УДК 517.9:519.3

О.В. Капустян, О.А. Капустян,
А.В. Сукретна

НАБЛИЖЕНИЙ СИНТЕЗ У ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Вступ

Однією з основних задач у теорії оптимального керування є проблема синтезу, тобто побудова оптимального керування у формі зворотного зв'язку. На сьогодні в загальному випадку ця задача має задовільний розв'язок лише для скінченновимірних систем малої розмірності. Що ж до розподілених систем, то системне вивчення цієї проблеми для лінійно-квадратичних задач було здійснено методом варіаційних нерівностей в [1] і методом динамічного програмування в [2]. Значний прогрес у цьому напрямку для нелінійних процесів досягнуто завдяки дослідженням у працях [3—5]. Проблему конструктивної побудови синтезу для лінійно-квадратичних хвильових процесів для окремих класів задач було розв'язано в [6—8].

Постановка задачі

У даній статті для задачі оптимального керування збуреним хвильовим рівнянням з коерцитивним цільовим функціоналом обґрунтовується наближене оптимальне керування, побудоване на основі точного синтезу відповідної лінійної задачі [8]. Для параболічних рівнянь таке дослідження проведено в [9, 10].

Умови на параметри задачі і допоміжні твердження

Розглянемо задачу оптимального керування відносно невідомої функції $y = y(x,t)$

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = \Delta y - \varepsilon f(y) + g(x)v(t), x \in \Omega, t \in (0,T), \\ y(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0^{\varepsilon}(x),\ y_t(x,0) = y_1^{\varepsilon}(x),\ x \in \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (1)$$

$$v(\cdot) \in U \subset L_2([0,T]), \quad (2)$$

$$J(y,v) = \alpha\left(\int_{\Omega} q_0(x)y(x,T)dx - \psi_0\right)^2 + \beta\left(\int_{\Omega} q_1(x)y_t(x,T)dx - \psi_1\right)^2 + \gamma\int_0^T v^2(t)dt \to \inf, \quad (3)$$

де $\Omega \subset R^n$ — обмежена область; $n \ge 3$; $g(x) \in L_2(\Omega)$; $f \in C(R)$; U — замкнена опукла множина; $q_0, q_1 \in L_2(\Omega)$; $\gamma > 0$; $\alpha, \beta \ge 0$; $\alpha + \beta \ne 0$; $\psi_0, \psi_1 \in R$.

У статті [8] при $\varepsilon = 0$ знайдено і обґрунтовано за певних припущень на параметри задачі формулу точного синтезу задачі (1)—(3). Точніше, якщо $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{X_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — власні числа і функції оператора $-\Delta$ в $H_0^1(\Omega)$, то в термінах коефіцієнтів Фур'є параметрів задачі у [8] отримано такий результат: якщо

$$U = \{v \in L_2([0,T]) : |v(t)| \le \xi \text{ м.с. на } [0,T]\},$$

$$\beta = 0,$$

функція

$$b(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_{0_i}}{\lambda_i} g_i \sin\lambda_i(T-t)$$

додатна і монотонно спадає, то оптимальний синтез має вигляд

$$u[t,y] = \begin{cases} \xi,\ t \in [0,\tau], \\ -\dfrac{\alpha((R_1(t), y(t)) + (R_2(t), y_t(t)) - \psi_0)}{\gamma + \alpha\displaystyle\int_t^T b^2(s)ds}, \\ t \in [\tau, T], \end{cases} \quad (4)$$

де τ — точка переключення, яка однозначно визначається за траєкторією $y(\cdot)$; $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|$ — скалярний добуток і норма в $L_2(\Omega)$;

$$R_1(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} q_{0_i} X_i(x)\cos\lambda_i(T-t),$$

$$R_2(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_{0_i}}{\lambda_i} X_i(x)\sin\lambda_i(T-t).$$

Основна мета даної статті — довести розв'язність задачі оптимального керування (1)—(3) при $\varepsilon > 0$ і негладкому збуренні $f(y)$ та показати, що при достатньо малих $\varepsilon > 0$ формула (4) дає наближений синтез цієї задачі, тобто якщо $\{\tilde{y}_\varepsilon,\ \tilde{u}_\varepsilon\}$ – оптимальний процес в (1)–(3), $\tilde{J}_\varepsilon := J(\tilde{y}_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon)$, то для будь-якого розв'язку $\hat{y}_\varepsilon$ задачі

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = \Delta y - \varepsilon f(y) + g(x) u[t,y],\, x \in \Omega,\, t \in (0,T), \\ y(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0^\varepsilon(x),\ \ y_t(x,0) = y_1^\varepsilon(x),\ \ x \in \bar{\Omega}, \end{cases} \tag{5}$$

справедлива гранична рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (J(\tilde{y}_\varepsilon,\ u[t, \tilde{y}_\varepsilon]) - \tilde{J}_\varepsilon) = 0. \tag{6}$$

Відносно задачі (1)–(3) будемо вважати виконаними такі умови: $n \geq 3$, існують сталі $C_i > 0$, $i = \overline{1,3}$, такі, що для всіх $s \in R$ мають місце оцінки

$$\begin{gathered} |f(s)| \leq C_1 \left(1 + |\, s\,|^{\frac{n}{n-2}} \right), \\ F(s) := \int_0^s f(t) dt \geq -C_2 s^2 - C_3. \end{gathered} \tag{7}$$

З умов (7), зокрема, випливає існування сталої $C_4 > 0$, такої, що для довільного $s \in R$ справедлива оцінка

$$|F(s)| \leq C_4 \left(1 + |\, s\,|^{\frac{2n-2}{n-2}} \right). \tag{8}$$

Під розв'язком крайової задачі (1) будемо розуміти [11] функцію $y \in L_\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, таку, що $y_t \in L_\infty(0, T; L^2(\Omega))$ і для всіх $\xi \in H_0^1(\Omega)$ і $\eta \in C_0^\infty((0,T))$ справедлива рівність

$$-\int_0^T (y_t, \xi) \eta_t dt + \int_0^T \left((y, \xi)_{H_0^1} + \varepsilon (f(y), \xi) - v(t)(g, \xi) \right) \eta \, dt = 0. \tag{9}$$

Відомо, що за умов (7) для будь-якого розв'язку крайової задачі (1) справедливі включення $y \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$, $y_t \in C([0,T]; L_2(\Omega))$. Крім того, для довільного значення параметра $\varepsilon > 0$, для кожного керування $v(\cdot) \in L_2([0,T])$ і довільних початкових даних $y_0^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, $y_1^\varepsilon \in L_2(\Omega)$ задача (1) має принаймні один розв'язок [11, 12] і для всіх $\varepsilon > 0$ і $t \in [0,T]$ виконується оцінка

$$\|y_t(t)\|^2 + \|y(t)\|_{H_0^1}^2 \leq \leq C_5 \left(\|y_1^\varepsilon\|^2 + \|y_0^\varepsilon\|_{H_0^1}^{\frac{2n-2}{n-2}} + 1 + \int_0^t |\, v(s)\,| \cdot \|y_t^\varepsilon(s)\| ds \right), \tag{10}$$

де константа $C_5 > 0$ залежить лише від констант задачі (1) і не залежить від ε.

При $\varepsilon = 0$ відомо [1], що для довільних початкових даних $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, $y_1 \in L_2(\Omega)$ лінійно-квадратична задача оптимального керування (1)–(3) має єдиний розв'язок $\{\tilde{y},\ \tilde{u}\}$.

Надалі будемо використовувати такий результат.

Лема (про збіжність). Нехай $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ – послідовність розв'язків задач

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = \Delta y(x,t) - f_n(y) + g(x) v_n(t)\,,\, x \in \Omega, \\ t \in (0,T), \\ y(x,t) = 0\,,\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0^n(x)\,,\ y_t(x,0) = y_1^n(x)\,,\ x \in \bar{\Omega}, \end{cases} \tag{11}$$

де послідовність $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ задовольняє умови (7) рівномірно по n і для кожного $r > 0$ має місце збіжність $\max_{|y| \leq r} |f_n(y) - f(y)| \to 0$ при $n \to \infty$. Тоді якщо

$$\begin{cases} v_n \to v \ \text{слабко в} \ L_2([0,T]), \\ y_0^n \to y_0 \ \text{слабко в} \ H_0^1(\Omega), \\ y_1^n \to y_1 \ \text{слабко в} \ L_2(\Omega), \end{cases} \tag{12}$$

то існує $y(\cdot)$ – розв'язок задачі

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = \Delta y(x,t) - f(y) + g(x) v(t),\ x \in \Omega, \\ t \in (0,T), \\ y(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega,\, t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0(x),\ \ y_t(x,0) = y_1(x),\ \ x \in \bar{\Omega}, \end{cases} \tag{13}$$

такий, що для довільної послідовності $t_n \to t_0$ принаймні по послідовності мають місце збіжності

$$\begin{cases} y_n(t_n) \to y(t_0) \text{ слабко в } H_0^1(\Omega), \\ y_{n_t}(t_n) \to y_t(t_0) \text{ слабко в } L_2(\Omega). \end{cases} \quad (14)$$

Якщо ж у (12) збіжності сильні, то і в (14) збіжності такі ж.

Доведення. Завдяки умовам (7) послідовність $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняє оцінку (10) з константою C_5, яка не залежить від n. З (12) випливає, що послідовності $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n^0\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{y_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ обмежені у відповідних просторах. Тоді з (10) і леми Гронуолла–Беллмана отримуємо, що послідовність $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена в $L_\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, при цьому $\left\{y_{n_t}\right\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена в $L_\infty(0,T;L_\infty(\Omega))$. Отже, існує функція $y(\cdot) \in L_\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ з похідною $y_t \in L_\infty(0,T;L_\infty(\Omega))$, така, що

$$\begin{cases} y_n \to y \quad \text{*-слабко в } L_\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ y_{n_t} \to y_t \quad \text{*-слабко в } L_\infty(0,T;L_\infty(\Omega)). \end{cases} \quad (15)$$

Тоді з теореми Реліха–Кондрашова [11] за підпослідовністю матимемо

$$y_n \to y \text{ в } L_2(0,T;L_2(\Omega)) \text{ м.с.} \quad (16)$$

Тому $f_n(y_n) \to f(y)$ м.с. і, оскільки з оцінки (7) і обмеженості $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ послідовність $\{f_n(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена в $L_2(0,T;L_2(\Omega))$, то з леми Ліонса [11] маємо

$$f_n(y_n) \to f(y) \text{ слабко в } L_2(0,T;L_2(\Omega)). \quad (17)$$

Тепер можемо перейти до границі у відповідній рівності (9) і отримати, що $y(\cdot)$ – розв'язок задачі (13). Далі, з (9) для довільної $\xi \in H_0^1(\Omega)$ виконується рівність

$$\frac{d}{dt}(y_{n_t} - y_t, \xi) + (y_n - y, \xi) +$$
$$+ (f_n(y_n) - f(y), \xi) - ((v_n(t) - v(t))g, \xi) = 0.$$

Звідси, використовуючи неперервність функцій $y(\cdot)$, $y_t(\cdot)$ і оцінку (10), виводимо збіжності (14).

Для доведення сильної збіжності в (14) згідно з [12] для всіх $n \ge 3$ розглянемо абсолютно неперервну функцію

$$V_n(t) := V_n(y_n(t)) =$$
$$= \frac{1}{2}\left\|y_{n_t}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|y_n\right\|_{H_0^1}^2 + (F_n(y_n(t)), 1),$$

для якої

$$\frac{d}{dt}V_n(t) = v_n(t)\left(g, y_{n_t}(t)\right).$$

Отже, для довільного $t \in [0,T]$, зокрема і для $t = t_n$, матимемо

$$\frac{1}{2}\left(\left\|y_{n_t}\right\|^2 + \left\|y_n\right\|_{H_0^1}^2\right) =$$
$$= V_n(0) - (F_n(y_n(t)), 1) + \int_0^t v_n(s)\left(g, y_{n_t}(s)\right)ds.$$

Тоді, як показано в [12], сильні збіжності з (12) дають змогу перейти до границі в правій частині наведеної рівності. Звідси отримаємо

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left(\left\|y_{n_t}\right\|^2 + \left\|y_n\right\|_{H_0^1}^2\right) \le \left\|y(t_0)\right\|^2 + \left\|y_t(t_0)\right\|_{H_0^1}^2,$$

що завдяки доведеній слабкій збіжності і означає шукану сильну збіжність в (14).

Лему доведено.

Існування оптимального керування в задачі (1)–(3) і його граничні властивості

Теорема 1. При виконанні умов (7) для довільних $\varepsilon > 0$, $y_0^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ і $y_1^\varepsilon \in L_2(\Omega)$ задача оптимального керування (1)–(3) має розв'язок $\{\tilde{y}_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon\}$ і при $\varepsilon \to 0$ за умов, що $y_0^\varepsilon \to y_0$ слабко в $H_0^1(\Omega)$, $y_1^\varepsilon \to y_1$ слабко в $L_2(\Omega)$, справедливі такі граничні рівності:

$$J(\tilde{y}_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon) \to J(\tilde{y}, \tilde{u}),$$
$$\tilde{y}_\varepsilon \to \tilde{y} \text{ в } C([0,T];L_2(\Omega)),$$
$$\tilde{u}_\varepsilon \to \tilde{u} \text{ в } L_2([0,T]),$$

де $\{\tilde{y}, \tilde{u}\}$ – оптимальний процес задачі (1)–(3) при $\varepsilon = 0$ з початковими даними y_0, y_1.

Доведення. При фіксованому $\varepsilon > 0$ доведемо розв'язність задачі оптимального керування (1)–(3). Надалі індекс ε будемо опускати, враховуючи той факт, що розв'язність задачі (1)–(3) не залежить від малості ε.

Нехай $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ – мінімізуюча послідовність, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – відповідні розв'язки задачі (11) з $f_n = f$, $y_0^n = y_0$, $y_1^n = y_1$, $n = \overline{1,\infty}$. Оскільки $d := \inf_{v \in U} J(y, v) = \lim_{n\to\infty} J(y_n, v_n)$, то з вигляду критерію (3) маємо, що послідовність $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена в $L_2([0,T])$, отже, за підпослідовністю $v_n \to v$, $n \to \infty$ слабко в $L_2([0,T])$, причому $v \in U$ завдяки опуклості.

Тоді з леми про збіжність випливає, що існує розв'язок $y(\cdot)$ задачі (1) з керуванням $v(\cdot)$, такий, що виконується (14) при $t_n = T$. Отже, маємо

$$d = \underline{\lim}_{n\to\infty} J(y_n, v_n) \geq$$

$$\geq \underline{\lim}_{n\to\infty}\left(\alpha\Big((q_0, y_n(T)) - \psi_0)^2 + \beta\Big((q_1, y_{n_t}(T)\Big) - \psi_1\Big)^2\right) +$$

$$+ \gamma \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_0^T v_n^2(t)dt =$$

$$= \alpha((q_0, y(T)) - \psi_0)^2 + \beta((q_1, y_t(T)) - \psi_1)^2 +$$

$$+ \gamma \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_0^T v_n^2(t)dt \geq J(y, v),$$

тобто $\{y, v\}$ — оптимальний процес задачі (1)–(3).

Нехай тепер $\{\tilde{y}_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon\}$ — оптимальний процес задачі (1)–(3), $y_0^\varepsilon \to y_0$ слабко в $H_0^1(\Omega)$, $y_1^\varepsilon \to y_1$ слабко в $L_2(\Omega)$. Зафіксуємо $v(\cdot) \in U$ і нехай $y_\varepsilon(\cdot)$ — відповідний розв'язок задачі (1). Тоді з оцінки (10) і леми Гронуолла–Беллмана випливає, що для всіх $t \in [0,T]$

$$\left\|y_{\varepsilon_t}(t)\right\|^2 + \left\|y_\varepsilon(t)\right\|_{H_0^1}^2 \leq C(v),$$

де константа $C(v)$ не залежить від ε. Тоді з оцінки

$$J(\tilde{y}_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon) \leq J(y_\varepsilon, v)$$

отримуємо, що множина функцій $\{\tilde{u}_\varepsilon\}$ обмежена в $L_2([0,T])$, а отже, за деякою підпослідовністю $\varepsilon_n \to 0$ маємо $\tilde{u}_{\varepsilon_n} \to \tilde{u}$ слабко в $L_2([0,T])$.

Оскільки послідовність $f_n(y) = \varepsilon_n f(y)$ задовольняє всі умови леми про збіжність із граничною нульовою функцією, то можемо стверджувати, що існує розв'язок $\tilde{y}(\cdot)$ задачі (1) при $\varepsilon = 0$ з керуванням $\tilde{u}$ та початковими даними y_0, y_1, такий, що за підпослідовністю виконуються граничні рівності (14), зокрема, $\tilde{y}_{\varepsilon_n}(T) \to \tilde{y}(T)$ слабко в $L_2(\Omega)$. Тоді, аналогічно попереднім міркуванням, матимемо нерівність

$$\underline{\lim}_{\varepsilon_n\to 0} J\left(\tilde{y}_{\varepsilon_n}, \tilde{u}_{\varepsilon_n}\right) \geq J(\tilde{y}, \tilde{u}).$$

З іншого боку, для довільного допустимого керованого процесу $\left\{\tilde{y}_{\varepsilon_n}, v\right\}$ задачі (1)–(3) при $\varepsilon = 0$ маємо

$$J\left(\tilde{y}_{\varepsilon_n}, \tilde{u}_{\varepsilon_n}\right) \leq J\left(\tilde{y}_{\varepsilon_n}, v\right). \qquad (18)$$

Застосовуючи знову лему про збіжність, отримуємо, що існує розв'язок $y(\cdot)$ задачі (1) при $\varepsilon = 0$ з керуванням v і початковими даними y_0, y_1 такий, що за підпослідовністю виконуються граничні рівності (14). Тоді з нерівності (18) одержимо

$$\overline{\lim}_{\varepsilon_n\to 0} J\left(\tilde{y}_{\varepsilon_n}, \tilde{u}_{\varepsilon_n}\right) \leq$$

$$\leq \overline{\lim}_{\varepsilon_n\to 0}\left(\alpha\left(\left(q_0, y_{\varepsilon_n}(T)\right) - \psi_0\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \beta\left(\left(q_1, y_{\varepsilon_{nt}}(T)\right) - \psi_1\right)^2\right) +$$

$$+ \gamma\int_0^T v^2(t)dt = J(y, v).$$

Отже, маємо

$$\begin{aligned} J(\tilde{y}, \tilde{u}) &\leq \underline{\lim}_{\varepsilon_n\to 0} J\left(\tilde{y}_{\varepsilon_n}, \tilde{u}_{\varepsilon_n}\right) \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{\varepsilon_n\to 0} J\left(\tilde{y}_{\varepsilon_n}, \tilde{u}_{\varepsilon_n}\right) \leq J(y, v), \end{aligned} \qquad (19)$$

тобто $\{\tilde{y}, \tilde{u}\}$ — оптимальний процес задачі (1)–(3) при $\varepsilon = 0$ з початковими даними y_0, y_1. Крім того, при $v = \tilde{u}$ з (19) отримуємо, що існує границя

$$\lim_{\varepsilon_n\to 0} J\left(\tilde{y}_{\varepsilon_n}, \tilde{u}_{\varepsilon_n}\right) = J(\tilde{y}, \tilde{u}). \qquad (20)$$

При цьому, оскільки при $\varepsilon = 0$ задача (1)–(3) має єдиний розв'язок, то збіжність має місце при $\varepsilon \to 0$ (а не лише за підпослідовністю $\varepsilon_n \to 0$).

Крім того, оскільки

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\alpha((q_0, \tilde{y}_\varepsilon(T)) - \psi_0)^2 + \beta\left(\left(q_1, \tilde{y}_{\varepsilon_t}(T)\right) - \psi_1\right)^2\right) =$$

$$= \alpha((q_0, \tilde{y}(T)) - \psi_0)^2 + \beta((q_1, \tilde{y}_t(T)) - \psi_1)^2,$$

то з (20) одержимо, що існує границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \tilde{u}_\varepsilon^2(t)dt = \int_0^T \tilde{u}(t)dt,$$

тобто $\tilde{u}_{\varepsilon_n} \to \tilde{u}$ сильно в $L_2([0,T])$.

Теорему доведено.

Наближений синтез

Тепер нехай при $\varepsilon = 0$ є формула точного синтезу для задачі (1)–(3), яка має вигляд

$$u[t,y] = (R_1(t), y(t)) + (R_2(t), y_t(t)) + R_3(t), \quad (21)$$

де $R_1, R_2 \in L_2(0,T; L_2(\Omega))$, $R_3 \in L_2([0,T])$ – відомі функції. Як зазначалося раніше, при певних додаткових умовах на параметри задачі формула (21) обґрунтована в [8].

Розглянемо задачу

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = \Delta y - \varepsilon f(y) + g(x)u[t,y], \\ x \in \Omega,\ t \in (0,T), \\ y(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0^\varepsilon(x),\ y_t(x,0) = y_1^\varepsilon(x),\ x \in \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (22)$$

Оскільки виконується оцінка

$$|u[t,y]| \le \|R_1(t)\|\|y(t)\| + \|R_2(t)\|\|y_t(t)\| + |R_3(t)|, \quad (23)$$

то розв'язність задачі (22) з використанням оцінок (23), (10) і нерівності Гронуолла–Беллмана встановлюється аналогічно задачі (1) [11], причому для будь-якого розв'язку задачі (22) для достатньо малих $\varepsilon > 0$ і для довільного $t \in [0,T]$ справедлива апріорна оцінка

$$\|y_t(t)\|^2 + \|y(t)\|_{H_0^1}^2 \le C_6\left(\|y_1^\varepsilon\|^2 + \|y_0^\varepsilon\|_{H_0^1}^{\frac{2n-2}{n-2}} + 1\right), \quad (24)$$

де константа $C_6 > 0$ не залежить від $\varepsilon > 0$.

Теорема 2. Нехай $\tilde{J}_\varepsilon = J(\tilde{y}_\varepsilon, \tilde{u}_\varepsilon)$ – значення задачі (1)–(3). Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ і будь-якого розв'язку y_ε задачі (22) справедливі граничні рівності

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|\tilde{J}_\varepsilon - J(y_\varepsilon, u[t,y_\varepsilon])| = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T |\tilde{u}_\varepsilon(t) - u[t,y_\varepsilon]|^2\, dt = 0, \quad (25)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\max_{t\in[0,T]}\|\tilde{y}_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t)\| = 0.$$

Д о в е д е н н я. З теореми 1 випливає, що граничні рівності (25) будуть доведені, якщо покажемо, що

$$J(y_\varepsilon, u[t,y_\varepsilon]) \to J(\tilde{y},\tilde{u}),\ \varepsilon \to 0,$$

$$u[t,y_\varepsilon] \to \tilde{u} \ \text{ в } \ L_2([0,T]),$$

$$y_\varepsilon \to \tilde{y} \ \text{ в } \ C([0,T]; L_2(\Omega)),$$

де $\{\tilde{y}, \tilde{u}\}$ – оптимальний процес задачі (1)–(3) при $\varepsilon = 0$ з початковими даними y_0, y_1. Згідно з (24) існує функція $y(\cdot)$, така, що за деякою підпослідовністю $\varepsilon_n \to 0$ виконуються граничні рівності (15)–(17). Тоді з (21) одержимо

$$u\left[t,\ y_{\varepsilon_n}\right] \to u[t,y] \ \text{ в } \ L_2([0,\ T]).$$

Покладемо $v_n(t) = u\left[t,\ y_{\varepsilon_n}\right]$. Далі з леми про збіжність для пари $\left\{y_{\varepsilon_n},\ v_n\right\}$ маємо, що за підпослідовністю виконуються граничні рівності (14), де $y(\cdot)$ – розв'язок задачі

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) = \Delta y + g(x)u[t,y],\ x \in \Omega,\ t \in (0,T), \\ y(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T), \\ y(x,0) = y_0(x),\ y_t(x,0) = y_1(x),\ x \in \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (26)$$

Легко побачити [11], що задача (26) має єдиний розв'язок. Отже, $y(t) \equiv \tilde{y}(t)$ і теорему доведено.

Висновки

У статті доведено розв'язність задачі оптимального керування нелінійним хвильовим рівнянням із квадратичним критерієм якості. При малих нелінійностях обґрунтовано формулу наближеного синтезу на основі точної формули для відповідної лінійно-квадратичної задачі.

У перспективі застосований у статті метод доведення може бути поширений на інші класи задач, зокрема на задачі оптимальної стабілізації.

А.В. Капустян, Е.А. Капустян, А.В. Сукретна

ПРИБЛИЖЕННЫЙ СИНТЕЗ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрена задача оптимального управления с полуопределенным критерием качества для волнового уравнения, возмущенного слабой нелинейностью. На основе точной формулы для соответствующей линейно-квадратичной задачи строится и обосновывается приближенное управление в форме обратной связи, которое обеспечивает близкое к оптимальному поведение управляемой системы.

O.V. Kapustyan, O.A. Kapustyan, A.V. Sukretna

THE APPROXIMATE SYNTHESIS IN THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR THE NONLINEAR WAVE EQUATION

The study explores the optimal control problem with a semi-definite quality criterion for the wave equation disturbed by weak nonlinearity. Based on the exact formula for a corresponding linear-quadratic problem, we construct and prove approximate feedback control that provides close to optimal behavior for a controlled system.

1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Пер. с франц. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
2. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
3. *Иваненко В.И., Мельник В.С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. – К.: Наук. думка, 1988. – 288 с.
4. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. – К.: Наук. думка, 1999. – 630 с.
5. *Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. – К.: Наук. думка, 2004. – 588 с.
6. *Белозёров В.Е., Капустян В.Е.* Геометрические методы модального управления. – К.: Наук. думка, 1999. – 260 с.
7. *Рахимов М.Р.* О некоторых задачах квадратического регулятора для линейных гиперболических уравнений // Диф. уравнения. – 1987. – **23**, № 1. – С. 143–154.
8. *Сукретна А.В.* Обмежений наближений синтез оптимального керування для хвильового рівняння // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 8. – С. 1094–1104.
9. *Капустян О.В., Капустян О.А., Сукретна А.В.* Наближений обмежений синтез для однієї слабконелінійної крайової задачі // Нелінійні коливання. – 2009. – № 3. – С. 291–298.
10. *Ясінський В.В., Капустян О.А.* Наближені екстремальні розв'язки для еволюційних включень субдиференціального типу // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2009. – № 4. – С. 109–116.
11. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Пер. с франц. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
12. *Капустян О.В.* Властивість Кнезера для неавтономного хвильового рівняння без єдиності розв'язку // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2007. – № 2. – С. 137–141.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
05 квітня 2010 року