

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

А.О. Снарський, І.М. Іванова, В.В. Федотов

ОСНОВИ ТЕОРІЇ НЕВПОРЯДКОВАНИХ СЕРЕДОВИЩ

Підручник

Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як підручник для здобувачів ступеня доктора філософії
за спеціальністю 104 «Фізика та астрономія»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2024

**УДК 539.9, 53.043, 53.097, 53.098, 53.092, 538.93
В19**

Автори: *Снарський Андрій Олександрович*, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Іванова Ірина Михайлівна, канд. фіз.-мат. наук.
Федотов В'ячеслав Віталійович

Рецензенти *Лев Богдан Іванович*, д-р фіз.-мат. наук, проф., акад. НАН України ,
Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України

Жданов Валерій Іванович, д-р фіз.-мат. наук, проф., Астрономічна
обсерваторія Київського національного університету імені Тараса
Шевченка,

Відповідальний
редактор *Решетняк Сергій Олександрович*, д-р фіз.-мат. наук, проф.

*Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 9 від 11.11.2024 р.)*

Снарський А.О.
В19 Основи теорії неупорядкованих середовищ [Електронний ресурс] : підруч. для
здобувачів ступеня д-ра філософії за спец. 104 Фізика та астрономія / А.О. Снарський, І.М.
Іванова, В.В. Федотов ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ :
КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 255 с.

У підручнику розглянуто широке коло питань теорії неупорядкованих середовищ. Основна
задача, що обговорюється у підручнику: як, знаючи локальні властивості неоднорідного
середовища, знайти його ефективні властивості. Розглянуто широке коло фізичних явищ:
електричні, гальвано- і термомагнітні властивості, пружні властивості, фліккер шум і вищі
струмові моменти, піннінг вихорів Абрикосова та стрибкова провідність.
Для здобувачів ступеня доктора філософії по спеціальності 104 Фізика та астрономія. Також
буде корисний для аспірантів та магістрів інших освітніх програм.

УДК 539.9, 53.043, 53.097, 53.098, 53.092, 538.93

Реєстр. № П 24/25-010. Обсяг 7,5 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідectво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© А.О. Снарський, І.М. Іванова, В.В. Федотов, 2024
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024

Зміст

Вступ	6
Розділ 1. Основні поняття	7
1.1. Види макроскопічно неоднорідних середовищ	7
1.2. Класифікація фізичних властивостей. Фізичні аналоги	9
Розділ 2. Методи опису макроскопічно неупорядкованих середовищ	11
2.1. Ефективні кінетичні коефіцієнти, або що ми вимірюємо	11
2.2. Кореляційна довжина та само усереднення	14
Розділ 3. Ефективна провідність макроскопічно неупорядкованих середовищ	17
3.1. Двосторонні оцінки ефективних кінетичних коефіцієнтів	17
3.2. Наближення Максвелла, Гарнетта, Бруггемана	20
3.3. Періодично розташовані включення	29
3.4. Плоскошарові середовища	34
Розділ 4. Елементи геометричної теорії протікання	40
4.1. Задача перколяції	40
4.2. Основні поняття геометричної теорії перколяції	41
Розділ 5. Ефективна провідність перколяційних середовищ	45
5.1. Аналогія із феноменологічною теорією фазових переходів 2-го роду. Скейлінг. Критичні індекси.	45
5.2. Ефективна провідність як параметр порядку. Феноменологічний опис	50
5.3. Обчислення критичних індексів	54
5.4. Ієрархічна модель перколяційної структури	63
Розділ 6. Самодуальні середовища	75
6.1. Локально ізотропні середовища	75
6.2. Локально анізотропні середовища	85
Розділ 7. Континуальна перколяційна задача	93
7.1. Типи континуальних перколяційних задач	93
7.2. Середовища типу Swiss-Cheese	95
Розділ 8. Середовища з експоненційно широким спектром локальних властивостей	100
8.1. Постановка задачі та наближене обчислення ефективної провідності	102
8.2. Кореляційна довжина та передекспоненційний множник	108
Розділ 9. Скінченний скейлінг	108
9.1. Властивості перколяційних систем з розмірами, меншими за кореляційну	

довжину	114
9.2. Скінченний скейлінг для самодуальних середовищ	118
Розділ 10. Провідність перколяційного шару	118
10.1. Ефективна провідність перколяційних систем у тому випадку, коли одні розміри більші за кореляційну довжину, а інші – менші. Постановка задачі.	118
10.2. Метод розв'язку	119
Розділ 11. Провідність при змінному струмі	124
11.1. ЕМТ-наближення	124
11.2. Метод теорії протікання	126
Розділ 12. Гальваномагнітні властивості макроскопічно-невпорядкованих середовищ	133
12.1. Тензор провідності в магнітному полі	133
12.2 Шаруваті середовища в магнітному полі	135
12.3 Дуальні середовища у магнітному полі	136
12.4 Сильно неоднорідні середовища поблизу порога протікання, двовимірний випадок	140
12.5. Сильна неоднорідність, тривимірний випадок	146
Розділ 13. Фліккер-шум ($1/f$ -Шум)	151
13.1. Фліккер-шум у неоднорідних середовищах	151
13.2. Фліккер-шум у неоднорідних середовищах – ЕМТ-наближення	154
13.3. Фліккер-шум у перколяційних системах	155
13.4. Аномально високе зростання фліккер-шуму в самодуальних середовищах	160
13.5. Фліккер-шум у системах з експоненційно широким спектром опорів	162
13.6. Фліккер-шум при флуктуації концентрації фаз.	168
Розділ 14. Вищі струмові моменти	170
14.1. Визначення	170
14.2. Критичні індекси вищих струмових моментів	171
Розділ 15. Термoeлектричні властивості	176
15.1. ЕМТ-наближення	176
15.2. Термoeлектричні властивості самодуальних середовищ	179
15.3. Критична область концентрацій – поведінка α_e поблизу порога протікання	181
15.4. Ізоморфізм	185
Розділ 16. Ефективні пружні властивості композитів	193
16.1. Основні поняття теорії пружності	193
16.2. Ефективні пружні модулі поблизу порогу протікання	195
Розділ 17. Нелінійні властивості композитів	202

17.1. Види нелінійності	202
17.2. Випадок слабкої нелінійності	203
17.3. Випадок сильної нелінійності	209
Розділ 18. Ефективні властивості феромагнітних композитів	221
18.1. Нелінійність та гістерезис у феромагнетиках	221
18.2. Безгістерезисний випадок	222
18.3 Феромагнітні композити з ненульовою петлею гістерезису	224
Розділ 19. Температурний коефіцієнт опору та генерація третьої гармоніки поблизу порога протікання	228
19.1. Температурний коефіцієнт опору	228
19.2. Генерація третьої гармоніки	229
Розділ 20. Нестійкість і хаос у макроскопічно неоднорідних середовищах із малою дисипацією	232
20.1. Дуальні середовища	232
20.2. Сходовий фільтр	238
Розділ 21. Перколяційно-подібний опис піннінга вихорів Абрикосова	243
21.1. Піннінг вихорів Абрикосова	243
21.2. Випадок широкого розподілу сил піннінгу	244
Розділ 22. Локалізація Андерсона у перколяційній структурі	250
22.1. Локалізація Андерсона	250
22.2. Перехід метал – андерсонівський діелектрик у перколяційній структурі	250
Література	253

Вступ

Фізика неупорядкованих систем охоплює велике число різних явищ. Це процеси в легуваних напівпровідниках, термоелектричні і магнітні явища в макроскопічно неоднорідних середовищах, електричні, магнітні і пружні явища в матеріалах, розповсюдження електромагнітних хвиль в метаматеріалах та багато іншого.

Теорія, що дозволяє описати ці явища, також складається з багатьох різноманітних методів і моделей. У підручнику викладаються методи та моделі для опису широкого класу явищ в макроскопічно неупорядкованих середовищах.

Необхідність такого підручника, який може бути основою одно- чи двосеместрового спецкурсу студентів чи аспірантів, ґрунтується на тому, що існуючі книги як правило або описують матеріал однієї конкретної області, наприклад, легувані напівпровідники, або є сильно математизованими підручниками великого об'єму, понад 1000 сторінок, в яких фізика явищ, що описуються, відходить на другий план.

В підручнику послідовно проводяться і демонструється на прикладах основні теоретичні підходи, методи і моделі, загальні для великого класу явищ, таких як, піннінг вихорів Абрикосова і локалізації Андерсона в перколяційних структурах.

Два основних підходи до опису явищ в макроскопічно неоднорідних середовищах – це теорія середнього поля і метод теорії протікання. Незважаючи на те, що ці методи добре відомі і багато разів використані, відбувається їх постійний розвиток, що частково ще не описано в монографіях і підручниках. Зокрема, це метод рухомого порогу протікання, який був використаний для опису пружних властивостей.

Підручник складається з двох частин. В першій з них основна увага приділяється методам опису, у другій – різним фізичним процесам у неупорядкованих середовищах.

Для кращого засвоєння матеріалу у кінці розділів наведені контрольні запитання, а в кінці підручника – основний і додатковий список літератури. Для засвоєння матеріалу бажане знання таких розділів фізики, як електродинаміка суцільних середовищ, елементи теорії пружності і теорії твердого тіла.

Розділ 1. Основні поняття

1.1. Види макроскопічно неоднорідних середовищ

Під макроскопічно неоднорідними середовищами розуміють такі середовища, характерний розмір неоднорідності яких набагато більше за будь-які характерні мікроскопічні довжини. Наприклад, якщо йдеться про протікання струму, розмір неоднорідності повинен бути набагато більшим за характерні довжини вільного пробігу носіїв струму. Зокрема, це означає, що таке макроскопічно неоднорідне середовище можна характеризувати локальним законом Ома, що пов'язує густину електричного струму $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ з напруженістю електричного поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ в кожній точці середовища $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})$, неоднорідність середовища при цьому задається залежністю питомої провідності $\sigma(\mathbf{r})$ від координат.

Макроскопічна неоднорідність може бути як неперервною, в цьому випадку $\sigma(\mathbf{r})$ – це неперервна функція координат, так і дискретною. В останньому випадку говорять про дво-, три-і т.п. фазні середовища, де під фазою розуміють сукупність ділянок одного сорту з даним значенням питомої провідності $\sigma_1, \sigma_2, \dots$

Існує велика кількість моделей двофазних середовищ. Наприклад, передбачається, що включення однієї фази в матриці іншої мають однакову форму, у найпростішому випадку сферичну. У складніших моделях враховують несферичність – включення передбачаються еліпсоїдальної форми, розкид напрямів головних осей еліпсоїдів, наявність включень різних розмірів та багато іншого (див. Рис.1.1), наприклад питомої провідності.

Основною характеристикою процесів перенесення в макроскопічно неоднорідних середовищах є ефективні кінетичні коефіцієнти, які характеризують середовище в цілому – на розмірах набагато більше характерних розмірів макроскопічних неоднорідностей. Задавати локальні властивості середовища при обчисленні ефективних кінетичних коефіцієнтів можна двома різними способами: або вважати відомою залежність локальних кінетичних коефіцієнтів від координат – *детерміністичний підхід*, або задавати локальні кінетичні коефіцієнти як випадкові поля – *статистичний підхід*. Кожен із цих підходів має свої переваги та недоліки. Детерміністичний підхід дозволяє досліджувати, як правило, середовища з найбільш простою структурою, труднощі статистичного підходу пов'язані зі складністю зіставлення середовищ, що вивчаються, і відповідних їм випадкових полів локальних кінетичних коефіцієнтів. При строгому теоретичному підході до обчислення ефективних кінетичних коефіцієнтів випадково неоднорідних середовищ завдання має

розбиватися на два етапи: обчислення ефективних кінетичних коефіцієнтів при фіксованій залежності локальних кінетичних коефіцієнтів від координат та подальше усереднення по різних реалізаціях. Ефективні кінетичні коефіцієнти, обчислені на першому етапі, залежать, звісно, від цієї конкретної реалізації локальних кінетичних коефіцієнтів, проте має місце самоусереднення.

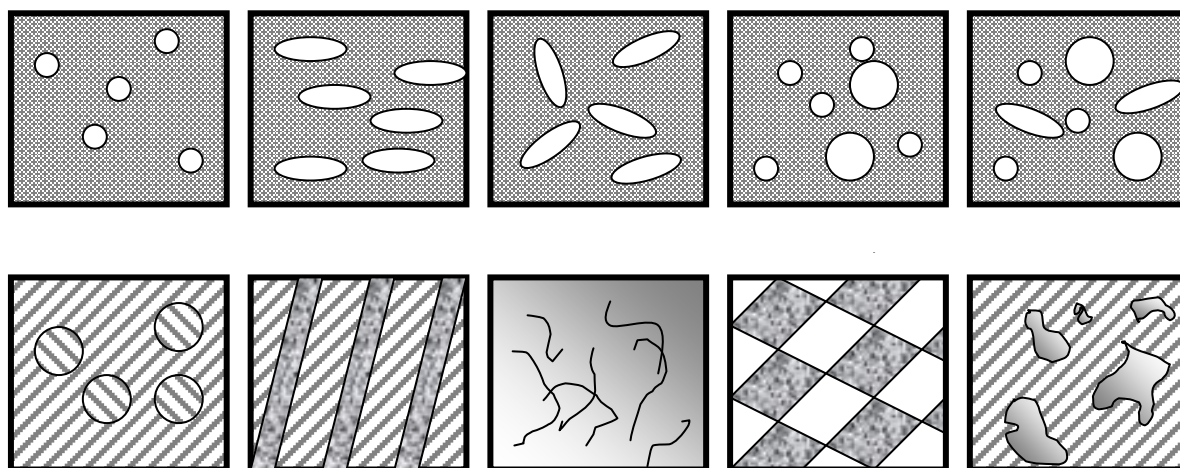


Рис.1.1.1. Схематичне зображення різних двофазних середовищ: верхній ряд – включення однієї ізотропної фази (білі області) в матриці іншої фази; нижній ряд – на трьох рисунках зліва заштриховані області позначають анізотропію локальних властивостей .

Під самоусередненими ефективними кінетичними коефіцієнтами будемо розуміти такі функціонали локальних кінетичних коефіцієнтів, які при прямуванні об'єму усереднення до нескінченності прямують до не випадкової межі. Поняття самоусереднених величин (див. розділ 2) докладно досліджено в квантовій теорії неупорядкованих систем. Між самоусередненням у квантовій теорії неупорядкованих систем та проблемою обґрунтування класичної статистичної механіки існує глибока аналогія. Наведено таблицю, у лівому та правому графах якої вказано відповідні поняття та операції статистичної фізики та квантової теорії неупорядкованих систем. Можна доповнити цю таблицю третьою графою, що вказує на відповідні поняття в задачі про обчислення ефективних кінетичних коефіцієнтів (Таблиця 1.1). Середні за об'ємом поля та струми для самоусереднених величин збігаються із середніми по всіх реалізаціях випадкового поля локальних кінетичних коефіцієнтів. І, таким чином, у цьому випадку під час обчислення ефективних кінетичних коефіцієнтів достатньо усереднення за об'ємом однієї певної реалізації локальних кінетичних коефіцієнтів.

1.2.Класифікація фізичних властивостей. Фізичні аналоги

Велика різноманітність геометрії розташування фаз, зокрема означає відсутність єдиного методу обчислення ефективних кінетичних коефіцієнтів, залежності від

концентрації включень, розташування. Часто складно відповісти навіть на таке «просте» питання – чи ефективні властивості є анізотропними чи ні. Зазначимо, що повної класифікації геометричного розташування фаз також немає, хоча, звісно, для кожного окремого випадку такий опис можна сформулювати. Наприклад, двофазні середовища із сферичними включеннями різного діаметра (з відомою функцією розподілу за розмірами). Звичайно, існує і набагато більш складні середовища, наприклад, що включають одночасно і макро-, і мікронеоднорідності, наприклад, коли розмір включень може бути як набагато більшим, так і порядку (або менше) довжини вільного пробігу.

Таблиця 1.1.

Статистична механіка	Теорія неупорядкованих систем	Макроскопічно неоднорідні середовища
Фазовий простір – простір точок $\{p, q\}$, де p і q – суть набори узагальнених імпульсів та координат	Простір функцій $U(\mathbf{r})$, де $U(\mathbf{r})$ – випадковий потенціал, в якому рухаються носії струму	Простір функцій локальних кінетичних коефіцієнтів, наприклад, локальної провідності $\sigma(\mathbf{r})$
Будь-яка неусереднена фізична величина – функція $f(p, q)$	Будь-яка неусереднена фізична величина – функціонал $A = A[U(\mathbf{r})]$	Потоки та поля, наприклад, $\mathbf{j} = \mathbf{j}[\sigma(\mathbf{r})]$ і $\mathbf{E} = \mathbf{E}[\sigma(\mathbf{r})]$
Усереднення за часом дає фізично достовірні величини	Усереднення по об'єму дає фізично достовірні величини	Усереднення по об'єму дає фізично достовірні величини
Ергодична гіпотеза: середнє за часом збігається з фазовим середнім	Ергодична гіпотеза: середнє за об'ємом збігається із середнім за всіма реалізаціями випадкового поля	Середні по об'єму потоки та поля збігаються із середніми за всіма реалізаціями випадкового поля локальних кінетичних коефіцієнтів

Досі як приклад ефективних кінетичних коефіцієнтів ми розглядали ефективну електропровідність, тобто, протікання електричного струму в неоднорідному середовищі. Однак багато інших кінетичних процесів, наприклад протікання тепла, з точністю до позначень зводяться при визначенні ефективних кінетичних коефіцієнтів до завдання ефективної провідності (Таблиця 1.2). Існують, звичайно, фізичні явища, які не зводяться до

цього завдання, наприклад, задача про обчислення ефективних пружних модулів у неоднорідних середовищах належить до іншого класу.

Досить несподіваним фактом є те, що існують задачі визначення ефективних властивостей у середовищах із мікроскопічною неоднорідністю, які зводяться до згаданих вище макроскопічних задач. Такою задачею, наприклад, є задача про високотемпературну стрибкову провідність у легованих напівпровідниках (розділ 8).

Таблиця 1.2.

Фізичне явище	Термодинамічний потік та рівняння, якому він підкоряється у стаціонарному випадку	Термодинамічна сила та рівняння, якому вона підкоряється у стаціонарному випадку	Фізичний закон
Електропровідність	$\mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$	$\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$	Закон Ома $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$
Теплопровідність	$\mathbf{q}, \quad \operatorname{div} \mathbf{q} = 0$	$\mathbf{g} = -\nabla T, \quad \operatorname{rot} \mathbf{g} = 0$	Закон Фур'є $\mathbf{q} = \kappa \mathbf{g}$
Дифузія	$\mathbf{p}, \quad \operatorname{div} \mathbf{p} = 0$	$\mathbf{s} = -\nabla T, \quad \operatorname{rot} \mathbf{s} = 0$	Закон Фіка $\mathbf{p} = \kappa \mathbf{s}$

У Таблиці 1.2 $\mathbf{j}$ – густина електричного струму, $\mathbf{E}$ – напруженість електричного поля, $\mathbf{q}$ – густина потоку тепла, $\mathbf{g} = -\nabla T$ – градієнт температури, $\mathbf{p}$ – густина потоку частинок, $\mathbf{s} = -\nabla n$ – градієнт концентрації частинок.

Контрольні запитання

1. Які бувають моделі неоднорідних середовищ.
2. Назвіть можливі моделі неоднорідних середовищ з несферичними включеннями
3. В чому відмінність детерміністичного і статистичного підходів при заданні локальних кінетичних коефіцієнтів.
4. Що розуміється під самоусередненими ефективними кінетичними коефіцієнтами.

Розділ 2. Методи опису макроскопічно неупорядкованих середовищ

2.1. Ефективні кінетичні коефіцієнти, або що ми вимірюємо

Для ілюстрації підходу до опису макроскопічно неупорядкованих середовищ розглянемо спершу зразок, що складається переважно з однорідного матеріалу з одним або двома включеннями правильної форми іншого матеріалу. Завдання про просторовий розподіл, наприклад, електричного поля у зразку такого середовища можна вирішити точно. Якщо включень багато і вони розташовані випадковим чином (хаотично), то вирішити задачу про розподіл електричного поля аналітично і навіть числово, як правило, неможливо. Однак знання подробиць будови такого середовища часто і не необхідні, потрібно лише знати деякі усереднені його властивості, які обумовлені концентрацією включень, їхньою формою, взаємним розташуванням.

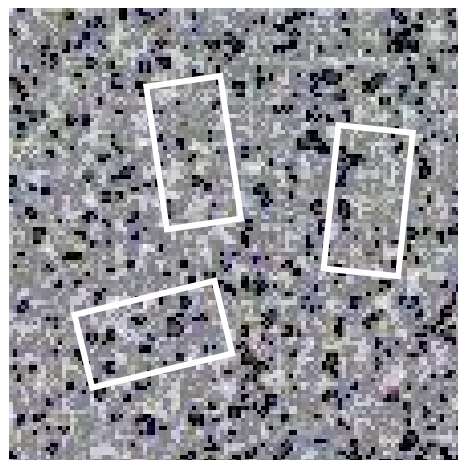


Рис. 2.1. Мікроскопічно неоднорідне середовище. Виділені мікроскопічно різні зразки середовища, з однаковими ефективними середовища.

Існують середовища, котрим у багатьох практично важливих випадках можна отримати достатню інформацію. Це так звані середовища, однорідні у середньому. Якщо з такого середовища вирізати досить великі ділянки, їх властивості будуть однаковими (Рис. 2.1).

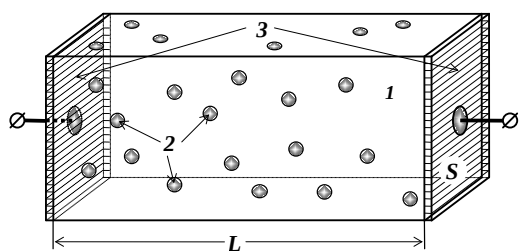


Рис. 2.2. Вимірювання опору зразку середовища однорідного в цілому: 1, 2 – фази, що складають середовище, 3 – ділянки контакту ($\rho_3 \ll \rho_{1,2}$)

Пояснимо зміст введеного поняття однорідного в середньому середовища на прикладі провідності в неоднорідному електропровідному середовищі. Нехай локально виконується закон Ома $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r})$, де $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ – напруженість електричного поля, $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ – густина струму, а $\rho(\mathbf{r})$ – питомий опір. Опори зазначених вище ділянок у такому середовищі будуть однаковими, незважаючи на те, що конкретне розташування включень у кожному з них різне. На Рис. 2.2 наведено схему вимірювання опору в такій ділянці середовища.

Цей опір є функціоналом від $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ і $\mathbf{E}(\mathbf{r})$:

$$R = R[\mathbf{j}(\mathbf{r}), \mathbf{E}(\mathbf{r})]. \quad (2.1.1)$$

Підберемо питомий електричний опір, який позначимо ρ_e , таким чином, щоб повний опір точно такого ж за формою і розмірами однорідного зразка R_e дорівнював R , Рис. 2.3. Таке середовище можна назвати середовищем порівняння.

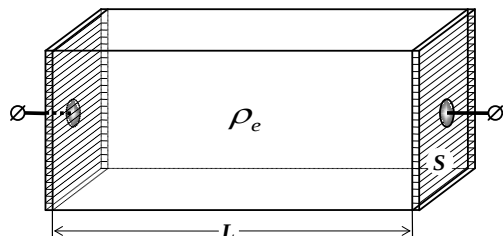


Рис. 2.3 Зразок середовища порівняння, що співпадає по формі і розмірам з ділянкою вирізаного неоднорідного середовища

Простий аналіз показує, що ρ_e коефіцієнт пропорційності між середнім полем $\langle \mathbf{E} \rangle$ і середньою густиною струму $\langle \mathbf{j} \rangle$:

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \rho_e \langle \mathbf{j} \rangle, \quad (2.1.2)$$

Дійсно, для зразка довжиною L і перерізом S при $\langle \mathbf{E} \rangle \parallel \langle \mathbf{j} \rangle$ можна записати (виділення, відповідне вектору, опускаємо):

$$\langle E \rangle L = \rho_e L (\langle j \rangle S / S),$$

звідки різниця потенціалів $U = \langle E \rangle L$ і струм $I = \langle j \rangle S$ виявляються пов'язаними залежністю

$$U = (\rho_e L / S) I,$$

Іншими словами, ми отримуємо відоме співвідношення для опору зразку, що вимірюється експериментально,

$$R_e = \rho_e L / S \quad (2.1.3)$$

Дамо визначення макроскопічно неоднорідного середовища: - це середовище, характерний розмір неоднорідності якого a_0 значно більше будь-якої характерної мікроскопічної довжини ℓ , наприклад, довжини вільного пробігу заряду. Сказане можна подати у вигляді таких нерівностей:

$$\sqrt[3]{V} \gg a_0 \gg \ell, \quad (2.1.4)$$

де $\sqrt[3]{V}$ - характерний розмір зразка середовища. Для макроскопічно неоднорідного середовища можна ввести функцію $\rho(\mathbf{r})$ - локальний питомий опір, тоді виконується співвідношення

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r}),$$

Введений вище виразом (2.1.2) ефективний кінетичний коефіцієнт ρ_e називається ефективним питомим опором композитного середовища. Зазначимо, що ρ_e і $\langle \rho \rangle$, взагалі кажучи, не збігаються, виняток становлять плоскошарові середовища. Можна замість ρ_e – питомого опору, використовувати σ_e – питому ефективну провідність, яка пов'язує між собою середні за об'ємом поля та струми:

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma_e \langle \mathbf{E} \rangle, \quad \sigma_e = 1 / \rho_e. \quad (2.1.5)$$

Аналогічно ефективним кінетичним коефіцієнтам (ЕКК) питомого опору або провідності можна говорити про інші ефективні коефіцієнти: теплопровідність, термоЕРС, модуль Юнга і т.п.:

$$\langle \mathbf{q} \rangle = -\kappa_e \langle \nabla T \rangle, \quad (2.1.6)$$

$$\langle \mathbf{j} \rangle = -\sigma_e \langle \nabla \xi \rangle - \sigma_e \alpha_e \langle \nabla T \rangle, \quad (2.1.7)$$

де κ_e - ЕКК теплопровідності, σ_e і α_e - ЕКК питомої провідності та термоЕРС.

Зазначимо цікаву особливість ЕКК, що відрізняє їх від питомих характеристик відповідних однорідних середовищ. На Рис. 2.4 показано середовище з хаотично розташованими однаковими витягнутими включеннями. У той час, як локально середовище ізотропне

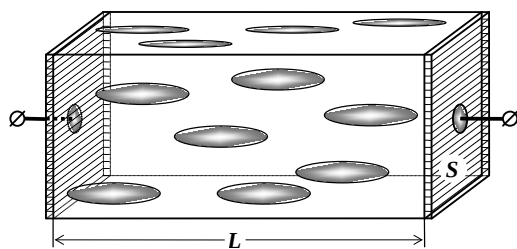


Рис. 2.4. Неоднорідне середовище з витягнутими включеннями

$$\rho = \rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho_1, & \mathbf{r} \in O_1, \\ \rho_2, & \mathbf{r} \in O_2, \end{cases} \quad (2.1.8)$$

ефективне питомий опір є тензором, тобто $\rho_e = \hat{\rho}_e$.

Введення ЕКК пов'язане з тим, що знаючи його значення, можна розрахунковим шляхом знаходити інтегральні характеристики зразка середовища, наприклад, опір, зразка довільної геометрії.

У деяких випадках ЕКК можна записати інакше, наприклад, для $\hat{\sigma}_e$ воно має вигляд

$$\hat{\sigma}_e = \frac{\langle \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \rangle}{\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle^2}, \quad (2.1.9)$$

Цей вираз відразу ж впливає із співвідношення

$$\langle \mathbf{Ej} \rangle = \langle \mathbf{E} \rangle \langle \mathbf{j} \rangle, \quad (2.1.10)$$

яке справедливе при нехтуванні поверхневими ефектами (на межі зразка). Справді, підставляючи ліву частину формули (2.1.10) вираз для густину струму $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, а правої враховуючи, що (2.1.5) $\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma_e \langle \mathbf{E} \rangle$ отримуємо (2.1.9), тобто ефективна провідність може розумітися як нормоване середнє джоулеве тепловиділення.

Справедливість співвідношення (2.1.10) можна пояснити так. Запишемо вираз для напруженості локального електричного поля у вигляді

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{E} \rangle - \nabla \varphi(\mathbf{r}), \quad (2.1.11)$$

де потенціал $\varphi(\mathbf{r})$ – відповідає полю, розсіяному неоднорідностями,

$$\langle \nabla \varphi(\mathbf{r}) \rangle = 0.$$

Різниця між лівою та правою частинами (2.1.11) може бути перетворена на поверхневий інтеграл:

$$\langle \mathbf{Ej} \rangle - \langle \mathbf{E} \rangle \langle \mathbf{j} \rangle = \frac{1}{V} \int \mathbf{Ej} \cdot dV - \langle \mathbf{E} \rangle \langle \mathbf{j} \rangle = \frac{1}{V} \int \langle \mathbf{E} \rangle \mathbf{j} \cdot dV - \langle \mathbf{E} \rangle \langle \mathbf{j} \rangle - \frac{1}{V} \int \langle \nabla \varphi \rangle \mathbf{j} \cdot dV.$$

Перші два доданки у сумі дають нуль, а третє – з урахуванням $\text{div} \mathbf{j} = 0$ можна перетворити на поверхневий інтеграл:

$$\frac{1}{V} \int \langle \nabla \varphi \rangle \mathbf{j} \cdot dV = \frac{1}{V} \int \langle \nabla \varphi \mathbf{j} \rangle dV = \frac{1}{V} \int \varphi \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.1.12)$$

яким на межі $V \rightarrow \infty$ можна знехтувати.

Зазначимо, що рівність нуля поверхневого інтеграла (2.1.12) можлива і в зразках скінченних розмірів, за відповідним чином підібраних граничних умов і розташування фаз.

2.2. Кореляційна довжина та самоусереднення

Досі говорилося про те, що ЕКК можна ввести однозначно, якщо характерний розмір зразка, вирізаного із середовища, досить великий. Дамо більш точне визначення і пояснимо, що означає «досить великий характерний розмір». Для цього введемо поняття кореляційної довжини ξ або кореляційного радіусу.

Нехай $\varphi(\mathbf{r})$ — деяке випадкове поле фізичної величини, а $\rho(\varphi, \mathbf{r}) d\varphi$ — можливість знайти значення φ інтервалі $(\varphi; \varphi + \Delta\varphi)$ у точці $\mathbf{r}$. За допомогою поняття середньої

випадкової величини, або її математичного очікування, можна сформулювати ергодичну гіпотезу

$$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{V} \int \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int \varphi \rho(\varphi) d\varphi. \quad (2.2.1)$$

Використовуємо поняття S - точкового моменту, або S - точкової функції, розподілу $P_s(\varphi_1, \mathbf{r}_1; \varphi_2, \mathbf{r}_2; \dots; \varphi_s, \mathbf{r}_s)$. Якщо $S = 2$, а випадкове поле однорідне та ізотропне, то

$$P_2(\varphi_1, \mathbf{r}_1; \varphi_2, \mathbf{r}_2) \equiv P_2(\varphi_1, \varphi_2; r), \quad (2.2.2)$$

де $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$. Ця функція має такі граничні властивості

$$P_2(\varphi_1, \varphi_2; r) \rightarrow \begin{cases} \delta(\varphi_1 - \varphi_2) \rho(\varphi_1, \varphi_2), & r \rightarrow 0 \\ \rho(\varphi_1) \cdot \rho(\varphi_2), & r \rightarrow \infty \end{cases},$$

Введемо автокореляційну функцію

$$\Gamma(r) = \frac{\langle \varphi(0) \varphi(\mathbf{r}) \rangle}{\langle \varphi^2 \rangle} \equiv \frac{\int \varphi_1 \varphi_2 P_2(\varphi_1, \varphi_2, r) d\varphi_1 d\varphi_2}{\int |\varphi^2| \rho(\varphi) d\varphi}, \quad (2.2.3)$$

тоді

$$\Gamma(r) \rightarrow \begin{cases} 1, & r \rightarrow 0, \\ 0, & r \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Кореляційну довжину випадкового неперервного поля $\varphi(\mathbf{r})$ можна визначити як його характерну топологічну характеристику, або типовий просторовий розмір, виразом

$$\xi^2 = \frac{\int r^2 \Gamma(r) d^3 r}{\int \Gamma(r) d^3 r}. \quad (2.2.4)$$

Однорідне в середньому середовище, таким чином, крім розмірів включень та відстаней між ними (мікроскопічні розміри), має ще одну характерну довжину ξ . Ефективні властивості частини середовища розміром $L \gg \xi$ будуть однаковими.

Для гаусового випадкового поля

$$\Gamma(r) \sim e^{-r/\xi}. \quad (2.2.5)$$

Як приклад розглянемо знову провідне середовище. Однозначність визначення σ_e вимагає, щоб середні за об'ємом $\langle \mathbf{j} \rangle$ та $\langle \mathbf{E} \rangle$ у співвідношенні $\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma_e \langle \mathbf{E} \rangle$ не

залежали від місця, де вирізаний зразок або від випадкової реалізації розподілу провідних фаз. Умова (2.2.1) означає, що кореляція між розташуванням включень досить мала. На цьому прикладі пояснимо одну з важливих властивостей випадково неоднорідних середовищ, яке називається самоусередненням. Формулюється воно в такий спосіб. Для довільної реалізації ω випадкового поля $\sigma(r)$ існує єдине значення σ_e , що $\langle \mathbf{j} \rangle_\omega = \sigma_e \langle \mathbf{E} \rangle_\omega$. Інакше кажучи, σ_e не залежить від вибору реалізації ω , і усереднення за об'ємом еквівалентно усередненню по реалізаціям (ергодична гіпотеза).

Контрольні запитання

1. У чому полягає підхід до опису макроскопічно неупорядкованих середовищ?
2. Чому не можна точно розв'язати задачу про просторовий розподіл електричного поля в макроскопічно неупорядкованому середовищі?
3. Що таке макроскопічно неупорядковане середовище?
4. Що таке середовище, однорідне в середньому?
5. Які основні властивості макроскопічно неупорядкованих середовищ?
6. Які методи використовують для опису макроскопічно неупорядкованих середовищ?
7. Які величини називаються ефективними кінетичними коефіцієнтами?
8. Як визначаються ефективні кінетичні коефіцієнти?
9. Які результати дає метод усереднення?
10. Які обмеження накладає спосіб усереднення?

Розділ 3. Ефективна провідність макроскопічно неупорядкованих середовищ

3.1. Двосторонні оцінки ефективних кінетичних коефіцієнтів

Задамо питання: що можна дізнатися про ЕКК, якщо про характеристики середовища відомо дуже мало. Адже навіть для наближеного визначення ЕКК необхідно мати деяку інформацію про середовище, про концентрацію включень, їх форму, взаємне розташування тощо. Виявляється, є певний мінімум інформації, який дозволяє отримувати двосторонні оцінки величини ЕКК, їх часто називають «вилками». Використовуючи додаткові дані про характеристики середовища, «вилки» можна звужувати, уточнюючи можливі межі ЕКК, тобто чим більше інформація, що враховується, тим більше «вилки».

Розглянемо двосторонні обмеження ЕКК на прикладі ефективної питомої провідності σ_e двофазного середовища з провідностями складових її фаз σ_1 і σ_2 . Для певності вважатимемо $\sigma_1 > \sigma_2$. Очевидно, найпростіші і водночас найширші межі σ_e визначатимуться нерівностями.

$$\sigma_2 \leq \sigma_e \leq \sigma_1, \quad (3.1.1)$$

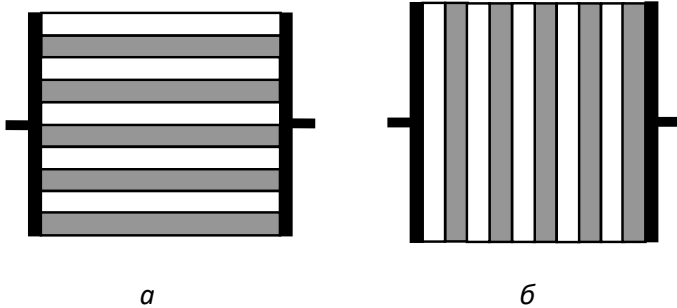


Рис.3.1. Приклади розташування фаз, при яких питома провідність зразку:

a – максимальна $\sigma_{\max} = \sigma_{\parallel}$; b – мінімальна $\sigma_{\min} = \sigma_{\perp}$.

що означає, σ_e не може бути більше максимальної провідності середовища $\sigma_{\max} = \sigma_1$ і менше мінімальної $\sigma_{\min} = \sigma_2$.

Другу за складністю і, природно, вужчу «вилку» можна отримати, використовуючи додаткові дані про середовище, наприклад, концентрацію фаз.

Розглянемо випадок Рис. 3.1, a з чергуванням паралельно розташованих шарів різних фаз. Усереднимо вираз $j_x = \sigma(y)E_x$ (напрямок осей видно з Рис. 3.1)

$$\left\langle \frac{1}{\sigma(y)} j_x \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sigma} \right\rangle j_x = \langle E_x \rangle \text{ звідки } \langle j_x \rangle = \left\langle \frac{1}{\sigma} \right\rangle^{-1} \langle E_x \rangle.$$

Крім того, $\langle j_x \rangle = \sigma_{\perp}^e \langle E_x \rangle$. Порівнюючи ці величини, знаходимо $\sigma_{\perp} = \langle 1/\sigma \rangle^{-1}$, аналогічно можна знайти $\sigma_{\parallel} = \langle \sigma \rangle$, тут $\sigma_{\perp}$ і $\sigma_{\parallel}$ – компоненти тензора ефективної провідності вздовж і поперек шарів:

$$\hat{\sigma}_e = \begin{pmatrix} \sigma_{\parallel} & 0 \\ 0 & \sigma_{\perp} \end{pmatrix}. \quad (3.1.2)$$

В даному випадку $\langle \sigma \rangle = p\sigma_1 + (1-p)\sigma_2$, а $\langle \sigma^{-1} \rangle = p/\sigma_1 + (1-p)/\sigma_2$, де p – концентрація фази σ_1 . Звідки

$$\langle \sigma^{-1} \rangle^{-1} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{p\sigma_2 + (1-p)\sigma_1} \leq \sigma_e \leq p\sigma_1 + (1-p)\sigma_2 = \langle \sigma \rangle. \quad (3.1.3)$$

Нерівності (3.1.3) вперше були встановлені Вінером. Ліве граничне значення знайшов Фойгт, праве – Рейс. Зауважимо, що для ізотропного в середньому середовища досягнення границь (3.1.3) неможливе.

Загальний принцип виведення двосторонніх оцінок заснований на існуванні принципу мінімуму функціоналу, що дорівнює у випадку провідного середовища дисипації енергії (виділення тепла Джоуля):

$$\Phi = \int_V (\mathbf{E} \mathbf{j}) dV. \quad (3.1.4)$$

У стаціонарному випадку $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ та, як легко показати, з мінімуму функціоналу (3.1.4) випливає $\text{div } \mathbf{j} = 0$. Дійсно, записуючи (3.1.4) у вигляді

$$\Phi[\sigma, \nabla \varphi] = \int F(\sigma, \nabla \varphi) dV, \quad F = \sigma (\nabla \varphi)^2, \quad (3.1.5)$$

з рівняння Ейлера для F :

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)} - \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0, \quad (3.1.6)$$

відразу ж отримуємо $\text{div } \mathbf{j} = 0$, тобто, ті розподіли полів $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ і струмів $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, які задовольняють рівнянням Максвелла і задають мінімум функціоналу Φ (3.1.4). Звідси й випливає загальний принцип побудови двосторонніх оцінок – підбір із різних фізичних міркувань таких функцій $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ і $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ (їх називають «пробними»), щоб $\Phi[\sigma, \nabla \varphi]$ (3.1.4) був якнайменше.

Тепер виведемо співвідношення (3.1.3) у більш загальному вигляді. Для цього скористаємося отриманим раніше співвідношенням $\langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{E} \rangle \cdot \langle \mathbf{j} \rangle$ (див. параграф 2.1). Враховуючи, що середнє $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{j})$ має мінімум на істинних значеннях поля $\mathbf{E}$ і, приймаючи як пробні значення $\mathbf{E}$ та $\mathbf{j}$ величини $\langle \mathbf{E} \rangle$ і $\langle \mathbf{j} \rangle$, отримуємо

$$\langle \mathbf{E} \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{E} \rangle \langle \mathbf{j} \rangle = \sigma_e \langle \mathbf{E} \rangle^2 = \langle \sigma \mathbf{E}^2 \rangle \leq \langle \sigma \rangle \langle \mathbf{E} \rangle^2, \quad (3.1.7)$$

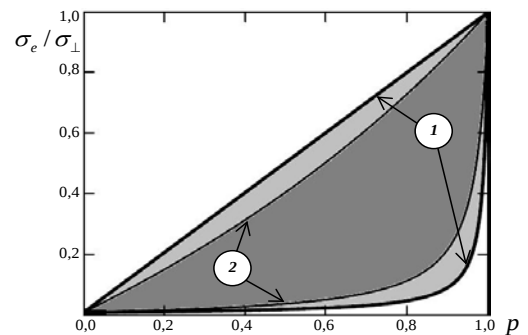
$$\langle \mathbf{E} \mathbf{j} \rangle = \frac{1}{\sigma_e} \langle \mathbf{j} \rangle^2 = \langle \frac{1}{\sigma} \mathbf{j}^2 \rangle \leq \langle \frac{1}{\sigma} \rangle \langle \mathbf{j} \rangle^2. \quad (3.1.8)$$

Звідси знаходимо остаточне співвідношення:

$$\langle \sigma^{-1} \rangle \leq \sigma_e \leq \langle \sigma \rangle. \quad (3.1.9)$$

Наступну за складністю і ще вужчу «вилку» можна отримати для ізотропного в середньому середовища. Зазначимо, що нерівності (3.1.3) описують у загальному випадку анізотропне середовище, коли $\hat{\sigma}_e$ – тензор. Оцінки σ_e для ізотропного середовища називають "вилками" Хашина -Штрикмана. Для їх отримання використовують узагальнений варіаційний принцип, і знаходять для σ_e більш вузькі межі, ніж дають співвідношення (3.1.3). Зокрема, для двофазного матеріалу, ці межі визначаються нерівностями (при $\sigma_1 > \sigma_2$):

$$\sigma_2 + \frac{p}{1/(\sigma_1 - \sigma_2) + (1-p)/3\sigma_1} \leq \sigma_e \leq \sigma_1 + \frac{1-p}{1/(\sigma_2 - \sigma_1) + p/3\sigma_1}. \quad (3.1.10)$$



Хашин і Штрикман показали, що межі (3.1.10) не покращуються, якщо задані концентрації p фаз.

На Рис. 3.2 показана область "вилки" для різних значень σ_1 та σ_2 . "Вилки" добре "працюють" при

невеликих значеннях відношення σ_1/σ_2 , при великих значеннях σ_1/σ_2 двосторонні обмеження практично марні.

Рис. 3.2. Двосторонні обмеження для провідності:
1 – «вилка» (3.1.9); 2 – «вилка» Хашина–Штрикмана (3.1.10)

При побудові «вилок» можна використовувати більш докладну інформацію про композит, ніж концентрація фаз та ізотропія середовища, наприклад, відомості про геометрію розташування фаз або дані про триточкову кореляційну функцію. Розглянутий вище варіаційний принцип можна поширити на задачі магнітостатики, що дозволяє знайти двосторонні обмеження для енергії магнітного поля та індуктивності багатокомпонентних матеріалів. Для випадку комплексних значень провідності фаз (квазігармонічний випадок провідності на змінному струмі) можна побудувати відповідні «вилки». При їх побудові використовується припущення про аналітичність комплексних функцій провідності.

3.2. Наближення Максвелла, Гарнетта, Бруггемана

Наближення Максвелла. В основі наближення Максвелла лежить припущення про те, що концентрація включень однієї з фаз мала і включення мають правильну компактну форму, наприклад, сферичну. Контрприклад - "металева" вата в діелектричному середовищі. Концентрація провідної фази мала, але включення не мають компактності.

Отримати σ_e в аналітичному вигляді в наближенні Максвелла можна тільки для включень певної форми. Загальний вигляд такої форми – тривісний еліпсоїд. Під малою розуміється така концентрація включень ($p \ll 1$), при якій можна знехтувати впливом

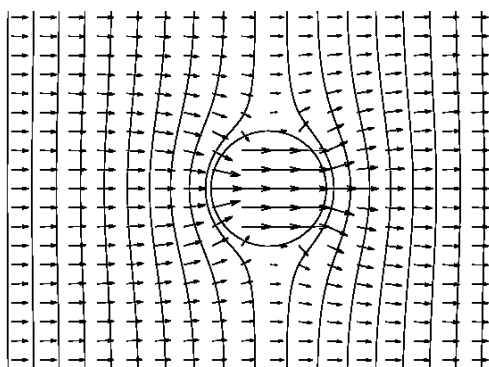


Рис. 3.3. Вид еквіпотенціальних ліній і напрямку векторів густини струму для усамітненого циліндричного включення.

одного включення на інше (сусіднє). Це означає, що задача по розподілу полів і струмів можна вирішувати для випадку одиночного включення. Добре відомий аналітичний розв'язок такої задачі для еліпсоїда. Зазначимо, що поле всередині включення при цьому виявляється однорідним. Ця обставина дозволяє знайти гарне наближення для ефективної провідності і в нелінійному випадку.

Розглянемо спочатку випадок сферичних включень. Нехай p – концентрація добре провідної фази з провідністю σ_1 (наприклад, включення) в середовищі з провідністю σ_2 . Як приклад на Рис.3.3 показано розподіл поля біля циліндричного включення у двовимірному випадку.

На нескінченності поле E_∞ скінченне і для відокремленого включення збігається з $\langle E \rangle$. Поле всередині включення дається розв'язанням стаціонарних рівнянь електродинаміки

$$\mathbf{E}_1 = \frac{3\sigma_2}{2\sigma_2 + \sigma_1} \langle \mathbf{E} \rangle, \quad (3.2.1)$$

і, як видно з (3.2.1), не залежить від координат. В подальшому отримання виразу σ_e можна виконати декількома способами, які цікаві тим, що дають якісно різні результати.

Розглянемо середнє $\langle \mathbf{j} - \sigma_2 \mathbf{E} \rangle$. З одного боку,

$$\langle \mathbf{j} - \sigma_2 \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbf{j} \rangle - \langle \sigma_2 \mathbf{E} \rangle = (\sigma_e - \sigma_2) \langle \mathbf{E} \rangle, \quad (3.2.2)$$

з іншого боку,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{j} - \sigma_2 \mathbf{E} \rangle &= \frac{1}{V} \int (\mathbf{j} - \sigma_2 \mathbf{E}) dV = \frac{1}{V} \int (\sigma \mathbf{E} - \sigma_2 \mathbf{E}) dV \\ &= \frac{V_1}{V} (\sigma_1 - \sigma_2) \mathbf{E}_1 = (\sigma_1 - \sigma_2) p \mathbf{E}_1, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

де V - об'єм середовища, V_1 - об'єм 1-ї фази, $p = V_1/V$.

Прирівнюючи (3.2.2) та (3.2.3), отримуємо

$$\sigma_{BW}^e = \sigma_2 \left(1 + 3p \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_2 + \sigma_1} \right), \quad p \ll 1. \quad (3.2.4)$$

Тут $\sigma_e \equiv \sigma_{BW}^e$ (BW – black in white) - "чорні" кульки в "білому" середовищі. Так зазвичай позначають провідну фазу з провідністю σ_1 , що зветься «чорною» фазою, у фазі з меншою провідністю σ_2 , яку називають відповідно «білою» фазою. Аналогічно можна розглянути випадок малої концентрації $p_2 = 1 - p \ll 1$ фази, що погано проводить, з провідністю σ_2 :

$$\sigma_{WB}^e = \sigma_1 \left(1 + 3p_2 \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_1 + \sigma_2} \right) = \sigma_1 \left(\frac{4\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_1 + \sigma_2} + 3p \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} \right). \quad (3.2.5)$$

Перейдемо до іншого способу виведення наближення Максвелла, який дає вираз для σ_e більш широкою за концентрацією сферою застосування. Тепер на нескінченності задаватимемо не напруженість поля, а густину струму $\mathbf{j}_\infty$, яка для відокремленого включення збігається з $\langle \mathbf{j} \rangle$. При цьому замість (3.2.1) матиме місце $\mathbf{j}_1 = (3\sigma_1 / (2\sigma_2 + \sigma_1)) \langle \mathbf{j} \rangle$. Розглянемо середнє $\langle \mathbf{E} - \rho_2 \mathbf{j} \rangle$, де $\rho_2 = 1/\sigma_2$ – питомий опір другого середовища. Повторюючи викладки, аналогічні (3.2.2) – (3.2.4), для ефективного питомого опору - середовища ρ_e з включеннями фази з ρ_1 у фазі з ρ_2 одержуємо вираз

$$\rho_{BW}^e = \rho_2 \left(1 - 3p \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_1 + \rho_2} \right), \quad (3.2.6)$$

де $p \ll 1$ - концентрація фази з ρ_1 . Враховуючи, що $\sigma_e = 1/\rho_e$ з (3.2.6) знаходимо співвідношення

$$\sigma_{BW}^e = \frac{\sigma_2}{1 - 3p \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + 2\sigma_2}}, \quad (3.2.7)$$

яке при розкладанні за малим параметром p (з точністю до лінійного доданку) збігається з (3.2.4). Як буде показано нижче, вираз (3.2.7) має ширшу область застосування, зокрема включає існування особливості, пов'язаної з порогом протікання.

Аналогічно співвідношенню (3.2.5) для $p_2 = 1 - p \ll 1$ можна записати

$$\rho_{WB}^e = \rho_1 \left(1 - 3(1-p) \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + 2\rho_2} \right), \quad (3.2.8)$$

або

$$\sigma_{WB}^e = \frac{\sigma_1(\sigma_2 + 2\sigma_1)}{5\sigma_1 - 2\sigma_2 + 3p(\sigma_2 - \sigma_1)}. \quad (3.2.9)$$

Перш ніж аналізувати отримані вирази, розглянемо ефективні характеристики інших типів включень. У випадку, коли включення є еліпсоїдами з головними піввісями a, b, c , для знаходження σ_e необхідно знати поле всередині окремого включення. Поле всередині включень $\mathbf{E}_1$, як і раніше, можна виразити через середнє поле $\langle \mathbf{E} \rangle$, але тепер ці поля будуть, взагалі кажучи, неколінеарними, тобто,

$$\mathbf{E}_1 = \hat{\Omega} \langle \mathbf{E} \rangle. \quad (3.2.10)$$

Якщо систему координат пов'язати з вісями еліпсоїда, то тензор $\hat{\Omega}$ набуде найбільш простого, діагонального вигляду:

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_{33} \end{pmatrix}, \quad \Omega_{ii} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2)n_i}, \quad i = x, y, z, \quad (3.2.11)$$

а величини n_i , які називаються факторами деполяризації, можна виразити через еліптичні інтеграли:

$$n_x = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+a^2)R_s}, \quad n_y = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+b^2)R_s}, \quad n_z = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+c^2)R_s},$$

$$R_s = \sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)}. \quad (3.2.12)$$

Знаючи $\mathbf{E}_1$, отримуємо ефективну провідність, яка у випадку є тензором. Якщо всі включення співвісні – напрямки відповідних вісей різних еліпсоїдів збігаються, – а їхні центри розташовані хаотично, то σ_e – діагональний тензор

$$\sigma_e = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.2.13)$$

де

$$\sigma_{ii}^e = \sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2) \Omega_{ii} p, \quad ii \rightarrow xx, yy, zz. \quad (3.2.14)$$

Для деяких часткових випадків інтеграли в (3.2.12) беруться у явному вигляді. Так, для кульових включень $n_x = n_y = n_z = 1/3$ і за допомогою формул (3.2.11), (3.2.14), наприклад, для σ_{xx}^e отримаємо

$$\sigma_{xx}^e = \frac{3\sigma_2^2(\sigma_1 - \sigma_2)p}{2\sigma_2 + \sigma_1},$$

аналогічно можна розрахувати інші компоненти тензора.

Для циліндрів з осями вздовж осі x ($a \rightarrow \infty$):

$$n_x = 0, \quad n_y = n_z = 1/2 \quad \sigma_{xx}^e = \sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2)p$$

Для витягнутого еліпсоїда обертання ($a > b = c$):

$$n_x = \frac{1-e^2}{e^3}(\operatorname{arth} e - e), \quad n_y = n_z = \frac{1-n_x}{2}, \quad e = \sqrt{1-(b/a)^2}.$$

Для сплюснутого еліпсоїда ($a = b > c$):

$$n_x = n_y = \frac{1-n_z}{2}, \quad n_z = \frac{1+e^2}{e^3}(e - \operatorname{arctg} e), \quad e = \sqrt{(a/c)^2 - 1}.$$

Наближення Гарнетта. У цьому наближенні розглядаються моменти, наведені зовнішнім полем на відокремлених включеннях. Тут можна обійтися без «дипольної»

термінології і зробити розрахунки аналогічно висновку наближень Максвелла, використовуючи спотворення електричного потенціалу, створюваного усамітненими включеннями (Рис.3.4), їх ще називають розсіяним потенціалом. Спотворення потенціалу $\delta\varphi$, створюваного «чорною» кулькою (з провідністю σ_1) радіусу a в «білому» середовищі (з провідністю σ_2) має вигляд:

$$\delta\varphi = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_2 + \sigma_1} \frac{a^3 \cos \theta}{r^2} |\langle \mathbf{E} \rangle|, \quad (3.2.15)$$

де $\delta\varphi$ - додатковий доданок у розкладі потенціалу, випадку, коли незбурена частина потенціалу в однорідному середовищі – $\langle \mathbf{E} \rangle z$, а вісь OZ спрямована вздовж $\langle \mathbf{E} \rangle$:

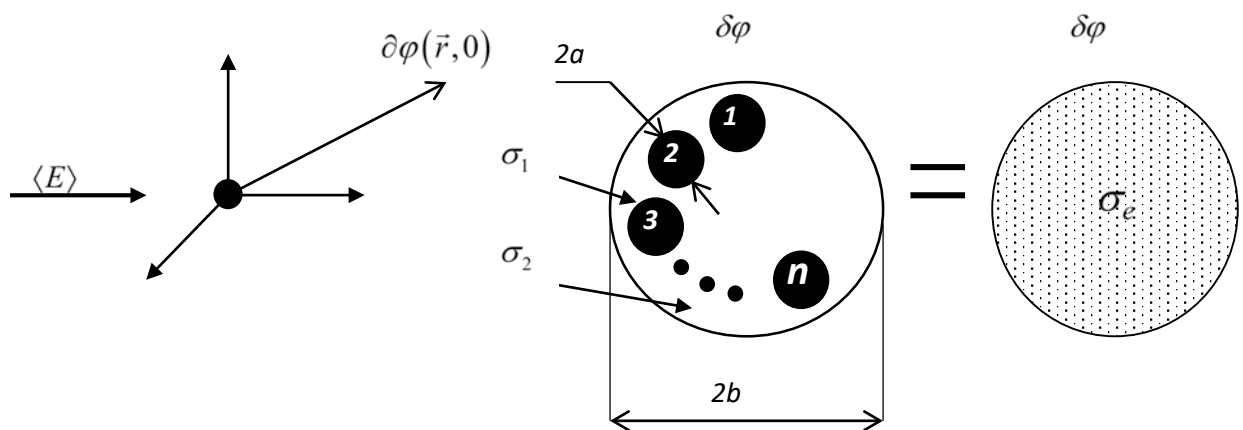


Рис.3.4. До виводу наближення Гарнетта. Поле на нескінченності $\langle \mathbf{E} \rangle$ напрямлено вздовж OZ .

$$\varphi = -\langle \mathbf{E} \rangle z + \delta\varphi. \quad (3.2.16)$$

Розглянемо тепер n "чорних" включень, розташованих у сфері радіусу b . Основою наближення Гарнетта є припущення про те, що включення створюють поза сферою розсіяний потенціал $n\delta\varphi$. Для отримання σ_e запровадимо середовище порівняння, тобто припустимо, що розсіяний потенціал, створюваний n кулями радіусу a , дорівнює розсіяному потенціалу, що створюється кулею радіусу b , що їх містить, за умови, що її провідність σ_e . Інакше кажучи, $n\delta\varphi = \delta\varphi_e$, (див. Рис.3.4). Тоді

$$n \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_2 + \sigma_1} \frac{a^3 \cos \theta}{r^2} |\langle \mathbf{E} \rangle| = \frac{\sigma_2 - \sigma_e}{2\sigma_2 + \sigma_e} \frac{b^3 \cos \theta}{r^2} |\langle \mathbf{E} \rangle|. \quad (3.2.17)$$

Звідси, з огляду на те, що концентрація «чорної» фази з провідністю σ_1 - це $p = n(a/b)^3$, отримуємо

$$\sigma_{BW}^e = \frac{\sigma_2 (2\sigma_2 + \sigma_1 - 2p(\sigma_2 - \sigma_1))}{2\sigma_2 + \sigma_1 - p(\sigma_1 - \sigma_2)}. \quad (3.2.18)$$

Аналогічно виводимо і σ_{WB}^e , оскільки $p_2 = 1 - p$

$$\sigma_{WB}^e = \sigma_1 \frac{3\sigma_2 + 2p(\sigma_2 - \sigma_1)}{3\sigma_1 - p(\sigma_1 - \sigma_2)}. \quad (3.2.19)$$

Зауважимо, що у літературі зустрічається й інша термінологія (особливо при застосуванні до діелектричних середовищ): «поляризація», «фактор поляризації».

Наближення самоузгодженого поля Бруггемана. У літературі зустрічаються різні назви наближення Бруггемана: теорія ефективного середовища (ТЕС), effective medium theory (ЕМТ), теорія самоузгодженого поля, наближення Бруггемана – Ландауера тощо.

Проілюструємо це наближення на прикладі середовища зі сферичними включеннями. Нехай p – концентрація «чорних» включень, а σ_e – ефективна провідність середовища. Помістимо в середовище порівняння з ефективною провідністю σ_e , N_1 включень з провідністю σ_1 та N_2 – з провідністю σ_2 , так, щоб $N_1 / N_2 = p / (1 - p)$. Концентрації «чорної» і «білої» фаз при цьому не зміняться, і ефективна провідність залишиться тією ж. Водночас кожне включення вносить спотворення поля :

$$\delta \mathbf{E}_1 = \langle \mathbf{E} \rangle_1 - \langle \mathbf{E} \rangle, \quad \delta \mathbf{E}_2 = \langle \mathbf{E} \rangle_2 - \langle \mathbf{E} \rangle, \quad (3.2.20)$$

які ми вже розглядали у наближенні усамітнених включень:

$$\delta \mathbf{E}_1 = \frac{\sigma_e - \sigma_1}{2\sigma_e + \sigma_1} \langle \mathbf{E} \rangle, \quad \delta \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma_e - \sigma_2}{2\sigma_e + \sigma_2} \langle \mathbf{E} \rangle. \quad (3.2.21)$$

Оскільки ефективні властивості середовища не змінюються, спотворення поля мають компенсувати одне одного:

$$p \delta \mathbf{E}_1 + (1 - p) \delta \mathbf{E}_2 = 0, \quad (3.2.22)$$

це і є умова самоузгодження.

До умови (3.2.22) можна підійти інакше, наприклад, середнє поле має вигляд

$$\langle \mathbf{E} \rangle = p \langle \mathbf{E} \rangle_1 + (1-p) \langle \mathbf{E} \rangle_2, \quad (3.2.23)$$

де $\langle \mathbf{E} \rangle_1$ і $\langle \mathbf{E} \rangle_2$ – середні поля у «чорній» та «білій» фазах. Підставляючи (3.2.20) (3.2.23), знову отримуємо умову самоузгодження (3.2.22).

Підставляючи (3.2.21) в (3.2.22), отримаємо рівняння для визначення σ_e

$$\frac{\sigma_e - \sigma_1}{2\sigma_e + \sigma_1} p + \frac{\sigma_e - \sigma_2}{2\sigma_e + \sigma_2} (1-p) = 0, \quad (3.2.24)$$

звідки й знаходимо ефективну провідність у ЕМТ-наближенні:

$$\sigma_e = \frac{1}{4} \left[(3p-1)\sigma_1 + (2-3p)\sigma_2 + \sqrt{[(3p-1)\sigma_1 + (2-3p)\sigma_2]^2 + 8\sigma_1\sigma_2} \right]. \quad (3.2.25)$$

Коротко проаналізуємо концентраційні залежності σ_e для різних наближень. При малих концентраціях включень із провідністю σ_1 $p \ll 1$ або з провідністю σ_2 $(1-p) \ll 1$ розглянуті наближення та числовий розрахунок добре збігаються. Дивним є той факт, що найпростіша залежність, а саме та, яку дає наближення Максвелла, при виведенні σ_e через ρ_e (3.2.7) (його можна назвати висновком наближення Максвелла в ρ -представленні) має особливість при $p = 1/3$. Ця особливість якісно чітко відбиває справді існуючий перехід, що зумовлений виникненням нескінченного кластера – замкнутого шляху перебігу струму. Слід зазначити, що виведення залежності наближення Максвелла в σ -представленні пов'язаний з залежністю в ρ -представленні апроксимантом Паде. Його сенс полягає в апроксимації полінома дробово-лінійним співвідношенням, що дозволяє добре описувати реальні особливості фізичних залежностей. Повернемося до наближення Максвелла. У σ -представленні маємо

$$\sigma_{BW}^e = \sigma_2 \left(1 + 3p \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_2 + \sigma_1} \right) = \sigma_2 \left(1 + 3p \frac{1-h}{1+2h} \right) \approx \sigma_2 (1+3p), \quad h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \ll 1, \quad (3.2.26)$$

а в ρ -представленні

$$\sigma_{BW}^e = \frac{\sigma_2}{1 - 3p \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_2 + \sigma_1}} = \frac{\sigma_2}{1 - 3p \frac{1-h}{1+2h}} \approx \frac{\sigma_2}{1-3p}, \quad h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \ll 1. \quad (3.2.27)$$

Легко бачити, що в першому наближенні в розкладі σ_{BW}^e в ряд по p ці вирази збігаються. Однак наближення Максвелла в p -представленні (3.2.27) має особливу точку, в якій відбувається різкий перехід (при $\sigma_1/\sigma_2 \gg 1$) від «діелектричної» поведінки ($\sigma_e \approx \sigma_2$) до «металевої» ($\sigma_e \approx \sigma_1$) (Рис. 3.5). Зазначимо, що добре «працює» скрізь, крім області поблизу особливості, наближення Бруггемана, поблизу самої особливості не збігається з числовим розрахунком та експериментом. Область поблизу особливості (в наближеннях, що розглядаються – це $p=1/3$) називається критичною. Для її правильного опису потрібні складніші математичні методи та запровадження глибших уявлень, ніж усамітнене включення в однорідному зовнішньому полі. Відповідна сфера досліджень виділилася в так звану теорію протікання (теорія перколяції, від англійського percolation - протікання).

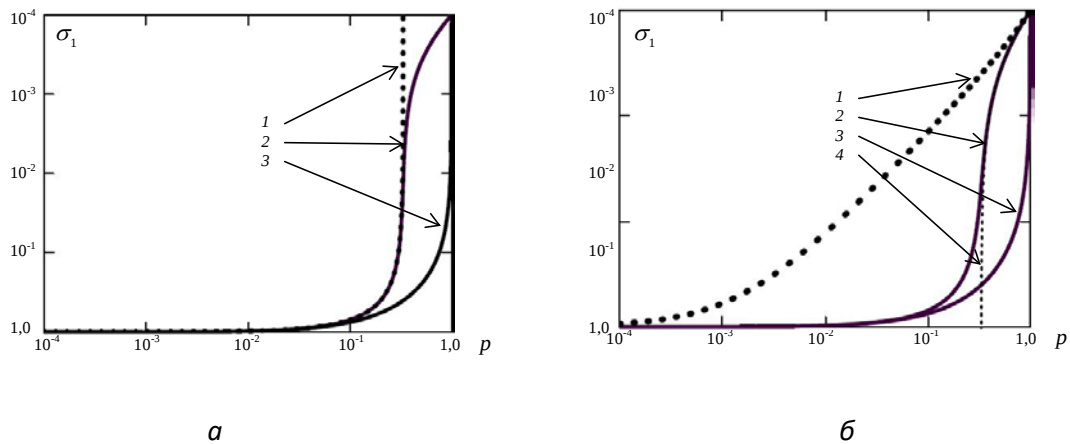


Рис. 3.5. Концентраційні залежності ефективної провідності в різних наближеннях:

a – 1 – для наближення Максвелла (3.2.7), 2 – Гарнетта (3.2.18), 3 – ЕМА (3.2.25), тут прийнято $\sigma_1 = 10000, \sigma_2 = 1$ (в умовних одиницях); b – 1 – для наближення Максвелла (3.2.5), 2 – Гарнетта (3.2.18), 3 – Гарнетта (3.2.19), 4 – ЕМА (3.2.25), тут прийнято $\sigma_1 = 1000, \sigma_2 = 1$ (в умовних одиницях).

Розглянемо деякі узагальнення описаних наближень. Досі ми вивчали випадок тривимірного поля (3D). Можна знайти відповідні співвідношення у двовимірному випадку (2D). Оскільки наближення Максвелла – окремий випадок наближення Бруггемана, то розглянемо наближення Бруггемана докладніше. Вирази для випадку 2D можна отримати кількома способами.

1. У рамках підходу самоузгодженого поля можна скористатися виразами

$$\delta \mathbf{E}_1 = \frac{\sigma_e - \sigma_1}{\sigma_e + \sigma_1} \langle \mathbf{E} \rangle \quad \text{і} \quad \delta \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma_e - \sigma_2}{\sigma_e + \sigma_2} \langle \mathbf{E} \rangle, \quad (3.2.28)$$

і записати умови самоузгодження, аналогічні до виразу (3.2.22).

2. Можна використовувати відомий 3D розв'язок для еліпсоїдальних включень за умови, що на піввісі $a = b$ та $c \rightarrow \infty$. При цьому отримуємо набір співвісних циліндричних включень, перерізи яких - кола. Відповідні розв'язки є випадком 2 D для колових включень. В обох способах виходить один і той же вираз для провідності σ_e , а умова самоузгодження має вигляд

$$\frac{\sigma_e - \sigma_1}{\sigma_e + \sigma_1} p + \frac{\sigma_e - \sigma_2}{\sigma_e + \sigma_2} (1 - p) = 0. \quad (3.2.29)$$

Умови самоузгодження можна узагальнити одним рівнянням, придатним для випадків різних розмірностей d :

$$\frac{\sigma_e - \sigma_1}{(d-1)\sigma_e + \sigma_1} p + \frac{\sigma_e - \sigma_2}{(d-1)\sigma_e + \sigma_2} (1 - p) = 0, \quad d = 1, 2, 3. \quad (3.2.30)$$

Рівняння (3.2.30) охоплює також і випадок $d = 1$, який відповідає провідності σ_e композитної плоскошарового середовища. Звичайно, в реальному світі $d \leq 3$, але в теорії перколяції, розрахунок критичної поведінки стає особливо простим для випадку $d = 6$ (критична розмірність) і може бути перевірочним. Тут ситуація аналогічна випадку критичної розмірності $d = 4$ в теорії фазових переходів 2-го роду.

Легко здійснюється узагальнення умови самоузгодження і на багатофазні середовища. Наприклад, для сферичних включень з провідностями $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ та відповідними концентраціями $p_1, p_2, \dots, p_n$ (тут, звичайно, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$) маємо

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{\sigma_i - \sigma_e}{\sigma_e + (d-1)\sigma_e} = 0. \quad (3.2.31)$$

Зауважимо, що для $n > 4$, як відомо, немає загального аналітичного кінцевого виразу для розв'язку рівняння (3.2.31).

Ми вже бачили, що вираз для σ_e наближення Бруггемана, як і наближення Максвелла в ρ -представленні, якісно описують перколяційний перехід при $p = 1/3$. Важливо, що хоча,

наприклад, у простій кубічній ґратці зв'язків $p_c \approx 1/3$, у реальних двофазних композитах p_c може мати будь-які значення в діапазоні $0 < p_c < 1$.

3.3. Періодично розташовані включення

При малих концентраціях включень не істотно, чи розподілені включення випадково або впорядковано, наприклад, у вузлах періодичної ґратки. Описувати ефективну провідність таких середовищ можна за допомогою континуальних моделей (усамітнене включення у зовнішньому полі, див. наближення Максвелла в параграфі 3.2), як і в дискретному варіанті, введенням сітки (випадкової або періодичної).

При великих концентраціях поведінка ефективної провідності для середовищ із випадковим і періодичним розташуванням включень значно відрізняється. Це очевидно вже з якісних міркувань – при випадковому розташуванні добре провідних включень у погано провідній матриці при концентрації включень, рівній та більше порогової (p_c), у середовищі утворюється нескінченний шлях тільки по фазі, що добре проводить. Для включень, розташованих у вузлах кубічних ґраток, такий шлях виникає тільки при максимально можливій концентрації, коли всі включення торкнуться один одного. Композити з періодичним, чи близьким щодо нього, розташуванням включень за великих значень концентрації називаються високонаповненими композитами, вони широко застосовуються на практиці.

Дослідження середовищ з періодичними включеннями цікаве як з практичної точки зору, так і з теоретичної: наприклад, модельна задача, яка в ряді випадків може бути розв'язана точно і при порівнянні з результатами наближених методів дати межі застосування (похибка) останніх.

При великих значеннях концентрації є велика різниця між тими середовищами, які можна описувати дискретними сітками опорів, і тими, для яких така дискретизація неприпустима. При моделюванні середовища сіткою, що складається з добре («чорних») і погано провідних («білих») опорів, повністю втрачається інформація про форму включень. Більш того, концентрація включень може набувати будь-якого значення (між нулем і одиницею). Сітковий варіант наближення Бруггемана дає той же вираз для σ_e , як і континуальний для сферичних включень. І хоча зрозуміло, що концентрація сферичних включень не може бути вищою за деяке значення (залежно від розташування частинок), такі наближені результати часто добре узгоджуються з експериментом для двофазного сплаву, форма фаз якого далека від сферичної.

У тих же випадках, коли включення мають сферичну форму (або циліндричну у випадку 2D) та їх формою не можна знехтувати, при немалих концентраціях включень залежність σ_e від концентрації та відношення σ_2/σ_1 значно відрізнятиметься від ЕМТ-наближення. Це пов'язано, зокрема з тим, що немає симетрії між «чорним» і «білим» – тобто середовище з «чорних» сферичних включень у «білій» матриці за жодної концентрації не перейде в середовище, де «білі» включення перебувають у «чорній» матриці. Крім того, при великих значеннях концентрації включень при обчисленні σ_e вплив включень одного на одне суттєво. Якщо в ЕМТ вважалось, що кожне включення знаходиться у зовнішньому однорідному полі та спотворення поля, що вносяться включенням, мають місце тільки у власному околі, то тепер, можна сказати, образно, немає місця, де б поле не спотворювалося.

Можливі, принаймні, два принципово різні випадки середовищ, що містять включення, форма яких відіграє істотну роль. По-перше, це вже згадані високонаповнені полімери з періодично розташованими включеннями (або розташуванням, близьким до періодичного). І, по-друге, це так звані Swiss - cheese - середовища, про які говорять, що вони проявляють континуальне протікання і які будуть розглянуті нижче, в розділі 7.

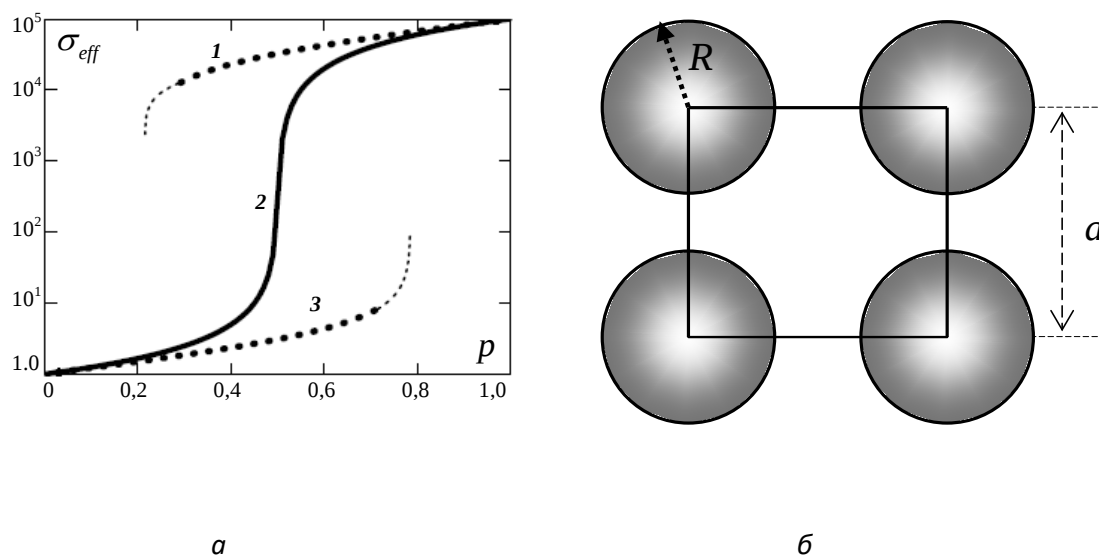


Рис.3.6. Графік залежності (а) ефективної провідності середовища з періодично розташованими включеннями від концентрацій включень при малих концентраціях включень, схема (б) середовища для *BW* -випадку:

1 – $(1-p) \ll 1$ для випадку *WB* (3.1.1), 2 – $p \ll 1$ для випадку *BW* (3.3.4), 3 – результат отриманий в рамках ЕМТ. Точки – результат числового розрахунку задачі математичної фізики для шароподібних включень; суцільна лінія – побудована по теоретичним розрахункам, $\sigma_2/\sigma_1 = 10^{-5}$.

Тут ми розглянемо ефективну провідність середовища із періодичним розташуванням включень – двовимірний випадок – включення колової форми. Щоб підкреслити різницю між σ_e , отриманим з ЕМТ (або числовим розрахунком на двофазних ґратках, що дає також концентраційну залежність σ_e) і σ_e для середовища з періодичними включеннями, наведемо рис.3.6. Тут для кожного типу (BW і WB) існує своя гранична концентрація включень, коли вони торкаються один одного – $p_{BW}^* = \pi/4$ і $p_{WB} = 1 - \pi/4$ результат ЕМТ збігається з результатом розв'язання задачі з періодичним розташуванням включень.

Для періодично розташованих кругових включень за допомогою фізичного моделювання (діелектричні включення отримані вирізанням отворів у плівці, що проводить) отримана концентраційна залежність σ_{WB}^e . Знайдено вираз σ^e у вигляді швидко збіжного за концентрацією ряду, або, що те саме (див. Рис.3.6), за безрозмірним параметром R/a . Для WB -середовища ефективна провідність σ_e з точністю до 1% може бути представлена так:

$$\sigma_{WB}^e = \sigma_1 \frac{\alpha - \frac{\pi R^2}{4a^2} \delta}{\alpha + \frac{\pi R^2}{4a^2} \delta}, \quad (3.3.1)$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{3} (gR^4)^2 \delta^2 - \frac{1}{63} (gR^4)^4 \delta^2 - \frac{5}{9} \left(\delta^2 + \frac{4}{5 \cdot 11 \cdot 13^2} \right) (gR^4)^6 \delta^2 \dots, \quad (3.3.2)$$

$$\delta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{1-h}{1+h}; \quad h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}; \quad g = \frac{1}{a^4} \left[K \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]^4, \quad (3.3.3)$$

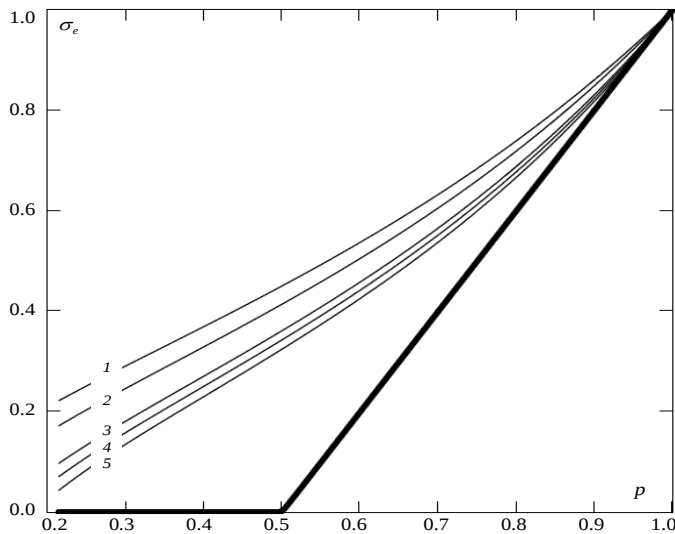


Рис. 3.7. Концентраційні залежності для різних значень співвідношення σ_2 / σ_1 :

1 – $\sigma_1 = 7$, 2 – $\sigma_1 = 10$, 3 – $\sigma_1 = 25$, 4 – $\sigma_1 = 50$, 5 – $\sigma_1 = 10^5$, у всіх прикладах $\sigma_2 = 1$; для порівняння жирна лінія – концентраційна залежність провідності для випадково неоднорідного середовища в рамках ЕМА-наближення.

де $K(1/\sqrt{2}) = 1.85407\dots$ – повний еліптичний інтеграл першого роду із модулем.

Концентрація фази, що добре проводить (σ_1) має вигляд $p = 1 - \pi R^2 / 4a^2$. Вираз (3.3.1) справедливий: а) у всьому діапазоні зміни концентрації $p_{BW}^* \leq p \leq 1$ фази, що добре проводить, при $|\delta| \leq 0,7$. Для $\sigma_1 > \sigma_2$ остання умова означає $\sigma_1/\sigma_2 \geq 5,67$; б) в діапазоні концентрацій $0,29 \leq p \leq 1$ для будь-якого відношення $\sigma_1/\sigma_2 > 1$.

На Рис. 3.7 показані концентраційна залежність ефективної провідності при періодичному розташуванні кругових включень поганопровідної фази в добре провідній матриці. Наприклад вибрані різні значення співвідношення провідності фаз σ_1/σ_2 (див. також Рис.3.6)

Ефективну провідність в протилежному випадку, тобто "чорні" включення в "білій" матриці, можна знайти, використовуючи співвідношення взаємності

$$\sigma_e(p) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_e(1-p)}. \quad (3.3.4)$$

В області концентрацій, близьких до граничних p_{BW}^* і p_{WB}^* , вираз для σ_e з гарною точністю можна записати набагато простіше. Оскільки при $R \rightarrow a$ більшість опору набирається в контактній області. Для BW-системи область контакту має вигляд прошарку (Рис. 3.8,а), а у випадку WB- вид звужений (містків) (Рис. 3.8,б), або в термінах концентрації добре провідної фази маємо

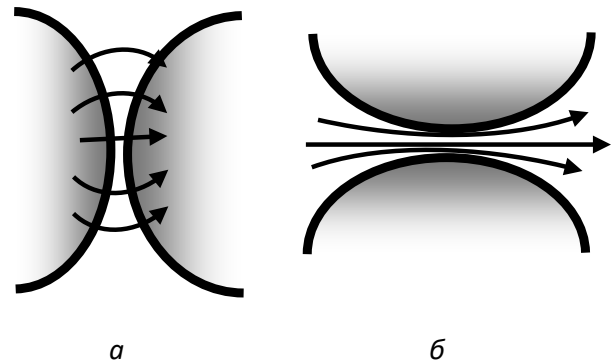


Рис.3.8 Области контакту, в яких «набирається» основний опір:

а – включення, що добре проводять, у погано провідній матриці (BW); б – включення, що погано проводять, у добре провідній матриці (WB).
Стрілками вказано напрям струму у місцях його найбільшої густини.

Розглянемо, наприклад, задачу WB.

При $R > 0,95a$ вираз (3.3.1) вже «не працює». При розрахунку, що використовує «ідеологію» містка, для випадку $\sigma_2 = 0$ згідно з

$$\sigma_{WB}^e = \sigma_1 \frac{1}{\pi} \sqrt{2 \frac{a-R}{R}}, \quad (3.3.5)$$

або в термінах концентрації фази, що добре проводить, маємо

$$\sigma_{WB}^e = \sigma_1 \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-p}}} - 1. \quad (3.3.6)$$

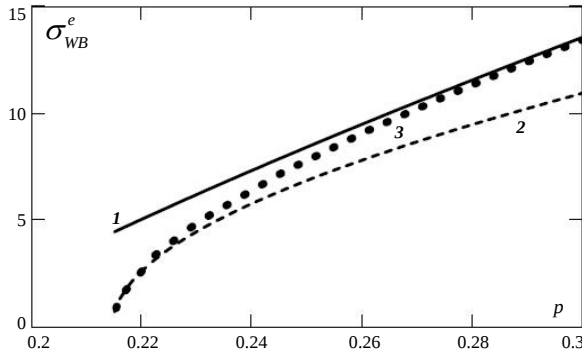


Рис.3.9 Концентраційна залежність σ_{WB}^e :

1 – по формулі (3.3.1); 2 – по формулі (3.3.5);

3 – пряме числове моделювання

Зауважимо, що у термінах близькості до мінімально можливої у даному випадку концентрації $\tau = p - p^*$, залежність σ_{WB}^e має з урахуванням $\tau \ll 1$ степеневий вигляд із показником $1/2$:

$$\sigma_{WB}^e \approx \sigma_1 \frac{2}{\pi^{3/2}} \tau_{WB}^{1/2}. \quad (3.3.7)$$

На Рис.3.9 наведено концентраційні залежності ефективної провідності σ_{WB}^e поблизу p_{BW}^* , тут прийнято $\sigma_1 = 100, \sigma_2 = 0$ (в умовних одиницях).

Аналогічно знаходимо і концентраційну залежність ефективної провідності у разі включень добре провідної фази в погано провідній матриці. Поблизу p_{BW}^* згідно (3.3.4) та (3.3.5), або (3.3.6):

$$\sigma_{BW}^e = \sigma_2 \pi \sqrt{\frac{R}{2(a-R)}}, \quad (3.3.8)$$

де тепер вважається $\sigma_1 \rightarrow \infty$.

Якщо виразити σ_{BW}^e (3.3.8) через концентрацію, отримуємо

$$\sigma_{BW}^e = \sigma_2 \frac{\pi}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}}} - 1}. \quad (3.3.9)$$

З виразу (3.3.9) відразу слідує, що у термінах близькості до $p_{BW}^* - \tau = p_{BW}^* - p$ залежність σ_{BW}^e , також як σ_{WB}^e , має степеневий вигляд з показником $-1/2$:

$$\sigma_{BW}^e \approx \sigma_2 \frac{\pi^{3/2}}{2} \tau_{BW}^{-1/2}. \quad (3.3.10)$$

Для тривимірного випадку ефективна провідність середовища у випадку ідеально провідних кульок ($\sigma_1 \rightarrow \infty$), розташованих періодично у вузлах кубічної ґратки поблизу максимально можливої концентрації ($p_{BW}^* = \pi/6$) має вигляд логарифмічної залежності :

$$\sigma_{BW}^e \approx -\pi/2 \ln(\pi/6 - p). \quad (3.3.11)$$

Таким чином, якщо у двовимірному випадку σ_e веде себе при $p \rightarrow p^*$ аналогічно σ_e в перколяційних середовищах (тобто має степеневу залежність від близькості до p^*), то в періодичних тривимірних середовищі (3.3.11) це не так.

У реальних високонаповнених композитах строго періодичне розташування включень виконується тільки приблизно. Видається важливим вміти оцінити як впливають невеликі відхилення («ворушіння») структури від суворої періодичності на ефективну провідність. Інакше кажучи, чи є σ_e таких середовищ «жорсткою» чи «м'якою», тобто чи призводить мале відхилення структури до великої зміни σ_e чи ні. Якщо структура «жорстка», то цінність точного розв'язку для строго періодичного розташування включень для практичних цілей становить менший інтерес, ніж у випадку «м'якої».

3.4. Плоскошарові середовища

Раніше було розглянуто наближені методи опису ЕКК. Встановити межі їх застосування часто непросто. Тому бажано мати точні вирази ЕКК хоча б у деяких спеціальних часткових випадках. Такі вирази мають не тільки самостійний інтерес, а й можуть бути використані для перевірки точності інших методів. Одним з таких прикладів є плоскошарові середовища, для яких вдається отримати точні розв'язки для ЕКК.

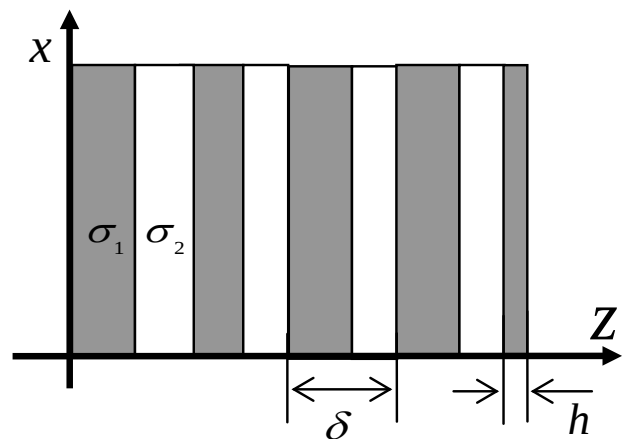


Рис.3.10. Двухфазне плоскошарове періодичне середовище з провідностями шарів σ_1 та σ_2 .

Як приклад розглянемо ефективну провідність σ_e . Для плоскошарових середовищ ефективна провідність є тензором 2-го рангу. При обчисленні σ_e скористаємося так званим методом дужок. На Рис. 3.10 представлено плоскошарове періодичне двофазне середовище, однорідне в середньому.

Локально це середовище ізотропне: провідності шарів σ_1 і σ_2 – ізотропні, а ефективна провідність σ_e – тензор. Для знаходження σ_e запишемо такі рівняння:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (3.4.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (3.4.2)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(z)\mathbf{E}. \quad (3.4.3)$$

Як завжди, задамо поле на нескінченності, що рівне $\langle \mathbf{E} \rangle$. З виразів (3.4.1) і з $\sigma = \sigma(z)$ випливає, що $j_z = \text{const}$ і очевидно, що ця константа дорівнює $\langle j_z \rangle$, де під середнім розуміється наступний вираз (початок координат знаходиться в будь-якій точці вісі oz):

$$\langle \rangle = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \dots dz,$$

де δ – розмір двошарового пакета (Рис.3.10).

З рівнянь (3.4.1), (3.4.2) слідує, що на границях

$$\begin{aligned} j_z|_1 &= j_z|_2, & E_z|_1 &= E_z|_2, \\ E_x &= \langle E_x \rangle = \text{const}. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Відповідно до (3.4.3) та (3.4.4) можна побудувати такий ланцюжок:

$$\begin{aligned} j_x &= \sigma(z)E_x \rightarrow j_x = \sigma(z)\langle E_x \rangle \rightarrow \langle j_x = \sigma(z)\langle E_x \rangle \rangle \rightarrow \\ &\rightarrow \langle j_x \rangle = \langle \sigma(z) \rangle \langle E_x \rangle, \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

тоді за визначенням ефективного коефіцієнта провідності $\langle j_x \rangle = \sigma_{xx}^e \langle E_x \rangle$ маємо

$$\sigma_{xx}^e = \langle \sigma(z) \rangle. \quad (3.4.6)$$

Для іншої компоненти струму $j_z = \sigma(z)E_z$ аналогічний ланцюжок (враховано, що $j_z = \langle j_z \rangle$) матиме вигляд

$$E_z = \frac{j_z}{\sigma(z)} \rightarrow E_z = \frac{\langle j_z \rangle}{\sigma(z)} \rightarrow \left\langle E_z = \frac{\langle j_z \rangle}{\sigma(z)} \right\rangle \rightarrow \langle E_z \rangle = \langle j_z \rangle \langle 1/\sigma(z) \rangle, \quad (3.4.7)$$

і, отже,

$$\sigma_{xx}^e = \langle 1/\sigma(z) \rangle^{-1}. \quad (3.4.8)$$

Таким чином, ефективна провідність плоскошарового середовища є тензором, який в розглядуваній системі координат може бути записаний так:

$$\hat{\sigma}_e = \begin{pmatrix} \langle \sigma \rangle & 0 \\ 0 & \langle 1/\sigma \rangle^{-1} \end{pmatrix}, \quad (3.4.9)$$

як і має бути, середовище має різну провідність у різних напрямках.

Для двошарового пакета, наведеного на Рис.3.10, маємо

$$\sigma_{xx}^e = p\sigma_1 + (1-p)\sigma_2, \quad \sigma_{xx}^e = \frac{\sigma_1\sigma_2}{(1-p)\sigma_1 + p\sigma_2}, \quad (3.4.10)$$

де концентрація фаз пов'язана з розмірами шарів так: $p = \delta_1 / \delta$, $1-p = \delta_2 / \delta$.

Можна сказати, що (3.4.9) – це просто паралельне та послідовне з'єднання опорів.

Аналогічно можна розглянути й складніші випадки. Наприклад, випадок, коли провідність шарів анізотропна. Тут ми розглянемо ще один випадок – випадок двопотокових систем. Прикладом може слугувати термоелектричний матеріал. Нехай дані два потоки $\mathbf{j}$ і $\mathbf{w}$ і два поля $\mathbf{E}$ та $\mathbf{g}$. Іншими словами, задані два термодинамічні потоки та дві термодинамічні сили. Потоки підкоряються законам збереження:

$$\text{div } \mathbf{j} = 0, \quad \text{div } \mathbf{w} = 0, \quad (3.4.11)$$

а поля є потенційними

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{g} = 0. \quad (3.4.12)$$

Для термоелектричного випадку $\mathbf{j}$ – густина електричного струму, $\mathbf{w}$ – густина потоку енергії, $\mathbf{E}$ – напруженість електричного поля $\mathbf{g} = -\text{grad } T$, T – температура.

В рамках лінійної нерівноважної термодинаміки потоки та сили пов'язані лінійними співвідношеннями (так звані матеріальні рівняння):

$$\mathbf{j} = A^{11}\mathbf{E} + A^{12}\mathbf{g}, \quad (3.4.13)$$

$$\mathbf{w} = A^{21}\mathbf{E} + A^{22}\mathbf{g}.$$

де $A^{\alpha\delta}$ –тензор 2-го рангу у просторі $\{E, g\}$.

У координатному записі матеріальні рівняння (3.4.113) мають вигляд

$$\begin{aligned} j_1 &= (A_{1k})^{11} E_k + (A_{1k})^{12} g_k, & j_i &= A_{1k}^{11} E_k + A_{1k}^{12} g_k, \\ w_i &= (A_{ik})^{21} E_k + (A_{ik})^{22} g_k. \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Для плоскошарових середовищ складові тензора є $A^{\alpha\delta}$ функціями координати z $A_{1k}^{\alpha\delta} = A_{1k}^{\alpha\delta}(z)$. Введемо нові (узагальнені) потоки та поля:

$$i_x = \begin{pmatrix} j_x \\ w_x \end{pmatrix}, \quad i_y = \begin{pmatrix} j_y \\ w_y \end{pmatrix}, \quad i_z = \begin{pmatrix} j_z \\ w_z \end{pmatrix}, \quad p_x = \begin{pmatrix} e_x \\ g_x \end{pmatrix}, \quad p_y = \begin{pmatrix} e_y \\ g_y \end{pmatrix}, \quad p_z = \begin{pmatrix} e_z \\ g_z \end{pmatrix}. \quad (3.4.15)$$

Тепер співвідношення (3.4.13) можна записати у компактному вигляді:

$$\mathbf{i} = \hat{\Omega} \mathbf{p}, \quad i_k = \Omega_{km}^{\alpha\beta} p_m, \quad (3.4.16)$$

де

$$\Omega_{km} = \begin{pmatrix} A_{km}^{11} & A_{km}^{12} \\ A_{km}^{21} & A_{km}^{22} \end{pmatrix}. \quad (3.4.17)$$

Знайти ЕКК - означає визначити коефіцієнти, що пов'язують між собою середні потоки та поля $\langle \mathbf{i} \rangle \equiv \mathbf{I}$, $\langle \mathbf{p} \rangle \equiv \mathbf{P}$. Відповідно до принципу Онзагера, за відсутності магнітного поля, тензор $\hat{\Omega}$ симетричний. Це означає, наприклад, що $A_{xy}^{12} = A_{yx}^{21}$. Діючи за описаною вище схемою, вирази (3.4.5) та (3.4.7) записуємо у вигляді

$$i_x = \Omega_{xx}^{\alpha\beta} \Pi_x + \Omega_{xz}^{\alpha\beta} p_z, \quad I_z = \Omega_{zx}^{\alpha\beta} \Pi_x + \Omega_{zz}^{\alpha\beta} p_z. \quad (3.4.18)$$

Розв'язуючи друге рівняння (3.4.18) щодо p_z і усереднюючи його почленно, отримуємо (опустивши індекси $\alpha\beta$)

$$\langle p_z \rangle = \langle (\Omega_{zz})^{-1} \rangle I_z - \langle (\Omega_{zz})^{-1} \Omega_{zx} \rangle \Pi_x = \Pi_x, \quad (3.4.19)$$

звідки маємо

$$I_z = \langle (\Omega_{zz})^{-1} \rangle^{-1} \Pi_z + \langle (\Omega_{zz})^{-1} \rangle^{-1} \langle (\Omega_{zz})^{-1} \Omega_{zx} \rangle \Pi_x. \quad (3.4.20)$$

Аналогічно за допомогою Π_x і Π_z , знаходимо I_x , а отже, і ефективний тензор $\hat{\Omega}^e$:

$$(\Omega_{xx})^e = \langle \Omega_{xx} - \Omega_{xz} \Omega_{zz} \Omega_{zx} \rangle + \langle \Omega_{xz} (\Omega_{zz})^{-1} \rangle \langle (\Omega)^{-1} \rangle \langle (\Omega_{zz})^{-1} \Omega_{zx} \rangle,$$

$$(\Omega_{xz})^e = \langle \Omega_{xz} (\Omega_{zz})^{-1} \rangle \langle (\Omega_{zz})^{-1} \rangle^{-1},$$

(3.4.21)

$$\Omega_{zx} = \langle (\Omega_{zz})^{-1} \rangle \langle (\Omega_{zz})^{-1} \Omega_{zx} \rangle,$$

$$\Omega_{zz} = \langle (\Omega_{zz})^{-1} \rangle^{-1}.$$

Середовище з властивостями, що періодично змінюються, – це ідеалізація. Реальне середовище завжди має кінцеві розміри. Виникає питання: як позначається скінченність розмірів середовища на можливості практичного використання плоскошарових середовищ. Оцінити похибку, що вноситься в ЕКК скінченністю середовища для плоскошарових середовищ, можна в такий спосіб. На Рис. 3.10 показана частина нескінченного

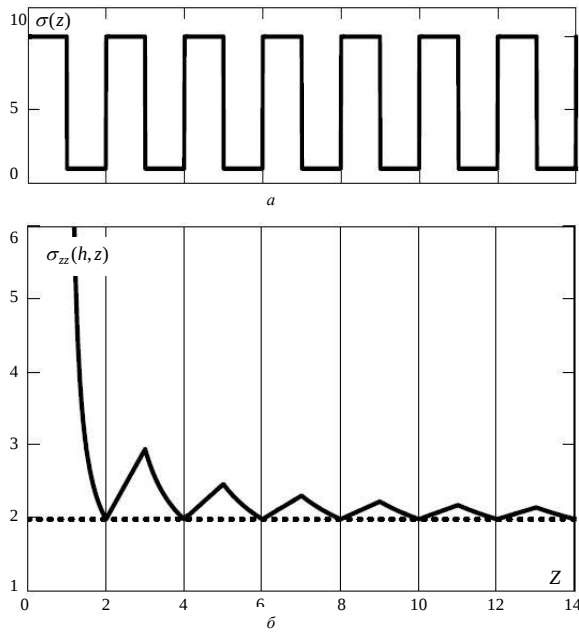


Рис.3.11 Залежність ефективної провідності від розміру плоскошарового середовища: a – для $\sigma(z)$ від z , b – для $\sigma_{zz}(h, z)$ вздовж OZ , пунктирна лінія – σ_{zz}^e

плоскошарового середовища, в якій виділено скінченну вздовж осі oz ділянку. Ця ділянка включає n пакетів (n періодів) і неповну частину $n+1$ шару розміром h . При великому значенні n ділянка розміром h не впливатиме на значення ефективної провідності вздовж осі oz . За величиною відхилення ефективної провідності середовища (при скінченному значенні h від ефективної провідності нескінченної σ_{zz}^e) і можна судити про застосовність виразу для σ_{zz}^e .

Для нескінченного середовища (3.4.8) маємо

$$\sigma_{zz}^e = \langle 1/\sigma(z) \rangle^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n\delta} \int_0^{n\delta} \frac{dz}{\sigma(z)}} = \frac{1}{\frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \frac{dz}{\sigma(z)}}, \quad (3.4.22)$$

де в останній рівності враховано періодичність по z з періодом δ .

Аналогічно для скінченного середовища можна записати

$$\sigma_{zz}(h, n) = \frac{1}{\frac{1}{n\delta + h} \int_0^{n\delta + h} \frac{dz}{\sigma(z)}} = \frac{1}{\frac{n\delta}{n\delta + h} \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \frac{dz}{\sigma(z)} + \frac{\delta}{n\delta + h} \frac{1}{\delta} \int_0^h \frac{dz}{\sigma(z)}} \quad (3.4.23)$$

При $n \rightarrow \infty$ $\sigma_{zz}(h, n) \rightarrow \sigma_{zz}^e$, а при $n \gg 1$ наближено можна знайти

$$\sigma_{zz}(h, n) \approx \frac{1}{\frac{1}{\sigma_{zz}^e} + \frac{1}{n\delta} \int_0^h \frac{dz}{\sigma(z)}}. \quad (3.4.24)$$

Таким чином, відношення $n\delta \int_0^{\delta} \frac{dz}{\sigma(z)}$ до σ_{zz}^e і показує (при $n \gg 1$), наскільки суттєво те, що середовище є скінченним (Рис.3.11).

Контрольні запитання

1. У чому полягає наближення Максвелла?
2. У яких випадках застосовне наближення Максвелла?
3. Як отримати ефективну провідність наближення Максвелла для сферичних включень?
4. Як отримати ефективну провідність наближення Гарнетта для сферичних включень?
5. У чому полягає наближення Бруггемана?
6. У яких випадках може бути застосовано наближення Бруггемана?
7. Як отримати ефективну провідність наближення Бруггемана для сферичних включень?
8. Які особливості має наближення Бруггемана?

Розділ 4. Елементи геометричної теорії протікання

4.1. Задача перколяції

Вперше задача перколяції була сформульована у роботах Бродбента та Хаммерслі у 1957 році. Розглянемо пористе середовище, де пори розташовані випадковим чином, наприклад, в активованому вугіллі у фільтрі протигазу. Як залежить довжина шляху, яким тече повітря, від концентрації (відносного об'єму) пір? Зрозуміло, що чим більше цей шлях, тим краще буде очищене повітря. Наскільки цей шлях розгалужений і запаралелений? При зменшенні концентрації пір запаралеленість буде все менше і менше, а потім при подальшому зменшенні і сам шлях, яким тече повітря, перерветься. Чому дорівнює ця концентрація, що безпосередньо пов'язана з так званим порогом перколяції?

Найпростіше, очищене від усіх фізичних нашарувань, формулювання задачі теорії протікання має такий вигляд.

Дана ґратка зі зв'язків, випадкова частина яких – p «чорна» – провідна, а решта – $(1-p)$ «біла» - непровідна (розірвані зв'язки). Знайти таку мінімальну концентрацію p_c «чорних» зв'язків, при якій ще є шлях по «чорних» зв'язках крізь усю ґратку (з однієї нескінченності в іншу). Та сама задача може бути сформульована і для вузлів ґратки.

Таку, порогову концентрацію p_c називають порогом протікання. Вона була запроваджена засновниками теорії перколяції Бродбентом та Хаммерслі. Існування порогу протікання - основна "мітка", "візитівка" теорії протікання. Властивості системи кардинально змінюються під час переходу через поріг протікання (рис 4.1).

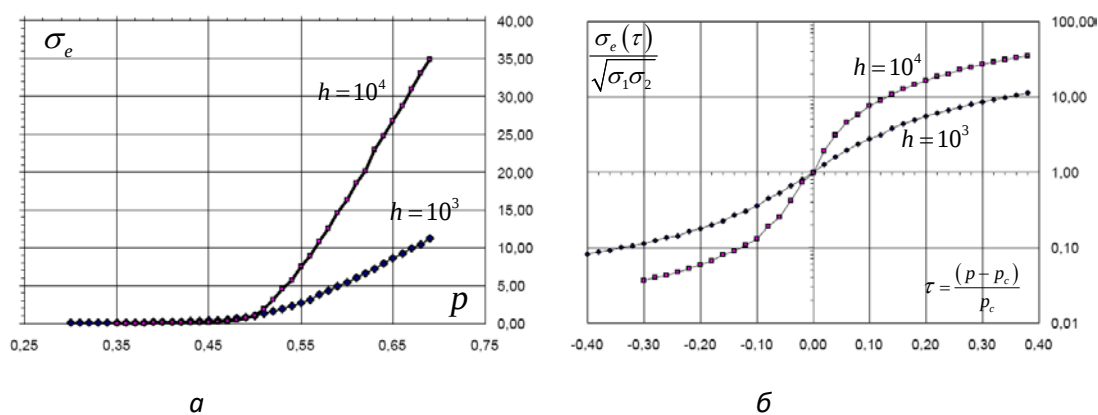


Рис 4.1 Криві, що характеризують критичну поведінку ефективної провідності σ_e двовірних ґраток опорів при різних значеннях $h = \sigma_2 / \sigma_1$: а- в осях $\sigma_e - p$, б- в осях $\sigma_e - \tau$

«Електричною мовою» – «чорні» зв'язки (вузли) проводять струм, «білі» (розірвані) не проводять (у більш просунутій теорії протікання вони проводять, але набагато гірше «білих») (Рис.4.2).



Рис.4.2 Вид перколяційної системи поблизу порога протікання: *а*- нижче порога, без перколяції; *б* - вище порога, з протіканням

Як виявилось, задача про знаходження порогу протікання не є стандартною задачею теорії ймовірностей і при її вирішенні як математикам, так і фізикам довелося розвинути спеціальну галузь наукових досліджень, так звану теорію протікання.

Можна умовно розділити теорію протікання на геометричну та фізичну частини. Геометрична частина теорії протікання досліджує питання структури, статистики, зв'язності «чорних» і «білих», скінченних і нескінченних кластерів у просторах різної розмірності та в підручнику практично не розглядатиметься. Фізична частина теорії протікання досліджує різні фізичні процеси (протікання струму, термоелектричні явища, пружні та непружні деформації тощо) у двох- і більше фазних середовищах з концентрацією, близькою до порогу протікання.

4.2. Основні поняття геометричної теорії перколяції

Перш ніж розпочати опис фізичних явищ у перколяційних, тобто близьких до порога протікання середовищах, введемо кілька необхідних для цього понять з геометричної частини теорії протікання.

В теорії протікання прийнято замість концентрації p використовувати так звану близькість до порога протікання

$$\tau = \frac{p - p_c}{p_c}, \quad (4.2.1)$$

відповідно, методи теорії протікання застосовні в області, близькій до порога протікання, тобто при $|\tau| \ll 1$.

Сукупність «чорних» зв'язків (вузлів), що пов'язують «ліву» нескінченність із «правою», називають нескінченним кластером. При $\tau > 0$ нескінченний кластер є, при $\tau < 0$ його нема. Виникнення (зародження) нескінченного кластера під час переходу концентрації через поріг перебігу можна трактувати як геометричний аналог виникнення нового стану, поява параметра порядку. Як і теорії фазових переходів другого роду, величини (аналогічні параметру порядку), що описують систему, мають скейлінг, зокрема степеневим чином залежать від близькості до порога протікання. Так, потужність нескінченного «чорного» кластера P_∞ (ймовірність того, що випадково обраний «чорний» зв'язок або вузол належать цьому кластеру) має вигляд

$$P_\infty \sim \tau^\beta, \quad \tau > 0, \quad \beta_2 \approx 0,15, \quad \beta_3 \approx 0,4. \quad (4.2.2)$$

де β - критичний індекс, універсальний показник, що залежить тільки від розмірності задачі, що має одне і те ж значення для будь-яких ґраток (наприклад, у двовимірному випадку для квадратної, трикутної, шестикутної, неупорядкованої, ...); індекс унизу β вказує на розмірність задачі.

Звичайно, поняття нескінченного кластера і, відповідно, P_∞ існує лише вище порога протікання, тобто. при $p > p_c$, $\tau > 0$.

Нижче порогу протікання ($p < p_c$) існують кластери «чорної» фази тільки кінцевого розміру, одна з характеристик яких – середня кількість «чорних» зв'язків (вузлів), що належать таким кластерам S :

$$S \sim |\tau|^{-\gamma}, \quad \gamma_2 \approx 2,4, \quad \gamma_3 \approx 1,7. \quad (4.2.3)$$

Ще одна дуже важлива характеристика випадково неоднорідного середовища поблизу порога протікання – кореляційна довжина ξ , що задає характерну довжину спадання кореляцій. Кореляційна довжина ξ в такий спосіб залежить від близькості до порога протікання τ :

$$\xi \approx a_0 |\tau|^{-\nu}, \quad \nu_2 = \frac{4}{3}, \quad \nu_3 \approx 0,9, \quad (4.2.4)$$

де ν - критичний індекс кореляційної довжини.

В області з розмірами порядку ξ міститься один нескінченний кластер.

Характеристики перколяційної системи P_∞, S, ξ поводяться неаналітично, степеневим чином залежать від τ , причому ступінь – критичний індекс – є нецілим числом. Таким чином, або сама залежність, або якась її похідна по τ прямує до нескінченності при $\tau \rightarrow 0$. Критичні індекси не залежать від виду ґратки – це так звана універсальність критичних індексів. Зауважимо, що для систем із різною розмірністю (двовимірною, тривимірною) критичні індекси, звичайно, різні.

Надалі, при описі кінетичних явищ, найважливішу роль гратиме перколяційний кластер. Крім P_∞ (4.2.2) та S (4.2.3), він характеризується багатьма іншими величинами, наприклад, числом вузлів нескінченного кластера в об'ємі з характерним розміром r :

$$M(r) \sim r^{\alpha_f}, \quad (r < \xi), \quad \alpha_f = \alpha - \beta/\nu. \quad (4.2.5)$$

У нескінченному кластері можна виділити 1) «кістяк» кластера (back bone) - якщо говорити про протікання струму по «чорних» зв'язках, то це струмопровідна частина; 2) «мертві кінці» (dead ends) – частини нескінченного кластера, якими не тече струм; 3) «червоні зв'язки» (red bounds) – одиночні зв'язки, розташовані таким чином, що при видаленні будь-якої з них струм нескінченим кластером текти не зможе; 4) "скелет" кластера (skeleton) - це сума найкоротших шляхів від даного вузла до вузлів на заданій відстані і т.д. Кожна з цих характеристик визначається своїм критичним індексом.

Для опису поведінки фізичних величин (наприклад, σ_c) у перколяційних середовищах використовуються різні геометричні моделі перколяційної структури: модель Скал-Шкловського, аналогічна їй модель де Жена, модель фрактала Гівена-Мандельброта, модель Аркангеліса-Реднера-Конільо, модель крапель і зв'язків Стенлі-Конільо, краплинна модель Виноградова-Саричева та багато інших.

Деякий час існувала надія, що критичні індекси, що характеризують поведінку фізичних величин (ефективної провідності, ефективної термоЕРС, ...), можуть бути виражені через критичні індекси, що описують геометричні властивості перколяційної структури $\nu, \beta, \dots$ Однак, можливо, такого загального виразу не існує. Час підтвердив цю думку. Проте, моделі перколяційної структури є корисним теоретичним інструментом, що дозволяють значно

спростити та прояснити основні якісні (а іноді й кількісні) характеристики кінетичних явищ у перколяційних середовищах.

Контрольні запитання

1. Що таке задача перколяції?
2. Що таке поріг протікання?
3. Чому задача про знаходження порогу протікання є не стандартною задачею теорії ймовірностей?
5. Які поняття використовуються у геометричній теорії протікання?
6. Що таке нескінченний кластер?
7. Як визначається потужність нескінченного кластера?
8. Що таке кореляційна довжина?
9. Як визначається кореляційна довжина?
10. Що таке критичний індекс?
11. Від чого залежить значення критичного індексу?
12. Що таке універсальність критичних індексів?
13. Які характеристики перколяційної системи грають найважливішу роль у описі кінетичних явищ?
15. Що таке «скелет» кластера?
16. Що таке «мертві кінці» кластера?
17. Що таке «червоні зв'язки» кластеру?
18. Що таке «скелет» кластера?
19. Які геометричні моделі перколяційної структури використовують для опису поведінки фізичних величин у перколяційних середовищах?
20. Чому не існує загального виразу для критичного індексу, що характеризує поведінку фізичних величин, через критичні індекси, що описують геометричні властивості перколяційної структури?

Розділ 5. Ефективна провідність перколяційних середовищ

5.1. Аналогія із феноменологічною теорією фазових переходів 2-го роду. Скейлінг. Критичні індекси.

Після того, як Бродбентом і Хаммерслі було введено поріг протікання та виявлено, що різні геометричні та фізичні характеристики перколяційних систем залежать від близькості до порога протікання τ , і ця залежність має степеневий вигляд, а критичні індекси, що її описують, є універсальними (див. гл. 4), не могла не виникнути ідея, що перколяційні системи поведуться аналогічно системам з фазовими переходами 2-го роду. Наведемо деякі короткі відомості, основні терміни та співвідношення феноменологічної теорії фазових переходів 2-го роду (ТФП), докладний виклад яких можна знайти, наприклад, у підручниках з теоретичної фізики.

У ТФП прийнято використовувати так звану близькість до точки (температури) фазового переходу $t = T - T_c$, або $t = (T - T_c)/T_c$. В останньому означенні t – безрозмірне; параметр порядку η – величина, що характеризує властивості системи загалом, істотно змінюється при фазовому переході, тобто при проходженні T_c . У разі феромагнетиків параметром порядку є намагніченість феромагнетика, тоді T_c – температура Кюрі.

Кореляційний радіус (довжина) r_c , його ще часто позначають ξ , показує порядок величини відстаней, на яких кореляція між флуктуаціями параметра порядку істотно зменшується. Ця величина входить у кореляційну функцію (порівняйте з (2.2.5)):

$$G(\mathbf{r}) \sim e^{-\frac{r}{\xi}},$$

і степеневим чином залежить від близькості до точки переходу

$$\xi \sim |t|^{-\nu}, \quad (5.1.1)$$

де ν – критичний індекс кореляційної довжини.

Вище і нижче точки переходу параметр порядку, як і кореляційна довжина, веде себе степеневим чином (Рис. 5.1):

$$\eta \sim h |t|^{-\gamma}, \quad t > 0 (T > T_c), \quad \gamma > 0, \quad (5.1.2)$$

$$\eta \sim |t|^\beta, \quad t < 0 (T < T_c), \quad \beta > 0, \quad (5.1.3)$$

де γ і β – деякі критичні індекси, h – зовнішнє поле (обезрозмірене), його природа різна для різних параметрів порядку η , у разі феромагнетизму це – магнітне поле. В області $t < 0$,

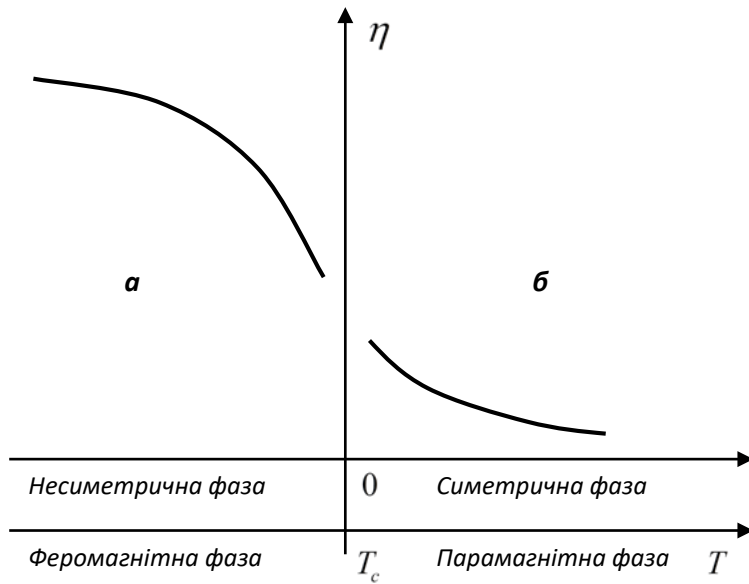


Рис. 5.1. Залежність параметра порядку η від близькості до точки фазового переходу T_c .

$T < T_c$ (рис 5.1,а) $\eta \sim t^\beta$ існує спонтанна намагніченість, що виділяє деякий напрямок (звідси і назва – несиметрична фаза).

В області $t > 0$, $T > T_c$ (рис 5.1,б)

$\eta \sim h |t|^{-\gamma}$ – спонтанна намагніченість має місце у присутності зовнішнього магнітного поля. Слід зазначити, що за $T > T_c$ параметр порядку відмінний від нуля лише у присутності зовнішнього поля h .

Зовнішнє поле (його безрозмірна величина позначена h) розмиває

фазовий перехід, зникає дискретна точка фазового переходу. Існує деяке характерне значення h_t , що залежить від t , так, що в «слабких» ($h \ll h_t$) полях його впливом на поведінку параметра порядку можна знехтувати, а в «сильних» ($h \gg h_t$) цей вплив стає визначальним, і параметр порядку, як і кореляційна довжина, залежить вже не від t , а від h :

$$\eta \sim h^{\frac{1}{\delta}}, \quad \xi \sim h^{-\mu}. \quad (5.1.4)$$

При довільному співвідношенні між t і h (проте, пам'ятаймо, що система знаходиться поблизу точки фазового переходу, тобто $|t| \ll 1$) можна сформулювати для η так зване скейлінгове співвідношення (скейлінгову функцію, масштабну інваріантність), яка включає в собі як часткові випадки (5. 1. 2) – (5.1.4):

$$\eta = h^{\frac{1}{\delta}} f\left(\frac{t}{h^{\frac{1}{\beta\delta}}}\right), \quad h > 0. \quad (5.1.5)$$

Тут при $h < 0$ слід провести заміну $h \rightarrow -h$, $\eta \rightarrow -\eta$. Зазначимо, що з (5.1.5) відразу випливає те характерне значення h_t , яке визначає величину безрозмірного поля (слабке-сильне):

$$h_t^{\frac{1}{\beta\delta}} \sim |t|. \quad (5.1.6)$$

Скейлінгова функція $f(z)$, що залежить від однієї змінної $z = t/h^{\frac{1}{\beta\delta}}$, поводить в різних границях наступним чином:

$$f(z) \sim \begin{cases} z^{-\gamma}, & z \rightarrow +\infty, (a), \\ \text{const}, & z \rightarrow 0, (c), \\ |z|^\beta, & z \rightarrow -\infty, (b). \end{cases} \quad (5.1.7)$$

Не всі використані критичні індекси є незалежними. Деякі з них пов'язують так звані рівності. Наприклад, одна з них –

$$\beta\delta = \beta + \gamma, \quad (5.1.8)$$

записана тут у дещо іншому вигляді, ніж зазвичай, відома як рівність Уїдома.

Після виділення з $f(z)$ основного співмножника, частина, що залишилася, не має особливостей і може бути розкладена в ряд за малим параметром z або $1/z$ залежно від виду границі (5.1.7). Для випадку (5.1.7b) при $h \neq 0$, $\eta \neq 0$ як при $t < 0$, так і при $t > 0$. Таким чином, випадок $t = 0$ фізично «нічим не примітний», що означає, що $f(z)$ розкладається за цілими ступенями z :

$$\eta \approx h^{\frac{1}{\delta}} \left(B_0 + B_1 h^{-\frac{1}{\beta\delta}} t + B_2 h^{-\frac{2}{\beta\delta}} t^2 + \dots \right). \quad (5.1.9)$$

Аналогічно для випадків (5.1.7a) та (5.1.7c), $\eta(t, h)$ може бути розкладена за цілими ступенями h (з урахуванням різних співмножників $z^{-\gamma}$ і $|z|^\beta$ відповідно). Для виразу (5.1.7a) отримуємо

$$\eta = h^{\frac{1}{\delta}} f\left(\frac{t}{h^{\frac{1}{\beta\delta}}}\right) = h^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{t}{h^{\frac{1}{\beta\delta}}}\right)^{-\gamma} f\left(\frac{t}{h^{\frac{1}{\beta\delta}}}\right) = \quad (5.1.10)$$

$$= ht^{-\gamma} \varphi + \left(\frac{t}{h^{\frac{1}{\delta\beta}}} \right) \approx ht^{-\gamma} (A_0 + A_1 ht^{-\beta\delta} + A_2 h^2 t^{-2\beta\delta} + \dots),$$

де враховано рівність Уїдома (5.1.8), а у функції $f(z)$ змінна піднесена у ступінь $-\delta\beta$.

Для випадку (5.1.7b) маємо

$$\begin{aligned} \eta &= h^{\frac{1}{\delta}} f\left(\frac{t}{h^{\frac{1}{\delta\beta}}}\right) = h^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{|t|}{h^{\frac{1}{\delta\beta}}}\right)^{\beta} f\left(\frac{t}{h^{\frac{1}{\delta\beta}}}\right) = |t|^{\beta} \varphi - \left(\frac{h}{|t|^{\delta\beta}}\right) \approx \\ &\approx |t|^{\beta} (C_0 + C_1 h |t|^{-\delta\beta} + C_2 h^2 |t|^{-2\delta\beta} + \dots). \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

Підсумовуючи (5.1.9), (5.1.10) та (5.1.11), запишемо

$$\eta = \begin{cases} ht^{-\gamma} (A_0 + A_1 ht^{-\beta\delta} + A_2 h^2 t^{-2\beta\delta} + \dots), & t > 0, \quad \frac{h}{t^{\delta\beta}} \ll 1, & (a) \\ h^{\frac{1}{\delta}} \left(B_0 + B_1 h^{\frac{1}{\delta\beta}} t + B_2 h^{\frac{2}{\delta\beta}} t^2 + \dots \right), & \frac{h}{t^{\delta\beta}} \geq 1, & (c) \\ |t|^{\beta} (C_0 + C_1 h |t|^{-\delta\beta} + C_2 h^2 |t|^{-2\delta\beta} + \dots), & t < 0, \quad \frac{h}{|t|^{\delta\beta}} \ll 1 & (b). \end{cases} \quad (5.1.12)$$

Константи A_i, B_i, C_i залишаються порядку одиниці, серед них є як позитивні, і негативні.

Досі передбачалося, що розміри системи L , в якій відбувається фазовий перехід набагато більший за кореляційну довжину $L \gg \xi$. У цьому випадку властивості системи в цілому не залежать від тієї миттєвої реалізації локальних властивостей (з урахуванням флуктуацій), яка має місце в даний момент часу. Одночасно це означає, що властивості системи не залежать від розміру системи L . У протилежному випадку, коли $L \leq \xi$, у кожний момент часу за рахунок флуктуацій (характерний розмір яких тепер порядку розмірів системи) значення параметра порядку різні та всі подальші співвідношення записуються, звичайно, для середнього за часом. Параметр порядку залежить від розмірів системи L , ця залежність стає несуттєвою при збільшенні L , коли виконується $L \gg \xi$. Для визначення залежності $\eta = \eta(L)$ потрібно скористатися зв'язком між близькістю до точки переходу t та кореляційною довжиною (5.1.1):

$$|t| \sim \xi^{-\frac{1}{\nu}}, \quad (5.1.13)$$

більш того $|t| \sim (\xi/a_0)^{-\frac{1}{\nu}}$, де a_0 – характерний мікроскопічний розмір, наприклад, міжатомна відстань, яку, надалі, для спрощення запису, опускаємо.

Прийом, що призводить до залежності $\eta = \eta(L)$ для систем з $L \leq \xi$, полягає у заміні ξ на L (5.1.13). Таким чином, підставляючи (5.1.13) у (5.1.2) та (5.1.3) та замінюючи ξ на L , отримуємо

$$\eta \sim h L^{\frac{\gamma}{\nu}} (T > T_c), \quad \eta \sim L^{\frac{\beta}{\nu}}. \quad (5.1.14)$$

Аналогом параметра порядку η у геометричній теорії протікання може бути потужність нескінченного кластера $P_\infty(\tau)$, див. (4.2.2). При цьому аналогом змінної T у ТФП є $1-p$, де p – концентрація «чорних» вузлів (або зв'язків). Згідно (4.2.2) $P_\infty(\tau) \neq 0$ тільки за $\tau > 0$,

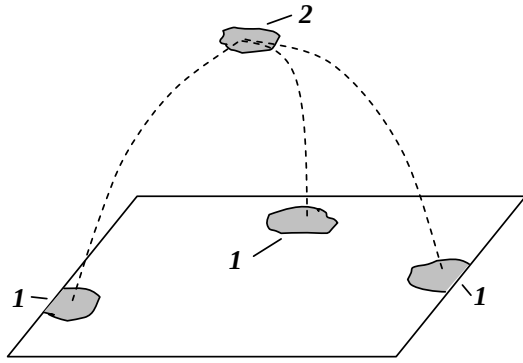


Рис. 5.2. Схема об'єднання кінцевих кластерів «чорної» фази

1- кінцеві "чорні" кластери, 2 - демон Кастелайна-Фортуїна.

тобто, якщо існує нескінченний кластер. Для проведення аналогії необхідно ввести поняття потужності нескінченного кластера $P_\infty(\tau)$ нижче порога протікання, коли нескінченного кластера немає, а є окремі кінцеві кластери «чорної» фази. Таку парадоксальну вимогу можна виконати, зв'язавши кінцеві кластери між собою штучним чином. Для цього Кастелайн і Фортуїн ввели так званий демон Кастелайна-Фортуїна (Рис.5.2) – "чорний" вузол поза ґраткою, з яким з ймовірністю $1-e^{-h}$ пов'язаний кожен із «чорних» вузлів ґратки (штрихова лінія), де h – аналог зовнішнього магнітного поля в ТФП.

При $\tau \ll 1$ ($p > p_c$) і $h \ll 1$ $P_\infty(p) \sim h$, тобто як і параметр порядку η у ТФП пропорційний зовнішньому полю, а при $p = p_c$ $P(\tau = 0, h) \sim h^{\frac{1}{\delta}}$ (порівняй з (5.1.4)).

Як ми побачимо нижче, при описі фізичних явищ, наприклад, провідності, в перколяційній структурі, коли за параметр порядку можна прийняти ефективну провідність

σ_e , введення аналога зовнішнього магнітного поля не вимагає застосування описаного вище штучного прийому.

5.2. Ефективна провідність як параметр порядку. Феноменологічний опис

У цьому пункті використовуємо аналогію з ТФП 2-го роду (див. Рис. 5.1). Роль близькості до точки фазового переходу $t = (T - T_c)/T_c$ тепер грає величина $\tau = (p - p_c)/p_c$. Як і раніше, p – концентрація («чорної») фази, що добре проводить, і при збільшенні (при переході її через поріг протікання p_c) середовище переходить у провідний стан (аналог несиметричної феромагнітної фази в ТФП), однак у ТФП такий перехід відбувається при зменшенні t . Таким чином, осі T і p , якщо проводити аналогію, спрямовані у протилежні сторони.

Вище та нижче порога протікання p_c ефективна провідність σ_e , як встановлено численними експериментами (натурними та числовими), степеневим чином залежить від τ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_e &\approx \sigma_1 \tau^t, & \tau > 0, & p > p_c \\ \sigma_e &\approx \sigma_2 |\tau|^{-q}, & \tau < 0, & p < p_c \end{aligned} \right\}, \quad (5.2.1)$$

або у безрозмірному вигляді:

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_1} \approx \tau^t, \quad \tau > 0, \quad \frac{\sigma_e}{\sigma_1} \approx \frac{\sigma_2}{\sigma_1} |\tau|^{-q}, \quad \tau < 0, \quad (5.2.2)$$

де t і q – критичні індекси провідності вище та нижче p_c .

З рівнянь (5.2.2) та (5.2.1) видно, що роль поля h у ТФП грає співвідношення провідностей фаз

$$h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (5.2.3)$$

У теорії критичної поведінки, заснованій на аналогії з теорією фазових переходів, аналогом скейлінгового співвідношення для параметра порядку (5.1.6) є скейлінгове співвідношення для ефективної провідності

$$\sigma_e = \left(\sigma_1^q \sigma_2^t \right)^{\frac{1}{t+q}} f \left(\frac{\tau}{h^{\frac{1}{t+q}}} \right), \quad (5.2.4)$$

де для суми $t+q$ часто вводять позначення $\varphi = t+q$ – називається скейлінговим показником.

Скейлінгове співвідношення (5.2.4) можна записати і в безрозмірному вигляді

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_1} = h^{\frac{t}{\varphi}} f\left(\frac{\tau}{h^{\frac{1}{\varphi}}}\right), \quad \varphi = t + q. \quad (5.2.5)$$

Скейлінгова функція (порівняйте з (5.1.7)) має наступні асимптоти:

$$f(z) \sim \begin{cases} z^t, & z \rightarrow +\infty, (a), \\ \text{const}, & z \rightarrow 0, (c), \\ |z|^{-q}, & z \rightarrow -\infty, (b). \end{cases} \quad (5.2.6)$$

Нагадаємо, що осі T і p спрямовані в протилежні сторони, тому в (5.2.6) порівняно з (5.1.7) залежності a і b (падіння та зростання при зменшенні z) помінялися місцями. З (5.2.4) і (5.2.6) впливають три типи різної поведінки σ_e та розкладання $f(z)$ у трьох різних областях параметрів. При $z \rightarrow \infty$, тобто коли $\tau > 0$ і $\tau h^{\frac{1}{\varphi}} \gg 1$, з (5.2.4) та (5.2.6) отримуємо

$$\sigma_e = \sigma_1 h^{\frac{t}{\varphi}} f\left(\frac{\tau}{h^{\frac{1}{\varphi}}}\right) \Bigg|_{\tau h^{\frac{1}{\varphi}} \gg 1} \approx \sigma_1 h^{\frac{t}{\varphi}} \left(\tau h^{\frac{1}{\varphi}}\right)^t f_1\left(\frac{\tau}{h^{\frac{1}{\varphi}}}\right).$$

Після виділення з $f(z)$ основного співмножника (сингулярної частини z^t) залишковий співмножник не має особливостей, $\tau \neq 0$, і тому функцію $f_1\left(\tau / h^{\frac{1}{\varphi}}\right)$ можна розкласти за цілими ступенями h :

$$f_1\left(\frac{\tau}{h^{\frac{1}{\varphi}}}\right) \equiv f_2\left(\frac{h}{\tau^{\varphi}}\right) \approx A_0 + A_1 h \tau^{-\varphi} + A_2 h^2 \tau^{-2\varphi} + \dots$$

Остаточно для σ_e отримуємо

$$\sigma_e \approx \sigma_1 \tau^t \left(A_0 + A_1 h \tau^{-(t+q)} + A_2 h^2 \tau^{-2(t+q)} + \dots \right). \quad (5.2.7)$$

Аналогічно для випадку $z \rightarrow -\infty$, тобто при $\tau < 0$ і $|\tau| h^{\frac{1}{\varphi}} \gg 1$, маємо

$$\sigma_e \approx (\sigma_1^q \sigma_2^t)^{\frac{1}{\varphi}} \left(\frac{|\tau|}{h^{\frac{1}{\varphi}}}\right)^{-q} f_3\left(\frac{h}{|\tau|^{\varphi}}\right) \approx \sigma_2 |\tau|^{-q} \left(C_0 + C_1 h |\tau|^{-(q+t)} + C_2 h^2 |\tau|^{-2(t+q)} + \dots \right) \quad (5.2.8)$$

Для випадку $z \rightarrow 0$ і $h \neq 0$ скейлінгова функція може бути розкладена за цілими ступенями τ :

$$\sigma_e \approx (\sigma_1^q \sigma_2^t)^{\frac{1}{\varphi}} \left(B_0 + B_1 \tau h^{\frac{1}{\varphi}} + B_2 \tau^2 h^{\frac{2}{\varphi}} + \dots \right). \quad (5.2.9)$$

Коефіцієнти A_i , B_i , C_i не обов'язково додатні. Пізніше ми побачимо, що з фізичних міркувань можна визначити знак для деяких із них. Зазначимо, що при описі поведінки σ_e поблизу порогу протікання за аналогією з ТФП немає потреби у конструкції типу демона Кастелайна-Фортуїна, який пов'язує між собою кінцеві «чорні» кластери. Для провідності аналогом зовнішнього поля h служить відношення провідностей фаз σ_2/σ_1 , тобто при ненульовому «полі» $h(\sigma_2 \neq 0)$ «чорні» кластери (з провідністю σ_1) пов'язані між собою через «білі» (σ_2) зв'язки. Перехід до геометричної теорії протікання полягає у тому, що $\sigma_2 \rightarrow 0$, і, відповідно, доводиться запроваджувати спеціальний додатковий вид зв'язку «чорних» кластерів – демон Кастелайна-Фортуїна.

Область великого поля (область розмиття фазового переходу) у ТФП (5.1.12с), в теорії перколяції називається областю розмазки (5.2.9). Її розмір $-\Delta$, як і в ТФП можна визначити з двох міркувань. По-перше, згідно (5.2.6) зміна режимів a і b : $|z| \gg 1$ (5.2.6 а, б) на режим $z \ll 1$ (5.2.6 с) відбувається при $z \approx 1$. Заміняючи в z $|\tau|$ на Δ , отримуємо

$$\Delta / h^{\frac{1}{\varphi}} = 1; \quad \Delta = h^{\frac{1}{\varphi}}, \quad \varphi = t + q. \quad (5.2.10)$$

По-друге, оскільки (5.2.7) і (5.2.8) справедливі за $\tau \gg \Delta$, а (5.2.9) – при $\tau \ll \Delta$, величину Δ можна визначити з умови порушення збіжності рядів (5.2.7-9), тобто коли наступний член розкладу стає порядку попереднього. Вважаючи, що константи A_i , B_i , C_i мають значення порядку одиниці, отримуємо те саме значення Δ (5.2.10).

Сумуючи (5.2.7), 5.2.8) та (5.2.9), записуємо:

$$\sigma_e = \begin{cases} \sigma_1 \tau^t \left(A_0 + A_1 h \tau^{-(t+q)} + A_2 h^2 \tau^{-2(t+q)} + \dots \right), & \Delta \ll \tau \ll 1, \quad \tau > 0, \quad (a) \\ (\sigma_1^q \sigma_2^t)^{\frac{1}{t+q}} \left(B_0 + B_1 \tau h^{\frac{1}{t+q}} + B_2 \tau^2 h^{\frac{2}{t+q}} + \dots \right), & |\tau| \leq \Delta, \quad (c) \\ \sigma_2 |\tau|^{-q} \left(C_0 + C_1 h |\tau|^{-(q+t)} + C_2 h^2 |\tau|^{-2(q+t)} + \dots \right), & \Delta \ll \tau \ll 1, \quad \tau < 0. \quad (b) \end{cases} \quad (5.2.11)$$

У багатьох випадках (але не у всіх!) можна обмежитися першими доданками (5.2.11), тоді поза областю розмазки σ_e поводить ся згідно (5.2.1), а в області розмазки:

$$\sigma_e = (\sigma_1^q \sigma_2^t)^{\frac{1}{t+q}}. \quad (5.2.12)$$

Зауважимо, що при такому наближеному описі область розмазки – це те значення τ , при якому провідність, що здійснюється за «чорною» (σ_1) фазою $\sigma_e = \sigma_2 \tau^t$, порівнюється з провідністю, яка визначається «білою» (σ_2) фазою, $\sigma_e = \sigma_2 |\tau|^{-q}$:

$$\sigma_1 \tau^t \Big|_{\tau=\Delta} = \sigma_2 |\tau|^{-q} \Big|_{\tau=\Delta}. \quad (5.2.13)$$

З виразу (5.2.13) відразу слідує $\Delta = (\sigma_2 / \sigma_1)^{\frac{1}{t+q}}$, і при підстановці Δ у будь-яку рівність з (5.2.1) отримуємо вираз σ_e в області розмазування (5.2.12). Якісно поведінка $\sigma_e = \sigma_e(p)$ представлена на Рис. 5.3. Тут Δ – величина області розмазування, a – область концентрацій вище за поріг протікання (аналог несиметричної фази в ТФП), b – нижче порога протікання, c – область розмазки, розмиття фазового переходу (аналог симетричної фази в ТФП).

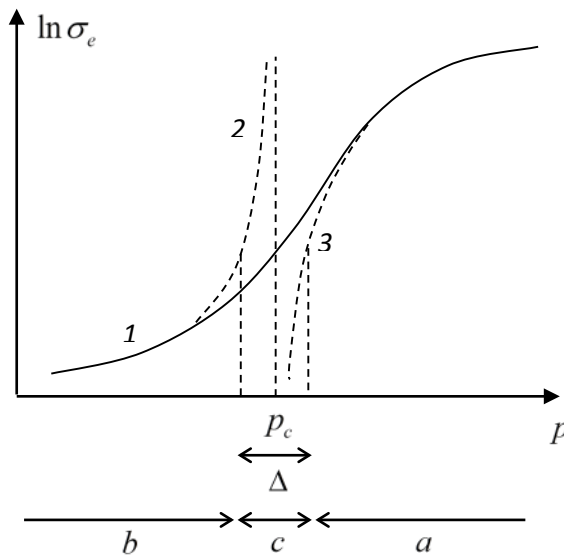


Рис. 5.3 Загальний вид залежності ефективної провідності $\sigma_e = \sigma_e(p)$ у критичній області:

- 1 – $\sigma_e(p)$ при $h \neq 0$;
- 2 – $\sigma_e(p)$ при $h = 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_1 = \infty$;
- 3 – $\sigma_e(p)$ при $h = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_1 \neq \infty$.

На Рис. 5.3 важко побачити поведінку σ_e в області розмазування. З одного боку, теорія перколяції справедлива при $h \ll 1$, з іншого – ця умова означає малість Δ . Якісно, існування області розмазування означає (наприклад, для $\tau > 0$) у логарифмічних координатах ($\ln \sigma_e$,

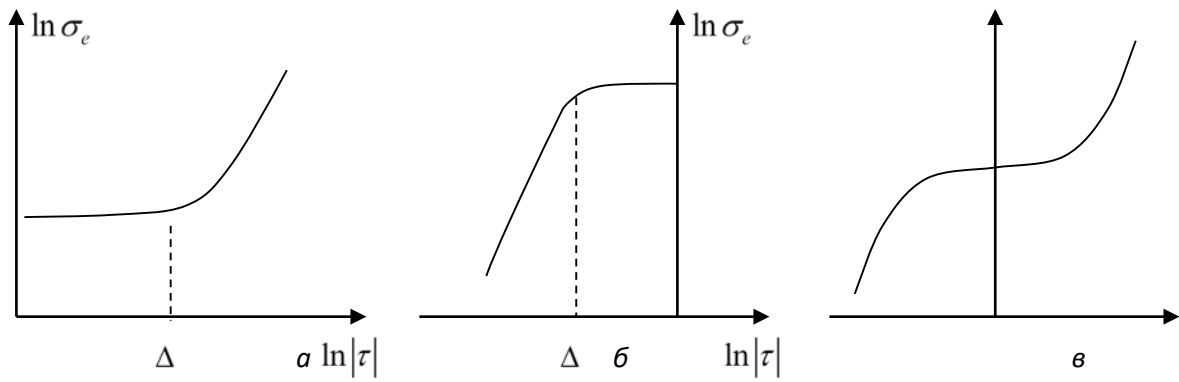


Рис. 5.4. Залежність ефективної провідності σ_e в області розмазування Δ

$a - \tau > 0, p > p_c$; $б - \tau < 0, p < p_c$; $в$ – схематичний малюнок

$\ln \tau$) насичення $\ln \sigma_e$ при зменшенні τ .

Дивно, що цей перехід для двовимірного випадку якісно описує вже ЕМТ (наближення Бруггемана). На Рис.5.4 – 5.4,а і 5.4,б наведені залежності отримані з ЕМТ-наближення у двовимірному випадку. У граничному випадку $h \rightarrow 0$ ($\sigma_1 \rightarrow \infty$ або $\sigma_2 \rightarrow 0$) області розмазки немає, якісно поведінка σ_e і ρ_e показана на Рис.5.5.

Здавалося б, така маленька область Δ всередині вже невеликої області $|\tau| \ll 1$ не повинна «виявляти» себе при реальних експериментах. Однак, як буде показано нижче, наприклад, у розділі 8, що описує сильно неоднорідні системи з експоненційно широким спектром, поняття розмазки є принциповим і необхідним.

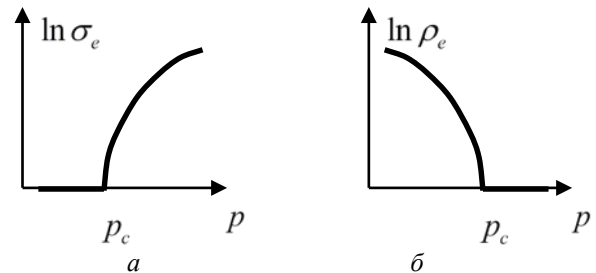


Рис. 5.5. Залежність σ_e і ρ_e у граничному випадку $h = 0$.

а- одна з фаз є ідеальним ізолятором, $\sigma_2 = 0$; б - одна із фаз є ідеальним провідником $\sigma_1 = \infty$, $\rho_1 = 1/\sigma_1 = 0$.

5.3. Обчислення критичних індексів

Досі згідно з аналогією з ТФП, вважалося, що при $p > p_c$ ($|\tau| \gg \Delta$) область на Рис.5.3, тобто область в якій існує нескінченний кластер «чорної» фази є аналогом несиметричної фази ТФП. Провідність у цій галузі є і при нульовому «полі» $h = 0$, аналогічно як у ТФП –

параметр порядку $\eta \neq 0$ при $h = 0$. І навпаки, в області $|\tau| < \Delta$ ефективна провідність пропорційна "полю" (5.2.2) і дорівнює нулю при нульовому полі. Однак у теорії перколяції, на відміну від ТФП, «поле» може бути нульовим як у зв'язку з тим, що $\sigma_2 = 0$ (що при цьому відбувається якраз і описано вище), так і з $\sigma_1 = \infty$. Перший випадок – коли середовище однієї із фаз є ідеальним ізолятором, другий випадок – коли середовище містить ідеальний провідник. Поведінка σ_e при $\sigma_1 = \infty$ показано штриховою лінією на Рис. 5.3 таким чином, $h = 0$ означає можливість двох ідеальних випадків, їх зручно уявити як поведінку σ_e при $h = 0$, $\sigma_2 = 0$ і $\rho_e = 1/\sigma_e$, при $h = 0$, $\sigma_1 = 0$ (див. Рис. 5.4.).

Досі при описі поведінки різних фізичних величин поблизу порога протікання p_c числові значення критичних індексів не розглядалися. Їхнє теоретичне визначення є дуже важкою задачею. Достатньо нагадати, що за розробку теоретичних методів обчислення критичних індексів у теорії фазових переходів 2-го роду К.Вільсон отримав Нобелівську премію.

Спочатку для опису поведінки системи поблизу p_c залучали невелику кількість критичних індексів $-\nu, \beta, t, q$. Надалі число критичних індексів, що описують як геометричні властивості перколяційної системи, так і фізичні властивості, зростала. У геометричній теорії протікання число критичних індексів збільшувалося багато в чому завдяки тому, що нескінченний кластер на порозі протікання має фрактальну природу і, відповідно, великий набір (власне кажучи – нескінченний) фрактальних розмірностей, що описують різні деталі структури. Наприклад, зовнішній периметр, внутрішній периметр, розподіл «мертвих» кінців, запаралелених зв'язків і т. д. При описі фізичних процесів для кожного фізичного явища - провідності, термоЕРС, пружності і т.п. також вводяться свої критичні індекси.

Як виявилось, деякі з них є «вторинними», тобто такими, що виражаються через основні «первинні» індекси. Таким чином, перед теорією протікання постали дві основні задачі: 1) отримати числові значення критичних індексів та 2) знайти зв'язки між критичними індексами, що описують різні фізичні процеси в перколяційних системах. У цьому параграфі буде описано перше завдання, а далі друге.

Існує безліч більш-менш вдалих методів визначення критичних індексів. Від деяких простих і наочних – типу моделі Скал-Шкловського до таких рафінованих математично, як методи теорії поля з використанням континуального інтегрування. Для обчислення критичних індексів у теорії протікання застосовуються ті ж методи, які були розроблені в ТФП 2-го роду, зокрема series expansion (розклад в ряд), розклад поблизу критичної

розмірності $d_c = 6$ за параметром $\varepsilon = d_c - d$, метод ренормалізації групи, фрактальний підхід (краплинна модель). Багато робіт (та їх кількість продовжує зростати) присвячено числовому моделюванню на великих ґратках (з розміром L , великим кореляційного радіусу) і на ґратках з $L < \xi$ (кінцевий скейлінг).

Таблиця 5.1

Співвідношення, до якого входить критичний індекс	Критичний індекс	Розмір ґратки d		
		$d = 2$	$d = 3$	$d = d_c = 6$
Кореляційна довжина $\xi \sim \tau ^{-\nu}$	ν	$\frac{4}{3} \approx 1,33$	0,88	$\frac{1}{2}$
Потужність нескінченного кластера $P_\infty \sim \tau^\beta$	β	$\frac{5}{36} \approx 0,14$	0,41	1
Ефективна провідність при $p > p_c$ $\sigma_e \sim \tau^t$	t	1,30	2,0	3
Ефективна провідність при $p < p_c$ $\sigma_e \sim \tau ^{-q}$	q	1,30	0,73	0

Примітка. Значення ν_2 і β_2 – точні. Критичні індекси при $d = d_c$ обчислюються на ґратці Бете (воно ж «дерево Келлі») і є точно встановленими. Інші індекси обчислені з певною похибкою, різною у різних роботах.

Тут розглянемо лише кілька моделей, модифікацію яких використовуємо надалі для якісного та кількісного опису різних кінетичних явищ у перколяційних середовищах. Перш ніж обговорювати ці моделі, наведемо числові значення основних критичних індексів згідно з монографією. Надалі ці значення називатимемо канонічними. У Таблиці 5.1 представлені числові значення канонічних критичних індексів, які використовуватимемо при обчисленні інших критичних індексів.

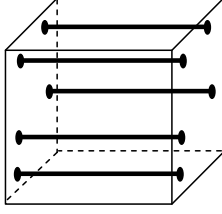


Рис. 5.6 Модель перколяційної структури Ласта-Таулеса.

Модель перколяційної структури Ласта-Таулеса – це найпростіша модель вище порогу протікання. На Рис. 5.6 показані провідні канали вздовж одного з трьох рівноцінних напрямків у кубі $\xi \times \xi \times \xi$. Всі провідні зв'язки належать нескінченному кластеру, через кожен з них проходить той самий струм.

У цій моделі весь нескінченний кластер несе струм. У кубі розміром $\xi \times \xi \times \xi$ число зв'язків у нескінченному кластері дорівнює $P_{\infty}(p)(\xi/a_0)^3$, де a_0 – розмір зв'язку. Число провідних каналів уздовж одного з трьох рівноцінних напрямків дорівнює:

$$\frac{1}{3} \frac{P_{\infty}(p)(\xi/a_0)^3}{\xi/a_0} = \frac{1}{3} P_{\infty}(p)(\xi/a_0)^2. \quad (5.3.1)$$

Ефективну провідність $\sigma_e = 1/\rho_e$ можна визначити, враховуючи, що з одного боку для куба $\xi \times \xi \times \xi$ опір

$$R = \rho_e \frac{\xi}{\xi^2}, \quad (5.3.2)$$

а з іншого,

$$R = \frac{1}{\sigma_1} \frac{\xi}{\frac{1}{3} P_{\infty}(p) \left(\frac{\xi}{a_0} \right)^2}. \quad (5.3.3)$$

Прирівнюючи ці вирази один одному, отримуємо

$$\sigma_e = \frac{1}{R\xi} \sim \sigma_1 P_{\infty}(p) \sim \sigma_1 \tau^{\beta}. \quad (5.3.4)$$

Звичайно, ця модель надто спрощена. У ній прийнято, що всі зв'язки нескінченного кластера проводять струм і утворюють дуже просту структуру - всі канали, що проводять, мають довжину ξ . Проте головну суть процесу ця модель відбиває. Ефективна провідність залежить від близькості до порога протікання як степенева функція. Числове значення одержаного в цій моделі критичного індексу провідності t рівне критичному індексу β , у тривимірному випадку рівному $\beta_3 = 0,41$ (див. Таблицю. 5.1), що значно відрізняється від

канонічного значення $t_3 = 2,0$. Цю модель «підвело», переважно, припущення про те, що всі зв'язки нескінченного кластера несуть струм. Дійсно, частина з них, як відомо, наприклад, з числового моделювання, є мертвими кінцями і за $\sigma_2 = 0$ не беруть участь у перенесенні струму.

Більш складною моделлю, що враховує наявність мертвих кінців, є модель Скал-Шкловського. Цю модель самі автори називають моделлю одножильної сітки. Для її побудови припустимо, що в нескінченному кластері можна виділити одномасштабну сітку токонесячу з характерним розміром, рівним кореляційній довжині ξ (Рис. 5.7).

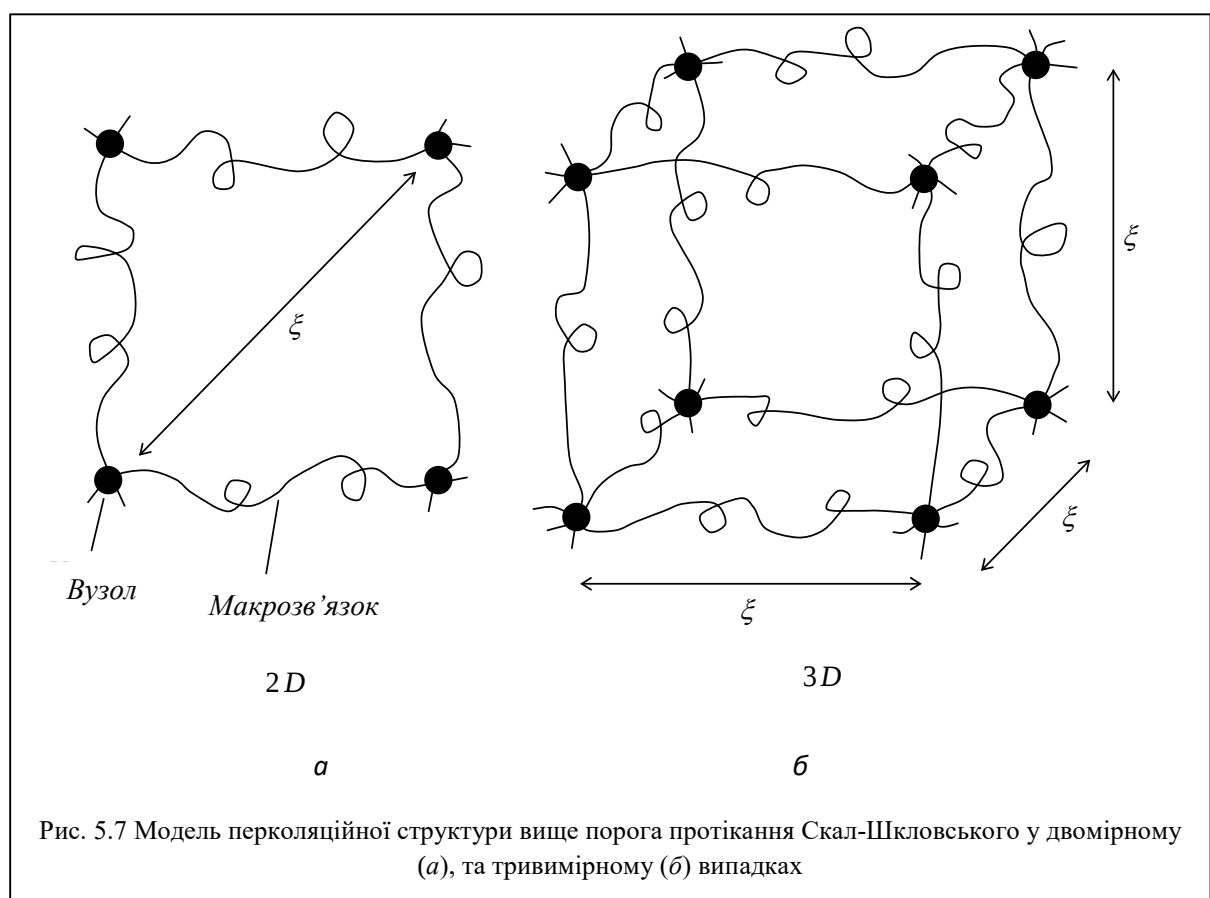


Рис. 5.7 Модель перколяційної структури вище порога протікання Скал-Шкловського у двовірному (а), та тривірному (б) випадках

Для обчислення σ_e як і в моделі Ласта-Таулеса, необхідно знати довжину макрозв'язку. Нехай вона залежить від τ степеневим чином:

$$\ell \approx a_0 \tau^{-\zeta}, \quad (5.3.5)$$

де ζ – критичний індекс, який можна знайти з таких міркувань. Якщо розірвати зв'язок сітки з ймовірністю $(p - p_c)/p$, то частка цілих зв'язків виявиться точно рівною

$p[1 - (p - p_c)/p] = p_c$. Оскільки в прийнятій моделі макрозв'язок одножильний, то він буде розірваний вже при розриві всього одного зв'язку. Таким чином, ймовірність розриву кожного макрозв'язку пропорційна його довжині і дорівнює $(\ell/a_0)(p - p_c)/p_c$. За певного значення частки розірваних макрозв'язків y_c сітка макрозв'язків також буде розірвана $y_c = [(p - p_c)/p](\ell/a_0)$, звідки

$$\ell \sim (p - p_c)^{-1}, \quad (5.3.6)$$

тобто в позначеннях (5.3.5) $\zeta = 1$.

Знаючи ℓ , аналогічно до того, як це було зроблено в моделі Ласта-Таулеса, можна визначити критичний індекс ефективної провідності

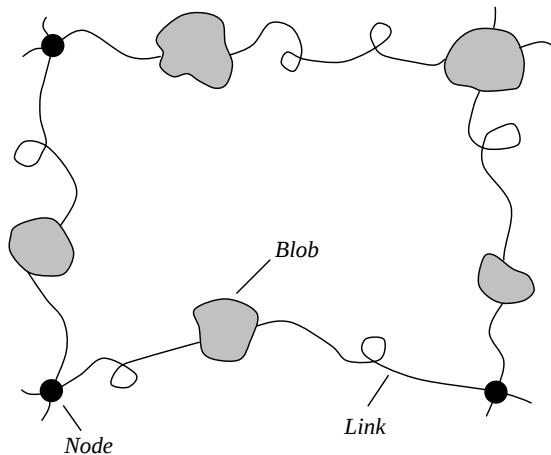
$$\frac{1}{\sigma_1} \frac{\ell}{a_0^{d-1}} = \frac{1}{\sigma_e} \frac{\xi}{\xi^{d-1}}, \quad \sigma_e \sim \frac{\sigma_1}{\ell \xi^{d-2}}, \quad (5.3.7)$$

де d – розмірність задачі.

Підставляючи (5.3.7) $\xi = a_0 \tau^{-\nu}$ і ℓ з (5.3.6), отримуємо

$$\sigma_e = \sigma_1 \tau^{1+\nu(d-2)}, \quad t_2 = 1, \quad t_3 = 1 + \nu_3 = 1,88. \quad (5.3.8)$$

Знайдені критичні індекси провідності у двовимірному t_2 та тривимірному t_3 випадках близькі до канонічних, проте у двовимірному випадку критичний індекс $\zeta_2 = 1$ призводить до протиріччя. При зменшенні τ (наближення до порога протікання) у зв'язку з тим, що $\nu_2 > \zeta_2$ кореляційна довжина зростає швидше, ніж довжина макрозв'язку ℓ , тобто при певному значенні $\tau > 0$ ($p > p_c$) макрозв'язок мав би порватися. А це суперечить умові $p > p_c$. Така суперечність, звичайно, пов'язана з тим, що в моделі не враховано дублювання зв'язків у макрозв'язку.



Подальший розвиток моделі, облік наявності запаралелених зв'язків призвів до створення звані моделі Nodes-Links-Blobs (NLB). У цій моделі до двох елементів: вузлів та одножильних макрозв'язків (див. Рис. 5.7) додаються «блоби» (Blobs) – частини сітки,

Рис. 5.8. Модель Nodes-Links-Blobs (мертві кінці не вказані).

що містять багато запаралелених зв'язків (Рис. 5.8).

Тепер протиріччя, що з'явилося в моделі Скал-Шкловського, знято. Макрозв'язок (одножильний з $\ell \sim \tau^{-1}$) і не повинен бути довшим ξ , частину, якої не вистачає, додають "блоби".

Модель NLB також є наближеною. У ній передбачається, що «блоб» включає настільки велику кількість запаралелених зв'язків, що опором «блобу» в порівнянні з опором макрозв'язку можна знехтувати. Таким чином, опір усієї системи визначають так звані одинично-з'єднані зв'язки (single connected bound - SCB), такі зв'язки, при яких розрив будь-якого з них перериває струм. Саме з SCB складається макрозв'язок у моделі Скал-Шкловського та link у моделі NLB. Було показано, що кількість SCB-зв'язків між двома вузлами N_{SCB} має, в рамках моделі NLB, критичний індекс рівний -1 (порівняй з (5.3.6))

$$N_{SCB} \sim \tau^{-\zeta_R}, \quad \zeta_R = 1, \quad (5.3.9)$$

де значок R буде пояснено трохи пізніше.

З формули (5.3.9) відразу слідує (повторимо міркування (5.3.6) $\rightarrow$ (5.3.8)) критичний індекс ефективної провідності:

$$\sigma_e = \sigma_1 \tau^{\zeta_R + (d-2)\nu}, \quad \zeta_R = 1. \quad (5.3.10)$$

Як у дво-, так і у тривимірному випадку критичний індекс t у моделі NLB збігається з критичним індексом моделі Скал-Шкловського:

$$t_{NLB} = 1 + (d-2)\nu, \quad t_2 = 1, \quad t_3 = 1.88, \dots, t_6 = 3, \quad (5.3.11)$$

зокрема, для критичної розмірності $d_c = 6$ критичний індекс набуває точного значення (див. таб. 5.1).

Досі ми розглядали моделі перколяційної структури вище за поріг протікання $p > p_c$ і припускали, що у провідності бере участь тільки добре провідна фаза з питомою провідністю σ_1 , а $\sigma_2 = 0$. Нижче порогу протікання нескінченного кластера немає, і модель перколяційної провідної структури повинна включати погано провідні зв'язки. Тепер саме вони визначають у першому наближенні ($\sigma_1 = \infty$, σ_2 – скінченна) опір усієї системи (див. Таблицю 5.1).

Головну роль тут відіграють ті місця між частинами добре провідної фази, які знаходяться максимально близько – «на відстані» одного погано провідного зв'язку. Такі

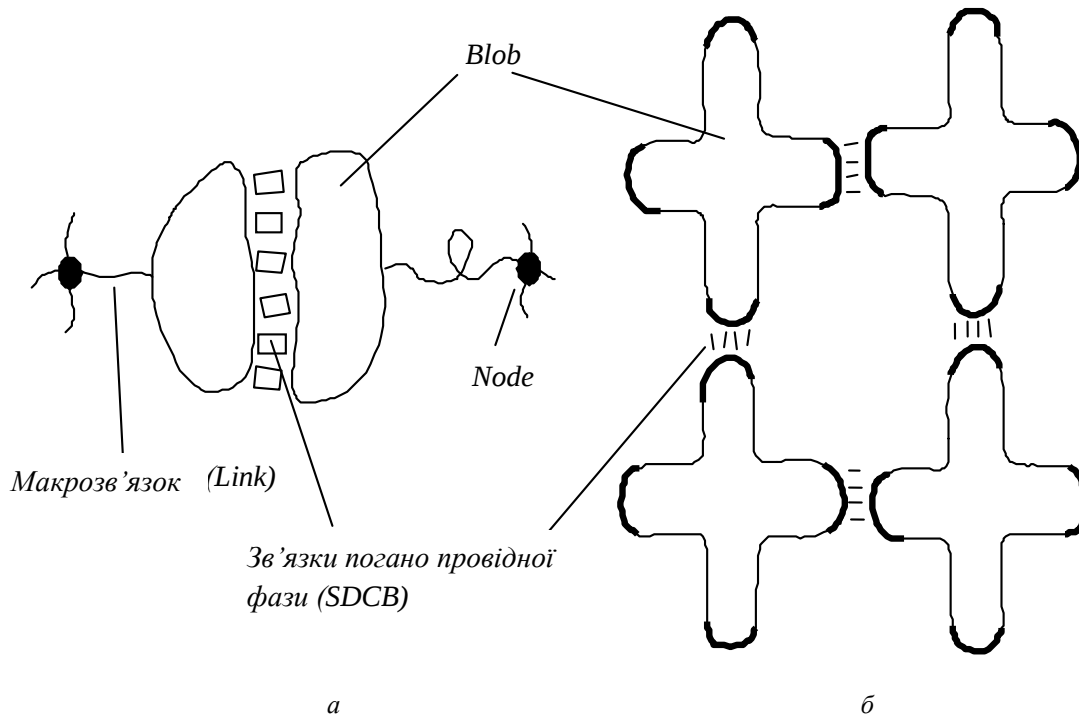


Рис. 5.9. Модель перколяційної структури нижче порога протікання:
a -варіант, що включає «блоби», вузли, SCB-одиночно з'єднані зв'язки і закорочені зв'язки фази, що погано проводить, так звані одиночно роз'єднані зв'язки – single disconnected bond (SDCB); *б* –схема, що застосовуємо.

зв'язки (див. Рис. 5.9) називаються "поодинокі роз'єднаними зв'язками" - Single DisConnected Bonds - (SDCB). Зв'язки SCB розташовані послідовно один одному, розрив будь-якого з них (тобто заміна «чорного» зв'язку (σ_1) на «білий» (σ_2)) призводить до переходу системи зі стану $p > p_c$ в $p < p_c$.

Число таких зв'язків визначається критичним індексом ζ_R (5.3.9), де індекс R логічно впливає з того, що опір SCB – це сума опорів зв'язків «чорної» фази. Зв'язки SDCB, навпаки, розташовані паралельно один до одного. Пробій будь-якого з них (заміна «білого» зв'язку (σ_2) на «чорний» (σ_1)) призводить до переходу системи від $p < p_c$ до $p > p_c$. Їхнє число також визначається критичним індексом, який позначається ζ_G , де індекс G логічно впливає з того, що сума кондактансів цих зв'язків дає кондактанс SDCB:

$$N_{SDCB} \sim |\tau|^{-\zeta_G}. \quad (5.3.12)$$

Знаючи N_{SDCB} , легко знайти критичний індекс ефективної провідності σ_e нижче за поріг протікання. З одного боку, кондактанс G куба ξ^d дорівнює:

$$G = \sigma_e \frac{\xi^{d-1}}{\xi} = \sigma_e \xi^{d-2} = \sigma_e |\tau|^{-\nu(d-2)} a_0^{d-2}, \quad (5.3.13)$$

з іншого,

$$G = \sigma_2 a_0^{d-2} N_{SDCB} = \sigma_2 a_0^{d-2} |\tau|^1, \quad (5.3.14)$$

звідки

$$\sigma_e = \sigma_2 |\tau|^{-(1-\nu(d-2))}, \quad q = 1 - \nu(d-2). \quad (5.3.15)$$

Таким чином, у двох- та тривимірних випадках згідно цієї моделі маємо

$$q_2 = 1, \quad q_3 = 0,22. \quad (5.3.16)$$

Зрозуміло, що розглянуті вище моделі дозволяють отримати критичні індекси t і q з невеликою точністю. Проте, головна заслуга цих моделей у тому, що вони дозволили виділити основні елементи перколяційної структури в задачі протікання струму. Критичні індекси, що описують елементи цих структур, отримані в рамках розглянутого підходу, є наближеними і іноді призводять до суперечності, наприклад, згідно (5.3.15) $q_6 = 1$ замість канонічного (див. Таблицю 5.1) $q_6 = 0$. Суворіші міркування в рамках цих же моделей призводять тільки до нерівностей

$$t \geq 1 + \nu(d-2), \quad q \geq 1 - \nu(d-2).$$

Обчислення критичних індексів з перших принципів за аналогією з ТФП 2-го роду назвемо мікроскопічним підходом. До опису кінетичних явищ у перколяційних системах можна підійти і з іншого боку: побудувати певну узагальнену, феноменологічну модель перколяційної структури, критичні індекси геометричних елементів якої вважаються відомими. І використовувати цю модель для опису різних кінетичних явищ. Такий наближений підхід, там де він, звісно, «працює», дозволив би єдиним чином описати різні кінетичні процеси в перколяційних середовищах і вказати на зв'язок критичних індексів цих процесів. У наступному параграфі буде розглянуто саме таку модель.

5.4. Ієрархічна модель перколяційної структури

У цьому параграфі розглянемо ієрархічну модель (ІМ) перколяційної структури, яку надалі застосовуватимемо для опису різних фізичних процесів у перколяційних середовищах.

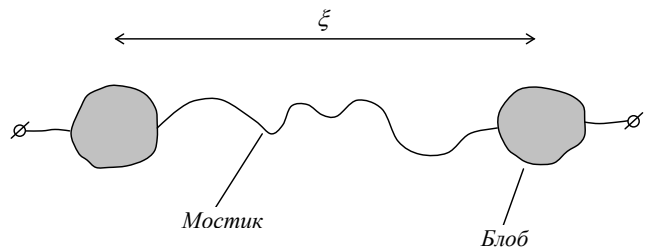


Рис. 5.10 Схема першого ступеня ієрархічної моделі вище за поріг протікання ($p > p_c$).

1. Спочатку розглянемо ідеальний випадок для $p > p_c$: добре провідна фаза має скінченну провідність σ_1 , а фаза, що погано проводить, є ідеальним діелектриком, $\sigma_2 = 0$. Модифікуємо модель NLB, наведену на Рис. 5.10. Опір містка (таким чином усієї системи на розмірах ξ) визначається його довжиною $a_0 \cdot N_1$, де a_0 , як і раніше, мінімальний розмір у системі, наприклад, довжина зв'язку. Опором блобів, як і в моделі NLB, нехтуємо, а опір містка підбираємо так, щоб критичний індекс провідності, що вийшов, збігся з канонічним. Опір містка R_1 і всієї системи на розмірах ξ визначається його довжиною, яка задається числом зв'язків, що входять до містка N_1 . Закон для N_1 вибираємо у вигляді

$$N_1 = \tau^{-\alpha_1}. \quad (5.4.1)$$

Цей закон відрізняється від аналогічного для NLB (див. Рис. 5.11). У перколяційній структурі крім «блобів», що включають багато запаралелених зв'язків, зустрічаються ділянки з двома, трьома запаралеленими зв'язками. Число незапаралелених зв'язків – SCB, $N_{SCB} \sim \tau^{-1}$. У першому ступені ІМ у містку відсутні будь-які зв'язки, крім незапаралелених, але їх кількість залежить від τ за іншим законом $N_1 \sim \tau^{-\alpha_1}$.

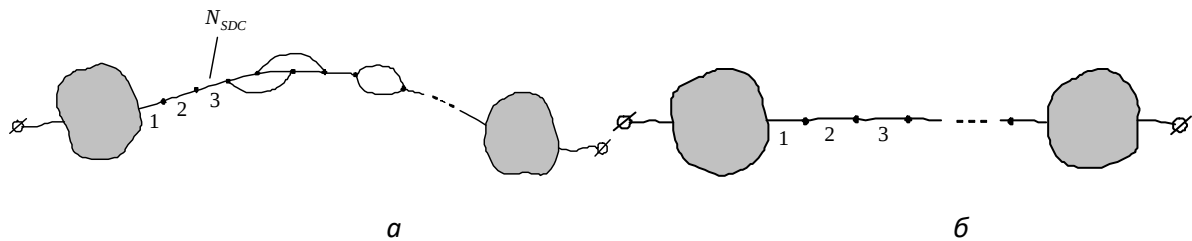


Рис. 5.11 Схема першого ступеня ІМ (б) та NLB-моделі (а).

Визначимо критичний індекс α_1 через критичний індекс провідності t , який вважатимемо відомим. З одного боку, опір системи на розмірах ξ має вигляд

$$R_1 = \frac{N_1}{\sigma_1 a_0^{d-2}} = \frac{\tau^{-\alpha_1}}{\sigma_1 a_0^{d-2}}, \quad (5.4.2)$$

з іншого, - ($\xi = a_0 \tau^{-\nu}$) його можна записати так:

$$R_1 = \frac{1}{\sigma_e \xi^{d-2}} = \frac{\tau^{\nu(d-2)}}{\sigma_e a_0^{d-2}}, \quad (5.4.3)$$

і, оскільки $\sigma_e = \sigma_1 \tau^t$, з (5.4.2) та (5.4.3) отримуємо

$$\alpha_1 = t - \nu(d-2) = \zeta_R. \quad (5.4.4)$$

Цей індекс ζ_R вже зустрічався раніше в теорії перколяції, він визначає опір системи на розмірах ξ :

$$R_\xi \sim \tau^{-\zeta_R}. \quad (5.4.5)$$

Тут він використовується для визначення параметрів містка. Місток можна уявити як сукупність зв'язків, опір кожної з яких $r_1 = (1/\sigma_1)(a_0/a_0^{d-1})$. Насправді, окремі частини містка розкидані між блобами, але в моделі, яку ми розглядаємо, (див. Рис.5.11,б) всі вони зібрані разом, в один ланцюжок. Таким чином, при $p > p_c$ і $\sigma_2 = 0$, (де σ_1 – скінченна) модель перколяційної структури є містком і «блобами», причому опором останніх можна знехтувати. Місток позначатимемо хвилястою лінією (див. Рис. 5.12,а).

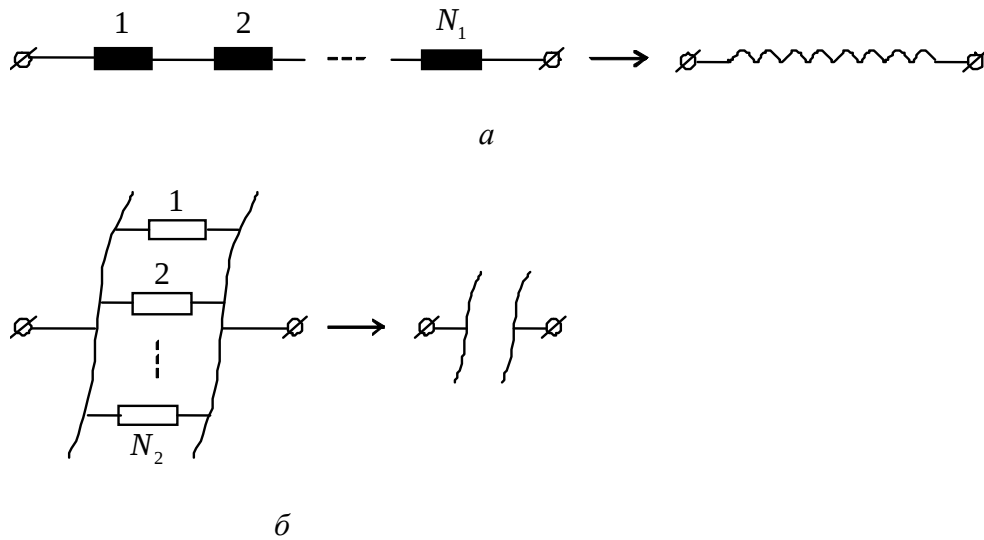


Рис. 5.12 Схематичне зображення основних елементів перколяційної структури

а- містка, б - прошарка:

$$\text{---} \blacksquare \text{---} \text{---} \text{ для } r_1 = \frac{1}{\sigma_1} a_0^{2-d},$$

$$\text{---} \square \text{---} \text{---} \text{ для } r_2 = \frac{1}{\sigma_2} a_0^{2-d}.$$

2. Тепер розглянемо ідеальний випадок при $p < p_c$: погано провідна фаза σ_2 має скінченну провідність, а добре провідна фаза є ідеальним провідником $\rho_1 = 1/\sigma_1 = 0$. Головну роль у визначенні опорів системи відіграють SDCB, що складаються з фази, що погано проводить, і з'єднані паралельно. Тут в ІМ перколяційної структури поставимо

$$N_2 = |\tau|^{-\alpha_2}, \quad (5.4.6)$$

так, щоб критичний індекс, що визначає поведінку σ_e при $p < p_c$, дорівнював q . Для цього зауважимо, що, з одного боку, кондактанс системи на розмірах порядку ξ має вигляд:

$$G_\xi \sim |\tau|^{\zeta_G}, \quad (5.4.7)$$

а з іншого – (див. Рис. 5.12 б):

$$G_\xi = \sigma_2 N_2. \quad (5.4.8)$$

Порівнюючи (5.4.6), (5.4.7) та (5.4.8) та враховуючи, що $\sigma_e(p < p_c) = \sigma_2 |\tau|^{-q}$, для N_G отримуємо:

$$\alpha_2 = q + \nu(d - 2) \equiv \zeta_G. \quad (5.4.9)$$

Таким чином, при $p < p_c$, $\sigma_2 \neq 0$, $\rho_1 = 1/\sigma_1 = 0$, модель перколяційної структури – це прошарок (Рис. 5.12,б) та блоби з містками, опір яких ($\rho_1 = 0$) не робить вкладу в опір системи.

3. Відмовимося тепер від «ідеалізації» $h = \sigma_2/\sigma_1 = 0$ ($\sigma_2 = 0$ або $\rho_1 = 0$) і розглянемо реальніший випадок, коли як вище, так і нижче порога протікання $h = \sigma_2/\sigma_1 \neq 0$. Зокрема, це означає, що вище за поріг протікання (Рис. 5.13) частина струму (звичайно, невелика – в силу $h \ll 1$) може протікати через прошарок - елемент перколяційної структури, що складається з фази, що погано проводить. Місток при цьому шунтований прошарком (див. Рис. 5.13, б).

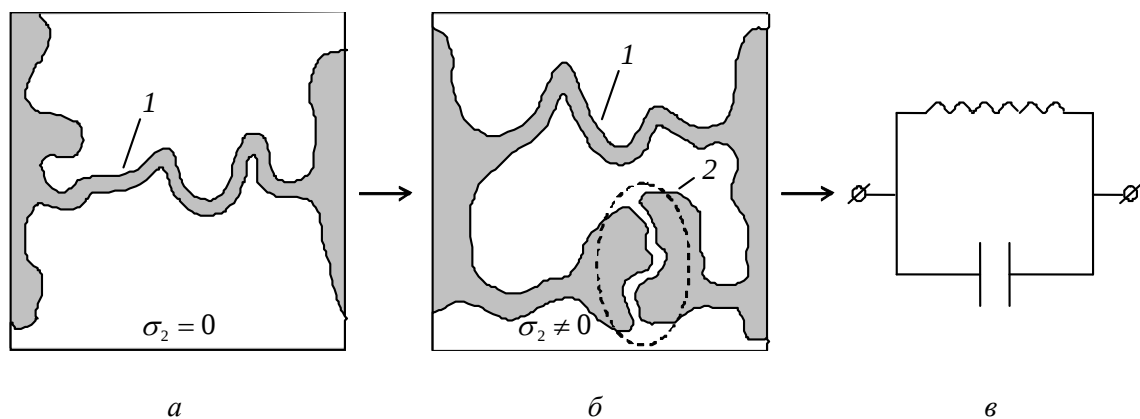


Рис. 5.13. Модель перколяційної структури вище порога протікання:

a- ідеальний випадок $\sigma_2 = 0$ єдиним елементом перколяційної структури, який істотний для визначення опору системи, є місток 1; *б* – випадок $\sigma_2 \neq 0$, необхідно враховувати ще один елемент перколяційної структури – прошарок 2, який шунтує місток; *в* – перколяційна структура в термінах містка та прошарку.

Схема нижче порога протікання (Рис. 5.14), коли при $h \neq 0$, місток додає свою невелику частину опору до опору прошарку, аналогічна і наведена на Рис. 5.14,б.

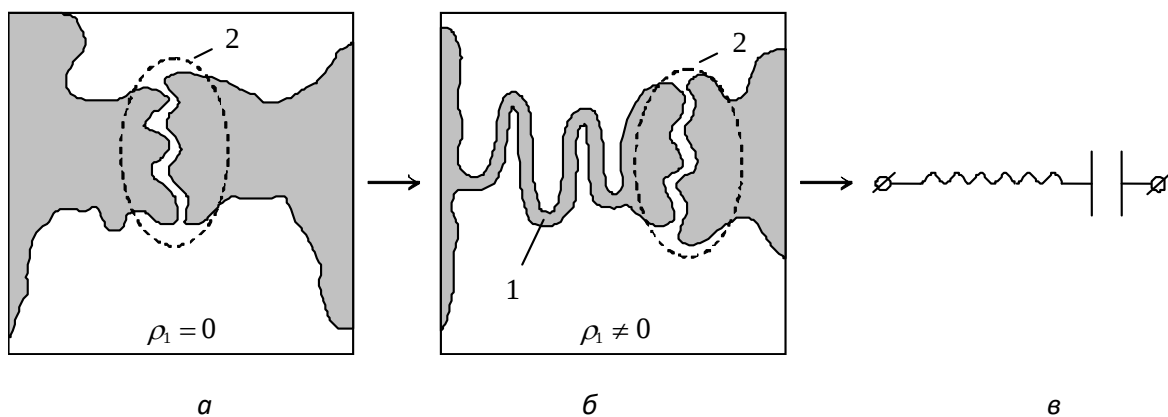
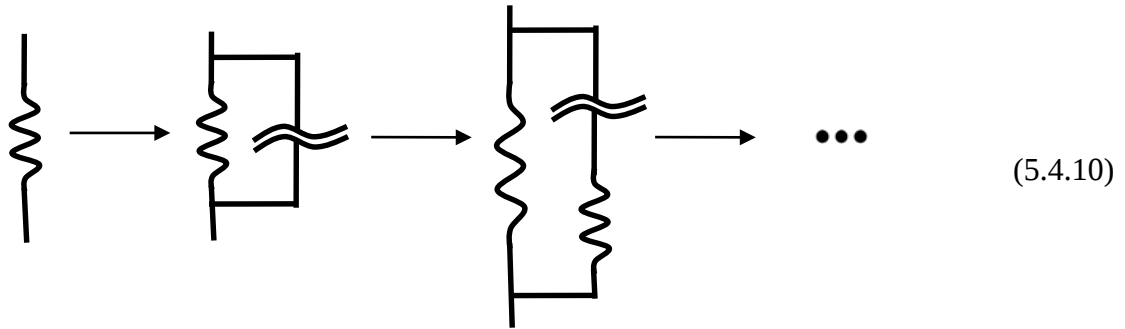
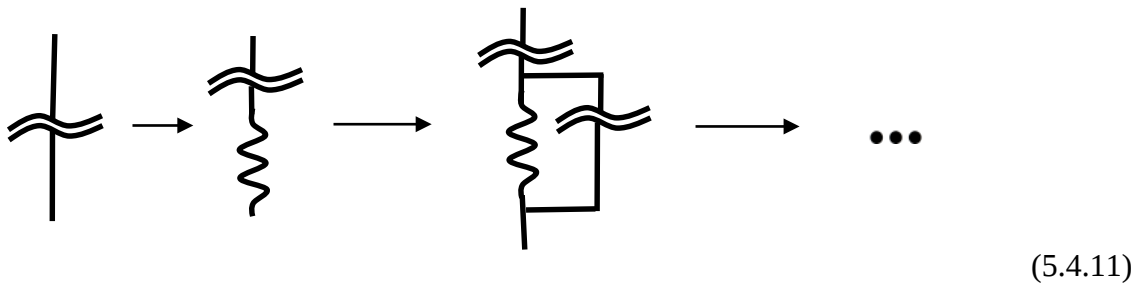


Рис. 5.14. Модель перколяційної структури нижче порога протікання: *a*- ідеальний випадок $\rho_1 = 0$, єдиним елементом перколяційної структури, який є суттєвим для визначення опору системи, є прошарок 2; *б* – випадок $\rho_1 \neq 0$, необхідно врахувати ще один елемент перколяційної структури, це місток 1; *в* - схематичне зображення частини перколяційної структури в термінах містка та прошарку.

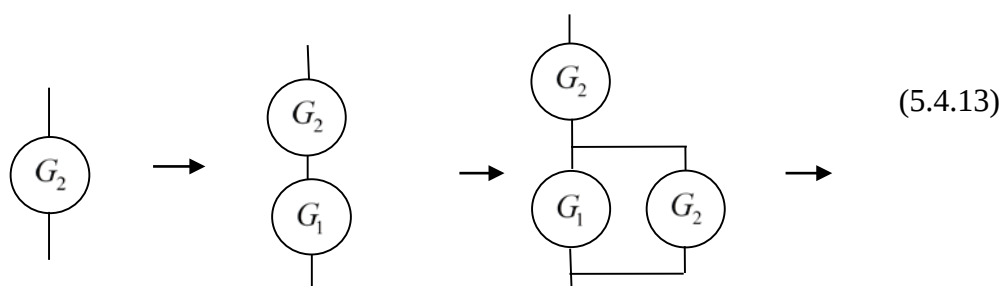
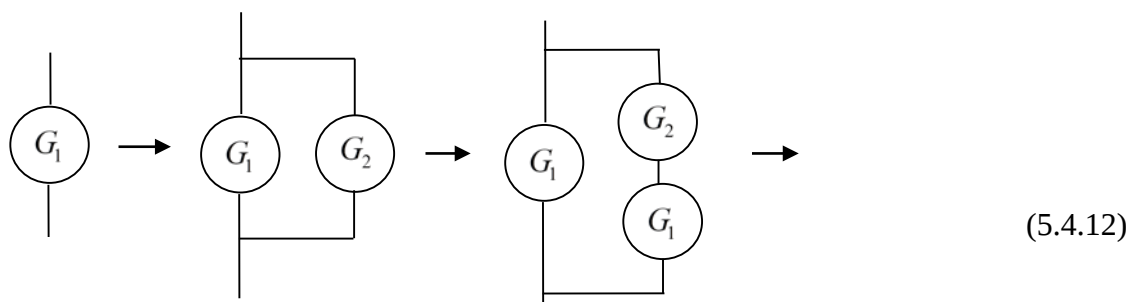
На схемах 5.4.10 і 5.4.11 наведено перші поправки до ідеального випадку $h = \sigma_2 / \sigma_1 = 0$ ($\sigma_2 = 0$ на Рис. 5.13,б і $\rho_1 = 1 / \sigma_2 = 0$ на Рис.5.14, б). Вже таке уточнення дозволило якісно, а в деяких випадках і кількісно пояснити закономірності різних фізичних процесів у перколяційних середовищах. Перш ніж показати це, продовжимо побудову наступних ІМ перколяційної структури вище за поріг протікання:



і нижче порога протікання



На графічних схемах (5.4.12) і (5.4.13) послідовно наведено перший, другий та ін. щаблі ієрархії ІМ перколяційної структури. Кожна з них у своєму наближенні, якщо йдеться, наприклад, про задачі провідності, дає значення повного опору R або кондактансу $G = 1 / R$ системи на розмірах порядку ξ . Ці схеми для задачі провідності (і не тільки) логічно замінити еквівалентними електричними схемами:



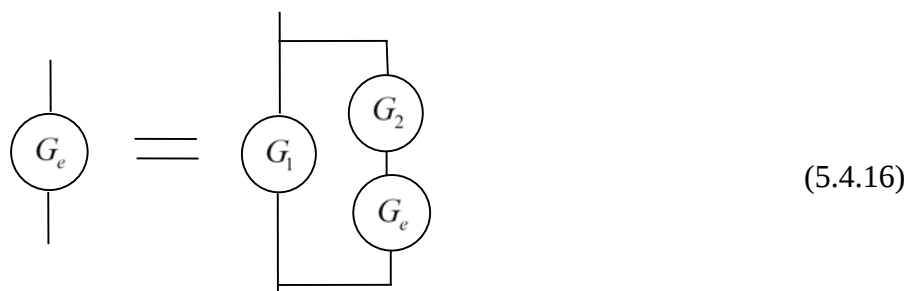
де G_1 – кондактанс містка ((5.4.1) – (5.4.4)):

$$G_1 = 1/R_1 = 1/r_1 \quad N_1 = \sigma_1 a_0^{d-2} / N_1 = \sigma_1 a_0^{d-2} |\tau|^{\alpha_1}, \quad \alpha_1 = \zeta_R, \quad (5.4.14)$$

а G_2 – кондактанс прошарку ((5.4.5) – (5.4.8)):

$$G_2 = 1/R_2 = \sigma_2 a_0^{d-2} \quad N_2 = \sigma_2 a_0^{d-2} |\tau|^{-\alpha_2}, \quad \alpha_2 = \zeta_G. \quad (5.4.15)$$

Кондактанси містка та прошарку можуть входити до виразів (5.4.12) та (5.4.13) зі своїми вагами. Якщо знехтувати цим, то для повного (ефективного) кондактансу системи G_e на розмірах порядку ξ можна записати замкнуте рівняння (аналог рівняння Дайсона), розв’язок якого дає G_e з урахуванням усіх щаблів ієрархії. Дійсно, з (5.4.12) випливає



а з (5.4.13) маємо

The diagram shows a single conductance G_e on the left, represented by a circle with a vertical line passing through it. This is set equal to a more complex network on the right. The network consists of a conductance G_2 in series with a parallel combination of G_1 and G_e . Specifically, a vertical line enters G_2 from the top, exits from the bottom, and then splits into two parallel branches, each containing a conductance (G_1 and G_e respectively), which then recombine into a single vertical line.

$$(5.4.17)$$

при цьому, звичайно, передбачається, що (5.4.12) та (5.4.13) сходяться. Рівняння (5.4.16) та (5.4.17), записані у символічному вигляді, є звичайними квадратними рівняннями:

$$G_e^2 - G_1 G_e - G_1 G_2 = 0, \quad p > p_c; \quad G_e^2 + G_1 G_e - G_1 G_2 = 0, \quad p < p_c. \quad (5.4.18)$$

Зауважимо, що співвідношення G_2 / G_1 згідно (5.4.14) та (5.4.15) має вигляд

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} |\tau|^{-(\zeta_R + \zeta_G)} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} |\tau|^{-(t+q)} = \left(\frac{\Delta}{|\tau|} \right)^{t+q}, \quad (5.4.19)$$

і є малим параметром, оскільки поза областю розмазки (див. (5.2.1)) $|\tau| \gg \Delta$, що означає малість правої частини (5.4.19). Розкладаючи розв'язок рівнянь (5.4.18) за малим параметром G_2 / G_1 , отримуємо

$$\begin{aligned} G_e &= G_1 \left[1 + G_2 / G_1 - (G_2 / G_1)^2 + \dots \right], \quad p > p_c, \\ G_e &= G_2 \left[1 - G_2 / G_1 + 2(G_2 / G_1)^2 - \dots \right], \quad p < p_c. \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

Враховуючи що $G_e = \sigma_e \xi^{\alpha-2} = \sigma_e a_0^{d-2} |\tau|^{-\nu(d-2)}$, і беручи до уваги (5.4.13), (5.4.14) і (5.4.19), знаходимо вирази (5.4.20), що переходять у відомі вирази (5.2.11 а), (5.2.11,с) для σ_e .

Таким чином, ІМ перколяційної структури дає всі члени розкладу скейлінгової функції ефективної провідності σ_e з точністю до числового значення множників A_i і C_i , однак дозволяє визначити їхній знак. Ці знаки можна визначити також з простих фізичних міркувань. Так, додана у другий щабель ієрархії вище порога протікання прошарок ((5.4.10) і (5.4.12)) друга схема може тільки збільшити ефективну провідність, тому $A_1 > 0$ (5.2.11а), а додавання містка до другого щабля ІМ нижче порога протікання може лише зменшити σ_e тому $C_1 < 0$ (5.2.11с).

4. Область розмазування. На перший погляд проста модель перколяційної структури в області розмазки (іноді кажуть – на порозі протікання) неможлива, оскільки при $p = p_c$ кореляційна довжина нескінченна і в модель повинно входити нескінченне число елементів

різної структури. Справді, нескінченний кластер добре провідної фази на порозі протікання має фрактальну структуру. Властивість фрактальності використовують у багатьох моделях перколяційної структури. Однак у всіх цих моделях розглядаються тільки структура фази, що добре проводить, тобто випадок $\sigma_2 = 0$. Тому в них йдеться про обчислення критичних індексів різних величин, зокрема, ефективної провідності t вище за поріг протікання. Модель перколяційної структури в області розмазки для ефективної провідності повинна призводити до виразу $\sigma_e = (\sigma_1^q \sigma_2^t)^{\frac{1}{t+q}}$, тобто включати в себе елементи структури фази, що погано проводить (з $\sigma_2 \neq 0$) поряд з тою, що добре проводить.

Згідно з визначенням область розмазки – це така область значень τ , в якій внесок у σ_e фаз, що добре проводять (σ_1) і погано проводять (σ_2) є порівняним (див. (5.2.13)). Кореляційна довжина при цьому ($-\Delta \leq \tau \leq +\Delta$) є скінченною,

$$\Delta = (\sigma_2 / \sigma_1)^{\frac{1}{t+q}} \neq 0, \xi_{\max} = \xi(\Delta) = a_0 \Delta^{-\nu} = a_0 (\sigma_2 / \sigma_1)^{\frac{\nu}{t+q}} \neq \infty.$$

Скінченність ξ і рівність вкладу фаз у Δ означає, що в області розмазування на розмірах порядку ξ можна зустріти різні структури як типу містка, так і типу прошарку (див. Рис. 5.15). І та, й інша будуть робити приблизно однаковий внесок у опір.

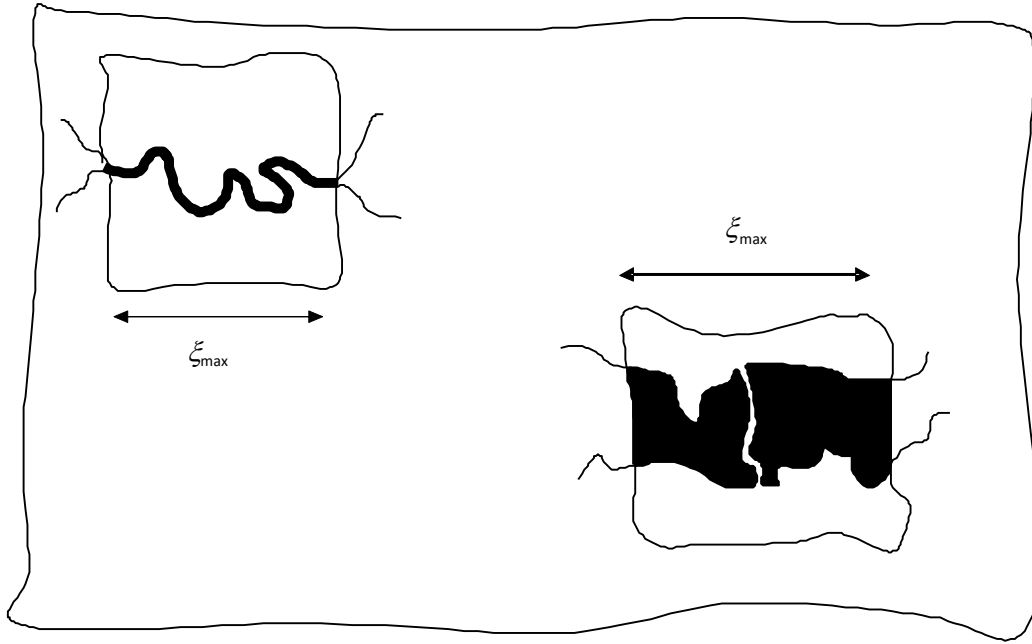


Рис. 5.15. Структура перколяційної системи в області розмазування:

У різних областях із розмірами порядку $\xi_{\max}$ можна зустріти як місток, так і прошарок. Опори цих областей мають одну й ту саму величину.

В області розмазки запропонована модель перколяційної структури, що включає одночасно і місток і прошарок. На Рис. 5.16 наведено таку модель. У цій моделі – опір містка та прошарку при $|\tau| = \Delta$ мають вигляд

$$R_1 = \frac{N_1(\tau = \Delta)}{\sigma_1 a_0^{d-2}} = \frac{\Delta^{-\alpha_1}}{\sigma_1 a_0^{d-2}}, \quad \alpha_1 = \zeta_R, \quad (5.4.21)$$

$$R_2 = \frac{1}{\sigma_2 a_0^{d-2} N_2(\tau = \Delta)} = \frac{\Delta^{\alpha_2}}{\sigma_2 a_0^{d-2}}, \quad \alpha_2 = \zeta_G. \quad (5.4.22)$$

Відмітимо, що $R_1(\Delta) = R_2(\Delta)$. Опір r_m на схемі Рис. 5.16, а має бути таким, щоб під час переходу з області ϵ в область a модель переходила б у модель перколяційної структури вище за поріг протікання (де головний елемент – місток), а при переході з ϵ в $\bar{\epsilon}$ вона переходила б у модель перколяційної структури нижче порога протікання (де головний елемент – прошарок). Таким вимогам можна задовольнити, якщо прийняти, що з ймовірністю P_Δ опір $r_m = r_1$, а з ймовірністю $1 - P_\Delta$ – рівний $r_m = r_2$, де

$$P_{\Delta} = \frac{\Delta + \tau}{2\Delta}, \quad 1 - P_{\Delta} = \frac{\Delta - \tau}{2\Delta}. \quad (5.4.23)$$

Іншими словами, якщо r_m - місток, то схема моделі перколяційної структури в області

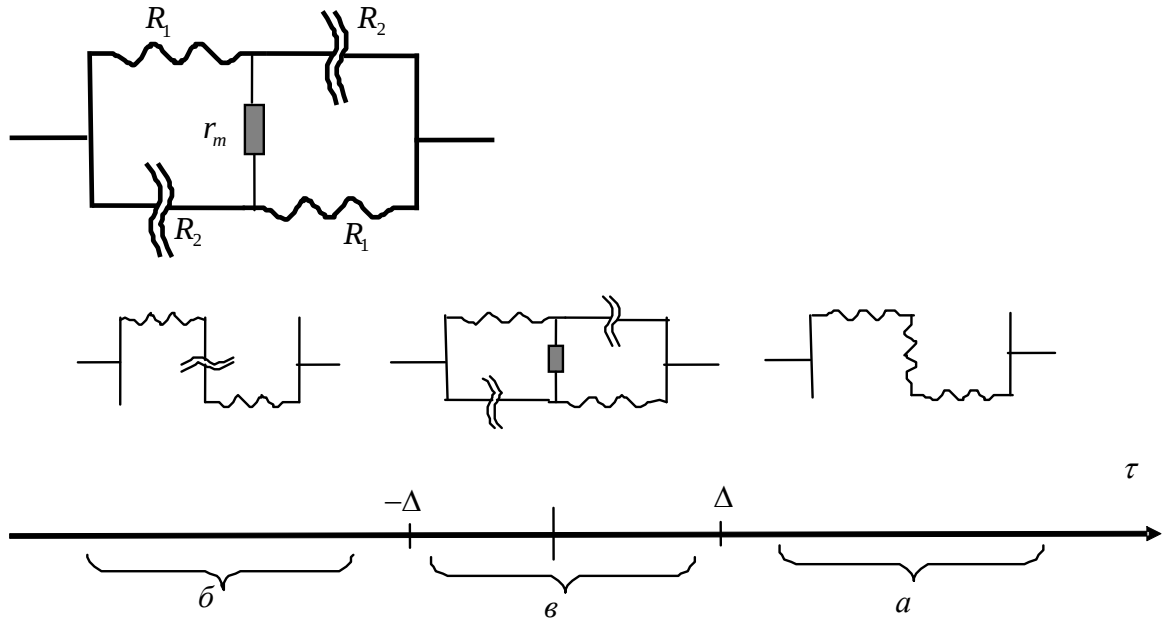


Рис. 5.16. Модель перколяційної структури в галузі розмазування: *а*- $p > p_c$ існує шлях по добре провідній фазі (місткам); *б* - $p < p_c$ струм обов'язково пройде через поганопровідну фазу (прошарку); в $-\Delta < \tau < \Delta$ область розмазки, містки та прошарки дають однаковий внесок у опір.

розмазування (Рис. 5.16,в) переходить у послідовне з'єднання містків, а прошарки тільки шунтують містки (див. Рис. 5.16,а). І навпаки, якщо $r_m = r_2$ то струм обов'язково повинен протікати по прошарку. При $\tau \rightarrow \Delta$ ймовірність збільшується, чим ближче τ до Δ , а система – до межі між областями *в* і *а* на Рис. 5.16, тим з більшою ймовірністю буде зустрічатися місток на розмірах порядку ξ . При $\tau = \Delta$ прошарок як головний елемент перколяційної структури зникає (див. Рис. 5.17, а). І навпаки при $\tau \rightarrow -\Delta$ все частіше зустрічаються прошарки, і при $\tau = -\Delta$ зникають містки як головний елемент перколяційної структури. Струм обов'язково повинен протікати через прошарки (див. Рис. 5.17,б).

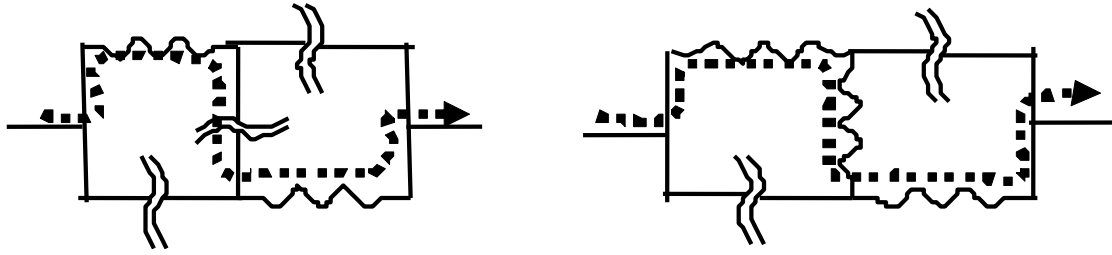


Рис. 5.17. Модель області розмазки для двох крайніх випадків: $a - \tau = \Delta, r_m = r_1$, Струм може протікати тільки по містках (добрепровідна фаза), прошарки (поганопровідна фаза) тільки шунтують містки; $b - \tau = -\Delta, r_m = r_2$, струм повинен протікати через прошарок (поганопровідну фазу).

Таким чином, загалом перколяційна структура середовища така:

– поза областю розмазування, вище за поріг протікання ($|\tau| \gg \Delta, \tau > 0$) опір системи визначають містки, опір яких $R_1 = r_1 \tau^{-\alpha_1}, r_1 = 1/\sigma_1 a_0^{d-2}, \alpha_1 = \zeta_R = t - \nu(d-2)$.

– поза розмазуванням, нижче порога протікання ($|\tau| \gg \Delta, \tau < 0$) опір системи визначають прошарки, опір яких $R_2 = r_2 \tau^{+\alpha_2}, r_2 = 1/\sigma_2 a_0^{d-2}, \alpha_2 = \zeta_G = q + \nu(d-2)$.

- в області розмазування (у тому числі і на самому порозі протікання при $p = p_c$) кореляційний радіус ξ і опори містків та прошарків вже не залежать від τ , тому $R_1 = R_1(\Delta)$, $R_2 = R_2(\Delta)$, $\xi = \xi_{\max} = \xi(\Delta)$, та головним елементом перколяційної структури з певною ймовірністю P_Δ є місток, а з ймовірністю $1 - P_\Delta$ - прошарок.

Надалі ми побачимо, що описана модель перколяційної структури дозволяє простим, наочним і єдиним чином описати безліч різних фізичних процесів у середовищах із порогом протікання. Зокрема, модель перколяційної структури в галузі розмазування дозволила отримати основні закономірності кінцевого скейлінгу при $\sigma_2/\sigma_1 \neq 0$ та ефективної провідності у системах з так званим експоненційно широким спектром розподілу локальної провідності.

Контрольні запитання

1. Які аналогії між перколяційними системами та системами з фазовими переходами 2-го роду можна виділити?
2. Як визначається параметр порядку у перколяційних системах?

3. Як залежить кореляційна довжина від близькості до порога протікання?
4. Як поведуться параметр порядку та кореляційна довжина вище та нижче порога протікання?
5. Як залежить параметр порядку від аналога зовнішнього поля?
6. Яке співвідношення називається скейлінговим співвідношенням?

Розділ 6. Самодуальні середовища

6.1. Локально ізотропні середовища

Точні розв'язки для ефективної провідності σ_e цікаві з багатьох причин. Зокрема, точне розв'язок дозволяє оцінити наскільки справедливими є різні наближення, що застосовуються при виведенні σ_e . Під точним розв'язком ми розумітимемо кінцевий аналітичний вираз з одним або декількома параметрами, які можна змінювати у всьому діапазоні їх існування. Нагадуємо, що (див. розділ 1) існує безліч різних структур композитів. При невеликій неоднорідності (ступінь неоднорідності показує співвідношення σ_2 / σ_1) безліч структур мають не тільки приблизно однакове значення σ_e , а й однакову концентраційну залежність $\sigma_e(p)$. У разі сильної неоднорідності $h = \sigma_2 / \sigma_1 \ll 1$ це вже не так, принаймні для немалих концентрацій. Таким чином, як здається на перший погляд, при $h \ll 1$ і значній концентрації кожен композит з цією структурою буде мати свою власну σ_e . Іншими словами, ефективна провідність буде ніби «міткою», «ярликом» цієї структури, аналогічно фрактальній розмірності цієї сніжинки Коха, і не більш того. Тим більше дивним виявилось, що існує нескінченний і дуже різноманітний набір двовимірних структур з половинною концентрацією фаз, для яких ефективна провідність має один і той же вираз, причому немає обмежень на величину неоднорідності, випадок має місце $\sigma_1 / \sigma_2 \rightarrow \infty$. Це так звані самодуальні середовища (D -середовища). Вперше вирази ефективної провідності σ_e для D -середовища були отримані Діхне для загального випадку. Тут же були введені, у загальному вигляді, перетворення симетрії для локальних полів та струмів, узагальнені та використані надалі для вирішення багатьох задач. Раніше було введено поняття поєднаних гармонічних функцій (потенціалів), які є окремим випадком.

Розглянемо двовимірне двофазне середовище з таким розташуванням фаз, що:

1) ефективна провідність є ізотропною; 2) взаємна заміна фаз не змінює σ_e . Останнє означає, що фази знаходяться у геометрично еквівалентних положеннях та мають половинну концентрацію. Приклади такого розташування фаз наведено на Рис.6.1. На Рис. 6.2. показаний приклад «основного» середовища та дуальної їй.



Рис.6.1. Приклади самодуального (в середньому) середовища:

Розташування фаз є самодуальним, тобто заміна $\sigma_1 \Leftrightarrow \sigma_2$ на рисунку *а* призводить до середовища *б*, але не міняє ефективну провідність σ_e .

Для двовимірних випадково неоднорідних середовищ на порозі протікання на розмірах великої кореляційної довжини різні фази також знаходяться в геометрично еквівалентному (в середньому) положенні, взаємна заміна $\sigma_1 \Leftrightarrow \sigma_2$ не змінює σ_e . Таким чином, ці середовища також є *D* середовищем.

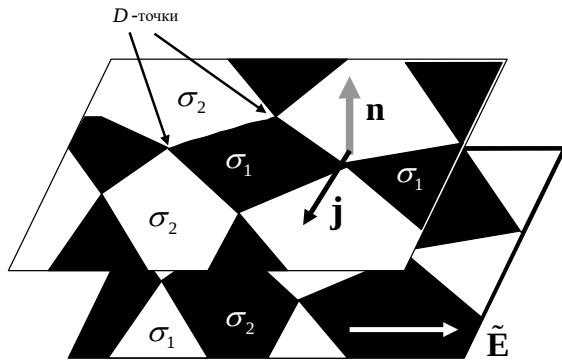


Рис.6.2. Двохфазне самодуальне середовище:
Згори «основне», знизу – дуальне йому, $\mathbf{n}$ –
одичинний вектор нормалі.

Введемо перетворення симетрії

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{j}} &= \Lambda \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \\ \tilde{\mathbf{E}} &= \Lambda^{-1} \mathbf{n} \times \mathbf{j},\end{aligned}\tag{6.1.1}$$

де (див. Рис. 6.2) $\mathbf{E}$ і $\mathbf{j}$ – локальні поля і струм в "основному" середовищі, а $\tilde{\mathbf{E}}$ і $\tilde{\mathbf{j}}$ – в "дуальному" йому, $\mathbf{n}$ – одиничний вектор нормалі.

Слід зазначити те, що $\tilde{\mathbf{E}}$ й точки $\tilde{\mathbf{j}}$ – «справжні», тобто підкоряються тим самим рівнянням $\text{div } \tilde{\mathbf{j}} = 0$, $\text{rot } \tilde{\mathbf{E}} = 0$, що і поля, і

струми в середовищі. Це легко показати: наприклад,

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{E}} = \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = \Lambda^{-1} \nabla \times (\mathbf{n} \times \mathbf{j}) = \Lambda^{-1} \mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{j}) = \Lambda^{-1} \mathbf{n} \text{div } \mathbf{j} \text{ і з } \text{div } \mathbf{j} = 0 \text{ слідує } \text{rot } \tilde{\mathbf{E}} = 0.$$

Можливість «перетворення» div на rot , і навпаки, при перетвореннях симетрії (6.1.1) існує лише у двовимірному випадку. У тривимірному випадку одне рівняння $\text{div } \mathbf{j} = 0$ ніяк не може перетворитися на три рівняння $-\text{rot } \mathbf{E} = 0$.

Локальний закон Ома в «основному» середовищі після перетворень (6.1.1) перейде до закону Ома в «дуальному» середовищі:

$$\mathbf{j} = \sigma(x, y) \mathbf{E} \rightarrow \tilde{\mathbf{j}} = \frac{\Lambda^2}{\sigma(x, y)} \tilde{\mathbf{E}}, \quad (6.1.2)$$

де $\Lambda^2 / \sigma(x, y)$, очевидно, є локальна провідність у дуальному середовищі:

$$\tilde{\sigma}(x, y) = \frac{\Lambda^2}{\sigma(x, y)}. \quad (6.1.3)$$

З огляду на дуальності, за тих значень координат (x, y) , при яких провідність $\sigma(x, y)$ дорівнює σ_1 , провідність дуального середовища $\tilde{\sigma}(x, y)$ має бути рівна σ_2 , і навпаки:

$$\sigma(r) = \begin{cases} \sigma_1, & r \in O_1, \\ \sigma_2, & r \in O_2, \end{cases}, \quad \tilde{\sigma}(r) = \begin{cases} \sigma_2, & r \in O_1, \\ \sigma_1, & r \in O_2. \end{cases} \quad (6.1.4)$$

Умови (6.1.4) можна задовольнити, поклавши

$$\Lambda^2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2. \quad (6.1.5)$$

Для середніх за обсягом полів та струмів в ізотропному випадку:

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma_e \langle \mathbf{E} \rangle, \quad \langle \tilde{\mathbf{j}} \rangle = \sigma_e \langle \tilde{\mathbf{E}} \rangle, \quad (6.1.6)$$

можна застосувати усереднене за об'ємом перетворення симетрії (6.1.1):

$$\langle \tilde{\mathbf{j}} \rangle = \Lambda \mathbf{n} \times \langle \mathbf{E} \rangle, \quad \langle \tilde{\mathbf{E}} \rangle = \Lambda^{-1} \mathbf{n} \times \langle \mathbf{j} \rangle. \quad (6.1.7)$$

Тоді з виразів (6.1.5), (6.1.6) та (6.1.7) випливає

$$\tilde{\sigma}_e = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_e}. \quad (6.1.8)$$

Оскільки розглядувані середовища самодуальні, тобто.

$$\sigma_e = \tilde{\sigma}_e, \quad (6.1.9)$$

з (6.1.8) відразу ж випливає формула Діхне для σ_e :

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} . \quad (6.1.10)$$

Вираз для σ_e справедливий так само і для двовимірної випадково неоднорідної середовища на порозі протікання, і саме до такого виразу призводить теорія протікання при $p = p_c = 1/2$.

Для сіткової задачі з опорами зв'язків r_1 і r_2 існує аналог (6.1.10) у вигляді

$$r_e = \sqrt{r_1 r_2} . \quad (6.1.11)$$

У континуальних варіантах D -середовищ обов'язково присутні так звані D -точки - одна з них показана на Рис. 6.2. Провідність цієї точки (якщо взагалі можна говорити про провідність точки) не є ні σ_1 , ні σ_2 . Здавалося б, ця точка однаковою мірою може вважатися провідною з σ_1 або σ_2 залежно від історії утворення даного середовища. Наприклад, якщо середовище типу шахівниці з $p = 1/2$ утворилося при зростанні «чорних» (σ_1) квадратів у «білій» (σ_2) матриці, то провідність D -точки, звичайно, σ_2 , а якщо навпаки – при зростанні «білих» квадратів, то її провідність, звичайно, σ_1 . Дійсно, як легко побачити з аналізу сіткового D середовища, розглянутого нижче, провідність D -точки дорівнює $\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$. Для

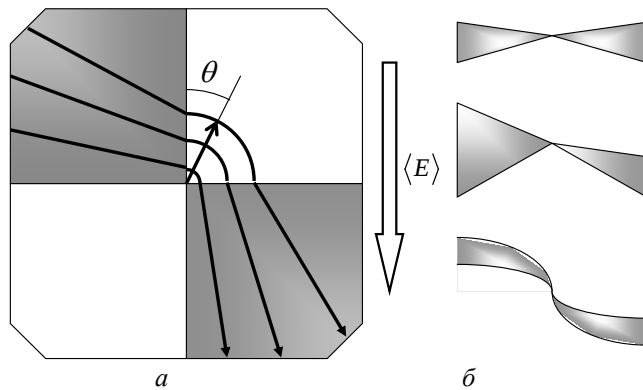


Рис.6.3. Вид околу D -точки:

a – розподіл ліній струму поблизу D -точки при $\sigma_1 \gg \sigma_2$, чорним кольором позначена добре провідна фаза ; b – різні види околу D -точки.

континуальної реалізації провідність однієї (або навіть багатьох) точки несуттєва, проте при великій неоднорідності $\sigma_1/\sigma_2 \gg 1$ саме окіл D -точок визначає провідність усієї системи. При великій неоднорідності лінії струму ведуть себе поблизу D точки так, як показано на Рис. 6.3.

У погано провідній (σ_2) фазі лінії струму поблизу D -точки є майже частиною концентричних кіл, тобто мають тільки компоненту j_θ і можуть

бути записані у вигляді:

$$j_\theta(r, \theta) \sim \langle j \rangle \frac{\sqrt{\sigma_2/\sigma_1}}{r^{1-\sqrt{\sigma_2/\sigma_1}}} , \quad (6.1.12)$$

тобто, густина струму швидко ($\sim 1/r$) зменшується при віддаленні від D -точки.

Ще швидше зменшується джоулеве тепловиділення, а так як ефективна провідність σ_e є не що інше, як нормоване джоулеве тепловиділення ($\sigma_e \sim \langle \sigma E^2 \rangle$), область поблизу D -точки є тією областю, яка визначає значення σ_e . Більш докладні обчислення показують, що, наприклад, при $\sigma_2/\sigma_1 = 10^{-2}$ половина всього джоулевого тепла виділяється в приблизно 0,1% його об'єму.

Відомо точний розв'язок задачі математичної фізики про розподіл потенціалів у строго періодичній неоднорідній структурі типу шахової дошки, проте очевидно, що для будь-якої іншої реалізації (наприклад, періодичної тільки в середньому, або при перетині сторін у D -точці не тільки під прямим кутом) розв'язок буде іншим. Але сам висновок про концентрацію струму і джоулевого тепла розподілу поблизу D -точки та основні закономірності, наприклад, те, що $j_\theta \sim r^{-\alpha}$, $\alpha \approx 1(\sigma_2/\sigma_1 \ll 1)$, що визначають опір всього середовища, зберігаються.

При нерівній концентрації фаз самодуальності бути не може. Тоді з (6.1.8) випливає тільки співвідношення між σ_e основного середовища і дуального (але вже не самодуального) йому:

$$\sigma_e(p) \tilde{\sigma}_e(p) = \sigma_1 \sigma_2. \quad (6.1.13)$$

Для випадково неоднорідних середовищ та інших (періодичних) структур заміна $\sigma_1 \Leftrightarrow \sigma_2$ еквівалентна заміні $p \Leftrightarrow 1-p$, тобто.

$$\tilde{\sigma}_e(p) = \sigma_e(1-p). \quad (6.1.14)$$

Для таких середовищ із (6.1.13) слідує так зване співвідношення взаємності:

$$\sigma_e(p) \sigma_e(1-p) = \sigma_1 \sigma_2. \quad (6.1.15)$$

Виконання (6.1.15) накладає певні обмеження на геометрію розташування фаз, так, для середовища, що складається з «чорних» круглих включень в «білій» матриці, не існує співвідношення взаємності (6.1.15).

Надалі використовуємо одну специфічну реалізацію D -середовища. Це середовище «будується» за допомогою так званої процедури перемішування, тобто покроково, на кожному кроці відбувається гомогенізація, мінімальний характерний розмір прямує до нуля і опис її властивостей переходить від локального до усередненого за допомогою ефективних значень, які, в свою чергу, для наступного кроку є локальними. На першому кроці (Рис. 6.4,а)

середовище будується зі смужок рівної товщини з провідностями σ_1 та σ_2 . Перша біла стрілка показує процес гомогенізації, розмір a_0 прямує до нуля і плоскошарове середовище «переходить» в монокристал з головними значеннями тензора провідності $\sigma_{\parallel}^{(1)}$ і $\sigma_{\perp}^{(1)}$, друга біла стрілка показує, як з цих анізотропних шарів збирається нове плоскошарове середовище.

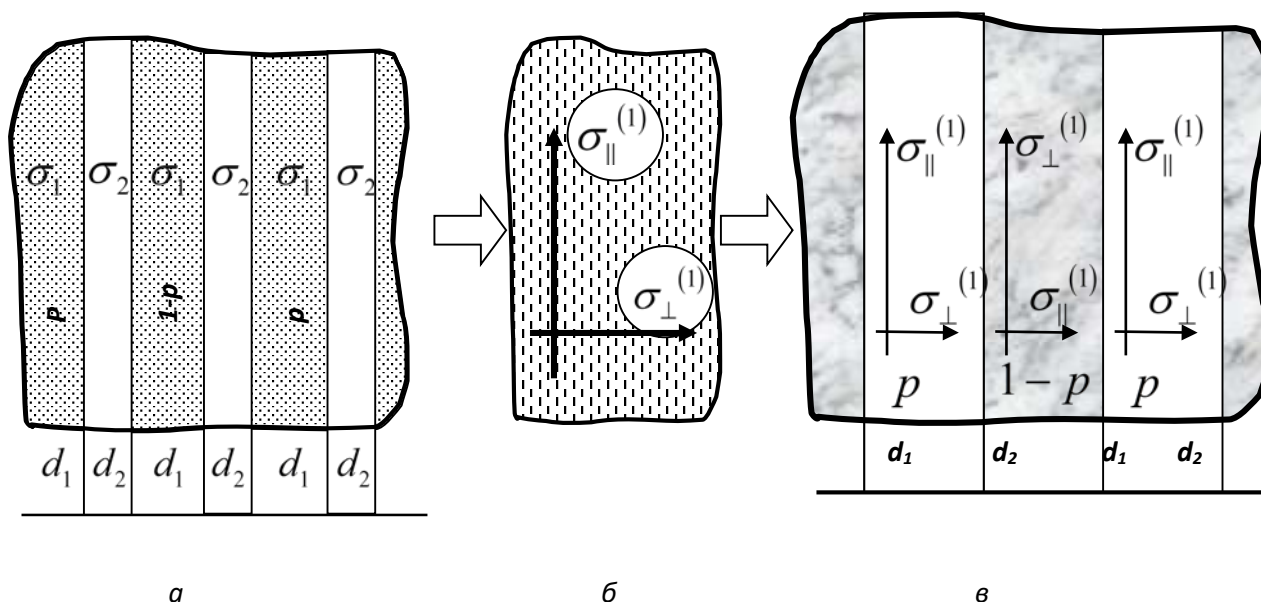


Рис.6.4 Схема перших кроків процедури перемішування: *a* – плоскошарове середовище зі смужок рівної товщини з провідностями σ_1 і σ_2 .. *б* – з первинного «монокристала» вирізаються шари рівної товщини вздовж квазікристалічних вісей ; *в* – з цих анізотропних шарів збирається нове плоско шарове середовище.

Спрямовуючи товщину смужок a_0 до нуля, тобто гомогенізуючи середовище, переходимо до первинного «монокристала», провідність якого описується тензором ефективної провідності

$$\hat{\sigma}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sigma_{\parallel}^{(1)} & 0 \\ 0 & \sigma_{\perp}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\parallel}^{(1)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad \sigma_{\perp}^{(1)} = 2 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}. \quad (6.1.16)$$

На другому кроці з первинного «монокристала» (Рис. 6.4,*б*) нарізаються смужки рівної товщини вздовж і впоперек початкових шарів і з них складається нове шарувате середовище (Рис. 6.4,*в*) . Спрямовуючи товщину смужок до нуля, переходимо до вторинного монокристала з головними компонентами тензора провідності:

$$\sigma_{\parallel}^{(2)} = \frac{\sigma_{\parallel}^{(1)} + \sigma_{\perp}^{(1)}}{2}, \quad \sigma_{\perp}^{(2)} = 2 \frac{\sigma_{\parallel}^{(1)} \sigma_{\perp}^{(1)}}{\sigma_{\parallel}^{(1)} + \sigma_{\perp}^{(1)}}. \quad (6.1.17)$$

Продовжуючи таке перемішування (коли добре і погано провідні напрямки $\sigma_{\parallel}$ і $\sigma_{\perp}$ весь час чергуються, тобто перемішуються), для $n+1$ кроку отримуємо

$$\sigma_{\parallel}^{(n+1)} = \frac{\sigma_{\parallel}^{(n)} + \sigma_{\perp}^{(n)}}{2}, \quad \sigma_{\perp}^{(n+1)} = 2 \frac{\sigma_{\parallel}^{(n)} \cdot \sigma_{\perp}^{(n)}}{\sigma_{\parallel}^{(n)} + \sigma_{\perp}^{(n)}}. \quad (6.1.18)$$

Ітераційна процедура (6.1.18) має інваріант J виду

$$\sigma_{\parallel}^{(n+1)} \cdot \sigma_{\perp}^{(n+1)} = \sigma_{\parallel}^{(n)} \sigma_{\perp}^{(n)} = \dots = \sigma_1 \sigma_2 = J. \quad (6.1.19)$$

Якщо ітераційна процедура збігається, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\parallel}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\perp}^{(n)} = \sigma_e, \quad (6.1.20)$$

і з (6.1.19) відразу слідує $\sigma_e^2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2$, тобто ефективна провідність D -середовища (6.1.10) (формула Діхне).

Збіжність процедури можна простежити, записавши перше рівняння (6.1.14) з урахуванням того, що $\sigma_{\perp}^{(n)} = \sigma_1 \sigma_2 / \sigma_{\parallel}^{(n)}$ (6.1.19) у вигляді одномірного відображення:

$$\sigma_{\parallel}^{(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{\parallel}^{(n)} + \frac{J}{\sigma_{\parallel}^{(n)}} \right), \quad J = \sigma_1 \sigma_2, \quad (6.1.21)$$

або у спрощених позначеннях:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right). \quad (6.1.22)$$

На Рис.6.5 показані сходи Ламерея для відображення (6.1.22). За будь-якого початкового

значення $x_0 \neq 0$ послідовні ітерації призводять до нерухомої точки x^* , $x^* = \frac{1}{2}(x^* + J/x^*)$,

так що $(x^*)^2 = J$.

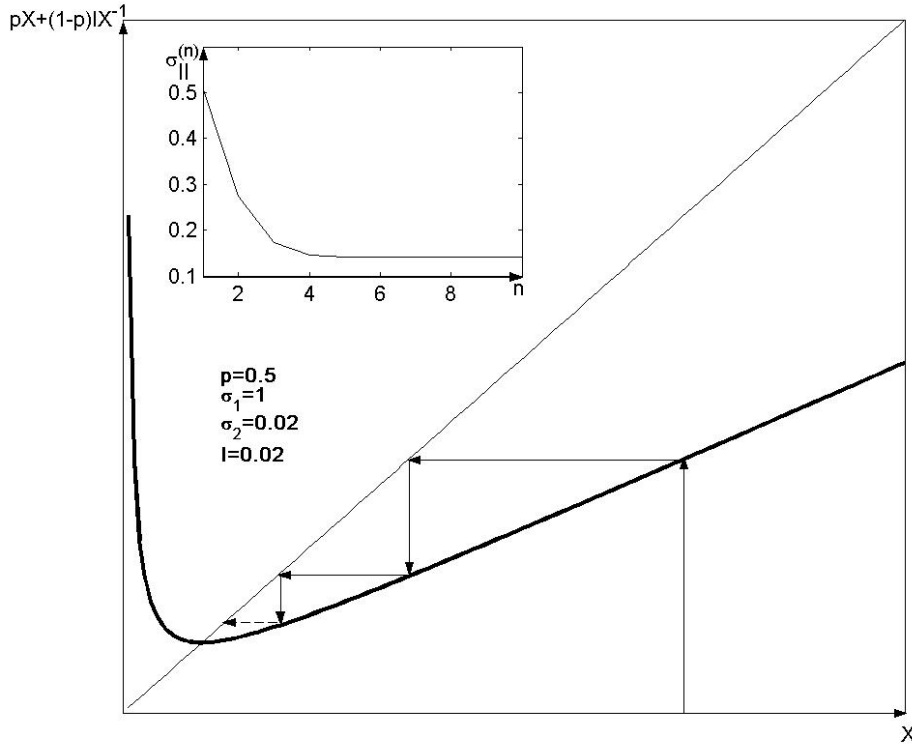


Рис.6.5. Вид одновимірного зображення $x \rightarrow \frac{1}{2} \left(x + \frac{J}{x} \right)$; сходи Ламерея; послідовні значення $\sigma_{\parallel}^{(n)}$ для $n = 1, 2, \dots$ для $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0,02$.

Отримане за допомогою такої процедури середовище є D -середовищем. Дійсно 1) заміна $\sigma_1 \Leftrightarrow \sigma_2$ не змінює σ_e ; 2) концентрація фаз є половинною; 3) ефективна провідність ізотропна.

Метод перемішування (Рис.6.4) легко узагальнюється на випадок $p \neq 1/2$. Тепер замість ітераційної процедури (6.1.18) маємо

$$\sigma_{\parallel}^{(1)} = p\sigma_1 + (1-p)\sigma_2, \quad \sigma_{\perp} = \frac{\sigma_1\sigma_2}{(1-p)\sigma_1 + p\sigma_2}, \quad (6.1.23)$$

з інваріантом J виду

$$J = \sigma_1\sigma_2 \frac{p\sigma_1 + (1-p)\sigma_2}{(1-p)\sigma_1 + p\sigma_2}, \quad (6.1.24)$$

а одновимірне відображення (6.1.21) можна записати,

$$\sigma_{\parallel}^{(n+1)} = p\sigma_{\parallel}^{(n)} + (1-p)\frac{J}{\sigma_{\parallel}^{(n)}}. \quad (6.1.25)$$

Нерухома точка відображення (6.1.25), до якої збігаються $\sigma_{\parallel}^{(n)}$ і $\sigma_{\perp}^{(n)}$ при $n \rightarrow \infty$ приводить до

$$\sigma_e(p) = \sqrt{\sigma_1\sigma_2} \sqrt{\frac{p\sigma_1 + (1-p)\sigma_2}{(1-p)\sigma_1 + p\sigma_2}}. \quad (6.1.26)$$

Як випливає з (6.1.26), для отриманої процедури перемішування середовища виконується співвідношення взаємності: $\sigma_e(p)\sigma_e(1-p) = \sigma_1\sigma_2$.

Перетворення симетрії можна застосувати не тільки для двофазного D -середовища, але і для численних окремих випадків багатофазних середовищ і середовищ з плавною залежністю локальної провідності від координат. Для цього багатоточкова функція розподілу локальної провідності має бути парною функцією від змінних:

$$\chi(x, y) = \ln \sigma(x, y) - \langle \ln \sigma(x, y) \rangle. \quad (6.1.27)$$

Тепер константа Λ у перетвореннях симетрії (6.1.1) має вигляд $\Lambda = \exp(\langle \ln \sigma \rangle)$, при цьому закон Ома в основному середовищі з провідністю $\sigma(x, y) = \exp(\langle \ln \sigma \rangle + \chi)$:

$$j = e^{\langle \ln \sigma \rangle + \chi}. \quad (6.1.28)$$

Замінюючи в (6.1.28) $\chi \rightarrow -\chi$ і використовуючи парність функції розподілу локальної провідності, знаходимо, що дуальне середовище макроскопічно еквівалентне основному, тобто воно самодуальне. Застосовуючи усереднені перетворення симетрії (6.1.7) з

$$\Lambda = \exp(\langle \ln \sigma \rangle), \quad (6.1.28)$$

знаходимо, що $\sigma_e = \Lambda$, тобто

$$\sigma_e = e^{\langle \ln \sigma \rangle}. \quad (6.1.30)$$

Приклади розподілів локальної провідності, парних по χ показані на Рис.6.6.

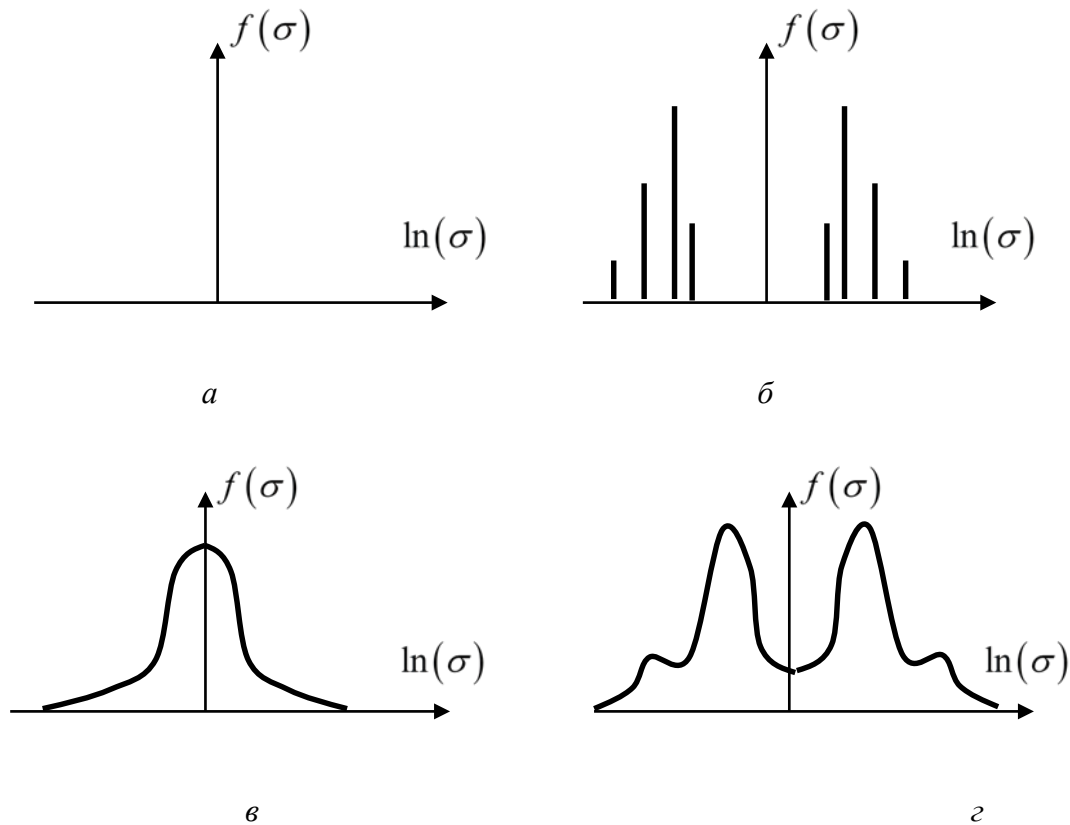


Рис. 6.6. Приклади функцій розподілу локальної провідності самодуальних середовищ :
 a – двофазне середовище провідностями фаз σ_1 і σ_2 ; $б$ – восьмифазне середовище з
 провідностями $\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_8$; $в, г$ – приклади неперервного розподілу фаз

У частковому двофазному випадку маємо

$$f(\sigma) = p\delta(\sigma - \sigma_1) + (1-p)\delta(\sigma - \sigma_2), \quad p = 1/2, \quad (6.1.31)$$

та (див. Рис.6.6, a) у логарифмічних осях піки δ -функцій симетричні щодо $\ln \sigma_e$. Аналогічна симетрія спостерігається і для багатофазного випадку (див. Рис.6.6, $б$) причому задля кожної пари фаз виконується співвідношення типу $\ln \sigma_1 - \ln \sigma_e = \ln \sigma_e - \ln \sigma_5$.

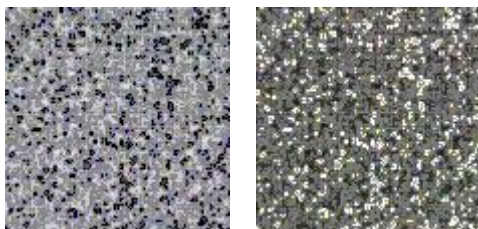


Рис. 6.7. Приклад само дуального середовища з неперервним розподілом локальної провідності.
 a – основне середовище (позитив), $б$ – дуальне йому (негатив).

При неперервному розподілі локальної провідності самодуальне середовище легко уявити собі як середовище, яке не відрізнятиметься (в середньому) від основного у разі, якщо в основному середовищі (позитив) величині локальної

провідності зіставити інтенсивність «чорного» кольору, тоді дуальне йому середовище буде негативом (Рис. 6.7).

Для розподілу Гауса (див. Рис. 6.6,в) із середньоквадратичною флуктуацією логарифму провідності $\Delta = \sqrt{\langle \chi^2 \rangle}$ ефективна провідність згідно (6.1.30) може бути записана так:

$$\sigma_e = \langle \sigma \rangle e^{-\Delta/2}. \quad (6.1.32)$$

Процедуру перемішування (Рис. 6.4), яка у двовимірному двофазовому випадку призводить до σ_e самодуальних середовищ, можна поширити на n -фазні та тривимірні середовища, які вже не будуть, однак, самодуальними.

6. 2. Локально анізотропні середовища

Розглянемо двовимірний полікристал, локальна провідність якого в площині XOY в даній точці $\mathbf{r}$ описується тензором $\hat{\sigma}(\varphi(\mathbf{r}))$, де

$$\hat{\sigma}(\varphi(\mathbf{r})) = \hat{P}_\varphi \hat{\sigma} \hat{P}_{-\varphi}, \quad (6.2.1)$$

Тут $\hat{P}_\varphi$ — оператор повороту на кут φ у площині xoy , $\hat{\sigma}$ - тензор провідності в кристалографічній системі координат, кут φ , таким чином, задає напрямок головних кристалографічних осей в даній системі. За допомогою перетворень Діхне, записаних тут у дещо іншій формі:

$$\tilde{\mathbf{j}} = \Lambda \hat{P}_{\pi/2} \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \Lambda^{-1} \hat{P}_{\pi/2} \tilde{\mathbf{j}}, \quad (6.2.2)$$

перейдемо від закону Ома для основного середовища:

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma}(\varphi) \mathbf{E}, \quad (6.2.3)$$

до закону Ома для дуального середовища:

$$\tilde{\mathbf{j}} = \hat{\tilde{\sigma}}(\varphi) \tilde{\mathbf{E}}, \quad (6.2.4)$$

де

$$\hat{\tilde{\sigma}} = \Lambda^2 \hat{P}_{\pi/2} \hat{\sigma}^{-1} \hat{P}_{-\pi/2} \quad (6.2.5)$$

є локальним тензором провідності у дуальному середовищі.

Скориставшись тотожністю

$$\hat{P}_{\pi/2} \hat{\sigma}^{-1}(\varphi) \hat{P}_{-\pi/2} = \hat{\sigma}(\varphi) / \det \hat{\sigma}(\varphi), \quad (6.2.6)$$

отримаємо

$$\tilde{\hat{\sigma}}(\varphi) = \Lambda^2 \hat{\sigma}(\varphi) / \det \hat{\sigma}(\varphi), \quad (6.2.7)$$

Застосувавши до усереднених законів Ома для основного та дуального середовищ:

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma_e \langle \mathbf{E} \rangle, \langle \tilde{\mathbf{j}} \rangle = \tilde{\sigma}_e \langle \tilde{\mathbf{E}} \rangle \quad (6.2.8)$$

усереднені за об'ємом перетворення (6.2.2), знайдемо зв'язок між ефективними провідностями основного $\hat{\sigma}_e$ та дуального $\tilde{\hat{\sigma}}_e$ середовищ:

$$\tilde{\hat{\sigma}}_e = \Lambda^2 \hat{\sigma}_e / \det \hat{\sigma}_e. \quad (6.2.9)$$

Тепер розглянемо випадок для такого полікристалічного середовища, в якому $\det \hat{\sigma}(\varphi)$ не залежить від координат. Вибираючи константу Λ рівною

$$\Lambda^2 = \det \hat{\sigma}(\varphi), \quad (6.2.10)$$

з (6.2.7) знаходимо, що основне та дуальне середовища тотожні:

$$\tilde{\hat{\sigma}}(\varphi) = \hat{\sigma}(\varphi). \quad (6.2.11)$$

Отже, і їх ефективні значення теж однакові:

$$\tilde{\hat{\sigma}}_e = \hat{\sigma}_e, \quad (6.2.12)$$

що призводить до точного (застосовуваного для будь-якої великої анізотропії) співвідношенню для детермінанта ефективної провідності такого полікристалічного середовища:

$$\det \hat{\sigma}_e = \det \hat{\sigma}(\varphi) = \det \hat{\sigma}. \quad (6.2.13)$$

Якщо кристали розташовані у полікристалі так, що середовище в цілому ізотропне, тобто ефективна провідність – скаляр, то з (6.2.13) випливає вираз:

$$\sigma_e = \sqrt{\det \hat{\sigma}}. \quad (6.2.14)$$

Найпростішим прикладом такого полікристалу є полікристал, що складається з однакових монокристалів з хаотичним розкидом по кутах осей локального тензора провідності:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{\parallel} & 0 \\ 0 & \sigma_{\perp} \end{pmatrix}, \quad (6.2.15)$$

де $\sigma_{\parallel}$ і $\sigma_{\perp}$ – основні значення локального тензора провідності, які не залежать від координат.

В цьому випадку з виразу (6.2.14) отримуємо

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_{\parallel} \sigma_{\perp}}. \quad (6.2.16)$$

Формулу (6.2.16) можна отримати «на пальцях» на підставі точного розв’язку для двофазного D -середовища. Для цього уявімо, що кожен кристаліт з тензором провідності (6.2.15) це граничний випадок двофазного плоскошарового середовища зі значеннями провідностей шарів σ_1 та σ_2 , а також рівною концентрацією фаз (Рис.6.8).

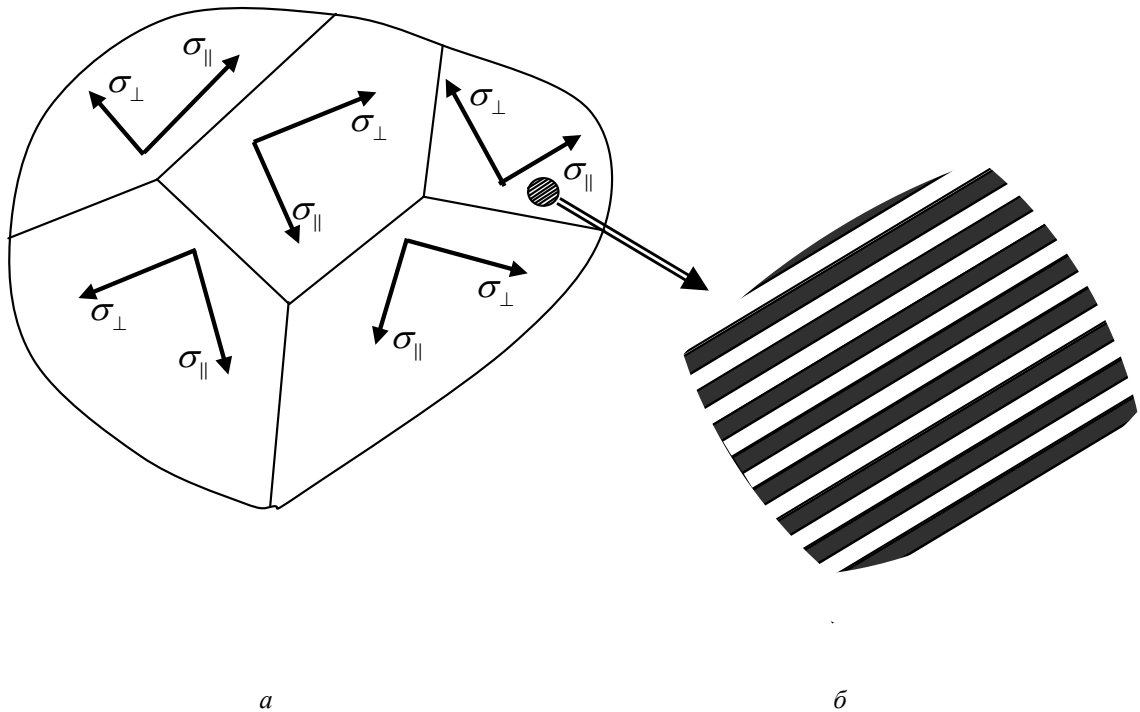


Рис. 6.8. Структура полікристалу як граничний випадок плоскошарових середовищ :
 a – полікристал: стрілками показано напрямки головних осей тензора провідності кристалітів ; b –
«мікроструктура» кристаліта – двофазне плоскошарове середовище.

Для такого двофазного середовища, що має специфічну структуру, виконуються всі умови, потрібні для того, щоб бути D -середовищем (середовище в середньому ізотропне, концентрація фаз дорівнює $p = (1 - p) = 0.5$ і взаємна заміна $\sigma_1 \rightleftharpoons \sigma_2$ не змінює значення ефективної провідності) і, отже, з одного боку,

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}, \quad (6.2.17)$$

з іншого – для $\sigma_{\parallel}$ і $\sigma_{\perp}$ такого плоскошарового середовища виконується рівність

$$\sigma_{\parallel}\sigma_{\perp} = \sigma_1\sigma_2, \quad (6.2.18)$$

звідки при підстановці (6.2.18) в (6.2.17) слідує вираз Діхне для ефективної провідності двовимірного полікристалу (6.2.16).

Вираз (6.2.16) для ефективної провідності справедливий за будь-якої сильної анізотропії. При цьому, як видно з (6.2.16), «хороша» $\sigma_{\parallel}$ та «погана» $\sigma_{\perp} \ll \sigma_{\parallel}$ провідності входять у σ_e рівні. Нетривіальність поведінки σ_e при $\sigma_{\parallel} \gg \sigma_{\perp}$ полягає в тому, що хоча при протіканні через полікристал, здавалося б, струм повинен уникати напрямків з поганою провідністю $\sigma_{\perp}$, насправді, він протікає не тільки вздовж «легких» напрямків ($\sigma_{\parallel}$), але і вздовж «важких» ($\sigma_{\perp}$), при цьому вздовж обох напрямків набирається однаковий опір.

Аналогічна ситуація в двофазному ізотропному сильно неоднорідному D -середовищі ($\sigma_e = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}$) (струму на погано провідній фазі здійснюється такий же опір як і на добре провідній) пов'язана з наявністю D -точок. Як зазначалося вище, саме поведінка струму

поблизу D -точок визначає (при $\sigma_1 \gg \sigma_2$) опір всього середовища. Особливий геометричний елемент структури існує у полікристалічному середовищі.

Причина «рівноправності» $\sigma_{\parallel}$ і $\sigma_{\perp}$ полягає в існуванні так званих пасток струму. При попаданні лінії струму в область поблизу вершини трьох кристалітів, в яких напрямки з хорошою провідністю $\sigma_{\parallel}$ перетинають межі, що сходяться, лінія хорошої провідності, а з нею і лінія струму ($\sigma_{\parallel} \gg \sigma_{\perp}$) «закрутуються» навколо даної вершини (Рис. 6.9).

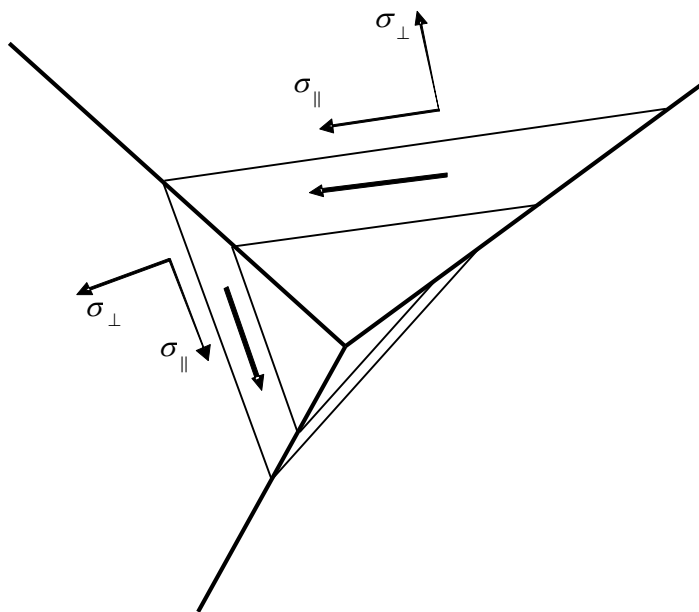


Рис. 6.9. Лінії хорошої провідності (вздовж $\sigma_{\parallel}$) поблизу вершини трьох кристалітів: жирними стрілками показано напрямки струму

Перетин захоплення пастки порядку розмірів кристала, і ймовірність того, що лінії хорошої провідності можуть пройти полікристал, минаючи всі пастки, експоненційно мала.

Навпаки навколо вершини слідом за лінією хорошої провідності джгут струму, стискатиметься (Рис. 6.9). Густина струму при цьому зростає, відповідно зростає і опір на одиницю довжини джгута вздовж лінії хорошої провідності. Зрештою, цей опір стане настільки великим, що струму буде «вигідно» перейти впоперек лінії хорошої провідності та

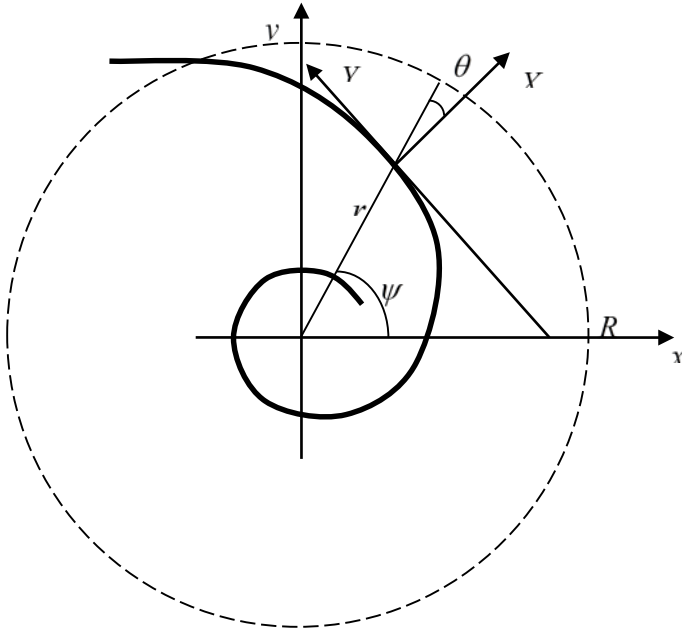


Рис. 6.10. Модель струмової пастки– квазікристалографічне середовище з осями у вигляді логарифмічної спіралі: жирною лінією показана одна з квазікристалографічних осей, кут θ – параметр спіралі.

«розкрутитися» у зворотному напрямку по сусідній лінії хорошої провідності. Опір пастки R оцінювалося за допомогою варіаційного принципу, $R \sim 1/\sqrt{\sigma_{\parallel}\sigma_{\perp}}$.

Хорошою моделлю пастки може бути квазікристалографічне середовище, з осями, що йдуть по логарифмічній спіралі (Рис. 6.10). Якщо у власних кристалографічних осях $\{X, Y\}$ (Рис. 6.10) тензор провідності має вигляд (6.2.5), то у лабораторній полярній системі $\{r, \psi\}$

його компоненти такі:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_{\parallel} \cos^2 \theta + \sigma_{\perp} \sin^2 \theta, \quad \sigma_{r\psi} = \sigma_{\psi r} = (\sigma_{\perp} - \sigma_{\parallel}) \cos \theta \sin \theta, \\ \sigma_{\psi\psi} &= \sigma_{\parallel} \sin^2 \theta + \sigma_{\perp} \cos^2 \theta.\end{aligned}\tag{6.2.19}$$

Зауважимо, що за такого вибору кристалографічних осей у вигляді логарифмічної спіралі компоненти тензора локальної провідності (6.2.19) не залежать від координат і тому рівняння для потенціалу $\varphi(r, \psi)$ $\text{div}(\hat{\sigma} \text{grad} \varphi) = 0$ має простий вигляд:

$$\sigma_{rr} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + 2\sigma_{r\psi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \psi} + \frac{1}{r} \sigma_{\psi\psi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} = 0.\tag{6.2.20}$$

Вибираючи його розв'язок у вигляді

$$\varphi(r, \psi) = Ar^{\alpha} e^{i\psi},\tag{6.2.21}$$

для α маємо

$$\alpha = \omega - i\gamma, \quad \omega = \sqrt{\sigma_{\parallel}\sigma_{\perp}}/\sigma_{rr}.\tag{6.2.22}$$

Таким чином,

$$\varphi(r, \psi) = Ar^{\omega} \cos(\psi - \gamma \ln r). \quad (6.2.23)$$

Оскільки при сильній анізотропії основний опір набирається поблизу центру пастки, на деякій відстані радіуса R від неї можна замінити локально анізотропне середовище на ізотропне з ефективною провідністю σ_e , вимагаючи виконання стандартних умов на межі, які випливають із рівняння неперервності ($\text{div} \mathbf{j} = 0$) та потенційності поля:

$$j_r(r=R) = j_r^+(r=R), \quad \varphi(r=R) = \varphi^+(r=R), \quad (6.2.24)$$

де індекс « + » позначає зовнішню задачу в області $r > R$.

Розв'язок у зовнішній області виберемо у вигляді

$$\varphi^+(r, \psi) = Br \cos(\psi - \theta). \quad (6.2.25)$$

Записуючи вирази для густини струму $j_r = \sigma_{rr} E_r + \sigma_{r\psi} E_{\psi}$ у внутрішній та зовнішній областях:

$$j_r = Ar^{\omega-1} \sigma_{rr} \omega \cos(\psi - \gamma \ln r), \quad j_r^+ = \sigma^e B \cos(\psi - \theta) \quad (6.2.26)$$

та задовольняючи граничним умовам (6.2.24), для ефективною провідності, як і має бути, отримуємо $\sigma^e = \omega \sigma_{rr} = \sqrt{\sigma_{\parallel} \sigma_{\perp}}$.

Можливі різні узагальнення, наприклад, таке двовимірне анізотропне середовище, в якому напрямок головних осей тензора локальної провідності $\hat{\sigma}(r)$ не залежить від координат, тобто при будь-якому r маємо

$$\hat{\sigma}(r) = \begin{pmatrix} \sigma_{\parallel}(r) & 0 \\ 0 & \sigma_{\perp}(r) \end{pmatrix}. \quad (6.2.27)$$

Для двофазного випадку: $\hat{\sigma}(r) = \hat{\sigma}_1(r)$ – у першій фазі та $\hat{\sigma}(r) = \hat{\sigma}_2(r)$ – у другій фазі, з концентрацією першої фази рівної p , можна записати наступні співвідношення взаємності:

$$\sigma_{\parallel}^e(p; \sigma_{\parallel 1}, \sigma_{\perp 1}; \sigma_{\parallel 2}, \sigma_{\perp 2}) \sigma_{\perp}^e \left(p; \sigma_{\parallel 1}, \sigma_{\perp 2}; \frac{\sigma_{\parallel 1} \sigma_{\perp 1}}{\sigma_{\parallel 2}}, \frac{\sigma_{\parallel 2} \sigma_{\perp 2}}{\sigma_{\perp 1}} \right) = \sigma_{\parallel 1} \sigma_{\perp 1}, \quad (6.2.28)$$

$$\sigma_{\perp}^e(p; \sigma_{\parallel 1}, \sigma_{\perp 1}; \sigma_{\parallel 2}, \sigma_{\perp 2}) \sigma_{\parallel}^e\left(p; \sigma_{\parallel 1}, \sigma_{\perp 1}; \frac{\sigma_{\parallel 1} \sigma_{\perp 1}}{\sigma_{\parallel 2}}, \frac{\sigma_{\parallel 2} \sigma_{\perp 2}}{\sigma_{\perp 2}}\right) = \sigma_{\parallel 1} \sigma_{\perp 1}.$$

Якщо розподіл анізотропних фаз геометрично ізотропний, то

$$\begin{aligned} \sigma_{\parallel}^e(p; \sigma_{\parallel 1}, \sigma_{\perp 1}; \sigma_{\parallel 2}, \sigma_{\perp 2}) &= \sigma_{\parallel}^e(p; \sigma_{\perp 1}, \sigma_{\parallel 1}; \sigma_{\perp 2}, \sigma_{\parallel 2}), \\ \sigma_{\perp}^e(p; \sigma_{\parallel 1}, \sigma_{\perp 1}; \sigma_{\parallel 2}, \sigma_{\perp 2}) &= \sigma_{\parallel}^e(p; \sigma_{\perp 1}, \sigma_{\parallel 1}; \sigma_{\perp 2}, \sigma_{\parallel 2}), \end{aligned} \quad (6.2.29)$$

а для випадково неоднорідного середовища

$$\sigma_{\parallel, \perp}^e(p; \sigma_{\parallel 1}, \sigma_{\perp 1}; \sigma_{\parallel 2}, \sigma_{\perp 2}) = \sigma_{\perp}^e(1-p; \sigma_{\parallel 2}, \sigma_{\perp 2}; \sigma_{\parallel 1}, \sigma_{\perp 1}). \quad (6.2.30)$$

Розглянемо тепер полікристал, що складається з двох типів монокристалів $\hat{\sigma}_1$ і $\hat{\sigma}_2$ таких, що

$$\hat{\sigma}_2 = \alpha \hat{\sigma}_1, \quad \alpha = \text{const}, \quad (6.2.31)$$

тоді при взаємно-дуальній геометрії їх розташування та рівній концентрації ($p = 1/2$)

$$\det \hat{\sigma}_e = \sqrt{\det \hat{\sigma}_1 \det \hat{\sigma}_2} = \sqrt{\alpha} \det \hat{\sigma}_1. \quad (6.2.32)$$

При $p \neq 1/2$ виконується співвідношення взаємності:

$$\hat{\sigma}_e(1-p) \det \hat{\sigma}_e(p) = \hat{\sigma}_e(p) \sqrt{\det \hat{\sigma}_1 \det \hat{\sigma}_2}. \quad (6.2.33)$$

Для неперервного розподілу, коли $\sigma_{\parallel}(r)$ і $\sigma_{\perp}(r)$ – випадкові скалярні поля, що мають однакові багаточленні функції розподілу, парні по χ .

$$\chi = (\ln \sigma_{\parallel} - \langle \ln \sigma_{\parallel} \rangle, \ln \sigma_{\perp} - \langle \ln \sigma_{\perp} \rangle), \quad (6.2.34)$$

можливе узагальнення вираження Дихне

$$\det \hat{\sigma}_e = e^{2\langle \ln \sigma_{\parallel} \rangle} = e^{2\langle \ln \sigma_{\perp} \rangle}. \quad (6.2.35)$$

Якщо ж поля $\sigma_{\parallel}(r)$ і $\sigma_{\perp}(r)$ незкорельовані, то тензор ефективної провідності вироджується в скаляр:

$$\sigma_e = e^{\langle \ln \sigma_{\parallel} \rangle} = e^{\langle \ln \sigma_{\perp} \rangle}. \quad (6.2.36)$$

Контрольні запитання

1. Що мається на увазі під терміном – точна ефективна провідність?

2. Чим відрізняється самодуальне середовище від «звичайного» неоднорідного середовища?
3. Які дві основні властивості самодуальних середовищ?
4. Наведіть приклади самодуальних структур.
5. Як визначається поняття "дуальної структури"?
6. Яке співвідношення між ефективною провідністю вихідної та дуальної структур?

Розділ 7. Континуальна перколяційна задача

7.1. Типи континуальних перколяційних задач

Досі ми розглядали перколяційні задачі, які логічно було звести до вирішення сіткових задач, тобто двофазне середовище моделювалось сіткою опорів r_1 і r_2 . З одного боку, це означає, що існує певний характерний лінійний розмір a_0 сітки, з іншого – що з розрахунку повного опору, спектральної густини $1/f$ -шуму і т. п. форма опорів не важлива, важливий лише номінал опорів. Іншими словами, у всіх опорах просторовий розподіл струму однорідний. Зокрема, це означає, що опір такої важливої деталі перколяційної провідної структури, як місток (див. розділ 5) – це просто сума однакових опорів r_1 , що складають цей місток. Однак можливий інший випадок, коли в задачі відсутній мінімальний розмір, і тоді форма включень даної фази стає істотною. Одним з таких важливих випадків є Swiss–Cheese-середовища, найпростішим прикладом яких є середовище, що є провідною матрицею (σ_1) з непровідними ($\sigma_2 = 0$) сферичними включеннями, тобто пористе середовище. При близькій до граничного значення концентрації включень струму доводиться протікати через звуження, що утворюються непровідними середовищами (Рис. 7.1.).

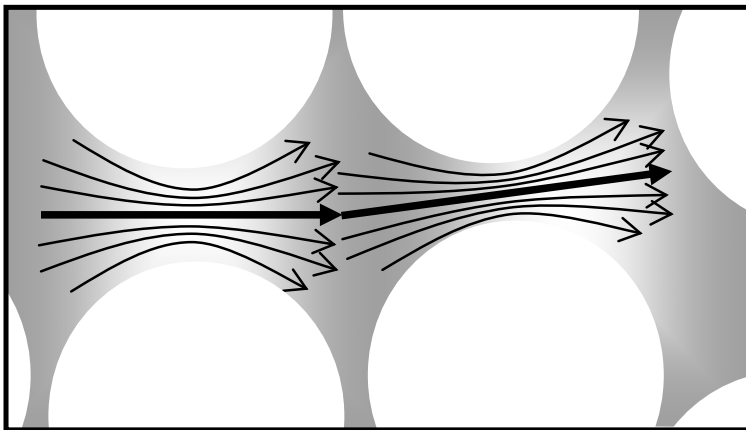


Рис. 7.1. Звуження (шийки) у протікальній структурі, на яких може спостерігатися основне падіння напруги. Для простоти зображено двовимірний випадок.

Протікання струму в таких середовищах може відрізнятися від протікання струму, що описується стандартною сітковою моделлю. Як видно із Рис. 7.1, у різних місцях розмір звуження може бути різним, у т. ч. як завгодно малим, при цьому лінії струму звужуються в області шийки і опір цього звуження істотно залежить від розміру δ , який, на відміну від a_0 , не фіксований, для різних

звужень різний і не має характерного (мінімального) значення.

Таким чином, з одного боку, задача про обчислення, наприклад, ефективної провідності σ_e є як і раніше перколяційною і, отже, існують: 1) поріг протікання; 2) дві фази $\sigma_1 \gg \sigma_2$; 3) стандартні елементи перколяційної структури (місток, прошарок), а з іншого –

«елементарний опір» r_1 не є константою, а залежить певним чином від параметра δ : $r = r(\delta)$. Щоб підкреслити подібність та відмінність цих двох завдань – стандартної перколяційної та Swiss-Cheese-задачі, на Рис. 7.2 якісно зображено основний елемент перколяційної структури – місток для цих двох задач.

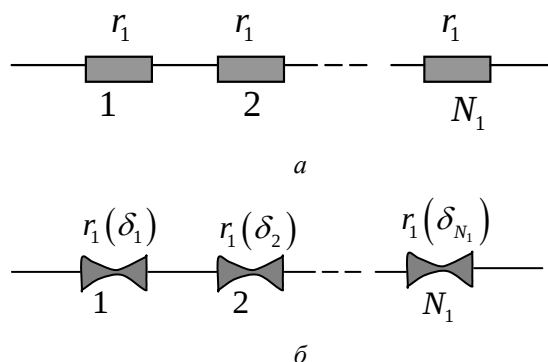


Рис. 7.2. Основний елемент протікаючої структури - місток: *a* – для стандартної (сіткової) перколяційної задачі, *б* – для Swiss-Cheese-задачі.

Для визначення ефективної провідності у випадку $p > p_c$ необхідно вміти розрахувати опір містка. У стандартній перколяційній задачі для цього достатньо знати кількість опорів r_1 у містку N_1 . У Swiss-Cheese-задачі опір містка залежить не тільки від N_1 , а й від закону, за яким розподілений параметр δ .

Початок дослідження сіткових моделей, але з розподіленими значеннями r_1 (або, що те саме, δ) було покладено в дослідженнях, де

прийнята наступна функція розподілу для локальної провідності δ :

$$D(\delta) = (1 - p)\delta(\sigma) + A p \sigma^{-\alpha}. \quad (7.1.1)$$

Тут α - параметр розподілу.

Задачі, подібні до описаних вище, прийнято називати континуальними. Опишемо три з них:

1) Swiss-Cheese-задачі (див. Рис. 7.1) - порожнечі, що перетинаються ($\sigma_2 = 0$) у неперервному провідному (σ_1) середовищі. Цю задачу ще називають проблемою voids.

2) задача сфер (problem of spheres) або зворотня Swiss-Cheese-задача (inverted Swiss-Cheese problem) – добре провідні сфери, що перетинаються (σ_1) у непровідній матриці ($\sigma_2 = 0$).

3) Ще один тип перколяційно-подібних задач з неперервним розподілом локальної провідності, який буде розглянуто у розділі 8 – провідність середовища з експоненційно широким спектром локальної провідності.

Зазначимо лише, що кореляційна довжина, як і раніше, як і у звичайній сітковій задачі, визначається стандартним критичним індексом ν .

7.2. Середовища типу Swiss-Cheese

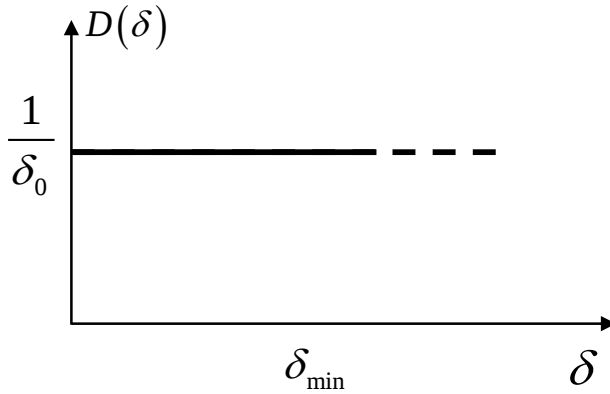


Рис. 7.3. Розподіл параметра δ у випадку, коли δ набагато менше радіусу порожнин, $\delta \ll a$ (провідність включень яких $\sigma_2 = 0$).

Покажемо як обчислюється ефективна провідність σ_e у Swiss-Cheese-моделі. Робиться припущення про те, що при $\delta \ll a$, де a – радіус порожнин, розподіл є рівномірним – див. Рис. 7.3. При цьому для кожного значення $\tau = (p - p_c)/p_c$ існує деяке своє $\delta_{\min}$ (звичайно, не рівне нулю, так як $p > p_c$). Опір шийки складної форми (для тривимірного випадку ця форма наведена на Рис. 7.4) знаходиться за допомогою заміни цієї форми на

просту - паралелепіпед, що має ту ж залежність від δ :

$$r \sim \delta^{-(1+y)}, g_i = \frac{1}{r_i}, y = \frac{\alpha}{1-\alpha}. \quad (7.2.1)$$

Тут параметр y визначається з якісних міркувань і може бути отриманий з розв'язку крайової задачі математичної фізики. Так, для тривимірного випадку маємо

$$g \sim \delta^{3/2}, y = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{1}{3}, \quad (7.2.2)$$

для двовимірного

$$g \sim \delta^{1/2}, y = -\frac{1}{2}, \alpha = -1. \quad (7.2.3)$$

За визначенням, місток завжди містить максимальний з усіх можливих опір, тому значення його опору виражаються через r і $D(\delta)$ наступним чином:

$$R_1 = r(\delta_{\min}) + N_1 \int_{\delta_{\min}} r(\delta) D(\delta) d\delta + N_1 r_1 \approx r_1 \left(\delta_{\min}^{-(1+y)} + N_1 \delta_{\min}^{-y} \right) + N_1 r_1. \quad (7.2.4)$$

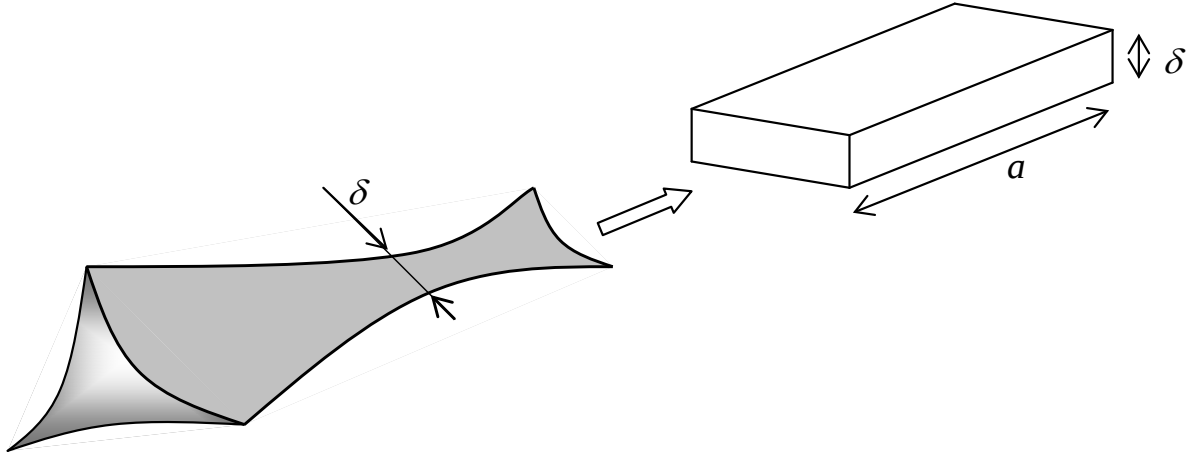


Рис. 7.4. Вид шийки у тривимірному випадку та її апроксимація.

Останній доданок в (7.2.4) – стандартний перколяційний доданок, що існує завжди (при великих δ , коли форма шийки не істотна). Цей доданок буде відігравати свою роль, якщо включений в місток опір $r_{\max} \sim 1/\delta_{\min}$ дасть менший внесок у опір містка, ніж сума інших опорів $N_1 r_1$.

Мінімальний розмір $\delta_{\min}$ (для цього значення τ) визначається з таких міркувань: ймовірність того, що в містку немає опору більше, ніж $r_{\max}$ (тобто немає δ менших $\delta_{\min}$) може бути записана у вигляді

$$\left(1 - \int_0^{\delta_{\min}} D(\delta) d\delta \right)^{N_1} \sim e^{-\frac{\delta_{\min}}{\delta_0} N_1}, \quad (7.2.5)$$

де враховано, що $1 / \int_0^{\delta_{\min}} D(\delta) d\delta \rightarrow \infty$ при $\delta_{\min} \rightarrow 0$.

Оскільки ця ймовірність не повинна залежати від τ , то маємо

$$\frac{\delta_{\min}}{\delta_0} N_1 \sim \tau^0, \quad (7.2.6)$$

звідки й випливає, що

$$\delta_{\min} \sim N_1^{-1}. \quad (7.2.7)$$

Таким чином, чим більше N_1 , тобто чим ближче система до порога протікання, тим менше $\delta_{\min}$ і більше $r_{\max}$ буде включено до містка. Величина δ_0 не впливає результати обчислень.

Підставляючи $\delta_{\min}$ з (7.2.7) у вираз для R_1 (7.2.4), отримуємо

$$R_1 \sim r_1 \left(N_1^{1+y} + N_1 \right) = r_1 N_1 \left(N_1^y + 1 \right). \quad (7.2.8)$$

Переходячи тепер від опору містка R_1 до питомого ефективного опору $\rho_e = R_1 N_1^{\nu(d-2)}$, знаходимо (всі розрахунки відбуваються у рамках NLB-моделі):

$$\rho_e \approx R_1 N_1^{1+\nu(d-2)} \left(N_1^y + 1 \right), \quad (7.2.9)$$

та враховуючи, що в рамках NLB-моделі $N_1 \sim \tau^{-1}$ і $t = 1 + \nu(d-2)$, з (7.2.9) маємо

$$\rho_e \approx \rho_1 |\tau|^{-(t+y)} + \rho_1 |\tau|^{-t}. \quad (7.2.10)$$

Останній вираз справедливий поблизу порога протікання, тобто при $\tau \rightarrow 0$, тому залежно від значення y у ньому «переможе» той чи інший доданок. У тривимірному випадку, при $y = 1/2$ перший доданок значно більший за другий, тому критичний індекс ефективної провідності в Swiss-Cheese-задачі $\bar{t}_3$ має вигляд

$$\bar{t}_3 = t_3 + y, \quad (7.2.11)$$

а у двовимірному, оскільки $y = -1/2$, «переможе» другий доданок, маємо

$$\bar{t}_2 = t_2. \quad (7.2.12)$$

Ефективна провідність зворотної Swiss-Cheese-задачі знаходиться аналогічно. Якщо у Swiss-Cheese-моделі перенормування критичного індексу t було пов'язана з тим, що лініям струму доводилося проходити через звуження, яке було названо шийкою (див. Рис. 7.1 та Рис. 7.4), то тепер лінії струму проходять через звуження (див. Рис. 7.5), яке прийнято називати шийкою (bottleneck). У двовимірному і в тривимірному випадку параметр $y < 0$: $y_2 = -1$, $y_3 = -1/2$ і тому критичний індекс провідності в інверсній Swiss-Cheese-задачі не відрізняється від такого в сітковій задачі.

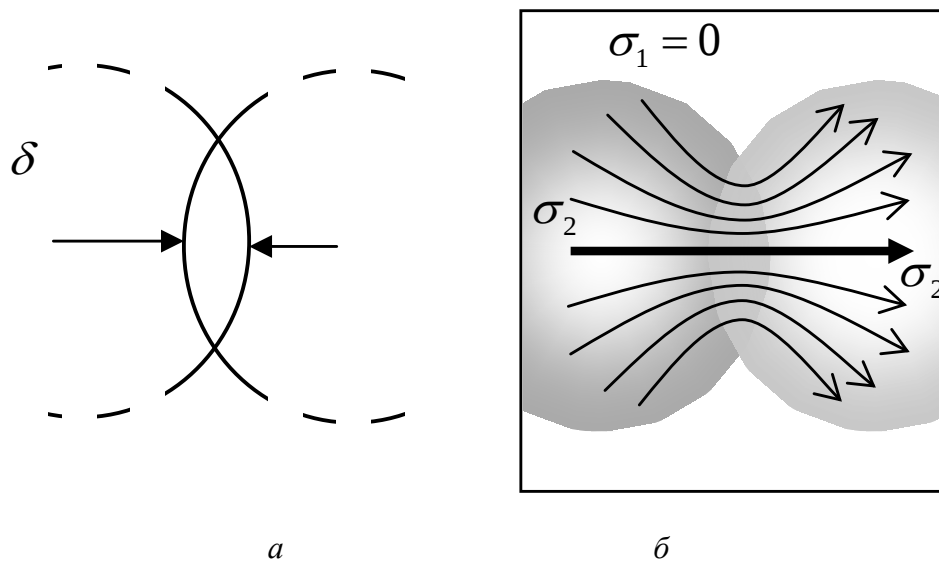


Рис. 7.5. Схема інверсної Swiss-Cheese-задачі:
 а– геометричні параметри звуження; б – якісний вид ліній струму звуження. Концентрація провідної (σ_1) фази вище за поріг протікання.

Аналогічно Swiss-Cheese та зворотній Swiss-Cheese задачам, які описують континуальну перколяційну задачу вище порога протікання, можна розглянути задачі і нижче порога протікання. Схематично всі чотири континуальні завдання наведено на Рис. 7.6. Елементи, на яких відбувається основне падіння напруги - місток (Рис. 7.6, а, б) та прошарок (Рис. 7.6, в, г)

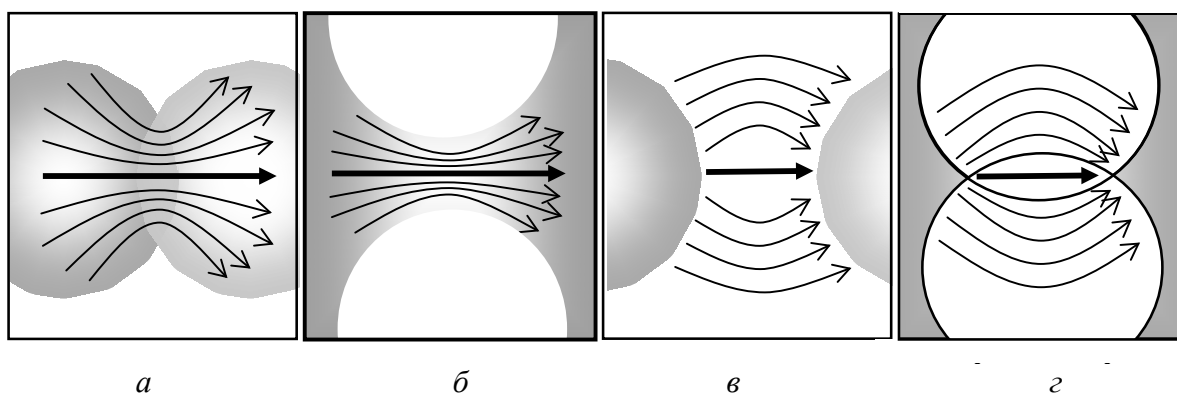


Рис.7.6. Схема чотирьох можливих континуальних Swiss-Cheese-задач:
 а- Swiss-Cheese-модель ($\sigma_2 = 0$); б - зворотна Swiss-Cheese- ($\sigma_2 = 0$); в і г - перколяційна система нижче за поріг протікання ($1/\sigma_1 = 0$). Темним кольором пофарбована фаза, що має провідність σ_1

Ще один вид континуальної задачі протікання, близький до Swiss-Cheese, названий Blue-Cheese. Форма непровідних включень ($\sigma_2 = 0$) у цій задачі дуже відрізняється від сферичної в Swiss-Cheese – один із розмірів включень вважається рівним нулю (Рис. 7.7).

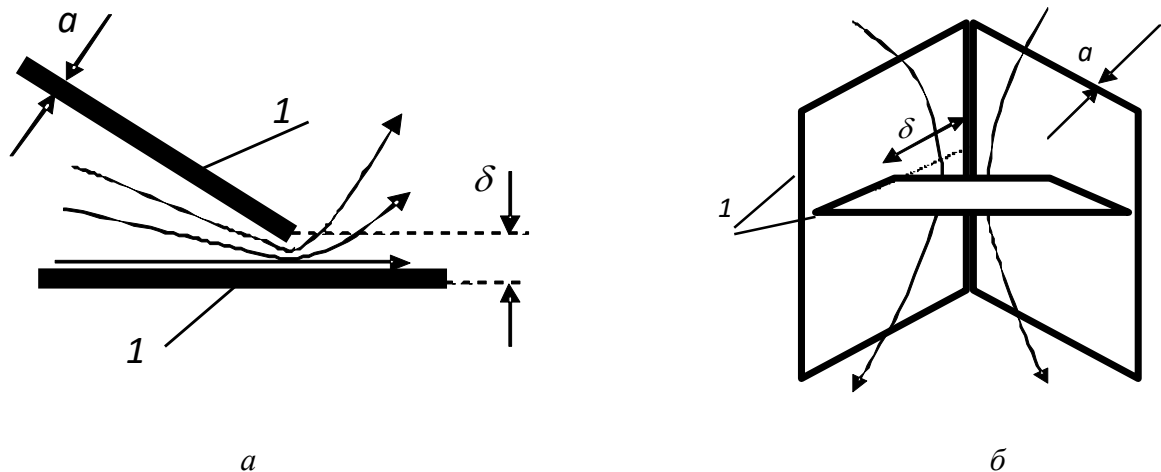


Рис. 7.7. Модель звуження в задачі Blue-Cheese: 1- непровідні включення, $a \ll \delta$: а - двовимірний випадок, б - тривимірний випадок.

Задача Blue-Cheese є гарною моделлю тріщинуватих середовищ і дозволяє визначити критичну поведінку та критичні індекси ефективної провідності, пружності тощо. у таких середовищах. Критичні індекси ефективної провідності в Blue-Cheese задачі для двовимірного випадку не відрізняються від сіткових, а в тривимірному відрізняється логарифмічно. Однак для інших задач (пружності, $1/f$ -Шуму) ці індекси різняться.

Моделі Swiss-Cheese та зворотна Swiss-Cheese були узагальнені на випадок складніших (але так само опуклих) поверхонь включень.

Для композиту, що складається з провідних кульок (кульки з шндія з діаметром приблизно $20\mu m$) у скляній матриці для критичного індексу провідності було отримано $\bar{t}_3 \approx 3,1 \pm 0,3$, що узгоджується з теоретичним значенням $\bar{t}_3 \approx t + 1/2 \approx 2 + 0,5 = 2,5$. Було зроблено експеримент із металевою пластиною, в якій висвердлені отвори. Як і передбачає теорія, для двовимірного випадку отриманий критичний індекс $\bar{t}_2 \approx 1,24 \pm 0,13$ збігається із сітковим.

Контрольні запитання

1. Якими є основні відмінності континуальних перколяційних завдань від сіткових?
2. Які основні типи континуальних перколяційних задач?

Розділ 8. Середовища з експоненційно широким спектром локальних властивостей

8.1. Постановка задачі та наближене обчислення ефективної провідності

Вище були розглянуті перколяційні середовища, які можна представити у вигляді сітки випадково розкиданих опорів, що сильно відрізняються. $r_2 \gg r_1$, причому концентрація p , меншого з опорів (r_1), близька до порогової – p_c . Функція розподілу $f(r)$ у тому випадку, коли всього два типи опорів: «металеві» – r_1 та «діелектричні» – r_2 має вигляд

$$f(r) = p\delta(r - r_1) + (1 - p)\delta(r - r_2). \quad (8.1.1)$$

Не менш цікава і важлива задача про обчислення ефективної провідності середовищ, коли спектр значень опорів неперервний при збереженні сильної неоднорідності, тобто найгірші ($r_{\max}$) з усіх можливих опорів трохи більше за «хороші» ($r_{\min}$), $r_{\max} \gg r_{\min}$. Одним із прикладів такого розподілу є експоненційно широкий розподіл, коли

$$r = r_0 e^{-\lambda x}, \quad \lambda \gg 1. \quad (8.1.2)$$

Тут x – випадкова змінна, що лежить в інтервалі $(0,1)$ і має гладку функцію розподілу $D(x)$. У найпростішому випадку $D(x)$ – це рівномірний розподіл,

$$D(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x < 0, x > 1. \end{cases} \quad (8.1.3)$$

Функція розподілу опорів $f(r)$ згідно (8.1.3) у цьому випадку має вигляд

$$f(r) = \frac{1}{\lambda r}, \quad r_0 e^{-\lambda} \leq r \leq r_0. \quad (8.1.4)$$

Задача про обчислення ефективної провідності σ_e такого випадково-неоднорідного середовища з експоненційно широким спектром розподілу опорів має велике значення в різних застосуваннях, зокрема, це один із видів задачі про визначення провідності зразка при стрибковій провідності. Електронна провідність зразка, якщо має місце стрибова провідність, зводиться до обчислення провідності випадкової сітки, кожен вузол якої збігається з одним з донорів, а між парою вузлів включено опір, один з можливих, взятих з (8.1.4). Таку сітку називають сіткою Міллера-Абрахамса.

Опір між вузлами i і j для стрибкової провідності залежить від відстані між вузлами l_{ij} та різниці енергій на рівнях донора ε_{ij} , останнім при порівняно високих температурах можна знехтувати, і тоді

$$r_{ij} \sim e^{\frac{2l_{ij}}{a}}, \quad (8.1.5)$$

Де a – ефективний борівський радіус.

У конкретних випадках слабо легованих напівпровідників опори r_{ij} значно залежать від l_{ij} і можуть у багато разів (у 10^5 і більше) відрізнятись. Можливі ситуації, коли $r_{ij}(2l_{ij})$ відрізняється від $r_{ij}(l_{ij})$ в $10^5 - 10^{10}$ разів.

На перший погляд, задача про визначення σ_e сітки з експоненційно широким спектром опорів не є перколяційною - немає порогу протікання, при досягненні якого одна з фаз утворює нескінченний кластер, тому що немає самих фаз. Існує, однак, прийом, який дозволяє у певному наближенні звести таку задачу до стандартної перколяційної. Щоб показати, як працює цей прийом, проведемо таку побудову. "Виймемо" з сітки Міллера-Абрахамса всі опори, запам'ятавши їх положення і почнемо послідовно "вставляти" їх на свої місця, починаючи процес з найменших ($r_{\min}$) (Рис. 8.1). Усі включені зараз опори вважатимемо «металевою» фазою. При досягненні "металевою" фазою порогової концентрації в системі з'явиться нескінченний кластер - останній включений опір r_c замкне місток. Оскільки при експоненційно широкому спектрі опорів кожний наступний включений опір набагато більший попереднього, опір нескінченного кластера, що утворився практично, з точністю до передекспоненційного множника, визначається останнім включеним опором. Додаток наступних, шунтуючих, опорів вже нічого не змінює, тому що їх значення набагато більше критичного r_c .

Критичний опір r_c легко визначити з наступної умови: він «з'являється» при пороговій концентрації

$$\int_{x_c}^1 D(x) dx = p_c. \quad (8.1.6)$$

Звідки, якщо врахувати (8.1.3), то отримаємо $x_c = 1 - p_c$.

Таким чином, маємо

$$r_c = r_0 e^{-\lambda x_0} = r_0 e^{-\lambda(1-p_c)} \quad (8.1.7)$$

або в термінах питомої провідності:

$$\sigma_e = \sigma_0 e^{\lambda x_c} = \sigma_0 e^{\lambda(1-p_c)}. \quad (8.1.8)$$

8.2. Кореляційна довжина та передекспоненційний множник

Такий підхід - включення послідовно зростаючих опорів - дає гарне наближення для σ_e . Щоправда, при цьому залишається низка невирішених проблем. Перша пов'язана з кореляційною довжиною ξ .

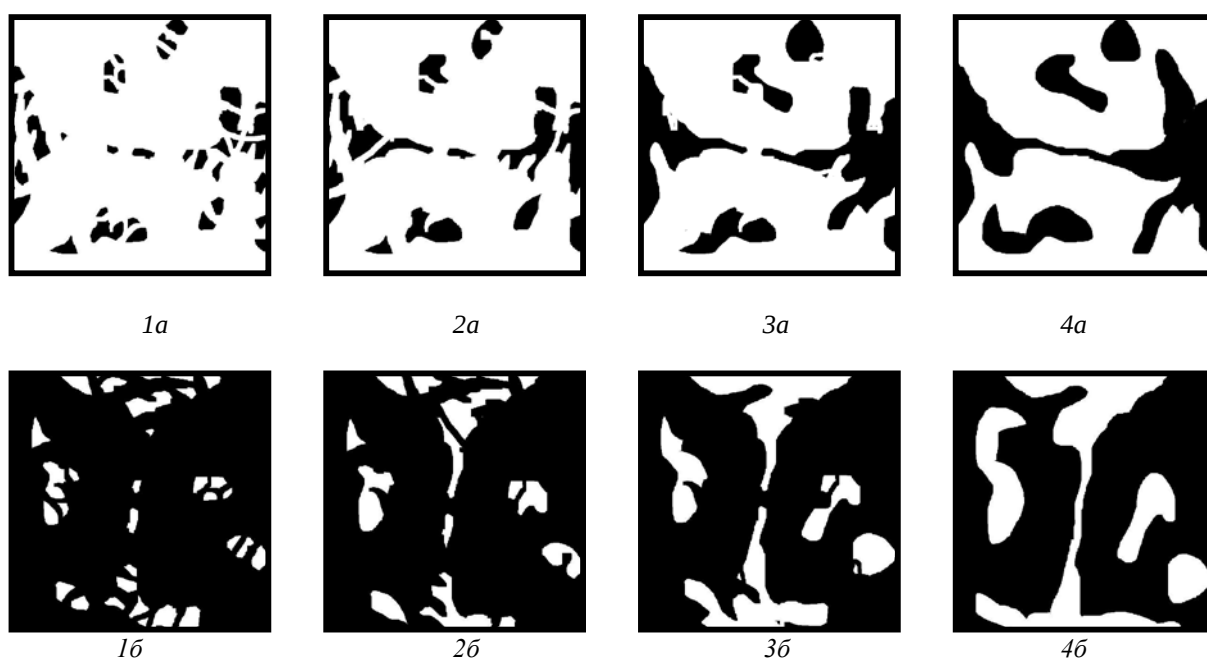


Рис. 8.1. Вид системи при послідовному включенні «металевих» та «діелектричних» включень: 1а...4а- Розташування «металевих» опорів по мірі їх включення, на 4а з'являється місток; 1б...4б – розташування «металевих» опорів по мірі включення «діелектричних» опорів, на 4б з'являється прошарок

На відміну від двофазної системи з $\sigma_2/\sigma_1=0$, для котрої ξ - нескінченна на порозі протікання, кореляційна довжина для системи з експоненційно широким спектром опорів скінченна. Однак не зрозуміло, з яких міркувань можна отримати її значення, так як при підході, що використовується, відсутнє поняття області розмазування. Можливий альтернативний описаному вище спосіб зведення задачі до перколяційної. Запропонований вище спосіб полягав у тому, що на першому етапі (Рис. 8.1.1а) система була повністю непровідною, тобто можна сказати, що практично вся сітка була заповнена нескінченними

опорами, які послідовно замінювалися на $r_{\min} \leq r \leq r_c$. Альтернативний підхід полягає в тому, що спочатку, (Рис. 8.1,1б), практично вся сітка була заповнена нульовими опорами, які послідовно замінюються на $r_c \leq r \leq r_{\max}$, тобто спочатку включаються найбільші. При наближенні концентрації до порогової настає такий момент, що включений опір перекриває канали з нульовим опором, і тоді вся система вже має скінчений опір. Оскільки кожен наступний опір набагато менший за попередній, саме останній включений опір r_c і визначатиме струм у системі. Таким чином, як і за першого підходу $\sigma_e = \sigma_0 e^{\lambda x_c}$. Можна сміливо сказати, що у першому підході замикалася «металева» фаза серед з нескінченним опором, тоді як у другому – «діелектрична» фаза розмикала струм, що протікає в ідеальному провіднику. Обидва підходи дають те саме σ_e , але тільки з точністю до експоненційного множника. Як легко побачити із Рис. 8.1 кінцева перколяційна структура Рис. 8.1,4а та 8.1,4б в обох підходах зовсім різні. І це, звичайно, призводить, як ми покажемо нижче, до різних передекспоненційних множників. Запишемо σ_e у вигляді:

$$\sigma_e = \frac{A}{a_0^{d-2} r(x_c)} \left(\frac{D(x_c)}{\lambda} \right)^y = \frac{A}{a_0^{d-2}} \frac{D(x_c)^y}{r_0} \lambda^{-y} e^{\lambda x_c} \sim \lambda^{-y} e^{\lambda x_c}. \quad (8.2.1)$$

Для визначення критичного індексу розглянемо спочатку **перший підхід**: тобто всі опори $r \leq r(x_c) \leq r_c$ є «металевими», інші мають нескінченний опір. Скористаємося моделями NLB та ІМ, описаними раніше, у розділі 5. Нехай концентрація «металевої» фази p , тоді враховуючи, що

$$\tau = \frac{p - p_c}{p_c}, \quad x = x_c = (1 - x_c) \tau, \quad (8.2.2)$$

можна оцінити чому рівний середній опір, з яких складається місток

$$\langle r \rangle_1 = \int_{x_1}^1 r(x) P_1(x) dx \approx \frac{r(x_1)}{1 - x_1} \lambda^{-1}, \quad x_1 > x_c, \lambda \gg 1, \quad (8.2.3)$$

де $r(x_1)$ — найбільший опір у містку; перенормування розподілу

$$P(x_1) = \frac{D(x)}{\int_{x_1}^1 D(x) dx} \quad (8.2.4)$$

пов'язане з тим, що найбільшим опором містка є $r(x_1)$.

Опір містка, а отже, і всієї системи на кореляційних розмірах має вигляд:

$$R_1 = N_1 \langle r \rangle_1. \quad (8.2.5)$$

Переходячи від опору системи $R = R_1$ до питомої провідності $\sigma_e = 1/R\xi^{d-2}$, для першого підходу знаходимо

$$\sigma_I^e = \frac{1-x_1}{r(x_1)a_0^{d-2}} \tau^{\alpha_1+\nu(d-2)}, \quad (8.2.6)$$

де $\alpha_1 = 1$ в NLB-моделі та $\alpha_1 = \xi_R = t - \nu(d-2)$ в ІМ.

Абсолютно аналогічно знаходимо опір системи у **другому підході**. Середній опір зв'язку в прошарку, якщо всі вони розташовані паралельно, можна оцінити так:

$$\langle 1/r \rangle_2 = \int_0^{x_2} \frac{P_2(x)}{r(x)} dx \approx \frac{1}{\lambda x_2 r(x_2)}, \quad (8.2.7)$$

де (порівняно з (8.2.4)) перенормування розподілу

$$P_2(x) = \frac{D(x)}{\int_0^{x_2} D(x) dx} \quad (8.2.8)$$

пов'язане з тим, що найменшим опором у прошарку є $r(x_2)$.

Опір прошарку, отже, і опір всього кореляційного обсягу має вигляд

$$R_2 = \frac{1}{N_2 \langle 1/r \rangle_2}. \quad (8.2.9)$$

Переходячи до питомої провідності, для другого підходу знаходимо

$$\sigma_{II}^e = \frac{\tau^{-\alpha_2+\nu(d-2)}}{x_2 r(x_2) a_0^{d-2}} \lambda^{-1}. \quad (8.2.10)$$

Порівнюючи значення σ_I^e з (8.2.6) та σ_{II}^e з (8.2.10), бачимо, що навіть якщо прийняти $x_1 = x_2 = x_c$, вони суперечитимуть один одному; залежність від λ (нагадаємо, що $\lambda \gg 1$) буде прямо протилежною: λ^{+1} в σ_I^e і λ^{-1} в σ_{II}^e . Крім того, і в σ_I^e і σ_{II}^e є залежність від близькості до порога протікання τ , яка була введена умовно, вона не є вільним параметром, значення якого можна вибирати за власним бажанням, як це роблять для двофазних середовищ, змінюючи концентрацію однієї з фаз, і не повинна бути в кінцевому виразі для ефективної провідності.

Зазначені протиріччя можна усунути, продовжуючи за аналогією з двофазною системою припускати, що система з експоненційно широким спектром опорів знаходиться в області розмазування. Це тим більш природно, оскільки якщо у двофазних системах у крайніх випадках $\sigma_2 = 0$ або $\sigma_1 = \infty$ величина області розмазування може дорівнювати нулю, то в системах з експоненційно широким спектром опорів відношення локальних провідностей хоча і може бути дуже малим, але завжди скінченне.

Для визначення величини області розмазування Δ , як і у двофазному випадку, прирівнюючи σ_I^e і σ_{II}^e , отримуємо

$$\sigma_I^e(\tau = \Delta) = \sigma_{II}^e(\tau = -\Delta), \quad (8.2.11)$$

та врахуємо, що згідно (8.10)

$$x_1 = x_c + (1 - x_c)\Delta, \quad x_1 = x_c - (1 - x_c)\Delta. \quad (8.2.12)$$

Підставляючи тепер (8.2.6), (8.2.10) і (8.2.12) (8.2.11), знаходимо рівняння для визначення величини області розмазування:

$$e^{-2(1-x_c)\Delta\lambda} = [x_c - (1 - x_c)\Delta][1 - x_c - (1 - x_c)\Delta]\Delta^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot \lambda^2. \quad (8.2.13)$$

Як показує числовий розв'язок (8.2.13) за $\alpha_1 = \xi_R$ і $\alpha_2 = \xi_G$ при $10^2 < \lambda < 10^7$ значення Δ лежать у діапазоні $10^{-6} < \Delta < 2 \cdot 10^{-2}$ при цьому $1 < \Delta\lambda < 6$. Таким чином, $|\ln \Delta| > \ln \lambda \Delta$, що дозволяє отримати наближений розв'язок рівняння. Нехтуючи доданком $(1 - x_c)\Delta$ порівняно з x_c і $1 - x_c$, з виразу (8.2.13) знаходимо

$$\Delta \approx -\lambda^{-1} \frac{\ln \left[\sqrt{x_c(1-x_c)} \lambda^{1-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}} \right]}{1-x_c}. \quad (8.2.14)$$

Звідси маємо

$$\sigma_e = \frac{A}{a_0^{d-2}} \lambda^{-y} e^{\lambda x_c}, \quad (8.2.15)$$

де A слабо залежить від λ ($A \sim (\ln \lambda)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \nu(d-2)}$), а критичний індекс перколяційного множника:

$$y = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 + 2\nu(d-2)}{2}. \quad (8.2.16)$$

Для визначення числового значення критичного індексу у необхідно задати значення індексів α_1 і α_2 , які, у свою чергу, будуть визначати кількість так званих SCB- та SDCB- зв'язків (див. розділ 5). Для двофазних систем в ІМ було прийнято $\alpha_1 = \xi_R, \alpha_2 = \xi_G$. В цьому випадку

$$y(\alpha_1 = \xi_R, \alpha_2 = \xi_G) = \frac{t-q}{2} \quad (8.2.17)$$

У разі ж, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ (NLB-модель),

$$y(\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1) = \nu(d-2). \quad (8.2.18)$$

Як видно, у двовимірному випадку як з (8.2.17), так і з (8.2.18) впливає $y_2 = 0$.

Це твердження $y_2 = 0$ є суворим, воно безпосередньо впливає з міркувань дуальності. Справді, у разі неперервного розподілу маємо

$$\sigma_e = e^{\langle \ln \sigma \rangle}, \quad (8.2.19)$$

і у разі експоненційно широкого спектру опорів (8.1.2) ефективну провідність можна записати у вигляді

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\lambda x}. \quad (8.2.20)$$

У разі рівномірного розподілу (8.1.3) функція розподілу $f(\sigma)$ дорівнює (порівняй з (8.4)):

$$f(\sigma) = -\frac{1}{\lambda \sigma}. \quad (8.2.21)$$

Тоді ($x_0 = 0, x_1 = 1$) маємо

$$\langle \ln \sigma \rangle = \int_{x_0}^{x_1} f(\sigma) \ln \sigma d\sigma = \ln \sigma_0 - \frac{1}{2} \lambda. \quad (8.2.22)$$

Підставляючи $\langle \ln \sigma \rangle$ в (8.2.19), знаходимо

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\lambda x} = e^{-\lambda x_c}, x_c = \frac{1}{2}, \quad (8.2.23)$$

що означає, при $d = 2$ (див. (8.2.15)) $y_2 = 0$.

У Таблиці 8.1 наведено числові значення критичного індексу у тривимірному випадку в рамках ІМ (8.2.17) та NLB-моделі (8.2.18) та згідно з числовим моделюванням.

Таблиця 8.1.

$$y(\alpha_1 = \xi_R, \alpha_2 = \xi_G) (8.25) \quad 0,635$$

$$y(\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1) (8.26) \quad 0,88$$

Як ми побачимо нижче, у розділі 13, при обчисленні більш високих моментів розподілу струмів (при обчисленні σ_e обчислювався другий момент), виявляється необхідно повернутися до визначення α_1 і α_2 у рамках NLB-моделі.

Контрольні запитання

1. Наведіть приклад середовища із експоненційно широким спектром локальних властивостей.
2. Що таке сітка Міллера-Абрахамса.
3. Яким чином можна звести задачу щодо визначення ефективної провідності середовища з експоненційно широким спектром локальних властивостей до стандартної перколяційної?
4. Як визначається критичний опір середовища з експоненційно широким спектром локальних властивостей?
5. Як можна розрахувати ефективну провідність середовища з експоненційно широким спектром локальних властивостей?
6. Які галузі застосування середовищ з експоненційно широким спектром локальних властивостей?

Розділ 9. Скінченний скейлінг

9.1. Властивості перколяційних систем з розмірами, меншими за кореляційну довжину

Досі при описі геометричних або фізичних властивостей середовищ, що знаходяться поблизу порога протікання, ми мали на увазі, що розмір зразка L для якого визначається, наприклад, кондуктанс G або ефективна провідність $\sigma_e = GL^{d-1}/L$, набагато більший кореляційної довжини, тобто $L \gg \xi$. У цьому випадку значення G (або σ_e) є самоусередненим по реалізаціям випадкової структури, тобто залежить від того, як «ляже» той чи інший опір під час створення випадкового середовища.

У випадку, коли $L < \xi$, це, звичайно, не так, і значення G (або σ_e) буде змінюватися від реалізації до реалізації, та його флуктуації (пов'язані з реалізаціями структури) будуть тим більші, чим менше L . Здавалося б, при $L < \xi$ важко розраховувати на виявлення простих закономірностей – адже кожна реалізація середовища випадкова. Однак, в критичній області, поблизу порога протікання, головною деталлю перколяційної структури є нескінченний кластер, що має фрактальну розмірність. Однією з головних властивостей фрактальних об'єктів є те, що будь-яка інтенсивна величина X , що характеризує фрактал, наприклад його густина (маса одиниці об'єму) залежить від L так:

$$X(L, \xi) = x(L/\xi) \cdot \xi^{\chi/\nu} \sim \begin{cases} \xi^{\chi/\nu}, & L \gg \xi, \\ L^{\chi/\nu}, & L < \xi, \end{cases} \quad (9.1.1)$$

де $x(L/\xi)$ - скейлінгова функція, ν - критичний індекс кореляційної довжини, χ - критичний індекс, що описує поведінку величини $X(L, \xi)$. Звичайно, у випадку $L < \xi$ під $X(L, \xi)$ розуміється середнє за реалізаціями $\{X(L, \xi)\}$, хоча у літературі часто це суттєве зауваження опускається.

Оскільки $\xi \sim \tau^{-\nu}$, при збільшенні L залежність величини X від розміру зникає, зате з'являється залежність розміру від концентрації $X \sim |\tau|^{-\chi}$. І усереднення щодо реалізації вже не потрібне.

Дивно, що закономірність переходу від одного типу, концентраційного, до іншого, від розміру, має повну аналогію теорії фазових переходів другого роду при переході від температурної залежності параметра порядку до залежності від розміру, усередненої за часом (тим самим, і за реалізаціями).

Використання терміна «скінченний скейлінг» (finite-size scaling) можна пояснити тим, що йдеться про скейлінгові (масштабні) залежності систем зі скінченним $L < \xi$ розміром. Починаючи з $L > \xi$, властивості системи вже не залежать від L .

Необхідно уточнити, що мається на увазі під перколяційною структурою у випадку $L < \xi$. Одним із основних параметрів перколяційного середовища є поріг протікання p_c , який суворо визначений тільки за $L \gg \xi$. Для зразка зі скінченним розміром, порогом протікання для зразка, що має даний розмір L , можна називати ту концентрацію «чорних» вузлів (зв'язків), усереднену за реалізаціями, при якій вперше виникає «нескінченний кластер», тобто протікання через всю систему з даним розміром. При цьому під такою концентрацією мається на увазі 1) відносне число «чорних» вузлів (зв'язків) у сітці, в якій випадковим чином «перекрашуються» «білі» вузли (зв'язки) до протікання – p_c (мікроканонічний розподіл) – $p_c(MK)$ або 2) апіорну ймовірність того, що вузол (зв'язок) – «чорний», а в системі настало протікання p_c (канонічний розподіл) – $p_c(K)$. Обидва визначення тотожні для системи з $L \gg \xi$, але для кінцевого випадку при $L < \xi$ ці визначення призводять до різних значень порогу протікання.

У першому випадку йдеться про мікроканонічний ансамбль – концентрація «чорних» зв'язків (вузлів) у зразку точно дорівнює $p_c(MK)$; у другому випадку – про канонічний ансамбль.

Числовим моделюванням знайдено функцію розподілу $f(p_c(K))$ для канонічного ансамблю задачі вузлів, яка виявилася дуже близькою до функції Гауса. Дисперсія цього розподілу $W = \sqrt{\{p_c^2\} - \{p_c\}^2}$ (тут і далі значок K опускаємо) визначається критичним індексом кореляційної довжини

$$W \approx BL^{-1/\nu} \sim L^{-1/\nu}, \quad (9.1.2)$$

де B – деяка константа порядку одиниці, у двовимірному випадку для неї отримано $B \approx 0.54$. Як і слід було очікувати, W зменшується зі зростанням L .

Поріг протікання, усереднений за реалізацією $\{p_c(L)\}$ для системи розміром $L < \xi$, більше, ніж поріг «нескінченної» системи з $p_c = p_c(L \gg \xi)$.

$$\{p_c(L)\} - p_c = AL^{-1/\nu} \sim L^{-1/\nu}, \quad (9.1.3)$$

де A - деяка константа. Ці закономірності мають місце як дво-, так тривимірному випадку.

Числові експерименти показують зовсім нетривіальне, добре помітне перевищення середньоквадратичної флуктуації W над зсувом точки максимуму функції розподілу $\{p_c(L)\}$ (тобто середнього значення). Таким чином, для функції розподілу порогів протікання в скінченній ($L < \xi$) системі, можна записати

$$f(p_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}W} e^{-\frac{[p_c(L) - p_c - AL^{-1/\nu}]^2}{2W^2}}, \quad (9.1.4)$$

або, нехтуючи перевищенням W над зсувом і переходячи до зручнішої надалі змінної $\tau_c = (p_c(L) - p_c)/p_c$ (Рис. 9.1), маємо

$$f(\tau_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}W} e^{-\frac{p_c^2}{2W^2}\tau_c^2}. \quad (9.1.5)$$

Повернемося тепер до скінченного скейлінгу ефективної провідності. Згідно (9.1.1) запишемо

$$\{\sigma_e\} = \sigma_1 (L/a_0)^{-\frac{t}{\nu}} \sim \sigma_1 L^{-\frac{t}{\nu}}, \quad (9.1.6)$$

Далі в цьому розділі, для спрощення запису, ми всюди опускатимемо a_0 .

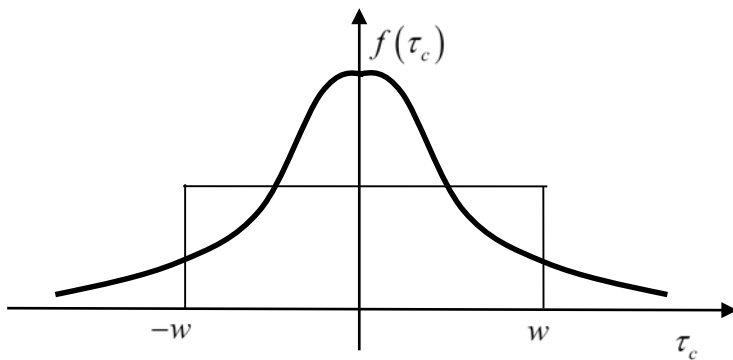


Рис. 9.1. Функція розподілу порогів протікання для розміру $L < \xi$, тонка лінія – її рівномірна апроксимація.

У формулі (9.1.6) мається на увазі, що система знаходиться в критичній області і що $\sigma_2 = 0$. Реалізації, у яких немає протікання, не дають свого вкладу у середнє за реалізаціями. Числові експерименти в цьому випадку з хорошою точністю підтверджують степеневу залежність $\{\sigma_e\}$ і ці залежності використовують для визначення числового значення t/ν . Для

таких числових експериментів використовувалися досить потужні (для свого часу) комп'ютери.

У випадку, коли середовище, що погано проводить, має скінченний опір $\rho_2 \neq \infty$, а те, що добре проводить - є ідеальним провідником ($\sigma_1 = \infty$), середня за реалізаціями провідність

вже не є вдалою характеристикою, тому що достатньо однієї протікальної реалізації (яка завжди є), щоб $\{\sigma_e\} = \infty$. Тут вдалою характеристикою буде середній за реалізацією питомий опір:

$$\{\rho_e\} = \rho_2 L^{1/\nu}, \quad (9.1.7)$$

при цьому реалізації з перебігом, де $\{\sigma_e\} = \infty$, випадуть із усереднення, оскільки для них $\rho_e = 0$.

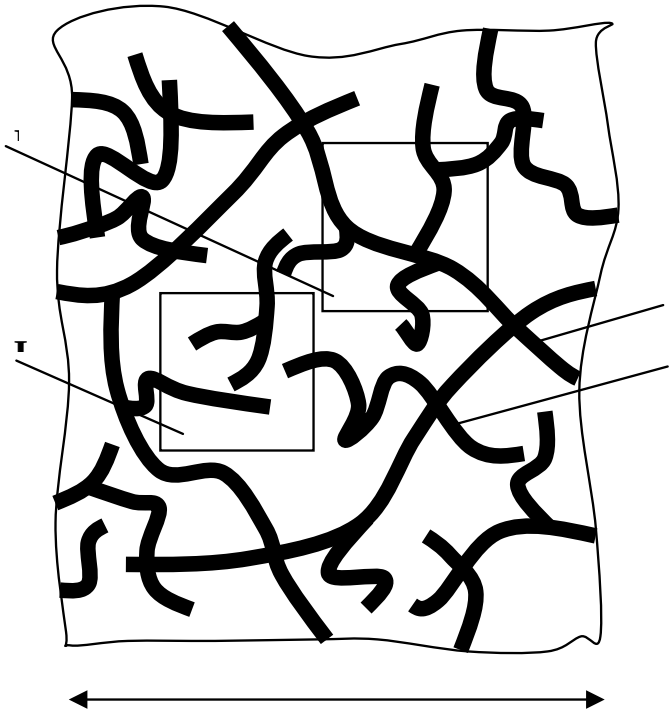


Рис. 9.2. Схематичне зображення перколяційної системи вище за поріг протікання:

Жирні лінії — сукупність провідних зв'язків. 1 — частина нескінченного кластера, 2 — скінченні кластери. I — область з розміром $L < \xi$, що знаходиться вище, II — область з розміром $L < \xi$, що знаходиться нижче за поріг протікання.

Формально, залежності (9.1.6) та (9.1.7) отримані з перших наближень по концентрації $\sigma_e = \sigma_e(\tau)$ вище $\sigma_e = \sigma_1 \tau^t$ і нижче $\sigma_e = \sigma_2 |\tau|^{-q}$ порога протікання простою заміною $\tau \rightarrow \xi^{-1/\nu} \rightarrow L$. Зрозуміло, що за довільних наборів параметрів σ_1, σ_2, τ і L такий формальний прийом не дозволяє відповісти на питання про скінченний скейлінг при $\sigma_2/\sigma_1 \neq 0$.

При розмірах $L < \xi$, тобто у фрактальній області як вище, так і нижче порога протікання, будуть зустрічатися як реалізації з протіканням, так і без неї (див. Рис. 9.2). Іншими словами, в ансамблі систем із розмірами $L < \xi$ і з даним

значенням τ , з деякою ймовірністю P_L будуть зустрічатися системи, що знаходяться вище за поріг протікання (протікальні) — I і з ймовірністю $1 - P_L$ — нижче порога протікання (непротікальні) — II. Ймовірність P_L має вигляд

$$P_L = \int_{-\infty}^0 f(\tau_c) d\tau_c. \quad (9.1.8)$$

Для отримання простих аналітичних виразів для P_L , функцію $f(\tau_c)$ зручно апроксимувати рівномірною. Тоді, нехтуючи константою W , і вводячи позначення

$$\tau_L = L^{-1/\nu}, \quad (9.1.9)$$

для P_L і $1-P_L$ отримуємо

$$P_L = \frac{\tau_L + \tau}{2\tau_L}, \quad 1-P_L = \frac{\tau_L - \tau}{2\tau_L}. \quad (9.1.10)$$

З такою ситуацією, коли в системі зустрічаються як протікальні, так і непротікальні частини, ми вже зустрічалися в галузі розмазування. Дійсно, якщо при $L < \xi$ система знаходиться в області розмазування ($|\tau| \leq \Delta$), то з ймовірностями $P_\Delta = (\Delta + \tau)/2\Delta$ і $1-P_\Delta = (\Delta - \tau)/2\Delta$ можна (в об'ємі порядку ζ^d) зустріти як протікальну, так і непротікальну ситуацію (див. розділ 5). Використовуючи цю аналогію (роль Δ – області розмазування – тепер грає τ_L) між $\{\sigma_e\}$ при $L < \xi$ ($\xi = \tau^{-\nu}$, тобто $|\tau| \leq \tau_L$) та σ_e при $L < \xi$ і $|\tau| \leq \Delta$;

$$\sigma_e(|\tau| \leq \Delta) \approx \sigma_1 \frac{\Delta + \tau}{2\Delta} + \sigma_2 \frac{\Delta - \tau}{2\Delta} \Delta^{-q} \approx \frac{1}{2} (\sigma_1 \Delta^t + \sigma_2 \Delta^{-q}) = (\sigma_1^q \sigma_2^t)^{\frac{1}{t+q}}, \text{ записуємо}$$

$$\{\sigma_e\} = \sigma_1 \frac{\tau_L + \tau}{2\tau_L} \tau_L^t + \sigma_2 \frac{\tau_L - \tau}{2\tau_L} \tau_L^{-q}, \quad (9.1.11)$$

або, виділяючи головні співмножники з L , отримуємо

$$\{\sigma_e\} = \sigma_1 \frac{\tau_L + \tau}{2\tau_L} L^{-t/\nu} + \sigma_2 \frac{\tau_L - \tau}{2\tau_L} L^{q/\nu}. \quad (9.1.12)$$

Абсолютно аналогічно можна записати і вираз для середнього за реалізацією питомого опору:

$$\{\rho_e\} = \rho_1 \frac{\tau_L + \tau}{2\tau_L} L^{t/\nu} + \rho_2 \frac{\tau_L - \tau}{2\tau_L} L^{-q/\nu}. \quad (9.1.13)$$

Зауважимо відразу ж, що з (9.1.12) і (9.1.13) випливають як часткові випадки (для $\sigma_2/\sigma_1 = 0$) вирази (9.1.6) та (9.1.7). Наприклад, при $\tau > 0$ і $\sigma_2 = 0$ з (9.1.12) та (9.1.13) знаходимо

$$\{\sigma_e\} = \sigma_1 \frac{\tau_L + \tau}{2\tau_L} L^{-t/\nu}, \quad \{\rho_e\} = \infty, \quad (9.1.14)$$

при цьому необхідно враховувати, що у фрактальній області $0 < \tau < \tau_L$ і $P_L \sim 1$. Аналогічно для випадку $\tau < 0$ і $\rho_1 = 0$ ($\sigma_1 = \infty$) маємо

$$\{\rho_e\} = \rho_2 \frac{\tau_L - \tau}{2\tau_L} L^{-q/\nu}, \quad \{\sigma_e\} = \infty. \quad (9.1.15)$$

Для аналізу загального випадку (9.1.12) та (9.1.13) зручно використовувати простір параметрів з осями $1/\tau_L$ і $1/\Delta$ (Рис. 9.3). Першому квадранту відповідає $\tau > 0$, другому – $\tau < 0$. Оскільки перколяційна поведінка має на увазі велику неоднорідність ($\sigma_1 \gg \sigma_2$), то з розгляду $\{\sigma_e\}$ зі скінченим скейлінгом виключається область поблизу осі $1/\tau_L$ (заштрихована на Рис. 9.3), оскільки у цій галузі не виконується умова $\sigma_2/\sigma_1 \ll 1$. Також не розглядається область, що безпосередньо оточує вісь $1/\Delta$, оскільки розмір системи L має бути більше мінімального розміру a_0 .

Фрактальній поведінці ($\sim L$) відповідають області I та II, де середні за реалізаціями $\{\sigma_e\}$ і $\{\rho_e\}$ степеневим чином залежать від L - розміру системи. В області I_a (крім частини, що безпосередньо примикає до осі $1/\Delta$) $\{\sigma_e\} \sim L^{-t/\nu}$, $\{\rho_e\} \sim L^{-q/\nu}$. На кордонах між областями I та II та I та IV $\{\sigma_e\}$ і $\{\rho_e\}$ переходять у вирази для області розмазування $\sigma_e = (\sigma_1^q \sigma_2^t)^{\frac{1}{t+q}}$. В області V ефективна провідність - це провідність при $\tau > 0$ і $L \gg \xi$ ($\sigma_e = \sigma_1 \tau^t$) в області VI при $-\tau < 0$ і ($\sigma_e = \sigma_2 |\tau|^{-q}$). В середині фрактальної області (скінченого скейлінгу), (I та II – затінена область на Рис. 9.3) $\{\sigma_e\}$ і $\{\rho_e\}$ поведуться наступним чином.

Область I_a $1/\tau_L \ll 1/|\tau|$, тобто. $\tau_L \gg |\tau|$, крім того, так як область II знаходиться набагато нижче штрихової лінії на Рис. 9.3, то це означає $\tau_L \gg \Delta$. Врахування цих двох нерівностей для (9.1.12) та (9.1.13), призводить до наступного:

$$\{\sigma_e\} \approx \sigma_1 \tau_L^t = \sigma_1 L^{-t/\nu}, \quad I_a, \quad (9.1.16)$$

$$\{\rho_e\} \approx \rho_2 \tau_L^q = \rho_2 L^{-q/\nu}, \quad I_a. \quad (9.1.17)$$

Таким чином, в області I_a

$$\{\sigma_e\} \neq \frac{1}{\{\rho_e\}}. \quad (9.1.18)$$

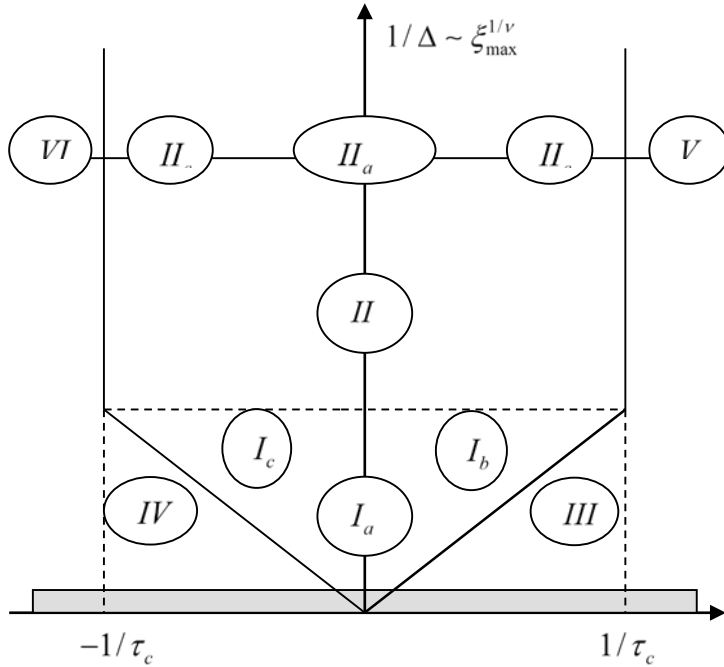


Рис. 9.3. Схема розбиття простору $(1/\tau_L, 1/\Delta)$:

При збільшенні розміру системи L (або, що те саме, $1/\tau_L$) $I_a \rightarrow I_b$ та $I_a \rightarrow I_c$, вирази (9.1.16) залишаються в силі, але біля ліній переходу $1/\tau_L \approx 1/\Delta$, отже, $\sigma_1 \Delta^t \approx \sigma_2 \Delta^{-q}$, і таким чином тепер уже

$$\{\sigma_e\} \approx \frac{1}{\{\rho_e\}}, \quad I_b, \quad I_c. \quad (9.1.19)$$

9.2. Скінчений скейлінг для самодуальних середовищ

Для двовимірних зразків з $L < \xi$ співвідношення взаємності (розділ 6) можна узагальнити. Якщо $L \gg \xi$, то у двовимірному випадку маємо

$$\sigma_e(\tau) \cdot \sigma_e(-\tau) = \sigma_1 \sigma_2. \quad (9.2.1)$$

Аналогічне співвідношення можливе і для $L < \xi$. Розглянемо двовимірний зразок прямокутної форми зі сторонами $L_{\parallel}$ і $L_{\perp}$, де $L_{\parallel}$ – розмір зразка вздовж ох, а $L_{\perp}$ – вздовж оу. Прикладемо до цього зразка струмові контакти: один раз уздовж паралельних сторін, так що

при цьому середній струм $\langle \mathbf{j} \rangle_{\parallel} \text{ ох}$, вдруге вздовж ou . При цьому закон Ома можна записати у вигляді

$$I_{\parallel,\perp} = G_{\parallel,\perp} \cdot U_{\parallel,\perp}, \quad (9.2.2)$$

де $G_{\parallel,\perp}$ – кондактанс зразка вздовж $ох$ та перпендикулярно $ох$. Перетворення симетрії Дихне (розділ 6), виражене через повний струм, у термінах повного струму $I_{\parallel,\perp}$ та падіння напруги $U_{\parallel,\perp}$ мають вигляд

$$I_{\parallel,\perp} = -\Lambda \tilde{U}_{\parallel,\perp}, \quad U_{\parallel,\perp} = -\Lambda^{-1} \tilde{I}_{\parallel,\perp}, \quad (9.2.3)$$

де $\Lambda = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$.

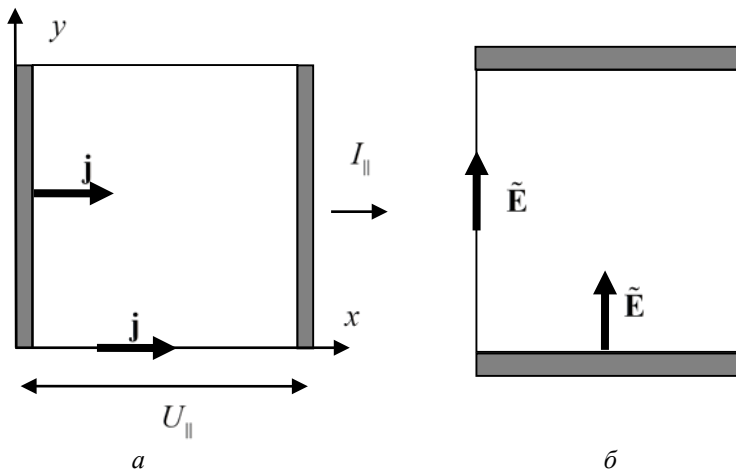


Рис. 9.4. Основне та дуальне середовище та їх граничні умови:
а- токові контакти розташовані в основному середовищі вертикально; б – у дуальній – горизонтально.

Зауважимо, що визначення кондактансу G або опору $R = 1/G$ скінченного зразка передбачає завдання конкретних граничних умов. Наприклад, це ідеальні струмові контакти на одних гранях і ідеальна ізоляція на інших. Перетворення Дихне змінюють граничні умови так, що ідеальні струмові контакти переходять в ідеально ізольовані грані, і навпаки. Насправді (див. розділ 6), ідеальний струмовий контакт, зокрема, означає, що густина струму має лише нормальну до нього компоненту (Рис. 9.4, а), а перетворення симетрії повертають цей

вектор на $\pi/2$, «перетворюючи» його за допомогою множення на константу Λ в напруженість електричного поля (Рис. 9.4, б), яке тепер дотичне до краю з ідеальною ізоляцією.

Підставляючи (9.2.3) у (9.2.2), знаходимо

$$\tilde{I}_{\parallel,\perp} = \tilde{G}_{\parallel,\perp} \tilde{U}_{\parallel,\perp}, \quad (9.2.4)$$

де

$$\tilde{G}_{\parallel,\perp} = \frac{\Lambda^2}{G_{\parallel,\perp}}. \quad (9.2.5)$$

Можна підібрати таке спеціальне розташування фаз або розташування опорів у сітці, що, наприклад, при половинній концентрації фаз буде справедливо $\tilde{G}_{\parallel,\perp} = G_{\parallel,\perp} = G$, пізніше ми повернемося до таких прикладів.

У тому випадку, коли квадрати $L \times L$ вирізані з випадково неоднорідного середовища та середовища дуального йому ($\sigma_1 \rightleftharpoons \sigma_2$), необхідно проводити усереднення за можливими реалізаціями. З виразу (9.2.5) маємо

$$\frac{\{\tilde{G}_{\parallel,\perp}\}}{\{1/G_{\parallel,\perp}\}} = \Lambda^2 = \sigma_1 \sigma_2. \quad (9.2.6)$$

Враховуючи, що $L_{\parallel} = L_{\perp}$ і переходячи до питомих характеристик, отримуємо

$$\frac{\{\sigma_e(p, L)\}}{\{\tilde{\rho}_e(p, L)\}} = \sigma_1 \sigma_2, \quad \tilde{\rho}_e = \frac{1}{\sigma_e}. \quad (9.2.7)$$

Для випадково неоднорідних середовищ справедливо

$$\{\tilde{\rho}_e(p, L)\} = \{\rho_e(1-p, L)\}, \quad (9.2.8)$$

і тоді з (9.2.7) впливає співвідношення взаємності:

$$\frac{\{\sigma_e(p, L)\}}{\{\rho_e(1-p, L)\}} = \sigma_1 \sigma_2, \quad L < \xi. \quad (9.2.9)$$

При $L \gg \xi$ необхідність в усередненні по реалізації зникає і тоді (9.2.9) переходить у відоме співвідношення взаємності, а при $p=1/2$ – у формулу Дихне для ефективної провідності $\sigma_e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$.

Оскільки операції ділення та усереднення по реалізаціях не комутують, то при $L < \xi$ вираз, аналогічний формулі Дихне вже не впливає з (9.2.9). Його аналог можна отримати, якщо спочатку прологарифмувати (9.2.5):

$$\ln \tilde{G}_{\parallel,\perp} + \ln G_{\parallel,\perp} = 2 \ln \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}, \quad (9.2.10)$$

а потім усереднити по реалізації з урахуванням того, що

$$\{\ln \tilde{G}_{\parallel,\perp}\} = \{\ln G_{\parallel,\perp}\} = \{\ln \sigma_e(p=1/2, L)\}.$$

Тоді з (9.2.10) випливає

$$\{\ln \sigma_e(p=1/2, L)\} = \ln \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}, \quad (9.2.11)$$

що для випадку $L < \xi$ є аналогом формули Дихне. Співвідношення (9.2.11) перевірено числовим моделюванням на сітках.

Можливі також такі розташування фаз, що при $L < \xi$ середовище є самодуальним і для визначення кондактансу не потрібне усереднення по реалізаціям. Деякі приклади такого розташування фаз їх представлені на Рис. 9.5. Ефективна провідність σ_e будь-якого з таких середовищ дорівнює $\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$ та не змінюється при заміні $\sigma_1 \Leftrightarrow \sigma_2$ або перенесення контактів з однієї пари паралельних сторін – на іншу пару.

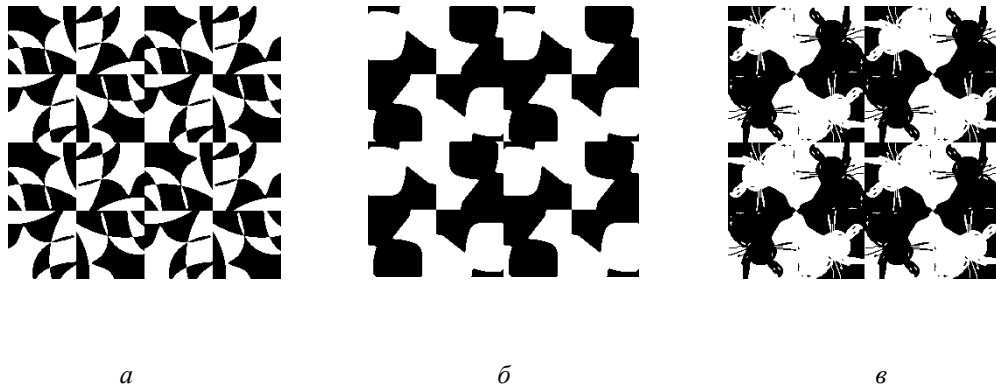


Рис. 9.5. Приклад детермінованих двовимірних двофазних самодуальних середовищ.
Чорним кольором позначено фазу – σ_1 , білим кольором – σ_2 .

Контрольні запитання

1. Які особливості властивостей перколяційних систем з розмірами, меншими
2. Яким чином можна описати поведінку величин, що характеризують перколяційну систему з розмірами, меншими за кореляційну довжину?
3. Що таке мікроканонічний та канонічний розподіли?
5. Як визначається поріг протікання для системи з кінцевим розміром?
6. Як залежить поріг протікання для системи з кінцевим розміром?

Розділ 10. Провідність перколяційного шару

10.1. Ефективна провідність перколяційних систем у тому випадку, коли одні розміри більші за кореляційну довжину, а інші – менші. Постановка задачі.

У тому випадку, коли розмір зразка L , вирізаного з випадково неоднорідного

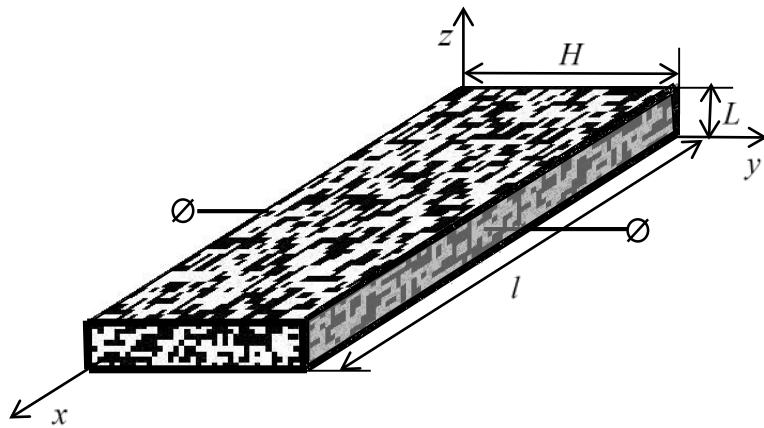


Рис. 10.1. Перколяційний шар. Розміри шару вздовж осей Ox і Oy - $H \gg \xi$, а вздовж Oz - $L < \xi$.

середовища, набагато більший за кореляційну довжину ξ , ефективні характеристики середовища, такі, наприклад, як ефективна провідність, добре визначеними величинами. У тому випадку, коли $L \leq \xi$, кондактанс зразка змінюється від реалізації до реалізації і добре визначеною величиною є кондактанс,

усереднений за реалізацією $\{G\}$, або усереднена за реалізацією ефективна провідність $\{\sigma_e\}$ (розділ 9).

На практиці часто зустрічається ситуація, коли один із розмірів зразка перевищує кореляційну довжину, а інші – ні. На Рис. 10.1 наведено приклад, коли вздовж двох напрямків зразок має довжину $H \gg \xi$, а вздовж третього $L < \xi$.

Такий шар, з одного боку, не поводить як тривимірний зразок, тобто, наприклад, для σ_e не виконуватиметься стандартна перколяційна залежність типу $\sigma_e = \sigma_1 \tau^t$, а з іншого – незважаючи на удавану його двовірність, ($H \gg L$) – обов'язкова умова двовірності – немає відсутності z -компонент полів та струмів – не виконується. Однак через те, що $H \gg \xi$, ефективні властивості добре визначені. Кондактанс шару у напрямках як Ox і Oy , так і Oz не вимагає усереднення за реалізацією.

При $L \rightarrow a_0$ середовище стає двовимірним, при $L \gg \xi$ - тривимірним. Таким чином, шар у разі, коли $H \gg \xi$ і $L \leq \xi$, займає проміжне положення між двома тривимірними випадками, далі, для стислості, ми називатимемо цей випадок $2,5D$ -середовищем. Можна говорити і про $1,5D$ -середовища, але вони в практичному відношенні набагато менш цікаві.

Залежно від концентрації фаз, розмірів та відношення провідностей фаз $2,5D$ -середовища виявляють велику різноманітність закономірностей. Тут ми розглянемо

ефективну провідність $2,5D$ -середовищ $-\sigma_e$ вздовж $хоу$ (положення контактів див. на Рис. 10.1). Далі вважатимемо, що має місце «глибоко» фрактальний режим:

$$a_0 \ll L \ll \xi_{3\max}. \quad (10.1.1)$$

Щоб уникнути плутанини, писатимемо індекс, що позначає мірність задачі; в даному випадку $\xi_{3\max}$ – максимальне значення кореляційної довжини у тривимірному випадку:

$$\xi_{3\max} = \Delta_3^{-\nu_3} = (\sigma_2/\sigma_1)^{\frac{-\nu_3}{t_3+q_3}}. \quad (10.1.2)$$

Тут і надалі, як і в розділі 9, для спрощення запису всюди, де це зручно, будемо приймати $a_0 = 1$.

Умова (10.1.1) з урахуванням (10.1.2) одночасно означає

$$\sigma_1 \tau_L^{t_3} \gg \sigma_2 \tau_L^{-q_3}, \quad (10.1.3)$$

де $\tau_L = L^{-1/\nu_3}$, а $\sigma_1 \tau_L^{t_3}$ і $\sigma_2 \tau_L^{-q_3}$ є середніми за реалізаціями ефективними провідностями зразка розміром $L \times L \times L$ у випадках відповідно протікаючої та непротікаючої реалізації.

Введемо такі позначення:

$$\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1 \tau_L^{t_3}, \quad \tilde{\sigma}_2 = \sigma_2 \tau_L^{-q_3}. \quad (10.1.4)$$

Як показано в розділі 9, ймовірності зустріти протікаючу (P_L) та непротікаючу $-(1-P_L)$ реалізації можуть бути записані так

$$P_L = \frac{\tau_L + \tau_3}{2\tau_L}, \quad 1-P_L = \frac{\tau_L - \tau_3}{2\tau_L}, \quad \tau_L = L^{-1/\nu_3}. \quad (10.1.5)$$

10.2. Метод розв'язку

Основна ідея, що дозволяє наближено знайти вирази для кондактансу та ефективної провідності $\sigma_e^{2.5D}$ шару, що знаходиться в «глибоко» фрактальному режимі, полягає в огрубінні неоднорідної структури з характерним розміром a_0 до розміру L . Шар після цього огрубіння є двовимірною плівкою з характерним розміром неоднорідності L .

Це двовимірне неоднорідне середовище (його характеристики позначатимемо значком тильда) характеризується близькістю до порога протікання

$$\tilde{\tau}_2 = \frac{P_L - P_{c_2}}{2P_{c_2}}, \quad (10.2.1)$$

яка, з урахуванням (10.1.5) та того, що $P_{c_2} = 1/2$ може бути записана так:

$$\tilde{\tau}_2 = \tau_3 / \tau_2. \quad (10.2.2)$$

При переході від тривимірного шару $H \times H \times L$ з $L < \xi$ до двовимірного середовища неявно було зроблено наступне наближення. Добре провідний елемент $\tilde{\sigma}_1$ (Рис.10.2), огрубленої до

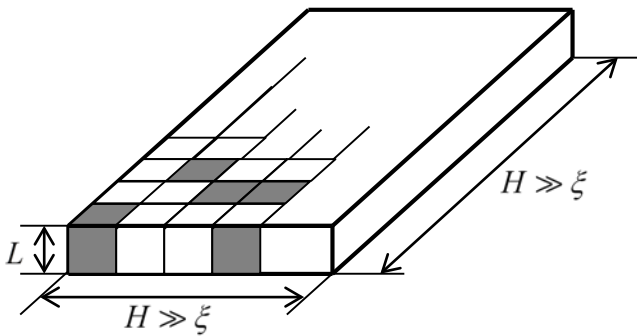


Рис. 10.2. Вид неоднорідного шару після "огрубіння" (ренормалізації): чорним кольором позначені протікаючі реалізації з провідністю $\tilde{\sigma}_1$, білим кольором – непротікаючі з провідністю $\tilde{\sigma}_2$.

розмірів L середовища, обраний як середнє за реалізацією (10.1.4) кубика $L \times L \times L$. Тепер характерний розмір неоднорідності $\tilde{a}_0 = L$. Протікаючий елемент з $\tilde{\sigma}_1$ і непротікаючий елемент з $\tilde{\sigma}_2$ значно відрізняються один від одного за провідністю $\tilde{\sigma}_1 \gg \tilde{\sigma}_2$. Однак кондактанс кубика розміром $L \times L \times L$ для даної конкретної реалізації з протікаючою структурою та середній за реалізацією кондуктанс $\{G\} = \tilde{\sigma}_1$ відрізняються один від одного тим, що перший може мати структуру

протікання вздовж одного напрямку і не мати вздовж іншого. Отже, слід враховувати, що у точнішому наближенні «огрублений шар» на Рис. 10.2 складається не з двох ізотропних фаз, а з випадковим чином розкиданих сильно анізотропних елементів. Нижче розглянемо найпростіше наближення: вважатимемо шар на Рис. 10.2, що складається з двох ізотропних фаз.

Вимагаємо, щоб виконувалася умова

$$|\tilde{\tau}_2| \ll 1, \quad (10.2.3)$$

тільки в цьому випадку можливий перколяційний опис «двовимірного» середовища на Рис. 10.2.

З (10.8) випливає, що $|\tau_3| \ll L^{-1/\nu_3}$, а так як мінімальне значення $\tau_3 - \Delta_3$ (див. параграф 5.1), то нерівність (10.2.3) призводить до $L \ll \xi_{3\max}$ або (10.1.2), і таким чином, за прийнятих умов «глибоко» фрактального режиму нерівність (10.2.3) виконується автоматично.

Отже, при описі провідності шару можуть бути використані двовимірні перколяційні співвідношення

$$\sigma_e^{2.5D} \approx \tilde{\sigma}_1 \tilde{\tau}_2^{t_2}, \quad |\tilde{\tau}_2| > 0, \quad \tilde{\Delta}_2 \ll \tilde{\tau}_2 \ll 1, \quad \text{I}, \quad (10.2.4)$$

$$\sigma_e^{2.5D} \approx \tilde{\sigma}_1 |\tilde{\tau}_2|^{-q_2}, \quad |\tilde{\tau}_2| < 0, \quad \tilde{\Delta}_2 \ll |\tilde{\tau}_2| \ll 1, \quad \text{II}, \quad (10.2.5)$$

$$\sigma_e^{2.5D} \approx \sqrt{\tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2}, \quad |\tilde{\tau}_2| \leq \tilde{\Delta}_2, \quad \text{III}, \quad (10.2.6)$$

де область розмазування $\tilde{\Delta}_2$, як і у звичайному двовимірному випадку (див. розділ 5), знаходиться з умови $\sigma_1 \Delta_2^{t_2} = \sigma_2 \Delta_2^{-q_2}$ і має вигляд

$$\tilde{\Delta}_2 = (\tilde{\sigma}_2 / \tilde{\sigma}_1)^{\frac{1}{t_2 + q_2}}. \quad (10.2.7)$$

Підставляючи $\tilde{\tau}_2$ і $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$ (10.2.4) – (10.2.7), знаходимо залежність для ефективної провідності перколяційного шару

$$\sigma_e^{2.5D} = \sigma_1 \tau_3^{t_2} \tau_L^{t_3 - t_2} = \sigma_1 \tau_3^{t_2} L^{\frac{t_3 - t_2}{\nu_3}}, \quad \text{I}, \quad (10.2.8)$$

$$\sigma_e^{2.5D} = \sigma_2 |\tau_3|^{-q_2} \tau_L^{q_2 - q_3} = \sigma_2 |\tau_3|^{-q_2} L^{\frac{q_2 - q_3}{\nu_3}}, \quad \text{II}, \quad (10.2.9)$$

$$\sigma_e^{2.5D} = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \tau_L^{\frac{t_3 - q_3}{2}} = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} L^{\frac{t_3 - q_3}{2\nu_3}}, \quad \text{III}, \quad (10.2.10)$$

де області I, II, III, (10.2.8) – (10.2.10) ті ж, що й у (10.2.4) – (10.2.6). Отримані у (10.2.8) – (10.2.10) три типи поведінки $\sigma_e^{2.5D}$ – вище, нижче, і на самому порозі протікання – виконуються в певних інтервалах концентрації добре провідної фази $p(\tau_3)$. Наприклад, у III (10.2.6) або (10.2.10) $|\tilde{\tau}_2| \leq \tilde{\Delta}_2$, звідки згідно (10.2.2) маємо

$$|\tau_3| \leq \Delta_2 \tau_L^{\frac{t_2 + q_2 - (t_3 + q_3)}{t_2 + q_2}} = \Delta_2 L^{\frac{t_3 + q_3 - 2t_2}{2t_2\nu_3}} \equiv \tau_{3\min}, \quad (10.2.11)$$

де $\Delta_2 = (\sigma_2/\sigma_1)^{1/2t_2}$ - область розмазування у звичайному двовимірному випадку, і в (10.2.11) враховано, що $q_2 = t_2$, і для зручності введено позначення характерного значення $\tau_{3\min}$

$$\tau_{3\min} = \Delta_2 L^{\frac{t_3+q_3-2t_2}{2t_2\nu_3}}, \quad \frac{t_3+q_3-2t_2}{2t_2\nu_3} = 0.057. \quad (10.2.12)$$

Відразу відзначимо слабку залежність $\tau_{3\min}$ від L .

У всіх трьох режимах – I, II та III, ефективна провідність шару $\sigma_e^{2.5D}$ зменшується зі збільшенням L (див. (10.2.8)-(10.2.10)). Однак із загальних міркувань випливає, що й опір шару $R = \sigma_e^{2.5D} H / HL$ має зменшуватися за $H = \text{const}$ та збільшення L . І, звичайно, залежності (10.2.8)–(10.2.10) повинні задовольняти цю вимогу. Справді, з (10.2.8)–(10.2.10) випливає

$$R \sim L^\alpha, \quad \alpha_I = \frac{t_3-t_2}{\nu_3} - 1, \quad \alpha_{II} = \frac{q_2-q_3}{\nu_3} - 1, \quad \alpha_{III} = \frac{t_3-q_3}{2\nu_3} - 1, \quad (10.2.13)$$

де індекс у α означає належність режиму I, II, III (10.2.8) – (10.2.10).

Підставляючи у (10.1.18) канонічні значення критичних індексів, з Таблиці 5.1. знаходимо

$$\alpha_I = -0,2, \quad \alpha_{II} = -0,35, \quad \alpha_{III} = -0,28, \quad (10.2.14)$$

тобто зі збільшенням товщини шару його опір падає.

У залежностях R від товщини шару критичні індекси дво- та тривимірної задачі теорії протікання «з'єдналися» незвичайним для перколяції чином, що призвело, зокрема, до несподіваних нерівностей. Вимога умови $\alpha < 0$ згідно (10.2.13) робить необхідним виконання двох нерівностей:

$$t_3 - t_2 < \nu_3, \quad q_2 - q_3 < \nu_3. \quad (10.2.15)$$

Легко отримати вирази для ефективної провідності, аналогічні (10.2.8)–(10.2.10), для двовимірної смужки $\sigma_e^{1.5D}$. Крім того, для випадку смужки можна вказати клас середовищ, для яких виконуються співвідношення взаємності.

Досі йшлося про «глибоко» фрактальний режим, коли вважалося, що виконується умова (10.1.1) або (10.1.3). Це означає в тому числі, що $(L/a_0)^{-1/\nu} \ll 1$, тобто $L \gg a_0$. Якщо така сильна нерівність не виконується, тобто система виходить з «глибоко» фрактального

режиму, необхідно враховувати що поріг протікання перколяційного шару $p_{c\parallel}$ відрізняється від порогу протікання тривимірного зразка:

$$p_{c\parallel} = p_{c3} + (p_{c2} - p_{c3})L^{-1/\nu_3}. \quad (10.2.16)$$

У «глибоко» фрактальному режимі другий доданок в (10.2.16) несуттєвий, ним можна знехтувати.

Облік зсуву порога протікання (10.2.16) дозволяє при $L \rightarrow a_0$ перейти до двовимірного випадку у виразах для $\sigma_e^{2.5D}$:

$$p_{c\parallel}(L \rightarrow a_0) \rightarrow p_{c2}. \quad (10.2.17)$$

Контрольні запитання

1. Як змінюється критична концентрація середовища зі збільшенням розміру вздовж «довгого» спрямування?
2. До чого прямує ефективна провідність зі: а) збільшенням «довгого» розміру, б) зменшенням «короткого»?

Розділ 11. Провідність при змінному струмі

11.1. ЕМТ-наближення

До цих пір ми розглядали задачі з постійним струмом, що скорочено позначаються як DC-задачі (DC – direct current – постійний струм). Якщо змінний струм (АС-задача, АС – alternating current), у разі частот, невеликих порівняно з частотами, необхідними для встановлення електричної та магнітної поляризації, то провідність можна описувати за допомогою комплексного опору $Z(\omega)$ – так званого імпедансу провідника. Величина, зворотна $Z(\omega)$, має назву кондактанс $G(\omega) = 1/Z(\omega)$. У цьому розділі ми розглянемо ефективні властивості так званих поганих провідників, коли для фази можна одночасно запровадити і провідність, і діелектричну проникність (чи індуктивність).

Питомий кондактанс $\sigma(\omega)$ у цьому випадку можна записати так:

$$\sigma(\omega) = \sigma' + i\sigma'' = \sigma + \frac{\omega\varepsilon}{i4\pi}, \quad (11.1.1)$$

де σ – «звичайна» провідність (тобто провідність при постійному струмі), а ε – діелектрична проникність.

Розглянемо двофазний композит, одна з фаз якого – метал, а друга – «поганий» провідник – діелектрик, що має невелику провідність при постійному струмі:

$$\sigma_1(\omega) = \sigma_1, \quad \sigma_2(\omega) = \frac{\omega\varepsilon_2}{i4\pi} + \sigma_2. \quad (11.1.2)$$

Тут ми нехтуємо уявною частиною провідності металевої фази і припускаємо, що середовище дуже неоднорідне: $\sigma_1 \gg \sigma_2$, а у разі ідеального діелектрика $\sigma_2 = 0$.

Відповідно, для ефективних коефіцієнтів маємо

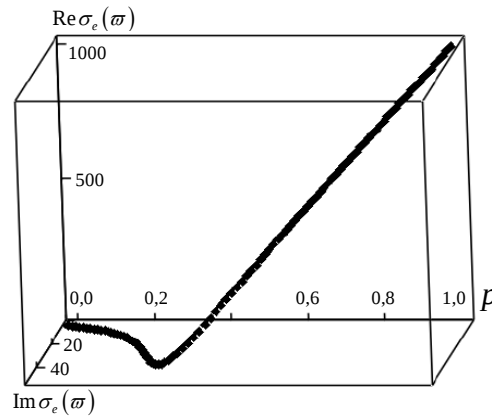
$$\sigma_e(\omega) = \sigma'_e + \sigma''_e = \sigma_e + \frac{\omega\varepsilon_e}{i4\pi}. \quad (11.1.3)$$

Концентраційні залежності $\sigma_e(p)$ і $\varepsilon_e(p)$ можна знайти у наближенні ЕМТ (див. розділ 3.2).

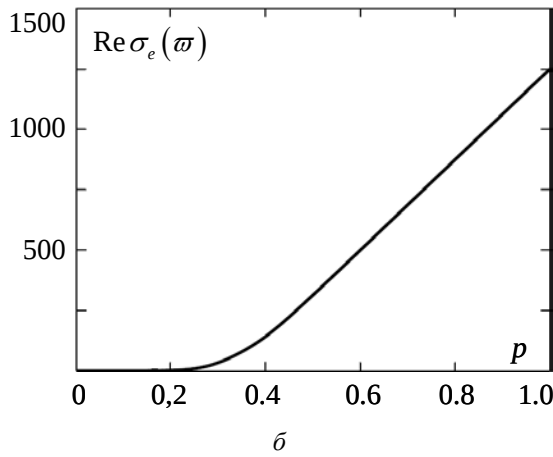
Для тривимірного випадку

$$\frac{\sigma_e(\omega) - \sigma_1(\omega)}{2\sigma_e(\omega) + \sigma_1(\omega)} p + \frac{\sigma_e(\omega) - \sigma_2(\omega)}{2\sigma_e(\omega) + \sigma_2(\omega)} (1 - p) = 0. \quad (11.1.4)$$

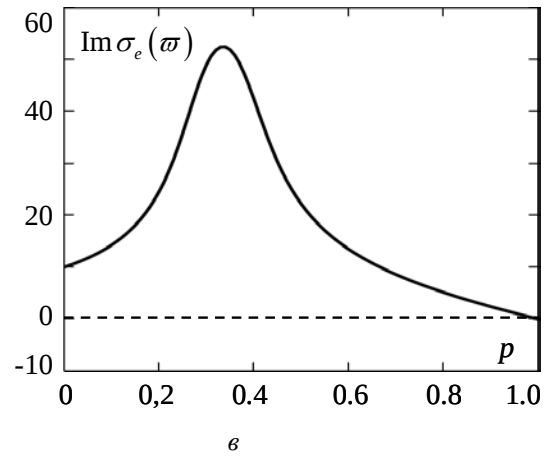
На Рис. 11.1 наведено концентраційну залежність дійсної та уявної частин ефективної провідності $\sigma_e(\omega) = \sigma_e + \omega\varepsilon_e/i4\pi$ від концентрації металевої фази p .



a



б



в

Рис. 11.1. Концентраційна залежність дійсної та уявної частин ефективної провідності:
а– графік залежності $\sigma_e(\omega)$. б – залежність $\text{Re } \sigma_e(\omega)$ від концентрації металевої фази; проекція на дійсну площину. в – залежність $\text{Im } \sigma_e(\omega)$ – діелектричної проникності від концентрації металевої фази, проекція на уявну площину. для $\sigma_1 = 1000$, $\sigma_2 = 0$, $\varepsilon_1 = 0$, $\omega\varepsilon_2/4\pi = 10$ (у довільних одиницях).

Дійсна частина ефективної провідності $\text{Re } \sigma_e(\omega) = \sigma'_e$ (надалі штрих будемо опускати) поводить ся звичайним (див. розділ 5) монотонним чином, зазначаючи, як і має бути за великої неоднорідності ($\sigma_1 \gg \sigma_2$ або $\sigma_2 = 0$), різкої зміни поведінки поблизу $p_c = 1/3$. Уявна частина, що описує поведінку ефективної діелектричної проникності, як видно з Рис. 11.1,в, має максимум поблизу p_c , причому значення цього максимуму (при вибраних значеннях параметрів на Рис.11.1, $\varepsilon_e\omega/4\pi \approx 50$) набагато більше значення самої фази ($\varepsilon_2\omega/4\pi = 10$). Таким чином, якщо σ_e монотонно збільшується зі зростанням p , то ε_e має поблизу p_c максимум, тобто при наближенні до p_c збільшується «з обох боків». З виразу (11.1.4) також випливає, що максимум ефективної діелектричної проникності $\varepsilon_e(p_c)$ пропорційний провідності у металевій фазі σ_1 .

11.2. Метод теорії протікання

У разі великої неоднорідності, як зазначалося раніше (параграф 3.2), поблизу порога протікання передбачення ЕМТ стають лише якісними, й для кількісного визначення поведінки σ_e , критичних індексів, що описують поведінку $\text{Re } \sigma_e(\omega)$ і $\text{Im } \sigma_e(\omega)$ необхідно звернутися до теорії протікання.

Було розглянуто кілька можливих часткових випадків. Один з них: $\text{Im } \sigma_1(\omega) = 0$, $\text{Re } \sigma_2(\omega) = 0$, - коли добре провідна фаза - метал - не містить уявної частини, а погано провідна - ідеальний діелектрик, в цьому випадку провідність на постійному струмі дорівнює нулю:

$$\sigma_1(\omega) = \sigma_1, \sigma_2(\omega) = \omega \varepsilon_2 / i4\pi. \quad (11.2.1)$$

При $\omega = 0$ нижче порога протікання в такому середовищі струм текти не може $\sigma^e(\omega = 0, \tau < 0) = 0$. Однак при $\omega \neq 0$ це вже не так. Параметр малості h , який у «звичайному» ($\omega = 0$) випадку дорівнює $h = \sigma_2 / \sigma_1$, при $\omega \neq 0$ необхідно замінити на

$$h = \omega \varepsilon_2 / 4\pi \sigma_1. \quad (11.2.2)$$

Тепер, використовуючи h з (11.2.2) та аналогію з ефективною провідністю, при $\omega = 0$ нижче порога протікання отримуємо

$$\text{Re } \sigma_e(\omega, p) = \frac{\omega^2 \varepsilon^2}{4\pi \sigma_1} |\tau|^{-(2q+t)}, \quad \tau < 0, \quad (11.2.3)$$

$$\varepsilon_e(\omega, p) = \varepsilon_2 |\tau|^{-q}, \quad \tau < 0.$$

В області розмазування маємо

$$\text{Re } \sigma_e(\omega, p_e) = \sigma_1 \left(\frac{\omega \varepsilon_2}{4\pi \sigma_1} \right)^{\frac{t}{t+q}}, \quad \varepsilon_e(\omega, p_e) = \varepsilon_2 \left(\frac{4\pi \sigma_1}{\varepsilon_2 \omega} \right)^{\frac{q}{t+q}}. \quad (11.2.4)$$

Це, зокрема, означає, що $\varepsilon_e \sim \sigma_1$, що і передбачало якісно ЕМТ.

У тому випадку, коли діелектрик не є ідеальним, записуємо

$$\sigma_2(\omega) = \frac{\omega \varepsilon_2}{i4\pi} + \sigma_2, \quad \sigma_2 \neq 0, \quad (11.2.5)$$

Замість виразу (11.2.4) маємо

$$\varepsilon_e(\omega, p_e) = \varepsilon_2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^{\frac{q}{t+q}}. \quad (11.2.6)$$

Ці та деякі інші закономірності описуються скейлінговим співвідношенням:

$$\sigma_e(\omega, \tau) = \sigma_1(\omega) h^{\frac{t}{t+q}} \Psi \left(\frac{\tau}{h^{\frac{1}{t+q}}} \right), \quad (11.2.7)$$

формально повторюючим скейлінгове співвідношення (5.2.5), проте тепер $h = \sigma_2(\omega)/\sigma_1(\omega)$ і буде комплексною величиною.

Пояснити сукупність цих закономірностей, зокрема, чому, наприклад, дивний на перший погляд той факт, що ефективна діелектрична проникність вище за поріг протікання описується індексом q , який раніше був введений для опису σ_e нижче порога протікання, можна на основі ієрархічної моделі перколяційної структури (параграф 5.4).

Розглянемо спочатку ієрархічну модель вище за поріг протікання. Вважатимемо, що перша фаза – металева $\text{Im } \sigma_1(\omega) = 0$, а друга – ідеальний діелектрик $\text{Re } \sigma_2(\omega) = 0$, тобто $\sigma_2 = 0$ див. (11.1.2). Згідно (5.4.12) для другого ступеня ієрархії маємо

$$G_e = G_1 + G_2, \quad (11.2.8)$$

де згідно (5.4.14), (5.4.15)

$$G_1 = \sigma_1 a_0^{d-2} \tau^{\alpha_1}, \quad G_2 = \sigma_2 a_0^{d-2} \tau^{-\alpha_2}, \quad (11.2.9)$$

$$G_e = \sigma_e(\omega) a_0^{d-2} \tau^{\nu(d-2)}, \quad \alpha_1 = t - \nu(d-2), \quad \alpha_2 = q + \nu(d-2).$$

Звідки

$$\sigma_e(\omega) = \sigma_1 \tau^t + \sigma_2(\omega) \tau^{-q}, \quad \tau > 0. \quad (11.2.10)$$

Розділивши $\sigma_e(\omega)$ на дійсну та уявну частини, знайдемо

$$\text{Re } \sigma_e(\omega) = \sigma_1 \tau^t + \text{Re } \sigma_2(\omega) \tau^{-q}, \quad (11.2.11)$$

$$\text{Im } \sigma_e(\omega) = \text{Im } \sigma_2(\omega) \tau^{-q}.$$

У цьому випадку, коли $\text{Re } \sigma_2(\omega) = 0$, з (11.2.11) випливає

$$\sigma_e = \sigma_1 \tau^t, \quad \tau > 0. \quad (11.2.12)$$

I, оскільки $\varepsilon_2 = -(4\pi/\omega)\text{Im}\sigma_2(\omega)$, $\varepsilon_e = -(4\pi/\omega)\text{Im}\sigma_e(\omega)$ для ефективної діелектричної проникності

$$\varepsilon_e = \varepsilon_2 \tau^{-q}, \quad \tau > 0. \quad (11.2.13)$$

Зі схеми ієрархічної моделі (11.2.8) відразу впливає якісне пояснення появи критичного індексу q в випадку $\tau > 0$. Дійсно, якщо для дійсної частини провідності її головним елементом є звичайний опір $R_1 = 1/G_1$ містка, то для уявної, яка існує тільки при $\omega \neq 0$, головний елемент - прошарок (конденсатор), що добре проводить змінний струм. Таким чином, за $\text{Re}\sigma_e(\omega)$ відповідає місток, а значить індекс t , а за $\text{Im}\sigma_e(\omega)$ - прошарок, а значить індекс q . При змінному струмі прошарок – елемент перколяційної структури, який при $p > p_c$ і $\omega = 0$ дає лише невелику поправку до ефективної провідності (5.2.11а), – для уявної частини σ_e є основним елементом.

Для цього ж випадку ($\sigma_1(\omega) = \sigma_1, \sigma_2(\omega) = \omega\varepsilon_2/i4\pi$) нижче порога протікання відповідно до другого щабля ієрархічної моделі (4.6.13) маємо

$$G_e = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}, \quad (11.2.14)$$

де G_1, G_2 і G_e визначаються так само, як і раніше згідно (11.2.9).

Звідси

$$\sigma_e(\omega) = \frac{\sigma_1 \left(\frac{\omega\varepsilon_2}{4\pi} \right)^2 \tau^{t-2q}}{\sigma_1^2 \tau^{2t} + \left(\frac{\omega\varepsilon_2}{4\pi} \right)^2 \tau^{-2q}} + \frac{\sigma_1^2 \left(\frac{\omega\varepsilon_2}{i4\pi} \right) \tau^{2t-q}}{\sigma_1 \tau^{2t} + \left(\frac{\omega\varepsilon_2}{4\pi} \right)^2 \tau^{-2q}}. \quad (11.2.15)$$

При переході до випадку провідності постійного струму ($\omega \rightarrow 0$), $\text{Re}\sigma_e(\omega) \rightarrow 0$. Прошарок, що виконує роль конденсатора (11.2.14), «запирає» струм. Таким чином, $\text{Re}\sigma_e(\omega)$ має бути пропорційною ω і, як видно з (11.2.15), це можливо при виконанні нерівності

$$|\tau|^{t+q} \gg \frac{\omega\varepsilon_2}{4\pi\sigma_1}, \quad (11.2.16)$$

і тоді (11.2.15) набуває вигляду

$$\sigma_e(\omega) \approx \sigma_1 \left(\frac{\omega\varepsilon_2/4\pi}{\sigma_1} \right)^2 |\tau|^{-(t+2q)} + \frac{\omega\varepsilon_2}{i4\pi} |\tau|^{-q}, \quad (11.2.17)$$

що, після поділу на дійсну та уявну частини, призводить до виразу

$$\sigma_e(\omega) \approx \sigma_1 \left(\frac{\omega \varepsilon_2 / 4\pi}{\sigma_1} \right)^2 |\tau|^{-(t+2q)}, \quad \varepsilon_e = \varepsilon_2 |\tau|^{-q}. \quad (11.2.18)$$

Область розмазування визначається, як і в ДС-задачі, з рівності $\sigma_e(\Delta, p > p_e) = \sigma_e(\Delta, p < p_e)$. Дійсно, прирівнюючи (11.2.10) та (11.2.16), маємо

$$\sigma_1 \Delta^t + \frac{\omega \varepsilon_2}{4\pi i} \Delta^{-q} = \sigma_1 \left(\frac{\omega \varepsilon_2 / 4\pi}{\sigma_1} \right)^2 \Delta^{-(t+2q)} + \frac{\omega \varepsilon_2}{i4\pi} \Delta^{-q} \quad (11.2.19)$$

як із рівності дійсних частин (11.2.19), так і уявних, отримуємо область розмазування:

$$\Delta = \left(\frac{\omega \varepsilon_2}{4\pi \sigma_1} \right)^{\frac{1}{t+q}}. \quad (11.2.20)$$

Зауважимо, що відповідно до (11.2.20) умова (11.2.16) є ніщо інше, як $|\tau| \gg \Delta$, тобто умова того, що $\sigma_e(\omega)$ з (11.21) описує поведінку ефективної провідності та діелектричної проникності поза розмазуванням (11.2.48).

У разі неідеального діелектрика (11.2.5) замість (11.2.15) із (11.2.14) слід

$$\sigma_e(\omega) = \frac{\sigma_1 \tau^t \cdot \sigma_2(\omega) \tau^{-q}}{\sigma_1 \tau^t + \sigma_2(\omega) \tau^{-q}}, \quad \sigma_2(\omega) = \sigma_2 + \frac{\omega \varepsilon_2}{i4\pi}. \quad (11.2.21)$$

У припущенні $\sigma_2 \gg \omega \varepsilon_2 / 4\pi$ і $\sigma_1 \gg \sigma_2$ (сильна неоднорідність) та умови, що система знаходиться поза областю розмазування $\sigma_1 \tau^t \gg \sigma_2 \tau^{-q}$, з (11.25) можна приблизно записати $\sigma_e(\omega)$ у вигляді

$$\sigma_e(\omega) = \sigma_2 \tau^{-q} + \frac{\omega \varepsilon_2}{i4\pi} \tau^{-q}, \quad \tau < 0. \quad (11.2.22)$$

Прирівнюючи (11.26) до (11.14) при $|\tau| = \Delta$, знаходимо область розмазування для випадку неідеального діелектрика ($\sigma_2 \neq 0$):

$$\Delta = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^{\frac{1}{t+q}}. \quad (11.2.23)$$

Звідки і слідує вираз для ефективної діелектричної проникності в області розмазування.

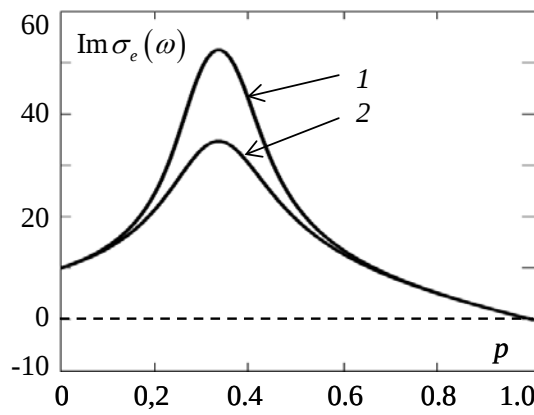


Рис. 11.2. Ефективна діелектрична проникність $\varepsilon_e(p)$:

- 1 - $\sigma_1 = 1000$, $\varepsilon_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\omega\varepsilon_2/4\pi = 10$,
 2 - $\sigma_1 = 1000$, $\varepsilon_1 = 0$, $\sigma_2 = 10$, $\omega\varepsilon_2/4\pi = 10$,

$$\varepsilon_e(\Delta) = \varepsilon_2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^{-\frac{q}{t+q}}. \quad (11.2.24)$$

Таким чином, в залежності від того, яка нерівність виконується: $\sigma_2 \gg \omega\varepsilon_2/4\pi$ чи обернена – максимальне значення $\varepsilon_e(\Delta)$ матиме вигляд (11.2.19) або (11.2.4). На Рис.11.2. схематично, на основі ЕМТ – наближення, показані обидва випадки.

Можливий ще один випадок – коли у провідності металевої фази існує невелика уявна частина

$$\sigma_1(\omega) = \sigma_1 - \frac{\omega\varepsilon_1}{i4\pi}, \quad \frac{\omega\varepsilon_1}{4\pi} \ll \sigma_1, \quad (11.2.25)$$

де ε_1 називають діелектричною проникністю металу.

Зауважимо, що оскільки знак уявної частини в $\sigma_1(\omega)$ протилежний знаку уявної частини діелектричної фази $\sigma_2(\omega) = \omega\varepsilon_2/i4\pi$, можна говорити про уявну добавку в (11.2.25) не як про «діелектричну» або ємнісну, а як про індуктивну. Відповідно до цього вище порога протікання зі збільшенням концентрації першої фази уявна частина ефективної провідності може змінити свій знак з додатнього на від'ємний. Середовище загалом стане не «ємнісним», а «індуктивним». На Рис. 11.3 наведено розрахунок залежності уявної частини ефективної провідності, побудований в рамках ЕМТ-наближення для випадку ненульової уявної частини першої (металевої) фази: $\sigma_1(\omega) = \sigma_1 - \omega\varepsilon_1/i4\pi$, $\sigma_2(\omega) = \omega\varepsilon_2/i4\pi$.

У критичній області з (11.12) та (11.14) відразу ж слідує

$$\varepsilon_e = \varepsilon_2 \tau^{-q} - \varepsilon_2 \tau^t. \quad (11.2.26)$$

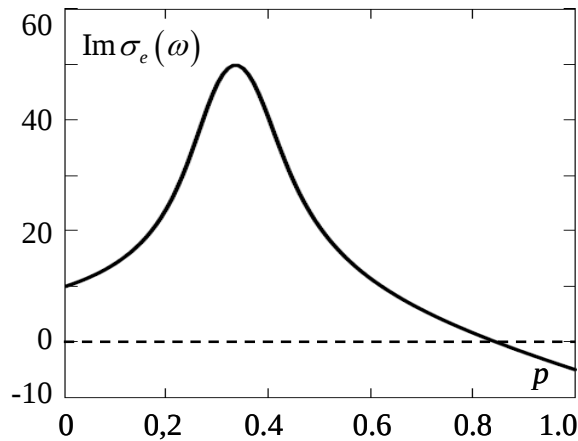


Рис. 11.3. Концентраційна залежність ефективної діелектричної проникності $\text{Im } \sigma_e(\omega)$: $\sigma_1 = 1000$, $\sigma_2 = 1$, $\omega \varepsilon_1 / 4\pi = -5$, $\omega \varepsilon_2 / 4\pi = 10$ (у довільних одиницях). Концентрація, за якої ε_e змінює знак, $p^* \approx 0,86$

А з умови $\varepsilon_e(p^*) = 0$ випливає вираз

$$p^* = p_c + p_c \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)^{\frac{1}{t+q}}. \quad (11.2.27)$$

При цьому, звичайно, має виконуватися нерівність

$$\tau^* = \frac{p^* - p_c}{p_c} \ll 1. \quad (11.2.28)$$

Як було показано вище, виведення всіх розглянутих випадків поведінки ефективної провідності в критичній області спирався на встановлені раніше

перколяційні вирази $\sigma_e(\tau, \omega = 0)$ (5.2.4), (5.2.11) або – що те саме – на ієрархічну модель перколяційної структури. Можна сказати, що отримані вирази для $\sigma_e(\omega)$ справедливі настільки, наскільки справедливі схеми перколяційної моделі, іншими словами, доти, поки містки та прошарки є головними визначальними елементами при протіканні струму в системі. Доки є сильна неоднорідність $\text{Re } \sigma_1(\omega) \gg \text{Re } \sigma_2(\omega)$ – це, очевидно, так. Однак можливі й інші випадки, наприклад, системи з малою дисипацією, коли $\text{Re } \sigma_1(\omega)$ і $\text{Re } \sigma_2(\omega)$ – малі (в ідеалі – прямують до нуля), а уявні частини $\text{Im } \sigma_1(\omega)$ і $\text{Im } \sigma_2(\omega)$ мають різні знаки. Образно кажучи, коли середовище складається із суміші ємнісних та індуктивних елементів із гранично малою дисипативною частиною. Такий випадок виходить за рамки стандартної теорії протікання та буде розглянуто у розділі 20.

Контрольні запитання

1. У чому різниця між DC-задачами та AC-задачами?
2. Що таке питомий кондактанс?
3. Як можна описати провідність при змінному струмі?
4. Які припущення прийнято у наближенні ЕМТ?
6. Яким чином можна знайти концентраційні залежності ефективної провідності та діелектричної проникності у наближенні ЕМТ?
7. Як поводить себе дійсна частина ефективної провідності за зміни концентрації металевої фази?

8. Як поводить ся уявна частина ефективної діелектричної проникності при зміні концентрації металевої фази?
9. У яких випадках передбачення ЕМТ стають лише якісними?
10. Яка поведінка ефективної провідності та діелектричної проникності в теорії протікання поблизу порога протікання?

Розділ 12. Гальваномагнітні властивості макроскопічно-непорядкованих середовищ

12.1 Тензор провідності в магнітному полі

При внесенні середовища в магнітне поле «звичайний» закон Ома для ізотропного середовища $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ (σ – скаляр) набуває вигляду

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma}(H) \mathbf{E}, \quad (12.1.1)$$

де $\hat{\sigma}(H)$ – тензор провідності,

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_s & \sigma_a & 0 \\ -\sigma_a & \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad (12.1.2)$$

напруженість магнітного поля $\mathbf{H} \parallel oz$.

Надалі будемо в якості залежності від поля H діагональних σ_s та недіагональних σ_a і σ_z компонент тензора (12.1.2) використовувати стандартні модельні вирази:

$$\sigma_s = \frac{\sigma}{1 + \beta^2}, \quad \sigma_a = \frac{\sigma\beta}{1 + \beta^2}, \quad (12.1.3)$$

де $\sigma = \sigma(H=0)$, безрозмірне магнітне поле $\beta = \mu H/c$, μ – рухливість носіїв струму в середовищі, c – швидкість світла. При цьому прийнято розрізняти два випадки слабого поля:

$$\beta \ll 1, \quad \sigma_s = \sigma, \quad \sigma_a = \beta, \quad (12.1.4)$$

сильного поля:

$$\beta \gg 1, \quad \sigma_s = \sigma\beta^{-2}, \quad \sigma_a = \sigma\beta^{-1}. \quad (12.1.5)$$

Часто використовуються й інші позначення, наприклад:

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j} + \mathbf{j} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} \parallel \mathbf{H}, \quad (12.1.6)$$

або

$$\sigma \mathbf{E} = \rho \mathbf{j} + \mathbf{j} \times \boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\beta} \parallel \mathbf{H}, \quad (12.1.7)$$

де σ те саме, що і (12.1.3), $\rho = 1/\sigma$, $\beta = -\sigma b$.

Постійна Холла R у цих позначеннях має вигляд

$$R = -\frac{b}{H} = \frac{\beta}{\sigma H}. \quad (12.1.8)$$

Сама по собі складна задача визначення ефективної питомої провідності σ_e , ще більше ускладнюється при $H \neq 0$, і ця додаткова складність пов'язана з двома факторами: по-перше, провідність, що є скаляром при $H = 0$, у разі, коли $H \neq 0$ стає тензором. По-друге, при включенні магнітного поля, спотворення електричних полів та струмів навколо відокремленого включення суттєво змінюються. При $\beta \gg 1$ спотворення струмів відбувається не тільки на відстані порядку розміру включення a , а набагато більшій відстані порядку величини βa (Рис. 12.1).

Але при $\beta \gg 1$ і $p\beta \gg 1$ (p – концентрація включень) та $p \ll 1$ ЕМА вже «не працює». Не існує рішення «затравочної» задачі для ЕМА – задачі про розподіл полів і струмів всередині і навколо відокремленого включення, оскільки немає самого відокремленого включення. Багато робіт, які не враховують цей факт, мають неясні межі застосування.

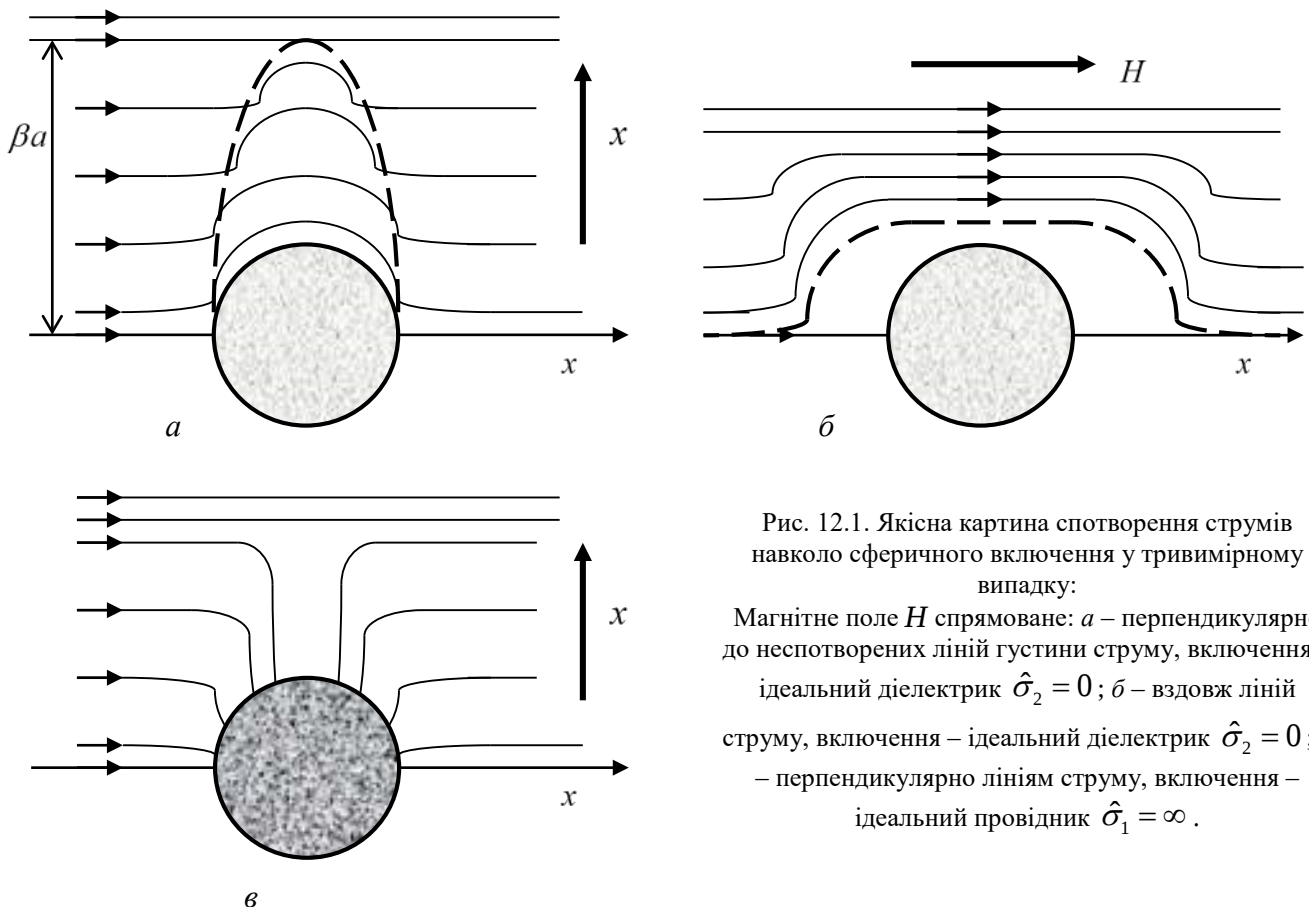


Рис. 12.1. Якісна картина спотворення струмів навколо сферичного включення у тривимірному випадку:
Магнітне поле H спрямоване: a – перпендикулярно до неспотворених ліній густини струму, включення – ідеальний діелектрик $\hat{\sigma}_2 = 0$; $б$ – вздовж ліній струму, включення – ідеальний діелектрик $\hat{\sigma}_2 = 0$; $в$ – перпендикулярно лініям струму, включення – ідеальний провідник $\hat{\sigma}_1 = \infty$.

Коли відстань βa «дотягується» до сусідніх включень (стає порівнянною з відстанню між сусідніми включеннями), з'являється багато розмірних ефектів. Зокрема, можлива

ситуація, коли при $p\beta \gg 1$, σ_s^e пропорційна непарному ступеню поля $\sigma_s^e \sim \beta^{-1}$, поздовжня σ_z^e починає залежати від магнітного поля непарним чином: $\sigma_z^e \sim \beta^{-1}$.

У великих полях ($\beta \gg 1$) стає суттєвим те, що $\sigma_a > \sigma_s$ і, навіть при малих неоднорідностях, коли $\delta\sigma/\sigma \ll 1$ і $\delta\beta/\beta \ll 1$, флуктуації σ_a можуть бути набагато більші за саму σ_s і застосування теорії збурень неможливе. Розвинуті методи, що дозволили вийти за рамки звичайної теорії збурень у випадку $\beta \gg 1$ показали, що при слабких флуктуаціях σ ($\delta\sigma/\sigma \ll 1$):

$$\hat{\sigma} = \sigma(r) \begin{pmatrix} \beta^{-2} & \beta^{-1} & 0 \\ -\beta^{-1} & \beta^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \gg 1, \quad (12.1.9)$$

ефективні значення $\sigma_a^e \sim \beta^{-1}$ і $\sigma_z^e \sim \beta^0$ залежать від магнітного поля стандартно, проте діагональна компонента тензора ефективної провідності σ_s^e залежить від поля несподівано (закон Дихне-Дрейзена):

Врахування обмеженості розмірів середовища вздовж магнітного поля L_z при великих магнітних полях може суттєво змінити ефективну провідність. Наприклад, у гранично сильних полях маємо

$$\sigma_s^e \sim H^{-1} L_z^{-1/2}, \quad \beta \rightarrow \infty. \quad (12.1.10)$$

Немає можливості розглянути всю різноманітність поведінки неоднорідних середовищ у магнітному полі. Тому зупинимося лише на деяких:

1. Одновимірний випадок – шаруваті середовища у магнітному полі.
2. Двовимірні D -середовища та двовимірні полікристалічні середовища.
3. Сильно неоднорідні двофазні середовища ($\sigma_1(H=0) \gg \sigma_2(H=0)$) поблизу порога протікання у двовимірному та тривимірному випадках.

12.2 Шаруваті середовища в магнітному полі

Розглянемо випадок, коли вісь oz спрямована вздовж магнітного поля, $oz \parallel \mathbf{H}$ вісь ox - вздовж шарів, а oy - поперек шарів. У цьому випадку (12.1.1) записується у вигляді

$$\left. \begin{aligned} j_x &= \sigma_s(y) E_x + \sigma_a(y) E_y \\ j_y &= -\sigma_a(y) E_x + \sigma_s(y) E_y \end{aligned} \right\}, \quad (12.2.1)$$

та врахування граничних умов (аналогічно випадку шаруватих середовищ без магнітного поля, параграф 3.4) призводить до виразів

$$j_y = \langle j_y \rangle, E_x = \langle E_x \rangle. \quad (12.2.2)$$

За допомогою звичайного методу «дужок» (див. параграф 3.4) можна отримати наступний тензор ефективної провідності:

$$\sigma_e = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^e & \sigma_{xy}^e \\ \sigma_{yx}^e & \sigma_{yy}^e \end{pmatrix}, \quad \sigma_{yx}^e = -\sigma_{xy}^e, \quad (12.2.3)$$

де

$$\sigma_{xx}^e = \langle \sigma \rangle - \frac{\langle \beta^2 \rangle}{\left\langle \frac{1+\beta^2}{\sigma} \right\rangle}, \quad \sigma_{xy}^e = \frac{\langle \beta \rangle}{\left\langle \frac{1+\beta^2}{\sigma} \right\rangle}, \quad \sigma_{yy}^e = \frac{1}{\left\langle \frac{1+\beta^2}{\sigma} \right\rangle}. \quad (12.2.4)$$

Зауважимо, що якщо в тензорі локальної провідності $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$, то в тензорі ефективної провідності це не так: $\sigma_{xx}^e \neq \sigma_{yy}^e$. Це, звичайно пов'язано з тим, що шарувате середовище в середньому є анізотропним і без присутності магнітного поля.

12.3 Дуальні середовища у магнітному полі

Задача про обчислення σ_e у двовимірному самодуальному середовищі була узагальнена на випадок, коли середовище внесено в перпендикулярне градієнту неоднорідності магнітне поле. Тоді у випадку $H \neq 0$ можна отримувати точний розв'язок задачі, придатний для будь-якої великої неоднорідності (розділ 6). Було розглянуто два випадки, коли для значень параметрів у фазах виконується 1) $\beta_1 = \beta_2, \sigma_1 \neq \sigma_2$ і 2) $\sigma_1 = \sigma_2, \beta_1 \neq \beta_2$.

Узагальнення перетворень Діхне має вигляд

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j} &= \tilde{a}(\tilde{\mathbf{j}} + \tilde{\mathbf{b}} \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}) \\ \mathbf{E} &= \tilde{a}(\tilde{c} \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{d}} \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{j}}) \end{aligned} \right\}, \quad (12.3.1)$$

закон Ома в магнітному полі можна записати

$$\mathbf{j} + \mathbf{j} \times \boldsymbol{\beta} = \sigma \mathbf{E}. \quad (12.3.2)$$

Зауважимо, що β в (12.1.17) має обернений знак у порівнянні з (12.1.7), що, однак, ніяк не позначиться на кінцевому результаті. Підставляючи (12.3.1) (12.3.2) для полів і струмів, позначених тильдою, отримуємо той же вигляд, що і (12.3.2), де

$$\tilde{\sigma} = \frac{\tilde{b}^2 + (\sigma\tilde{c} - \beta\tilde{b})^2}{\sigma(\tilde{c} + \tilde{b}\tilde{d})}, \quad \tilde{\beta} = \frac{(\beta + c\tilde{d})(\sigma\tilde{c} - \beta\tilde{b}) - \tilde{b}}{\sigma(\tilde{c} + \tilde{b}\tilde{d})}. \quad (12.3.3)$$

Середовище, що має тильдовані характеристики, буде дуальною основою, якщо зажадати, щоб в області першої фази

$$\sigma = \sigma_1, \quad \beta = \beta_1, \quad \tilde{\sigma} = \sigma_2, \quad \tilde{\beta} = -\beta_2, \quad (12.3.4)$$

а в області другої фази

$$\sigma = \sigma_2, \quad \beta = \beta_2, \quad \tilde{\sigma} = \sigma_1, \quad \tilde{\beta} = -\beta_1, \quad (12.3.5)$$

звідки можна знайти $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{d}$, після чого, повторюючи ті ж міркування, але для усереднених величин $\langle \mathbf{E} \rangle, \langle \mathbf{j} \rangle$, для $p = 1/2$ записуємо

$$\sigma_e^2 \tilde{d} + 2\beta_e \tilde{\sigma} - (1 + \beta_e^2) \tilde{b} = 0. \quad (12.3.6)$$

Для визначення обох ефективних компонентів σ_e і β_e необхідно одержати ще одне співвідношення між ними. Для цього розглянемо ще одне лінійне перетворення типу (12.3.1) для переходу до двічі тильдованого середовища, яке нічим, крім зміни знака магнітного поля, не відрізняється від вихідного, тобто замість (12.3.4) та (12.3.5) тепер у першій фазі маємо

$$\sigma = \sigma_1, \quad \beta = \beta_1, \quad \tilde{\tilde{\sigma}} = \sigma_1, \quad \tilde{\tilde{\beta}} = -\beta_1, \quad (12.3.7)$$

і для другої отримуємо

$$\sigma = \sigma_2, \quad \beta = \beta_2, \quad \tilde{\tilde{\sigma}} = \sigma_2, \quad \tilde{\tilde{\beta}} = -\beta_2, \quad (12.3.8)$$

Зрештою для двічі тильдованого середовища знаходимо

$$\sigma_e^2 \tilde{\tilde{d}} + 2\beta_e \tilde{\tilde{\sigma}} - (1 + \beta_e^2) \tilde{\tilde{b}} = 0. \quad (12.3.9)$$

Підставляючи коефіцієнти $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{d}$ в (12.3.6) та (12.3.9) та розв'язуючи їх відносно σ_e і β_e , маємо

$$\left. \begin{aligned} \sigma_e &= \frac{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_1 \beta_2 - \sigma_2 \beta_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)^2}}, \\ \beta_e &= \sigma_e \frac{\beta_1 + \beta_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \frac{\beta_1 + \beta_2}{\sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + (\sigma_1 \beta_2 - \sigma_2 \beta_1)^2}} \end{aligned} \right\}. \quad (12.3.10)$$

Зауважимо, що співвідношення (12.3.10) справедливе за будь-якого розподілу фаз (проте, середовище має бути в середньому ізотропним, інакше для визначення ефективних значень буде недостатньо двох величин σ_e і β_e) та їх концентрації, тому, наприклад, у тому випадку, коли одна з фаз – ізолятор ($\hat{\sigma}_2 = 0$), з (12.3.9) випливає

$$\frac{\beta_e}{\sigma_e} = \frac{\beta_1}{\sigma_1}, \quad p > 1/2, \quad (12.3.11)$$

звідки при слабких магнітних полях для ефективного коефіцієнта Холла отримуємо:

$$R_e = R_1, \quad (12.3.12)$$

тобто вище порога протікання (там, де ефективний коефіцієнт Холла не дорівнює нулю, при $\hat{\sigma}_2 = 0$) R_e – постійна величина, яка залежить від концентрації.

Як і у випадку $H = 0$, в D -середовищах в магнітному полі можна записати співвідношення взаємності, що зв'язують між собою ефективні коефіцієнти вище і нижче порога протікання.

Можна також отримати (в основному методами ТФКЗ) вирази σ_e ($H \neq 0$) для різного виду регулярних структур, наприклад для ґратки з вузьких діелектричних періодично розташованих включень (подряпин), або які не стосуються один одного періодично розташованих квадратів однієї з фаз в іншій, і т. п. Область застосування таких виразів заздалегідь не ясна, особливо в сильних магнітних полях, коли спотворення струмів включенням простягаються на великі відстані. Заздалегідь не зрозуміло, як впливає мале відхилення структури від суворої періодичності (яка обов'язково використовується при вирішенні), тобто стійкість рішення щодо «ворушіння» структури.

Було розглянуто узагальнені перетворення Діхне для випадку, коли двовимірне середовище при $H = 0$ є локально анізотропною. Тоді в магнітному полі, перпендикулярному до площини середовища, маємо

$$\hat{\sigma}(r) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{\Lambda} \\ \sigma_{\Lambda} & \sigma_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_a \\ -\sigma_a & 0 \end{pmatrix}. \quad (12.3.13)$$

У середовищі, що є від початку ізотропним, було б $\sigma_{\Lambda} = 0$. Зокрема ці узагальнені перетворення дозволяють записати вираз тензора ефективної провідності $\hat{\sigma}_e(H)$ для двовимірного полікристалічного середовища:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_e &= \begin{pmatrix} \sigma_s^e & \sigma_a^e \\ -\sigma_a^e & \sigma_s^e \end{pmatrix}, \\ \sigma_s^e &= \sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22} - \frac{(\sigma_{12} + \sigma_{21})^2}{4}}, \quad \sigma_a^e = \frac{\sigma_{12} - \sigma_{21}}{2} \end{aligned} \right\}. \quad (12.3.14)$$

Ці вирази можна отримати і з інших міркувань простим способом, «зібравши» полікристал з двофазного середовища. Справді, уявімо, що локальна анізотропія (12.3.13) «не справжня», а утворена штучним чином – локальне середовище являє собою плоскопаралельні нескінченно тонкі смужки з різними провідностями:

$$\hat{\sigma}_1(H) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2(H) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}. \quad (12.3.15)$$

Зв'язок між значеннями провідностей у смужках a_i , b_i і тензором провідності монокристала розглянута вище (12.2.4), у двофазному випадку, що аналізується, вона набуває вигляду

$$\sigma_{11} = 2 \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}, \quad \sigma_{22} = \frac{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}{2(a_1 + a_2)}, \quad \sigma_{12} = -\sigma_{21} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 + a_2}. \quad (12.3.16)$$

Тензор ефективної провідності двофазного середовища в магнітному полі (12.3.10) виражений через σ_s^e і σ_a^e виражається через $\hat{\sigma}_1(H)$ і $\hat{\sigma}_2(H)$ з (12.3.14) наступним чином:

$$\sigma_s^e = \sqrt{a_1 a_2} \sqrt{1 + \left(\frac{b_1 - b_2}{a_1 + a_2} \right)^2}, \quad \sigma_a^e = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 + a_2}. \quad (12.3.17)$$

Для того щоб отримати тензор ефективної провідності полікристалу, необхідно отримати a_i і b_i з (12.3.16) у вигляді функції компонент тензора σ_{ik} із (12.3.14). Як видно з (12.3.16) та (12.3.17),

$$\sigma_{11}\sigma_{22} = (\sigma_s^e)^2, \quad \sigma_{12} = \sigma_a^e, \quad (12.3.18)$$

звідки відразу і виражається для тензора ефективної провідності полікристалу в магнітному полі (12.3.13).

Цей результат можна отримати, якщо використовувати узагальнення струмової пастки (див. розділ 6) для випадку не рівного нулю магнітного поля.

12.4 Сильно неоднорідні середовища поблизу порога протікання, двовимірний випадок

Розглянемо гальваномангнітні властивості при початковій (без магнітного поля) значній неоднорідності, $\sigma_1(H=0)/\sigma_2(H=0) \gg 1$. В цьому випадку у розподілі струмів велику роль грає перколяційна структура, але на її фоні і «розіграє свою партію» магнітне поле.

Два часткових випадки: 1) перша фаза – ідеальний провідник $\hat{\sigma}_1 = \infty$ 2) друга фаза - ідеальний ізолятор $\sigma_2 = 0$.

В першому випадку:

$$\sigma_s^e = \sigma_{s2} f_2(p), \quad \sigma_a^e = \sigma_{a2}, \quad \tau < 0, \quad (12.4.1)$$

де $f_2(p)$ – функція, що визначає концентраційну поведінку ефективної провідності нижче порога перебігу при $H = 0$,

$$f_2(p) = \sigma_e(H=0, p)/\sigma_2, \quad \tau < 0, \quad (12.4.2)$$

Для $|\tau| \ll 1$ ця функція, як відомо з теорії протікання (розділ 5), дорівнює $f_2(\tau) = |\tau|^{-q}$.

У другому випадку, при $\hat{\sigma}_2 = 0$ маємо

$$\sigma_s^e = \sigma_{s1} \frac{\sigma_{s1}^2 + \sigma_{a1}^2}{\sigma_{s1}^2 + \sigma_{a1}^2 f_1(\tau)} f_1(\tau), \quad \sigma_a^e = \sigma_{a1} \frac{\sigma_{s1}^2 + \sigma_{a1}^2}{\sigma_{s1}^2 + \sigma_{a1}^2 f_1(\tau)} f_1^2(\tau), \quad \tau > 0, \quad (12.4.3)$$

де $f_1(\tau)$ вводиться аналогічно $f_2(\tau)$:

$$f_1(p) = \sigma_e(H=0, p)/\sigma_1, \quad \tau > 0, \quad (12.4.4)$$

і при $\tau \ll 1$

$$f_1(\tau) = \tau^t, \quad \tau > 0. \quad (12.4.5)$$

Таким чином, поблизу порога протікання (12.4.3) набувають вигляду

$$\sigma_s^e = \sigma_1 \frac{\tau^t}{1 + \beta_1^2 \tau^{2t}}, \quad \sigma_a^e = \sigma_1 \beta_1 \frac{\tau^{2t}}{1 + \beta_1^2 \tau^{2t}}, \quad (12.4.6)$$

ці вирази, для $\beta_1 \tau^t \ll 1$, спрощуються:

$$\sigma_s^e = \sigma_1 \tau^t, \quad \sigma_a^e = \sigma_1 \beta_1 \tau^{2t}, \quad \beta_1 \tau^t \ll 1. \quad (12.4.7)$$

При цьому діагональна компонента тензора ефективної провідності поводить ся так само, як якби магнітне поле дорівнювало нулю. Зауважимо, оскільки $\tau^t \ll 1$ малість $\beta_1 \tau^t$ зовсім не означає малість безрозмірного магнітного поля β_1 .

У випадку великого поля, причому настільки великого, що не тільки $\beta_1 \gg 1$, але і $\beta_1 \tau^t \gg 1$, з (12.4.6) випливає

$$\sigma_s^e = \sigma_1 \beta^{-2} \tau^{-t}, \quad \sigma_a^e = \sigma_1 \beta^{-1} \tau^0, \quad \tau > 0. \quad (12.4.8)$$

Як видно з (12.4.8), діагональна компонента тензора ефективної провідності поводить ся незвичайним чином при наближенні до порога протікання, коли місток стає все довшим, а його опір – все більше, діагональна компонента не зменшується, а збільшується $\sigma_s^e \sim \tau^{-t}$.

Ефективна константа Холла R_e , як випливає з (12.4.6), не залежить від магнітного поля

$$R_e = \frac{\sigma_1^e}{(\sigma_a^e)^2 H} = R_1. \quad (12.4.9)$$

Цікаво відзначити, що в досить сильному магнітному полі, гранична умова, при $\hat{\sigma}_2 = 0$ у другій фазі стає такою ж, як і для $\hat{\sigma}_1 = \infty$ у першій фазі, тобто при $\hat{\sigma}_1 = \infty$ межа першої («металевої»!) фази поводить ся як діелектрик. На Рис. 12.2 та 12.3 наведені для наочності схематичні концентраційні та польові залежності σ_s^e і σ_a^e у двовимірному випадку відповідно вище та нижче порога протікання.

Зазначимо, що хоча при зміні магнітного поля в $\sigma_{s1} = \sigma_1 / (1 + \beta_1^2)$ перехід від залежності $\sigma_{s1} \sim \beta^e$ до залежності $\sigma_{s1} \sim \beta_1^{-2}$ відбувається при $\beta_1 \sim 1$, в σ_s^e він «затягнутий». Справді, оскільки $\sigma_s^e \sim (1 + \beta_1^2 \tau^{2t})^{-1}$, і тепер цей перехід відбувається за $\beta_1 \sim \tau^{-2t} \gg 1$, тобто при набагато більшому полі. Це ж «затягування» переходу від однієї польової залежності до іншої спостерігається і для σ_a^e .

Загальний випадок, коли перша фаза – не ідеальний провідник, а має скінчену провідність, а друга – не ідеальний ізолятор – також має скінчену провідність, хоч і набагато меншу, ніж перша фаза уточнює два наведені вище окремі випадки, а головне, дозволяє описати поведінку системи в області розмазування (в ідеальних випадках ця область вироджується у крапку $p = p_c$). Як виявляється, у магнітному полі стандартна область розмазування Δ модифікується. Для часткового випадку, коли $\beta_1 = \beta_2$, маємо

$$\Delta_H = \frac{\Delta}{(1 + \beta^2)^{\frac{1}{t+q}}} = \left(\frac{\sigma_2 / \sigma_1}{1 + \beta^2} \right)^{\frac{1}{t+q}}, \quad (12.4.10)$$

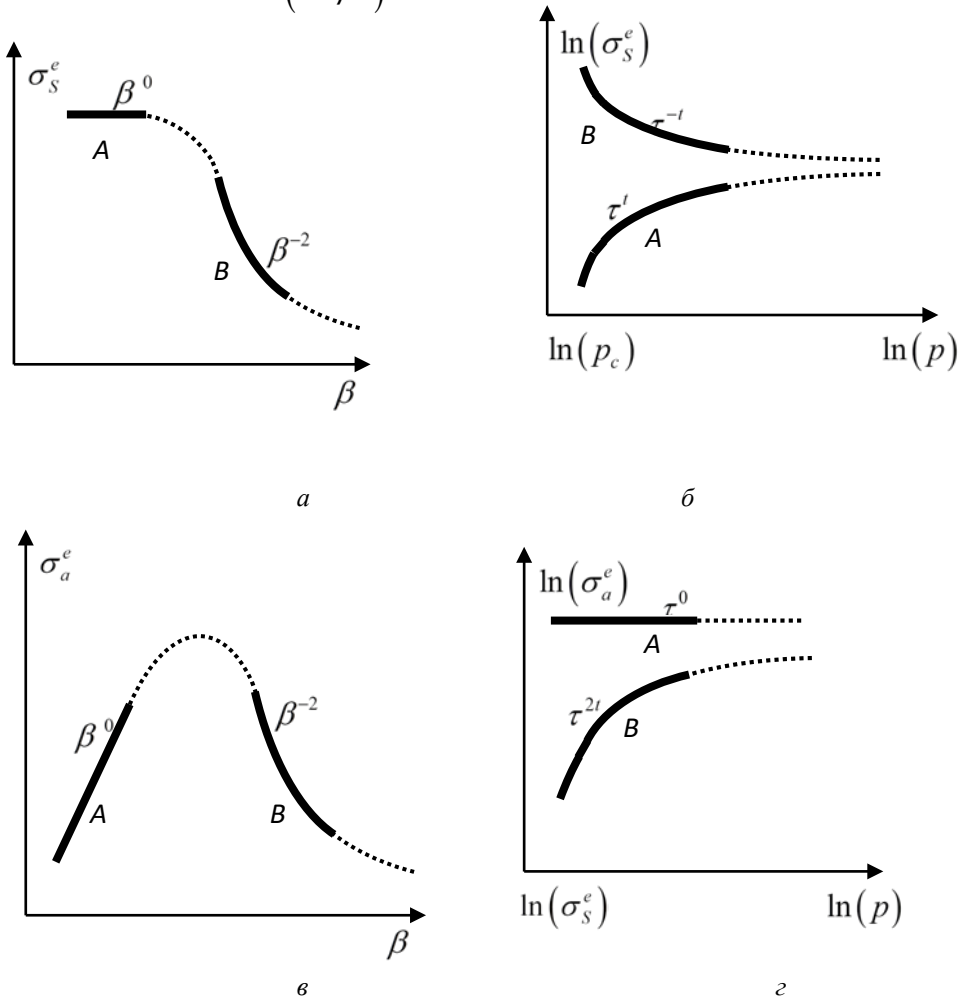


Рис. 12.2. Польові (а, в) та концентраційні (б, г) залежності σ_s^e і σ_a^e у двовимірному випадку вище за поріг протікання, у тому випадку, коли друга фаза – ідеальний ізолятор $\hat{\sigma}_2 = 0$:
 Діапазони магнітних полів: А- $1 \ll \beta_1 \ll \tau^{-t}$, $\sigma_s^e = \sigma_1 \tau^t$, $\sigma_a^e = \sigma_1 \tau^{2t} \beta_1$, В- $\beta_1 \gg \tau^{-t}$, $\sigma_s^e = \sigma_1 \tau^{-t} \beta_1^{-2}$, $\sigma_a^e = \sigma_1 \beta_1^{-1}$.

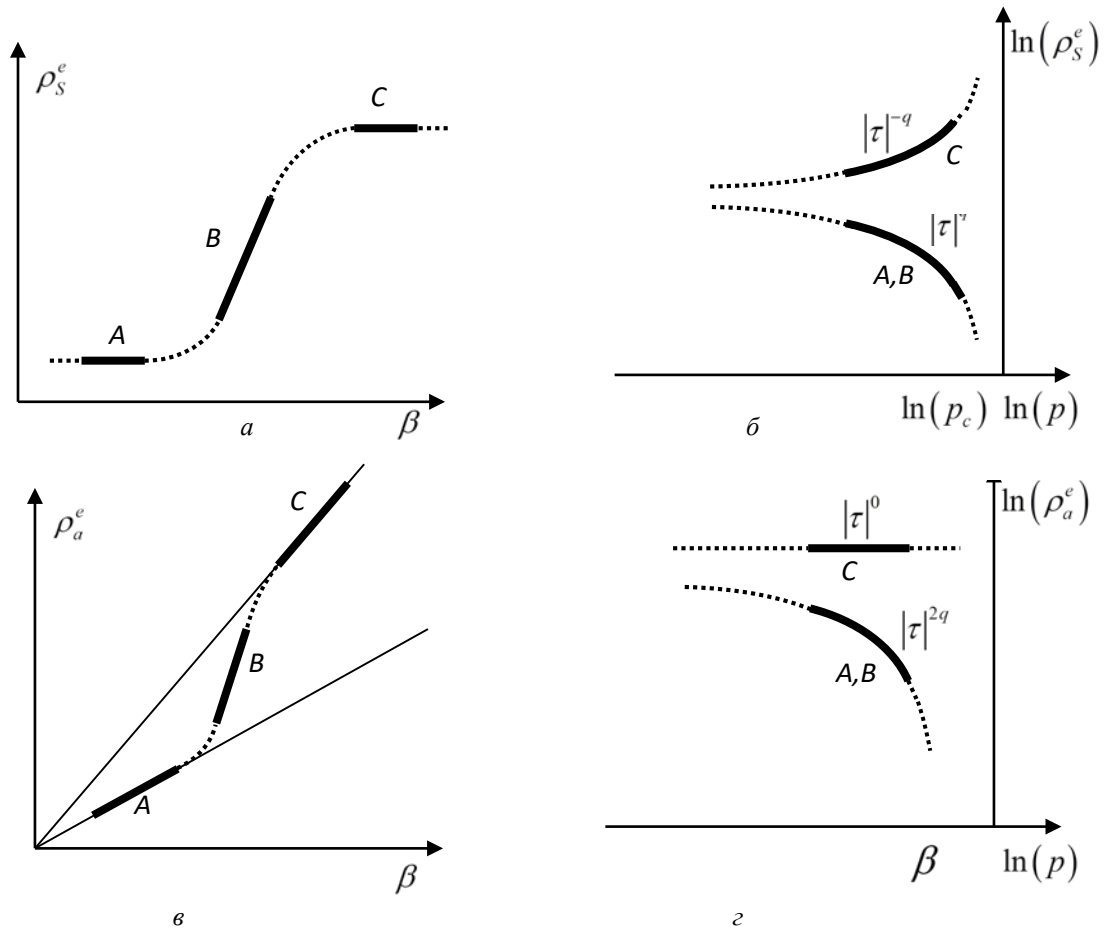


Рис. 12.3. Польові (а, в) та концентраційні (б, г) залежності ρ_s^e і ρ_a^e у двовимірному випадку нижче за поріг протікання, у тому випадку, коли друга фаза – ідеальний провідник $\hat{\sigma}_2 = \infty$:
Діапазони магнітних полів: А - $\beta_2 \ll 1$, $\rho_s^e = \rho_s |\tau|^q$, $\rho_a^e = \rho_2 |\tau|^{2q} \beta_2$, В - $1 \ll \beta_1 \ll \tau^{-q}$,
 $\rho_s^e = \rho_s |\tau|^q \beta_2^2$, $\rho_a^e = \rho_2 |\tau|^{2q} \beta_2^3$, С - $\beta \gg |\tau|^{-q}$, $\rho_s^e = \rho_2 |\tau|^{-q}$, $\rho_a^e = \rho_2 \beta_2$.

тобто, чим більше магнітне поле, тим більше область розмазування Δ_H . Таким чином, можлива ситуація, коли система, що знаходилася всередині області розмазування Δ , при включенні магнітного поля, виходить з області розмазування (тепер Δ_H). Вирази для σ_s^e і σ_a^e (12.4.6) були отримані на підставі аналогічних виразів для ефективної провідності за відсутності магнітного поля та поза областю розмазування $|\tau| \gg \Delta$. Всередині області розмазування ефективна провідність має, звичайно, іншу залежність від значень провідностей фаз. При включенні магнітного поля можливі два різні випадки при $|\tau| \gg \Delta$: $|\tau| \gg \Delta_H$ і $|\tau| \ll \Delta_H$. Тоді маємо для області А

$$\beta \gg \tau^{-t}, \quad \sigma_s^e = \sigma_1 \tau^{-t} \beta^{-2}, \quad \sigma_a^e = \sigma_1 \beta^{-1}, \quad |\tau| \gg \Delta_H, \quad (12.4.11)$$

для області B

$$\tau^{-t} \sqrt{\sigma_2/\sigma_1} \ll \beta \ll \tau^t, \quad \sigma_s^e = \sigma_1 \tau^t, \quad \sigma_a^e = \sigma_1 \tau^{2t} \beta, \quad |\tau| \gg \Delta_H, \quad (12.4.12)$$

для області C

$$1 \ll \beta \ll \tau^{-t} \sqrt{\sigma_2/\sigma_1}, \quad \sigma_s^e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \beta^{-1}, \quad \sigma_a^e = 2\sigma_2 \beta^{-1}, \quad |\tau| \ll \Delta_H, \quad (12.4.13)$$

для області D

$$\beta \ll 1, \quad \sigma_s^e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}, \quad \sigma_a^e = 2\sigma_2 \beta, \quad |\tau| \ll \Delta_H. \quad (12.4.14)$$

Нерівності для безрозмірного поля β , наведені в (12.4.11)–(12.4.14), впливають з обмежень на τ , наприклад, з $|\tau| \gg \Delta_H = \Delta_0 / (1 + \beta^2)^{\frac{1}{t+q}}$ ($t_2 = q_2$) відразу ж випливає нерівність $\beta \gg \tau^{-t} \sqrt{\sigma_2/\sigma_1}$ (12.4.12).

Для наочності, на Рис. 12.3. наведено польові залежності σ_s^e і σ_a^e двовимірному випадку нижче за поріг протікання.

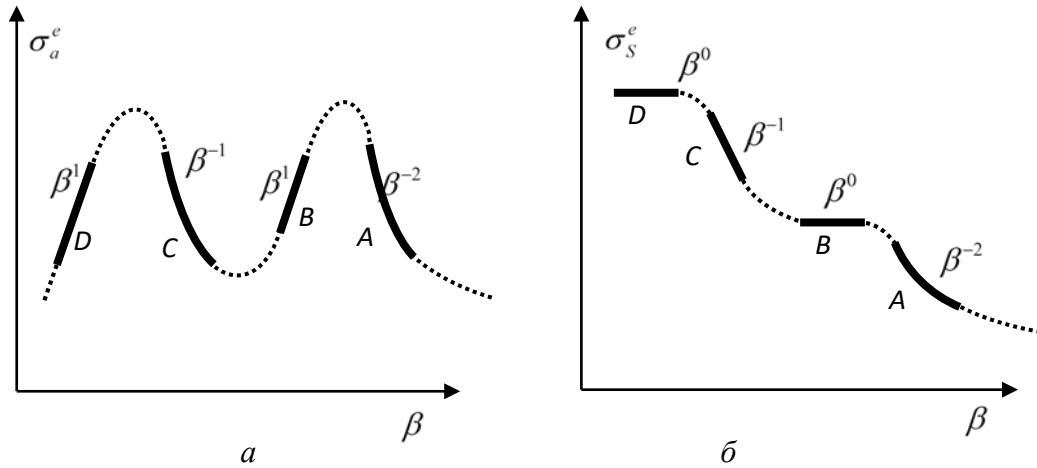


Рис. 12.4. Польові залежності σ_s^e і σ_a^e в області розмазування: діапазони магнітних полів A , B , C та D відповідають виразам (12.4.11) – (12.4.14).

Як видно з (12.4.13) (область C на Рис. 12.4,а) польова залежність $\sigma_s^e \sim \beta^{-1}$ - аномальна, при парній по полю залежності σ_{s1} і σ_{s2} ефективна залежність σ_s^e по полю непарна.

Основні закономірності польової та концентраційної поведінки $\hat{\sigma}_e(H)$ у двовимірному випадку поза розмазуванням легко пояснюються і виводяться в рамках моделей типу NLB і ІМ. Так, див., наприклад, нижче порога протікання вздовж осі ox протікання струму відбувається аналогічно ситуації без магнітного поля, тому відразу ж отримуємо $\sigma_s^e = \sigma_{s2}(\beta)|\tau|^{-q}$, що збігається з першим виразом з (12.33), якщо врахувати, що поза областю розмазування $f_2(p) \sim |\tau|^{-q}$. Для недіагональної компоненти σ_a^e , (Рис. 12.5) ефективне значення визначається, як зв'язуюче середні за об'ємом струм $\langle j_y \rangle$ та поле $\langle E_x \rangle$:

$$\langle j_y \rangle = -\sigma_a^e \langle E_x \rangle, \quad (12.4.15)$$

при цьому до об'єму з розмірами порядку кореляційного радіусу ξ вздовж ox додана різниця потенціалів $\Delta\varphi = \langle E_x \rangle / \xi$, $\langle E_x \rangle \approx E$. Оскільки практично все падіння напруги відбувається на прошарку (з характерним розміром a_0), поле всередині прошарку набагато більше середнього значення $\langle E_x \rangle$ і має вигляд

$$E' = \langle E \rangle \cdot \xi / a_0. \quad (12.4.16)$$

Саме це поле і «створює» основний холлівський струм, спрямований уздовж прошарку:

$$j_y = -\sigma_a E' \approx -\sigma_a \langle E \rangle \xi / a_0, \quad (12.4.17)$$

Тут (в (12.4.17) і на Рис. 12.5) наведено випадок, коли прошарок витягнутий уздовж oy , однак врахування її звивистості нічого не змінює. Коли поле E' повернеться, одночасно з ним повернеться і холлівський струм, який перпендикулярний до поля (Рис. 12.5).

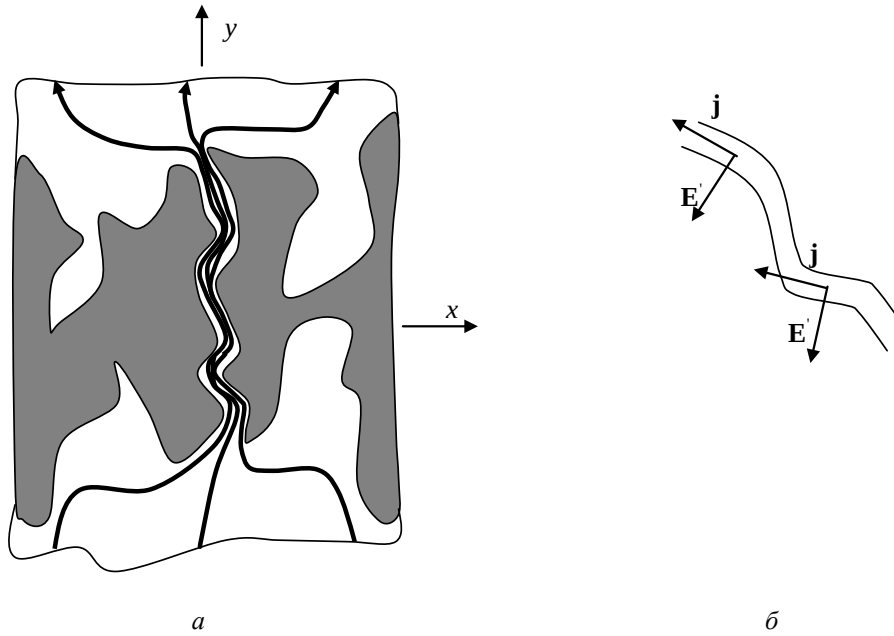


Рис. 12.5. Схема першого щабля ІМ (прошарок) для визначення недіагональної компоненти тензора ефективної провідності $\sigma^e(H)$ у двовимірному випадку:
a- для випадку нижче порога протікання, опір першої фази (затемнена) не враховується (ідеальний провідник); *б* – частина прошарку із зазначенням напрямку струмів та електричного поля.

Середній холлівський струм знаходиться з умови, що цей струм у прошарку $j_y \cdot a_0$ і є весь холлівський струм $\langle j_y \rangle \xi$:

$$\langle j_y \rangle = -j_y \cdot a / \xi = -\sigma_a \langle E \rangle, \quad (12.4.18)$$

звідки відразу слідує $\sigma_a^e = \sigma_a$, так як $\langle j_y \rangle = -\sigma_a^e \langle E_x \rangle$ (див. другий вираз в (12.4.1)).

Відсутність концентраційної залежності σ_a^e легко пояснюється в ІМ – холлівський струм «набирається» у прошарку, у полі E' , що у багато разів більше, ніж середнє, проте поперечний переріз прошарку в стільки ж разів менше, ніж кореляційний розмір ξ .

12.5. Сильна неоднорідність, тривимірний випадок

Тривимірний випадок набагато складніший за двовимірний. Якщо у випадку $H = 0$ поведінка σ_e (див. скейлінгові співвідношення в розділі 5) відрізняються тільки числовими значеннями критичних індексів, то при $H \neq 0$, як ми побачимо нижче, це не так. У тривимірному випадку можлива поява закономірностей, що принципово відрізняються від двовимірного випадку.

Особливу увагу в тривимірному випадку було приділено поведінці ефективної постійної Холла. За допомогою перколяційної моделі, для $\tau > 0$ можна записати

$$R_e \sim R_1 \tau^g, \quad g = 0,6 \div 1. \quad (12.5.1)$$

На основі феноменологічного розгляду для R_e отримано

$$R_e = h^2 R_2 \left(\frac{\sigma_e(H=0)}{\sigma_1(H=0)} \right)^{-2} + [R_1 - h^2 R_2] \Re(p, h), \quad (12.5.2)$$

де

$$h = \frac{\sigma_2(H=0)}{\sigma_1(H=0)}, \quad \Re(p, h) = \varphi(p, h) \cdot \left(\frac{\sigma_2(H=0)}{\sigma_1(H=0)} \right)^{-1}, \quad (12.5.3)$$

і $\varphi(p, h)$ входить у співвідношення

$$\sigma_a^e = \sigma_{a2} + (\sigma_{a1} - \sigma_{a2}) \varphi(p, h), \quad (12.5.4)$$

У критичній області маємо

$$\Re(p, h) = h^{-k} F \left(\frac{\tau}{h^{\frac{1}{t+q}}} \right), \quad (12.5.5)$$

і при

$$\tau > 0, \quad \Delta \ll \tau \ll 1, \quad \Re \sim \tau^{-q}, \quad (12.5.6)$$

$$\tau < 0, \quad \Delta \ll |\tau| \ll 1, \quad \Re \sim |\tau|^{-q}, \quad (12.5.7)$$

$$|\tau| \ll \Delta, \quad \Re \sim h^{-k}, \quad (12.5.8)$$

де

$$k = g/(t+q). \quad (12.5.9)$$

У двовимірному випадку $g_2 = 0$ і, таким чином, залежність R_e може бути лише плавною.

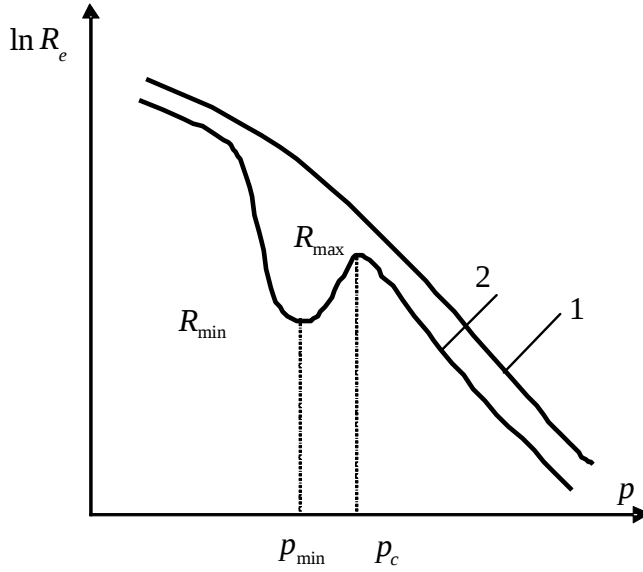


Рис. 12.6. Концентраційні залежності ефективної константи Холла R_e у критичній області $|\tau| \ll 1$:

$$1 - (R_1/R_2)^{\frac{t+q}{2q+g}} < \sigma_2/\sigma_1; \quad 2 - (R_1/R_2)^{\frac{t+q}{2q+g}} > \sigma_2/\sigma_1$$

Все вищевикладене для тривимірного випадку стосується слабого магнітного поля. У сильно неоднорідних середовищах, у сильному магнітному полі можливі принципово нові залежності. У сильно неоднорідному середовищі, тобто коли друга фаза – це діелектричні включення з малою концентрацією, поперечна та поздовжня (щодо магнітного поля) компоненти провідності при $H \rightarrow \infty$ аномальним чином ($\sim H^{-1}$) залежать від магнітного поля:

$$\sigma_s^e \sim 1/H, \quad \sigma_{ze} \sim 1/H, \quad \beta(1-p) \gg 1, \quad 1-p \ll 1, \quad (12.5.14)$$

де p - як завжди, концентрація першої добре проводить фази.

При $H \rightarrow \infty$ у магнітоопорі з'являється нетривіальна залежність його від магнітного поля у вигляді

$$\rho_e(H)/\rho_e(H=0) \sim H^{0.5}. \quad (12.5.15)$$

Деталі структури перколяційного кластера, не істотні при малих полях, можуть мати важливі наслідки для поведінки магнітоопору в сильних полях. Як приклад розглянемо частину містка з петлею і без (Рис.12.7).

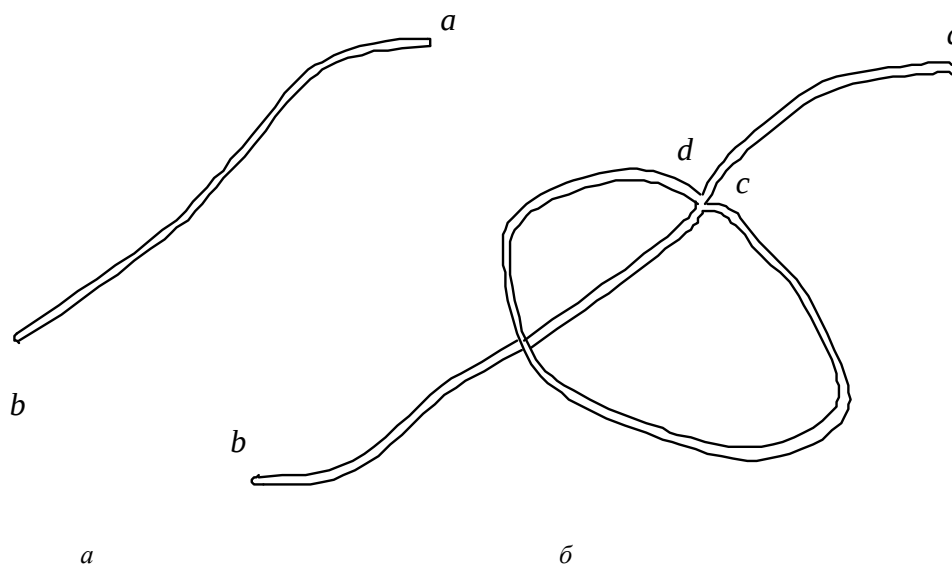


Рис. 12.7. Головний елемент перколяційної структури вище за поріг протікання – місток:
a- ділянка містка без петлі; *б* - місток з петлею, що створює в містку додаткову холлівську напругу.

Нехай місток складається з матеріалу, у якого магнітоопір не залежить від магнітного поля. За відсутності магнітного поля, опір ділянки містка між краями *a* і *b* (Рис. 12.6) r_{ab} не залежить від того, є петля чи ні. За наявності сильного магнітного поля струм, що протікає ділянкою, створює за рахунок ефекту Холла значну електрорушійну силу в петлі *cd*. Виникає за рахунок цієї ЕРС струм, пропорційний магнітному полю *H*, створює, в свою чергою, додаткову напругу Холла, пропорційну H^2 у каналі *ab*.

Стисло згадаємо, що розглянуті вище методи вивчення ефективної провідності в магнітному полі можуть бути використані при вивченні квантового ефекту Холла. Особливо просто показати «наявність» квантового ефекту Холла в дуальному середовищі, записуючи компоненти ефективного тензора провідності в магнітному полі у вигляді

$$\sigma_{xx}^e = \frac{\sigma_e}{1 + \beta_e^2}, \quad \sigma_{xy}^e = -\sigma_{yx}^e = \frac{\sigma_e \beta_e}{1 + \beta_e^2} \quad (12.5.16)$$

де σ_e і β_e взяті із (12.3.10). Спрямовуючи $\sigma_1 \rightarrow \infty$, $\beta_1 \rightarrow \infty$, при $\sigma_1 / \beta_1 = \text{const}$ отримуємо

$$\sigma_{xx}^e = 0, \quad \sigma_{xy}^e = \sigma_1 / \beta_1, \quad (12.5.17)$$

тобто діагональна дисипативна частина тензора провідності дорівнює нулю при ненульовій недіагональній.

Контрольні запитання

1. Який вигляд має тензор провідності в магнітному полі?
3. Якими виразами можна встановити залежність від магнітного поля діагональних і недіагональних компонентів тензора провідності в рамках стандартної моделі?
4. Які два випадки прийнято розрізняти залежно від величини магнітного поля?
5. Як можна визначити ефективну провідність у випадку слабого магнітного поля?
6. Як можна визначити ефективну провідність у випадку сильного магнітного поля?
7. Які розмірні ефекти можуть виникнути у випадку сильного магнітного поля?
8. Як можна визначити ефективну константу Холла для сильно неоднорідних середовищ?
9. Як поводить się діагональна компонента тензора ефективної провідності у випадку сильного магнітного поля поблизу порога протікання?
10. Як поводить się ефективна константа Холла у випадку сильного магнітного поля поблизу порога протікання?

Розділ 13. Фліккер-шум ($1/f$ -Шум)

13.1. Фліккер-шум у неоднорідних середовищах

Коли постійний електричний струм протікає через провідний зразок, спостерігаються флуктуації напруги. Однією з основних характеристик таких флуктуацій є спектральна густина. Спектральною густиною шуму (СГШ) називається фур'є-перетворення (спектр) від часового корелятора флуктуацій:

$$S_U = \{\delta U \delta U\}, \quad (13.1.1)$$

де під $\{\delta U \delta U\}$ розуміється фур'є-образ часового корелятора:

$$\{\delta U \delta U\} = 4 \int_0^{\infty} d(t_1 - t_2) \cos \omega(t_1 - t_2) \{U(t_1) - \langle U \rangle, U(t_2) - \langle U \rangle\}, \quad (13.1.2)$$

$$\{\delta U \delta U\} = 4 \int_0^{\infty} d(t_1 - t_2) \cos \omega(t_1 - t_2) \{\delta U(t_1) \delta U(t_2)\},$$

$$\delta U(t) = U(t) - \overline{U(t)}, \quad (13.1.3)$$

$\{\delta U(t_1), \delta U(t_2)\}$ - часовий корелятор, риска над $\overline{U(t)}$ означає усереднення за часом.

У стані термодинамічної рівноваги, тобто у відсутності струму, СГШ пропорційна температурі і не залежить від частоти – це зветься шумом Найквіста. При протіканні струму виникає додатковий (іноді його називають надлишковим) шум, СГШ якого обернено пропорційна частоті. Такий шум і називається $1/f$ -шумом (f – позначення частоти в радіотехніці), хоча часто, крім вже згаданого терміна „надлишковий”, його називають фліккер-шумом або струмовим шумом. На низьких частотах амплітуда СГШ перевищує інші види шумів, за рахунок його зворотної пропорційності до частоти.

Флуктуація напруги $\delta U(t)$ при постійному струмі або флуктуації струму $\delta I(t)$ при постійній нарузі зобов'язані своїм походженням флуктуаціям опору $\delta R(t)$ зразка. Остаточно фізична причина, що призводить до таких флуктуацій опору (СГШ обернено пропорційна частоті), не встановлена. Тут ми не обговорюватимемо ці можливі механізми виникнення $1/f$ -шума, а будемо використовувати феноменологічний підхід. Тим більше, що, крім середовищ, що проводять, $1/f$ -шум виявлений у великому числі різних явищ: у біології – наприклад, у коливанні цукру в крові, у дорожньому трафіку, в коливанні біржових котирувань та багатьох інших явищах.

Замість СГШ зручно користуватись відносною спектральною густиною флуктуацій (шуму) – ВСГ S :

$$\frac{\{\delta X \delta X\}}{X^2}, \quad X = J, U, R, \quad (13.1.4)$$

тоді для ВСГ опору має вигляд

$$S = \frac{\{\delta R \delta R\}}{R^2}, \quad (13.1.5)$$

причому в області лінійної провідності СГШ струму та напруги збігаються з гарною точністю

$$\frac{\{\delta R \delta R\}}{R^2} = \frac{\{\delta I \delta I\}}{I^2} = \frac{\{\delta U \delta U\}}{U^2}. \quad (13.1.6)$$

Часто замість ВСГ S використовують питому ВСГ C :

$$C = VS, \quad (13.1.7)$$

де V – об'єм зразка.

Величину C називають також (при $V \rightarrow 0$) локальною густиною шуму в точці $\mathbf{r}$, до якої «зтягується» об'єм V . Саме вона характеризує $1/f$ -шум даного макроскопічно неоднорідного зразка в даній точці, зокрема, $1/f$ -шум цієї фази.

Зазначимо, що при переході від значення ВСГ до питомої ВСГ, необхідно множити об'єм, а не ділити, як у випадку стандартних питомих величин. Це пов'язано з тим, що чим більше об'єм, у якому вимірюється шум, тим менше ОСП.

Для кожної фази введемо свою константу C , що характеризує даний однорідний матеріал, відповідно, зразок об'єму V буде характеризуватись значенням $S = C/V$. Аналог правил Кірхгофа для обчислення S , паралельного $S_{\parallel}$ та послідовного S_n з'єднань опорів $r_1, r_2, \dots$ з ОСП S_1 і $S_2 \dots$ може бути записаний у вигляді

$$S_n = \sum_i \left(\frac{r_i}{r_n} \right)^2 S_i, S_{\parallel} = \sum_i \left(\frac{r_{\parallel}}{r_i} \right)^2 S_i, \quad (13.1.8)$$

де $r_{\parallel}$ і r_n — сумарний опір послідовно та паралельно з'єднаних опорів $r_1, r_2, \dots$

Оскільки при вимірі СГШ струму (напруги) її значення пропорційне квадрату струму (напруги), повна (ефективна) ВСГ S_e зразка з довільно з'єднаними опорами виражатиметься через струмовий момент (момент напруги):

$$S_e = \frac{\sum S_i I_i^4 r_i^2}{\left(\sum I_i^2 r_i\right)^2} = \frac{\sum S_i U_i^4 / r_i^2}{\left(\sum U_i^2 / r_i\right)^2}, \quad (13.1.9)$$

де $I_i(U_i)$ - струм (падіння напруги) на i -ому зв'язку. Вираз (13.1.9) можна записати в термінології питомої ВСГ, густини струму і напруженості поля:

$$C_e = \frac{\langle C(\mathbf{r})(\mathbf{E}(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r}))^2 \rangle}{\langle \mathbf{E}(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r}) \rangle^2} = \frac{\langle C(\mathbf{r})\sigma^2(\mathbf{r})\mathbf{E}^4(\mathbf{r}) \rangle}{\left(\sigma_e \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle^2\right)^2} = \frac{\langle C(\mathbf{r})\rho^2(\mathbf{r})j^4(\mathbf{r}) \rangle}{\left(\rho_e \langle j(\mathbf{r}) \rangle^2\right)^2}, \quad (13.1.10)$$

де $\langle \dots \rangle$ - середнє за об'ємом.

Вираз (13.1.10) для ефективної питомої ВСГ C_e можна отримати в такий спосіб. З визначення ефективної провідності у вигляді

$$\sigma_e = \frac{\langle \sigma E^2 \rangle}{\langle E \rangle^2}$$

слідє вираз для флуктуації σ_e :

$$\delta\sigma_e(t_1) = \frac{\langle \delta\sigma E^2 \rangle}{\langle E \rangle^2} \equiv \frac{\frac{1}{V} \int d\mathbf{r}_1 \delta\sigma(\mathbf{r}_1, t_1) E^2(\mathbf{r}_1)}{\langle E \rangle^2}. \quad (13.1.11)$$

Звідки

$$\frac{\{\delta\sigma_e(t_1)\delta\sigma_e(t_2)\}}{\sigma_e^2} = \frac{\left\{ \frac{1}{V} \int d\mathbf{r}_1 \delta\sigma(\mathbf{r}_1, t_1) E^2(\mathbf{r}_1) \cdot \frac{1}{V} \int d\mathbf{r}_2 \delta\sigma(\mathbf{r}_2, t_2) E^2(\mathbf{r}_2) \right\}}{\left(\sigma_e \langle E \rangle^2\right)^2}. \quad (13.1.12)$$

Змінюючи місцями просторове та часове $\{...\}$ усереднення та враховуючи, що флуктуації провідності просторово δ -корельовані, отримуємо

$$\{\delta\sigma(\mathbf{r}_1, t_1)\delta\sigma(\mathbf{r}_2, t_2)\} \sim \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (13.1.13)$$

де $\delta(...)$ - дельта-функція Дірака, з (13.1.12) маємо (13.1.10).

Таким чином ефективне значення ВСГ $1/f$ -шуму у неоднорідному середовищі є зважений з вагою $C(\mathbf{r})$ і віднормований квадрат джоулеа тепловиділення $Q = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$. Тому, чим більш неоднорідне середовище, тим більше неоднорідний у ньому розподіл Q і, відповідно до нерівності Коші $\left(\langle E^2 j^2 \rangle \geq \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \rangle^2\right)$, тим більше значення C_e при наближенні до порога протікання як із боку p , великих p_c , так і з боку менших.

13.2. Фліккер-шум у неоднорідних середовищах – ЕМТ-наближення

Для СГШ S_e як і для ефективної провідності, можна побудувати ЕМТ-наближення:

$$\frac{S_e}{d} = p \frac{S_1 g_1^2 + (d-1) S_e g_e^2}{[g_1 + (d-1) g_e]^2} + (1-p) \frac{S_2 g_2^2 + (d-1) S_e g_e^2}{[g_2 + (d-1) g_e]^2}, \quad (13.2.1)$$

де $g_i = 1/r_i$ - кондактанс i -го зв'язку, g_e - кондактанс всієї сітки опорів, $d = 2, 3, \dots$ – розмірність задачі, а ефективний кондактанс g_e визначається ЕМТ-наближенням.

Рівняння (13.1.11), лінійне за шуканою величиною S_e , в термінах C_e (13.2.1) має вигляд

$$\frac{C_e}{d} = p \frac{C_1 \sigma_1^2 + (d-1) C_e \sigma_e^2}{[\sigma_1 + (d-1) \sigma_e]^2} + (1-p) \frac{C_2 \sigma_2^2 + (d-1) C_e \sigma_e^2}{[\sigma_2 + (d-1) \sigma_e]^2}, \quad (13.2.2)$$

На Рис. 13.1 наведено концентраційні залежності C_e отримані в ЕМТ-наближеннях. Як видно із Рис. 13.1, C_e збільшується при наближенні до порога протікання, причому максимальне значення $C_e(p_c)$ може значно перевищувати значення C_1 і C_2 у фазах поблизу порога протікання ($p_c = 1/3$ для випадку 3D). Чим вище неоднорідності, тобто чим більше значення σ_1/σ_2 , тим більше $C_e(p = p_c)$. Зображення залежності $C_e = C_e(p)$ у подвійному логарифмічному масштабі явно показує степеневу залежність $C_e = C_1 |\tau|^k$ від $\tau = (p - p_c)/p_c$, в рамках ЕМТ-наближення $k = 1$. При наближенні до p_c в області розмазування, відбувається насичення C_e . Для випадку нескінченно великої неоднорідності ($\sigma_2 = 0$) для критичного індексу $1/f$ -шума вище порога протікання в рамках ЕМТ-наближення було отримано

$$C_e = C_1 |\tau|^{-k}, k_{EMT} = 1. \quad (13.2.3)$$

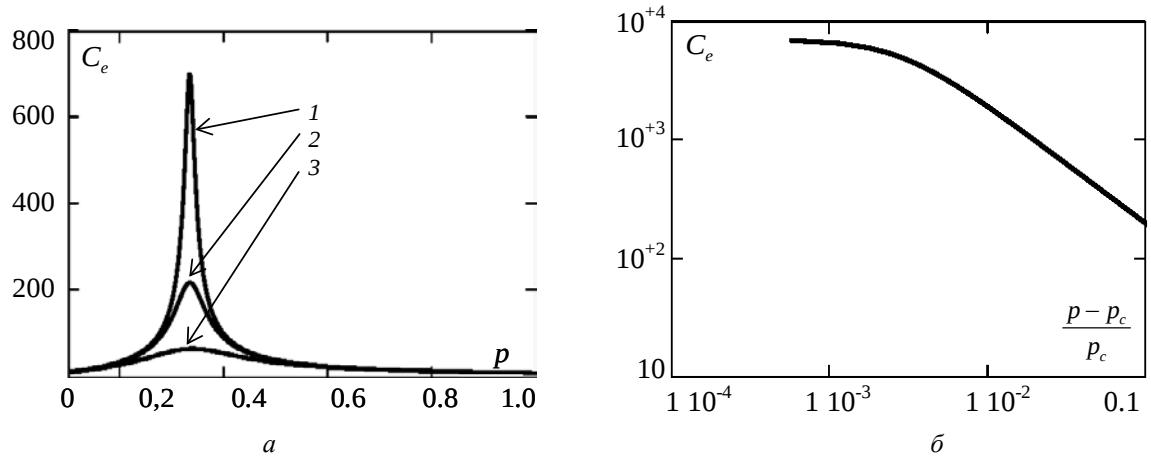


Рис. 13.1. Концентраційна залежність питомої ВСГ $1/f$ -шуму C_e для тривимірного випадку в рамках ЕМТ-наближення: а- вигляд C_e поблизу порога протікання $p_c = 1/3$. Значення параметрів (у довільних одиницях) $\sigma_2 = 1, C_1 = 1, C_2 = 10, 1 - \sigma_1 = 10^2, 2 - \sigma_1 = 10^3, 3 - \sigma_1 = 10^4$; б – вид залежності C_e від близькості до порога протікання вище за поріг протікання.

13.3. Фліккер-шум у перколяційних системах

На основі NLB-моделі було розглянуто випадок вище та нижче порога протікання. Вище порога протікання при $\sigma_2 = 0$ для критичного індексу шуму k отримані такі обмеження:

$$d\nu + 1 - 2\zeta_R \leq k' \leq d\nu - \zeta_R, \quad \zeta_R = t - (d - 2)\nu. \quad (13.3.1)$$

Нижче порога протікання при $1/\sigma_1 = 0$ маємо

$$C_e \sim |\tau|^{-k'}, \quad (13.3.2)$$

і

$$d\nu + 1 - 2\zeta_R \leq k' \leq d\nu - \zeta_R, \quad \zeta_R = q + (d - 2)\nu. \quad (13.3.3)$$

Підстановка числових значень ν, ζ_R, ζ_G з Таблиці 5.1 в (13.3.1) і (13.3.3) призводить до значень

$$1,53 \leq k_s \leq 1,6, \quad 0,38 \leq k'_s \leq 1,02. \quad (13.3.4)$$

Зазначимо, що як (13.2.3), так і (13.3.2) отримано для нескінченно великої неоднорідності ($\sigma_1/\sigma_2 = \infty$). На порозі протікання (в області розмазування) вирази для $C_e(p > p_c)$ і $C_e(p < p_c)$ повинні переходити один в одного:

$$C_e(\tau = \Delta, p > p_c) \approx C_e(|\tau| = \Delta, p < p_c), \quad (13.3.5)$$

і з (13.2.3) та (13.3.2) відразу випливає протиріччя, оскільки згідно з (13.3.5) маємо

$$C_1 \Delta^{-k} = C_2 \Delta^{-k'}, \quad (13.3.6)$$

а з (13.3.6) слідує, що величина області розмазування на відміну загальноприйнятого значення $\Delta = (\sigma_2/\sigma_1)^{\frac{1}{t+q}}$ залежить від співвідношення C_2/C_1 , а не від σ_2/σ_1 .

Розібратися в цьому протиріччі та усунути його дозволяє другий шабель ІМ. Як буде показано нижче, на основі ІМ, при визначенні критичної поведінки C_e поблизу порогу протікання принциповим є врахування кінцевої провідності фаз, і доданки, пропорційні σ_2/σ_1 в C_e , не є лише малими добавками до основного виразу, як у випадку σ_e .

Розглянемо спочатку випадок вище за поріг протікання і скористаємося другим шаблем ІМ (див. Рис. 5.13,б). Згідно з моделлю перколяційної структури (див. Рис. 5.13,б) можна записати

$$C_e = \frac{C_1 j_1^2 E_1^2 \frac{V_1}{V} + C_2 j_2^2 E_2^2 \frac{V_2}{V}}{\sigma_e^2 \langle E \rangle^4}, \quad (13.3.7)$$

де індекс 1 відноситься до містка ($V_1 = a_0 N_1 a_0^2$ - об'єм містка), а індекс 2 - до прошарку ($V_2 = a_0^2 N_2 a_0$ - об'єм прошарку), $V = \xi^3$.

Струми та поля просто пов'язані з різницею потенціалів $\Delta\varphi$ на краях зразка з характерним розміром ξ :

$$j_1 = \frac{\Delta\varphi}{R_1 a_0^2}, \quad E_1 = \frac{\Delta\varphi}{L_1}, \quad j_2 = \frac{\Delta\varphi}{R_2 N_2 a_0^2}, \quad E_2 = \frac{\Delta\varphi}{a_0}, \quad (13.3.8)$$

де $L_1 = a_0 N_1$ - довжина містка, $N_2 a_0^2$ - площа прошарку.

З виразів (13.3.7) та (13.3.8) ($\sigma_e = \sigma_2 |\tau|^{-q}$) відразу ж слідує:

$$C_e(p > p_c) = C_1 |\tau|^{-k} + C_2 h^2 |\tau|^{-w}, \quad h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \gg 1, \quad p > p_c, \quad (13.3.9)$$

із такими значеннями критичних індексів:

$$k_3 = 4\nu_3 - t_3, \quad w_3 = q_3 + 2(\nu_3 + t_3). \quad (13.3.10)$$

Узагальнення на d -мірний випадок призводить до виразів

$$k = 2\nu(d-1) - t, \quad w = q + 2(\nu + t). \quad (13.3.11)$$

Аналогічно знаходиться і вираз для $1/f$ -шума нижче порога протікання

$$C_e(p < p_c) = C_2 |\tau|^{-k'} + C_1 h^2 |\tau|^{-w'}, \quad (13.3.12)$$

де

$$k' = 2\nu - q, \quad w' = 2q + t + 2\nu(d-1). \quad (13.3.13)$$

Відразу відзначимо, що якщо у виразах для ефективної провідності додаткові доданки пропорційні h і, наприклад, при $p > p_c$ $\sigma_e = \sigma_1 \tau^t + \sigma_1 h \cdot |\tau|^{-q} + \dots$ є малими поправками, то аналогічні доданки в (13.3.9) та (13.3.12), пропорційні h^2 , можуть бути як набагато менше, так і набагато більше першого доданку в залежності від співвідношення C_1/C_2 . Таким чином, якщо в першому наближенні по неоднорідності ефективна провідність як вище $\sigma_e \approx \sigma_1 \tau^t$, так і нижче $\sigma_e \approx \sigma_2 |\tau|^{-q}$ порога протікання описується першим щаблем ІМ, то ВСГ $1/f$ -шуму C_e вимагає врахування другого щабля ІМ, і тоді першим наближенням по неоднорідності є вирази (13.3.9) і (13.3.12). Врахування наступних поправок, тепер уже дійсно завжди малих (поза областю розмазування) порівняно з основними, дає врахування наступних щаблів ІМ.

Вирази $C_e(p > p_c)$ (13.3.9) та $C_e(p < p_c)$ (13.3.12) дозволяють несуперечливо визначити ВСГ $1/f$ -шума у області розмазування. Як і для σ_e , в області розмазування, має виконуватись рівність (13.21). Підставляючи (13.3.9) та (13.3.12) до (13.3.5), отримуємо

$$C_1 \Delta^{-k} + C_2 h^2 \Delta^{-w} = C_2 \Delta^{-k'} + C_1 h^2 \Delta^{-w'}, \quad (13.3.14)$$

що дає два рівняння для визначення Δ :

$$\Delta^{-k} = h^2 \Delta^{-w'}, \quad h^2 \Delta^{-w} = \Delta^{-k'}. \quad (13.3.15)$$

У свою чергу, обидва ці рівняння призводять, як і має бути, до однакових значень для розмазування Δ , які збігаються зі стандартним:

$$\Delta = h^{\frac{2}{w'-k}} = h^{\frac{2}{w-k'}} = h^{\frac{1}{t+q}}.$$

Зазначимо, що сумісність рівнянь системи (13.3.15) можлива лише за цілком певного зв'язку між чотирма критичними індексами $1/f$ -шуму - k, k', w, w' :

$$w - k' = w' - k. \quad (13.3.16)$$

Крім того, з умови сумісності систем рівнянь (13.3.15) та (13.3.16) випливає зв'язок певних комбінацій критичних індексів $1/f$ -шума з так званим скейлінговим показником $\varphi = t + q$

$$\frac{w - k'}{2} = \frac{w' - k}{2} = \varphi. \quad (13.3.17)$$

Співвідношення (13.3.16) і (13.3.17) не залежать від моделі, що використовується, і, тим самим, від конкретних значень k, k', w, w' , які різняться у різних моделях та наближеннях.

Підстановка Δ в (13.3.9) або (13.3.12) призводить до виразу для ВСГ $1/f$ -шуму в області розмазування у вигляді

$$C_e(\Delta) = C_1 h^{-\omega} + C_2 h^{-\omega'}, \quad (13.3.18)$$

де

$$\omega = 2 \frac{k}{w - k'} = \frac{k}{t + q}, \quad \omega' = 2 \frac{k'}{w - k'} = \frac{k'}{t + q}. \quad (13.3.19)$$

У рамках ІМ з урахуванням (13.3.117) та (13.3.13) маємо

$$\omega = \frac{2\nu(d-1)-t}{t+q}, \quad \omega' = \frac{2\nu-q}{t+q}. \quad (13.3.20)$$

Для двовимірного випадку ($t_2 = q_2 \approx \nu_2$), на порозі протікання запишемо

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{2\nu_2 - t_2}{2t_2} \approx \frac{1}{2}. \quad (13.3.21)$$

Відносний внесок у ВСГ $1/f$ -шуму залежить тільки від відношення ВСГ $1/f$ -шуму у фазах, і не залежить від величини σ_2/σ_1 :

$$C_e(\Delta) = (C_1 + C_2) h^{\frac{2\nu_2 - t_2}{2t_2}} \approx (C_1 + C_2) \sqrt{h}, \quad 2D. \quad (13.3.22)$$

З аналізу виразів для C_e вище (13.3.9) і нижче (13.3.12) порога протікання слідує, що можливий такий набір параметрів, що поза областю розмазування основну роль буде

відігравати другий доданок (Рис. 13.2), наприклад, вище порога протікання для $C_2/C_1 \gg h^{(k-k')/(t+q)}$ і $\tau_c = (h^2 C_2/C_1)^{\frac{1}{w-k}}$ в області концентрації добре провідної фази $\Delta \ll \tau < \tau_c$ відбувається зміна критичного індексу k на w (Рис. 13.2, а), а нижче порога протікання для $C_2/C_1 \ll h^{(k-k')/(t+q)}$ і $\tau_c' = -(h^2 C_1/C_2)^{\frac{1}{w'-k'}}$ в області концентрацій $|\tau| < |\tau_c'|$ відбувається зміна критичного індексу k' на w' . Значення τ_c і τ_c' можуть бути обчислені безпосередньо з (13.3.9) та (13.3.12).

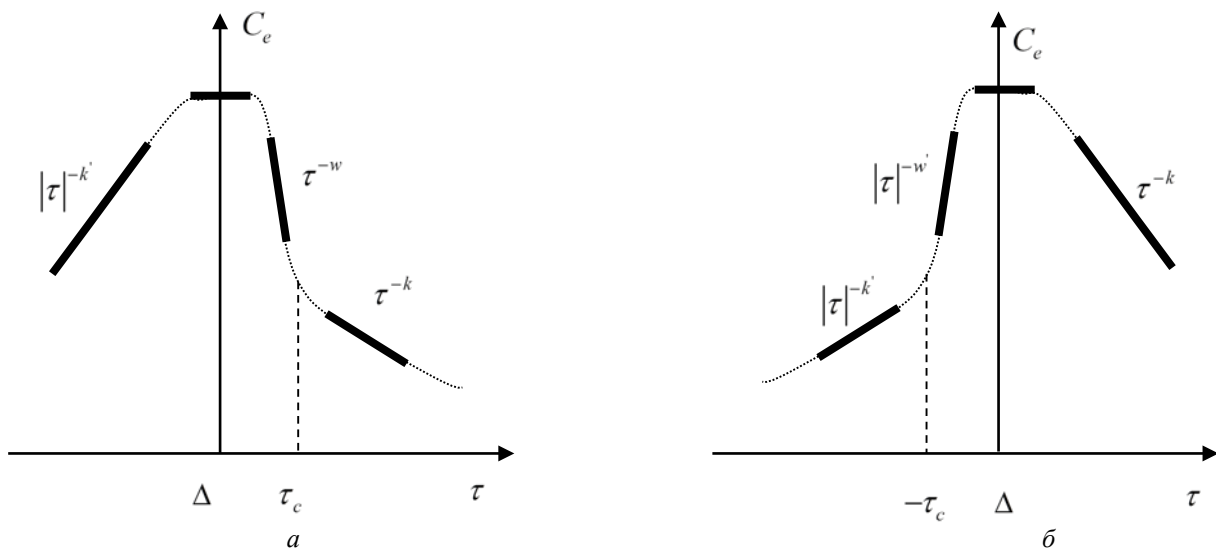


Рис.13.2. Схематичне зображення концентраційної залежності $C_e = C_e(\tau)$ у подвійному логарифмічному інтервалі для двох спеціальних випадків: а- вище порога протікання; б - нижче порога протікання.

Таким чином, при вимірюванні або числовому моделюванні при наближенні до порогу протікання може відбутися зміна критичного індексу при $p > p_c$ з k' на w' і з k на w . Справді, у деяких роботах, присвячених експериментальним дослідженням, спостерігаються критичні індекси: у двовимірному випадку $k_2/t_2 \approx 6,27 \pm 0,08$, і у тривимірному випадку $k_3/t_3 \approx 5 \pm 1$, які близькі до w_2/t_2 і w_2'/t_2 .

У Таблиці 13.1 наведено числові значення критичних індексів, отримані числовим моделюванням та теоретичними методами. Докладне обговорення експериментальних даних буде проведено після опису критичної поведінки $1/f$ -шуму в так званих Swiss-Cheese середовищах.

Таблиця 13.1

Критичний індекс	Числове значення згідно ІМ	Точна межа згідно	Числове моделювання.
k_3	1,52	$1,4 \leq k_3 \leq 1,52$	1,47
k'_3	1,03	$0,42 \leq k'_3 \leq 1,03$	0,55
$k_2 = k'_2$	1,37	$1,07 \leq k_2 \leq 1,37$	1,12
w_3	6,49		
w'_3	6,98		
$w_2 = w'_2$	6,57		
k_6	2	$2 \leq k_6 \leq 2$	$2,06 \pm 0,08$
k'_6	1	$0 \leq k'_6 \leq 1$	
w_6	7		
w'_6	7		
$\omega_2 = \omega'_2$	0,53	Примітка. Точні межі: $d\nu + 1 - 2\zeta_R \leq k \leq d\nu - 3\zeta_R$, $d\nu - 1 - 2\zeta_R \leq k' \leq d\nu - \zeta_R$	
ω_3	0,56		
ω'_3	0,38		

Зазначимо, що числові значення індексів k, k', w, w' та їх точних меж у Таблиці 13.1 обчислені згідно з використанням “канонічних” значень t , q , і ν і тому дещо відрізняються від таких в деяких роботах.

13.4. Аномально високе зростання фліккер-шуму в самодуальних середовищах

Як випливає з визначення ВСГ $1/f$ -шуму (13.1.10), він виражається через четвертий момент густини електричного струму або напруженості електричного поля. Якщо для σ_e , яка, у свою чергу, виражається через другий момент, існує універсальний вираз для самодуальних середовищ (формула Дихне $\sigma_e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$), то, як можна легко показати, для ВСГ $1/f$ -шуму, як більш "інтимної" характеристики, яка залежить від четвертого моменту, такого співвідношення немає. І, наприклад, для випадково-неоднорідного середовища та самодуального середовища зі структурою шахової дошки вирази для C_e різні. Вплив "мікрогеометрії" на ВСГ $1/f$ -шуму було розглянуто, для деяких випадків. Тут буде розглянуто випадок середовища типу шахівниці.

Розглянуто $1/f$ -шум у середовищі, що має структуру шахівниці, з головним її елементом – D -точкою (розділ 6) – Рис. 6.3. Було показано, що основне тепло Джоуля $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$, а тим більше, його квадрат $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{j})^2$, виділяється в околиці D -точки. Розподіл потенціалу $\varphi(r, \theta)$ поблизу D -точки (Рис. 13.3) знаходиться аналогічно тому, як це зроблено для струмової пастки в двовимірному полікристалічному середовищі:

$$\begin{aligned}\varphi_1(r, \theta) &= A_1 r^m \cos m\theta, \\ \varphi_2(r, \theta) &= A_2 r^m \sin \left[m \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right],\end{aligned}\tag{13.4.1}$$

де індекси 1 та 2 відносяться до першої (σ_1) та другої (σ_2) фаз, а константа m та зв'язок між A_1 і A_2 знаходяться із граничних умов.

На межах фаз, тобто при $\theta = \pm\alpha$ повинна виконуватися неперервність потенціалу:

$$\varphi_1(r, \theta = \pm\alpha) = \varphi_2(r, \theta = \pm\alpha),\tag{13.4.2}$$

і неперервність нормальних до межі розділу компонент струму

$$j_{\theta 1}(r, \theta = \pm\alpha) = j_{\theta 2}(r, \theta = \pm\alpha),\tag{13.4.3}$$

де

$$j_{\theta k}(r, \theta) = \sigma_k E_{\theta}(r, \theta) = -\sigma_k \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \theta}, \quad k = 1, 2.\tag{13.4.4}$$

Підстановка (13.4.1) у (13.4.3) та (13.4.4) призводить до виразів

$$\operatorname{tg}(m\alpha)\operatorname{tg}\left[m\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad (13.4.5)$$

$$\sigma_1 A_1 r^m m \sin(m\alpha) = \sigma_2 A_2 m r^m \cos\left[m\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]. \quad (13.4.6)$$

Таким чином, відповідно до (13.4.5) кожному значенню відношення σ_2/σ_1 відповідає значення параметра m , а умова (13.4.6) дає можливість виразити A_2 через A_1 . З урахуванням (13.4.5) та (13.4.6) квадрат напруженості електричного поля в першій фазі дорівнює

$$E_1^2 = E_{r1}^2 + E_{\theta1}^2 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta}\right)^2 = A_1^2 m^2 r^{2(m-1)}. \quad (13.4.7)$$

Точно такий вигляд, але із заміною A_1 на A_2 , має E_2^2 . Оскільки ВСГ $1/f$ -шуму C_e пропорційна $\int E^4 dV$ де $dV = 2\pi r dr$, з (13.4.5) випливає, що

$$C_e \sim \int_0^a \frac{dr}{r^{3-4m}}. \quad (13.4.8)$$

Тут a - розмір, порядку розміру «клітинок» середовища. Як видно з (13.4.8), при

$$m \geq m_c = \frac{1}{2}, \quad (13.4.9)$$

інтеграл (13.4.8) розходиться, що означає аномальне зростання $1/f$ -шума.

Згідно (13.4.5) для кожного кута α існує таке значення $h_c = (\sigma_2/\sigma_1)_c$, при якому для $h < h_c$ – інтеграл (13.4.8) розходиться та амплітуда $1/f$ -шуму C_e стає аномально великою. Залежність $h_c = h_c(\alpha)$ наведено на Рис. 13.3,а, де $h_c = \operatorname{tg}(m_c \alpha) \operatorname{tg}[m_c(\pi/2 - \alpha)] = \sigma_2/\sigma_1$ і $m_c = 1/2$. На Рис.13.3,б виділено область, де амплітуда $1/f$ -шуму аномально велика. Для середовища зі структурою шахівниці ($\alpha = \pi/2$, $h_c(\pi/2) = 0,172$).

13.5. Фліккер-шум у системах з експоненційно широким спектром опорів

Розглянемо тепер ВСГ $1/f$ -шуму у системах з експоненційно широким спектром опорів. Перколяційні явища в системах з таким $1/f$ -шумом були названі квантовою перколяцією.

Для визначення ВСГ $1/f$ -шуму необхідно спочатку сформулювати припущення, аналогічне гіпотезі Хоуге, тобто задати залежність C від локальної провідності σ . У розділі 8 для локального опору та питомої провідності було прийнято

$$r(x) = r_0 e^{-\lambda x}, \quad \sigma(x) = \sigma_0 e^{\lambda x}, \quad \lambda \gg 1, \quad (13.5.1)$$

де x - випадкова змінна, рівномірно розподілена в інтервалі $[0, 1]$.

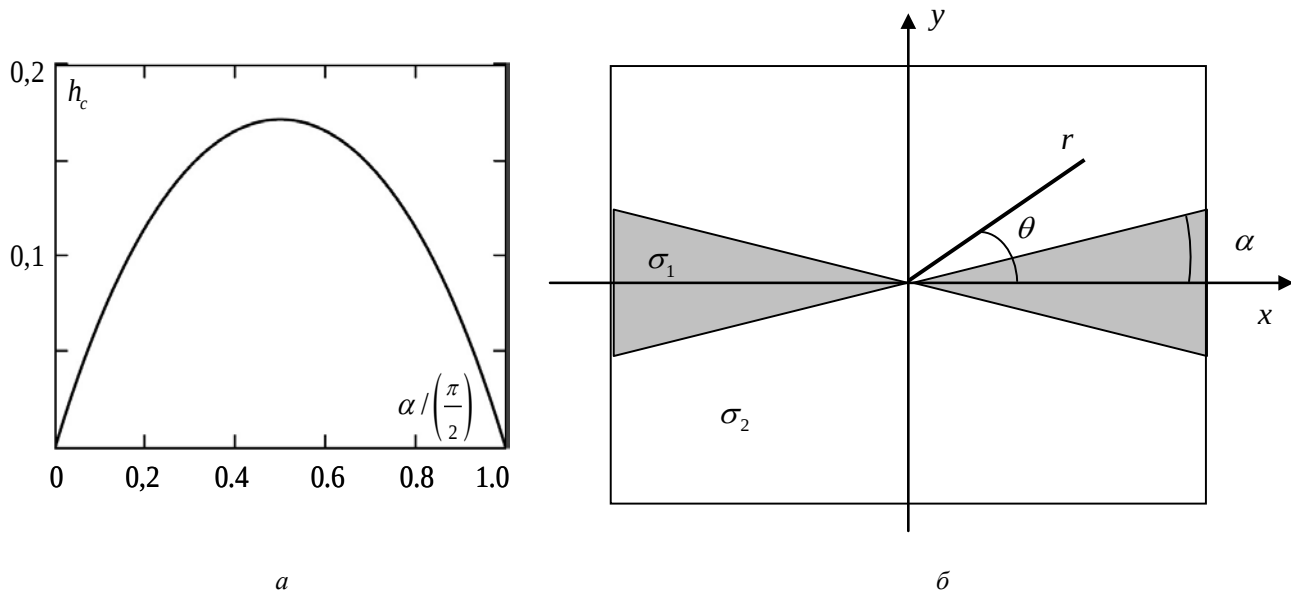


Рис. 13.3. Залежність $h_c = h_c(\alpha)$ (а) та розташування фаз біля D-точки (б).

Згідно з гіпотезою Хоуге $C \sim 1/n$, де $n(x)$ - концентрація носіїв струму. Оскільки зазвичай питома провідність $\sigma \sim n$, тут приймемо наступну гіпотезу:

$$C(x) = \frac{\alpha}{\sigma(x)}, \quad \alpha = \text{const}. \quad (13.5.2)$$

Розрахунок ВСГ $1/f$ -шуму здійснюється аналогічно обчисленню σ_e у системах із експоненційно широким спектром властивостей (розділ 8) – необхідно обчислити ВСГ $1/f$ -шума містка та прошарку в області розмазування.

Для містка згідно (13.1.8) маємо

$$S_1 = \sum \left(\frac{r(x)}{r_e} \right)^2 S(x), \quad (13.5.3)$$

де сума береться за всіма зв'язками, що входять до містка, та згідно (13.5.2) для тривимірного випадку отримаємо

$$S(x) = \alpha \frac{r(x)}{a_0^2}. \quad (13.5.4)$$

Таким чином,

$$S_1 \sim \alpha \frac{\sum r^3(x)}{r_e^2} = \alpha \frac{N_1 \langle r^3 \rangle_1}{r_e^2}, \quad (13.5.5)$$

$\langle \dots \rangle_1$ обчислюється так само, як і в розділі 8 (8.2.3):

$$\langle r^3 \rangle_1 = \int_{x_1}^1 r^3(x) P(x) dx = \frac{r_0^3}{3(1-x_1)\lambda} (e^{-3\lambda x_1} - e^{-3\lambda}) \approx \frac{r_1^3 e^{-3\lambda x_1}}{3(1-x_1)\lambda}, \quad (13.5.6)$$

$$x_1 = x_c + (1-x_c)\Delta,$$

де Δ - величина області розмазування (8.2.14).

Підставляючи Δ у вирази (13.5.6) та (13.5.6) у (13.5.5), знаходимо

$$S_1 \sim \alpha r(x_c) \lambda^{2\frac{3\alpha_1+\alpha_2}{2}}, \quad (13.5.7)$$

або, переходячи від S_1 до питомої характеристики, маємо

$$C_1^e \sim \alpha r(x_c) \lambda^{2\frac{3\alpha_1+\alpha_2}{2}+vd}. \quad (13.5.8)$$

Аналогічно обчислюється і ВСГ $1/f$ -шума прошарку:

$$S_2 = \sum \left(\frac{r_e}{r(x)} \right)^2 S(x) \sim r_e^2 \sum \frac{1}{r(x)} = r_e^2 N \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_2. \quad (13.5.9)$$

Звідки

$$S_2 \sim \alpha r(x_c) \lambda^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}, C_2^e \sim \alpha r(x_c) \lambda^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+vd}. \quad (13.5.10)$$

В рамках як NLB-моделі ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$), і в ІМ ($\alpha_1 = \xi_R, \alpha_2 = \xi_G$) записуємо

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} > 2 - \frac{3d_1 + d_2}{2}. \quad (13.5.11)$$

Таким чином, у системах з експоненційно широким спектром опорів $1/f$ -шум в області розмазування в прошарку завжди більше, ніж у містку, тобто визначає шум у всій системі в цілому

$$C_e \sim \frac{1}{\sigma} e^{-\lambda x_c} \lambda^m = \frac{\lambda^{2\nu}}{\sigma_e}, \quad (13.5.12)$$

$$m = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + \nu d. \quad (13.5.13)$$

У рамках NLB-моделі маємо

$$m_{NLB} = \nu d, \quad d = 2, 3, \dots \quad (13.5.14)$$

У рамках ІМ

$$m = \frac{t - q}{2} + 2\nu, \quad d = 2, 3, \dots \quad (13.5.15)$$

Проведено числове моделювання на кубічній сітці. Обчислювалося значення індексу $m - 2\nu$, яке виявилось рівним 0.78 ± 0.09 , що ближче до (13.5.14) $m_{NLB} - 2\nu_{NLB} = 0.88$, ніж до (13.5.15) $m_{IM} - 2\nu_{IM} = 1.12$. Це означає, що при обчисленні других моментів розподілу струмів, вирішальний внесок дають саме SDCB-«поодинокі роз'єднані зв'язки», кількість яких у прошарку $N_2 \sim \tau^{-1}$. Якісно, такий висновок можна пояснити так. Як описано вище, у параграфі 5.4 (див. Рис. 5.11 та 5.12), відмінність ІМ від NLB-моделі полягає у виборі N_1 – кількості зв'язків у містку та N_2 – у прошарку. У NLB N_1 і N_2 це SCB- та SDCB-зв'язки. Такий підхід призводить до того, що якщо при обчисленні ефективної провідності враховувати тільки такі зв'язки в містку та прошарку, критичні індекси провідності t і q будуть лише приблизно рівні їх значенням, встановленим у числових та натурних експериментах.

Дійсно, у містку, як головному елементі протікаючої структури, зустрічаються і двічі і тричі запаралелені зв'язки. Така конструкція містка стає надто складною для обчислень. В ІМ цей складний місток замінюється (наближено) на простий, у якому всі запаралелені зв'язки замінені на деяку кількість SCB, при цьому загальна кількість SCB вибирається рівною $N_1 \sim \tau^{\xi_R}$, тобто таким, щоб при обчисленні σ_e виходило наперед задане (канонічне) значення критичного індексу t .

Аналогічна заміна відбувається в іншому елементі перколяційної структури - прошарку. У ній, крім SDCB (поодинокі роз'єднаних зв'язків поганопровідної фази), містяться елементи з двома, трьома... зв'язками. В ІМ ці елементи враховують, замінюючи їх на певну кількість «поодиноких» таким чином, щоб повне число «поодиноких» було вже не $N_2 \sim \tau^{-1}$, як у NLB-

моделі, а $N_2 \sim \tau^{\varepsilon_G}$, таким чином, щоб критичний індекс ефективної провідності нижче порога протікання q дорівнював канонічному значенню.

Для двофазних систем, коли кожен провідний зв'язок має опір r_1 , а погано провідний $-r_2$, такий підхід ІМ дозволяє в багатьох випадках досить точно обчислити критичні індекси. Для систем з експоненційно широким спектром опорів справа складніша. Якщо при обчисленні y – критичного індексу передекспоненційного множника в ефективній провідності – підхід ІМ «працює» (тобто ці передбачення точніші, ніж у NLB-моделі), то при обчисленні більш високих моментів струму це вже не так. Навіть в області розмазування опори в містку та прошарку значно відрізняються один від одного. І тоді дві послідовні пари паралельно з'єднаних опорів у містку не можна звести до одного опору r_1 , так як у кожній парі значення опорів сильно відрізняються один від одного і для пропускання струму суттєвим є лише одне з них. У прошарку ж один із двох послідовно з'єднаних опорів буде набагато більше іншого і такі пари доводиться викидати з прошарку, і залишаються тільки SDCB з $N_2 \sim \tau^{-1}$, що прийнято в NLB-моделі.

Таким чином, результат числового моделювання дозволяє припустити, що струмонесучий кластер у системах з експоненційно широким спектром розподілу опорів при розгляді четвертого (і, очевидно, більш високих) струмового моменту відрізняється від такого у двофазних системах.

Повертаючись до виразу для ВСГ $1/f$ -шуму C_e (13.5.12), зауважимо, що прийнята в (13.5.2) локальна гіпотеза Хоуге вже не виконується для всього зразка:

$$C_e \sigma_e \sim \lambda^{2\nu} \gg 1. \quad (13.5.16)$$

Було показано, що у ряді випадків локальні значення C у тунельних переходах можуть не залежати від σ_1 , тобто замість гіпотези Хоуге (13.5.2) має місце

$$C(x) \approx \frac{\alpha}{\sigma(x)^\theta}, \theta \rightarrow 0. \quad (13.5.17)$$

Було проведено розрахунок ВСГ $1/f$ -шуму для систем з експоненційно широким спектром розподілу опорів, коли для локального шуму виконується (13.5.17). Обчислення, аналогічні наведеним вище, призводять до виразу

$$C_e \sim \left(\sigma_0 e^{\lambda x_c} \right)^{-\theta} \lambda^{m_\theta}. \quad (13.5.18)$$

Як виявилось, у діапазоні $0 < \theta < 2$ критичний індекс є універсальним, тобто не залежить від параметра θ :

$$m_\theta = \nu d, \quad 0 < \theta < 2. \quad (13.5.19)$$

Цей теоретичний висновок підтверджується числовим моделюванням.

Цікаво відзначити, що хоча $C_e(\theta=1)$ експоненційно значно відрізняється від $C_e(\theta=0)$, наприклад, при $\lambda \approx 30$ і $x_c = 0.75$, маємо

$$\frac{C_e(\theta=0)}{C_e(\theta=1)} = e^{\lambda x_c} \sim 10^9, \quad (13.5.20)$$

індекс m_θ згідно як теорії, так і результатів числового моделювання залишається тим самим.

Задача про обчислення розподілу струмів у системі з експоненційно широким спектром розподілу опорів описує як стрибкову провідність в легованих напівпровідниках. До неї зводиться, наприклад, задача про властивості напівпровідників з великомасштабним потенційним рельєфом $V(\mathbf{r})$, що модулює дно зони провідності. Для вирішення задачі про визначення σ_e та ВСГ $1/f$ -шуму C_e у таких напівпровідниках необхідно, по-перше, знати опір містка та прошарку. По-друге, на відміну від наведеного вище підходу, вона несе в собі специфіку, близьку до Swiss-Cheese-середовищ (розділ 7), тому що в кожному з тих опорів, які входять до містка і прошарок струм протікає через перевали в потенційному рельєфі та його розподіл у таких перевалах неоднорідний. Врахування цієї неоднорідності аналогічно тому, як це відбувається, наприклад, в «шийках» у Swiss-Cheese-задачі, призводить до перенормування критичного індексу ефективної провідності з додаванням доданку $1/2$:

$$\sigma_e = \sigma(x_c) \lambda^{-y}, \quad y = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + \nu(d-2) + \frac{1}{2}, \quad (13.5.21)$$

де $\lambda = 2V_0/(KT) \gg 1$, V_0 - енергетичний параметр, що визначає великомасштабний потенціал $V(\mathbf{r})$ поблизу сідлової точки:

$$V(\mathbf{r}) = V_s + \frac{V_0}{b}(-x^2 + y^2 + z^2), \quad (13.5.22)$$

а V_s - висота перевалу, b - просторовий масштаб.

При виконанні гіпотези Хоуге $C(\mathbf{r}) = \alpha/n(\mathbf{r})$ враховуючи неоднорідності струмів на перевалах, отримуємо

$$C_e = \frac{\alpha}{n_c} \left(\frac{V_0}{KT} \right)^\gamma, \gamma = \frac{3}{2} + m, \quad (13.5.23)$$

де, m – те саме, що у (13.5.13), (13.5.14) – критичний індекс ВСГ $1/f$ -шума без урахування неоднорідності струму в кожному з перевалів, константа $3/2$, що перенормовує критичний індекс m , пов'язана саме з цим врахуванням; n_c - концентрація вільних носіїв на головному (ключовому) перевалі, що визначає $r(x_c)$.

13.6. Фліккер-шум при флуктуації концентрації фаз.

Несподіваний «перколяційний» механізм ВСГ $1/f$ -шуму було виявлено у ВТНП. При вимірі $1/f$ -шуму на високоякісних тонких ВТНП-плівках, що перебувають у надпровідному стані, були отримані критичні індекси λ і λ' , що перевищують критичні індекси k і k' (Таблиця 13.2).

Таблиця 13.2.

Мірність задачі	k	k'	$\frac{k}{t}$	$\frac{k'}{q}$	$\lambda = \frac{2}{t}$	$\lambda' = \frac{2}{q}$
2D	1,37	1,37	1,05	1,05	1,54	1,54
3D	1,52	1,03	0,76	1,41	1,0	2,74

У надпровідному стані провідність у ВТНП описується як провідність сітки джозефсонівських контактів, що з'єднують між собою надпровідні гранули. Для кожного з джозефсонівських контактів є своє значення критичного струму I_c таке, що при протіканні через контакт струму $I < I_c$ він є надпровідним (на ньому не падає напруга), а при $I > I_c$ контакт є звичайним опором. Величина I_c прямо пропорційна енергії зв'язку. Тимчасові флуктуації енергії зв'язку призводять до флуктуацій числа джозефсонівських контактів зразку, тобто до флуктуації концентрації надпровідної фази. Наприклад, нижче порога протікання ($p < p_c$) маємо

$$\rho_e \sim |p - p_c|^q. \quad (13.6.1)$$

Звідки

$$\delta\rho_e = \frac{\partial\rho_e}{\partial p} \delta p \sim \rho_e^{1-\frac{1}{q}} \delta p(t), \quad (13.6.2)$$

та для ВСГ $1/f$ -шуму отримуємо

$$C_e = \frac{\{\delta\rho_e\delta\rho_e\}}{\rho_e^2} \sim \rho_e^{-\frac{2}{q}} \{\delta p\delta p\}, \quad p < p_c. \quad (13.6.3)$$

Таким чином, новий, пов'язаний з флуктуацією концентрації надпровідної фази, критичний індекс λ' має вигляд

$$\lambda' = \frac{2}{q}. \quad (13.6.4)$$

Аналогічно знаходиться і критичний індекс вище за поріг протікання

$$\lambda = \frac{2}{t}. \quad (13.6.5)$$

Як очевидно з Таблиці 13.2, наприклад, у тривимірному випадку нижче порога протікання $\lambda'_3 = 2,74$, що майже вдвічі перевищує $k'_3/q_3 = 1,41$. Знайдені критичні індекси λ' і λ добре узгоджуються з експериментальними даними.

Контрольні запитання

1. Що таке фліккер-шум
2. Як визначається спектральна густина шуму (СГШ)?
3. Чим відрізняється шум від шуму Найквіста?
4. Чим обумовлені флуктуації опору, що призводять до фліккер-шуму?
5. Чим відрізняється відносна спектральна густина флуктуацій (СГФ) від спектральної густини шуму?
6. Як визначається ефективна ОСГ-шуму?
8. Як визначається спектральна густина-шуму в ЕМТ-наближенні?
9. Як залежить спектральна густина шуму від концентрації домішок?
10. Який критичний індекс шуму в рамках ЕМТ-наближення?
13. Які проблеми виникають при вимірі фліккер-шуму?

Розділ 14. Вищі струмові моменти

14.1. Визначення

Вище було показано, що ефективний питомий опір ρ_e пропорційний другому моменту струму:

$$\rho_e \sim \langle \rho j^2 \rangle, \quad (14.1.1)$$

а ВСГ $1/f$ -шума, більш «інтимна» характеристика середовища, - четвертому моменту струму:

$$C_e \sim \langle c \rho^2 j^4 \rangle. \quad (14.1.2)$$

Як ρ_e , C_e , так і σ_e можна виразити через моменти напруженості електричного поля, або моменти локального джоулевого тепловиділення $Q = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$.

У разі провідних композитів зі слабкою нелінійністю однієї або обох фаз, коли локальну провідність можна подати у вигляді розкладу (див. розділ 17), можна записати

$$\sigma \approx \sigma_0(r) + \chi^{(3)} E^2 + \dots, \quad (14.1.3)$$

і, таким чином, при обчисленні ефективних властивостей слід розглядати й вищі моменти струмів та полів.

Отже, можна поставити задачу про поведінку n -го моменту поля, струму, джоулевого тепловиділення. Для двофазних середовищ ці моменти можна розділити по двох фазах:

$$\langle Q^n \rangle = \frac{1}{V} \int_V q^n dV = p \langle q^n \rangle_1 + (1-p) \langle q^n \rangle_2, \quad (14.1.4)$$

де $\langle \dots \rangle_i = V_i^{-1} \int_{V_i} \dots dV$ - середнє по i -й фазі.

Досліджено струмові моменти в перколяційних середовищах і введено критичні індекси для опису таких моментів. На підставі ІМ отримано аналітичні вирази критичних індексів та розглянуто питання про скейлінг вищих моментів.

За аналогією з ВСГ $1/f$ -шума введемо таке визначення для ефективного n -го моменту розподілу струму (поля, джоулевого тепловиділення) у вигляді

$$C_e(n) = \frac{\langle C(n, \mathbf{r}) (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}))^n \rangle}{(\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle \langle \mathbf{j}(\mathbf{r}) \rangle)^n}, \quad n=1, 2, \dots \quad (14.1.5)$$

Момент $C_e(n)$ нормований на $(\langle \mathbf{E} \rangle \langle \mathbf{j} \rangle)^n = (\sigma_e \langle \mathbf{E} \rangle^2)^n = \sigma_e^n \langle \mathbf{E} \rangle^{2n}$. Зокрема, таке нормування (до якого входить σ_e) для $n=1$ призводить до тотожності

$$C_e(n=1) = 1, \quad (14.1.6)$$

і таким чином, вищі моменти $C_e(n > 1)$ дають інформацію, додаткову до моменту, пропорційного σ_e . Для $n=2$ при виборі $C(2, \mathbf{r}) = \{\delta\sigma \delta\sigma\} / \sigma^2$ момент $C_e(n=2)$ є ВСГ $1/f$ -шума. Якщо вибрати $C(2, \mathbf{r}) = 1$, то в цьому випадку $C_e(n=2)$ буде моментом розподілу джоулева тепловиділення.

Для двофазного середовища (14.1.5) логічно записати так:

$$\begin{aligned} C_e(n) &= \frac{1}{(\langle \mathbf{E} \rangle \langle \mathbf{j} \rangle)^n} \left[p C_1(n) \sigma_1^n \langle E^{2n} \rangle_1 + (1-p) C_2(n) \sigma_2^n \langle E^{2n} \rangle_2 \right] = \\ &= \frac{1}{(\langle \mathbf{E} \rangle \langle \mathbf{j} \rangle)^n} \left[p C_1(n) \rho_1^n \langle j^{2n} \rangle_1 + (1-p) C_2(n) \rho_2^n \langle j^{2n} \rangle_2 \right]. \end{aligned} \quad (14.1.7)$$

Отже, $C_e(n)$ визначається через парціальні (по фазах) моменти напруженості електричного поля та густини струму. Зауважимо, що при обраному нормуванні $C_e(n)$ (14.1.5) істотні не власне величини густини струму $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ або напруженості поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, а тільки їх напрямки: $\mathbf{j}(\mathbf{r}) / |\langle \mathbf{j} \rangle|, \mathbf{E}(\mathbf{r}) / |\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle|$.

14.2. Критичні індекси вищих струмових моментів

Поблизу порога протікання $C_e(n)$ поведуться універсально, тобто так само, як і у випадку σ_e та ВСГ $1/f$ -шума характеризуються критичними індексами. ІМ дозволяє (звичайно, приблизно) виразити критичні індекси $C_e(n)$ через основні критичні індекси теорії протікання – критичний індекс кореляційної довжини та критичні індекси ефективної провідності вище та нижче порога протікання. При цьому використовується той факт, що кореляційна довжина є універсальною характеристикою з критичним індексом ν , що не залежить від того, який момент розглядається.

Аналогічно тому, як обчислювалася ВСГ $1/f$ -шуму в ІМ можна знайти і критичні індекси, що описують поведінку $C_e(n)$. Наприклад, вище за поріг протікання (див. параграф 5.4):

$$C_e(n) = \frac{C_1(n) j_1^n E_1^n V_M / V + C_2(n) j_2^n E_2^n V_{II} / V}{\sigma_e^n \langle E \rangle^{2n}}, \quad (14.2.1)$$

де j_1 і E_1 - струм і поле в містку, j_2 і E_2 - струм і поле в прошарку, $V_M = a_0^{d-1} l = a_0^d N_1$ - об'єм містка, $V_{II} = a_0^d N_2$ - об'єм прошарку, $V = \xi^d$.

Вводячи середнє поле $E = \Delta\varphi/\xi$, де $\Delta\varphi$ - різниця потенціалів на розмірі ξ і, виражаючи E_1 і E_2 через $\Delta\varphi$, з (14.2.1) відразу ж знаходимо:

$$C_e(n) = C_1(n) \tau^{-k_n} + C_2(n) h^n \tau^{-w_n}, \quad (14.2.2)$$

і нижче порога протікання з тих же міркувань маємо

$$C_e(n) = C_2(n) |\tau|^{-k'_n} + C_1(n) h^n |\tau|^{-w'_n}, \quad (14.2.3)$$

де

$$k_n = [2\nu(d-1) - t](n-1), \quad k'_n = (2\nu - q)(n-1), \quad (14.2.4)$$

$$w_n = k'_n + n(t+q), \quad w'_n = k_n + n(t+q), \quad (14.2.5)$$

Відразу відзначимо, що існує зв'язок між критичними індексами k_n , k'_n , w_n і w'_n (порівняй з (13.3.16):

$$k_n + w_n = k'_n + w'_n. \quad (14.2.6)$$

Підставляючи у (14.2.2) або (14.2.3) замість τ значення області розмазування $\Delta = h^{\frac{1}{t+q}}$, знаходимо вираз $C_e(n)$ в області розмазування:

$$C_e(n) = C_1(n) h^{s_n} + C_1(n) h^{-z_n}, \quad (14.2.7)$$

де

$$s_n = \frac{k_n}{t+q}, \quad z_n = \frac{k'_n}{t+q}. \quad (14.2.8)$$

Співвідношення (14.2.5), (14.2.6) і (14.2.8) є точними, не залежать від використовуваної моделі перколяційної структури, вони впливають із вимог узгодження поведінки ефективних коефіцієнтів нижче, вище і на самому порозі протікання (в області розмазування) , а конкретні значення k_n і k'_n (14.2.4) (див. Таблицю 14.1) – звісно, наближені, оскільки спираються на ІМ.

Таблиця 14.1

n	$k_n(d=2)=k'_n(d=2)$	$k_n(d=3)$	$k'_n(d=3)$
2	1,37	1,52	1,03
3	2,73	3,04	2,06
4	4,1	4,56	3,09
5	5,47	6,08	4,12
6	6,83	7,6	5,12

Оцінити точність критичних індексів, що описують поведінку вищих моментів, отриманих на підставі ІМ, можна, розглянувши роботи, де було проведено числовий експеримент (моделювання методом Монте-Карло) на випадковій ґратці опорів. У цих роботах обчислювався n -й кумулянт флуктуацій опорів у сітці $\sum_{\alpha} (i_{\alpha}^2)^n C_{\alpha}(n)$, де $C_{\alpha}(n)$ - n -й кумулянт флуктуацій α -зв'язку. Така сума в залежності від значень параметрів задачі може бути записана як сума по всіх добре провідних зв'язках (при цьому опори погано провідних зв'язків вибираються нескінченними $r_2 = \infty$):

$$\left\{ \sum_{\alpha} (i_{\alpha}^2)^n \right\} \sim L^{-x_n}, \quad L < \xi, \quad (14.2.9)$$

або як сума по зв'язках, що погано проводять (при цьому опори добре провідних зв'язків $r_1 = 0$):

$$\left\{ \sum_{\alpha} (i_{\alpha}^2)^n \right\} \sim L^{y_n}, \quad L < \xi. \quad (14.2.10)$$

У виразах (14.2.9) та (14.2.10) розглянуті сітки на порозі протікання та розмірах $L \leq \xi$, фігурні дужки означають усереднення по реалізаціям випадкової сітки. У цьому випадку

(див. розділ 9) середні за реалізаціями величини пропорційні розміру зразка. Коли розмір зразка перевищує значення ξ , цю залежність необхідно замінити на концентраційну, підставляючи послідовно в (14.2.9) і (14.2.10) замість L кореляційну довжину ξ , а замість ξ її концентраційну залежність $|\tau|^{-\nu}$.

Критичні індекси x_n і y_n , отримані за допомогою числового моделювання, можна обчислити і в рамках ІМ. Наприклад, для випадку (14.2.9) основний струм тече по містку, тому

$$\sum_{\alpha} i_{\alpha}^{2n} = i_{\alpha}^{2n} N_1 = a_0^{2(d-1)n} N_1 j_1^{2n}, \quad (14.2.11)$$

де враховано, що $i_{\alpha} = a_0^{d-1} j_1$, j_1 - густина струму в містку і, оскільки в кореляційному об'ємі весь струм протікає через місток, то $I = j_1 a_0^{d-1}$.

Прийmemo $I = 1$, і тоді з (14.2.11) випливає

$$\sum_{\alpha} i_{\alpha}^{2n} = N_1 = \tau^{-\alpha_1}, \quad \alpha_1 = t - \nu(d-2). \quad (14.2.12)$$

Порівнюючи (14.2.12) та (14.2.9) $\left\{ \sum_{\alpha} i_{\alpha}^{2n} \right\} \sim L^{-x_n} \sim \tau^{\nu x_n}$, знаходимо

$$-\nu x_n = t - \nu(d-2). \quad (14.2.13)$$

Аналогічно для випадку $r_1 = 0$ (14.17) отримуємо

$$-\nu y_n = (2n-1)[q + (d-2)\nu]. \quad (14.2.14)$$

У Таблиці 14.2 наведено числові значення $-\nu x_n$ і $-\nu y_n$, отримані числовим моделюванням та в рамках ІМ (14.2.13), (14.2.14).

Таблиця 14.2

n	−vx _n		−vy _n	
	d = 2			
	ІМ	Числовий експеримент	ІМ	Числовий експеримент
1	1,3	1,3	1,3	1,3

2	1,3	1,1	3,9	4
3	1,3	1,02	6,5	6,6
$d = 3$				
1	1,12	1,12	1,61	1,9
2	1,12	1,1	4,83	5,7
3	1,12	1,03	8,05	9,5

Числовим моделюванням на плоскій неупорядкованій ґратці було знайдено критичні індекси, що описують концентраційну залежність парціальних моментів напруженості електричного поля:

$$\psi_i^{(2n)} = \frac{1}{V} \int_{V_i} \left(\frac{\mathbf{E}(\mathbf{r})}{|\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle|} \right)^{2n} dV, \quad i = 1, 2, \quad (14.2.15)$$

де i - номер фази, інтегрування ведеться по i -й фазі.

Вище порога протікання і поза областю розмазування маємо

$$\psi_1^{(n)} \sim \tau^{t(n)}, \quad \psi_2^{(n)} \sim \tau^{\mu(n)}, \quad (14.2.16)$$

$$\begin{aligned} t_{(2)} = 1,30 \pm 0,01, \quad t_{(4)} = 1,42 \pm 0,06, \quad t_{(6)} = 1,5 \pm 0,2, \\ \mu_{(2)} = 1,30 \pm 0,05, \quad \mu_{(4)} = 3,56 \pm 0,06, \quad \mu_{(6)} = 6,0 \pm 0,1. \end{aligned} \quad (14.2.17)$$

У рамках ІМ критичні індекси $t_{(n)}$ і $\mu_{(n)}$ (використовуємо міркування, подібні до наведених вище при обчисленні x_n і y_n) мають вигляд

$$t_{(n)} = (n-1)t - (n-2)(d-1)\nu, \quad \mu_{(n)} = q + (n-2)\nu \quad (14.2.18)$$

Підставляючи в ці вирази $d = 2$ та числові значення $t_2 = q_2 = 1,3$, $\nu_2 = 4/3$ в (14.2.18), знаходимо

$$\begin{aligned} t_{(2)}(\text{ІМ}) = 1,3, \quad t_{(4)}(\text{ІМ}) = 1,23, \quad t_{(6)}(\text{ІМ}) = 1,17, \\ \mu_{(2)}(\text{ІМ}) = 1,30, \quad \mu_{(4)}(\text{ІМ}) = 3,97, \quad \mu_{(6)}(\text{ІМ}) = 6,63. \end{aligned} \quad (14.2.19)$$

Як видно з Таблиці 14.2 та порівняння (14.2.17) та (14.2.18), ІМ, незважаючи на свою простоту, дає задовільне співпадіння з чисельним моделюванням.

Звичайно, підхід, заснований на ІМ перколяційної структури, є наближенням і обмеженим невеликими і не дуже малими значеннями n . Так, при великих значеннях $n \rightarrow \infty$ при підсумовуванні струмів ІМ «програє» моделі SCB. В ІМ прийнято N_1 вибирати у вигляді $N_1 \sim \tau^{\xi_R}$, при $n \rightarrow \infty$ необхідно повернутися до їх точного значення: $N_1 \sim \tau^{-1}$. Аналогічно при $n \rightarrow 0$ необхідно підсумовувати не тільки по зв'язкам в містку, але по всіх зв'язках, якими тече струм, а їх кількість визначається не через ξ_R , а через критичний індекс, що описує кількість зв'язків у блобах (Backbone).

Контрольні запитання

1. Що таке вищі струмові моменти?
2. Як визначаються ефективні вищі струмові моменти?
3. Як залежить ефективні вищі струмові моменти від неоднорідності середовища?
4. Як визначаються критичні індекси найвищих струмових моментів?
5. Які критичні індекси вищих струмових моментів вищі за поріг протікання?
6. Які критичні індекси вищих струмових моментів нижче за поріг протікання?
7. Які проблеми виникають при вимірі вищих струмових моментів?

Розділ 15. Термоелектричні властивості

15.1. ЕМТ-наближення

Термоелектричні явища – це приклад середовища, де два термодинамічні потоки одночасно ($\mathbf{j}$ – густина електричного потоку, $\mathbf{q}$ – густина потоку тепла) створюються двома термодинамічними силами: $\mathbf{E}$ – напруженістю електричного поля та ∇T градієнтом температури:

$$\begin{cases} \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \sigma \alpha (-\nabla T), \\ \mathbf{q} = \sigma \alpha T \mathbf{E} + \kappa (1 + ZT) (-\nabla T), \end{cases} \quad ZT = \frac{\sigma \alpha^2}{\kappa} T, \quad (15.1.1)$$

де α – коефіцієнт термоЕРС, κ – питомий коефіцієнт теплопровідності, $Z = \sigma \alpha^2 / \kappa$ – термоелектрична добротність (число Іоффе, sign of merit).

Термоелектричні властивості описуються в (15.1.1) у перехресних доданках, існування яких призводить до того, що електричний струм викликається не тільки електричним полем, а й градієнтом температур і, відповідно, частина потоку тепла пов'язана з електричним полем (або, що теж саме, з електричним струмом, у чому, власне, і полягає ефект Пельтьє).

Як і задача про обчислення ефективної провідності, задачу про обчислення ЕКК (у тому числі задача визначення коефіцієнта ефективної термоЕРС) можна вирішити у різних наближеннях. Спочатку розглянемо ЕМТ-наближення.

Для того щоб побудувати ЕМТ-наближення для термоелектричних явищ необхідно, як і в задачі про σ_e мати розв'язок задачі про розподіл полів і потоків для відокремленого сферичного включення. В даному випадку – це кулька, що складається з середовища з коефіцієнтами $\sigma_1, \kappa_1, \alpha_1$ (або $\sigma_2, \kappa_2, \alpha_2$), яка перебуває у середовищі з коефіцієнтами $\sigma_e, \kappa_e, \alpha_e$, а на нескінченності задані значення поля $\langle \mathbf{E} \rangle$ та градієнта температур $\langle \nabla T \rangle$. У наближенні, коли поправки до σ_e і κ_e за рахунок термоелектричних явищ малі, дано аналітичний розв'язок такої задачі для тривимірного випадку:

$$\alpha_e = \frac{\langle \alpha \sigma / \Delta_0 \rangle}{\langle \sigma / \Delta_0 \rangle}, \quad \Delta_0 = (2\sigma_e + \sigma)(2\kappa_e + \kappa), \quad (15.1.2)$$

де σ_e і κ_e визначаються з ЕМТ-наближення (без урахування термоелектричних явищ),

$$\left\langle \frac{\sigma_e - \sigma}{2\sigma_e + \sigma} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\kappa_e - \kappa}{2\kappa_e + \kappa} \right\rangle = 0, \quad d = 3. \quad (15.1.3)$$

Аналогічно можна записати (15.1.2) та (15.1.3) для двовимірного випадку.

Для тривимірного випадку для двофазного середовища з виразів (15.1.2) та (15.1.3) слідує

$$\alpha_e = \frac{p\sigma_1\alpha_1(2\sigma_e + \sigma_2)(2\kappa_e + \kappa_2) + (1-p)\sigma_2\alpha_2(2\sigma_e + \sigma_1)(2\kappa_e + \kappa_1)}{p\sigma_1(2\sigma_e + \sigma_2)(2\kappa_e + \kappa_2) + (1-p)\sigma_2(2\sigma_e + \sigma_1)(2\kappa_e + \kappa_1)}, \quad d=3 \quad (15.1.4)$$

Для двовимірного замість (15.1.3) необхідно скористатися $\left\langle \frac{\sigma_e - \sigma}{\sigma_e + \sigma} \right\rangle = 0$, $\left\langle \frac{\kappa_e - \kappa}{\kappa_e + \kappa} \right\rangle = 0$ і

$\Delta_0 = (\sigma_e + \sigma)(\kappa_e + \kappa)$, тоді маємо:

$$\alpha_e = \frac{p\sigma_1\alpha_1(\sigma_e + \sigma_2)(\kappa_e + \kappa_2) + (1-p)\sigma_2\alpha_2(\sigma_e + \sigma_1)(\kappa_e + \kappa_1)}{p\sigma_1(\sigma_e + \sigma_2)(\kappa_e + \kappa_2) + (1-p)\sigma_2(\sigma_e + \sigma_1)(\kappa_e + \kappa_1)}, \quad d=2. \quad (15.1.5)$$

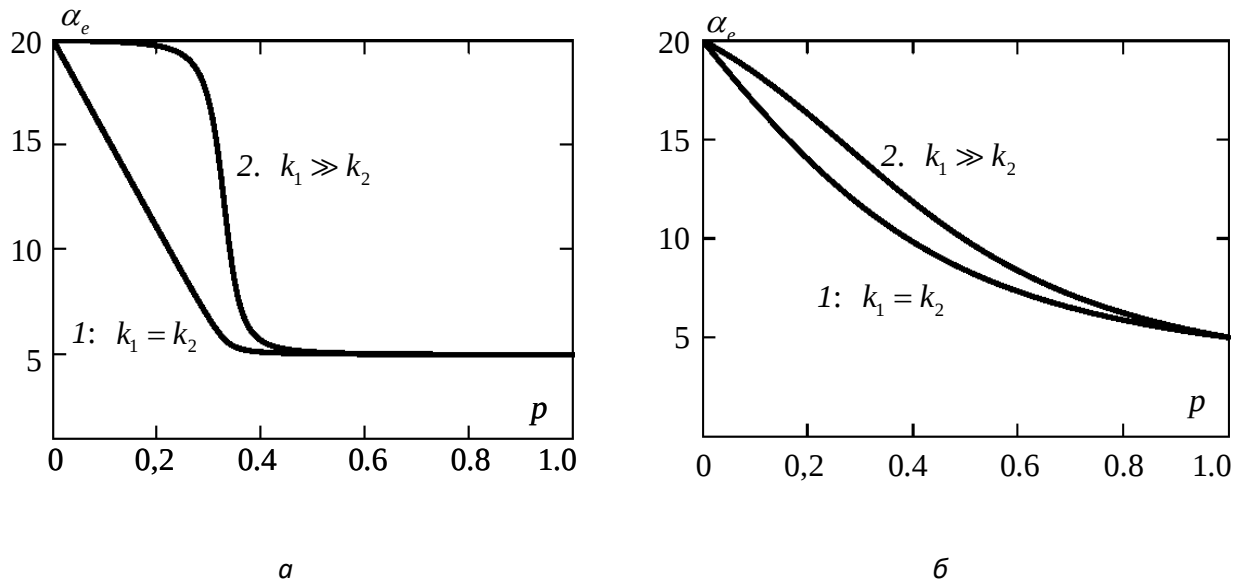


Рис. 15.1. Концентраційна залежність $\alpha_e = \alpha_e(p)$ для двох граничних випадків відношення теплопровідностей фаз: а- при $\sigma_1 \gg \sigma_2$ ($\sigma_1/\sigma_2 = 10^3$, $\alpha_2/\alpha_1 = 4$) $1 - \kappa_2/\kappa_1 = 5 \cdot 10^{-2} \ll 1$ - 2 - $\kappa_1 = \kappa_2$; б- при ($\sigma_1/\sigma_2 = 6$) $1 - \kappa_2/\kappa_1 \ll 1$, 2 - $\kappa_1 = \kappa_2$.

Як випливає з аналізу (15.1.4), концентраційна залежність $\alpha_e = \alpha_e(p)$ веде себе по-різному залежно від відношення теплопровідностей фаз κ_2/κ_1 (Рис. 15.1). При великій неоднорідності по електропровідності $\sigma_1/\sigma_2 \gg 1$ та теплопровідності $\kappa_1/\kappa_2 \gg 1$ в залежності $\alpha_e(p)$ спостерігається сходинка, яка при $\kappa_1 \approx \kappa_2$ зникає. Плавні залежності спостерігаються при слабкій неоднорідності по провідності.

У тому випадку, коли струм по одній із фаз не тече, тобто якщо $\sigma_2 = 0$, $\alpha_e = \alpha_1$ – значення

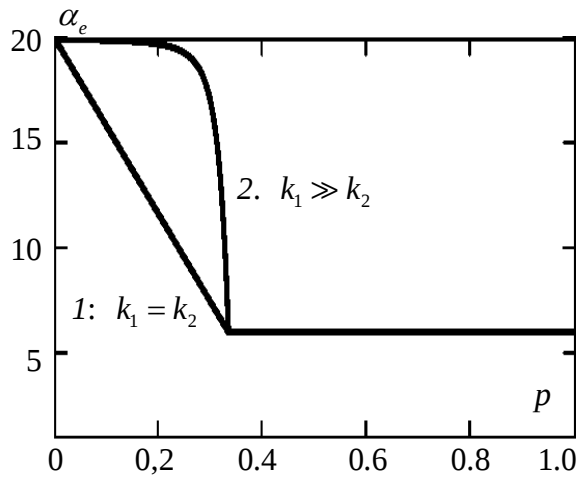


Рис.15.2. Концентраційна залежність $\alpha_e = \alpha_e(p)$ при $\sigma_2 = 0$ для двох граничних випадків відношення теплопровідностей фаз:

чистої фази у всій галузі існування σ_e , тобто при $p > p_c$ (Рис.15.2.). В випадку $\kappa_1 \gg \kappa_2$ поблизу p_c добре видно різкий (перколяційний) перехід α_e від α_1 до α_2 .

15.2. Термоелектричні властивості самодуальних середовищ

Як і в "звичайному" (без термоелектричних явищ) випадку провідності, можливий точний розв'язок задачі про α_e у двовимірному випадку для

самодуальних середовищ

$$\alpha_e = \frac{\alpha_1 \sqrt{\sigma_1 \kappa_2} + \alpha_2 \sqrt{\sigma_2 \kappa_1}}{\sqrt{\sigma_1 \kappa_2} + \sqrt{\sigma_2 \kappa_1}} = \frac{\alpha_1 \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} + \alpha_2 \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}}{\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} + \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}}}. \quad (15.2.1)$$

Зокрема, при $\sigma_2 = 0$ $\alpha_e(\sigma_2 = 0) = \alpha_1$ (Рис.15.2).

Для самодуальних середовищ ефективні σ_e і κ_e мають вигляд

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \frac{\sqrt{\sigma_1 \kappa_2} + \sqrt{\sigma_2 \kappa_1}}{\sqrt{(\sqrt{\sigma_1 \kappa_2} + \sqrt{\sigma_2 \kappa_1})^2 + T \sigma_1 \sigma_2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2}}, \quad (15.2.2)$$

$$\kappa_e = \sqrt{\kappa_1 \kappa_2} \frac{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}{\sigma_e}. \quad (15.2.3)$$

Оскільки поріг протікання у самодуальних середовищах $p_c = 1/2$, α_e (15.2.1) призводить до значення α_e на порозі протікання у двовимірному випадку. При $\kappa_1 \approx \kappa_2$ і сильної неоднорідності по провідності $\sigma_2/\sigma_1 = h \ll 1$ з (15.2.1) слідує

$$\alpha_e = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 h^{\frac{1}{2}}}{1 + h^{\frac{1}{2}}} \approx \alpha_1 + \alpha_2 h^{\frac{1}{2}}. \quad (15.2.4)$$

Як правило, в "металевій" (σ_1) фазі термоЕРС набагато менше, ніж у "напівпровідниковій" ($\sigma_2 \ll \sigma_1$) $\alpha_1 \ll \alpha_2$, тоді з (15.2.4) на порозі протікання отримаємо

$$\alpha_e \approx \alpha_2 h^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha_2 h^{\frac{1}{2}} \gg \alpha_1, \quad (15.2.5)$$

тобто α_e лімітується малим співмножником $h = \sigma_2/\sigma_1$.

При $\kappa_2 \ll \kappa_1$ і, як і раніше, $\sigma_2/\sigma_1 \ll 1$ і $\alpha_1 \ll \alpha_2$ з (15.1.4) випливає

$$\alpha_e \approx \alpha_2 \frac{\sqrt{\sigma_2/\sigma_1}}{\sqrt{\sigma_2/\sigma_1} + \sqrt{\kappa_2/\kappa_1}}, \quad (15.2.6)$$

і якщо $\sqrt{\sigma_2/\sigma_1} \approx \sqrt{\kappa_2/\kappa_1}$, то

$$\alpha_e \approx \alpha_2, \quad (15.2.7)$$

тобто в порівнянні з випадком $\kappa_1 \approx \kappa_2$ при $p = p_c$ значення α_e різко зростає. Ця поведінка добре узгоджується з результатами ЕМТ-наближення (Рис.15.1 а).

Якщо записати (15.1.1.) в абстрактному, придатному для будь-якої двострумової системи з перехресними явищами, вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= A_{11}\mathbf{e} + A_{12}\mathbf{g}, \\ \mathbf{q} &= A_{21}\mathbf{e} + A_{22}\mathbf{g}, \end{aligned} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (15.2.8)$$

де $\hat{A}$ - тензор локальних кінетичних коефіцієнтів, то ефективні значення A_{ij}^e самодуальних середовищ (з точністю до позначень), що збігаються з (15.2.1),(15.2.3) можуть бути записані для тензора $\hat{A}^e$

$$\hat{A}^e = \left(\text{Det} \hat{A}_1 \text{Det} \hat{A}_2 \right)^{\frac{1}{4}} \frac{\hat{\Omega}_1 + \hat{\Omega}_2}{\sqrt{\text{Det}(\hat{\Omega}_1 + \hat{\Omega}_2)}}, \quad \hat{\Omega}_n = \frac{\hat{A}_n}{\sqrt{\text{Det}(\hat{A}_n)}}, \quad n = 1, 2, \quad (15.2.9)$$

де нижній індекс n позначає номер фази.

Так само, як і для задачі про ефективну провідність (див. розділ 6), для двовимірного полікристалу існує точний розв'язок

$$\hat{A}^e = \left(\text{Det} \hat{A}_{\parallel} \text{Det} \hat{A}_{\perp} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{\hat{\Omega}_{\parallel} + \hat{\Omega}_{\perp}}{\sqrt{\text{Det}(\hat{\Omega}_{\parallel} + \hat{\Omega}_{\perp})}}, \quad \hat{\Omega}_{\parallel, \perp} = \frac{\hat{A}_{\parallel, \perp}}{\sqrt{\text{Det}(\hat{A}_{\parallel, \perp})}}, \quad (15.2.10)$$

де $\hat{A}_{\parallel}$ і $\hat{A}_{\perp}$ - головні значення тензора локальних коефіцієнтів A_{ik} .

У “термоелектричній” термінології для двовимірного полікристалу замість (15.2.10) маємо

$$\alpha^e = \frac{\alpha_{\parallel} \sqrt{\sigma_{\parallel} \kappa_{\perp}} + \alpha_{\perp} \sqrt{\sigma_{\perp} \kappa_{\parallel}}}{\sqrt{\sigma_{\parallel} \kappa_{\perp}} + \sqrt{\sigma_{\perp} \kappa_{\parallel}}}, \quad (15.2.11)$$

$$\sigma^e = \sqrt{\sigma_{\parallel} \sigma_{\perp}} \frac{\sqrt{\sigma_{\parallel} \kappa_{\perp}} + \sqrt{\sigma_{\perp} \kappa_{\parallel}}}{\sqrt{\left(\sqrt{\sigma_{\parallel} \kappa_{\perp}} + \sqrt{\sigma_{\perp} \kappa_{\parallel}} \right)^2 + T \sigma_{\parallel} \sigma_{\perp} (\alpha_{\parallel} - \alpha_{\perp})^2}}, \quad (15.2.12)$$

$$\kappa^e = \sqrt{\kappa_{\parallel} \kappa_{\perp}} \frac{\sqrt{\sigma_{\parallel} \sigma_{\perp}}}{\sigma_e}. \quad (15.2.13)$$

Вирази для σ_e і κ_e (15.2.2) можна записати так, щоб явно виділити доданок з “термоелектричною добротністю” (така добротність може бути названа внутрішньою добротністю, вона, звичайно, не збігається з ефективною добротністю $Z_e = \sigma_e \alpha_e^2 / \kappa_e$):

$$\tilde{Z}T = \frac{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}{\sqrt{\kappa_1 \kappa_2}} \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{\left(\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} / \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} + \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} / \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \right)^2} T, \quad (15.2.14)$$

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}{\sqrt{1 + \tilde{Z}T}}, \quad (15.2.15)$$

$$\kappa_e = \sqrt{\kappa_1 \kappa_2} \sqrt{1 + \tilde{Z}T}. \quad (15.2.16)$$

Таким чином, відразу видно умову малості впливу термоелектричних явищ на ефективні електро- та теплопровідність: $ZT \ll 1$ (15.2.14). Поняття термоелектричної добротності фаз (числа Іюффе) $Z_i = \sigma_i \alpha_i^2 / \kappa_i$ є визначальним для обчислення ККД термоелектричних пристроїв (термогенераторів, холодильників Пельтьє тощо). Зазначимо, що в $\tilde{Z}T$ (15.2.15) параметри термоелектричних матеріалів $\sigma_1, \kappa_1, \alpha_1$ і $\sigma_2, \kappa_2, \alpha_2$ утворюють своєрідну безрозмірну комбінацію, яка, однак, не є функцією $Z_1 = \sigma_1 \alpha_1^2 / \kappa_1$ і $Z_2 = \sigma_2 \alpha_2^2 / \kappa_2$. Це означає, що принаймні в даному випадку вплив термоелектричних явищ на ефективні властивості композиту (у тому числі і на ККД термоелектричних пристроїв, створених з такого композиту) не може бути виражений тільки через Z_1 і Z_2 (і, або через $Z_e = \sigma_e \alpha_e^2 / \kappa_e$), а вимагає більш складних (нетривіальних) комбінацій параметрів, таких, наприклад, як (15.2.14). Ефективна добротність, що характеризує добротність (здатність перетворити теплову енергію на електричну) композиту також складним чином залежить параметрів термоелектричного матеріалу фаз.

15.3. Критична область концентрацій – поведінка α_e поблизу порога протікання

У сильно неоднорідному за провідністю середовища ($h = \sigma_2 / \sigma_1 \ll 1$) розподілом струмів і полів у середовищі поблизу порогу протікання "керує", як це докладно показано вище (розділ 5), перколяційна структура - містки та прошарки. Наявність додаткових процесів, в даному випадку термоелектричних, звичайно, впливає на розподіл струмів у середовищі, проте визначаючими його елементами протікаючої структури, як і раніше, залишаються містки та прошарки. Тому слід очікувати (і ці очікування виправдовуються),

що проведення ЕКК, у тому числі α_e , поблизу порогу протікання є універсальним, тобто описується критичними індексами.

Пояснимо на основі ІМ на простому якісному рівні критичну поведінку α_e для двох різних випадків: $\kappa_1 \gg \kappa_2$ і $\kappa_1 \approx \kappa_2$. При цьому вважаємо, що $\sigma_2/\sigma_1 \ll 1$ і $\alpha_2 \gg \alpha_1$. Як побачимо, ІМ дозволяє не тільки показати різницю в поведінці α_e для цих випадків, а й визначити критичні індекси α_e .

Спочатку розглянемо середовище нижче порога протікання (див. параграф 5.4 Рис.5.8, а). За наявності градієнта температур ця схема має вигляд (див. Рис.15.3, а). Еквівалентна їй електрична схема з урахуванням ЕРС, що виникає за рахунок перепаду температур $\Delta T = T_2 - T_1$, показана на Рис.15.3,б, де R_2 - опір прошарку, $\mathcal{E}_1$ - ЕРС, що виникає на прошарку, R_ξ - опір, паралельний по відношенню до прошарку частини, погано провідного середовища (з характерним розміром ξ), $\mathcal{E}_2'$ - ЕРС, що виникає на цій частині.

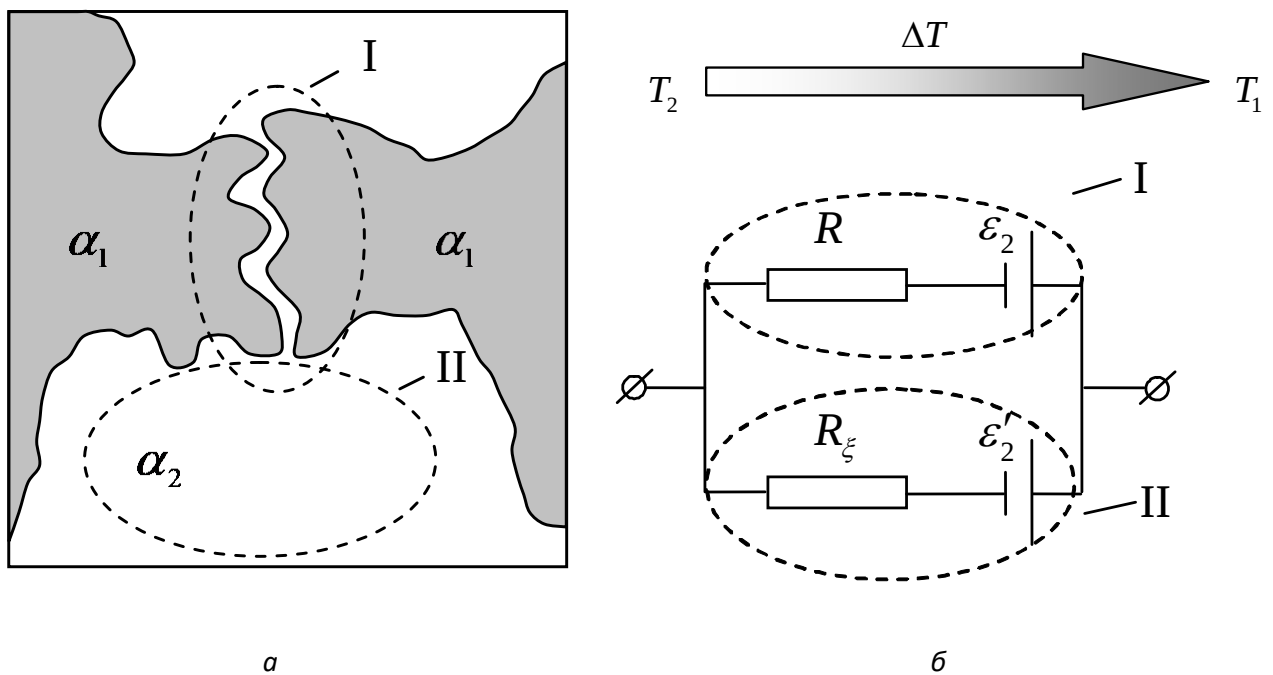


Рис.15.3. Перколяційна структура: нижче порога протікання (а) та еквівалентна електрична схема (б)

Різниця температур на розмірах ξ : $\Delta T = T_2 - T_1$, сумарна ЕРС $\mathcal{E}_\xi$ на розмірах ξ (схема б на Рис. 15.3) знаходиться так:

$$\mathcal{E}_\xi = \left(\frac{\mathcal{E}_2}{R_2} + \frac{\mathcal{E}_2'}{R_\xi} \right) / \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_\xi} \right), \quad (15.3.1)$$

звідки

$$\alpha_e = \frac{\varepsilon_\xi}{\Delta T} = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon'_\xi \frac{R_2}{R_\xi}}{1 + \frac{R_2}{R_\xi}} \cdot \frac{1}{\Delta T} \approx \frac{\varepsilon_\xi + \varepsilon'_2 \frac{R_2}{R_\xi}}{\Delta T}, \quad (15.3.2)$$

де враховано, що опір прошарку R_2 завжди набагато менше R_ξ - опір тієї частини поганопровідної фази, яка не входить у прошарок, а

$$\varepsilon_2 = \Delta\alpha_2\Delta T, \quad \varepsilon'_2 = \Delta\alpha_2\Delta T, \quad \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1, \quad (15.3.3)$$

де ΔT_2 - перепад температур на прошарку.

При великій різниці теплопровідностей фаз $\kappa_1 \gg \kappa_2$ різниця температур на прошарку практично та ж, що і на границях об'єму $\Delta T_2 \approx \Delta T$, тоді підставляючи (15.3.3) у (15.3.2), отримуємо

$$\alpha_e \approx \Delta\alpha\tau^0, \quad \kappa_1 \gg \kappa_2, \quad (15.3.4)$$

тобто у випадку $p < p_c$, $\kappa_1 \gg \kappa_2$, $\sigma_1 \gg \sigma_2$, $\alpha_2 \gg \alpha_1$ α_e не залежить від концентрації.

У разі, коли теплопровідності фаз приблизно рівні: $\kappa_1 \approx \kappa_2$, перепад температур на прошарку набагато менше, ніж ΔT :

$$\Delta T_2 \approx \Delta T \frac{a_0}{\xi}, \quad \Delta T |\tau|^\nu \ll \Delta T. \quad (15.3.5)$$

Звідси і з (15.3.3) випливає

$$\alpha_e = \frac{\Delta T a_0 / \xi + \Delta T R_2 / R_\xi}{\Delta T} \approx \Delta\alpha (|\tau|^\nu + |\tau|^q), \quad (15.3.6)$$

де враховано, що $a_0 / \xi \approx |\tau|^\nu$, а $R_2 / R_\xi \approx |\tau|^q$.

Оскільки і в дво-, і в тривимірному випадку $\nu > q$ (див. Таблицю 5.1), $|\tau|^q > |\tau|^\nu$ тоді з (15.3.6) маємо

$$\alpha_e \approx \Delta\alpha |\tau|^q, \quad \kappa_1 \approx \kappa_2. \quad (15.3.7)$$

Слабка залежність α_e від τ при $\kappa_1 \approx \kappa_2$ та степеневе падіння α_e при $\kappa_1 \gg \kappa_2$ передбачається і ЕМТ-наближенням.

Вище порога протікання перколяційна структура згідно з ІМ (див. параграф 5.4 Рис. 5.7,б) зводиться до наступної еквівалентної схеми (див. Рис. 15.4,а). Еквівалентна їй електрична схема з урахуванням ЕРС, що виникає за рахунок перепаду температур

$\Delta T = T_2 - T_1$ показана на Рис.15.4,б, де R_1 і R_2 - Опір містка та прошарку, $\mathcal{E}_1$ і $\mathcal{E}_2$ - ЕРС, що виникають внаслідок перепаду температур на містку ΔT_1 і ΔT_2 .

Аналогічно (15.23) для α_e , згідно зі схемою на Рис. 5.7,б маємо

$$\alpha_e = \frac{\mathcal{E}_1/R_1 + \mathcal{E}_2/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} \frac{1}{\Delta T} = \frac{\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1 R_2/R_1}{1 + R_2/R_1} \frac{1}{\Delta T}. \quad (15.3.8)$$

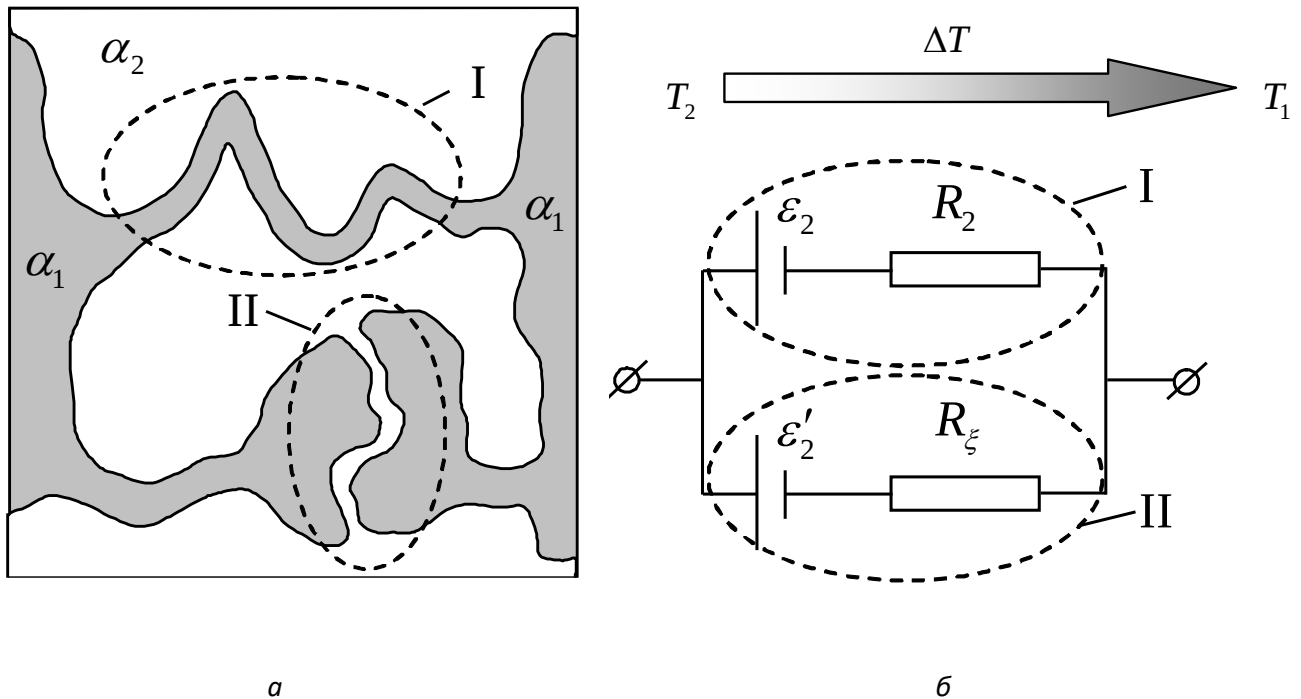


Рис. 15.4. Перколяційна структура: вище порога протікання (а) та еквівалентна електрична схема (б):

У випадку великої різниці теплопровідностей фаз $\kappa_1 \gg \kappa_2$, перепади температур на містку та прошарку приблизно рівні один одному:

$$\Delta T_1 \approx \Delta T, \quad \Delta T_2 \approx \Delta T \quad (15.3.9)$$

Для містка це пов'язано з тим, що хоча довжина містка $\sim a_0 N_1$, його розмір (відстань по прямій від одного кінця до іншого) за рахунок звивистості менше, і, як впливає з простих геометричних міркувань, пропорційний ξ .

Згідно (15.3.9)

$$\mathcal{E}_1 \approx \alpha_1 \Delta T, \quad \mathcal{E}_2 \approx \alpha_2 \Delta T, \quad (15.3.10)$$

що при підстановці в (15.3.8), з урахуванням $R_2/R_1 = G_1/G_2 = (\sigma_1/\sigma_2) \cdot |\tau|^{l+q}$ (див. параграф 5.4) маємо

$$\alpha_e \approx \frac{\Delta\alpha + \alpha_1 (\sigma_1/\sigma_2) |\tau|^{t+q}}{1 + (\sigma_1/\sigma_2) |\tau|^{t+q}}. \quad (15.3.11)$$

Зважаючи на те, що вище області розмазування $|\tau|^{t+q} \gg \sigma_1/\sigma_2$ перетворюємо (15.3.11)

$$\alpha_e \approx \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} |\tau|^{-(t+q)}. \quad (15.3.12)$$

Тоді відразу стає зрозуміло, що можливі два різні типи поведінки в залежності від співвідношення $(\alpha_2/\alpha_1)(\sigma_2/\sigma_1)$ і $|\tau|^{-(t+q)}$.

При

$$|\tau|^{t+q} \gg \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad (15.3.13)$$

з (15.3.12) випливає, що ефективний коефіцієнт термоЕРС

$$\alpha_e \approx \alpha_1, \quad (15.3.14)$$

і не залежить від концентрації.

При наближенні до порога протікання, тобто при зменшенні τ , коли виконується зворотна (15.3.13) нерівність, але з умовою, що система, як і раніше, знаходиться поза областю розмазування

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \ll |\tau|^{t+q} \ll \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad (15.3.15)$$

з (15.3.12) знаходимо

$$\alpha_e \approx \alpha_2 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} |\tau|^{-(t+q)}. \quad (15.3.16)$$

Ці та деякі інші закономірності поведінки α_e були отримані також суворими методами, результати яких будуть описані нижче. Розглянуте тут застосування ІМ, створеної на основі інформації про поведінку σ_e поблизу порогу протікання, дозволяє наочно отримати і пояснити нетривіальні закономірності поведінки ефективного коефіцієнта термоЕРС α_e .

15.4. Ізоморфізм

Було запропоновано метод, надалі узагальнений і розвинений у багатьох роботах, який дозволяє у ряді випадків звести двопотокову задачу з перехресним доданком (частковим випадком яких є термоелектрична задача) до однопотокової, наприклад, задача провідності. Іншими словами, цей метод дозволяє встановити точну відповідність

(ізоморфізм) між задачами про знаходження ЕКК для системи з термоелектричними явищами та ефективною електропровідності в середовищі без термоелектричних явищ.

Ймовірно, найбільш наочна ілюстрація зведення одної задачі до іншої належить А.М.Дихне. Зокрема, показано, як поширити результат для ефективною електропровідності $\sigma_e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$ на термоелектричний випадок. Запишемо рівняння (15.1.1) у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j} &= s\mathbf{e} + a\mathbf{h} \\ \mathbf{q} &= b\mathbf{e} + k\mathbf{h} \end{aligned} \right\}, \quad (15.4.1)$$

де у разі термоелектричної задачі: $\mathbf{e} = -\nabla \varphi$, $\mathbf{h} = -\nabla T$ і $\text{div} \mathbf{j} = 0$, $\text{div} \mathbf{q} = 0$, $s = \sigma$, $a = \sigma \alpha$, ... Локальні коефіцієнти s , a , b , k постійні в кожній із фаз і рівні s_1 , a_1 ... і s_2 , a_2 ... у першій та у другій фазах.

Введемо новий потік:

$$\mathbf{i} = \mathbf{j} + c\mathbf{q} = (s + cb)\mathbf{e} + (a + ck)\mathbf{h}, \quad (15.4.2)$$

де c – деяка константа, яка не залежить від координат, яку підберемо так, щоб

$$\frac{a_1 + ck_1}{s_1 + cb_1} = \frac{a_2 + ck_2}{s_2 + cb_2} = \omega, \quad \omega = \text{const}. \quad (15.4.3)$$

Тоді (15.4.2) з урахуванням (15.4.3) можна переписати як $\mathbf{i} = (s + cb) \left(\mathbf{e} + \frac{a + ck}{s + cb} \mathbf{h} \right)$, тобто

$$\mathbf{i} = (s + cb) \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (15.4.4)$$

де $\boldsymbol{\varepsilon}$ - нове поле,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \omega \mathbf{h}. \quad (15.4.5)$$

Поле $\boldsymbol{\varepsilon}$ та потік $\mathbf{i}$ задовольняють тим самим рівнянням $\text{div} \boldsymbol{\varepsilon} = 0$, $\text{rot} \mathbf{i} = 0$, що і вихідні $\mathbf{j}$, $\mathbf{q}$ і $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$. Тому середній «струм» $\langle \mathbf{i} \rangle = \mathbf{I}$ та середнє «поле» $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \mathbf{e} \rangle + \omega \langle \mathbf{h} \rangle$ пов'язані так само, як і середнє поле із середнім струмом у задачі з одним потоком. Якщо, наприклад, в останній вибрати випадок самодуального середовища $\langle \mathbf{j} \rangle = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \langle \mathbf{e} \rangle$, то

$$\mathbf{I} = \sqrt{(s_1 + cb_1)(s_2 + cb_2)} (\langle \mathbf{e} \rangle + \omega \langle \mathbf{h} \rangle). \quad (15.4.6)$$

Рівняння (15.4.3) для визначення c - квадратне, його розв'язок дає два значення c_I і c_{II} .

Таким чином, є два рівняння:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{j} \rangle + c_I \langle \mathbf{q} \rangle &= \sqrt{(s_1 + c_I b_1)(s_2 + c_I b_2)} (\langle \mathbf{e} \rangle + \omega_I \langle \mathbf{h} \rangle), \\ \langle \mathbf{j} \rangle + c_{II} \langle \mathbf{q} \rangle &= \sqrt{(s_1 + c_{II} b_1)(s_2 + c_{II} b_2)} (\langle \mathbf{e} \rangle + \omega_{II} \langle \mathbf{h} \rangle). \end{aligned} \quad (15.4.7)$$

Розв'язуючи ці рівняння відносно $\langle \mathbf{j} \rangle$ і $\langle \mathbf{q} \rangle$, отримуємо всі чотири ефективні кінетичні коефіцієнти.

У найбільш загальному вигляді метод ізоморфізму реалізований не тільки для термоелектричних явищ, але і для дво- та тривимірних гальваноманітних явищ та задачі про провідність анізотропних середовищ. Надалі цей метод був поширений на термогальваноманітні явища, коли матеріальні рівняння (15.1.1) записані у вигляді

$$\mathbf{j}_a = \sum_b \sigma_{ab} \mathbf{E}_b, \quad a, b = 1, 2, \quad (15.4.8)$$

де $\mathbf{j}_1 \equiv \mathbf{j}$, $\mathbf{j}_2 \equiv \mathbf{q}/T$, і показано, що за допомогою лінійних перетворень можна отримати

$$\mathbf{E}_a = \sum_b M_{ab} \mathbf{E}'_b, \quad \mathbf{j}_a = \sum_b N_{ab} \mathbf{j}'_b. \quad (15.4.9)$$

Матрицю локальних кінетичних коефіцієнтів σ_{ab} можна діагоналізувати одночасно для двох фаз, що в штрихованій системі записується так:

$$\mathbf{j}'_b = \sigma'_b(\mathbf{r}) \mathbf{E}'_b. \quad (15.4.10)$$

Не вдаючись до подробиць досить громіздких обчислень, наведемо лише кінцевий результат. Нехай відомий розв'язок задачі про обчислення ефективної електропровідності σ_e у середовищі без термоелектричних явищ, який представимо у вигляді

$$\sigma_e = \sigma_1 f(p, h), \quad (15.4.11)$$

де $h = \sigma_2 / \sigma_1$ а p – як завжди, концентрація першої (добре провідної фази), матриця кінетичних коефіцієнтів $\hat{\sigma}$ у термоелектричному випадку має вигляд

$$\hat{\sigma}_i = \begin{pmatrix} \sigma_i \gamma_i \\ \gamma_i \chi_i \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \sigma_i \alpha_i, \quad \chi_i = \kappa / T + \sigma_i \alpha_i^2, \quad (15.4.12)$$

де $i = 1, 2$ - позначають номер фази.

Тоді ЕКК можна записати

$$\sigma_e = \frac{(\mu \sigma_1 - \sigma_2) f(p, \lambda) - (\lambda \sigma_1 - \sigma_2) f(p, \mu)}{\mu - \lambda}, \quad (15.4.13)$$

$$\alpha_e = \frac{(\mu \gamma_1 - \gamma_2) f(p, \lambda) - (\lambda \gamma_1 - \gamma_2) f(p, \mu)}{(\mu \sigma_1 - \sigma_2) f(p, \lambda) - (\lambda \sigma_1 - \sigma_2) f(p, \mu)}, \quad (15.4.14)$$

$$\kappa_e = \frac{\sigma_1 \kappa_1 (\mu - \lambda) f(p, \lambda) f(p, \mu)}{(\mu \sigma_1 - \sigma_2) f(p, \lambda) - (\lambda \sigma_1 - \sigma_2) f(p, \mu)}, \quad (15.4.15)$$

де функції $f(p, \lambda)$ і $f(p, \mu)$ ті ж, що й у (15.4.11) (із заміною h на λ і μ відповідно), а μ і λ мають вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \\ \lambda \end{array} \right\} = \frac{1}{4\sigma_1\kappa_1} \left\{ \sqrt{\left(\sqrt{\sigma_1\kappa_2} + \sqrt{\sigma_2\kappa_1}\right)^2 + \sigma_1\sigma_2T(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \pm \right. \\ \left. \pm \sqrt{\left(\sqrt{\sigma_1\kappa_2} - \sqrt{\sigma_2\kappa_1}\right)^2 + \sigma_1\sigma_2T(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \right\}^2. \quad (15.4.16)$$

Відповідно до методу виведення цих співвідношень вирази (15.4.13)-(15.4.15) справедливі для задач будь-якої мірності, двофазних середовищ з будь-якою структурою (розташування фаз, при яких σ_e у задачі (15.4.11) є ізотропною).

Зауважимо, що виключення функцій $f(p, \lambda)$ і $f(p, \mu)$ з (15.4.13) – (15.4.15) призводить до співвідношення, що зв'язує σ_e , κ_e , α_e і не залежить від конкретної структури середовища

$$\frac{\kappa_e}{\sigma_e} = T \frac{\gamma_1\chi_2 - \gamma_2\chi_1 - (\sigma_1\chi_2 - \sigma_2\chi_1)\alpha_e - (\sigma_2\gamma_1 - \sigma_1\gamma_2)\alpha_e^2}{\sigma_1\gamma_1 - \sigma_2\gamma_2}. \quad (15.4.17)$$

У випадку, коли вплив термоелектричних явищ на електро- і теплопровідність малий, тобто при малій добротності $Z_i T \ll 1$, співвідношення (15.4.17) перетворюється на просте:

$$\alpha_e = \frac{\alpha_1\sigma_1\kappa_2 - \alpha_2\sigma_2\kappa_1 - \sigma_1\sigma_2(\alpha_1 - \alpha_2)\kappa_e/\sigma_e}{\sigma_1\kappa_2 - \sigma_2\kappa_1} = \\ = \alpha_1 + \frac{\sigma_1\sigma_2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sigma_1\kappa_2 - \sigma_2\kappa_1} \left(\frac{\kappa_1}{\sigma_1} - \frac{\kappa_e}{\sigma_e} \right), \quad (15.4.18)$$

де тепер $\sigma_e = \sigma_1 f(p, \sigma_2/\sigma_1)$, $\kappa_e = \kappa_1 f(p, \kappa_2/\kappa_1)$.

Таким чином, поведінка ефективного коефіцієнта α_e у критичній області визначається поведінкою ефективної провідності (обчисленої без урахування термоелектричних явищ), для чого достатньо підставити функцію $f(p, h)$ з (15.4.12) в (15.4.13) – (15.4.15). Зокрема, це означає, що критичні індекси, що описують поведінку α_e поблизу порогу протікання, можуть бути комбінаціями тільки t , q і ν – критичних індексів, що описують поведінку σ_e .

Співвідношення (15.4.18) з великою точністю було перевірено за допомогою числового моделювання та експериментально.

Як розглядалося вище, в рамках ЕМТ-наближення та за допомогою ІМ перколяційної структури поведінка α_e при $\kappa_1 \approx \kappa_2$ і $\kappa_1 \gg \kappa$ якісно різниться.

Розглянемо спочатку випадок $\kappa_1 \approx \kappa_2$. Якщо при цьому виконується нерівність

$$\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{\frac{t}{t+q}} \ll \frac{\alpha_2 \sigma_2}{\alpha_1 \sigma_1} \ll 1, \quad (15.4.19)$$

те, як випливає з (15.4.18), ефективний коефіцієнт α_e істотно змінюється у критичній області:

$$\alpha_e \approx \alpha_1, \quad p > p_e, \quad \tau^t \gg \alpha_2 \sigma_2 / \alpha_1 \sigma_1, \tau \gg \Delta, \quad \text{I}, \quad (15.4.20)$$

$$\alpha_e = \alpha_2 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \tau^{-t}, \quad p > p_e, \quad \Delta \ll \tau \ll \left(\frac{\alpha_2 \sigma_2}{\alpha_1 \sigma_1}\right)^{\frac{1}{t}}, \quad \text{II}, \quad (15.4.21)$$

$$\alpha_e = \alpha_2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{\frac{q}{t+q}} = \alpha_2 \Delta^q, \quad |\tau| < \Delta, \quad \text{III}, \quad (15.4.22)$$

$$\alpha_e = \alpha_2 |\tau|^q, \quad p < p_e, \quad |\tau| \gg \Delta, \quad \text{IV}, \quad (15.4.23)$$

де $(\sigma_2 / \sigma_1)^{\frac{t}{t+q}} = \Delta$, як і раніше, позначає область розмазування.

Для наочності закономірності (15.4.20)-(15.4.23) наведені на Рис.15.5.

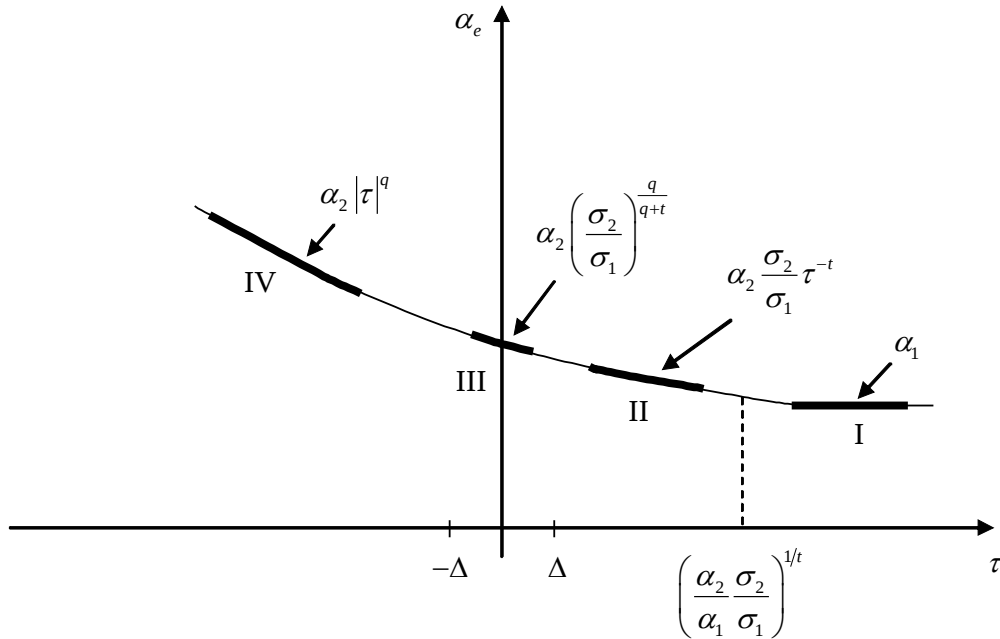


Рис.15.5. Концентраційна залежність ефективного коефіцієнта термоЕРС у критичній області при близьких значеннях теплопровідності фаз $\kappa_1 \approx \kappa_2$ (див. також Рис. 15.1а).

Цікаво відзначити, що вище за поріг протікання поза областю розмазування, де, здавалося б, "головну роль" у всьому повинна грати перша фаза ($\sigma_1, \kappa_1, \alpha_1$), у II області $\alpha_e \approx \alpha_2$.

У протилежному випадку, коли теплопровідності фаз значно відрізняються ($\kappa_1 \gg \kappa_2$), зміна α_e від α_1 до α_2 відбувається в критичній області на відміну від випадку, коли вони близькі ($\kappa_1 \approx \kappa_2$), коли α_e змінюється по всій області зміни концентрації (див. ЕМТ-наближення, що дає хорошу точність поза критичною областю). При $\kappa_1 \gg \kappa_2$ можливо кілька різних випадків. При $\sigma_2 / \sigma_1 \ll \alpha_2 \sigma_2 / \alpha_1 \sigma_1 \ll 1$ або, що те саме, $\alpha_2 \gg \alpha_1$ і $\alpha_2 \sigma_2 \ll \alpha_1 \sigma_1$ і при $\sigma_2 / \sigma_1 = \kappa_2 / \kappa_1$ у (15.4.18) з'являється математична невизначеність. Аналіз загальних виразів (15.4.13)-(15.4.15) показує, що в цьому випадку в лінійному по α_i наближенні ефективний коефіцієнт α_e виражається не лише через функцію $f(p, h)$ (15.4.11), але також і її похідну:

$$\alpha_e = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\partial \ln f(p, h)}{\partial h}, \quad h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}. \quad (15.4.24)$$

Тоді

$$\alpha_e \approx \alpha_1, \tau \gg \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{t+q}} \Delta, \quad p > p_c, \quad \text{I}, \quad (15.4.25)$$

$$\alpha_e \approx \alpha_2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \tau^{-(t+q)}, \quad \Delta \ll \tau \ll \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{t+q}} \Delta, \quad p > p_c, \quad \text{II}, \quad (15.4.26)$$

$$\alpha_e = \frac{t}{t+q} \alpha_2, \quad |\tau| < \Delta, \quad \text{III}, \quad (15.4.27)$$

$$\alpha_e = \alpha_2, \quad |\tau| \gg \Delta, \quad p < p_c, \quad \text{IV} \quad (15.4.28)$$

Для наочності закономірності (15.4.24) - (15.4.28) зображені на рис.15.6.

Вище було розглянуто випадок $\alpha_2 / \alpha_1 \gg 1$, а

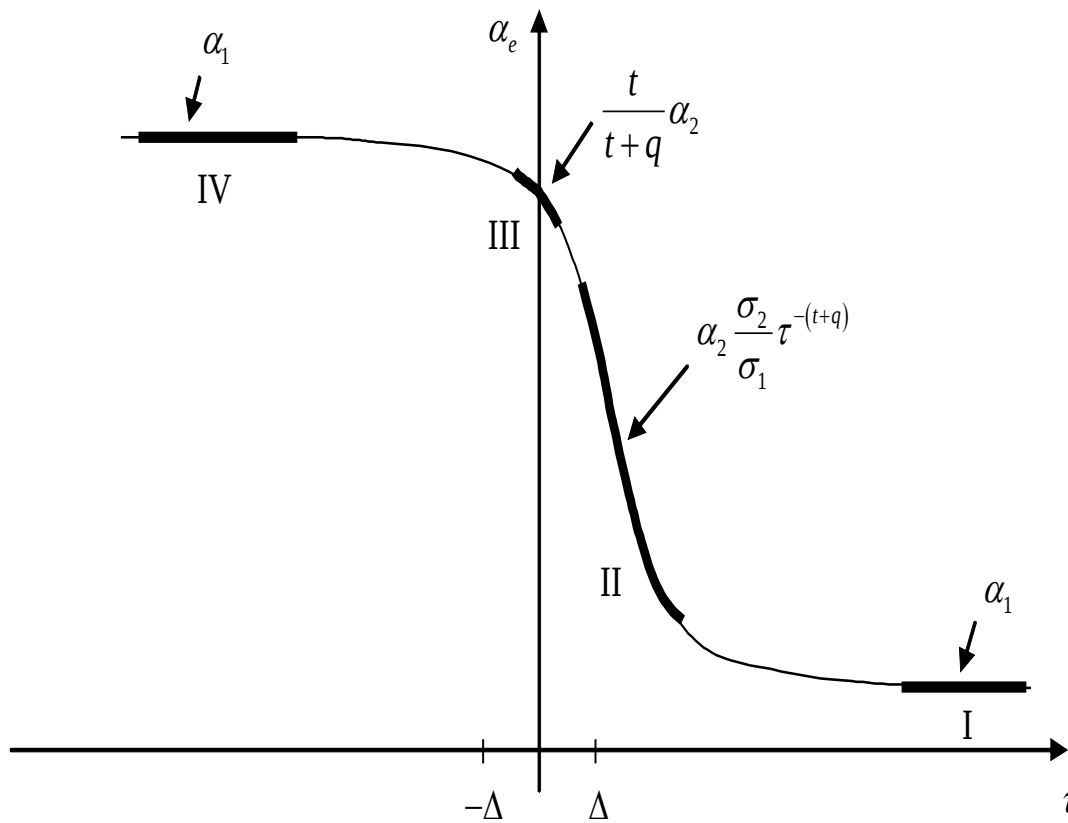


Рис.15.6. Концентраційна залежність ефективного коефіцієнта термоЕРС у критичній області при $\alpha_2 \gg \alpha_1$ і $\alpha_2 \sigma_2 \ll \alpha_1 \sigma_1$ і при $\sigma_2 / \sigma_1 = \kappa_2 / \kappa_1$ (див. також Рис. 15.1,а).

де $(\alpha_2 / \alpha_1)(\sigma_2 / \sigma_1) \ll 1$, тобто коли неоднорідність щодо провідності σ_2 / σ_1 більше неоднорідності на термоЕРС. У протилежному випадку, коли $(\alpha_2 / \alpha_1)(\sigma_2 / \sigma_1) \gg 1$ – неоднорідність по термоЕРС домінує, в галузі розмазування $\alpha_e \approx \alpha_2 \gg 1$. Тепер сходінка поблизу p_e не така крута і вихід α_e на «нижні» значення α_1 затягнутий (Рис. 15.7). В разі $\sigma_2 / \sigma_1 \neq \kappa_2 / \kappa_1$, що є, очевидно, найімовірнішим для реальних матеріалів, поведінка α_e аналогічна описаному вище. На закінчення цього розділу, після того, як вже описаний такий потужний метод, як метод ізоморфізму, повернемося до питання добротності Z_e композитних матеріалів. Метод ізоморфізму застосовується тоді, коли локальні кінетичні коефіцієнти A_j (15.2.8) можуть вважатися в кожній з фаз константами, незалежними і від температури. У лінійному наближенні це, звісно, так. Однак при обчисленні ККД термоелектричних пристроїв, а саме для цього потрібно знати $Z_e T$, необхідно враховувати вплив термоелектричних явищ на розподіл температур у середовищі, в тому числі і з

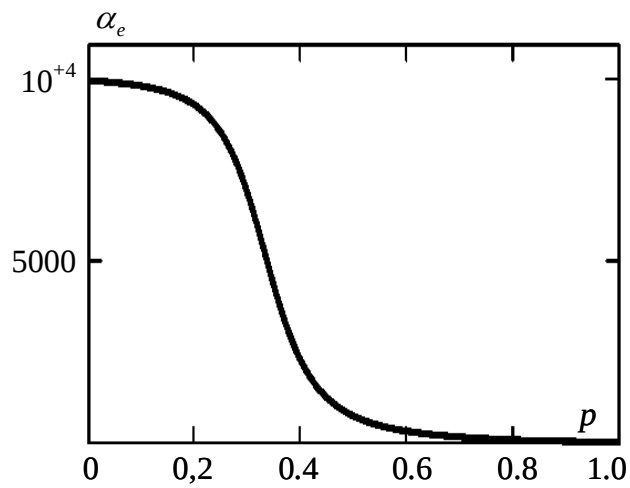


Рис. 15.7. Концентраційна залежність ефективного коефіцієнта термоЕРС у критичній області при $\alpha_2 \gg \alpha_1$ і

$\sigma_2 / \sigma_1 = \kappa_2 / \kappa_1$. На відміну від Рис. 15.6 тут,

$$\alpha_2 \sigma_2 \gg \alpha_1 \sigma_1.$$

Контрольні запитання

1. Як визначаються термоелектричні властивості?
2. Як визначається коефіцієнт термоЕРС?
3. Як визначається питомий коефіцієнт теплопровідності?
4. Як визначається термоелектрична добротність?

урахуванням нелінійності. Тому не можна вважати, що питання про $Z_e T$ досліджено остаточно.

Розділ 16. Ефективні пружні властивості композитів

16.1. Основні поняття теорії пружності

У зв'язку з тим, що пружні макроскопічно неоднорідні середовища мають велике прикладне значення, обчислення ефективних пружних модулів композитів присвячено велику кількість монографій. Тут немає можливості та необхідності повторювати зміст усіх робіт. Частина з них є сильно математизованою і включає в основному теореми і докази існування ЕКК у тих чи інших випадках. У частині робіт розглянуто конкретні застосування встановлених практично емпіричних закономірностей, описані числові наближені методи обчислення ефективних пружних модулів, крім області, що знаходиться поблизу порогу протікання. Зупинимось на описі ефективних пружних двофазних модулів сильно неоднорідних компонентів поблизу порогу протікання, а також покажемо, що основні закономірності ЕКК можуть бути пояснені в рамках ІМ-перколяційної структури.

На початку досліджень пружних властивостей компонентів поблизу порогу протікання існувала думка, що для визначення ЕКК достатньо використовувати аналогію між задачами пружності і провідності - провести заміну фази, що добре проводить, на "м'яку" пружну фазу, а погано провідної - на "жорстку". Насправді, це не так, задача провідності не зводиться безпосередньо до іншої задачі - пружності хоча б тому, що рівняння, що визначають розподіл струмів і полів в задачі провідності, деформацій і напруг в задачі пружності, відносяться до різних класів. Ця нееквівалентність видно також з того, що в ізотропному випадку провідність – скаляр, а для визначення пружних властивостей навіть однорідного ізотропного тіла потрібні дві матеріальні константи – модуль пружності Юнга E , і модуль зсуву μ , які є компонентами тензора. Закон Гука – аналог закону Ома – може бути записаний як:

$$u_{ik} = \frac{1}{9k} \delta_{ik} \sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu} (\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma_{ll}), \quad i, k, l = 1, 2, 3, \quad (16.1.1)$$

де u_{ik} – компонент тензора деформації, σ_{ik} – тензор напруг, $k = E\mu/3(3\mu - E)$ – модуль всебічного стиснення.

Співвідношення (16.1.1) можна переписати у вигляді

$$u_{ik} = \Omega_{iklm} \sigma_{lm}, \quad (16.1.2)$$

де Ω_{iklm} – тензор четвертого рангу, компоненти якого згідно (16.1.1) виражаються для ізотропного тіла через E і μ . Аналогічний запис для ізотропного провідного середовища

має вигляд $j_i = \sigma \delta_{ik} E_k$, що ще раз підкреслює різницю між задачами пружності та провідності.

Перколяційні задачі пружності активно досліджувалися за допомогою числового моделювання різних пружних ґраток. Постановка ґраткової пружної задачі можлива у кількох варіантах. Якщо, наприклад, для квадратної сітки задати коефіцієнт пружності (модуль Юнга) кожного зв'язку у ґратці, тобто кожний зв'язок розглядати як пружний стрижень, то така сітка при прикладанні сил у певних напрямках не чинитиме опір зсуву. У такій моделі стрижні опираються тільки розтягуванню і вільно, без зусиль, можуть змінювати кут між собою. Цю модель називають central – force Born model. Їй відповідає такий вираз для енергії пружної деформації:

$$U_0 = \frac{\alpha_1}{2} \sum_{ij} [(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \mathbf{r}_{ij}]^2 \ell_{ij}, \quad (16.1.3)$$

де α_1 - константа, пов'язана з пружністю стрижня, $\mathbf{u}_i$ - зміщення вузла i , $\mathbf{r}_{ij}$ - одиничний вектор, спрямований від вузла i до j вузлу, ℓ_{ij} - пружна константа стрижня, що з'єднує вузли i і j .

Нижче ми будемо розглядати більш реалістичний випадок, коли в моделі є пружна енергія, пов'язана як з розтягненням стрижнів (16.3), так і зі зміною кута між ними, що знімає «нереальність» нульового ефективного модуля зсуву

$$U = U_0 + \frac{\alpha_2}{2} \sum_{ijk} (\delta\theta_{ijk})^2 \ell_{ij} \ell_{ik}, \quad (16.1.4)$$

де α_2 - константа, пов'язана з вигином (зміною кута між стрижнями), підсумовування ведеться по всіх триплетах стрижнів $j-i$ і $i-k$, зміна кута $\delta\theta_{ijk}$ можна уявити так:

$$\delta\theta_{ijk} = \begin{cases} \frac{(\mathbf{U}_{ij} \times \mathbf{r}_{ij} - \mathbf{U}_{ik} \times \mathbf{r}_{ik})(\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{r}_{ik})}{|\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{r}_{ik}|}, & \mathbf{r}_{ij} \not\parallel \mathbf{r}_{ik}, \\ |(\mathbf{U}_{ij} + \mathbf{U}_{ik}) \times \mathbf{r}_{ij}|, & \mathbf{r}_{ij} \parallel \mathbf{r}_{ik}, \end{cases} \quad (16.1.5)$$

де $\mathbf{U}_{ij} = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j$.

Така модель називається bond-bending. Таким чином, надалі ми припускатимемо, що в середовищі існують ненульові локальні модулі, пов'язані як з розтягуванням (E), і зі зсувом (μ).

16.2. Ефективні пружні модулі поблизу порогу протікання

Розглянемо, в рамках ІМ, сильно неоднорідне за пружними константами середовище нижче порога протікання, причому вважатимемо неоднорідність настільки великою, що деформацією першої фази нехтуватимемо. Як видно з Рис.16.1, що описує перколяційну структуру при $p < p_c$, у прошарку існують ділянки будь-якого напрямку. Для простоти поки розглядатимемо двовимірний випадок, розіб'ємо весь прошарок на ділянки витягнуті вздовж напрямку x (позначимо їх A) і вздовж y (B) (Рис.16.1).

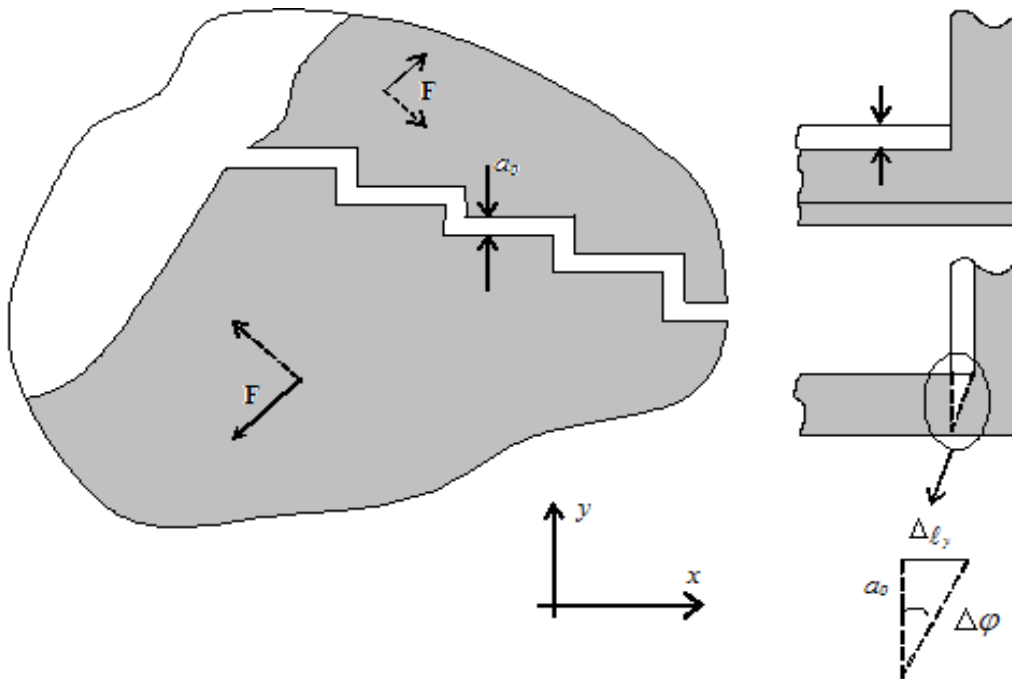


Рис.16.1. Схематичне зображення прошарку, що піддається розтягуванню.
Суцільні стрілки – сила, що розтягує. $\mathbf{F}$, штрихові – сили, що призводять до зсувної деформації.

Для кожного типу (A і B) ділянок прошарку можна записати закон Гука:

для ділянок A :

$$\frac{F_{yA}}{\ell_A H} = E_2 \frac{\Delta \ell_y}{a_0}, \quad \frac{F_{xA}}{\ell_A H} = \mu_2 \frac{\Delta \ell_x}{a_0}, \quad (16.2.1)$$

а для ділянок B :

$$\frac{F_{yB}}{\ell_B H} = \mu_2 \frac{\Delta \ell_y}{a_0}, \quad \frac{F_{xB}}{\ell_B H} = E_2 \frac{\Delta \ell_x}{a_0}, \quad (16.2.2)$$

же $F_{xA}, F_{yA}, F_{xB}, F_{yB}$ – x та y – компоненти сили $\mathbf{F}$, що діє на ділянці A і B , E_2, μ_2 – локальні модулі пружності "м'якої" (другий, якщо користуватися термінологією провідності) фази, а $\Delta \ell_x$ і $\Delta \ell_y$ – зміщення вздовж осей OX і OY (вставка на Рис.16.1), ℓ_A і ℓ_B – сумарна довжина ділянок A і B , H – товщина двовимірного середовища. Тут ми враховуємо, що при малих деформаціях кут зсуву $\Delta \varphi$ (вставка на Рис.16.1), що входить у визначення модуля зсуву μ , дорівнює зміщенню, поділеному на товщину прошарку – $\Delta \ell_x / a_0$ (для ділянки B $\Delta \ell_y / a_0$). Виражаючи силу, що розтягує $\mathbf{F}$, прикладену до прошарку, у вигляді

$$\mathbf{F} = (F_{xA} + F_{xB})\mathbf{i} + (F_{yA} + F_{yB})\mathbf{j}, \quad (16.2.3)$$

через усунення $\Delta \mathbf{l}$

$$\Delta \mathbf{l} = \Delta \ell_x \mathbf{i} + \Delta \ell_y \mathbf{j}, \quad (16.2.4)$$

та враховуючи (16.2.1) та (16.2.2), знаходимо $\mathbf{F} = (E_2 + \mu_2)(\ell H / a_0) \Delta \mathbf{l}$, де вважаємо, що $\ell_A \approx \ell_B = \ell$. Відповідно до визначення модуля Юнга (Рис.16.2) $\mathbf{F} / \xi H = E^e \Delta \mathbf{l} / \xi$. Тоді з (16.2.4) маємо

$$E^e = (E_2 + \mu_2) \frac{\ell}{a_0}. \quad (16.2.5)$$

враховуючи, що площа прошарку згідно з ІМ у двовимірному випадку має вигляд

$$S = \ell a_0 = a_0^2 N_2, N_2 = |\tau|^{-q_2}, \quad (16.2.6)$$

знаходимо вираз для опису критичної поведінки для ефективного модуля Юнга нижче порога протікання та критичний індекс S_2 :

$$E_e \approx (E_2 + \mu_2) |\tau|^{-S_2}, \quad S_2 = q_2, \quad d = 2. \quad (16.2.7)$$

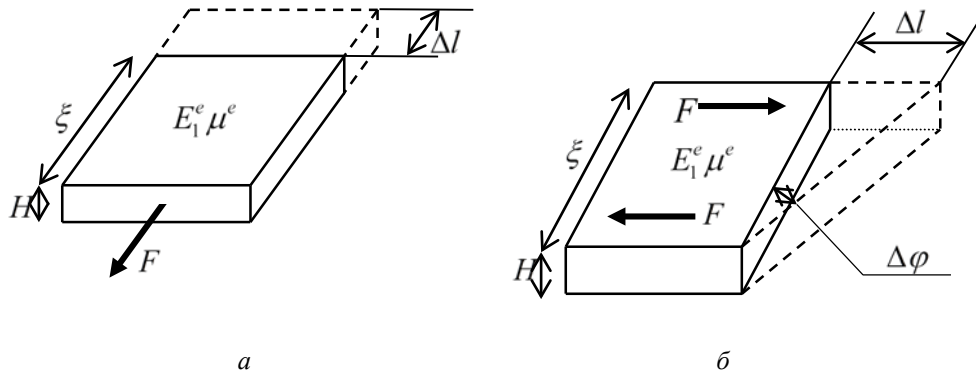


Рис. 16.2. Визначення ефективних модулів Юнга E^e та модуля зсуву μ_2 (двовимірний випадок):

$$a - F/\xi H = E^e \Delta l/\xi; \quad б - F/\xi H = \mu_2 \Delta \varphi, \quad \Delta \varphi \approx \Delta l/\xi.$$

Цілком аналогічно знаходяться вирази, що описують критичну поведінку ефективного модуля Юнга в тривимірному випадку. Відмінність полягає лише в тому, що ділянки прошарку по одному з напрямків піддаються розтягуванню, а по двох інших – зсуву, що призводить до зміни множника біля τ (16.2.6) у вигляді

$$E^e \approx \frac{E_2 + 2\mu_2}{3} |\tau|^{-S_3}, \quad S_3 = q_3, \quad d = 3. \quad (16.2.8)$$

Таким чином, нижче порога протікання як у дво-, так і у тривимірному випадку критичний індекс модуля Юнга збігається з критичним індексом ефективної провідності:

$$S = q, \quad p < p_c, \quad d = 2, 3. \quad (16.2.9)$$

Нехай тепер зовнішня сила прикладена до характерного об'єма розміром ξ таким чином, що прошарок в цілому зазнає зсуву (див. штрихові стрілки на Рис.16.1). Проводячи розрахунок, аналогічний наведеному вище, для ефективного модуля зсуву μ^e (див. Рис. 16.2, б) отримуємо

$$\mu^e \sim |\tau|^{-S}, \quad S = q. \quad (16.2.10)$$

Числове моделювання для двовимірного випадку призводить до (16.2.7) з гарною точністю. Водночас у низці робіт отримано $S < q$. Для тривимірного випадку були наведені докази на користь того, що $S_3 = q_3$. Були також представлені аргументи, що доводять, що $S_2 = q_2$ - точна рівність.

Тепер розглянемо в рамках ІМ перколяційної структури поведінку ефективного модуля Юнга вище порогу протікання. Для цього в рамках ІМ прирівнюємо потенційні енергії двовимірного неоднорідного середовища та середовища порівняння з ефективними модулями. У двовимірному випадку основною деформацією звивистого містка при його

стисканні (розтягуванні) є вигин. Енергія одиниці довжини вигнутого стрижня є інтеграл уздовж довжини стрижня - містка (Рис. 16.3):

$$U = \int \frac{M^2 d\ell}{2JE}, \quad (16.2.11)$$

де M - момент прикладених сил, J - момент інерції перерізу, рівний $J = \int x^2 ds$, ds - елемент перерізу. Ось oz спрямована вздовж містка (пружного стрижня); для певності вважаємо, що вигин відбувається у площині (z, x) .

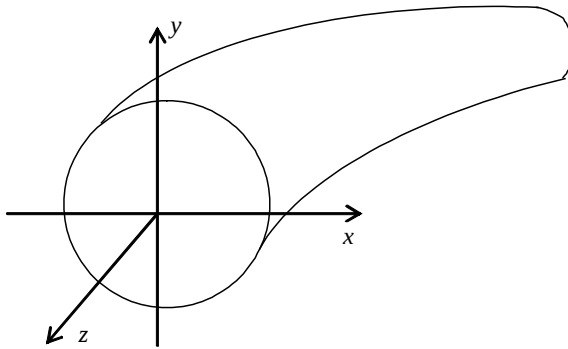


Рис. 16.3. Ділянка містка в тривимірному випадку з перетином при $z = \text{const}$.

Енергії деформації середовища порівняння у двовимірному (U_2) (див. рис. 16.2,а) та тривимірному випадку (U_3) мають вигляд

$$U_2 = \left(\frac{F}{\xi H} \right)^2 \frac{\xi^2 H}{2E^e}, \quad U_3 = \frac{F^2 \xi}{E^e \xi^2}. \quad (16.2.12)$$

Прирівнюючи (16.2.11) з U_2 з (16.2.12) при $M = F\xi$, і $\Delta\ell = a_0 N_1$, знаходимо

$$E^e \approx E_1 \frac{J}{H} \frac{1}{\xi^2 a_0 N_1}, \quad (16.2.13)$$

де, як і раніше, враховано, що характерний розмір (не довжина!) містка – порядку ξ . Відповідно до ІМ перколяційної структури $N_1(d=2) \approx \tau^{-t}$, звідки і слідує критичний індекс ефективного модуля Юнга у двовимірному випадку:

$$E^e \approx E_1 \tau^{f_2}, \quad f_2 = t_2 + 2\nu_2, \quad p < p_c. \quad (16.2.14)$$

У тривимірному випадку $\int d\ell = a_0 N_1 \sim \tau^{-t+\nu}$ і для E^e отримуємо той самий зв'язок між критичними індексами пружності f , провідності t та кореляційної довжини:

$$E^e \approx E_1 \tau^f, \quad f = t + 2\nu, \quad d = 2, 3. \quad (16.2.15)$$

З урахуванням числових значень t і ν (Таблиця 5.1) (16.2.15) маємо

$$f_2 = 3.97, \quad f_3 = 3.76. \quad (16.2.16)$$

Отримано точне обмеження виду

$$f \geq 1 + \nu d. \quad (16.2.17)$$

З міркувань, близьких розглянутим вище, отримано обмеження виду

$$f \leq t + 2\nu, \quad (16.2.18)$$

і показано, що значення $f_2 = 3.97 = t + 2\nu$ добре узгоджується зі знайденим із числового моделювання $f_2 = 3.96 \pm 0.04$.

Слід зазначити, що числові значення критичного індексу f суттєво відрізняються один від одного у різних роботах.

Повернемося до міркувань у рамках ІМ. З тих міркувань, що були наведені для визначення критичного поведінки ефективного модуля Юнга E^e вище (16.2.15) і нижче (16.2.7), (16.2.8) порога протікання, слідує, що критична поведінка ефективного модуля зсуву μ^e та ж сама. Тому для визначення області розмазування та виду E^e і μ^e у цій області можна зробити аналогічно тому, як це було зроблено для випадку ефективної провідності, а саме, прирівняти $E^e(p < p_c)$ та $E^e(p > p_c)$ при $|\tau| \approx \Delta$. Тоді для двовимірного випадку отримуємо

$$\frac{E_2 + \mu_2}{2} (\Delta_E)^{-q} \approx E_1 \Delta_E^f, \quad (16.2.19)$$

звідки

$$\Delta_E = \left(\frac{E_2 + \mu_2}{2E_1} \right)^{\frac{1}{f+q}}. \quad (16.2.20)$$

Таким чином, на порозі протікання (в області розмазування) ефективний модуль пружності матиме вигляд

$$E^e \approx E_1 \left(\frac{E_2 + \mu_2}{2E_1} \right)^{S_2'}, \quad S_2' = \frac{t_2 + 2\nu_2}{2(t_2 + \nu_2)}, \quad (16.2.21)$$

де враховано, що $q_2 = t_2$.

Так як у двовимірному випадку поріг протікання $p = 1/2$, вираз для E^e має бути інваріантним при взаємній заміні фаз, що потребує коригування (16.2.21). Вираз (16.2.21) для E^e можна штучно "симетризувати", записавши

$$E^e \simeq (E_1 + E_2)^{1-S'} \left(\frac{2}{E_1 + \mu_1} + \frac{2}{E_2 + \mu_2} \right)^{-S'}, \quad (16.2.22)$$

і оскільки передбачається, що середовище дуже неоднорідне $-E_1/E_2 \gg 1, \mu_1/\mu_2 \gg 1$, залежність (16.2.22), підкоряючись вимогам симетрії, мало відрізняється від (16.2.21). Загальний універсальний вираз для $E^e = E^e(E_1, E_2, \mu_1, \mu_2)$ у двовимірному випадку на порозі протікання, аналогічний виразу Дихне $\sigma_e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$ та придатний для будь-яких значень відношень E_1/E_2 і μ_1/μ_2 , навряд чи можливо. Умови взаємної дуальності середовищ не визначають однозначно E^e – необхідна додаткова інформація про структуру середовища. Таким чином, універсальність E^e поблизу порога протікання, мабуть, існує тільки для випадково неоднорідного середовища і тільки у випадку сильної неоднорідності ($E_1/E_2 \gg 1, \mu_1/\mu_2 \gg 1$). При цьому питання про величину відношення, наприклад, E_1/μ_1 , залишається за рамками можливості ІМ.

У тривимірному випадку замість (16.2.17) запишемо

$$E^e \approx E_1 \left(\frac{E_2 + 2\mu_2}{3E_1} \right)^{S'_3}, \quad S'_3 = \frac{t_3 + 2\nu_3}{t_3 + q_3 + 2\nu_3}, \quad (16.2.23)$$

а область розмазування має вигляд

$$\Delta_E = \left(\frac{E_2 + 2\mu_2}{3E_1} \right)^{\frac{1}{t_3 + q_3 + 2\nu_3}}. \quad (16.2.24)$$

Числові значення S'_2 (16.2.21) та S'_3 з (16.2.23) згідно з Таблицею 1 у параграфі 5.3

$$S'_2 = 0.75, \quad S'_3 = 0.82. \quad (16.2.25)$$

Аналогічно тому, як це було зроблено для σ^e , при визначенні пружних властивостей можна врахувати поправки до E^e , включивши до розгляду другий, третій і т.д. щаблі ІМ. Тоді, вище за поріг протікання ($p > p_c$) отримаємо

$$E^e = E_1 \tau^f [A_0 + A_1 K_d \tau^{-(q+t)} + A_2 (K_d \tau^{-(q+t)})^2 + \dots], \quad (16.2.26)$$

де згідно (16.2.21) та (16.2.23) знаходимо

$$K_d = \frac{E_2 + (d-1)\mu_2}{E_1 d}, \quad d = 2, 3 \quad (16.2.27)$$

Нижче порогу протікання (при $p < p_c$)

$$E^e \approx E_1 K_d |\tau|^{-q} [B_0 + B_1 K_d |\tau|^{-(q+t)} + B_2 (K_d |\tau|^{-(q+t)})^2 + \dots], \quad (16.2.28)$$

Вирази (16.2.7), (16.2.8), (16.2.13), (16.2.21) та (16.2.23) можна записати єдиним чином, ввівши за аналогією з σ^e , скейлінгову функцію $\mathcal{F}(z)$ виду

$$E^e \approx E_1 K_d^{\mathcal{S}} \mathcal{F} \left(\tau / K_d^{\mathcal{S}_{t+q}} \right) \tau^f, \quad (16.2.29)$$

де $\mathcal{F}(z)$ має такі асимптотики:

$$\mathcal{F}(z) \sim \begin{cases} z^f, & z \rightarrow 0, \quad p > p_c, \quad \tau \gg \Delta_E, \\ 1, & |z| \approx 1, \quad \tau \approx \Delta_E, \\ |z|^{-q}, & z \rightarrow -\infty, \quad p < p_c, \quad |\tau| \gg \Delta_E. \end{cases} \quad (16.2.30)$$

Контрольні запитання

1. Що таке ефективні пружні властивості композитів?
2. Як визначаються ефективні пружні властивості композитів?
3. Як визначаються ефективні пружні властивості композитів у межах моделі середнього поля?
4. Які основні особливості ефективних пружних властивостей композитів поблизу порога протікання?

Розділ 17. Нелінійні властивості композитів

17.1. Види нелінійності

Досі при обчисленні ефективних властивостей композитів усюди передбачалося, що локальні вольт-амперні характеристики (ВАХ) є лінійними, тобто для кожної з фаз виконується закон Ома. Звичайно, є випадки, і їх багато, коли це не так. По-перше, зі збільшенням електричного поля (чи струму) за їх певного значення виникає спочатку невелике відхилення від лінійності. Такий випадок прийнято називати слабкою нелінійністю:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \gamma |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E} + \dots \quad (17.1.1)$$

Тут часто обмежуються другим доданком, причому «слабкість» нелінійності визначає нерівність

$$\gamma E^2 \ll \sigma. \quad (17.1.2)$$

При малих полях другим доданком нехтують і тоді (17.1.1) перетворюється на лінійну залежність, тобто в закон Ома.

По-друге, існують середовища, в яких навіть при як завгодно малих полях ВАХ не переходить в лінійну ВАХ. Один із видів такої нелінійності - це

$$\mathbf{j} = \chi |\mathbf{E}|^\beta \mathbf{E}, \quad (17.1.3)$$

що прийнято називати сильною нелінійністю. Зазначимо, що в цьому випадку, ні при як завгодно малому полі (при $\beta \neq 0$) закон (17.1.3) не наближається до лінійного.

Існує багато випадків зі складнішими нелінійностями, наприклад, при електричному руйнуванні (пробою поганопровідної частини) ВАХ буде негладкою (можливо навіть розривною функцією). У феромагнетиках залежність магнітної проникності $\mu = \mu(H)$ є немонотонною функцією напруженості магнітного поля H , а при врахуванні гістерезиса – і неоднозначної (див. розділ 18).

Визначити ефективні властивості неоднорідного середовища, як докладно обговорювалося вище для лінійних випадків і залишається вірним для нелінійних, це означає знайти зв'язок між середнім за об'ємом полем $\langle \mathbf{E} \rangle$ і струмом $\langle \mathbf{j} \rangle$. При нелінійній ВАХ, наприклад, у випадку слабкої нелінійності (17.1.1), ізотропія фаз та ізотропія їхнього геометричного розташування ще не означає ізотропію ефективних коефіцієнтів. У найпростішому випадку з (17.1.1) впливає

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma_e \langle \mathbf{E} \rangle + \gamma_e \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle \langle \mathbf{E} \rangle, \quad (17.1.4)$$

однак γ_e може бути тензором четвертого рангу. Тут ми не розглядаємо такі випадки та вважаємо, що $\gamma_{ijkl}^e = \gamma_e (\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl})/3$, це і дозволяє записати (17.1.4).

Нижче покажемо як «працює» узагальнення ЕМТ для випадку слабкої та сильної нелінійності, а в розділі 18 для нелінійності, властивій феромагнетикам.

У першій частині цього розділу розглянемо випадок слабкої нелінійності (17.1.1), а у другій частині – сильної нелінійності (17.1.3).

17.2. Випадок слабкої нелінійності

Ефективний коефіцієнт γ_e (17.1.4) тісно пов'язаний із ВСГ $1/f$ -шума. Зауважимо що γ_e так само, як і ВСГ $1/f$ -шуму C_e виражається через четвертий момент поля $\mathbf{E}$ лінійної задачі у вигляді

$$\gamma_e = \frac{\langle \gamma(\mathbf{r}) \mathbf{E}^4(\mathbf{r}) \rangle}{\langle \mathbf{E} \rangle^4}, \quad (17.2.1)$$

де $\mathbf{E}$ - поле в лінійній задачі, розраховане при $\gamma(\mathbf{r}) = 0$.

Покажемо тепер, як обчислюються ефективні коефіцієнти з допомогою узагальненого методу ЕМТ. Розглянемо n -фазне середовище, де $i=1, \dots, n$ - номерує фази. Відповідно (17.2.1) можна записати

$$\gamma_e = \frac{1}{\langle \mathbf{E} \rangle^4} \sum p_i \gamma_i \langle E^4 \rangle_i, \quad (17.2.2)$$

де $\langle \dots \rangle_i$ означає усереднення по i -й фазі.

Основне наближення полягає у заміні

$$\langle E^4 \rangle_i \rightarrow \langle E^2 \rangle_i^2, \quad (17.2.3)$$

тоді (17.2.2) набуває вигляду

$$\gamma_e \approx \frac{1}{\langle \mathbf{E} \rangle^4} \sum p_i \gamma_i \langle E^2 \rangle_i^2, \quad (17.2.4)$$

та задача зводиться до визначення другого моменту поля $\langle E^2 \rangle_i$.

Скористаємося співвідношенням, що легко перевіряється:

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_i} = p \frac{\langle E^2 \rangle_i}{\langle E \rangle^2}, \quad (17.2.5)$$

звідки

$$\langle E^2 \rangle_i = \frac{\langle E \rangle^2}{p} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_i}, \quad (17.2.6)$$

і співмножник $\partial \sigma_e / \partial \sigma_i$ (17.2.6) знаходиться з рівняння ЕМТ, яке для n -фазного випадку має вигляд

$$\sum p_i \frac{\sigma_e - \sigma_i}{(d-1)\sigma_e + \sigma_i} = 0, \quad (17.2.7)$$

де d - мірність задачі.

Незважаючи на наближення (17.2.3), розглянутий підхід дає гарний збіг з числовим експериментом як у двовимірному, так і тривимірному випадку. На Рис. 17.1 наведено концентраційну залежність $\gamma_e = \gamma_e(p)$ для кількох наборів значень локальних коефіцієнтів тривимірному випадку. Привертає увагу різке зростання γ_e поблизу порогу протікання. Цей факт стає зрозумілим, якщо ми згадаємо, що γ_e як і ВСГ $1/f$ -шума визначається четвертим моментом поля, і, що ВСГ $1/f$ -шума, як показано в розділі 13, різко зростає в критичній області.

Незважаючи на те, що розглянута вище модифікація ЕМТ добре описує концентраційну залежність γ_e у широкому діапазоні, в критичній області при $|\tau| \ll 1$ вона через своє «походження» (від лінійної версії ЕМТ) неспроможна дати правильного опису значень критичних індексів.

Немає необхідності обчислювати критичні індекси нелінійної провідності γ_e з перших принципів, вони, за згаданою аналогією, виражаються через критичні індекси ВСГ $1/f$ -шума. Справді, порівнюючи вираз (17.2.1) та C_e (див. розділ 13), отримуємо

$$C_e = \frac{\langle C \sigma^2 E^4 \rangle}{\sigma_e^2 \langle E \rangle^4}, \quad (17.2.8)$$

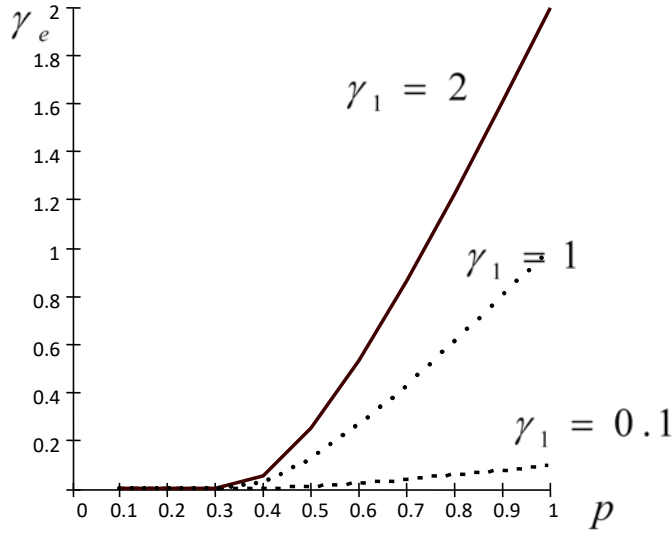


Рис. 17.1. Концентраційна залежність γ_e для трьох значень локального коефіцієнта нелінійності γ_1 при $\sigma_1 = 100$, $\sigma_2 = 1$, $\gamma_2 = 0$.

звідси знаходимо, що має місце аналогія

$$\gamma_e \rightarrow \sigma_e^2 C_e, \quad \sigma^2(\mathbf{r}) C(\mathbf{r}) \rightarrow \gamma(\mathbf{r}), \quad (17.2.9)$$

тобто γ_e виражається через C_e і σ_e , якщо в останніх замінити локальні $\sigma^2(\mathbf{r}) C(\mathbf{r})$ на $\gamma(\mathbf{r})$.

Так, помножуючи вираз для C_e вище за поріг протікання

$$C_e = C_1 \tau^{-k} + (\sigma_2 / \sigma_1)^2 C_2 \tau^{-w}, \quad p > p_c, \quad (17.2.10)$$

на σ_e^2 та враховуючи, що $\sigma_e = \sigma_1 \tau^t$, знаходимо

$$\gamma_e = \gamma_1 \tau^{2t-k} + \gamma_2 \tau^{2t-w}, \quad p > p_c, \quad (17.2.11)$$

і аналогічно нижче порога протікання маємо

$$\gamma_e = \gamma_2 \tau^{-2q-k'} + (\sigma_2 / \sigma_1)^4 \gamma_1 \tau^{-2q-w'}. \quad (17.2.12)$$

Таким чином, критична поведінка γ_e описується чотирма критичними індексами:

$$\gamma_e = \gamma_1 \tau^{-u} + \gamma_2 \tau^{-m}, \quad p > p_c, \quad (17.2.13)$$

$$\gamma_e = \gamma_2 \tau^{-u'} + (\sigma_2/\sigma_1)^4 \gamma_1 \tau^{-m'}, \quad p < p_c, \quad (17.2.14)$$

де

$$u = k - 2t, \quad m = w - 2t, \quad u' = k' + 2q, \quad m' = w' + 2q. \quad (17.2.15)$$

Як і у випадку ВСГ $1/f$ -шуму, вирази γ_e вище та нижче порога протікання повинні бути узгоджені, $\gamma_e (p > p_c)$ має співпадати з $\gamma_e (p < p_c)$ в області розмазування, тобто при $|\tau| = \Delta$. Це узгодження існує, якщо для критичних індексів ВСГ- $1/f$ -шуму k , k' , w і w' використовувати їх значення, отримані за допомогою ІМ (див. розділ 13). Підставляючи ці значення в (17.2.15), отримуємо

$$u = 3t - 2\nu(d-1), \quad m = 2\nu + q, \quad u' = m, \quad m' = 2\nu(d-1) + t + 4q, \quad (17.2.16)$$

у Таблиці 17.1 наведено їх числові значення для дво- та тривимірних випадків. Зауважимо, що $u_{2,3} < 0$.

Таблиця 17.1

Мірність задачі	u	$m = u'$	m'
$d = 2$	-1,23	3,97	9,17
$d = 3$	-2,48	2,49	10,25

Область розмазування, при цьому, як відразу ж впливає з (17.2.13), (17.2.14) та (17.2.16), має, як і має бути, стандартне значення $\Delta = (\sigma_2/\sigma_1)^{\frac{1}{t+q}}$. При $|\tau| \approx \Delta$ перший доданок в (17.2.13) стає рівним другому в (17.2.14) $\gamma_1 \Delta^{-u} = (\sigma_2/\sigma_1)^4 \gamma_1 \Delta^{-m'}$, а другий (17.2.13) - першому в (17.2.4) - порівняйте з (13.3.14).

Необхідно відзначити, що перший доданок (17.2.13) містить співмножник τ в позитивній степені, і таким чином, у критичній області при $\tau \rightarrow 0$ він набагато менший другого доданку (при ненульовому γ_2). Те саме можна сказати і про другий доданок (17.2.14), він малий за рахунок співмножника $(\sigma_2/\sigma_1)^4$. В цілому, як вище, так і нижче порога протікання, головний внесок у збільшення нелінійної провідності робить друга «діелектрична» фаза. І це, звичайно, пов'язано з тим, що в сильно неоднорідному середовищі поблизу порогу протікання локальне поле збільшується саме в тонкому прошарку (з товщиною порядку a_0), а не в «довгому» містку (довжиною $\sim a_0 \tau^{-\alpha_1}$). При не дуже малому значенні γ_2 порівняно з γ_1 маємо

$$\gamma_e(p > p_c) \approx \gamma_2 \tau^{-m}, \quad \gamma_e(p < p_c) \approx \gamma_2 |\tau|^{-u'}, \quad (17.2.17)$$

і тому що $m = u'$ збільшення γ_e при наближенні до порога протікання симетричне.

При наближенні до області розмазування обидва доданки (17.2.14) зростають. У самій області розмазування з (17.2.13) та (17.2.14) ($|\tau| = \Delta$) слідує

$$\gamma_e = \gamma_1 h^{-\frac{u}{t+q}} + \gamma_2 h^{-\frac{m}{t+q}}, \quad h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad |\tau| \leq \Delta, \quad (17.2.18)$$

і оскільки $u < 0$ (див. Таблицю 17.1), зі збільшенням неоднорідності (тобто коли σ_1/σ_2 зростає) перше доданок зменшується, а другий – збільшується.

У виразах для струму (17.1.1) і (17.1.4) у разі слабкої нелінійності передбачається, що кожен наступний доданок – другий, третій і т. д. – набагато менший за попередній. Критичне поле E_c – це таке характерне значення поля, яке дає критерій застосування наближення слабкої нелінійності, при $\langle E \rangle \ll E_c$ це наближення "працює". Якщо відомий вираз для γ_e (17.2.13) або (17.2.14), то E_c легко визначається. Так, для випадку $p < p_c$:

$$\langle j \rangle \approx \sigma_e |\tau|^{-q} \langle E \rangle + \gamma_2 |\tau|^{-u'} \langle E \rangle^2 \langle E \rangle, \quad (17.2.19)$$

звідки відразу ж слідує рівняння для E_c :

$$\sigma_e |\tau|^{-q} E_c = \gamma_2 |\tau|^{-u'} E_c^3, \quad (17.2.20)$$

Таким чином, запишемо

$$E_c \sim |\tau|^M, \quad M = \frac{u' - q}{2}. \quad (17.2.21)$$

У рамках ІМ маємо

$$M = \frac{u' - q}{2} = \frac{k' + q}{2}, \quad M_2 = 1,33, \quad M_3 = 0,88. \quad (17.2.22)$$

В рамках ЕМТ $M_2 = M_3 = 1/2$, та двосторонні границі для M мають вигляд

$$1,18 \leq M_2 \leq 1,33, \quad 0,66 \leq M_3 \leq 0,88, \quad (17.2.23)$$

що узгоджується з (17.2.22).

Крім умови $\langle E \rangle \ll E_c$, для справедливості наближення слабкої нелінійності необхідно, щоб і локальні поля були такими, при яких, наприклад, другі доданки (17.1.1) були трохи менше перших.

Як і ВСГ $1/f$ -шума, нелінійна провідність γ_e «добре відчуває» структуру середовища. Її поведінка, наприклад, у самодуальних середовищах відрізняється від такої у двовимірних випадково неоднорідних середовищах на порозі протікання. Неможливо отримати єдиний вираз для γ_e у D-середовищах. Такий вираз на відміну від ефективної провідності залежатиме від виду конкретної реалізації. Але вдається визначити загальний вираз для ефективних властивостей, що залежить від реалізації в одному специфічному випадку. Другий доданок має бути при цьому набагато меншим за перший. Тоді перетворення Дихне $\mathbf{j} = \Lambda \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}$, $\mathbf{E} = \Lambda^{-1} \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{j}}$ переводять (17.1.1) до

$$\tilde{\mathbf{j}} = \tilde{\sigma} \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\gamma} \tilde{\mathbf{E}}^2 \tilde{\mathbf{E}}, \quad (17.2.24)$$

де

$$\tilde{\sigma} = \Lambda^2 / \sigma, \quad \tilde{\gamma} = -\gamma (\Lambda / \sigma)^4, \quad \Lambda = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}, \quad (17.2.25)$$

інші ж доданки в (17.2.24) відкинуті через їх малість.

Дуальність означає, що

$$\sigma_1^2 \gamma_2 = -\sigma_2^2 \gamma_1. \quad (17.2.26)$$

Повторюючи міркування, аналогічні наведеним у розділі 6, для середніх полів $\langle \mathbf{E} \rangle$ і струмів $\langle \mathbf{j} \rangle$, приходимо до співвідношень взаємності:

$$\tilde{\sigma}_e(p) \sigma_e(p) = \sigma_1 \sigma_2, \quad \tilde{\gamma}_e(p) = -\tilde{\gamma}_e(p) \left(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} / \sigma_e(p) \right)^4. \quad (17.2.27)$$

Тоді у випадку взаємодуальних середовищ $\tilde{\sigma}_e(p) = \sigma_e(1-p)$ і $\tilde{\gamma}_e(p) = \gamma_e(1-p)$ можна записати

$$\sigma_e(p) \sigma_e(1-p) = \sigma_1 \sigma_2, \quad \tilde{\gamma}_e(1-p) = -\gamma_e(p) \left(\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} / \sigma_e(p) \right)^4. \quad (17.2.28)$$

Для лінійної частини провідності (17.2.28) при $p = 1/2$ слідує формула Дихне $\sigma_e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$, а для нелінійної необхідно покласти

$$\gamma_e(p=1/2)=0. \quad (17.2.29)$$

Таким чином, вимога дуальності, з якої випливає вимога різних знаків нелінійності у фазах (17.2.26): в одній фазі нелінійність збільшує, а в іншій – зменшує провідність середовища, призводить до взаємної компенсації цих внесків для всього середовища в цілому. У цьому випадку ефективна провідність середовища буде лінійною.

Наявність D -точок у самодуальних середовищах наводить, як і у випадку з $1/f$ -шумом, до розбіжності нелінійної частини провідності:

$$\gamma_e \sim \frac{1}{h-h_e}, \quad h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad h_c = \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha}{4} \right) \frac{1+\operatorname{tg}(\alpha/4)}{1-\operatorname{tg}(\alpha/4)}, \quad (17.2.30)$$

де використані ті самі позначення, як і на Рис.13.3 у розділі 13.

Взагалі кажучи, локальна електропровідність залежить від температури та врахування цього факту може змінити поведінку нелінійної частини провідності, особливо для структур, що мають особливості типу D -точок, біля яких концентрується джоулеве тепловиділення. Врахування теплопровідності в таких структурах (і, звичайно, температурної залежності локальної провідності) може призвести до усунення особливостей, подібних (17.2.30).

17.3. Випадок сильної нелінійності

Вид нелінійності (17.1.3), який прийнято називати сильною нелінійністю, спостерігається експериментально, наприклад, у ZnO варисторах та неупорядкованих сплавах.

Найбільш вдалий наближений метод розрахунку ефективної провідності випадково неоднорідного середовища з нелінійністю типу (17.1.3) у всій області концентрацій є узагальненням ЕМТ, аналогічним вище описаному для слабкої нелінійності. Розглянемо його на прикладі, коли тільки одна з фаз нелінійна:

$$\mathbf{j} = \chi_1 |\mathbf{E}|^\beta \mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \sigma_2 \mathbf{E}, \quad (17.3.1)$$

і, таким чином, (17.3.1) можна переписати у вигляді

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E}) \mathbf{E}, \quad \sigma(\mathbf{E}) = \begin{cases} \chi_1 |\mathbf{E}|^\beta, & \text{I фаза,} \\ \sigma_2, & \text{II фаза,} \end{cases} \quad (17.3.2)$$

де $\sigma(\mathbf{E})$ – нелінійна провідність: коефіцієнт, що зв'язує між собою напруженість електричного поля та густину струму. При цьому для ефективного значення провідності отримуємо

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma_e (\langle \mathbf{E} \rangle) \cdot \langle \mathbf{E} \rangle. \quad (17.3.3)$$

Розрахунок σ_e із застосуванням узагальненого методу ЕМТ полягає в тому, що (перше наближення) нелінійну провідність у першій фазі $\sigma(\mathbf{E}) = \chi_1 |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^\beta$ замінюємо на константу:

$$\sigma(\mathbf{E}(\mathbf{r})) \rightarrow \sigma(\langle \mathbf{E} \rangle) = \chi_1 \langle |\mathbf{E}|^\beta \rangle_1, \quad (17.3.4)$$

і тоді нелінійний закон (17.3.1) перетворюється на лінійний, тобто на закон Ома, щоправда, з поки невідомою величиною $\langle |\mathbf{E}|^\beta \rangle_1$:

$$\mathbf{j} = \chi_1 \langle |\mathbf{E}|^\beta \rangle \cdot \mathbf{E} = \tilde{\sigma}_1 \mathbf{E}. \quad (17.3.5)$$

Тепер середовище складається з двох фаз із провідностями $\tilde{\sigma}_1$ і σ_2 і для такого «лінійного» середовища можна знайти в рамках лінійної ЕМТ ефективну провідність, наприклад, для двовимірного випадку:

$$\sigma_e = \frac{1}{2} \left[(1-2p)(\sigma_2 - \tilde{\sigma}_1) \pm \sqrt{(1-2p)^2 (\sigma_2 - \tilde{\sigma}_1)^2 + 4\tilde{\sigma}_1 \sigma_2} \right], \quad (17.3.6)$$

при цьому поки що значення $\langle |\mathbf{E}|^\beta \rangle_1$ залишається невідомим.

Друге наближення полягає у заміні (порівняй з (17.2.3))

$$\langle |\mathbf{E}|^\beta \rangle_1 \rightarrow \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle_1^{\beta/2}, \quad (17.3.7)$$

де середній квадрат поля $\langle |\mathbf{E}|^2 \rangle_1$ знаходиться із співвідношення (17.2.6), яке в даному випадку зручно записати у вигляді

$$\langle |\mathbf{E}|^2 \rangle_1^{\beta/2} = \frac{1}{p^{\beta/2}} \left(\frac{\partial \sigma_e}{\partial \tilde{\sigma}_1} \right)^{\beta/2} \langle \mathbf{E} \rangle^\beta, \quad (17.3.8)$$

а під $\partial \sigma_e / \partial \tilde{\sigma}_1$ розуміється похідна від σ_e із (17.3.6).

Таким чином, для двох невідомих σ_e і $\langle |\mathbf{E}|^\beta \rangle_1 \rightarrow \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle_1^{\beta/2}$ є два нелінійних рівняння алгебри (17.3.6) і (17.3.8), розв'язки яких і дозволяють знайти σ_e для нелінійного неоднорідного середовища у всьому діапазоні концентрацій.

Незважаючи на два суттєві наближення, наведена схема добре узгоджується з числовими експериментами та дозволила, зокрема, пояснити залежності, отримані при числовому розрахунку. Можна сказати, що значною мірою таке вдале узагальнення ЕМТ засноване на тому, що основою лінійної ЕМТ є розрахунок поля у сферичному (в загальному випадку – еліпсоїдальному) включенні, а, як відомо, поле всередині такого включення, не залежить від того лінійне воно чи ні.

У критичній області поблизу порога протікання в тому випадку, коли одна з фаз є сильно нелінійною, завдання обчислення ефективних коефіцієнтів для випадку $p > p_c$ дає

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \chi_1 \tau^{t(\beta)} |\langle \mathbf{E} \rangle|^\beta \langle \mathbf{E} \rangle, \quad p > p_c, \quad \sigma_2 = 0, \quad (17.3.9)$$

з критичним індексом

$$t(\beta) = (d - 2 - \beta)\nu + (1 + \beta)\zeta(\beta), \quad (17.3.10)$$

де в рамках NLB-моделі $\zeta(\beta) = 1$, а в рамках ІМ $\zeta(\beta) = \zeta_R$.

Розглянемо випадок нижче порога протікання, коли друга фаза нелінійна, а перша є ідеальним провідником

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \chi_2 |\tau|^{-q(\beta)} |\langle \mathbf{E} \rangle|^\beta \langle \mathbf{E} \rangle, \quad p < p_c, \quad \rho_1 = 1/\sigma_1 = 0, \quad (17.3.11)$$

де

$$q(\beta) = \zeta(\beta) - (d - 2 - \beta)\nu, \quad (17.3.12)$$

та, в рамках NLB-моделі $\zeta(\beta) = 1$, а в рамках ІМ $\zeta(\beta) = \zeta_G$.

Можливий одночасний облік нелінійності обох фаз з однаковим коефіцієнтом нелінійності $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, але з $\chi_1 \gg \chi_2$. Врахування кінцевої «провідності» $\chi_1 \neq 0$ і $\chi_2 \neq 0$ обох фаз дозволило, зокрема, отримати вираз у галузі розмазування:

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \left(\chi_1^{q(\beta)} \chi_2^{t(\beta)} \right)^{\frac{1}{t(\beta) + q(\beta)}} |\langle \mathbf{E} \rangle|^\beta \langle \mathbf{E} \rangle \quad (17.3.13)$$

де $t(\beta)$ дано в (17.3.10), а $q(\beta)$ – у (17.3.12).

Нижче розглянемо випадок, коли фази мають різні ВАХ ($\beta_1 \neq \beta_2$), зокрема, до них належать випадки, коли обидві фази лінійні ($\beta_1 = \beta_2 = 0$).

Наприклад, розглянемо задачу, коли в першій та в другій фазах вольт-амперні характеристики рівні, відповідно

$$\mathbf{j} = \chi_1 |\mathbf{E}|^{-2/3} \mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \chi_2 |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}, \quad (17.3.14)$$

або

$$\mathbf{E} = \gamma_1 |\mathbf{j}|^2 \mathbf{j}, \quad \mathbf{E} = \gamma_2 |\mathbf{j}|^{-2/3} \mathbf{j}, \quad (17.3.15)$$

де

$$\chi_1 = \gamma_1^{-1/3}, \quad \gamma_2 = \chi_1^{-1/3}. \quad (17.3.16)$$

На Рис. 17.2 схематично зображені ці характеристики та показано E_c – значення напруженості електричного поля, при якому величини струмів у першій та другій фазах порівнюються. В області *I* – електричних полів перша фаза проводить струм краще, ніж друга (її можна назвати «металевою»), в області *II* – провідні властивості фаз приблизно рівні, в області *III* – фази "змінюються місцями" – тепер друга фаза проводить струм краще (грає роль "металу").

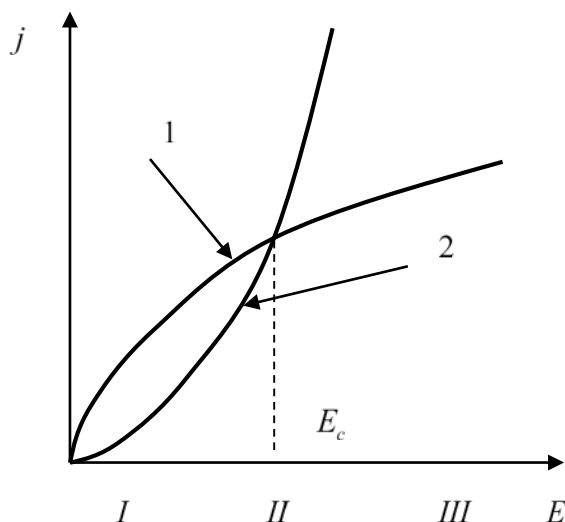


Рис. 17.2. Вольт-амперні характеристики першої «чорної» – 1 та другої «білої» – 2 фаз;

Для розрахунку ефективних властивостей скористаємося другим щаблем ІМ. Опір містка та прошарку можна задати виходячи з виду ВАХ. Розглянемо тривимірний випадок:

$$U_1 = \frac{N_1}{a_0^5 \chi_1^3} J_1^3, \quad U_2 = \frac{a_0}{\chi_2 N_2} J_2^{1/3}, \quad (17.3.17)$$

де $U_{1,2}$ - падіння напруги, $J_{1,2}$ – струми на містку та прошарку.

При виведенні (17.3.17), як і в лінійному випадку, враховано, що струми, що йдуть через «одинично з'єднані зв'язки» – SCB, з яких складається місток, однакові для кожного опору і дорівнюють повному струму через місток, і що падіння напруги на кожному з "поодинокі роз'єднаних зв'язків" - SDCB, з яких складається прошарок, однакове і дорівнює падінню напруги на прошарку. Вище порога протікання місток і прошарок з'єднані паралельно, тому повний струм J_ξ на розмірах порядку кореляційної довжини ξ дорівнює сумі струмів $J_1 + J_2 = J_\xi$. Тоді

$$J_\xi = \left(\frac{a_0^5 \chi_1}{N_1} \right)^{1/3} U_\xi^{1/3} \left(1 + \frac{\chi_2}{\chi_1} \frac{N_2 N_1^{1/3}}{a_0^{8/3}} U_\xi^{8/3} \right), \quad (17.3.18)$$

де враховано, що $U_1 = U_2 = U_\xi$ - падіння напруги на розмірах порядку ξ .

Нижче порогу протікання $U_\xi = U_1 + U_2$ і $J_1 = J_2 = J_\xi$ тоді маємо

$$U_\xi = \left(\frac{a_0}{\chi_2 N_2} \right)^{1/3} J_\xi \left[1 + \left(\frac{\chi_2 N_2}{a_0} \right)^{1/3} \frac{N_1}{a_0^5 \chi_1^3} J_\xi^{8/3} \right], \quad p < p_c. \quad (17.3.19)$$

Використання як ІМ, так і NLB-моделі, має на увазі наявність сильної неоднорідності – провідність «чорної» фази має бути набагато більшою за «білу», що можливо (див. рис 17.2) в I -ї області, коли $E \ll E_c$ і $j \ll j_c$, де E_c і j_c для даного випадку (17.3.14), (17.3.15) мають вигляд

$$E_c = \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right)^{3/8}, \quad j_c = \left(\frac{\chi_1^9}{\chi_2^{1/8}} \right)^{3/8}. \quad (17.3.20)$$

Оскільки максимальний струм – це струм у містку, а максимальне поле – це поле у прошарку, то

$$j_{\max} = |\langle \mathbf{j} \rangle| |\tau|^{-2\nu}, \quad E_{\max} = |\langle \mathbf{E} \rangle| |\tau|^{-\nu}, \quad (17.3.21)$$

і, таким чином, середовище знаходиться в області полів I , якщо

$$|\langle \mathbf{E} \rangle| \ll E_c |\tau|^\nu = \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right)^{3/8} \cdot |\tau|^\nu, \quad (17.3.22)$$

$$|\langle \mathbf{j} \rangle| \ll j_c |\tau|^{2\nu} = \left(\frac{\chi_1^9}{\chi_2^{1/8}} \right)^{3/8} |\tau|^{2\nu}. \quad (17.3.23)$$

Наявність співмножника τ (17.3.22) і (17.3.23) означає, що чим концентрація першої фази ближче до порога протікання, тим жорсткішими є ці умови.

Крім обмежень, пов'язаних із сильною неоднорідністю, існують обмеження, притаманні моделі перколяційної структури: вище порога протікання її головним елементом повинен бути місток, а нижче порога протікання – прошарок. Іншими словами, при $p > p_c$ має виконуватися нерівність $Q_1 \gg Q_2$, де Q_1 і Q_2 – тепловиділення на містку та прошарку. Бо при $p > p_c$ ця нерівність набуває вигляду $J_1 \gg J_2$, то з урахуванням (17.3.17) маємо

$$U_2 \ll a_0 \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right)^{3/8} |\tau|^{(3\xi_R + \xi_G)/8}, \quad p > p_c. \quad (17.3.24)$$

Нижче порогу протікання виконується умова $Q_2 \gg Q_1$, що з урахуванням $J_1 = J_2$, $U_2 \gg U_1$ призводить до наступного:

$$J_1 \ll a_0^2 \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right)^{1/8} |\tau|^{(3\xi_R + \xi_G)/8}, \quad p < p_c. \quad (17.3.25)$$

Якщо виконуються (17.3.22)-(17.3.25), то (17.3.18) і (17.3.20) можна використовувати для визначення ефективних властивостей нелінійного середовища. Враховуючи, що у тривимірному випадку $J_\xi = |\langle \mathbf{j} \rangle| \xi^2$, $U_\xi = \langle \mathbf{E} \rangle \xi$ і $\xi = a_0 |\tau|^{-\nu}$, з (17.3.18) та (17.3.19) отримуємо

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \chi_1 |\tau|^{\tilde{\tau}} |\langle \mathbf{E} \rangle|^{1/3} \frac{\langle \mathbf{E} \rangle}{|\langle \mathbf{E} \rangle|} \left(1 + \frac{\chi_2}{\chi_1} |\tau|^{-\tilde{\varphi}} |\langle \mathbf{E} \rangle|^{8/3} \right), \quad p > p_c, \quad (17.3.26)$$

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \chi_2 |\tau|^{-\tilde{q}} |\langle \mathbf{E} \rangle|^3 \frac{\langle \mathbf{E} \rangle}{|\langle \mathbf{E} \rangle|} \left(1 - 3 \frac{\chi_2}{\chi_1} |\tau|^{-\tilde{\varphi}} |\langle \mathbf{E} \rangle|^{8/3} \right), \quad p < p_c, \quad (17.3.27)$$

де

$$\tilde{t} = \frac{5\nu + \xi_R}{3}, \quad \tilde{q} = \nu + \xi_G, \quad \tilde{\varphi} = \tilde{t} + \tilde{q}, \quad (17.3.28)$$

та, в рамках ІМ маємо

$$\tilde{t}_3 = \frac{4\nu_3 + t_3}{3}, \quad \tilde{q}_3 = 2\nu_3 + q_3, \quad \tilde{\varphi} = \frac{t_3 + 3q_3 + 10\nu}{3}, \quad (17.3.29)$$

у рамках NLB-моделі необхідно ξ_R і ξ_G (17.3.28) замінити на одиницю.

Підстановка ξ_R і ξ_G , виражених через t , q і ν в (17.3.24) і (17.3.25) показує, що ці дві умови збігаються, тобто – це те саме, записане в різному вигляді:

$$|\langle \mathbf{E} \rangle| \ll \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right)^{3/8} \cdot \tau^{(t+3q+10\nu)/8}, \quad (17.3.30)$$

або, що те саме,

$$|\langle \mathbf{j} \rangle| \ll \left(\frac{\chi_1^9}{\chi_2} \right)^{1/8} \cdot \tau^{(3t+q+14\nu)/8}, \quad (17.3.31)$$

що означає, як і повинно бути, малість других доданків порівняно з першим (17.3.26) і (17.3.27).

Аналогічно лінійному випадку за допомогою виразів (17.3.26) та (17.3.27) можна знайти величину області розмазування Δ та ефективні властивості нелінійного середовища у цій галузі. Для визначення Δ , попередньо замінивши $|\tau|$ на Δ , прирівняємо перші доданки в (17.3.26) і (17.3.27) або перше і друге доданки в (17.3.26) (або в (17.3.27)), і у всіх цих випадках отримаємо

$$\Delta = \left(\frac{\chi_2}{\chi_1} \right)^{\frac{3}{t+3q+10\nu}} \cdot |\langle \mathbf{E} \rangle|^{\frac{8}{t+3q+10\nu}}. \quad (17.3.32)$$

Як видно з (17.3.32), величина області розмазування Δ залежить від величини середнього поля. Оскільки критична область, для якої справедливі (17.3.26) та (17.3.27), це область концентрацій $|\tau| \ll 1$, для Δ з (17.3.32) повинна також виконуватися нерівність $\Delta \ll 1$, або

$$|\langle \mathbf{E} \rangle| \ll \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right)^{3/8}. \quad (17.3.33)$$

Зазначимо, що якщо виконується умова $|\langle \mathbf{E} \rangle| \ll E_c$ з (17.3.22), оскільки $|\tau|^\nu \ll 1$, умова (17.3.33) точно виконується.

Підставляючи Δ з (17.3.32) в перший доданок (17.3.26) або (17.3.27), знаходимо ефективні властивості нелінійного середовища в області розмазування у вигляді

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \left(\chi_1^{3(q+2\nu)} \cdot \chi_2^{t+4\nu} \right)^{\frac{1}{t+3q+10\nu}} \left| \langle \mathbf{E} \rangle \right|^{\frac{3t+q+14\nu}{t+3q+10\nu}} \frac{\langle \mathbf{E} \rangle}{|\langle \mathbf{E} \rangle|}, \quad |\tau| \leq \Delta. \quad (17.3.34)$$

Числові значення критичних індексів провідності (17.3.29) при даному вибраному вигляді нелінійності мають вигляд

$$\tilde{t}_3 = 1,84, \quad \tilde{q}_3 = 2,49, \quad \tilde{\varphi}_3 = 4,33. \quad (17.3.35)$$

Зазначимо, що якщо вище і нижче порога протікання, поза розмазуванням, польова залежність (17.3.26) і (17.3.27) для середнього струму ($\sim |\langle \mathbf{E} \rangle|^{1/3}$ $p > p_c$ і $|\langle \mathbf{E} \rangle|^3$ і $p < p_c$) співпадає з такою для чистої фази, то в області розмазування ця величина не збігається з жодною з них і знаходиться в проміжку між ними (17.3.35):

$$\frac{3t+q+14\nu}{t+3q+10\nu} = 1.47, \quad 0,33 \leq 1,47 \leq 3. \quad (17.3.36)$$

Розрахунок ефективних властивостей для сильної нелінійності в загальному випадку, коли для першої та другої фаз:

$$\mathbf{j} = \chi_1 |\mathbf{E}|^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \chi_2 |\mathbf{E}|^{\beta-1} \mathbf{E}, \quad (17.3.37)$$

де β і γ параметри, що задають вигляд сильної нелінійності, аналогічний наведеному вище,

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \chi_1 \tau^{\tilde{t}} |\langle \mathbf{E} \rangle|^{1/\gamma} \frac{\langle \mathbf{E} \rangle}{|\langle \mathbf{E} \rangle|} \left(1 + \frac{\chi_2}{\chi_1} \tau^{-\tilde{\varphi}} |\langle \mathbf{E} \rangle|^{\beta-1/\gamma} \right), \quad p > p_c, \quad (17.3.38)$$

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \chi_2 \tau^{-\tilde{q}} |\langle \mathbf{E} \rangle|^\beta \frac{\langle \mathbf{E} \rangle}{|\langle \mathbf{E} \rangle|} \left(1 - \left(\frac{\chi_2}{\chi_1} \tau^{-\tilde{\varphi}} |\langle \mathbf{E} \rangle|^{\beta-1/\gamma} \right)^\gamma \right), \quad p < p_c \quad (17.3.39)$$

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \left(\chi_1^{\tilde{q}} \chi_2^{\tilde{t}} \right)^{1/\tilde{\varphi}} |\langle \mathbf{E} \rangle|^{\frac{\beta\tilde{t}+\tilde{q}/\gamma}{\tilde{\varphi}}} \frac{\langle \mathbf{E} \rangle}{|\langle \mathbf{E} \rangle|}, \quad |\tau| < \Delta. \quad (17.3.40)$$

Тут величина області розмазування, як і в (17.3.32) залежить від $\langle \mathbf{E} \rangle$:

$$\Delta = \left[\left(\frac{\chi_2}{\chi_1} \right) |\langle \mathbf{E} \rangle|^{\beta-1/\gamma} \right]^{1/\tilde{\varphi}}, \quad (17.3.41)$$

а критичні індекси $\tilde{t}$, $\tilde{q}$, $\tilde{\varphi}$ (в рамках ІМ) мають вигляд

$$\tilde{t} = \frac{t + \nu(d-1)(\gamma-1)}{\gamma}, \quad \tilde{q} = q + \nu(\beta-1), \quad \tilde{\varphi} = \tilde{t} + \tilde{q}. \quad (17.3.42)$$

Цікаво відзначити, що за певних значень параметрів нелінійності β і γ , а саме, коли $\beta\tilde{t} + \tilde{q}/\gamma = 0$, середовище залишаючись нелінійним вище і нижче порога протікання, в області розмазування поводить себе лінійним чином.

Наведений вище перколяційний опис ефективних властивостей має на увазі значну неоднорідність, тобто справедливо в області *I* (див. Рис. 17.2), коли $E \ll E_c$. Розглянемо тепер область, що знаходиться поблизу E_c – область *II* на Рис. 17.2. Безпосередньо у точці E_c , тобто при $|\langle \mathbf{E} \rangle| = E_c$, середовище стає однорідним за провідністю, а поблизу E_c хоч і нелінійним, але слабо неоднорідним. Тому для аналізу її ефективних властивостей вже не можна використати перколяційний підхід, але можна залучити узагальнення ЕМТ на лінійний випадок. Застосування цього методу, якщо прийняти позначення $\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma_e(|\langle \mathbf{E} \rangle|)\langle \mathbf{E} \rangle$,

приведе до першого наближення за малим параметром $\frac{(|\langle \mathbf{E} \rangle| - E_c)}{E_c} \ll 1$. При цьому для

$\sigma_e(|\langle \mathbf{E} \rangle|)$ наступний вираз:

$$\sigma_e \approx \chi_2 \left(1 - 2 \frac{\gamma-1}{(1-p)(\gamma-1)-2} p \frac{|\langle \mathbf{E} \rangle| - E_c}{E_c} \right). \quad (17.3.43)$$

У третій області ВАХ (див. Рис. 17.2) при $E \gg E_c$ елементи «чорної» та «білої» фаз змінюються місцями. Здавалося б, якщо зробити заміну $\chi_1 \Leftrightarrow \chi_2$, $p \Leftrightarrow 1-p$, повинна спостерігатися та ж перколяційна структура, і ті ж ефективні властивості. При цьому, однак, потрібно бути впевненим, що у всіх точках середовища, а не тільки в перколяційних елементах (містку та прошарку) при даному середньому полі $\langle \mathbf{E} \rangle \gg E_c$, локальне поле більше критичного. Детальний аналіз нелінійного середовища в галузі полів *III* досі ще не проведено.

У двовимірному випадку у самодуальних середовищах, при певному співвідношенні між параметрами нелінійності β і γ , а саме, при

$$\gamma = 1/\beta, \quad (17.3.44)$$

можливий точний розв'язок задачі про ефективні властивості неоднорідного середовища.

Застосовуючи перетворення Дихне (див. розділ 6) можна визначити, що у випадку (17.3.44) ВАХ є лінійною, і ефективна провідність має вигляд

$$\sigma_e = (\chi_1^\beta \chi_2)^\frac{1}{1+\beta}. \quad (17.3.45)$$

У випадку, коли $\beta=1$, обидві фази нелінійні, і σ_e (17.3.45) співпадає з ефективною провідністю, отриманою А. М. Дихне, $\sigma_e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$.

Числова перевірка отриманих для випадку сильної нелінійності критичних індексів проводилася в багатьох роботах. Критичний індекс провідності вище за поріг протікання обчислювався за допомогою моделей ієрархічних фрактальних сіток. Були знайдені числові значення критичного індексу провідності вище за поріг протікання. Слід зазначити, що у багатьох роботах, де проводився числовий експеримент на сіткових моделях, сильну нелінійність можна записати як

$$V = r |I|^\alpha \operatorname{sgn} I, \quad (17.3.46)$$

де V - падіння напруги на зв'язку, r - її опір, I - струм через цей зв'язок, sgn - функція знака.

У числовому експерименті шукають середній за реалізаціями опір $\{R\}$ залежно від L - розміру зразка:

$$\{R\} \sim L^{\tilde{\zeta}(\alpha)}, \quad (17.3.47)$$

така залежність при $L \gg \xi$ переходить (див. розділ 9) ($\xi \rightarrow \tau^{-\nu}$) у наступну:

$$R \sim \tau^{-\zeta(\alpha)}, \quad \zeta(\alpha) = \nu \tilde{\zeta}(\alpha). \quad (17.3.48)$$

Для ефективного питомого «опору» γ_e в d -мірному випадку маємо

$$\gamma_e = R \xi^{(d-1)/\alpha} / \xi, \quad (17.3.49)$$

Переходячи до напруженості поля $\langle E \rangle = V/\xi$ та густини струму $\langle \mathbf{j} \rangle = I/\xi^{d-1}$ з (17.3.46) знаходимо

$$\langle E \rangle = \frac{V}{\xi} = R \frac{(\xi^{\alpha-1})^\alpha}{\xi} \left(\frac{I}{\xi^{d-1}} \right)^\alpha \quad (17.3.50)$$

звідки з урахуванням (17.3.48) отримуємо

$$\gamma_e \sim \tau^{-t_\alpha}, t_\alpha = \alpha \nu (d-1) + \zeta(\alpha) - \nu. \quad (17.3.51)$$

Оскільки ефективний коефіцієнт γ_e у разі сильної нелінійності пов'язаний з χ_e таким чином:

$$\chi_e = \gamma_e^{-1/\alpha}, \quad (17.3.52)$$

то з виразу (17.3.51) маємо

$$t(\alpha) = \nu(d-1) - \frac{\zeta(\alpha) - \nu}{\alpha}, \quad (17.3.53)$$

а в термінах параметра β ($\beta = (1-\alpha)/\alpha$) (17.3.53) переходить, як і має бути, в (17.3.10).

Знайдено числові значення $\zeta(\alpha)$ для різних α та мірності задачі d . Як виявилось, $\zeta(\alpha)$ не дуже відрізняється від одиниці, і слабо залежить від α , див. Таблиця 17.2, де наведено числові значення індексу $\zeta(\alpha)$ для двох- трьох і шестивимірної задачі та $\alpha = 5.0$. У NLB-моделі $\zeta(\alpha) = 1$, а в рамках ІМ $\zeta(\alpha) = \zeta_R$. Обидві моделі, при невеликих значеннях β дають задовільне узгодження із числовим розрахунком. Як і у випадку задачі про струмові моменти, поки ступінь моменту далекий від нуля і не дуже великий, головними елементами перколяційної структури є містки і прошарок, що дає узгодження розрахунків у рамках різних моделей з числовими розрахунками.

Таблиця 17.2.

Розмірність задачі	$\zeta(\alpha = 0,05)$
2	$1,02 \pm 0,08$
3	$1,02 \pm 0,08$
6	$1,00 \pm 0,01$

Контрольні запитання

1. Які види нелінійності існують?
2. Як визначається ефективна провідність неоднорідного середовища з нелінійною ВАХ?

3. Як визначається ефективна провідність неоднорідного середовища з нелінійною ВАХ у випадку слабкої нелінійності
4. Як визначається ефективна провідність неоднорідного середовища з нелінійною ВАХ у випадку сильної нелінійності?
5. Які особливості ефективних властивостей неоднорідного середовища з нелінійною ВАХ?

Розділ 18. Ефективні властивості феромагнітних композитів

18.1. Нелінійність та гістерезис у феромагнетиках

У цьому розділі розглянемо випадково неоднорідне середовище, одна з фаз якої феромагнітна, а друга немагнітна (діа-або парамагнетик, сприйнятливості яких можна знехтувати).

Основною характеристикою феромагнітного композиту є ефективна магнітна проникність μ_e . За визначенням μ_e пов'язує між собою середні за об'ємом напруженість $\mathbf{H}$ та індукцію $\mathbf{B}$ магнітного поля:

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \mu_{eff} (\langle \mathbf{H} \rangle) \langle \mathbf{H} \rangle, \quad (18.1.1)$$

де $\langle \dots \rangle = V^{-1} \int \dots dV$, V - об'єм усереднення. Незважаючи на формальну схожість завдань про обчислення ефективної магнітної проникності та ефективної питомої провідності, є принаймні два принципові моменти, які сильно ускладнюють аналіз. По-перше, локальний ефективній проникності $\mu(H)$ притаманний особливий вид нелінійності (див. Рис. 18.1), який не зводиться до слабкої нелінійності, коли при малих полях залежність $\mu(H)$ стає

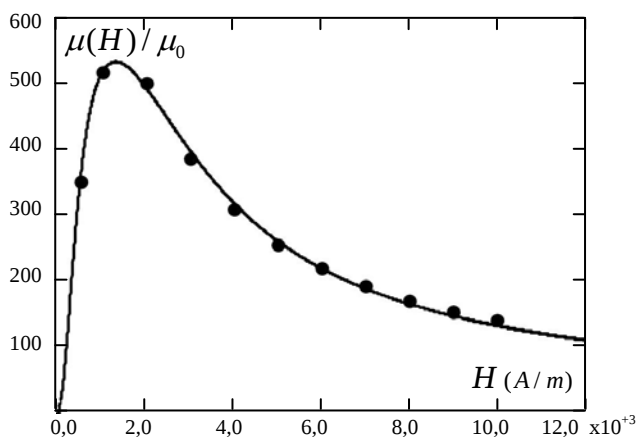


Рис. 18.1. Залежність відносної магнітної проникності у феромагнітній фазі від магнітного поля; точки - значення магнітної проникності для конкретного матеріалу (сталь); суцільна крива - аналітична функція, що апроксимує експериментальні точки.

лінійною (наприклад, залежність типу закону Ома), ні до сильної нелінійності, коли передбачається степенева вольт-амперна характеристика (у термінах електричних полів та струмів). При досить великих магнітних полях відносна магнітна проникність близька до одиниці, тобто середовище, що складається з феромагнітної та немагнітної фаз, слабо неоднорідне. У той же час у проміжних полях відносна магнітна проникність може досягати великих значень, і таким чином середовище стає сильно неоднорідним. По-друге, у тому

випадку, коли у феромагнітній фазі не можна знехтувати залишковою намагніченістю, поняття магнітної проникності втрачає свою однозначність.

У параграфі 18.2 розглянемо випадок, коли петлею гістерези можна знехтувати, тобто коли у феромагнітній фазі магнітна проникність – однозначна функція поля, а в 18.3 розглянемо задачу про визначення залишкової намагніченості та коерцитивної сили.

18.2. Безгістерезисний випадок

Для визначення залежності μ_e від зовнішнього поля скористаємося модифікацією наближення ЕМА запропонованої для випадку степеневі нелінійності та описаної в попередньому розділі. Стисло зупинимося на основних етапах цього методу для нашого випадку. Будемо характеризувати нелінійну фазу з $\mu_1 = \mu_1(H)$ деякою постійною магнітною проникністю

$$\tilde{\mu}_1 = \langle \mu_1(H) \rangle_1, \quad (18.2.1)$$

де усереднення береться за об'ємом включень.

Тоді для визначення μ_{eff} можна скористатися стандартним наближенням ЕМА для тривимірного випадку:

$$\mu_{eff} = \frac{1}{4} \left\{ \left[(3p-1)\tilde{\mu}_1 + (2-3p)\mu_2 \right] + \sqrt{\left[(3p-1)\tilde{\mu}_1 + (2-3p)\mu_2 \right]^2 + 8\mu_2\tilde{\mu}_1} \right\}, \quad (18.2.2)$$

де p - концентрація феромагнітної фази. Далі (див. (17.2.6)) маємо

$$\langle H^2 \rangle_1 = \frac{\langle H^2 \rangle}{p} \frac{\partial \mu_{eff}}{\partial \tilde{\mu}_1}. \quad (18.2.3)$$

Друге наближення цього методу визначення $\tilde{\mu}_1$ через $\langle H^2 \rangle_1$ полягає у заміні

$$\tilde{\mu}_1 = \langle \mu(H) \rangle_1 \approx \mu_1 \left(\sqrt{\langle H^2 \rangle_1} \right). \quad (18.2.4)$$

Підстановка (18.2.4) у (18.2.2) та (18.2.2) у (18.2.3) призводить до нелінійного рівняння для визначення $\langle H^2 \rangle_1$

$$\langle H^2 \rangle_1 = \frac{\langle H^2 \rangle}{4p} \left\{ 3p - 1 + \frac{[(3p-1)\tilde{\mu}_1 + (2-3p)\mu_2](2-3p) + 4\mu_2}{\sqrt{[(3p-1)\tilde{\mu}_1 + (2-3p)\mu_2]^2 + 8\mu_2\tilde{\mu}_1}} \right\}. \quad (18.2.5)$$

Визначаючи з (18.2.5) поле $\langle H^2 \rangle_1$, і підставляючи його (18.2.2), знаходимо ефективну магнітну проникність феромагнітного композиту μ_{eff} як функцію концентрації p феромагнітного середовища, зовнішнього магнітного поля $\langle H \rangle$ та параметрів функції нелінійності.

В якості прикладу розглянемо конкретну залежність локальної магнітної проникності, показану на Рис. 18.1, у вигляді

$$\mu_1(H) = \mu_0 \left(1 + 1,57 \cdot 10^6 \cdot \frac{\tanh(5 \cdot 10^{-4} \cdot H)}{H} - 2,58 \cdot 10^5 \cdot \frac{\tanh(3 \cdot 10^{-3} \cdot H)}{H} \right), \quad (18.2.6)$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. На Рис. 18.2 наведено розраховану за (18.2.2) та (18.2.5) залежність

μ_{eff} від концентрації феромагнітної фази p та зовнішнього поля $\langle H \rangle$. При $p=1$, як і має бути, залежність μ_{eff} від поля збігається із залежністю магнітної проникності чистої феромагнітної фази. Для магнітних полів, при яких $\mu_1 = \mu_1(H) \gg 1$, ефективна магнітна проникність μ_{eff} різко зростає під час переходу через поріг протікання.

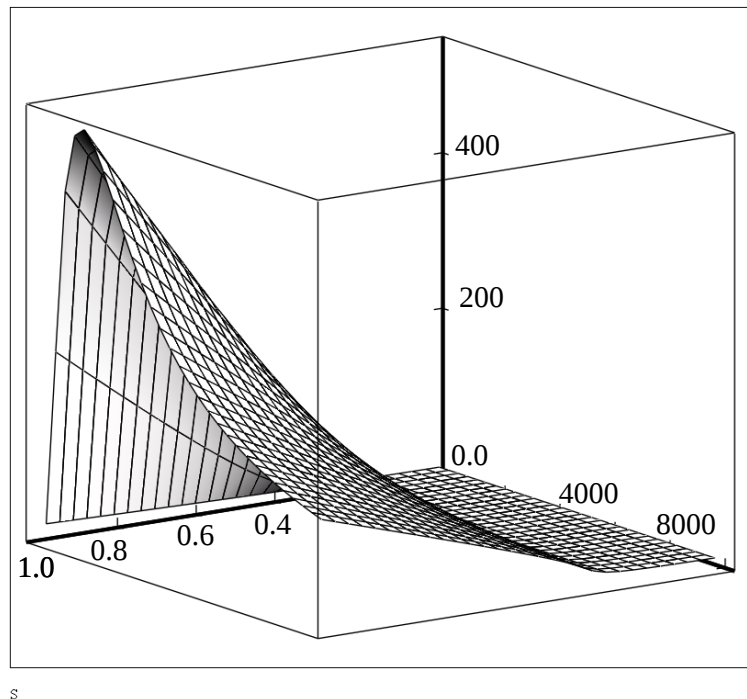


Рис. 18.2. Залежність ефективної магнітної проникності μ_{eff} від концентрації феромагнітної фази p та напруженості середнього за об'ємом магнітного поля $\langle H \rangle$ від 0 до 10000 А/м.

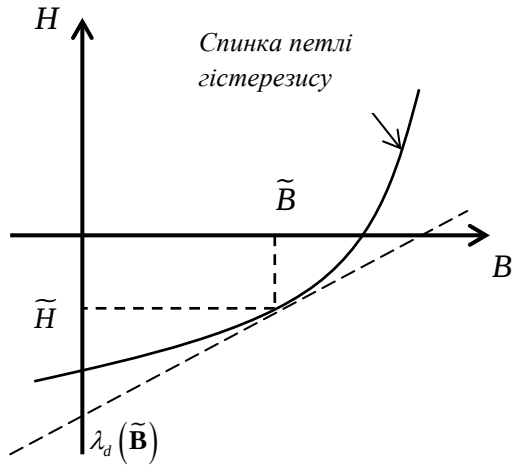


Рис.18.3. Крива розмагнічування

У випадку феромагнітної фази з ненульовою петлею гістерезису однозначне визначення як локальної, так і ефективної магнітної проникності неможливе. Локальне значення магнітної проникності у цьому випадку втрачає свою однозначність, її значення вже залежить від передісторії намагнічування зразка. Тому розв'язати повністю задачу знаходження ефективної магнітної проникності та залежності $\langle \mathbf{B} \rangle$ від $\langle \mathbf{H} \rangle$ можна лише, знаючи «історію»

намагнічування. Але навіть у тому випадку, коли нам відома історія намагнічування, наприклад, зразок спочатку доведуть до технічного насичення, після чого розмагнічування відбувається так званою спинкою петлі гістерезису (див. стрілку на Рис.18.3), виникає нестандартна ситуація для визначення ефективних характеристик. А саме, при $H = 0$ є ненульове значення B , у чому і полягає наявність залишкової намагніченості.

Для обчислення ефективних коефіцієнтів композиту, коли одна з фаз (або обидві фази) має петлю гістерезису, будемо застосовувати метод локальної лінеаризації (LL-метод). Знайдемо також залежність коерцитивної сили H_c та залишкової намагніченості B_r композиту від концентрації феромагнітної фази та значення коерцитивної сили h_c та значення залишкової намагніченості b_r у цій фазі. Для визначення коерцитивної сили композиту перейдемо до термінів ефективного магнітного опору λ_{eff} , який визначається з рівняння:

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \lambda_{eff} (\langle \mathbf{B} \rangle) \langle \mathbf{B} \rangle. \quad (18.3.1)$$

Розглянемо докладніше метод локальної лінеаризації для обчислення ефективного магнітного опору.

Перше наближення в LL-методі полягає у локальній лінеаризації рівняння

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \lambda_i(\mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (18.3.2)$$

для певного значення індукції $\tilde{\mathbf{B}}$, коли локальна нелінійність при $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}$ замінюється на лінеаризовану (див. Рис. 18.3) (індекс $i = 1$ для першої фази та $i = 2$ для другої фази). При цьому отримуємо

$$\mathbf{H} = \lambda_{di}(\tilde{\mathbf{B}}) \cdot \mathbf{B} + \Omega, \quad (18.3.3)$$

де

$$\Omega_i(\tilde{\mathbf{B}}) = \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{B}}) - \lambda_{di}(\tilde{\mathbf{B}}) \cdot \tilde{\mathbf{B}} = \left(\lambda_i(\tilde{\mathbf{B}}) - \lambda_{di}(\tilde{\mathbf{B}}) \right) \cdot \tilde{\mathbf{B}}, \quad (18.3.4)$$

$$\lambda_{di}(\tilde{\mathbf{B}}) = \left. \frac{dH_i(B)}{dB} \right|_{B=\tilde{B}}. \quad (18.3.5)$$

Далі вважатимемо, що поле $\langle H \rangle$ було доведено до значень технічного насичення феромагнітної фази, після чого воно зменшується. Таким чином середовище «знаходиться» на верхній частині петлі гістерезису, якщо розглядати петлю гістерезису в осях з H по абсцисі та з B по ординаті. При визначенні ефективних коефіцієнтів у системі згідно із законом типу (18.3.3), що зв'язує локальне поле та індукцію у вигляді

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \lambda_e(\langle \mathbf{B} \rangle) \cdot \langle \mathbf{B} \rangle + \Omega_e, \quad (18.3.6)$$

необхідно визначити величину Ω_e (при нашому виборі історії намагнічування зразка вона дорівнює ефективній коерцитивній силі всього зразка H_c), а λ_e обчислити як для лінійних законів (наприклад, ЕМА). Для визначення Ω_e проведемо аналогію між (18.3.3) та термоелектричним середовищем:

$$\mathbf{E} = \rho_i \cdot \mathbf{j} - \alpha_i \langle \nabla T \rangle, \quad (18.3.7)$$

де α_i - коефіцієнт термоЕРС в i -й фазі, ρ_i - питомий опір i -ї фази, κ_i - питома теплопровідність i -ї фази. Закон (18.3.7) справедливий за малої термоелектричної добротності ($T \cdot \alpha_i^2 / (\rho_i \cdot \kappa_i) \ll 1$, де T - температура). Порівнюючи (18.3.7) з (18.3.3), бачимо, що аналогія існує, якщо $\alpha_i \langle \nabla T \rangle = \text{const}$ у кожній фазі. Вибираючи у кожній із фаз α_i такою, що не залежить від координат, необхідно так само щоб

$$\langle \nabla T \rangle = \text{const} \quad (18.3.8)$$

для всього зразка. Це друге наближення LL методу. Вважатимемо, що умова (18.3.8) виконана, тоді співвідношення, що описують нелінійне середовище після локальної лінеаризації (18.3.3) – (18.3.6) з точністю до заміни позначень

$$\begin{aligned} -\alpha_i |\nabla T| &\leftrightarrow \Omega_i, & -\alpha_e |\nabla T| &\leftrightarrow \Omega_e, \\ \rho_i &\leftrightarrow \lambda_{di}(\tilde{\mathbf{B}}), & \rho_e &\leftrightarrow \lambda_e, \end{aligned} \quad (18.3.9)$$

збігаються з термоелектричною системою, де ρ_e – ефективний опір термоелектричної лінійної системи з локальними співвідношеннями (18.3.7):

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \rho_e \cdot \langle \mathbf{j} \rangle - \alpha_e \langle \nabla T \rangle, \quad (18.3.10)$$

Ефективний коефіцієнт ρ_e (18.3.10) можна знайти, використовуючи, наприклад, стандартний ЕМА-метод (або будь-яке інше лінійне наближення). За допомогою ізоморфізму між α_e і $\rho_e = 1/\sigma_e$ (див. розділ 15) визначимо α_e у вигляді

$$\alpha_e = \frac{(\alpha_1 \cdot \rho_{d2} - \alpha_2 \cdot \rho_{d1}) - \rho_e \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)}{\rho_{d2} - \rho_{d1}}, \quad (18.3.11)$$

Враховуючи заміну позначень (18.3.9) та те, що $H_c = \Omega_e(B=0)$, $h_{c1} = \Omega_1(0)$ і $h_{c2} = \Omega_2(0)$, отримуємо

$$H_c = \frac{(h_{c2} \lambda_{d1}(0) - h_{c1} \lambda_{d2}(0)) - \lambda_e(0)(h_{c2} - h_{c1})}{\lambda_{d2}(0) - \lambda_{d1}(0)}, \quad (18.3.12)$$

На Рис. 18.4 представлено концентраційну залежність ефективної коерцитивної сили всього зразка. Для знаходження λ_e використовувалося тривимірне ЕМА-наближення

$$\begin{aligned} \lambda_e = \frac{1}{2} \{ & (1-3p)\lambda_{d2} + (3p-2)\lambda_{d1} + \\ & + \sqrt{[(1-3p)\lambda_{d2} + (3p-2)\lambda_{d1}]^2 + 8\lambda_{d1}\lambda_{d2}} \}. \end{aligned} \quad (18.3.13)$$

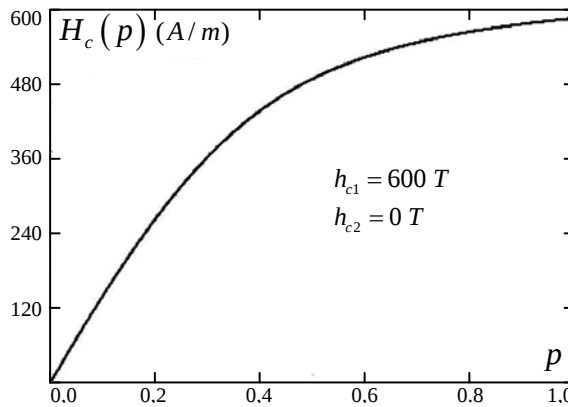


Рис. 18.4. Залежність коерцитивної сили композиту від концентрації феромагнітної фази

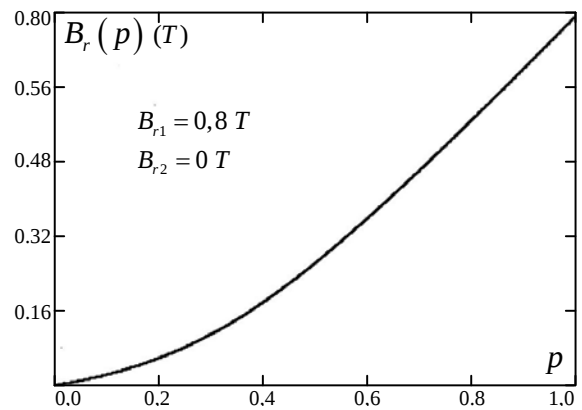


Рис. 18.5. Залежність залишкової намагніченості композиту від концентрації феромагнітної фази.

Абсолютно аналогічно, обчислюється і залишкова намагніченість B_r (див. Рис. 18.5).

Контрольні питання

1. Як визначається ефективна магнітна проникність феромагнітного композиту?
2. У чому основні труднощі при обчисленні ефективної магнітної проникності феромагнітного композиту?
3. Яким методом можна обчислити ефективну магнітну проникність феромагнітного композиту у випадку, коли петлею гістерезису можна знехтувати?
4. Яким методом можна обчислити ефективну магнітну проникність феромагнітного композиту у випадку, коли петлею гістерезису не можна знехтувати?
5. Як визначається коерцитивна сила феромагнітного композиту?

Розділ 19. Температурний коефіцієнт опору та генерація третьої гармоніки поблизу порога протікання

19.1. Температурний коефіцієнт опору

Однією із важливих характеристик композитних матеріалів є температурна залежність опору, яка може виражатися через температурний коефіцієнт опору (ТКО)

$$\text{ТКО} = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT}. \quad (19.1.1)$$

Чим менший ТКО даного матеріалу в даному діапазоні температур, тим слабший опір матеріалу залежить від температури. При використанні композитних матеріалів як опорів у різних електричних схемах, дуже важливо знати ТКО, оскільки для стабільності роботи електронних пристроїв він має бути якнайменше.

ТКО двофазних сильно неоднорідних середовищ поблизу порога протікання p_c легко визначити з виразів ефективного питомого опору. Для зручності перейдемо до питомого ТКО:

$$\beta = \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dT}, \quad \beta_i = \frac{1}{\rho_i} \frac{d\rho_i}{dT}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (19.1.2)$$

де i означає номер фази.

Нижче порогу протікання, де $\rho_e \approx \rho_2 |\tau|^q \left(B_0 + B_1 h |\tau|^{-\varphi} \right)$, $h = \sigma_2 / \sigma_1 \equiv \rho_1 / \rho_2$, $\varphi = t + q$, врахування залежності ρ_1 і ρ_2 від температури призводить до виразу

$$\frac{d\rho_e}{dT} = B_0 \frac{d\rho_2}{dT} |\tau|^q + B_1 \frac{d\rho_1}{dT} |\tau|^{-\varphi}. \quad (19.1.3)$$

Ділячи це вираз на $\rho_2 |\tau|^q$ і відкидаючи доданки більш високі по порядку малості порівняно з ρ_1 / ρ_2 , отримуємо

$$\beta_e = B_0 \beta_2 + B_1 \beta_1 h |\tau|^{-\varphi}, \quad \varphi = t + q, \quad p < p_c, \quad \tau \gg \Delta, \quad (19.1.4)$$

Таким же чином знаходимо і ТКО вище за поріг протікання і на самому порозі – в області розмазування:

$$\beta_e = A_0 \beta_2 + A_1 \beta_1 h |\tau|^{-\varphi}, \quad p > p_c, \quad \tau \gg \Delta, \quad (19.1.5)$$

$$\beta_e = \frac{q}{\varphi} \beta_1 + \frac{t}{\varphi} \beta_2, \quad |\tau| \leq \Delta. \quad (19.1.6)$$

Як видно з (19.1.4) та (19.1.5), при наближенні до порога протікання ТКО може змінити своє значення. Наприклад, нижче порога протікання, у разі, коли ТКО погано провідної фази β_2 набагато більше β_1 , можуть підібратися такі значення параметрів та концентрацій, що

$$\beta_1 h |\tau|^{-\varphi} > \beta_2, \quad \tau > \Delta. \quad (19.1.7)$$

Це означає, що нижче порогу протікання ефективний ТКО характеризуватиметься ТКО добре провідної фази і залежатиме від концентрації.

Аналогічним простим розрахунком можна визначити і ТКО середовищ із експоненційно широким спектром розподілу опорів.

19.2. Генерація третьої гармоніки

З питанням про ТКО тісно пов'язане питання про нелінійний температурний відгук – генерацію третьої гармоніки та $1/f$ -шума. У разі застосування струму з частотою ω наявність температурної залежності опору призводить до генерації третьої гармоніки (із частотою 3ω).

Для пояснення цього ефекту розглянемо спочатку однорідний випадок. З визначення ТКО (19.1.2) випливає, що відхилення питомого опору $\delta\rho$ пов'язане з відхиленням температури від середнього значення T_0 ($\delta T = T - T_0$), можна уявити так

$$\delta\rho = \beta\rho(T_0)\delta T, \quad (19.2.1)$$

де δT - пропорційно джоулеву тепловиділенню,

$$\delta T \approx \rho(T_0) j^2(\omega) F(\omega, T), \quad (19.2.2)$$

а $\rho(T_0) j^2(\omega)$ – джоулеве тепловиділення та $F(\omega, T)$ - функція, що характеризує відтік тепла.

Якщо до зразка докласти змінну напругу таким чином, що

$$j(\omega) = j_0 \cos \omega t, \quad (19.2.3)$$

то з (19.2.1) та (19.2.2) отримуємо

$$\delta\rho = \rho_0^2 \beta F(\omega, T) j_0^2 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (19.2.4)$$

де φ_0 - фаза, а також враховано, що при невеликих перегрівках ($\beta\delta T \ll 1$) $\rho(T) \approx \rho_0(1 + \beta\delta T)$, та введено позначення $\rho_0 = \rho(T_0)$.

Таким чином, при пропусканні струму з частотою ω опір змінюється згідно із законом $\cos^2 \omega t$, тобто містить другу гармоніку ($\cos^2 \omega t = 0.5 + 0.5 \cos 2\omega t$), що призводить до генерації третьої гармоніки. Справді, підставляючи $\delta\rho$ з (19.2.4) до $E(t) = (\rho + \delta\rho)j(\omega)$, після елементарних перетворень отримуємо, що в $E(t)$ містяться непарні гармоніки ω і 3ω .

Виконуючи такі ж обчислення для ефективного питомого опору $\langle E \rangle = (\rho_e + \delta\rho_e)\langle j \rangle$, де тепер

$$\delta\rho_e \langle j \rangle^2 = \langle j^2 \delta\rho \rangle, \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) \cos \omega t, \quad (19.2.5)$$

знаходимо

$$\langle j_0 \rangle^2 \delta\rho = \langle \beta \rho_0^2 j_0^2 \rangle F(\omega, T) \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (19.2.6)$$

Тут $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{r})$ - постійна частина локального питомого опору.

Підставляючи $\delta\rho_e$ в $\langle E \rangle = (\rho_e + \delta\rho_e)\langle j \rangle$ для амплітуди третьої гармоніки поля знаходимо

$$\langle E \rangle_{3f} \sim \frac{\langle \beta \rho_0^2 j_0^4 \rangle}{\langle j_0 \rangle}. \quad (19.2.7)$$

Більш зручно використовувати нормовану на $\langle j_0 \rangle^3$ характеристику третьої гармоніки у вигляді

$$B_{3f} = \frac{\langle E \rangle_{3f}}{\langle j_0 \rangle^3} \sim \frac{\langle \beta \rho_0^2 j_0^4 \rangle}{\langle j_0 \rangle^4}. \quad (19.2.8)$$

Як видно з (19.2.8), B_{3f} виражається через нормований четвертий струмовий момент і, з точністю до несуттєвих співмножників, збігається з концентраційною поведінкою $\rho_e^2 C_e$.

Так само, як і величина ВСГ $1/f$ -шуму C_e , величина B_{3f} може «уловлювати» відмінності у структурі неоднорідних середовищ, «недоступні» для ефективної провідності. Для таких середовищ (двофазних, сильно неоднорідних, $p \approx p_c$) для B_{3f} були отримані

концентраційні залежності вище та нижче порога протікання при кінцевому відношенні провідностей фаз, а також в області розмазування:

$$B_{3f} \approx \beta_1 \left(\frac{\rho_e}{\rho_1} \right)^{\frac{k}{t}+2} + \beta_2 h^2 \left(\frac{\rho_e}{\rho_1} \right)^{\frac{k'+2\varphi}{t}+2}, \quad p > p_c, \quad \tau \gg \Delta, \quad (19.2.9)$$

$$B_{3f} \approx \beta_1 \left(\frac{\rho_e}{\rho_1} \right)^{\frac{k}{t}+2} + \beta_2 h^2 \left(\frac{\rho_e}{\rho_1} \right)^{\frac{k'+2\varphi}{t}+2}, \quad p < p_c, \quad |\tau| \gg \Delta, \quad (19.2.10)$$

$$B_{3f} \approx \beta_1 \left(\frac{\rho_e}{\rho_1} \right)^{\frac{k}{t}+2} + \beta_2 h^2 \left(\frac{\rho_e}{\rho_1} \right)^{\frac{k'+2\varphi}{t}+2}, \quad |\tau| \ll \Delta, \quad (19.2.11)$$

же $h = \sigma_2 / \sigma_1 = \rho_1 / \rho_2$.

У (19.2.9)– (19.2.11) залежність B_{3f} від концентрації записана через функцію від концентрації $\rho_e = \rho_e(\tau)$. При цьому, звісно, залежності $\rho_e(\tau)$ (19.2.9)–(19.2.11) повинні відповідати зазначеним діапазонам зміни концентрації, наприклад, (19.2.9) $\rho_e(\tau) \approx \rho_1 \tau^{-t}$.

Також розглянуто генерацію третьої гармоніки в системах з експоненційно широким спектром опорів. Якщо знехтувати передекспоненційним множником, то

$$B_{3f} \sim \rho_e^3. \quad (19.2.12)$$

Аналогічно найвищим струмовим моментам (див. розділ 14) можна розглядати і генерацію вищих непарних гармонік $-B_{5f}, B_{7f}, \dots$. Їхні експериментальні дослідження в силу малості амплітуди, звичайно, складніші.

Контрольні запитання

1. Як визначається температурний коефіцієнт опору?
2. Як залежить температурний коефіцієнт опору від концентрації фаз у двофазному композиті?
3. Як можна зменшити температурний коефіцієнт опору композитного матеріалу?
4. Як можна пояснити генерацію третьої гармоніки у композитних матеріалах?
5. Як залежить коефіцієнт генерації третьої гармоніки від концентрації фаз у двофазному композиті?

Розділ 20. Нестійкість і хаос у макроскопічно неоднорідних середовищах із малою дисипацією

20.1. Дуальні середовища

Досі ми розглядали випадки, коли хоча б у одній із фаз провідність мала дійсну частину, не рівну нулю (див. розділ 11). Зокрема, для двовимірного середовища на порозі протікання А.М.Дихне було отримано точний результат (див. розділ 6):

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} . \quad (20.1.1)$$

Можливі випадки, коли реальна частина локальної провідності фаз мала (в ідеальному випадку дорівнює нулю), а уявні частини мають різний знак. Можна сказати, що середовище складається з індуктивностей та ємностей, що характеризуються магнітною та діелектричною проникністю. Одним із прикладів таких середовищ є плівки, що складаються з металевих острівців, розділених діелектричними областями. Металеві частини плівки мають індуктивність, а діелектричні області (часто це просто повітря) - ємнісні. У таких середовищах спостерігаються величезні неоднорідності локальних полів. При виведенні формули (20.1.1) (див. розділ 6) обмеження на значення провідності фаз не накладалися. Так, одна з фаз може являти собою ідеальний провідник – провідність σ при цьому має тільки уявну негативну частину (індуктивність), а друга – ідеальний діелектрик, провідність σ при цьому має тільки уявну позитивну частину (ємність). Таким чином, можна записати

$$\sigma_1 = -iy, \quad \sigma_2 = ix, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad (20.1.2)$$

де $x = \omega c$, $y = 1/\omega l$, а c і l – питомі ємність та індуктивність матеріалу (Ф/м^3 , Гн/м^3).

Тоді з (20.1.1) безпосередньо випливає

$$\sigma_e = \sqrt{xy} = \sqrt{c/l}. \quad (20.1.3)$$

Відповідно до (20.1.3) ефективна провідність такого середовища, складеного з уявних фаз з різними знаками, є дійсною, тобто середовище, складене з уявних опорів, які призводять до дисипації енергії, має дійсний еквівалентний опір, тобто поглинає енергію, в чому полягає парадокс!

Парадокс розв'язується в такий спосіб. На сітці з чисто уявними провідностями зв'язків, задача про розподіл потенціалу збігається із задачею про локалізацію Андерсона. Невелику дійсну добавку до уявної частини провідності металевої фази можна врахувати в рамках теорії збурень. За такого підходу було, зокрема, обчислено кореляційну довжину, як

виявилось пропорційна $1/\sqrt{\operatorname{Re} \sigma_{1,2}}$ (для двовимірного випадку). Таким чином, у разі чисто уявних фаз кореляційна довжина розходиться $\xi(\operatorname{Re} \sigma_{1,2} \rightarrow 0) \rightarrow \infty$. Іншими словами, на порозі протікання при $\operatorname{Re} \sigma_{1,2} = 0$ поняття ефективної провідності втрачає фізичний зміст.

Вище описаний парадокс добре проілюстрував той факт, що не можна вираз для ефективної провідності, отримане для випадку кінцевого кореляційного радіусу просто підставляти уявні провідності фаз різного знака. Необхідно додатково переконатись, що кореляційний радіус залишається скінченим.

Проілюструємо це з прикладу D-середовища, одержуваної процедурою перемішування (див. розділ 6). У «звичайному» випадку, при $\operatorname{Im} \sigma_1 = \operatorname{Im} \sigma_2 = 0$, як було показано (див. (6.1.26)), процедура перемішування швидко сходиться до ізотропного середовища зі значенням ефективної провідності:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \sqrt{\frac{p\sigma_1 + (1-p)\sigma_2}{(1-p)\sigma_1 + p\sigma_2}}. \quad (20.1.4)$$

При $p = p_c = 1/2$ вираз (20.1.4) зводиться до (20.1.1), а ітераційний процес (формула (6.1.25)) є добре відомим з прикладної математики спосіб обчислення квадратного кореня за методом Ньютона (див. розділ 6, Рис. 6.7). У разі провідностей з нульовою дійсною частиною та уявними частинами з однаковими знаками (наприклад, середовище складається з двох середовищ з різними діелектричними проникностями), з точністю до позначень, все залишається без змін. А ось у разі різних знаків уявних частин, тобто при $\operatorname{Re}(\sigma_1) = \operatorname{Re}(\sigma_2) = 0$ і $\operatorname{Im}(\sigma_1) \cdot \operatorname{Im}(\sigma_2) < 0$, ситуація змінюється кардинально (Рис. 20.1). Враховуючи що $\operatorname{Re}(\sigma_{\perp}^{(n)}) = \operatorname{Re}(\sigma_{\parallel}^{(n)}) = 0$ і вводячи аналогічні (20.1.2) позначення для $\sigma_{\perp}^{(n)}$ і $\sigma_{\parallel}^{(n)}$, отримуємо

$$\sigma_{\perp}^{(n)} = -i \cdot Y_n, \quad \sigma_{\parallel}^{(n)} = i \cdot X_n, \quad \operatorname{Im} X_n = \operatorname{Im} Y_n = 0. \quad (20.1.5)$$

При перемішуванні (розділ 6) маємо

$$\sigma_{\parallel}^{(n+1)} = p\sigma_{\parallel}^{(n)} + (1-p)\sigma_{\perp}^{(n)}, \quad \sigma_{\perp}^{(n+1)} = \frac{\sigma_{\parallel}^{(n)}\sigma_{\perp}^{(n)}}{(1-p)\sigma_{\perp}^{(n)} + p\sigma_{\parallel}^{(n)}}, \quad (20.1.6)$$

і $\sigma_{\parallel}^{(1)} = p \cdot \sigma_1 + (1-p) \cdot \sigma_2$, $\sigma_{\perp}^{(1)} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 / ((1-p) \cdot \sigma_1 + p \cdot \sigma_2)$, див. (6.1.18).

Ітераційний процес (20.1.6) має інваріантом (див.(6.1.19)) $\sigma_{\parallel}^{(n)}\sigma_{\perp}^{(n)} = J$, який для випадку (20.1.2) має вигляд

$$I = xy \frac{py - (1-p)x}{(1-p)y - px}. \quad (20.1.7)$$

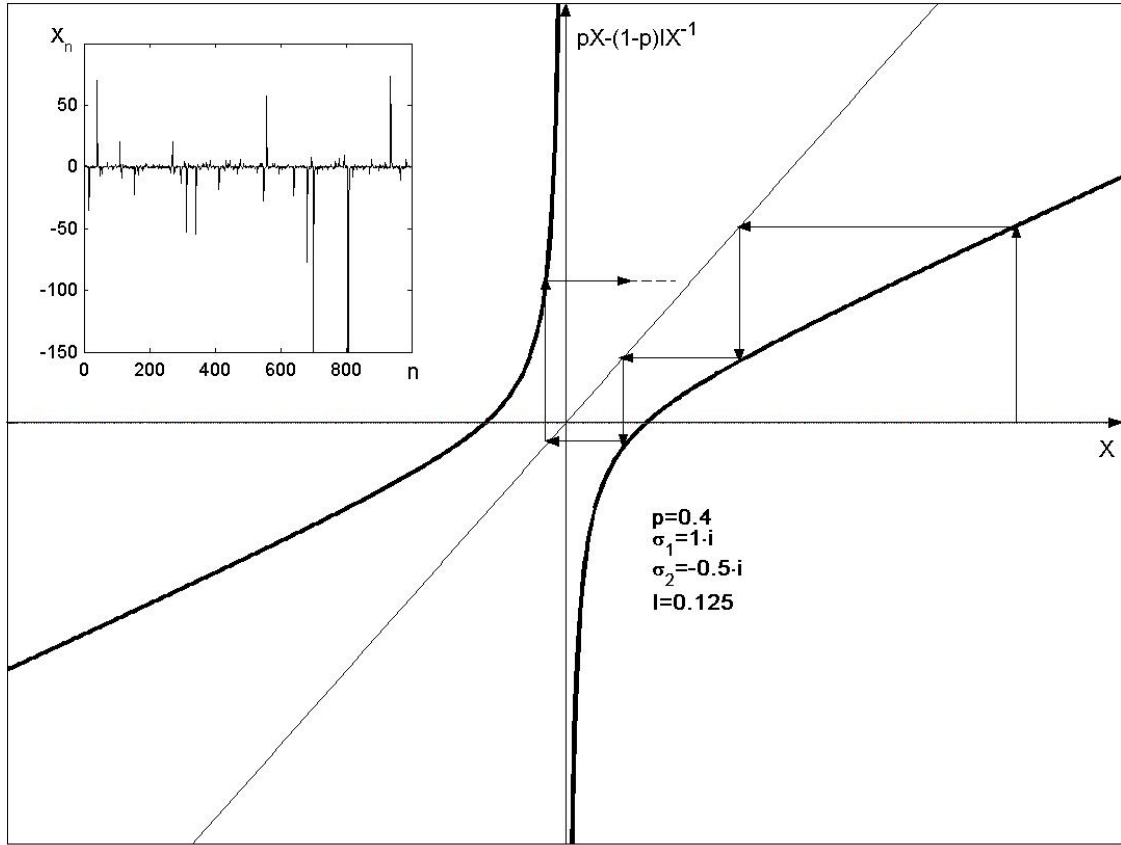


Рис. 20.1. Одновимірне відображення $x \rightarrow p \cdot x - (1-p)I/x$ при: $p = 0.4$ і $\sigma_1 = 1 \cdot i, \sigma_2 = -0.5 \cdot i$, $I = 0.125$; на врізці показаний ітераційний процес цих параметрів (порівняй з Рис. 6.5).

В термінах X_n (20.1.5) ітераційний процес (20.1.6) можна уявити так (пор. з (6.1.25))

$$X_{n+1} = p \cdot X_n - (1-p) \cdot \frac{J}{X_n}. \quad (20.1.8)$$

Нерухома точка ітераційного процесу (20.1.8) X^* формально рівна

$$X^* = \pm \sqrt{-J}. \quad (20.1.9)$$

За визначенням X_n (20.1.5) - $\text{Im}(X_n) = 0$, отже, нерухома точка X^* існує тільки за $J < 0$, це можливо при задоволенні будь-якої з двох, нижче наведених систем нерівностей:

$$\begin{cases} p \cdot y > (1-p) \cdot x, \\ (1-p) \cdot y < p \cdot x, \end{cases} \quad I, \quad \begin{cases} p \cdot y < (1-p) \cdot x, \\ (1-p) \cdot y > p \cdot x. \end{cases} \quad II. \quad (20.1.10)$$

Заштриховані області на Рис. 20.2 відповідає порожня безліч рішень системи (20.1.10) – нерухомої точки немає.

При $p = 1/2$ отримане середовище, з одного боку, є геометрично D -середовищем, а з іншого, як видно з Рис. 20.2 – нерухомої точки немає. Записавши у цьому випадку відображення (20.1.8) у вигляді $N(z) = (z - J/z)/2$, $\text{Im } J = 0$, $\text{Re } J > 0$, можна показати, що його множина Жюліа - J_N , що розділяє басейни тяжіння стійких нерухомих точок $\pm\sqrt{J}$, збігається з уявною віссю. На J_N відображення індукує одновимірне відображення, яке зводиться до (20.1.8) (при $p = 1/2$) і визначає динаміку на множині Жюліа. Відображення $N(Z)$ спряжене з відображенням $R(u) = u^2$, отриманим заміною $u = (z + \sqrt{J})/(z - \sqrt{J})$. При цьому уявна вісь (множина Жюліа) переходить у одиничне коло, динаміка на якому задається відображенням $r(\theta) = 2\theta \bmod 2$. Останнє, як відомо, породжує хаотичну динаміку.

Таким чином, при попаданні параметрів середовища в заштриховану область ітераційний процес не сходиться, а при $p = 1/2$ суворо має місце детермінований хаос. Зокрема це означає, що в такому середовищі відсутнє самоусереднення, тобто кореляційний радіус прагне нескінченності.

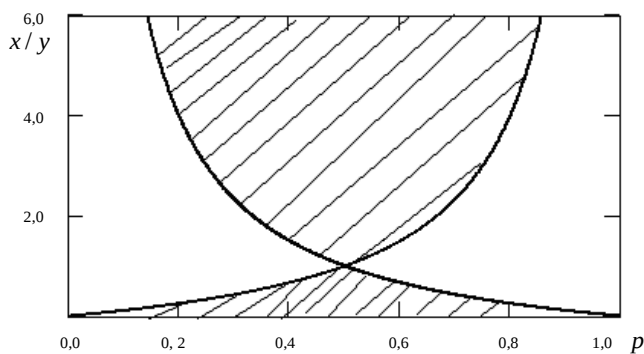


Рис. 20.2. Області нестійкості (заштриховані) процедури перемішування (20.1.8), в залежності від концентрації p першої фази та відношення провідностей фаз x/y .

Для сіткової реалізації D -середовищ відсутність певного значення σ_e в кінцевій сітці має місце при $\text{Im}(\sigma_1) \cdot \text{Im}(\sigma_2) < 0$. При значеннях концентрації вище p_c існує неперервний шлях від одного контакту до іншого (з « $-\infty$ » в « ∞ ») як «зліва направо» так і «знизу – вгору» по зв'язках, які є індуктивністю. Однак

ефективна провідність середовища в залежності від значень провідностей елементів сітки може бути як більшою, так і меншою за нуль, тобто являти собою як ємність, і індуктивність.

У сіткових середовищах, при концентрації не рівної порогової, співвідношення взаємності означає, що якщо ефективна провідність «основного» середовища має ємнісний тип ($\text{Im}(\sigma_e) > 0$), то "взаємної" - індуктивний ($\text{Im}(\sigma_e) < 0$). При концентрації, що прямує до порогової, нічого не змінюється і, зрештою, ефективні провідності «основного» і дуального середовищ залишаються з різними знаками. Разом з тим, у сіткових середовищах на порозі протікання, якщо вони є D -середовищами, завжди присутній хоча б один елемент (зв'язок) з провідністю, яка не дорівнює ні провідності першої фази, ні провідності другої (Рис.20.3). Провідність цього D -зв'язку дорівнює $\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$. У континуальному двофазному випадку D -середовищ ці зв'язки вироджуються у крапки (Рис. 6.2). Якщо такий D -зв'язок відсутній, то при $\text{Re} \sigma_{1,2} = 0$ і $\text{Im} \sigma_1 \text{Im} \sigma_2 < 0$ сітка не буде дуальною, зокрема кондактанси «зліва направо» та «знизу вгору» матимуть різні знаки – вздовж одного напрямку середовище буде «конденсатором», а вздовж іншого – «ємністю». А якщо D -зв'язок присутній, то середовище не є, строго кажучи, D -середовищем, що складається з двох фаз. Вплив цього зв'язку має бути тим меншим, чим більший розмір середовища. Останнє виявляється вірним при $\text{Im} \sigma_1 \text{Im} \sigma_2 < 0$ тільки для випадку $\text{Re} \sigma_{1,2} \neq 0$.

На Рис. 20.3. представлено одну з можливих реалізацій D -сітки скінченного розміру. Чорним позначені кондактанси z_1 , білим – z_2 . У центрі знаходиться D -зв'язок, який для задоволення сіткового варіанта перетворень симетрії (див. розділ 6) та умови $\tilde{\sigma}_e = \sigma_e$ повинен мати опір рівний $\sqrt{z_1 z_2}$. D -зв'язок (опір) є сіточним аналогом D -точок у континуальному випадку (див. Рис.6.2)

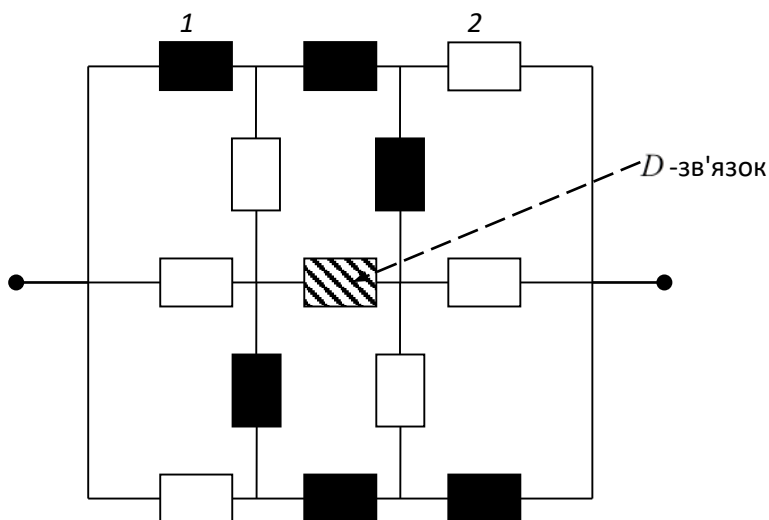


Рис. 20.3. Варіант реалізації D -сітки скінченного розміру:

Пояснимо тепер яким чином у D -середовищі при $\xi \rightarrow \infty$ і $\text{Re } \sigma_{1,2} = 0$ утворюється поглинання, тобто дійсне значення ефективної провідності. Відповідь полягає в $\xi \rightarrow \infty$ та існуванні флуктуацій провідності з ненульовою дійсною частиною. Легко переконатися, що додана до σ_1 або σ_2 , як завгодно мала, дійсна частина робить розглянутий вище ітераційний процес (20.1.8) стійким. Цей процес тепер збігається до дійсного значення $\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} = \sqrt{(\text{Re } \sigma_1 + i \text{Im } \sigma_1)(\text{Re } \sigma_2 + i \text{Im } \sigma_2)} \approx \sqrt{-\text{Im } \sigma_1 \text{Im } \sigma_2}$ (у якому можна знехтувати малими «затравочними» дійсними добавками). З рис.20.4 видно, як малі флуктуації виводять фазову точку (у просторі $\{\text{Re } \sigma - \text{Im } \sigma\}$) з осі $\text{Im } \sigma$, де вона робила хаотичні стрибки (Рис.20.1), на траєкторію, що сходиться до дійсної осі. "Фазові" траєкторії швидко сходяться до дійсної осі. Якщо знехтувати малими «затравочними», то траєкторії «сідають» на вісь $\text{Re } \sigma_n$.

Таким чином, існують одночасно два граничні переходи $\xi \rightarrow \infty$ і $\text{Re } \sigma_{1,2} \rightarrow 0$, причому їх не можна міняти місцями. При скінчених розмірах середовища відбуватиметься конкуренція між числом елементів (зв'язків, розміром середовища) та значенням дійсної частини провідності. Якщо число елементів «програє», то в середовищі немає самоусереднення і має місце дана випадкова реалізація. У такому, неоднорідному середньому середовищі, природно, існують великі просторові флуктуації джоулева тепловиділення, поглинання, вищих моментів розподілу струмів тощо.

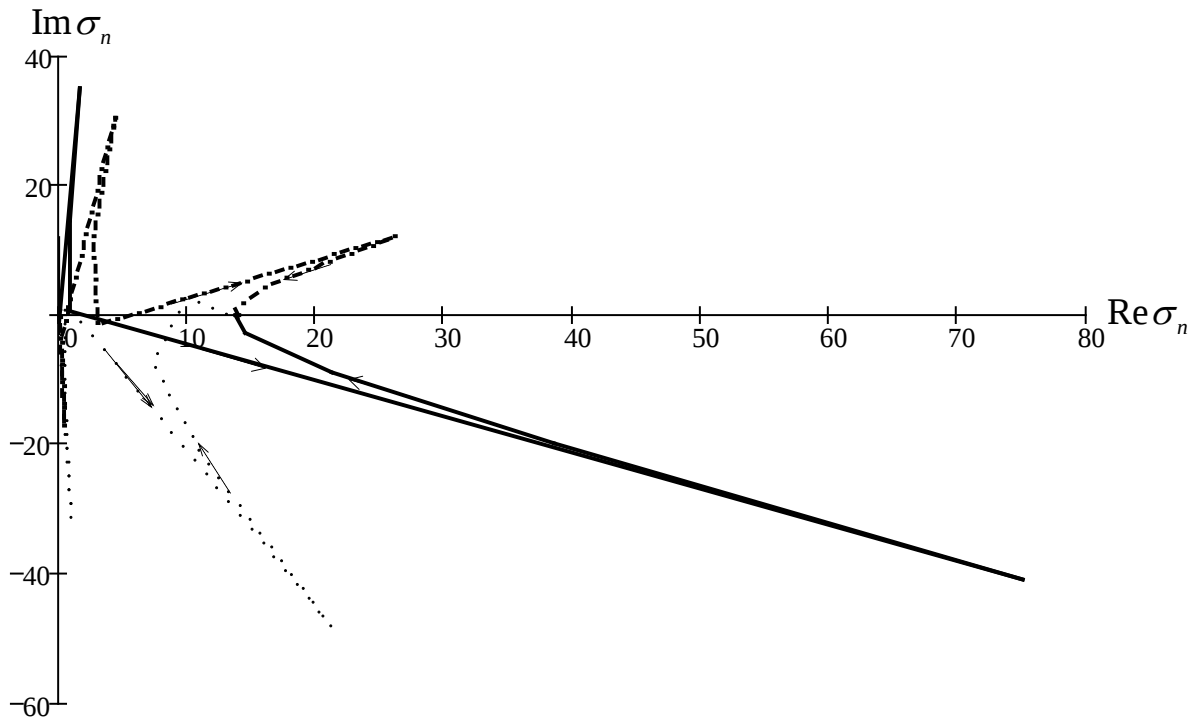


Рис. 20.4. «Фазові» траєкторії ітераційного процесу (20.8) у просторі $\{\text{Im } \sigma - \text{Re } \sigma\}$ при малих дійсних «затравочних» частинах провідності фаз:
штрихова - $\sigma_1 = 0.1 - 10 \cdot i$, $\sigma_2 = 0.1 + 20 \cdot i$; суцільна - $\sigma_1 = 0.056 - 6.667 \cdot i$, $\sigma_2 = 0.1 + 30 \cdot i$; точки - $\sigma_1 = 0.038 - 5 \cdot i$, $\sigma_2 = 0.1 + 40 \cdot i$.

20.2. Сходовий фільтр

Згаданий вище парадокс – «поява» дійсної частини опору в середовищі, що складається з елементів з чисто уявною частиною опору – є ще в найпростішій теорії ланцюгів у теорії сходового фільтра (LC-ланцюжка) і продовжує привертати увагу досі. Дивно, що навіть у «канонічних» підручниках з курсу загальної фізики, наприклад, можна зустріти діаметрально протилежні думки щодо існування дійсної частини опору сходового фільтра у певному діапазоні частот і тим самим протилежні пояснення роботи такого фільтра.

Розглянемо такий LC-ланцюжок докладніше. Імпеданс Z нескінченного сходового ланцюга (див. Рис. 20.5) можна знайти його послідовною побудовою, записавши вираз для Z_{n+1} у вигляді

$$Z_{n+1} = f(Z_n), \quad f(Z_n) = z_1 + \frac{Z_n \cdot z_2}{Z_n + z_2}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty, \quad (20.2.1)$$

де z_1, z_2 - комплексні опори - кондактанси елементів ланцюга.

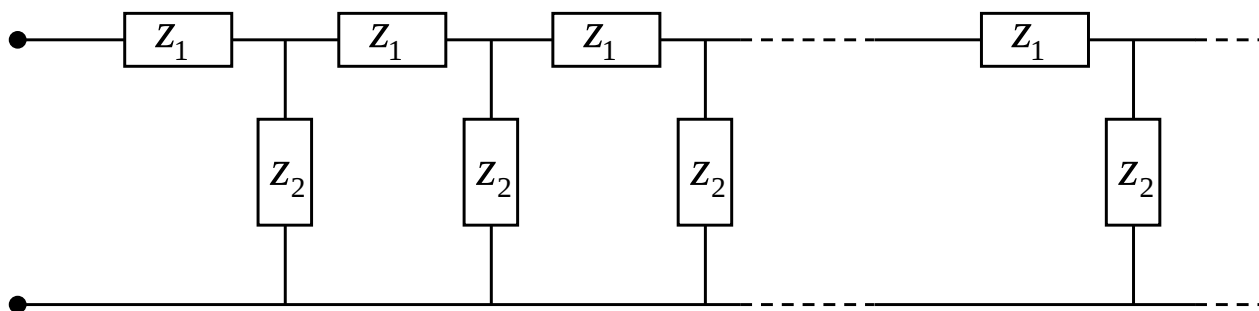


Рис. 20.5. Нескінченний сходовий LC -ланцюжок (фільтр): $z_1 = i \cdot \omega \cdot L$, $z_2 = 1/i \cdot \omega \cdot C$.

За будь-яких z_1 і z_2 завжди є нерухома точка Z^* , що визначається з рівняння $Z^* = f(Z^*)$

$$Z^* = \frac{z_1}{2} \pm \sqrt{\frac{z_1^2}{4} + z_1 z_2}. \quad (20.2.2)$$

Якщо нерухома точка Z^* є стійкою, то імпеданс Z нескінченного сходового ланцюжка

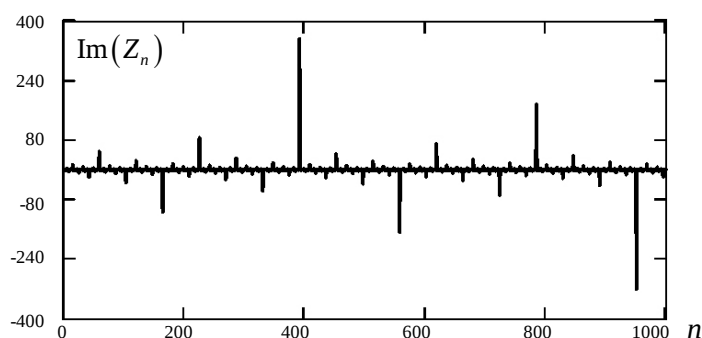


Рис. 20.6 Нескінченний сходовий LC -ланцюжок (фільтр):

$$z_1 = i \cdot \omega \cdot L.$$

існує і є межею $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = Z^*$. У

протилежному випадку межі

$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$ не існує (див. Рис. 20.6) і

немає сенсу говорити про імпеданс нескінченного ланцюжка.

Аналіз (20.2.1) показує, що

в ідеальному випадку чисто уявних імпедансів (ланцюжок

складається з ємностей та індуктивностей, з нульовими активними опорами). При певних значеннях z_1 і z_2 не існує стійкої нерухомої точки Z^* . Справді, нерухома точка Z^* ітераційного процесу (20.2.1) є стійкою, якщо

$$\left| df(Z_n) / dZ_n \right|_{Z_n=Z^*} < 1, \quad (20.2.3)$$

У даному випадку маємо

$$\left\| \frac{df(Z_n)}{dZ_n} \right\|_{Z_n=Z^*} = \left| \frac{1}{(1+Z^*/z_2)^2} \right| = \frac{4}{\left| \left(2+z_1/z_2 \pm \sqrt{(z_1/z_2)^2 + 4 \cdot z_1/z_2} \right)^2 \right|}, \quad (20.2.4)$$

Позначивши $t = -z_1/z_2$, перепишемо умову (20.2.3) як

$$F(t) = \frac{4}{\left| \left(2-t \pm \sqrt{t^2 - 4 \cdot t} \right)^2 \right|} < 1. \quad (20.2.5)$$

При дійсному t функція $F(t)$, як легко безпосередньо переконатися, поводить ся в діапазоні

$$0 \leq t \leq 4 \quad (20.2.6)$$

дещо несподівано – не залежить від t і точно дорівнює одиниці. Таким чином, нерівність (20.2.5) не виконується, і нерухома точка є нестійкою. Зазначимо, що за будь-якої маленької добавки дійсної частини до z_1 або z_2 умова стійкості виконується завжди, це можна пояснити тим, що система з $F(t) = 1$ перебуває на межі стійкості і досить як завгодно малого зсуву.

При $t < 0$ стійка точка є і вона має вигляд

$$Z^* = \frac{1}{2} \left(z_1 + \sqrt{z_1^2 + 4 \cdot z_1 z_2} \right), t < 0, \quad (20.2.7)$$

а при $t > 4$ стійка точка така:

$$Z^* = \frac{1}{2} \left(z_1 - \sqrt{z_1^2 + 4 \cdot z_1 z_2} \right), t > 4. \quad (20.2.8)$$

Відзначимо різні знаки перед коренем (20.2.7) і (20.2.8).

Розглянемо докладніше випадок чисто уявних z_1 і z_2 різних знаків, коли $z_1 = i \cdot \omega \cdot L$, $z_2 = 1/i \cdot \omega \cdot C$, тоді з (20.2.5) і (20.2.7) випливає, що при

$$\omega > \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{L \cdot C}}, \quad (20.2.9)$$

нерухома точка стійка і імпеданс нескінченного ланцюжка існує і, як і слід очікувати, є чисто уявним:

$$Z^* = i \cdot \left(\frac{\omega \cdot L}{2} + \sqrt{\frac{\omega^2 \cdot L^2}{4} - \frac{L}{C}} \right), \quad (20.2.10)$$

а при

$$\omega < \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (20.2.11)$$

нерухомої стійкої точки не існує і, отже, не можна говорити про імпеданс нескінченного ланцюжка. Тому твердження Фейнмана: "Дивлячись на нескінченну мережу із затискача a' , ми побачили б характеристичний імпеданс $Z_0 = \sqrt{L/C - \omega^2 \cdot L^2/4}$ " – не справедливо. І далі: "Для низьких частот імпеданс - чистий опір і тому поглинає енергію". Таким чином, пропускання фільтра для низьких частот згідно з Фейнманом, пов'язане з її поглинанням викликаним ($\text{Re } Z_0 > 0$) – дисипацією. Щоправда, далі у Фейнмана можна прочитати цілком справедливе твердження: «...виходить, що, коли джерело з'єднане з ланцюгом, воно повинно спершу забезпечити енергією першу індуктивність і ємність, потім другу, третю тощо. У ланцюгах подібного роду енергія неперервно і з постійною швидкістю відсмоктується з генератора і безперервно тече в ланцюг. Енергія запасается в індуктивностях та ємностях уздовж ланцюга». Отже, поглинання енергії фільтром є, а дисипації немає, тобто слід чітко розрізняти поглинання енергії середовищем LC -елементів з дисипацією та без дисипації. Справа в тому, що Z_0 знайдено з розв'язку квадратного рівняння у припущенні (неправильному), що імпеданс ланцюжка з n ланок (при $\omega < \omega_0$) сходиться. Було розглянуто поведінку Z_n при $n \rightarrow \infty$ залежно від значень z_1 і z_2 . Як і належно, при $z_1 = i\omega L$ і $z_2 = 1/i\omega C$ в діапазоні $\omega < \omega_0$ Z_n не сходиться. Діапазон $\omega < \omega_0$ є діапазоном пропускання фільтра. Пропуск фільтра в цьому діапазоні пов'язується з наявністю в системі дисипації. На запитання: «Як може рівняння (20.2.16) дати правильну відповідь на практиці, коли ми довели те, що воно неправильне?» можна відповісти: «...реальний індуктор завжди має внутрішній опір $r \neq 0$ ». У цьому випадку питання про збіжність Z_n при $n \rightarrow \infty$, звісно, відпадає. При існуванні як завгодно маленької дійсної частини у z_1 та/або z_2 характеристичний імпеданс $Z_0 = \sqrt{L/C - \omega^2 \cdot L^2/4}$ існує. Однак у реальних фільтрах зі скінченим, іноді дуже невеликим, числом елементів, мала дійсна частина в z_1 та/або z_2 очевидно, нічого змінити не може. Тому «існування» $Z_0 = \sqrt{L/C - \omega^2 \cdot L^2/4}$ не може залучатись при поясненні пропускання фільтра.

Насправді, для кінцевого фільтра з n ланок із чисто уявними елементами існують два розв'язки, що зв'язують напруги на вході $U(t) = U_0 \cos \omega t$ та виході $U_n(t)$. Перший, справедливий для діапазону пропускання, має вигляд

$$U_n(t) = U_0 \frac{\cos \beta / 2}{\cos(n+1/2)\beta} \cos \omega t, \quad \cos \beta = 1 - LC\omega^2, \quad \omega < \omega_0 = 2/\sqrt{LC}. \quad (20.2.12)$$

При $\omega \ll \omega_0$ $U(t) \approx U_0 \cos \omega t$, тобто фільтр із чисто уявних елементів зі скінченим, у тому числі й дуже малим, числом елементів, що пропускає сигнал без спотворень. Для інших частот з діапазону $\omega < \omega_0$ пропускання нерівномірне, проте «запирання» не настає.

Другий розв'язок у діапазоні $\omega > \omega_0$ має вигляд

$$U_n(t) = U_0 \cdot (-1)^n \cdot \frac{\exp\left(\frac{\xi}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right)}{\exp\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \xi\right) - \exp\left(-\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \xi\right)} \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (20.2.13)$$

де ξ знаходиться з $\cosh \xi = |1 - LC\omega^2 / 2|$.

З (20.2.13) відразу видно, що амплітуда сигналу на виході експоненційно зменшується зі збільшенням числа ланок n і за досить великої їх кількості можна записати

$$U_n(t) = U_0 \cdot (-1)^n \cdot \left(e^{\frac{\xi}{2}} - e^{-\frac{\xi}{2}} \right) \cdot e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \xi} \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (20.2.14)$$

тобто відбувається запирання сигналу, і фільтр не пропускає частоти вище критичних.

Якісне пояснення роботи фільтра у тому, що у області пропускання перебувають резонанси. У кінцевому ланцюжку частоти пропускання близькі до резонансів. У нескінченному – резонанси зливаються, і частоти пропускання лежать на резонансних частотах.

Контрольні запитання

1. Як визначається ефективна провідність середовища, що складається із двох фаз з однаковими знаками уявних частин провідностей?
2. Як визначається ефективна провідність середовища, що складається з двох фаз з різними знаками уявних частин провідностей?
3. Як пояснити роботу сходового фільтра?
4. Як пов'язані поняття стійкості та пропускання сигналу у сходовому фільтрі?

5. Якими особливостями характеризується поведінка сходового фільтра у випадку чисто уявних провідностей?

Розділ 21. Перколяційно-подібний опис піннінга вихорів Абрикосова

21.1. Піннінг вихорів Абрикосова

Одне з основних застосування надпровідників – використання їх як провідників струму з нульовим опором. Як правило, звичайні надпровідники (надпровідники першого роду) мають малими критичними полями, що не дозволяє пропускати через них великі струми. Надпровідники другого роду мають вищі критичні поля. Це пов'язано з тим, що у таких надпровідниках існує так званий змішаний стан. У цьому змішаному стані надпровідник пронизаний вихровими нитками – вихорами Абрикосова, що пропускають крізь надпровідник магнітне поле. Вихори Абрикосова є струмовими трубками, в середині яких (серцевина або кор вихора) провідник знаходиться у нормальному стані. Саме тому зовнішнє магнітне поле може проникати з одного боку надпровідного зразка на інший. Через кожен вихор Абрикосова проходить один квант магнітного потоку $\Phi_0 = \pi \hbar c / e$ (Рис. 21.1). Поза областю, що зайнята вихорами, надпровідник зберігає свої надпровідні властивості, по цій області і проходить транспортний (задається ззовні) струм. Якщо вихори нерухомі, то дисипація енергії не відбувається і надпровідник в цілому є ідеальним провідником з нульовим опором. Проте вихори можуть рухатися. Справа в тому, що при включенні транспортного струму з'являється сила (її прийнято називати силою Лоренца - F_L), що діє на вихор. Походження F_L пов'язано з тим, що, з одного боку вихору транспортний струм складається зі струмом вихору, а з іншого – віднімається (рис.21.1), тому сили, що діють на струм у магнітному полі B (силі Ампера), не компенсуються. Результируюча цих сил і так звана сила Лоренца $-F_L$, яка виражається через квант магнітного потоку Φ_0 транспортний струм у вигляді

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{c} \Phi_0 \mathbf{j} \times \mathbf{b}, \quad (21.1.1)$$

де $\mathbf{b}$ – одиничний вектор вздовж осі вихору.

При русі вихору зі швидкістю $\mathbf{v}$ на нього діють в'язкі сили:

$$\mathbf{F}_\eta = -\eta \mathbf{v}, \quad (21.1.2)$$

де η - деякий коефіцієнт в'язкості.

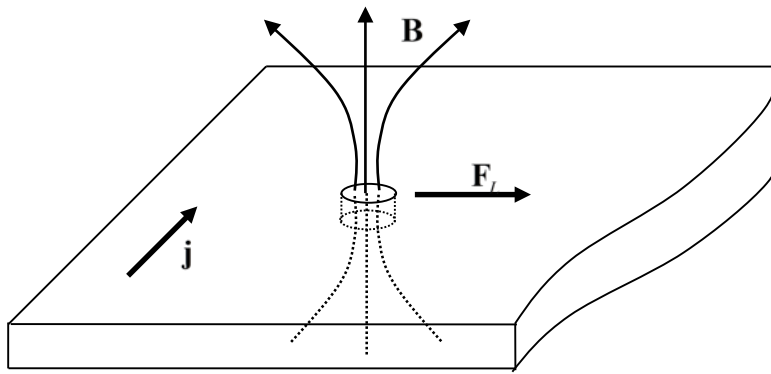


Рис. 21.1. Схематичне зображення вихору Абрикосова у надпровідній плівці: j - густина транспортного струму, заданого ззовні, F_L - сила Лоренца, що діє на вихор.

Вихори, що рухаються, дисипують енергію, потужність дисипації при цьому дорівнює $\mathbf{v}F_\eta$, фізична причина дисипації полягає в тому, що вихор, що рухається, переводить надпровідні ділянки проводника в нормальні, і навпаки.

Для того щоб зупинити рух вихорів і, тим самим, отримати ідеальний провідник, у якому не дисипує струм, потрібно закріпити вихори. Явище закріплення вихорів до певних місць надпровідника називається піннінг (пришпилювання, від англійського пін – шпилька). Зокрема, у високотемпературних надпровідниках (ВТНП) одним із видів центрів піннінгу є заряджені дефекти, що створюють електростатичний потенціал. Випадкове розташування таких дефектів створює випадковий розподіл сил електростатичного піннінга F_p .

Якщо розподіл сил піннінгу $D(F_p)$ вузьке, то зі збільшенням транспортного струму сила Лоренца F_L «переможе» силу піннінгу практично для всіх вихорів відразу і вся ґратка вихорів почне рухатися. Надпровідник при цьому перейде в резистивний стан, з'явиться опір, хоча при цьому частина проводника поза вихорами, як і раніше, перебуватиме в надпровідному стані.

21.2. Випадок широкого розподілу сил піннінгу

Якщо розподіл сил піннінгу широкий, то в міру збільшення транспортного струму буде збільшуватися площа тих ділянок, для яких $F_L > F_p$. Однак їх рух буде відбуватися тільки в обмеженому просторі та обмеженому часі, доки області з $F_L > F_p$ не зливаються і не утворюють нескінченний кластер. Це станеться за $F_L \geq F_{pc}$, де F_{pc} таке критичне значення сили піннінгу, що області $F_L \leq F_{pc}$ утворюють нескінченний кластер - зв'язкову структуру каналів (областей), що проходять через весь зразок. У цьому випадку при виконанні рівності

$$F_p + F_\eta = F_L, \quad (21.2.1)$$

можлива стаціонарна течія вихорів зі швидкістю

$$v = \frac{1}{\eta} (F_L - F_p) = \frac{1}{\eta} \left(\frac{j\Phi_0}{c} - F_p \right), \quad (21.2.2)$$

де передбачається, що сила в'язкості F_η достатня велика, щоб можна було знехтувати впливом ділянок прискорення та гальмування вихорів при їх взаємодії з центрами піннінгу. Крім того, при розгляді області досить слабких магнітних полів ($H \ll H_{c2}$), можна знехтувати силами взаємодії між вихорами, оскільки їх мало (режим «одночастинкового» піннінгу).

Густина критичного транспортного струму j_c визначається критичною силою піннінгу F_{pc} (21.1.1) та (21.1.3) у вигляді

$$j_c = cF_{pc} / \Phi_0, \quad (21.2.3)$$

Розглянемо рух вихорів при транспортному струмі, близькому до критичного:

$$\tau_j = \frac{j - j_c}{j_c} \ll 1, \quad (21.2.4)$$

Назвемо, як завжди в теорії протікання, ті області плівки, в яких $F_L > F_p$, тобто там, де вихори можуть рухатися – "чорною" фазою. Тоді концентрація «чорної» фази дорівнює

$$p = \int_0^{F_p} D(F_p) dF_p, \quad (21.2.5)$$

і для однорідного розподілу сил піннінгу, коли $D(F_p) = 1/F_{pm} = \text{const}$, $F_p \in [0, F_{pm}]$, де F_{pm} – максимальне значення сили піннінгу у плівці. При будь-якому іншому гладкому розподілі $\tau = (p - p_c)/p_c$ і $\tau_j = (j - j_c)/j_c$ пропорційні одне одному, а в разі однорідного розподілу вони співпадають.

Для визначення ВАХ резистивного стану ВТНП плівки необхідно знайти потужність дисипації енергії вихорами. Вважаємо, що основну енергію вихори дисипують у головному елементі перколяційної структури вище порогу протікання – містку. На Рис. 21.2 наведено схему частини перколяційної структури вище за поріг протікання. Необхідно врахувати, що сила Лоренца спрямована завжди в одну сторону (на осі ox на Рис. 21.2) і, отже, не може «проштовхнути» вихор через ділянку BC . Це означає, що необхідно збільшувати транспортний струм доти, доки ділянки нескінченного кластера, що з'являються (одна з них

BD показана на Рис. 21.2 штриховою лінією) не дозволяють вихору пройти нескінченний кластер від початку до кінця (від A до G). При розрахунку дисипації, звісно, необхідно враховувати ті частини нескінченного кластера, у яких вихори рухаються вздовж сили Лоренца – $ABDG$. Таким чином, звичайна перколяційна модель має бути модифікованою. Найбільш близькою до потрібної нам модифікації є так звана модель діодної перколяції, або точніше fully directed percolation (FDP). Діодним моделям перколяції присвячена велика кількість робіт.

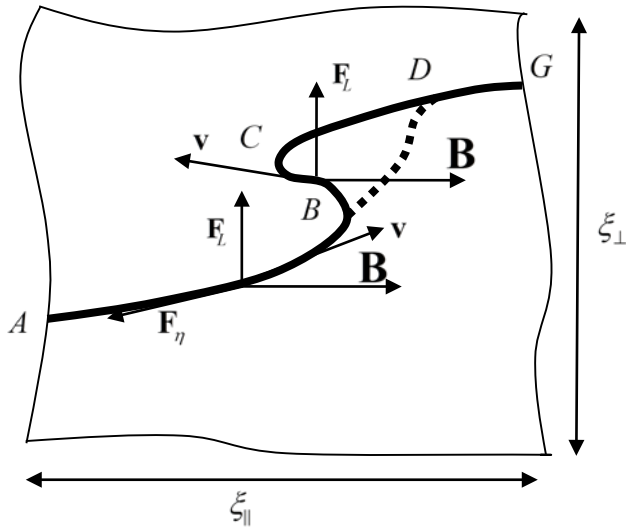


Рис.21.2. Схема частини перколяційної структури, по якій протікає вихор Абрикосова.

Розглянемо квадратну ґратку. При діодній перколяції, на ґратках розкидають випадково «чорні» та «білі» опори та діоди, останні пропускають струм лише в одному напрямку. Є багато варіантів таких моделей: 1) ґратка складається тільки з непровідних зв'язків і діодів; 2) є провідні зв'язки; 3) напрямки діодів, що розкидаються, випадковий; 4) не випадковий тощо. Нам потрібний той варіант, що показано на рис. 21.3 – струм проводять тільки діоди, в середньому вони направлені в один бік, туди ж, куди і сила Лоренца, локально – діоди направлені по діагоналі вгору або вниз. У цьому варіанті FDP , в концентрацію провідних діодів не входять ділянки типу BC на Рис. 21.2, тому задача FDP (Рис. 21.3) і задача про протікання вихорів, хоч і близькі, але не тотожні одна одній, і подальший розрахунок потрібно розуміти як оцінку критичного індексу

Критичні індекси FDP -моделі відрізняються від таких у звичайній перколяційній задачі, мало того, індексів кореляційної довжини тепер два: $\nu_{\parallel}$ – для кореляційної довжини $\xi_{\parallel}$ вздовж середнього напрямку провідності діодів – ox , і $\nu_{\perp}$ – для кореляційної довжини $\xi_{\perp}$ поперек напрямку провідності діодів – oy :

$$\xi_{\parallel} = a_0 \tau^{-\nu_{\parallel}}, \quad \xi_{\perp} = a_0 \tau^{-\nu_{\perp}}, \quad (21.2.6)$$

Залежність ефективної провідності від τ у такої моделі має звичайний вигляд, але з іншим критичним індексом:

$$\sigma_e = \sigma \tau^{t_+}, \quad (21.2.7)$$

де σ – провідність діода в напрямі пропускання струму.

Для двовимірного випадку $\nu_{\parallel} \approx 1,73$, $\nu_{\perp} \approx 1,097$, $t_+ \approx 0,63$.

Довжина містка у *FDP*-моделі знаходиться наступним чином. З одного боку, опір кореляційного об'єму з одиничною товщиною має вигляд

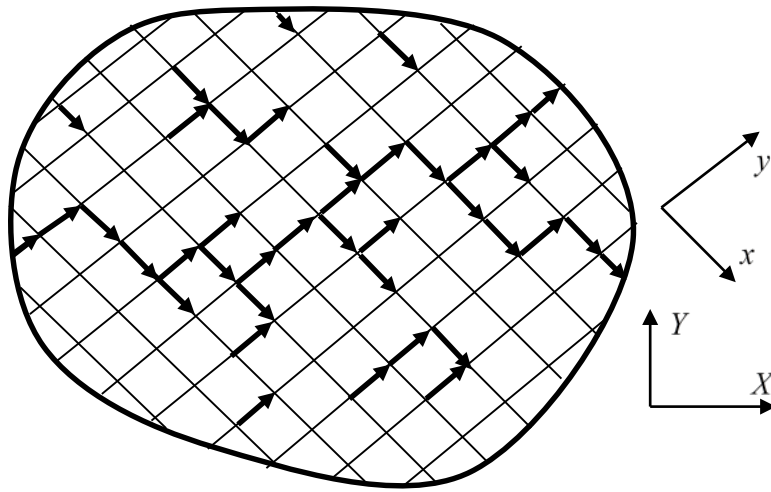


Рис. 21.3. Варіант діодної перколяції – fully directed percolation (*FDP*): Непровідні зв'язки позначені тонкими лініями. Стрілки позначають діод та напрямок протікання струму в діодах. Всі діоди спрямовані або вдовж OX , або OY , осі OX і OY ті ж, що на Рис. 21.2.

$$R = \frac{1}{\sigma_e} \frac{\xi_{\parallel}}{\xi_{\perp}}, \quad (21.2.8)$$

з іншого – цей опір визначається опором містка завдовжки $l = a_0 N_1^+$, $N_1^+ \approx \tau^{-\alpha_1^+}$

$$R = \frac{1}{\sigma} N_1^+ = \frac{1}{\sigma} \tau^{-\alpha_1^+}, \quad (21.2.9)$$

Звідки з урахуванням (21.2.7) маємо

$$\alpha_1^+ = t_+ - \nu_{\perp} + \nu_{\parallel}, \quad (21.2.10)$$

Зауважимо, що для d -вимірного випадку $\alpha_1^+ = t_+ - (d-1)\nu_{\perp} + \nu_{\parallel}$. Таким чином, довжина містка

$$l \approx a_0 \tau^{-\alpha_1^+}, \quad (21.2.11)$$

Енергія Q_1 , що дисипується одним вихором за час t_0 проходження містка, має вигляд

$$Q_1 = \int_0^{t_0} F_\eta v dt = l \int_0^{t_0} (F_L - F_p) D(F_p) dF_p, \quad (21.2.12)$$

де t_0 - час проходження,

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \int_0^l \frac{dv}{v} = \eta l \int_0^{F_{pc}} \frac{D(F_p)}{F_L - F_p} dF_p, \quad (21.2.13)$$

Для однорідного розподілу $D(F_p) = 1/F_{pm}$ та з (21.2.12) та (21.2.13) отримаємо

$$Q = \frac{lF_p^2}{2F_{pm}}, t_0 = \frac{\eta l \ln(1/\tau)}{F_{pm}}, \quad (21.2.14)$$

де враховано, що $j \approx j_c$.

Концентрація вихорів дорівнює B/Φ_0 , а їх кількість n у містку

$$n = \frac{a_0 l B}{\Phi_0} \sim \frac{a_0 B}{\Phi_0} \tau^{-\alpha_1^+}, \quad (21.2.15)$$

Отже, з одного боку, потужність дисипації енергії всіх вихорів на площі $\xi_{\parallel} \times \xi_{\perp}$ порядку

$$Q = \frac{nQ_1}{t_0} = -\frac{a_0 B F_p^2 l}{2\Phi_0 \eta \ln \tau}, \quad (21.2.16)$$

з іншого – переміщення вихорів призводить до появи електричного поля, та Q можна записати як джоулеву дисипацію:

$$Q = j E \xi_{\parallel} \xi_{\perp}, \quad (21.2.17)$$

З виразів (21.2.6), (21.2.11) та (21.2.17) знаходимо

$$E = \frac{a_0 B F_{pc}^2}{2\Phi_0 \eta j_c \xi_{\parallel} \xi_{\perp} \ln(1/\tau)} = A \ln \left(\frac{j - j_c}{j_c} \right) \left(\frac{j - j_c}{j_c} \right)^{\gamma}, \quad (21.2.18)$$

де A – деяка, несуттєва для визначення критичного індексу константа, а критичний індекс має вигляд

$$\gamma = \nu_{\perp} - \nu_{\parallel} - \alpha_1^+ = 2\nu_{\perp} - t_+, \quad (21.2.19)$$

та з урахуванням числових значень $\nu_{\perp}$ і t_+ запишемо

$$\gamma = 1,6. \quad (21.2.22)$$

Експериментальні дослідження резистивного стану ВТНП дійсно вказують на степеневу залежність напруги від струму на початкових ділянках ВАХ. При цьому показник γ варіюється в широких межах. У відносно слабких полях ($H \leq 0.2$ Тл) числові значення γ лежать в інтервалі $\gamma = 1.3 - 1.5$.

Перколяціоподібний опис пінінгу був застосований також для опису резистивного стану ВТНП плівки у змінних (за знаком) магнітних полях. У разі змінного магнітного поля, а, отже, і змінної за часом і напрямком сили Лоренца, для переходу надпровідника в резистивний стан не обов'язкова наявність нескінченного кластера, вихори дисипують енергію, рухаючись «туди-сюди» кінцевими ділянками кластера.

Контрольні запитання

1. Що таке пінінг вихорів Абрикосова?
2. Як сила Лоренца впливає на рух вихрів Абрикосова?
3. Які особливості моделі діодної перколяції, яка використовується для опису пінінга вихорів Абрикосова?
4. Який зв'язок між моделлю діодної перколяції та задачею про протікання вихорів Абрикосова?

Розділ 22. Локалізація Андерсона у перколяційній структурі

22.1. Локалізація Андерсона

У металах за низьких температур стає помітною інтерференційна поправка до провідності $-\delta\sigma$. Ця поправка зобов'язана наявності ненульової ймовірності існування траєкторій електрона із самоперетинами. Поправка $\delta\sigma$ при $T \rightarrow 0$ збільшується і, коли $\delta\sigma/\sigma \approx 1$, настає локалізація електронів, зразок перестає проводити струм, відбувається перехід метал $\rightarrow$ діелектрик. Таку локалізацію (у межі $T = 0$) прийнято називати андерсонівською локалізацією, а сам метал «перетворений» на діелектрик – андерсонівським діелектриком (AD).

Залежність поправки $\delta\sigma/\sigma$ від розміру зразка різна для трьох-, дво-і одновимірних випадків. Надалі нам потрібен лише одновимірний випадок. Одномірність тут означає, що поперечний переріз зразка b набагато менший L_ϕ , де L_ϕ – характерна довжина збою когерентності амплітуди хвильової функції електрона (йдеться про макроскопічні розміри). Для такого одновимірного зразка локалізація настає, коли його довжина L стає більше критичної L_c ,

$$L_c = l \left(\frac{b}{\lambda} \right)^2, \quad (22.1.1)$$

де l – довжина вільного пробігу, λ – довжина хвилі електрона.

При $L > L_c$ зі збільшенням L кондактанс зразка G падає експоненційно,

$$G \sim e^{-L/L_c}, \quad (22.1.2)$$

аналогічно падає і безрозмірний кондуктанс $y = G/G_0$, де $G_0 = e^2/(\pi^2 \hbar)$, e – заряд електрона.

Таким чином, при збільшенні довжини такого металевого дроту, вона, зрештою, перестає бути провідником, перетворюючись на AD .

22.2. Перехід метал – андерсонівський діелектрик у перколяційній структурі

Було розглянуто вплив андерсонівської локалізації на перехід метал – діелектрик у перколяційній структурі, коли зв'язок (довжиною) a_0 є металевим і характеризується довжиною вільного пробігу l або, що те саме, безрозмірним кондуктансом y ($y \sim 1/l$). Непровідні зв'язки є звичайним (класичним) діелектриком. Для провідного зв'язку існує таке

значення y_{c0} , що у випадку $y > y_{c0}$ зв'язок не проводить, переходячи з металевого стану в стан AD . Дійсно, збільшення y означає падіння довжини вільного пробігу, а отже, і зменшення L_c – (22.1.1). Коли L_c стане менше довжини зв'язку a_0 , настане андерсонівська локалізація. Таким чином, з одного боку, при $p=1$ всі зв'язки в ґратці металеві, але вона перестане проводити струм при $y > y_{c0}$. З іншого боку, при $p \leq p_c$ ґратка перестане проводити струм з тієї причини, що зникне зв'язаний шлях металевими зв'язками. Загальний випадок довільної концентрації наведено на Рис. 22.1, де суцільна лінія $-y_c = y_c(p)$ – критичне значення безрозмірного кондактансу, що розділяє металеву фазу – M та AD – андерсоновського діелектрика при $T=0$. CD – класичний діелектрик, p – концентрація металевих зв'язків. Провідність другої фази – $\sigma_2 = 0$. Пунктирна лінія поділяє провідний та непровідний ($p < p_c$) стан системи при скінчених температурах, коли ефекти локалізації несуттєві.

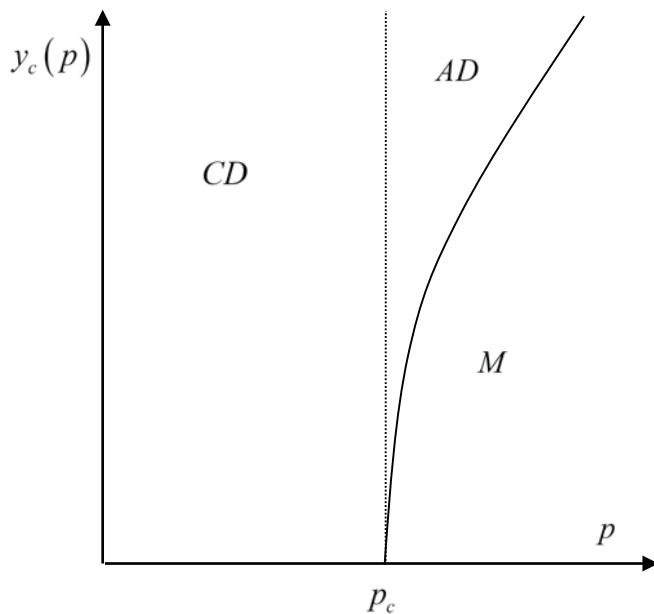


Рис. 22.1. Фазова діаграма в перколяційних ґратках з урахуванням локалізації Андерсона:

Було показано, що $y_c = y_c(p)$ обертається в нуль (при $p \rightarrow p_c$) степеневим чином і характеризується критичним індексом. Фізична причина такої поведінки $y_c(p)$ пов'язана з тим, що поблизу порога протікання головним елементом перколяційної структури є місток – одномірний шлях для струму, коли його довжина (точніше – довжина його неперервної частини) перевищує L_c і настає андерсонівська локалізація.

Для розрахунку критичного індексу врахуємо, що згідно з першим шаблоном ІМ, довжина містка має вигляд

$$L \approx a_0 (p - p_c)^{-(t_3 - \nu_3)}. \quad (22.2.1)$$

Тоді з умови $L_c \approx L$ та (22.1.1) отримуємо

$$a_0 (p - p_c)^{-(t_3 - \nu_3)} \approx l \left(\frac{b}{\lambda} \right)^2. \quad (22.2.2)$$

З врахуванням того, що $u \sim 1/l$, знаходимо

$$y_c(p) \sim (p - p_c)^A, \quad (22.2.3)$$

де

$$A = t_3 - \nu_3, \quad (22.2.4)$$

Контрольні запитання

1. Що таке локалізація Андерсона?
2. Які особливості локалізації Андерсона у перколяційних структурах?

Література

Основна:

1. Transport Processes in Macroscopically Disordered Media: From Mean Field Theory to Percolation: book/ A.A. Snarskii, I.V. Bezsudnov, V.A. Sevryukov [et al]. – New York: Springer New York, 2016 – 280 p. – ISBN: 978-1-4419-8290-2.
2. Shklovskii, B. I. Electronic Properties of Doped demiconductors: book/ B. I. Shklovskii, A.L. Efros – New York: Springer Science & Business Media, 2013. – Vol. 45. – 395p.
3. Stauffer D. Introduction to Percolation Theor: booky/ Dietrich Stauffer, Ammon Aharony – 2nd ed. – London: Taylor&Francis, 1992. – 181p. – ISBN: 978-1315274386.
4. Torquato S. Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties: book/ Salvatore Torquato. – New York: Springer New York, 2002. – 701p. – ISBN: 978-0387951676.

Додаткова:

1. Abrikosov A. A. Fundamentals of the Theory of Metals: book/ A. A. Abrikosov. –Mineola: Courier Dover Publications, 2017. – 640p. – ISBN: 978-0486819013.
2. Sahimi M. Application to Percolation Theory: book/ M. Sahimi. – London:Taylor&Francis,1994. – 258p. – ISBN: 978-0429080449.
3. Milton, G. W. The Theory of Composites: book/ Graeme W. Milton. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2022. -759p. – ISBN: 978-0511613357.
4. Mathematical Tools for Physicists: book/ [ed. by M.Grinfeld]. – 2nd ed. – John Wiley & Sons, 2014 – 632p. – ISBN: 978-3-527-41188-7.
5. Jensen H. J. Complexity Science: The Study of Emergence: book/ Henrick Jeldtoft Jensen. – Cambridge: Cambridge University Press, 2022. – 458p. – ISBN: 978-1108834766.
6. Балагуров Б.Я. Электрофизические свойства композитов: монография /Б.Я.Балагуров. – Moscow: URSS, 2015. – 751с.
7. Snarskii A.A. Effective medium theory for the elastic properties of composite materials with various percolation thresholds/ A. A. Snarskii, M. Shamonin, P. Yuskevich. – Basel: Materials. – 2022. – Vol 13. – №5. – p.1243-1265. – doi: [10.3390/ma13051243](https://doi.org/10.3390/ma13051243).
8. Snarskii, A.A. Theoretical method for calculation of effective properties of composite materials with reconfigurable microstructure: Electric and magnetic phenomena/ A.A. Snarskii, D. Zorinets, M. Shamonin, V.M. Kalita. – Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2019. – Vol. 535. – p. 122467-122470. – doi: [10.1016/j.physa.2019.122467](https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.122467)
9. Snarskii A.A. Effect of magnetic-field-induced restructuring on the elastic properties of magnetoactive elastomers/A.A. Snarskii, M. Shamonin, P. Yuskevich. – Elsevier: Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2021. –Vol. 517. – p. 167392-167397. – doi: [10.1016/j.jmmm.2020.167392](https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2020.167392)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

А.О. Снарський, І.М. Іванова, В.В. Федотов

ОСНОВИ ТЕОРІЇ НЕВПОРЯДКОВАНИХ СЕРЕДОВИЩ