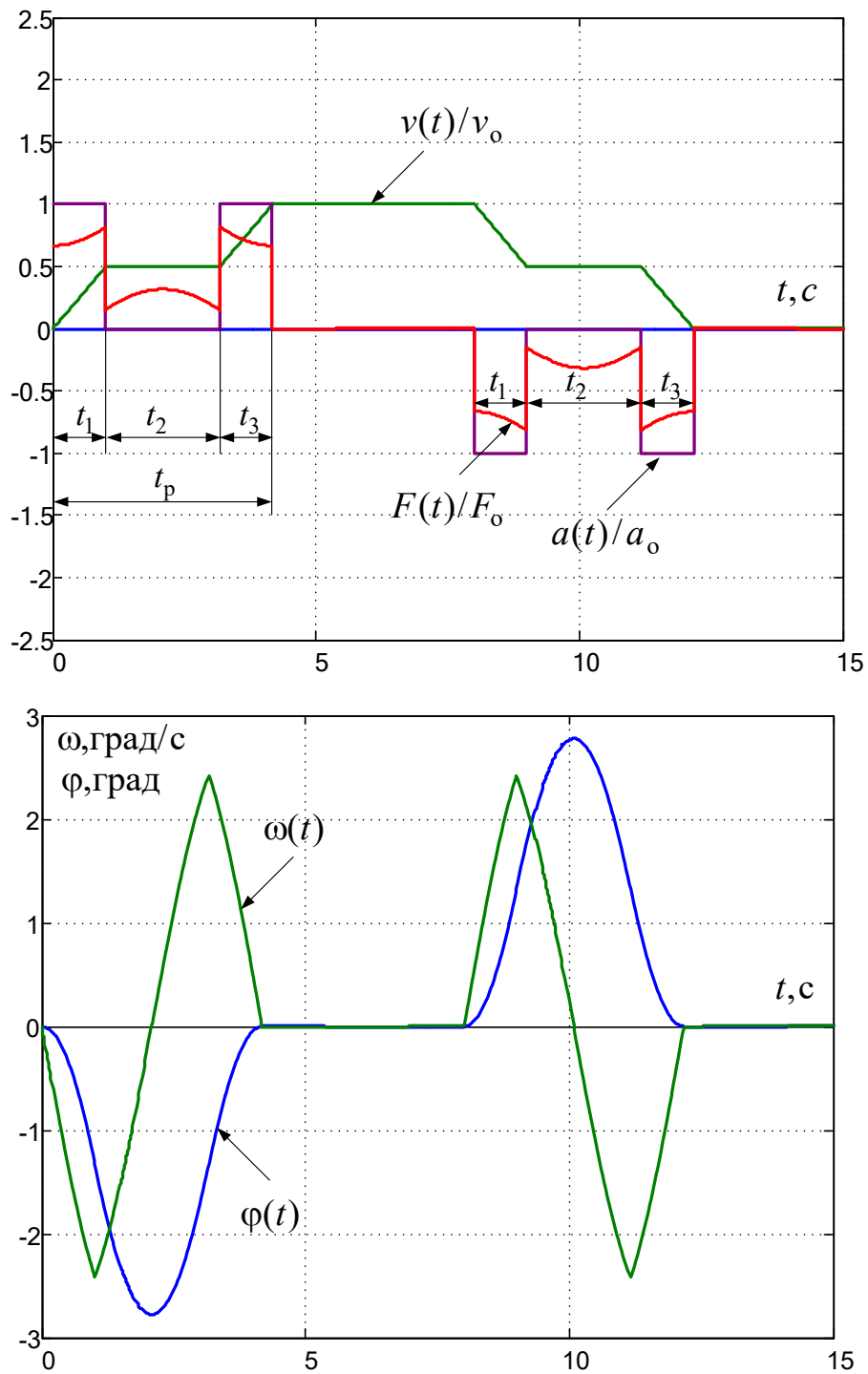


Рис. 8.11. Перехідні процеси при триетапному релейному керуванні прискоренням в діапазоні від a_0 до 0

8.2Завдання

1. Зібрати лінеаризовані моделі візка з причепленим до нього на гнучкому канаті вантажем за рис. 8.5 та рис. 8.7.

2. Отримати перехідні процеси при стрибкоподібній зміні зусилля та прискорення. Оцінити періоди та амплітуди коливань. Порівняти їх зі значеннями, отриманими аналітично.

3. Промодельовати одноетапний розгін з максимальним прискоренням та з прискоренням, що забезпечує розгін за 1 період коливань вантажу.

4. Промодельовати процеси триетапного розгону з релейним керуванням за прискоренням та за зусиллям.

5. Промодельовати розгін з ділянкою роботи на половинній швидкості.

6. Сформулюйте висновки за результатами досліджень.

8.3. Методичні рекомендації

1. Для того, щоб система при різних керуваннях відпрацьовувала однакові положення, починайте гальмування в один і той же час.

2. Для чисельного розв'язання рівнянь (8.19) та (8.23) застосовуйте MATLAB-функцію `fzero` з нульовим початковим наближенням кореня x_0 .

$$x = \text{fzero}(f, x_0)$$

Функцію, нуль якої треба знайти, задавайте в форматі

$$f = @(VarName) \text{Expression}$$

3. Ступінчаті завдання на зміну зусилля та прискорення формуйте послідовним з'єднанням блоку `Step` з векторними параметрами і блоку `Add` або `Sum` з одним входом.

4. Фіксуйте за допомогою блоку `Display` кінцеве значення параметру $\int_0^t (F/F_0)^2(t) dt$, яке в деякому масштабі відображає енергію теплових втрат в електричному двигуні від динамічної складової моментоутворюючого струму.

5. Результати досліджень занесіть у табл. 8.1.

8.4. Контрольні питання

6. Як вивести рівняння руху багатокординатної та багатомасової механічної системи?

7. При яких умовах і як можна лінеаризувати математичну модель механізму поступального горизонтального руху з причепленим до нього на гнучкому канаті вантажем?

8. Який період власних коливань має маятник, підвішений до нерухомої та рухомої опор.

9. Які способи гасіння коливань вантажу Ви знаєте? Порівняйте їх між собою.

Таблиця 8.1

Кількість етапів розгону	Рівні релейних сигналів	$\frac{ a_{\max} }{a_0}$	$\frac{ F_{\max} }{F_0}$	$t_r, \text{с}$	$t_f, \text{с}$	$\int_0^t (F/F_0)^2(t) dt$
1	$F_0, 0$					
	$F_0, -F_0, F_0, 0$					
3	$a_0, 0$					
	$a_0, -a_0, a_0, 0$					
	$a_0, 0, a_0, 0$					

ЛІТЕРАТУРА

1. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування – К.: Либідь. 2007. – 655 с.
2. Куропаткін П. В. Оптимальні та адаптивні системи. – М.: Вища школа, 1980. –
3. Теорія автоматичного керування під редакцією Воронова А. А., том I,II, – М. : Вища школа. 1986.
4. Zak S.H. Systems and Control. Oxford University Press, 2003. – 770 p
5. Жалдак М.І., Триус Ю.В. Основи теорії і методів оптимізації. Навчальний посібник. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.
6. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы. С.Пб.: Питер, 2006. – 272 с.
7. Пивняк Г.Г., Волков А.В. Современные частотно-регулируемые асинхронные электроприводы с широтно-импульсной модуляцией. Монография. – Днепропетровск: НГУ, 2006. – 469 с.
8. O. Tolochko, V. Bovkunovych, D. Kalugin. Structural Realization of the Maximum Torque per Ampere Strategy for the vector speed control system of induction motors // Наукові праці Донецького національного технічного університету (м. Покровськ). Серія: електротехніка і енергетика. 2017, №1 (18). – Стор. 23-30.
9. O.Tolochko, D. Kaluhin, D. Danylov. Speed Vector Control of Induction Motor with Copper and Iron Losses Minimization, 2019 IEEE 2nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering UkrCon, Lviv, Ukraine, July 2-6, 2019, p.p. 408-413. doi: 10.1109/UKRCON.2019.8879994.
10. Волков В.А. Оптимизация режимов намагничивания и размагничивания частотно-регулируемого асинхронного двигателя / В.А. Волков // Електротехніка і енергетика. – Випуск 2. – Наукові праці ДонНТУ. – 2013. – С. 59-66.
11. Толочко О.І., Мельник А.В. Мінімізація теплових втрат при розмагнічуванні векторно-керованого асинхронного двигуна // Наукові праці ДонНТУ. Серія: електротехніка і енергетика. Всеукраїнський науковий збірник. – Красноармійськ, 2015, №1(17). –С.144-149.

12. Tolochko O., Sopiha M. Heat Loss Minimization Field Control of Motionless Induction Motors in Pause of Intermittent Duty // 2017 IEEE First Ukraine Conference on electrical and computer engineering (UkrCon). – p.p. 442-447
13. Schröder D. Elektrische Antriebe – Regelung von Antriebssystemen // Berlin; Heidelberg: Springer, 2009. – 1336 S.
14. Krishnan, R. Permanent magnet synchronous and brushless DC motor drives. – CRC Press, 2010. – 564 p.
15. Bose B. K. Modern power electronics and AC drives // New Jersey: Prentice Hall PTR, 2002. – 711 p.
16. Morimoto S., Takeda Y., Hatanaka K., Tong Y., Hirasat. Design and control system of permanent magnet synchronous motor for high torque and high efficiency operation // Industry Applications, 1991. – Vol. 1. – P. 176-181.
17. Толочко О.И., Бурмелев А.А. Упрощенный алгоритм оптимальной стратегии «максимальный момент на ампер» для управления синхронным двигателем с постоянными магнитами // «Электрооборудование: эксплуатация и ремонт», 2018, №4 (167). – С. 70-77.
18. Толочко О.И. Улучшение качества переходных процессов в системах векторного управления скорости синхронного двигателя со встроенными в ротор постоянными магнитами при использовании оптимальной стратегии управления «Максимальный момент на ампер» // «Электрооборудование: эксплуатация и ремонт», 2018, №5 (168). – С. 10-17.
19. O.Tolochko. Energy Efficient Speed Control of Interior Permanent Magnet Synchronous Motor // Chapter in the free-open book “Applied Modern Control”, ISBN 978-1-78984-827-4, DOI: 10.5772/intechopen.80424, Published: February 13th 2019
20. Петров Ю.П. Оптимальное управление электрическим приводом с ограничением по нагреву. – Л.: Энергия. Ленинградское отд., 1971. – 143 с.
21. О.І. Рогачов. Оптимальне керування у прикладах та задачах: Навчальний посібник. – К.: ІСДО, 1995. – 272 с.
22. Толочко О.И., Коцегуб П.Х., Розкаряка П.И. Особенности цифровой реализации оптимальных алгоритмов управления позиционным электроприводом

// Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету: Наукові праці КДПУ. – Кременчук: КДПУ. – 2006. – №3 (38). – Ч.1. – С. 8-11.

23. Ackermann J. Robuste Regelung. – Springer Verlag, 1993. – 419 S.

24. Герасимьяк Р.П., Лещев В.А. Анализ и синтез крановых электромеханических систем. – Одесса, СМІЛ, 2008. – 191 с.

25. Масандилов Л.Б. Электропривод подъемных кранов. Учебное пособие по курсу «Электропривод и автоматизация общепромышленных механизмов». – М.: Изд-во МЭИ, 1998. – 100 с.

26. Buch A. Optimale Bewegungssteuerung von schwingungsfähigen mechatronischen Systemen mit zwei Freiheitsgraden am Beispiel eines Krans mit pendlender Last und elastischer Mechanik. Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Doktor-Ingenieur, 1999. – 212 S.

27. Толочко О.І. Навчальний посібник з дисципліни «Моделювання та аналіз електромеханічних систем в MATLAB». – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського (електронне мережне навчальне видання), 2019. – 298 с.

28. Толочко О.І. Моделювання електромеханічних систем. Математичне моделювання систем асинхронного електроприводу: Навчальний посібник. – Київ: НТУ «КПІ» (електронне видання), 2016. – 150 с.

ЗМІСТ

ВВЕДЕННЯ	3
<i>Практичне заняття 1. ЗНАЙОМСТВО ЗІ ВЛАСТИВОСТЯМИ</i>	
ЕПІЦИКЛОЇДИ ТА БРАХІСТОХРОНИ	5
1.1 Теоретичні положення	5
1.1.1 Історія виникнення задачі про брахістохрону	5
1.1.2 Властивості циклоїди	5
1.1.3 Властивості брахістохрони	8
1.2 Завдання	11
1.3 Методичні рекомендації до виконання завдання	11
1.4 Контрольні питання та завдання	11
<i>Практичне заняття 2. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ НАЙСКОРІШОГО</i>	
СПУСКУ	12
2.1 Теоретичні положення	12
2.2 Завдання	15
2.3 Методичні рекомендації до виконання завдання	15
2.4 Контрольні питання та завдання	18
<i>Практичне заняття 3. ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ АСИНХРОННИМ</i>	
<i>ЕЛЕКТРОПРИВОДОМ ЗА СТРАТЕГІЯМИ «МАКСИМАЛЬНИЙ МОМЕНТ</i>	
<i>НА АМПЕР» ТА «МІНІМІЗАЦІЯ ВТРАТ У МІДІ»</i>	19
3.1 Теоретичні положення	19
3.1.1 Математичний опис асинхронного двигуна	19
3.1.2 Загальна характеристика втрат у системах асинхронного електроприводу	20
3.1.3 Синтез стратегії «Максимальний момент на ампер»	23
3.1.4 Синтез стратегії «Мінімізація втрат у міді»	24
3.1.5 Структурна реалізація оптимальних стратегій	27
3.2 Завдання	31
3.3 Методичні рекомендації до виконання завдання	31

3.4 Контрольні питання та завдання	32
<i>Практичне заняття 4. ОПТИМАЛЬНІ ЗАКОНИ НАМАГНІЧУВАННЯ ТА РОЗМАГНІЧУВАННЯ ВЕКТОРНО-КЕРОВАНОГО АСИНХРОННОГО ДВИГУНА В ПАУЗАХ ПОВТОРНО-КОРОТКОЧАСНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ</i>	
4.1 Теоретичні положення	34
4.1.1 Постановка задачі оптимального керування	34
4.1.2 Розв'язання задачі оптимального керування розмагнічуванням та намагнічуванням АД	35
4.1.3 Розв'язання задач квазіоптимального керування розмагнічуванням та намагнічуванням АД	40
4.1.3.1 Пошук оптимальних стали часу експоненціальних законів розмагнічування та намагнічування АД	40
4.1.3.2 Пошук оптимального часу намагнічування та розмагнічування АД при зміні потокозчеплення ротора за лінійним законом	45
4.2 Завдання	50
4.3 Методичні рекомендації до виконання завдання	51
4.4 Контрольні питання та завдання	51
<i>Практичне заняття 5. ОПТИМАЛЬНІ СТРАТЕГІЇ КЕРУВАННЯ СИНХРОННИМИ ДВИГУНАМИ З ПОСТІЙНИМИ МАГНІТАМИ</i>	
5.1 Теоретичні положення	53
5.1.1 Загальна характеристика синхронних двигунів з постійними магнітами	53
5.1.2 Математичний опис СДПМ.....	55
5.1.3 Основні втрати потужності в СДПМ	56
5.1.4 Характеристика оптимальних стратегій керування <i>IPMSM</i>	57
5.1.5 Розв'язання окремого випадку задачі на умовний екстремум . . .	58
5.1.6 Синтез стратегії «Максимальний момент на ампер»	59
5.1.7 Синтез стратегії «Максимальний момент на вольт»	61

5.2 Завдання	62
5.3 Методичні рекомендації до виконання завдання	63
5.4 Контрольні питання та завдання	64
<i>Практичне заняття 6. СИНТЕЗ ТА АНАЛІЗ ЗАДАВАЛЬНИХ ПРИСТРОЇВ, ЩО РЕАЛІЗУЮТЬ ОПТИМАЛЬНІ ТА КВАЗІОПТИМАЛЬНІ ЗА ТЕПЛОВИМИ ВТРАТАМИ ЗАКОНИ КЕРУВАННЯ ПОЗИЦІЙНИМ ПРИВОДОМ</i>	
6.1 Теоретичні положення	65
6.1.1 Розв'язання задачі на умовний екстремум в загальному вигляді	65
6.1.2 Формулювання задач оптимального керування позиційним приводом	67
6.1.3 Розв'язання задач оптимального керування позиційним електроприводом	70
6.2 Завдання	77
6.3 Методичні рекомендації до виконання завдання	77
6.4 Контрольні питання та завдання	78
<i>Практичне заняття 7. СИНТЕЗ ТА АНАЛІЗ ОПТИМАЛЬНИХ ЗА ШВИДКОДІЄЮ СИСТЕМ ПОЗИЦІЙНОГО ЕЛЕКТРОПРИВОДУ</i>	
7.1 Теоретичні положення	79
7.1.1 Принцип максимуму Л.С. Понтрягіна	79
7.1.2 Оптимальне за швидкодією керування позиційним приводом при обмеженні прискорення	80
7.1.2.1 Синтез оптимального закону керування у функції часу	80
7.1.2.2 Синтез замкненого задатчика положення	86
7.2 Завдання	91
7.3 Методичні рекомендації до виконання завдання	91
7.4 Контрольні питання та завдання	91

<i>Практичне заняття 8. ОПТИМАЛЬНЕ ТА КВАЗІОПТИМАЛЬНЕ ЗА ШВИДКОДІЄЮ ГАСІННЯ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ ВІЗОК-ВАНТАЖ МОСТОВОГО КРАНУ</i>	92
8.1 Теоретичні положення	92
8.1.1 Аналіз механічної системи візок-вантаж як об'єкту керування	92
8.1.2 Синтез алгоритмів пересування візка з умов оптимального за швидкодією гасіння коливань вантажу без врахування обмеження на прискорення.....	97
8.1.2.1 Синтез одноетапного релейного керування зусиллям	98
8.1.2.2 Синтез триетапного релейного керування зусиллям	99
8.1.2.3 Синтез релейних керувань прискоренням	102
8.2 Завдання	107
8.3 Методичні рекомендації до виконання завдання	108
8.4 Контрольні питання та завдання	108
ЛІТЕРАТУРА	110