

$$m\vec{a}_C = \vec{F}$$

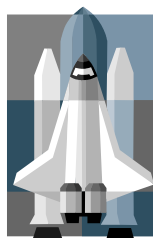


$$F_r = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$



$$\frac{n_1}{n_2} = -\frac{r_2}{r_1}$$

.....



$$\frac{dH}{dt} = M_{z3}$$

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА.
ДИНАМІКА ТА АНАЛІТИЧНА МЕХАНІКА:
КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів спеціальності:*

113 «Галузеве машинобудування»;

спеціалізацій: «Інжиніринг, обладнання та технології хімічних та нафтопереробних виробництв»; «Інжиніринг, обладнання та технології целюлозно-паперових виробництв»; «Інжиніринг, комп'ютерне моделювання та проектування обладнання виробництв полімерних і будівельних матеріалів та виробів»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Теоретична механіка. Динаміка та аналітична механіка: Конспект лекцій [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності: 113 «Галузеве машинобудування»; спеціалізацій: «Інжиніринг, обладнання та технології хімічних та нафтопереробних виробництв»; «Інжиніринг, обладнання та технології целюлозно-паперових виробництв»; «Інжиніринг, комп'ютерне моделювання та проектування обладнання виробництв полімерних і будівельних матеріалів та виробів»: / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Н.І. Штефан, В.М. Федоров. – Електронні текстові дані (1 файл: 11,2Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № від.....) за поданням Вченої ради механіко-машинобудівного інституту (протокол № ... від р.)

Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. ДИНАМІКА ТА АНАЛІТИЧНА МЕХАНІКА: КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів спеціальності: 113 «Галузеве машинобудування»

Укладачі: *Штефан Наталія Іллівна*, канд. техн. наук, доц.
Федоров Володимир Миколайович, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний
редактор *Алексейчук О.М.*, канд. техн. наук, доц.

Рецензент *Степанюк А.Р.*, канд. техн. наук, доцент кафедри МАХНВ ІХФ
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Запропонований конспект лекцій створено для вивчення дисципліни «Теоретична механіка» в другому семестрі вивчення дисципліни згідно навчальної програми та робочої програми кредитного модуля. В ньому систематизовано викладені основні поняття ,закони та теореми динаміки , а також принципи аналітичної механіки; методи вивчення умов рівноваги і руху реальних фізичних об'єктів, які моделюють у вигляді матеріальної точки, твердого тіла і механічної системи. Також розглянуті способи визначення динамічних характеристик тіл та механічних систем. Поряд з цим продемонстровано багато прикладів розв'язування задач. Цей конспект лекцій буде корисним не тільки студентам, які вивчають теоретичну механіку, а й молодим викладачам.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021

Розділ 4. Динаміка

Тема 4.1. Динаміка вільної матеріальної точки

Динаміка – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних об'єктів з урахуванням сил, що діють на ці об'єкти.

В основі теоретичної механіки лежить невелика кількість гіпотез, пов'язаних з введенням ньютонівських уявлень про простір і час, поняття ІСВ, сили, маси, а також самі закони Ньютона, отримані в результаті узагальнень спостережень уповільнено плинучих рухів макроскопічних тіл.

В механіці постулюється наявність такої системи відліку, в якій ізольована матеріальна точка знаходиться у стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху як завгодно довго. Така система відліку називається *інерціальною* (ІСВ) або *галілеєвою*.

Системи відліку, в яких вказані властивості не зберігаються, називаються *неінерціальними*.

Припущення про існування ІСВ складає зміст першого закону Ньютона (закону інерції)

I-й закон Ньютона: *будь-яке тіло продовжує утримуватись в стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху доки і оскільки воно не примушується прикладеними силами змінити свій стан.*

Цей закон віддзеркалює одну з найважливіших властивостей об'єктивної реальності – властивість *інертності*, яка полягає в тому, що ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху як завгодно довго.

Таким чином самочинна зміна руху (спокою) матеріальної точки неможлива. Рух точки може змінитися тільки в результаті її взаємодії з іншими тілами (полями). Наявність такої взаємодії викликає відхилення руху матеріальної точки від рівномірного і прямолінійного, тобто виникає деяке прискорення відносно ІСВ.

Наявність абсолютного прискорення точки (відмінного від нуля) свідчить про те, що на цю точку діють інші тіла (поля).

Інтенсивність і напрямленість цієї дії характеризується силою.

Сила – це векторна міра механічного прояву фізичної дії на матеріальну точку інших тіл. Поняття сили дає можливість вводити кількісні співвідношення, які виражають характер механічної взаємодії тіл.

Перед тим як сформулювати II-й закон Ньютона, слідуючи Ньютону введемо ще два фундаментальних поняття механіки – масу точки та її кількість руху.

Масою (m) матеріальної точки називається фізична величина, яка є мірою її інертних і гравітаційних властивостей. Під інертними розуміють властивості об'єкту чинити опір при спробах змусити його рухатися, або змінити величину чи напрямок його швидкості. Під гравітаційними розуміють властивості взаємного тяжіння часток об'єктивної реальності.

Кількістю руху матеріальної точки називається векторна величина, що дорівнює добутку маси точки на її швидкість

$$\vec{q} = m\vec{v}.$$

II-й закон Ньютона: *зміна кількості руху матеріальної точки пропорційна силі, що до неї прикладена, і напрямлена вздовж тієї ж прямої, по якій ця сила діє.*

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}).$$

Враховуючи вираз кількості руху, останню формулу можна переписати у вигляді

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}),$$

звідки за умови $m = \text{const}$ матимемо

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) \Rightarrow m\vec{a} = \vec{F}. \quad (*)$$

У разі, якщо одна з величин у виразі (*) відома, тоді II-й закон Ньютона у формі (*) стає визначальним співвідношенням, тобто таким, в результаті розгляду якого можна знайти іншу невідому величину. На цьому базуються *дві задачі динаміки*.

9. Динаміка вільної матеріальної точки

Матеріальна точка називається *вільною*, якщо в довільний момент часу можна довільним чином задати її радіус-вектор $\vec{r}$ і швидкість $\vec{v}$.

Покажемо диференціальні рівняння руху матеріальної точки при трьох способах задання руху (векторному, координатному та натуральному).

9.1. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

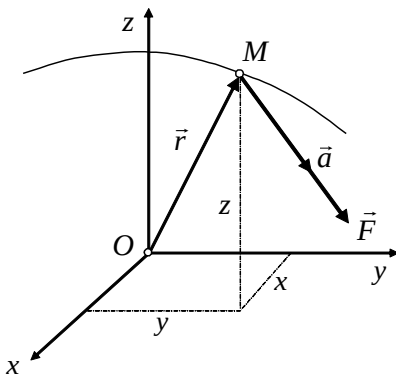
Якщо рух точки задано **векторним способом**, тобто відомий радіус-вектор $\vec{r}$ як функція часу (див. рис. 9.1), а саме $\vec{r} = \vec{r}(t)$, тоді прискорення $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, а з виразу (*) матимемо

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\left(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right) \quad (9.1)$$

- динамічне рівняння руху матеріальної точки у векторній формі.

Розглянемо матеріальну точку, рух якої задано у **координатній формі**.

Для цього введемо нерухому систему координат $Oxyz$ (рис. 9.1). Відомі координати точки у функції часу, тобто



$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

звідки

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}.$$

Якщо спроектувати вираз (9.1) на осі цієї системи координат, то отримаємо наступні співвідношення:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{cases} \quad (9.2)$$

Рис. 9.1. Задання руху точки векторним та координатним способами

Це є *динамічні рівняння руху вільної матеріальної точки в координатній формі*.

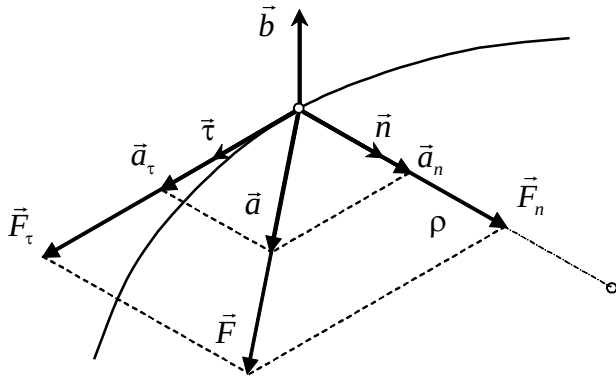
У разі якщо точка рухається в площині (наприклад, Oxy), тоді динамічними рівняннями її руху будуть наступні вирази:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \\ m\ddot{y} = F_y(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}). \end{cases} \quad (9.3)$$

Якщо точка рухається вздовж однієї прямої, з якою сумістимо вісь Ox , тоді динамічним рівнянням прямолінійного руху буде наступне:

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, \dot{x}). \quad (9.4)$$

Якщо описувати рух матеріальної точки **натуральним способом**, тобто відома її дугова координата як функція часу: $s = s(t)$, тоді, проєктуючи вирази (*) або (9.1) на осі натурального тригранника (його ортами є $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$), отримаємо (див. рис. 9.2)



$$\begin{cases} ma_\tau = F_\tau(t, s, \dot{s}), \\ ma_n = F_n(t, s, \dot{s}), \\ ma_b = F_b(t, s, \dot{s}). \end{cases} \quad (9.5)$$

Згадуючи, що

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \ddot{s}, \quad a_n = \frac{v_\tau^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_b = 0,$$

будемо мати динамічні рівняння руху вільної матеріальної точки в натуральній формі:

Рис. 9.2. Натуральний спосіб задання руху

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_\tau(t, s, \dot{s}), \\ m\frac{v^2}{\rho} = F_n(t, s, \dot{s}), \\ 0 = F_b(t, s, \dot{s}), \end{cases} \quad (9.6)$$

(тут ρ - радіус кривизни траєкторії точки).

9.2. Дві задачі динаміки вільної матеріальної точки

В динаміці руху вільної матеріальної точки розрізняють *дві задачі*:

- пряму (першу);
- обернену (другу).

Обернена задача динаміки називається *основною*. Розглянемо більш детально, в чому полягають ці задачі.

- 1) **Пряма задача динаміки**: за відомої маси точки, закону її руху, треба знайти силу, яка діє на цю матеріальну точку (або рівнодійну сил, що викликають даний рух). В залежності від того, в якій формі заданий закон руху, для визначення сили можна застосувати рівняння руху у векторній, координатній або натуральній формі. В цьому разі перша задача динаміки зводиться до визначення прискорення точки за відомими кінематичними рівняннями її руху.

Так, наприклад, при координатному способі задання руху відомі координати точки як функції часу, тобто $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Знайшовши другі похідні за часом від цих залежностей і підставивши вирази $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $a_z = \ddot{z}$ в рівняння (9.2), знайдемо проєкції сили на координатні осі:

$$\begin{cases} F_x = m\ddot{x}, \\ F_y = m\ddot{y}, \\ F_z = m\ddot{z}. \end{cases} \quad (9.7)$$

Після цього можна визначити модуль шуканої сили $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$, та її напрямок за напрямними косинусами:

$$\cos(\vec{F}; Ox) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\vec{F}; Oy) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(\vec{F}; Oz) = \frac{F_z}{F}.$$

- 2) **Обернена задача динаміки** полягає в тому, що визначається закон руху матеріальної точки за відомою її масою та прикладеною до неї силою. Крім цього для розв'язання цієї задачі необхідно знати початкове положення даної точки та її початкову швидкість.

Основний алгоритм розв'язання оберненої (другої) задачі динаміки

Використаємо рівняння руху матеріальної точки у формі (9.2) та припустимо, що праві частини рівнянь є однозначними та скінченними функціями вказаних аргументів. Тоді визначення закону руху точки в даному випадку зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь (9.2) другого порядку. Результатом інтегрування є наступні функції:

$$\begin{cases} x = x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y = y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z = z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \end{cases} \quad (9.8)$$

де $C_1, C_2, \dots, C_6$ - сталі інтегрування.

Рівняння (9.8) являють собою загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (9.2).

З цих рівнянь випливає, що матеріальна точка маси m під дією заданої сили $\vec{F}$ може здійснювати сукупність рухів, що визначаються різними наборами C_i . Для того, щоб виділити конкретний вид руху, необхідно скористатися додатковими умовами, в якості яких виступають початкові умови:

$$\vec{r}|_{t=t_0} = \vec{r}_0, \quad \vec{v}|_{t=t_0} = \vec{v}_0,$$

або більш детально

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0; \quad (9.9)$$

$$\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \quad \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0. \quad (9.10)$$

Для того, щоб використати умови (9.9) і (9.10), треба диференціювати функції (9.8) за часом:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ \dot{y} = \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ \dot{z} = \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{cases} \quad (9.11)$$

Підставимо (9.9) в (9.8), а (9.10) в (9.11), і визначимо сталі інтегрування

$$C_i = C_i(t_0, x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \quad i = \overline{1, 6}$$

Якщо тепер підставити знайдені сталі інтегрування у вирази (9.8), то отримаємо остаточний розв'язок системи рівнянь (9.2):

$$\begin{cases} x = x(t, x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ y = y(t, x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ z = z(t, x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{cases}$$

Тема 4.2. Прямолінійні коливання матеріальної точки

9.3. Прямолінійні (вільні та згасаючі) коливання матеріальної точки

а) Умова реалізації прямолінійного руху

Розглянемо т. M маси m , котра рухається прямолінійно вздовж осі Ox , в цьому випадку впродовж всього руху $y = z = 0$, а також дорівнюють нулю відповідні швидкості та прискорення: $\dot{y} = \dot{z} = 0$; $\ddot{y} = \ddot{z} = 0$. Тоді за рівняннями (9.7) попередньої лекції можна зробити висновок, що $F_y = F_z = 0$ - ця умова і є умовою реалізації прямолінійного руху точки вздовж осі Ox .

Покажемо, що для реалізації прямолінійного руху точки необхідно і достатньо, щоб сила, що діє на точку, впродовж всього часу руху зберігала свій напрямок, цей напрямок повинен збігатися з напрямком швидкості.

Дійсно, т. M рухається під дією сили, яка напрямлена вздовж осі Ox , тоді з вказаних рівнянь (9.7) маємо

$$\begin{cases} \ddot{y} = 0, \\ \ddot{z} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = C_1, \\ \dot{z} = C_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = C_1 t + C_3, \\ z = C_2 t + C_4. \end{cases}$$

Використовуючи початкові умови, отримаємо: $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Тоді маємо

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, \dot{x}) \quad (9.12)$$

- рівняння прямолінійного руху матеріальної точки.

б) Види коливальних рухів матеріальної точки. Диференціальні рівняння коливальних

Розглянемо прямолінійний рух матеріальної точки під дією різних поєднань наступних сил:

- сили $\vec{F}$, що намагається повернути матеріальну точку в положення її рівноваги (такі сили називають *відновлювальними*);
- сили $\vec{R}$ опору середовища, в якому рухається матеріальна точка; цю силу називають *силою тертя, дисипативною (розсіюючою) силою*;
- *збурювальної сили* $\vec{Q}$, яка дає можливість підтримувати як завгодно довго рух матеріальної точки.

Розглянемо ці сили більш детально.

- Джерелом **відновлювальної сили** можуть бути будь-які тіла. Найпростіший приклад – пружина, до якої прикріплене дане тіло, що рухається поступально вздовж осі Ox (див. рис. 9.3).

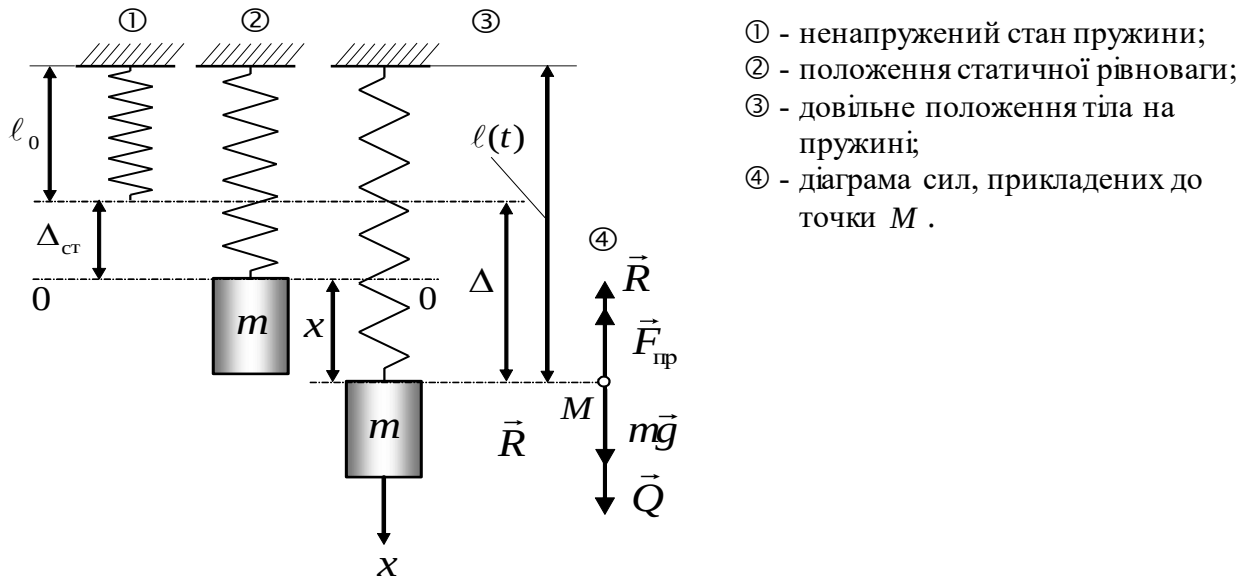


Рис. 9.3. Пружина

Мірою механічної взаємодії пружини та розглядуваної точки (тіла) є відновлювальна сила, яка в даному випадку називається *силою пружності* ($\vec{F} = \vec{F}_{\text{пр}}$) і визначається за *законом Гука*:

$$\vec{F}_{\text{пр}} = -c\vec{\Delta},$$

де $\vec{\Delta}$ - вектор деформації пружини (його модуль Δ є зміщенням кінця пружини по відношенню до її ненапруженого стану); а коефіцієнт пропорційності c - називається коефіцієнтом жорсткості (або коефіцієнтом пружності); він чисельно дорівнює тій силі, яку необхідно прикласти до кінця ненавантаженої пружини для того, щоб викликати її подовження на одиницю довжини.

➤ **Силу опору середовища $\vec{R}$** у разі малих швидкостей руху можна вважати прямо пропорційною до швидкості:

$$\vec{R} = -\alpha \vec{v},$$

де коефіцієнт пропорційності α називається коефіцієнтом в'язкого тертя або в'язкого опору.

У разі великих швидкостей маємо $\vec{R} = -\beta v^2 \vec{v}^0$ (β - коефіцієнт пропорційності, $\vec{v}^0$ - одиничний вектор напрямку швидкості).

➤ **Збурювальна сила $\vec{Q}$** , прикладена до даної точки, може бути подана у вигляді

$$\vec{Q} = Q\vec{Q}^0,$$

де Q - модуль сили $\vec{Q}$, а $\vec{Q}^0$ - одиничний вектор її напрямку.

У разі *гармонійної* збурювальної сили матимемо

$$Q = Q_m \sin(\omega t + \sigma),$$

де Q_m - максимальне значення (амплітуда) збурювальної сили,

$(\omega t + \sigma)$ - фаза зміни сили (σ - початкова фаза, ω - кругова частота).

В проекції на введену координатну вісь Ox вказані вище сили запишуться наступним чином:

$$F_{\text{пр} \Delta x} = -c\Delta = -c(\Delta_{\text{ст}} + x), \quad R_x = -\alpha \dot{x}, \quad Q_x = Q_m \sin(\omega t + \sigma). \quad ($$

9.13)

Тоді на підставі рівняння (9.12) отримаємо

$$m\ddot{x} = mg - c(\Delta_{\text{ст}} + x) - \alpha\dot{x} + Q_m \sin(\omega t + \sigma), \quad (9.14)$$

звідки, беручи до уваги що $mg = c\Delta_{\text{ст}}$ (це співвідношення випливає з аналізу сил в положенні статичної рівноваги ②), матимемо

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x} + Q_m \sin(\omega t + \sigma) \quad (9.15)$$

- диференціальне рівняння *змушених коливань* матеріальної точки за наявності сил опору середовища та відновлювальної сили. Знаки “-” в цьому рівнянні зберігаються при будь-якому напрямку руху матеріальної точки, а знак “+” має місце у разі збігу напрямку сили $\vec{Q}$ з віссю Ox .

Розглянемо диференціальні рівняння різних видів коливань, що є частинними випадками рівняння (9.15).

Якщо збурювальна сила відсутня і немає опору середовища, тоді отримаємо

$$m\ddot{x} = -cx \quad (9.16)$$

- диференціальне рівняння *вільних коливань*, що мають місце лише за наявності відновлювальної сили.

Якщо відсутня лише збурювальна сила, то будемо мати

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x} \quad (9.17)$$

- диференціальне рівняння *згасаючих коливань*, які відбуваються під дією відновлювальної сили та сили опору середовища.

Зауважимо також, що постійна сила (в нашому випадку вага $m\vec{g}$) не впливає на коливання матеріальної точки і вигляд відповідного диференціального рівняння її руху, якщо вибрати початок відліку у положенні статичної рівноваги.

Розглянемо ці коливання та отримані рівняння більш детально.

в) Вільні (власні) коливання матеріальної точки

Вільні коливання матеріальної точки – це такі коливання, що відбуваються під дією лише відновлювальної сили і описуються наступним диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \quad (9.18)$$

яке є звичайним лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Розв’язуємо це рівняння за *методом Ейлера*, який полягає в складанні характеристичного рівняння, яке відповідає диференціальному. Для рівняння (9.18) матимемо

$$\lambda^2 + \frac{c}{m} = 0,$$

або, якщо ввести позначення $\frac{c}{m} = k^2$, тоді отримаємо: $\lambda^2 + k^2 = 0$, звідки $\lambda_{1,2} = \pm ik$ (корені характеристичного рівняння суто уявні і різні) і загальний розв’язок рівняння (9.18) матиме вигляд

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (9.19)$$

Для подальшого розв'язання задачі треба визначити сталі інтегрування C_1 і C_2 , використовуючи початкові умови, тобто те, що при $t = 0$ $x(0) = x_0$, а $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Для того, щоб скористатися початковими умовами, знайдемо похідну від x за часом, тобто

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (9.20)$$

Підставляючи початкові умови в рівняння (9.19) і (9.20), знаходимо, що $x(0) = C_1 = x_0$, $\dot{x}(0) = C_2 k = \dot{x}_0$, звідки отримаємо $C_1 = x_0$ і $C_2 = \dot{x}_0 / k$, і остаточно матимемо

$$x(t) = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt \quad (9.21)$$

- кінематичне рівняння руху точки маси m під дією лише відновлювальної сили $\vec{F}$. Тут $k = \sqrt{c/m}$ - кругова частота вільних коливань.

Вирази (9.19) або (9.21) можна переписати у вигляді

$$x(t) = x_m \sin(kt + \beta), \quad (9.22)$$

де $x_m = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{k}\right)^2}$ є *амплітудою* вільних коливань, тобто максимальним відхиленням точки від положення рівноваги, а *початкова фаза* коливань β визначається відповідним тангенсом: $\operatorname{tg} \beta = \frac{C_1}{C_2} = \frac{x_0 k}{\dot{x}_0}$. Геометрична точка, відносно якої відбуваються

коливання, називається *центром коливань* (він збігається з положенням статичної рівноваги матеріальної точки). Проміжок часу, протягом якого відбувається одне коливання, називається *періодом коливань* і позначається T . Величина обернена до періоду, називається *частотою* ($f = T^{-1}$) і визначає кількість коливань за одну секунду. Кількість коливань за 2π секунд називається *круговою (власною) частотою*. Таким чином, між вказаними параметрами коливань існують такі співвідношення:

$$f = T^{-1} = \frac{k}{2\pi}, \quad k = 2\pi f, \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Нижче поданий типовий графік залежності $x(t)$, на якому показані деякі з наведених вище величин (рис. 9.4).

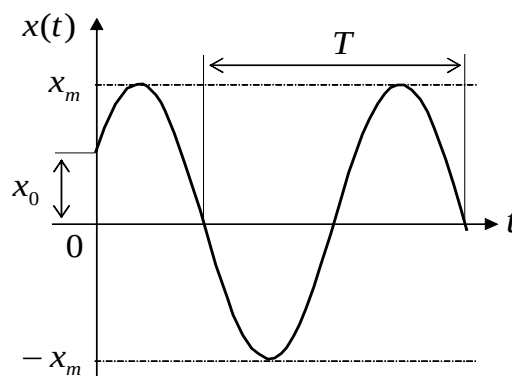


Рис. 9.4. Графік вільних коливань

г) Згасаючі коливання матеріальної точки

Згасаючі коливання матеріальної точки – це такі коливання, що відбуваються під дією двох сил: відновлювальної сили і сили опору середовища і описуються наступним диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = 0, \quad (9.23)$$

яке теж є звичайним лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Позначимо $k^2 = c/m$, $2h = \alpha/m$, тоді поділивши рівняння (9.23) на масу m , матимемо

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = 0. \quad (9.24)$$

Складаємо відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 2h\lambda + k^2 = 0 \quad (9.25)$$

і знаходимо його корені:

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}. \quad (9.26)$$

В залежності від співвідношення величин h і k можливі три частинні випадки для коренів характеристичного рівняння:

- $h < k$ - комплексно спряжені корені;
- $h > k$ - дійсні різні корені;
- $h = k$ - дійсні кратні корені.

Розглянемо ці випадки більш детально.

➤ **Випадок малого опору ($h < k$)**

У цьому випадку маємо $\lambda_{1,2} = -h \pm i\sqrt{k^2 - h^2} = -h \pm ik_*$, де $k_* = \sqrt{k^2 - h^2}$. Тоді отримаємо

$$x = e^{-ht} (C_1 \cos k_* t + C_2 \sin k_* t). \quad (9.27)$$

Якщо взяти від цього виразу першу похідну за часом, тоді матимемо

$$\dot{x} = -he^{-ht} (C_1 \cos k_* t + C_2 \sin k_* t) + k_* e^{-ht} (-C_1 \sin k_* t + C_2 \cos k_* t). \quad (9.28)$$

Враховуючи початкові умови (при $t = 0$ $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$) в рівняннях (9.27) і (9.28), отримаємо

$$\begin{cases} x_0 = C_1, \\ \dot{x}_0 = -hC_1 + k_* C_2; \end{cases} \quad \text{звідки маємо} \quad \begin{cases} C_1 = x_0, \\ C_2 = \frac{1}{k_*} (\dot{x}_0 + hx_0). \end{cases}$$

Тоді остаточно будемо мати

$$x(t) = e^{-ht} \left(x_0 \cos k_* t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{k_*} \sin k_* t \right). \quad (9.29)$$

Якщо ввести інші сталі інтегрування, а саме

$$x_m = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + hx_0)^2}{k_*^2}}, \quad \text{tg} \beta = C_1 / C_2 = \frac{x_0 k_*}{\dot{x}_0 + hx_0},$$

тоді вираз (9.29) перетвориться на наступний

$$x(t) = x_m e^{-ht} \sin(k_* t + \beta). \quad ($$

9.30)

Аналіз виразу (9.30) вказує на те, що функція $x(t)$ періодично змінює свій знак і мають місце коливання (на це вказує наявність синусоїдальної функції), амплітуда коливань $x_m e^{-ht}$ зменшується за експоненціальним законом, тому ці коливання і називають *згасаючими* (рис. 9.5). Але коливальний рух точки, строго кажучи, не є періодичним, тому що не існує такої сталої T_1 , додаючи яку до аргументу t , отримаємо рівність $x(t + T_1) = x(t)$, справедливу для будь-яких t . Кругова частота k_* цих коливань визначається виразом $k_* = \sqrt{k^2 - h^2}$ і є меншою за кругову частоту k відповідних вільних коливань.

Коефіцієнт h називається *коефіцієнтом згасання*, він характеризує швидкість згасання коливань і визначається за формулою $h = \frac{\alpha}{2m}$.

Оскільки $|\sin(k_* t + \beta)| \leq 1$, тоді з виразу (9.30) випливає, що

$$|x| \leq |x_m e^{-ht}|. \quad (9.31)$$

Це означає, що графік функції $x(t)$ буде розміщуватися між асимптотами $\pm x_m e^{-ht}$ (які називаються *амплітудними кривими*), розташованими симетрично відносно осі часу t .

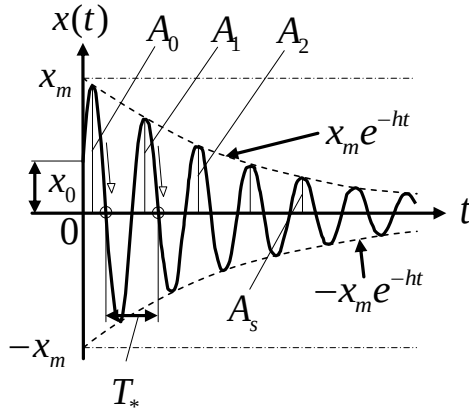


Рис. 9.5. Графік згасаючих коливань

Для згасаючих коливань мова може йти лише про умовний період коливань T_* , який є проміжком часу між двома послідовними проходженнями вільною матеріальною точкою положення статичної рівноваги у фіксованому напрямку.

Із рівняння (9.30) випливає, що визначення T_* зводиться до визначення відстані між двома суміжними нулями функції $\sin(k_* t + \beta)$, для яких функція $\cos(k_* t + \beta)$ має один знак.

З цього випливає, що $T_* \sqrt{k^2 - h^2} = 2\pi$, а умовний період згасаючих коливань T_* визначається наступним чином:

$$T_* = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}} = \frac{2\pi}{k_*}. \quad (9.32)$$

Розглянемо послідовність максимальних відхилень точки від положення статичної рівноваги під час руху точки у фіксованому напрямку. Такі відхилення кожного разу відбуваються через рівні проміжки часу, що відповідають умовному періоду T_* , тобто в моменти часу $t', t' + T_*, t' + 2T_*, \dots$. Вони складають таку послідовність (тут $A = x_m e^{-ht}$):

$$A_0 = x_m e^{-ht'}, A_1 = x_m e^{-h(t' + T_*)}, A_2 = x_m e^{-h(t' + 2T_*)}, \dots, A_{s-1} = x_m e^{-h[t' + (s-1)T_*]}, A_s = x_m e^{-h(t' + sT_*)}, \dots$$

Якщо взяти відношення двох послідовних амплітуд, тоді отримаємо такий вираз:

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{A_2}{A_1} = \dots = \frac{A_s}{A_{s-1}} = \dots = e^{-hT_*} = \eta. \quad (9.33)$$

З цього виразу випливає, що амплітуда згасаючих коливань зменшується за законом геометричної прогресії із знаменником η , який називається *декрементом коливань*. Модуль натурального логарифму від цієї величини називається *логарифмічним декрементом коливань*:

$$\Lambda = |\ln \eta| = hT_*.$$

(
9.34)

Він характеризує швидкість згасання коливань в залежності від числа коливань.

➤ **Випадок великого опору ($h > k$)**

У цьому випадку маємо $\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}$, тобто корені є дійсними і різними (і до того ж завжди від'ємними). Тоді, відповідно до методу Ейлера, отримаємо

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (9.35)$$

і знайдемо відповідну першу похідну за часом

$$\dot{x} = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (9.36)$$

Врахуємо початкові умови, тобто те, що при $t = 0$ $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, і підставимо їх у вирази (9.35) і (9.36):

$$x(0) = C_1 + C_2 = x_0, \quad \dot{x}(0) = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = \dot{x}_0.$$

Далі з першого з цих виразів знайдемо $C_1 = x_0 - C_2$ і підставимо у другий:

$$\dot{x}_0 = \lambda_1 (x_0 - C_2) + \lambda_2 C_2 = \lambda_1 x_0 + C_2 (\lambda_2 - \lambda_1),$$

звідки знаходимо $C_2 = \frac{\dot{x}_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$ і “повертаємо” його у перший вираз, отримуючи

$$C_1 = x_0 - \frac{\dot{x}_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\lambda_2 x_0 - \lambda_1 x_0 - \dot{x}_0 + \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\lambda_2 x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Тоді рівняння (9.35) набуває вигляду

$$x(t) = \frac{\lambda_2 x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{\dot{x}_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t},$$

звідки, беручи до уваги, що $\lambda_2 - \lambda_1 = -h - \sqrt{h^2 - k^2} + h - \sqrt{h^2 - k^2} = -2\sqrt{h^2 - k^2}$, остаточно отримаємо

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{h^2 - k^2}} \left[(\dot{x}_0 - \lambda_2 x_0) e^{\lambda_1 t} - (\dot{x}_0 - \lambda_1 x_0) e^{\lambda_2 t} \right]. \quad (9.37)$$

Із отриманого виразу видно, що рух матеріальної точки не буде коливальним, а буде *аперіодичним*, при цьому конкретний графічний вигляд залежності $x(t)$ буде визначатися співвідношенням параметрів $\dot{x}_0$, $\lambda_1 x_0$, $\lambda_2 x_0$. Нижче наведені деякі приклади функції $x(t)$.

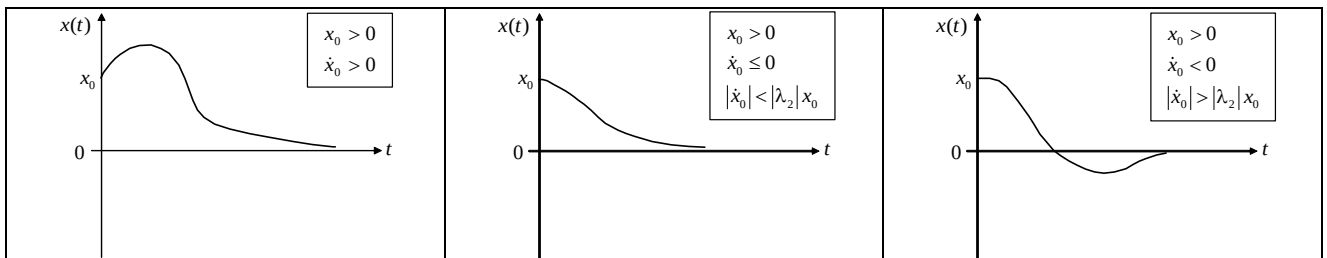


Рис. 9.6. Графіки коливань у разі великого опору

При $x_0 < 0$ аперіодичний характер руху матеріальної точки не змінюється.

➤ **Випадок “критичного” опору ($h = k$)**

У цьому випадку маємо $\lambda_{1,2} = -h$, тобто корені характеристичного рівняння дійсні і кратні. Тоді матимемо

$$x = e^{-ht} (C_1 + C_2 t). \quad (9.38)$$

Знайдемо першу похідну за часом від виразу (16)

$$\dot{x} = -h e^{-ht} (C_1 + C_2 t) + e^{-ht} C_2. \quad (9.3)$$

9)

Врахуємо початкові умови (при $t = 0$ $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$) і підставимо їх у вирази (9.38) і (9.39):

$$x(0) = C_1 = x_0, \quad \dot{x}(0) = -hC_1 + C_2 = \dot{x}_0,$$

звідки $C_1 = x_0$, $C_2 = \dot{x}_0 + hx_0$. Тоді рівняння (9.38) набуває вигляду

$$x(t) = e^{-ht} [x_0 + (\dot{x}_0 + hx_0)t]. \quad (9.40)$$

Із виразу (9.40) випливає, що точка здійснює аперіодичний рух, який є, як і у разі великого опору, згасаючим, оскільки при $t \rightarrow \infty$ $x \rightarrow 0$.

Графіки функції $x(t)$ при різних поєднаннях величин, що входять у вираз (9.40), наведені нижче.

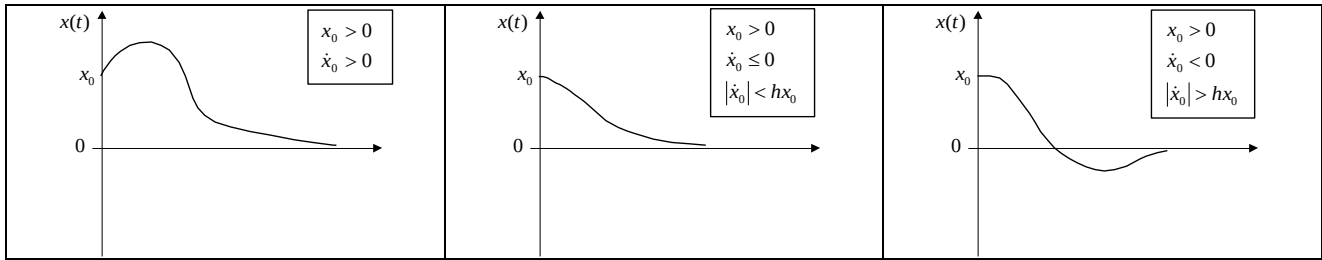


Рис. 9.7. Графіки коливань у разі критичного опору

Задача 1

Тягар маси m виконує коливання вздовж похилої площини (рис. 1). Тягар приєднаний до кінців двох паралельних пружин з коефіцієнтами пружності c_1 і c_2 .

Знайти рівняння руху тягара, якщо в початковий момент він був зміщений з положення статичної рівноваги на x_0 , і йому в напрямку осі x була надана швидкість $\dot{x}_0$.

Дано: c_1, c_2 ; при $t = 0$ $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

Знайти: $x(t)$.

Розв'язання

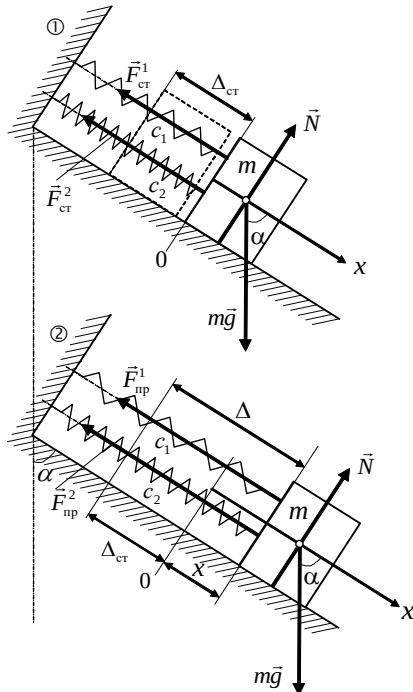


Рис. 1. Тягар на похилій площині

Приймаючи початок відліку в положенні статичної рівноваги ①, помітимо, що обидві пружини отримали однакове подовження $\Delta_{\text{ст}}$.

Тоді проекції статичних сил пружності на вісь Ox складатимуть

$$(\vec{F}_{\text{ст}}^1)_x = -c_1 \Delta_{\text{ст}}; \quad (\vec{F}_{\text{ст}}^2)_x = -c_2 \Delta_{\text{ст}}.$$

В положенні статичної рівноваги векторна сума всіх сил повинна дорівнювати нулю, тобто

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{ст}}^1 + \vec{F}_{\text{ст}}^2 = \vec{0},$$

або в проекції на вісь Ox :

$$(m\vec{g})_x + (\vec{N})_x + (\vec{F}_{\text{ст}}^1)_x + (\vec{F}_{\text{ст}}^2)_x = 0,$$

звідки маємо

$$mg \cos \alpha - c_1 \Delta_{\text{ст}} - c_2 \Delta_{\text{ст}} = 0. \quad \{1\}$$

В довільному положенні ② загальне подовження пружин Δ складає $\Delta = x + \Delta_{\text{ст}}$,

тому

$$(\vec{F}_{\text{пр}}^1)_x = -c_1 \Delta; \quad (\vec{F}_{\text{пр}}^2)_x = -c_2 \Delta.$$

Тоді на підставі II-го закону Ньютона, доповненого аксіомою про звільнення від в'язей, в проекції на вісь Ox можна записати таке рівняння:

$$m\ddot{x} = mg \cos \alpha - c_1 \Delta - c_2 \Delta, \text{ або } m\ddot{x} = mg \cos \alpha - c_1 (x + \Delta_{\text{ст}}) - c_2 (x + \Delta_{\text{ст}}),$$

яке можна подати у такому вигляді:

$$m\ddot{x} = mg \cos \alpha - c_1 \Delta_{\text{ст}} - c_2 \Delta_{\text{ст}} - c_1 x - c_2 x. \quad \{2\}$$

Якщо взяти до уваги співвідношення $\{1\}$, тоді це рівняння можна переписати наступним чином:

$$m\ddot{x} = -(c_1 + c_2)x.$$

Позначаючи $\boxed{c = c_1 + c_2}$ жорсткість еквівалентної пружини, отримаємо рівняння

$$m\ddot{x} + cx = 0. \quad \{3\}$$

Таким чином, *при паралельному з'єднанні пружин жорсткість еквівалентної пружини дорівнює сумі жорсткостей даних пружин.*

Подальше розв'язання цієї задачі повністю збігається з формулами (9.18)-(9.21) попередньої лекції.

Задача 2

Тягар маси m виконує коливання вздовж горизонтальної площини (рис. 1). Тягар приєднаний до кінців двох послідовно з'єднаних пружин з коефіцієнтами пружності c_1 і c_2 .

Знайти вираз жорсткості еквівалентної пружини при такому послідовному з'єднанні пружин.

Дано: c_1, c_2 .

Знайти: c .

Розв'язання

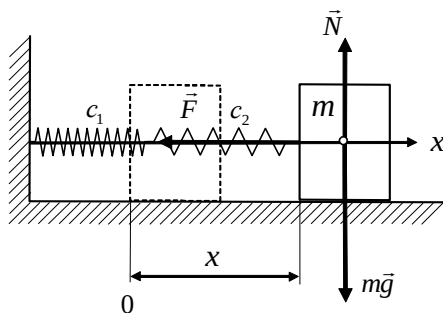


Рис. 1. Тягар на горизонтальній площині

В свою чергу $x = \frac{F}{c}$. Тоді з $\{1\}$ отримаємо

$$\frac{F}{c} = \frac{F}{c_1} + \frac{F}{c_2}, \text{ або } \frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2},$$

що є виразом піддатливості еквівалентної пружини, тобто *при послідовному з'єднанні пружин піддатливість еквівалентної пружини дорівнює сумі піддатливостей розглядуваних пружин.*

В цьому разі жорсткість еквівалентної пружини становитиме

$$\boxed{c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}}.$$

Тема 4.3. Динаміка невільної матеріальної точки

10. Динаміка невільної матеріальної точки

10.1. В'язі. Звільнення від в'язей

Матеріальна точка називається *вільною*, якщо в будь-який момент часу можна довільним чином задати її радіус-вектор $\vec{r}$ і швидкість $\vec{v}$.

Для вільної матеріальної точки можна здійснити рух вздовж заздалегідь вибраної траєкторії, якщо визначеним чином підібрати механічні взаємодії між цією точкою і іншими тілами.

Ці взаємодії, які підтримуються впродовж всього часу руху, називаються *активними силами*, або силами, що задаються.

Механічні взаємодії, що відбулися в початковий момент часу і закінчилися до даного моменту, називаються *початковими умовами руху*.

Умови, що створюють обмеження вільного руху матеріальної точки, називаються *в'язями*. Механічні взаємодії в'язей, на відміну від вказаних (активних), обмежують область зміни радіус-вектора і швидкості матеріальної точки, отже вона стає *невільною*. Ці взаємодії виникають за рахунок *накладання в'язей* і називаються *дією в'язей*. Міра цих взаємодій визначається також силами (*реакціями в'язей*), які в рівняннях динаміки завжди є невідомими.

Для характеристики в'язей використовують рівняння¹ в'язей.

Обмежимося розглядом стаціонарних геометричних в'язей.

Геометричні в'язі – це такі в'язі, в рівняння яких входять лише координати точки і, можливо, час.

Якщо рівняння в'язі не залежить від часу, тоді така в'язь називається *стаціонарною*.

Накладені на точку геометричні в'язі змушують її рухатись в деякій області простору (по поверхні або кривій).

Рівняння в'язі – це рівняння лінії або поверхні, по якій може рухатись дана точка при наявності активних сил і початкових умов.

У випадку руху точки по незмінній поверхні (стаціонарна геометрична в'язь) її координати повинні задовольняти відповідному рівнянню поверхні

$$\varphi(x, y, z) = 0. \quad (10.1)$$

Якщо ж точка рухатиметься по деякій незмінній кривій (стаціонарна геометрична в'язь), то її координати повинні задовольняти рівнянням поверхонь

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0, \\ \varphi_2(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (10.2)$$

які при перетині утворюють розглядувану криву.

Розглянемо сферичний маятник, кінець якого (матеріальна точка M), з'єднаний невагомим ідеальним стрижнем довжини ℓ з сферичним шарніром O , рухається по поверхні сфери (рис. 10.1), рівняння якої має вигляд

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0. \quad (10.3)$$

Рівняння (10.3) є рівнянням в'язі для т. M . Дія в'язі на матеріальну точку характеризується деякою силою, прикладеною до цієї точки, яка називається *реакцією в'язі*.

За III-м законом Ньютона дія матеріальної точки на в'язь дорівнює за модулем реакції в'язі, напрямлена протилежно до неї і прикладена до в'язі.

На відміну від сил, що задаються, в рівняннях динаміки реакції в'язей завжди є

¹ У разі утримуючих (двосторонніх) в'язей. Неутримуючі (односторонні) в'язі описуються нерівностями.

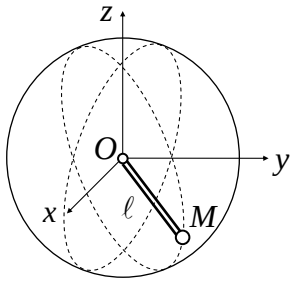


Рис. 10.1. Стационарна геометрична в'язь

невідомими величинами, що підлягають визначенню. Розробка методів їх визначення є однією із задач динаміки невільної матеріальної точки.

Невільну матеріальну точку можна розглядати як вільну, якщо скористатися аксіомою про звільнення від в'язей і подумки відкинути в'язі, замінивши їх дію відповідними реакціями в'язей. При цьому вважають, що розглядувана точка рухається під дією активних сил і реакцій в'язей. Тоді рівняння її руху набуває вигляду

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}. \quad (10.4)$$

Розглянемо матеріальну точку M , що рухається по поверхні S (рис. 10.2).

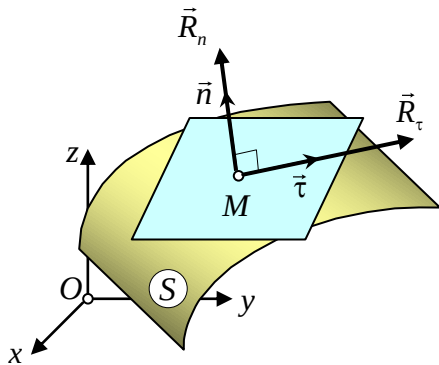


Рис. 10.2. Рух точки по поверхні

Проведемо в цій точці дотичну площину до поверхні. Відкидаючи подумки поверхню (в'язь), подамо невідому її реакцію $\vec{R}$ у вигляді двох складових: однієї ($\vec{R}_\tau$), що належить площині, дотичній до поверхні S у точці M , та іншої ($\vec{R}_n$), що напрямлена по нормалі до поверхні S у точці M ($\vec{n}$ - орт нормалі). Таким чином, в загальному випадку

$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_\tau,$$

де $\vec{R}_\tau$ - сила тертя (дотична складова реакції в'язі).

Нормальна складова реакції ($\vec{R}_n$) може бути подана у вигляді

$$\vec{R}_n = \lambda \overrightarrow{\text{grad}}(\varphi), \quad (10.5)$$

де λ - множник Лагранжа, φ - функція, що описує поверхню, або безпосередньо через орт:

$$\vec{R}_n = R_n \vec{n}.$$

Тоді множник λ визначиться за формулою

$$\lambda = \frac{R_n}{|\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi)|} = \frac{R_n}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}}, \quad (10.6)$$

оскільки $\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$.

Розглянемо два типи поверхонь, що найчастіше зустрічаються на практиці.

а) Ідеально гладенька поверхня

Це така поверхня, реакція якої *завжди* напрямлена перпендикулярно (тобто по нормалі) до цієї поверхні. У цьому випадку $\vec{R}_\tau = \vec{0}$. Зауважимо, що в'язь, для якої повна її реакція напрямлена вздовж нормалі до поверхні і невідомим є лише її модуль, називається *ідеальною в'яззю*.

б) Негладенька поверхня

Це така поверхня, в реакції якої присутня дотична складова $\vec{R}_\tau$.

При цьому можна вважати, що матеріальна точка рухається по ідеально гладенькій поверхні, але тоді складову $\vec{R}_\tau$ слід віднести до категорії активних сил.

10.2. Динамічні рівняння руху невільної матеріальної точки. Дві задачі динаміки невільної матеріальної точки. Рівняння руху матеріальної точки по нерухомій поверхні (рівняння Лагранжа I-го роду)

У векторній формі динамічне рівняння руху невільної матеріальної точки має вигляд (10.4), тобто

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}, \quad (10.7)$$

де $\vec{F}$ - рівнодійна активних сил, прикладених до матеріальної точки, а $\vec{R}$ - рівнодійна реакцій в'язей.

В координатній формі рівняння (10.7) набуває вигляду

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + R_x, \\ m\ddot{y} = F_y + R_y, \\ m\ddot{z} = F_z + R_z. \end{cases} \quad (10.8)$$

Таким чином, рівняння (10.7) або (10.8) є динамічними рівняннями руху невільної матеріальної точки.

Пряма задача динаміки для невільної матеріальної точки полягає у визначенні невідомих реакцій в'язей за відомою масою m точки, кінематичними рівняннями руху і активними силами (силами, що задаються) з рівнодійною $\vec{F}$.

Для розв'язання цієї задачі достатньо розв'язати систему (10.8), оскільки вона містить у трьох рівняннях три невідомі величини: R_x, R_y, R_z .

Обернена задача динаміки полягає у визначенні R_x, R_y, R_z і x, y, z (реакцій в'язей і кінематичних рівнянь руху) за відомими: масою m , активними силами ($\vec{F}$), початковими умовами, а також за відомим рівнянням в'язі, -

$$\varphi(x, y, z) = 0. \quad (10.9)$$

Розглянемо систему (10.8) і (10.9), що складається з чотирьох рівнянь з шістьма невідомими.

Припустимо, що в'язь є ідеальною, тобто

$$\vec{R} = \vec{R}_n = \lambda \overrightarrow{\text{grad}}(\varphi), \quad (10.10)$$

а з іншого боку $\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$. Порівнюючи ці вирази маємо

$$R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k} = \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right),$$

звідки отримаємо

$$R_x = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad R_y = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad R_z = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (10.11)$$

Якщо підставити ці вирази в рівняння (10.8), тоді отримаємо *рівняння Лагранжа I-го роду*

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ m\ddot{y} = F_y + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ m\ddot{z} = F_z + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{cases} \quad (10.12)$$

Рівняння (10.12) разом з (10.9) утворюють систему з чотирьох рівнянь з чотирма невідомими: x, y, z, λ . Розв'язання цієї системи дає можливість визначити множник λ , а потім з рівнянь (10.11) знайти невідомі R_x, R_y, R_z .

10.3. Рівняння руху невільної матеріальної точки по нерухомій кривій (рівняння Лагранжа I-го роду)

Нехай нерухома крива подається як лінія перетину двох поверхонь, що описуються такими рівняннями

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0, \\ \varphi_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (10.13)$$

Ці рівняння разом з диференціальними рівняннями (10.8) утворюють систему з п'яти рівнянь з шістьма невідомими: R_x, R_y, R_z і x, y, z .

Припустимо, що реакція в'язі (кривої) складається з двох складових, тобто

$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2, \quad (10.14)$$

причому ці складові є реакціями ідеальних поверхонь, що утворюють при перетині дану криву, тобто $\vec{R}_1$ - перпендикулярна до першої поверхні, а $\vec{R}_2$ - до другої, тому

$$\vec{R}_1 = \lambda_1 \overrightarrow{\text{grad}}(\varphi_1), \quad \vec{R}_2 = \lambda_2 \overrightarrow{\text{grad}}(\varphi_2),$$

або

$$\vec{R}_1 = \lambda_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \vec{k} \right), \quad \vec{R}_2 = \lambda_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \vec{k} \right). \quad (10.15)$$

Проекції реакції в'язі на координатні осі за рівнянням (10.14) мають вигляд

$$R_x = R_{1x} + R_{2x}, \quad R_y = R_{1y} + R_{2y}, \quad R_z = R_{1z} + R_{2z}, \quad (10.16)$$

а якщо підставити в них вирази (10.15), тоді отримаємо

$$\begin{cases} R_x = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \\ R_y = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \\ R_z = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}. \end{cases} \quad (10.17)$$

Підставимо ці вирази в рівняння (10.8), тоді матимемо

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \\ m\ddot{y} = F_y + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \\ m\ddot{z} = F_z + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}. \end{cases} \quad (10.18)$$

Це є рівняння Лагранжа I-го роду для точки, що рухається по кривій.

Таким чином для визначення невідомих x, y, z і λ_1, λ_2 маємо систему п'яти рівнянь (10.18) та (10.13). Потім за рівняннями (10.17) визначаються невідомі проекції реакції в'язі R_x, R_y, R_z .

Задача

Матеріальна точка маси m рухається по нерухомій гладенькій кривій, що лежить у площині Oxy , і на неї діє активна сила $\vec{F}$, проекція якої на вісь z дорівнює нулю.

Визначити у загальному вигляді реакцію в'язі.

Дано: $\vec{F}\{F_x, F_y, 0\}$.

Знайти: $\vec{R}\{R_x, R_y, R_z\}$.

Розв'язання

Рівняння в'язі (нерухомої гладенької кривої) в цьому випадку матимуть вигляд

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y) = 0, \\ \varphi_2(x, y, z) = z. \end{cases} \quad (1)$$

В цьому разі $\dot{z} = 0, \ddot{z} = 0$.

Застосуємо рівняння (10.18), спочатку визначивши $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$. Зауважимо, що

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 1.$$

Тоді матимемо

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + 0, \\ m\ddot{y} = F_y + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + 0, \\ 0 = 0 + 0 + \lambda_2 \cdot 1. \end{cases}$$

звідки з останнього рівняння отримуємо

$$\lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 0.$$

Перші два рівняння набувають вигляду

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \\ m\ddot{y} = F_y + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} m\ddot{x} = F_x + R_{1x}, \\ m\ddot{y} = F_y + R_{1y}. \end{cases}$$

Далі можна визначити

$$\vec{R} = \vec{R}_1 = \lambda_1 \overrightarrow{\text{grad} \varphi_1},$$

причому

$$R = \sqrt{R_{1x}^2 + R_{1y}^2} = |\lambda_1| \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2}.$$

Тема 4.4. Метод кінетостатики

11. Метод кінетостатики

Для розв'язання першої задачі динаміки невільної матеріальної точки, коли заданий її рух і треба визначити силу, дуже ефективним є метод кінетостатики. Цей метод особливо зручний, коли треба визначити реакції в'язей $\vec{R}$ при заданих активних силах та законі руху точки.

Як відомо, закони, що встановлені Ньютоном, стосуються руху вільної матеріальної точки. Якщо додати до них аксіому про звільнення від в'язей, то питання про дослідження руху невільної матеріальної точки зведеться до питання про рух вільної матеріальної точки, на яку діють активні сили і реакції в'язей $\vec{R}$.

Принцип, про який буде йти мова, еквівалентний II-му закону Ньютона та аксіомі про звільнення від в'язей. Цей принцип називається *принципом Д'Аламбера*, хоча правильніше було б його назвати принципом Германа-Ейлера-Д'Аламбера. Петербурзькі академіки Герман і Ейлер встановили цей принцип раніше від Д'Аламбера: Герман – у 1716 р., Ейлер – у 1737 р., а Д'Аламбер – у 1743 р.

11.1. Принцип Д'Аламбера для матеріальної точки

Нехай на матеріальну точку діє активна сила $\vec{F}$ і реакція в'язі $\vec{R}$. Тоді, згідно з рівнянням динаміки для невільної матеріальної точки, маємо

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R},$$

звідки

$$\vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{a}) = \vec{0}. \quad (11.1)$$

Доданок $(-m\vec{a})$ називається *даламберовою силою інерції* і позначається через $\vec{\Phi}$. Тоді з виразу (11.1) отримаємо

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = \vec{0}. \quad (11.2)$$

Рівняння (11.2) виражає принцип Д'Аламбера: *для невільної матеріальної точки в кожний момент часу векторна сума активних сил, реакцій в'язей і сил інерції дорівнює нулю.*

Зазначимо, що поняття „сила інерції” є формальним, не пов'язаним з реальними силами, якими є лише активні сили, реакції в'язей і сили протидії. Реальні фізичні сили виражають міру взаємодії тіл у природі й можуть бути різними за своїм характером.

Метод кінетостатики є лише формальним способом зведення рівнянь динаміки до рівнянь статки, проте для розв'язання ряду практичних задач такий спосіб зручний.

Зазначимо також, що сила інерції завжди напрямлена в бік, протилежний прискоренню, тобто $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$, а не руху (див. рисунок 11.1)!

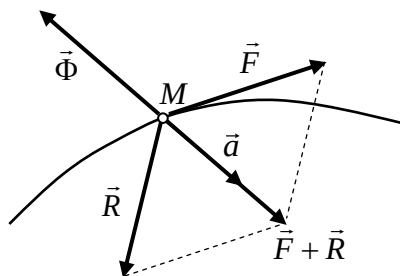


Рис. 11.1. Даламберова сила інерції

Якщо матеріальна точка вільна, то вираз (11.2) спрощується і набуває вигляду:

$$\vec{F} + \vec{\Phi} = \vec{0}.$$

11.2. Принцип Д'Аламбера для системи матеріальних точок

Розглянемо систему матеріальних точок M_i ($i = \overline{1, n}$), де до точки M_i прикладена активна сила $\vec{F}_i$ і реакція в'язі $\vec{R}_i$. Тоді для кожної i -тої точки основне рівняння динаміки матиме вигляд

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i,$$

Звідки матимемо

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i = \vec{0}, \quad \text{або} \quad \vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = \vec{0}, \quad (11.3)$$

де $\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{a}_i$.

Знайшовши суму рівнянь (11.3) за індексом i , отримуємо головні вектори активних сил, реакцій в'язей і сил інерції, зв'язані виразом:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = \vec{0}. \quad (11.4)$$

Виберемо довільний центр O і визначимо головні моменти сил $\vec{F}$, $\vec{R}$ і $\vec{\Phi}$:

$$\vec{M}_O^F + \vec{M}_O^R + \vec{M}_O^{\Phi} = \vec{0}. \quad (11.5)$$

Рівняння (11.4) і (11.5) виражають принцип Д'Аламбера для системи матеріальних точок: в кожний момент часу векторна сума головних векторів активних сил, реакцій в'язей і сил інерції рухомої системи матеріальних точок дорівнює нулю. І разом з тим векторна сума головних моментів активних сил, реакцій в'язей і сил інерції рухомої системи також дорівнює нулю.

Покажемо, як обчислюються сили інерції матеріальної точки.

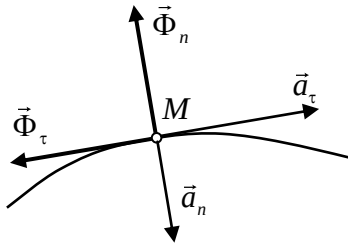


Рис. 11.2. Складові сили інерції

- Якщо рух матеріальної точки задано натуральним способом, то $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ (рис. 11.2). Відповідно до цього введемо дотичну ($\vec{\Phi}_\tau$) і нормальну ($\vec{\Phi}_n$) складові сили інерції. Тоді $\vec{\Phi}_\tau$ і $\vec{\Phi}_n$ визначимо за формулами:

$$\Phi_\tau = m a_\tau \Rightarrow \Phi_\tau = m \ddot{s};$$

$$\Phi_n = m a_n \Rightarrow \Phi_n = m \frac{v^2}{\rho}.$$

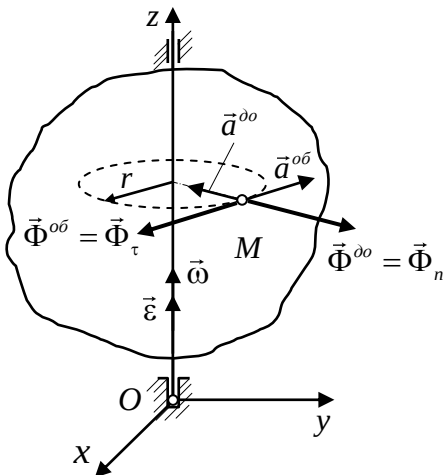


Рис. 11.3. Сили інерції при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі

- Якщо матеріальна точка належить тілу, що обертається навколо нерухомої осі (рис. 11.3), причому ϵ і ω відомі, то $\vec{a}^{ob}$ збігається з $\vec{a}_\tau$, а $\vec{a}^{do}$ - з $\vec{a}_n$. Відповідні сили інерції дорівнюють:

$$\Phi^{ob} = m a^{ob} = m \epsilon r,$$

$$\Phi^{do} = m a^{do} = m \omega^2 r.$$

Задача

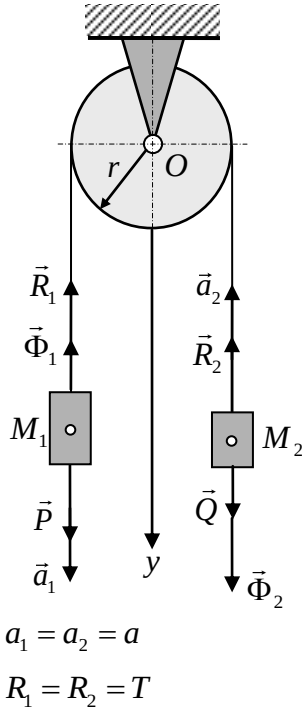
До нерозтяжної нитки, яка перекинута через невагомий блок з нерухомою віссю обертання (рис. 1), підвішені тягарі M_1 і M_2 вагою $\vec{P}$ і $\vec{Q}$ ($P > Q$) відповідно.

Визначити натяг T нитки і прискорення a тягарів.

Дано: P, Q .

Знайти: T, a .

Розв'язання



Уявно зупиняємо систему. До точок M_1 і M_2 системи прикладаємо активні сили $\vec{P}$ і $\vec{Q}$, реакції $\vec{R}_1$ і $\vec{R}_2$ з боку нитки (сила натягу нитки $\vec{T}$ в кожній точці буде прикладена до нитки, крім того $R_1 = R_2 = T$) і сили інерції $\vec{\Phi}_1$ і $\vec{\Phi}_2$, напрямлені в бік, протилежний прискоренням $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ відповідно.

Розглянемо окремо „рівновагу” кожної точки під дією вказаної системи сил і складемо суму проекцій сил на вісь Oy (тобто до кожної точки застосовуємо принцип Д’Аламбера):

$$\begin{cases} \vec{P} + \vec{R}_1 + \vec{\Phi}_1 = \vec{0}, \\ \vec{Q} + \vec{R}_2 + \vec{\Phi}_2 = \vec{0}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P - R_1 - \Phi_1 = 0, \\ Q - R_2 + \Phi_2 = 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} P - T - \frac{P}{g}a = 0, \\ Q - T + \frac{Q}{g}a = 0. \end{cases}$$

Рис. 1. Блок з тягарями

Звідси отримуємо

$$\boxed{T = \frac{2PQ}{P+Q}}; \quad \boxed{a = \frac{P-Q}{P+Q}g}.$$

Тепер запишемо принцип Д’Аламбера для системи матеріальних точок:

$$\begin{cases} Q + P - R_1 - R_2 - \Phi_1 + \Phi_2 = 0, \\ -Qr + Pr + R_2r - R_1r - \Phi_1r - \Phi_2r = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q + P - 2T - \frac{P}{g}a + \frac{Q}{g}a = 0, \\ -Qr + Pr + \cancel{Tr} - \cancel{Tr} - \frac{P}{g}ar - \frac{Q}{g}ar = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння знаходимо прискорення a тягарів, підставляємо його вираз в перше рівняння і відшукуємо силу натягу нитки T . Неважко перевірити, що знову маємо

$$T = \frac{2PQ}{P+Q}; \quad a = \frac{P-Q}{P+Q}g.$$

Тема 4.5. Динаміка відносного руху матеріальної точки

12. Динаміка відносного руху матеріальної точки

12.1. Основне рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки

До цих пір вивчався рух матеріальної точки в інерціальній системі відліку. Якщо рух будь-якої системи відліку по відношенню до інерціальної не є поступальним і прямолінійним, тоді така система відліку називається *неінерціальною системою відліку*.

Спостерігач, що знаходиться в неінерціальній системі відліку і який вважає, що на точку маси m діє сила $\vec{F}$, виявляє, що добуток маси на прискорення, виміряний в неінерціальній системі відліку, не дорівнює силі, що діє на дану точку.

Знайдемо рівняння руху матеріальної точки в неінерціальній системі відліку. Ця задача може бути зведена до встановлення законів перетворення прискорень і сил при переході від інерціальної системи відліку до неінерціальної.

Збережемо прийняті у класичній механіці постулати про абсолютність простору і часу.

Абсолютність простору – незмінність відстані між двома будь-якими точками як в інерціальній, так і в неінерціальній системі відліку.

Абсолютність часу – однаковість проміжків часу між двома подіями в різних системах відліку.

Назвемо *нерухомою* будь-яку інерціальну систему відліку.

Рух матеріальної точки по відношенню до цієї системи відліку назвемо *абсолютним*.

Рух неінерціальної системи відліку (або, що те ж саме, твердого тіла, яке незмінно зв'язане з неінерціальною системою відліку) відносно інерціальної системи відліку назвемо *переносним*.

Відносний рух матеріальної точки – це її рух в неінерціальній системі відліку.

Розглянемо дві системи відліку (рис. 12.1): інерціальну $K \rightarrow A\xi\eta\zeta$ (нерухому) і неінерціальну $K^\omega \rightarrow Oxyz$ (рухому). Проміжна система відліку $K' \rightarrow O\xi'\eta'\zeta'$ є рухомою і інерціальною.

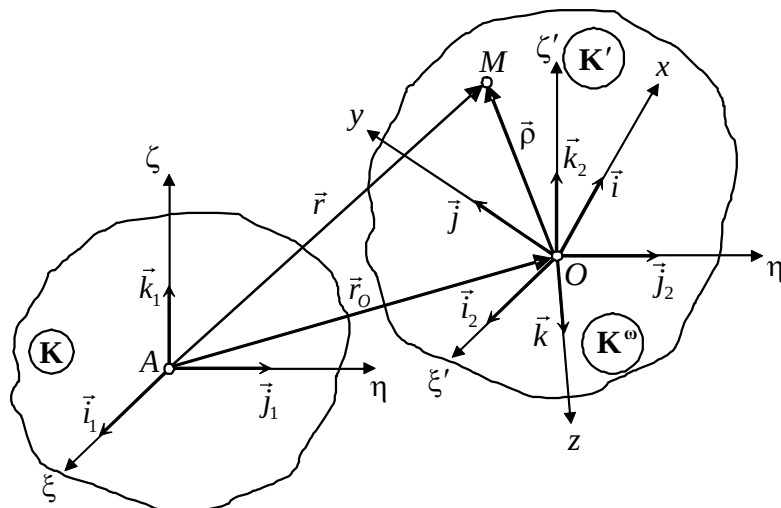


Рис. 12.1. Системи відліку

Тоді має місце таке співвідношення між радіус-векторами (див. рисунок 12.1):

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho},$$

а оскільки $\vec{\rho} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$, матимемо

$$\vec{r} = \vec{r}_O + x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}. \quad (12.1)$$

Якщо ввести матрицю напрямних косинусів між осями систем координат $O\xi'\eta'\zeta'$ та $Oxyz$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

тоді координати т. M у нерухомій системі координат (проекції радіус-вектора $\vec{r}$) за формулою (12.1) набудуть вигляду

$$\begin{cases} \xi = \xi_O + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \eta = \eta_O + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \zeta = \zeta_O + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases} \quad (12.2)$$

Звідси можна знайти координати т. M в рухомій системі координат:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1^T \begin{bmatrix} \xi - \xi_O \\ \eta - \eta_O \\ \zeta - \zeta_O \end{bmatrix},$$

або

$$\begin{cases} x = a_{11}(\xi - \xi_O) + a_{21}(\eta - \eta_O) + a_{31}(\zeta - \zeta_O), \\ y = a_{12}(\xi - \xi_O) + a_{22}(\eta - \eta_O) + a_{32}(\zeta - \zeta_O), \\ z = a_{13}(\xi - \xi_O) + a_{23}(\eta - \eta_O) + a_{33}(\zeta - \zeta_O). \end{cases} \quad (12.3)$$

Співвідношення (12.2) і (12.3) є формулами перетворення координат т. M при переході від рухомої системи координат до нерухомої і навпаки. Коефіцієнти a_{ij} в цих формулах є *напрямними косинусами*, тобто косинусами кутів між осями рухомої і нерухомої систем координат. Відмітимо, що при переході від однієї інерціальної системи відліку ($\mathbf{K}$) до іншої ($\mathbf{K}'$) ці коефіцієнти є сталими, тобто $a_{ij} = \text{const}$.

Оскільки одиничні вектори (орти) $\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2$ не змінюють свої величини і напрямку по відношенню до ортів $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$, тому це відбивається на перетворенні прискорень при переході від однієї інерціальної системи до іншої: існує незмінність прискорень для однієї і тієї ж точки, розглядуваних в різних інерціальних системах відліку, тобто $\vec{a} = \vec{a}'$.

За теоремою про прискорення точки при її складному русі (теоремою Коріоліса) для абсолютного прискорення матимемо такий вираз

$$\vec{a}_a = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c,$$

складові якого мають наступний вигляд:

- прискорення переносного руху $\vec{a}_e = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho})$;
- прискорення відносного руху $\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{d'}{dt} \left(\frac{d'\vec{\rho}}{dt} \right)$;
- прискорення Коріоліса $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$.

В свою чергу кутова швидкість і кутове прискорення переносного руху можуть бути записані у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_e &= \omega_{ex} \vec{i} + \omega_{ey} \vec{j} + \omega_{ez} \vec{k}, \\ \vec{\varepsilon}_e &= \varepsilon_{ex} \vec{i} + \varepsilon_{ey} \vec{j} + \varepsilon_{ez} \vec{k} = \frac{d\omega_{ex}}{dt} \vec{i} + \frac{d\omega_{ey}}{dt} \vec{j} + \frac{d\omega_{ez}}{dt} \vec{k}. \end{aligned}$$

Абсолютний рух точки в інерціальній системі координат підкоряється рівнянню

$$m\vec{a}_a = \vec{F}, \quad (12.4)$$

тоді, зважаючи на теорему Коріоліса, матимемо

$$m(\vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c) = \vec{F},$$

звідки, розкриваючи дужки і залишаючи зліва $m\vec{a}_r$, отримаємо

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + (-m\vec{a}_e) + (-m\vec{a}_c). \quad (12.5)$$

Якщо ввести наступні позначення:

$$-m\vec{a}_e = \vec{\Phi}_e, \quad -m\vec{a}_c = \vec{\Phi}_c, \quad (12.6)$$

перше з них ($\vec{\Phi}_e$) називається *переносною силою інерції*, а друге ($\vec{\Phi}_c$) – *коріолісовою силою інерції*. Обидві ці сили разом називаються *ейлеровими силами інерції*.

З позначеннями (12.6) рівняння (12.5) набуває вигляду

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c. \quad (12.7)$$

Це є *основне рівняння динаміки відносного руху* вільної матеріальної точки.

Порівняємо зараз вирази (12.4) і (12.7). Їхні ліві частини являють собою добутки маси (m) точки на прискорення, яке вимірюється в різних системах відліку: неінерціальній для (12.7) і в інерціальній для (12.4). Права частина в (12.4) – сила $\vec{F}$, що діє на точку; в (12.7) – деяка вислідна сила ($\vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c$), яка діє на точку в неінерціальній системі відліку. Сила $\vec{F}$ є результатом механічної взаємодії точки з тілами, що її оточують, вона постійна і не змінюється при переході до інших систем відліку.

Ейлерові сили інерції не є результатом взаємодії даної точки з іншими тілами, вони виникають в результаті руху неінерціальної системи відліку K^0 . Сили $\vec{\Phi}_e$ і $\vec{\Phi}_c$ змінюються при переході від однієї неінерціальної системи відліку до іншої такої ж системи. Вони зникають при переході до інерціальної системи відліку (ICB).

Ейлерові сили інерції не підлягають вимірюванню, вони не мають джерел свого виникнення, тому вони є *фіктивними силами*.

Формула (12.7) може бути прочитана наступним чином: добуток маси точки на прискорення її відносного руху дорівнює векторній сумі ньютонівих сил та ейлерових сил інерції.

Для **невільної** матеріальної точки маємо

$$m\vec{a}_a = \vec{F} + \vec{R},$$

а оскільки $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$, - отримаємо

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c + \vec{R}, \quad (12.8)$$

що в проекціях на осі рухомої системи координат $Oxyz$ записується наступним чином:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + \Phi_{ex} + \Phi_{cx} + R_x, \\ m\ddot{y} = F_y + \Phi_{ey} + \Phi_{cy} + R_y, \\ m\ddot{z} = F_z + \Phi_{ez} + \Phi_{cz} + R_z. \end{cases}$$

Задача

Визначити закон відносного руху кільця M , що рухається вздовж гладенького стрижня OA від т. O до т. A (рис. 1), якщо стрижень обертається навколо вертикальної осі, яка проходить перпендикулярно до нього через його кінець O , з кутовою швидкістю $\omega = 4$ рад/с.

В початковий момент часу при $t = 0$: $OM = 0,6$ м, $v_M(0) = 0$.

Дано: $\omega = 4$ рад/с; при $t = 0$: $x(0) = x_0 = 0,6$ м, $\dot{x}(0) = 0$.

Знайти: $x(t)$.

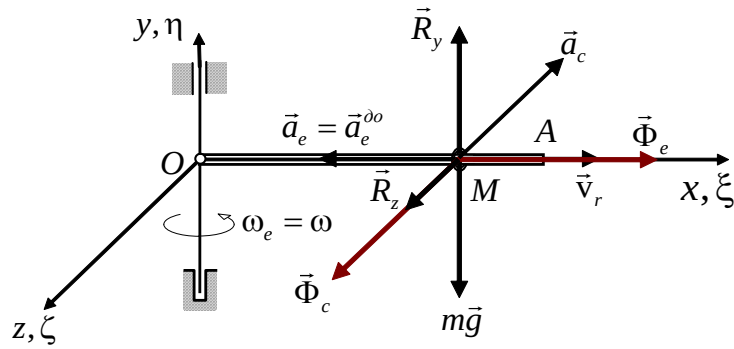


Рис. 1. Схема розглядуваної системи

Розв'язання

- 1) Введемо дві системи відліку (дві системи координат: $O\xi\eta\zeta$ та $Oxyz$).
- 2) Skorистаємось основним рівнянням динаміки невільної матеріальної точки у рухомій системі координат (12.8).

Зауважимо, що відносним рухом кільця є його рух вздовж стрижня OA .

- 3) Проаналізуємо складові правої частини формули (12.8).

Активні сили: сила ваги $m\vec{g}$, тоді $\vec{F} = m\vec{g}$.

Реакції в'язей: невідому реакцію в'язі (стрижня) $\vec{R}$ подаємо у вигляді двох складових $\vec{R}_y$ і $\vec{R}_z$ (складова $\vec{R}_x$ відсутня, тому що в'язь гладенька), тобто $\vec{R} = \vec{R}_y + \vec{R}_z$.

Ейлерові сили інерції

Сила інерції переносного руху $\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e$. Переносним рухом кільця M є його обертання навколо осі $O\eta$ з радіусом обертання $OM = x$ і кутовою швидкістю $\omega_e = \omega$, тому

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{do} + \vec{a}_e^{oo},$$

де $a_e^{do} = \omega^2 OM = \omega^2 x$, а $a_e^{oo} = \varepsilon_e OM = \dot{\omega} OM = 0$ (оскільки $\omega = const$). Тому

$$\Phi_e = ma_e = ma_e^{do} = m\omega^2 x.$$

Сила інерції Коріоліса $\vec{\Phi}_c = -m\vec{a}_c$. Оскільки прискорення Коріоліса визначається за формулою $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$, де $a_c = 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 2\omega \dot{x}$ (тому що $v_r = \dot{x}$), тому матимемо

$$\Phi_c = ma_c = 2m\omega \dot{x}.$$

- 4) Оскільки відносний рух кільця M - це його рух вздовж стрижня OA , тобто вздовж осі Ox , тому запишемо векторне рівняння (12.8) в проекції на вісь Ox :

$$m\ddot{x} = F_x + \Phi_{ex} + \Phi_{cx} + R_x \Rightarrow m\ddot{x} = m\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x} - \omega^2 x = 0. \quad (1)$$

Останнє диференціальне рівняння є математичною моделлю відносного руху невільної матеріальної точки.

- 5) Розв'язуємо отримане диференціальне рівняння (1) за відомих початкових умов (див. умову задачі) і знаходимо шукану величину.

- Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння:

$\lambda^2 - \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\omega$, тобто корені характеристичного рівняння дійсні і різні, тому загальний розв'язок подаємо у вигляді $x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$.

- Знаходимо похідну від попереднього виразу: $\dot{x} = \omega C_1 e^{\omega t} - \omega C_2 e^{-\omega t}$.

- Підставляємо початкові умови і визначаємо сталі інтегрування:

$$x(0) = C_1 + C_2 = x_0, \quad \dot{x}(0) = \omega(C_1 - C_2) = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = x_0 / 2.$$

- Остаточно отримуємо шукане кінематичне рівняння руху:

$$x(t) = \frac{x_0}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = x_0 \cosh \omega t = 0,6 \cosh 4t, \text{ м.}$$

12.2. Частинні випадки руху вільної матеріальної точки

- 1) Точка рухається рівномірно і прямолінійно в системі координат $Oxyz$, тоді

$$\vec{a}_r = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c = \vec{0}}. \quad (12.9)$$

- 2) Точка знаходиться в спокої в системі координат $Oxyz$, тоді

$$\vec{v}_r = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_r = \vec{0}, \vec{a}_c = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{F} + \vec{\Phi}_e = \vec{0}}. \quad (12.10)$$

- 3) Нехай система координат $Oxyz$ здійснює поступальний рух по відношенню до $A\xi\eta\zeta$, тоді матимемо

$$\omega_e = 0 \Rightarrow \vec{a}_c = \vec{0} \Rightarrow \boxed{m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e}. \quad (12.11)$$

- 4) Припустимо, що система K^o є інерціальною, тоді отримаємо

$$\begin{cases} \omega_e = 0 \Rightarrow \vec{a}_c = \vec{0}; \\ \vec{v}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_e = \vec{0}; \end{cases} \Rightarrow \boxed{m\vec{a}_r = \vec{F}}. \quad (12.12)$$

Якщо матеріальна точка є **невільною**, тоді наведені вище рівняння зміняться наступним чином:

➤ з (12.9) матимемо $\boxed{\vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c + \vec{R} = \vec{0}}, \quad (12.13)$

➤ з (12.10) випливає $\boxed{\vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{R} = \vec{0}}, \quad (12.14)$

➤ з (12.11) отримаємо $\boxed{m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{R}}, \quad (12.15)$

➤ з (12.12) матимемо $\boxed{m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{R}}. \quad (12.16)$

Звернемо увагу на рівняння (12.14). Воно виражає умову *відносного спокою*: при відносному спокої точки векторна сума всіх активних сил, що діють на точку, реакцій в'язей і переносної сили інерції дорівнює нулю.

З аналізу рівнянь (12.12) і (12.16) приходимо до **висновку**, що механічні прояви в усіх інерціальних системах однакові. Це складає зміст *принципу відносності Галілея* класичної механіки.

Зауважимо, що для інерціальних систем відліку умова $\vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$ означає, що точка знаходиться в спокої, або в рівномірному і прямолінійному русі. В неінерціальній системі відліку умова (12.14) є умовою спокою точки, а умова (12.13) – її рівномірного і прямолінійного руху.

Тема 4.6. Динаміка механічної системи

**13. Загальні відомості про механічну систему. Динамічні рівняння руху.
Геометрія мас**

13.1. Механічна система. Класифікація сил

Механічна система – це сукупність матеріальних точок, рухи і положення яких взаємозв'язані.

Сили, які є результатом дії тіл, що не входять в механічну систему, на точки механічної системи, називаються *зовнішніми* ($\vec{F}^E$).

Внутрішні сили – сили взаємодії між точками розглядуваної механічної системи ($\vec{F}^I$). Внутрішні сили підкоряються III-му закону Ньютона.

Система всіх внутрішніх сил, прикладених до точок розглядуваної механічної системи еквівалентна нулю (див. рис. 13.1).

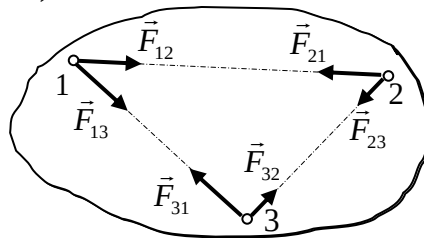


Рис. 13.1. Внутрішні сили

Всі наперед задані внутрішні і зовнішні сили будемо називати *активними*¹.

Система матеріальних точок називається *замкнутою* (ізолюваною), якщо на неї не діють зовнішні сили.

Таким чином, у загальному випадку маємо

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^E + \vec{F}_i^I.$$

Тут $\vec{F}_i^E$ – рівнодійна всіх зовнішніх сил, прикладених до i -тої точки;

$\vec{F}_i^I$ – рівнодійна всіх внутрішніх сил, прикладених до i -тої точки.

Відповідно до класифікації сил їх поділяють на:

- зовнішні і внутрішні;
- активні і реакції в'язей.

Головний вектор всіх діючих на систему сил ($\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$) не залежить від вибору полюса

(див. лекцію 5 модулю НФ-06/1 «Статика. Кінематика», параграф 4.3). Крім цього, він дорівнює головному вектору зовнішніх сил:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i^E + \sum \vec{F}_i^I = \sum \vec{F}_i^E,$$

тому що $\sum \vec{F}_i^I = \vec{0}$.

Оскільки момент сили $\vec{F}_i$ відносно точки O дорівнює $\vec{M}_O(\vec{F}_i) \triangleq \vec{r}_i \times \vec{F}_i$, тому головний момент дорівнюватиме

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^E) + \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^I) = \vec{M}_O^E + \vec{M}_O^I = \vec{M}_O^E,$$

¹ Якщо вони не залежать від дії інших сил, можуть викликати рух і/або реакції в'язей.

тому що $\vec{M}_O^I = \vec{0}$.

Таким чином, $\vec{F}^I = \sum \vec{F}_i^I = \vec{0}$, та $\vec{M}_O^I = \vec{0}$. Зауважимо також, що

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = \vec{F}_i^E + \vec{F}_i^I.$$

13.2. Динамічні рівняння руху механічної системи

Припустимо, що в'язі, накладені на систему, геометричні і стаціонарні. Для невільної системи реакції зовнішніх в'язей будемо відносити до категорії зовнішніх сил, а реакції внутрішніх в'язей – до категорії внутрішніх сил (рис. 13.2).

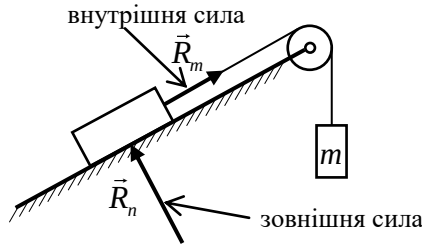


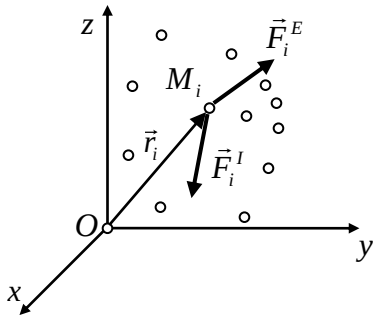
Рис. 13.2. Реакції в'язей як зовнішні і внутрішні сили

Спочатку всі сили, що діють на механічну систему, поділимо на зовнішні і внутрішні. До кожної точки M_i системи застосуємо основне рівняння динаміки (див. рис. 13.3):

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i^E + \vec{F}_i^I, \quad i = \overline{1, n} \quad (13.1)$$

де $\vec{F}_i^E$ і $\vec{F}_i^I$ означені вище.

Рівняння (13.1) є динамічними рівняннями руху механічної системи у векторній формі.



У проекціях на осі координат рівняння (13.1) набуде вигляду

$$\begin{cases} m_i \ddot{x}_i = F_{ix}^E + F_{ix}^I, \\ m_i \ddot{y}_i = F_{iy}^E + F_{iy}^I, \\ m_i \ddot{z}_i = F_{iz}^E + F_{iz}^I. \end{cases} \quad i = \overline{1, n}$$

Це є динамічні рівняння руху механічної системи в координатній формі. Число цих рівнянь дорівнює $3n$.

Рис. 13.3. Точка M_i під дією зовнішніх і внутрішніх сил

Розділимо тепер всі сили, прикладені до механічної системи, на активні і реакції в'язей.

Застосуємо для кожної т. M_i рівняння невільної матеріальної точки (див. рис. 13.4):

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (13.2)$$

де $\vec{F}_i$ - рівнодійна всіх активних сил, що діють на i -ту точку;

$\vec{R}_i$ - рівнодійна всіх реакцій в'язей, що діють на i -ту точку.

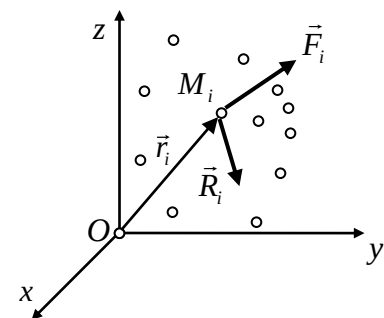


Рис. 13.4. Точка M_i під дією активних сил і реакцій в'язей

Відмітимо, що задані внутрішні сили взаємодії між точками даної системи увійдуть до категорії активних сил. Рівняння (13.2) є диференціальними рівняннями руху невільної механічної системи у векторній формі.

В координатній формі рівняння (13.2) набувають вигляду

$$\begin{cases} m_i \ddot{x}_i = F_{ix} + R_{ix}, \\ m_i \ddot{y}_i = F_{iy} + R_{iy}, \\ m_i \ddot{z}_i = F_{iz} + R_{iz}. \end{cases} \quad i = \overline{1, n} \quad (13.3)$$

Співвідношення (13.2) або (13.3) повністю описують рух невільної механічної системи.

13.3. Маса системи. Центр ваги, центр мас або центр інерції

Масою системи називається сума мас всіх точок, що входять до системи:

$$m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Центром мас або центром інерції називається геометрична точка, радіус-вектор якої визначається за формулою:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}, \quad (13.4)$$

де $\vec{r}_i$ - радіус-вектор i -тої точки (див. рис. 13.5).

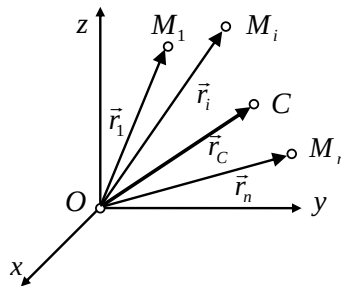


Рис. 13.5. До визначення центра мас

Положення центру мас є інваріантним (незмінним), тобто не залежить від вибору системи відліку. Доведемо це твердження.

Введемо дві системи відліку (рис. 13.6): інерціальну (K) і неінерціальну (K').

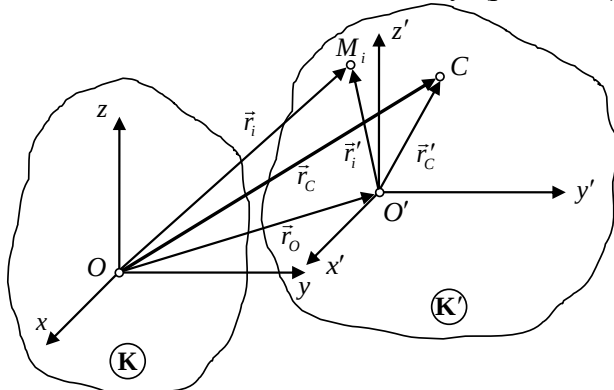


Рис. 13.6. Положення центра мас у різних системах відліку

Тут $\vec{r}_O$ - радіус-вектор, який визначає положення системи $O'x'y'z'$ по відношенню до $Oxyz$.

Припустимо, що точка C є центром мас. Тоді матимемо

$$\begin{aligned} \vec{r}'_C &= \frac{\sum m_i \vec{r}'_i}{m} = \frac{\sum m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_O)}{m} = \\ &= \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} - \vec{r}_O \frac{\sum m_i}{m} = \vec{r}_C - \vec{r}_O, \end{aligned}$$

або остаточно $\boxed{\vec{r}'_C = \vec{r}_C - \vec{r}_O}$, тобто кінці

векторів $\vec{r}'_C$ та $\vec{r}_C$ вказують на одну й ту ж саму точку простору, що й доводить твердження про інваріантність положення центру мас.

13.4. Моменти інерції механічної системи

1) Основні означення. Класифікація моментів інерції

Поняття моменту інерції тіла належить до числа основних і важливих понять у динаміці. Воно було введено Л. Ейлером.

При розв'язанні багатьох задач динаміки механічної системи формуються величини, що виражаються через суми добутків мас точок системи на квадрати їх відстаней до осі, точки або площини. Такі суми характеризують розподіл мас даної системи відносно взятої осі, точки або площини і називаються *моментами інерції механічної системи* відповідно *відносно осі, точки або площини* (позначають їх через I з відповідним індексом осі, точки або площини, відносно яких визначається момент інерції). Вчення про ці величини має назву *геометрії мас* механічної системи.

Приймаючи гіпотезу про те, що маса твердого тіла розподіляється неперервно, вивчимо питання про розподіл мас у ньому. Наведемо наступні означення.

Моментом інерції матеріальної точки відносно осі називається добуток маси m цієї точки на квадрат її відстані h до цієї осі, наприклад, Oz : $I_z = mh^2$.

Моментом інерції системи, що складається з n матеріальних точок, відносно осі Oz називається сума добутків мас m_i точок системи на квадрати відстаней h_i від цих точок до осі:

$$I_z = \sum I_{zi} = \sum_{i=1}^n m_i h_i^2.$$

У разі неперервного розподілу маси замість суми записується інтеграл, поширений на всю масу.

Моментом інерції твердого тіла відносно осі, наприклад Oz , називається інтеграл, поширений на всю масу, який має вигляд

$$I_z = \int_{(m)} r^2 dm.$$

Інколи при обчисленні моментів інерції користуються поняттям радіуса інерції.

Радіусом інерції ρ називають відстань, на якій від осі обертання треба розмістити масу m розглядуваного тіла, сконцентрувавши її в одній точці, щоб остання мала той же момент інерції, що і розглядуване тіло

$$\rho = \sqrt{\frac{I_z}{m}}.$$

Розрізняють такі моменти інерції:

- *осьові, або аксіальні;*
- *полярні;*
- *планарні і*
- *відцентрові.*

При обчисленні осьового моменту інерції точки її маса множиться на квадрат відстані до осі, полярного – до заданої точки – полюса, планарного – до заданої площини.

Осьовий момент інерції тіла – це фізична величина, що характеризує міру інертності твердого тіла в його обертальному русі навколо нерухомої осі. При обертанні твердого тіла навколо нерухомої точки – мірою інертності цього тіла є момент інерції відносно миттєвої осі, що проходить через нерухому точку.

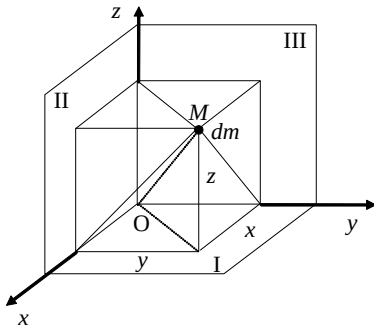


Рис. 13.7. До визначення моментів інерції

Встановимо формули для визначення перелічених моментів інерції.

Розглянемо точку M тіла, елементарна маса якої dm (див. рис. 13.7). Координати точки M позначимо x, y, z . Згідно із означенням відповідних моментів інерції, вони обчислюються за наступними формулами:

- осьові моменти інерції тіла:
$$I_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm, I_y = \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm, I_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm; \quad (13.5)$$

- полярний момент інерції тіла:
$$I_O = \int_{(m)} (x^2 + y^2 + z^2) dm; \quad (13.6)$$

- планарні моменти інерції тіла відносно координатних площин:
$$I_I = \int_{(m)} z^2 dm, I_{II} = \int_{(m)} y^2 dm, I_{III} = \int_{(m)} x^2 dm; \quad (13.7)$$

- відцентрові моменти інерції тіла:
$$I_{xy} = \int_{(m)} xy dm, I_{xz} = \int_{(m)} xz dm, I_{yz} = \int_{(m)} yz dm. \quad (13.8)$$

Відцентрові моменти інерції залежать від напрямку координатних осей і від вибору початку координат. Тому, коли говорять про відцентровий момент інерції в даній точці, мають на увазі, що початок координат збігається з даною точкою.

Відцентрові моменти інерції можуть дорівнювати нулю і мати будь-який знак (плюс або мінус).

Якщо відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, то осі називають *головними осями інерції тіла у даній точці*. Якщо ця точка знаходиться у центрі мас, то осі є *головними і центральними осями інерції*.

Встановимо залежність між полярними, осьовими і планарними моментами інерції. Додаючи ліві і праві частини виразу (13.5), отримаємо, враховуючи вираз (13.6)

$$I_x + I_y + I_z = 2I_O,$$

тобто сума осьових моментів інерції дорівнює подвоєному полярному моменту інерції.

Додаючи ліві і праві частини виразу (13.7), матимемо

$$I_I + I_{II} + I_{III} = I_O,$$

тобто сума планарних моментів інерції дорівнює полярному моменту інерції. Із виразів (13.5) - (13.8) випливає також ряд очевидних нерівностей. Наприклад,

$$I_x + I_y \geq I_z; \quad I_x - I_y \leq I_z; \quad I_z > I_{xy}, \quad I_x > I_{yz}, \quad I_y > I_{xz}.$$

2) Теорема про моменти інерції відносно паралельних осей (теорема Гюйгенса)

Теорема. Осьовий момент інерції системи матеріальних точок або твердого тіла відносно деякої осі дорівнює осьовому моменту інерції відносно центральної осі, що паралельна даній, з доданим добутком маси системи (тіла) на квадрат відстані між осями.

Д о в е д е н н я. Нехай центр мас C знаходиться в початку координат (рис. 13.8), вісь Az_1 паралельна до центральної осі Cz . Розглянемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ системи,

відстань проєкції якої на площину Cxy від осі Cz дорівнює R_i , а від осі Az_1 складає r_i . Відстань між осями становить h . Обчислимо осьовий момент інерції системи відносно осі Az_1 :

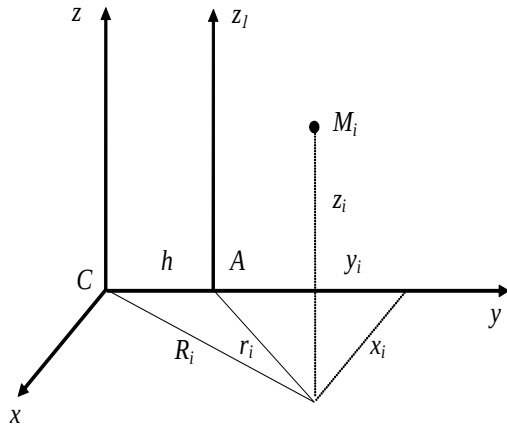


Рис. 13.8. До доведення теореми Гюйгенса

$$I_{z_1} = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i [(y_i - h)^2 + x_i^2] =$$

$$= \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) + h^2 \sum_{i=1}^n m_i - 2h \sum_{i=1}^n m_i y_i.$$

Але, оскільки $\sum_{i=1}^n m_i y_i = m y_C = 0$, а $x_i^2 + y_i^2 = R_i^2$, то отримаємо

$$I_{z_1} = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 + m h^2,$$

де за означенням осьового моменту інерції

$$\sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = I_z = I_C.$$

Звідси випливає, що

$$I_{z_1} = I_C + m h^2, \quad (13.9)$$

що і треба було довести.

З виразу (13.9) також видно, що вісь, яка проходить через центр інерції, є вісю найменшого моменту інерції серед всіх паралельних осей.

Завдання на самостійну роботу. Самостійно обчислити моменти інерції однорідного тонкого стрижня, однорідного циліндра та кулі. Розглянути наведені в табл. 1 головні осьові моменти інерції (маси).

3) Теорема про момент інерції відносно довільної осі, що проходить через дану точку

Встановимо залежність між моментом інерції твердого тіла (матеріальної системи) відносно довільної осі Ou , що проходить через початок координат, і моментами інерції відносно координатних осей Ox , Oy , Oz (рис. 13.9).

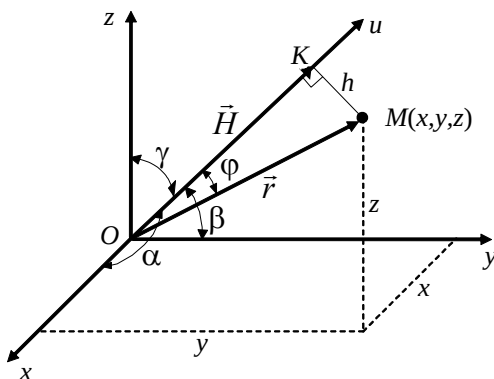


Рис. 13.9. До визначення моменту інерції тіла відносно довільної осі

Отже, необхідно знайти вираз h через задані величини x , y , z , λ , μ , ν .

Беручи до уваги, що $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, $\vec{H} \cdot \vec{r} = H_x x + H_y y + H_z z$, отримаємо

Позначимо напрямні косинуси осі Ou через λ , μ , ν , тобто

$$\lambda = \cos \alpha, \quad \mu = \cos \beta, \quad \nu = \cos \gamma.$$

Виберемо будь-яку точку тіла (системи) $M(x, y, z)$, та опустимо з неї перпендикуляр MK на вісь Ou , а також позначимо

$$\vec{OK} = \vec{H}, \quad \vec{OM} = \vec{r}, \quad MK = h, \quad \angle MOK = \varphi.$$

За означенням моменту інерції відносно осі маємо

$$I_u = \int_{(m)} h^2 dm. \quad (13.10)$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} \lambda + \frac{y}{r} \mu + \frac{z}{r} \nu.$$

Оскільки $H = r \cos \varphi = \lambda x + \mu y + \nu z$, то матимемо

$$\begin{aligned} h^2 &= r^2 - H^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - (\lambda x + \mu y + \nu z)^2 \\ &= \lambda^2(y^2 + z^2) + \mu^2(z^2 + x^2) + \nu^2(x^2 + y^2) - 2\lambda\mu xy - 2\mu\nu yz - 2\nu\lambda zx. \end{aligned}$$

Якщо підставити тепер значення h у вираз (13.10), то отримаємо наступну рівність:

$$I_u = I_x \lambda^2 + I_y \mu^2 + I_z \nu^2 - 2I_{xy} \lambda \mu - 2I_{yz} \mu \nu - 2I_{zx} \nu \lambda,$$

або

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha. \quad (13.11)$$

Теорема про моменти інерції відносно паралельних осей, та осей, що перетинаються, характеризують зміну осьового моменту інерції в залежності від положення осі.

Знання головних осей інерції дозволяє спростити рівняння руху твердого тіла. Якщо осі координат є головними осями інерції (у цьому разі відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю), тоді формула (13.11) набуває вигляду

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma.$$

Отже, дев'ять величин, а саме:

- три статичних моменти інерції

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad \sum_{i=1}^n m_i z_i \quad (\text{вони визначають положення центра мас}),$$

- три моменти інерції відносно координатних осей

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_y = \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2), \quad I_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2), \text{ та}$$

- три відцентрових моменти інерції

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i, \quad I_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i, \quad I_{zx} = \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i$$

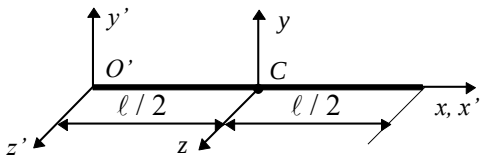
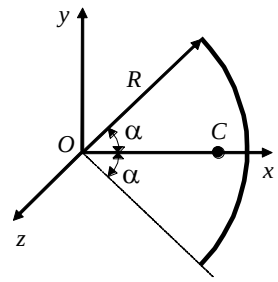
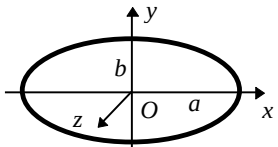
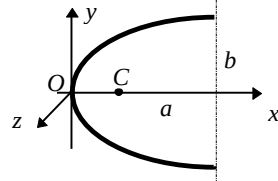
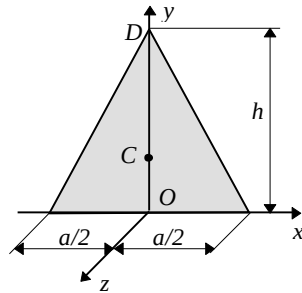
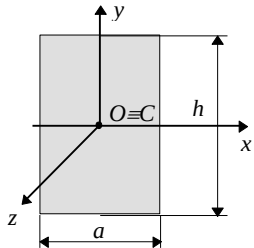
повністю характеризують розподіл мас системи (твердого тіла).

Завдання на самостійну роботу. Самостійно розглянути еліпсоїд інерції, головні і головні центральні осі інерції.

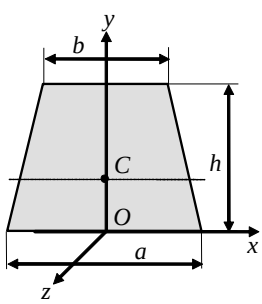
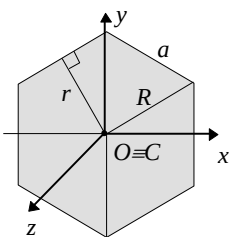
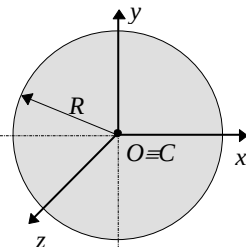
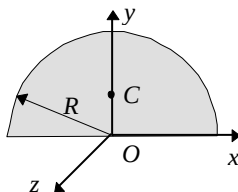
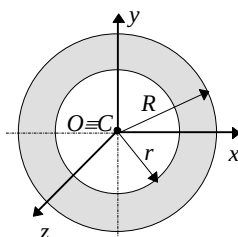
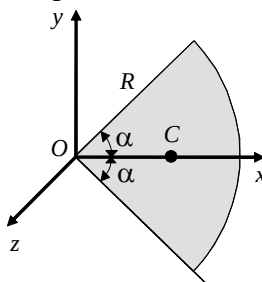
Література для СРС за цією темою

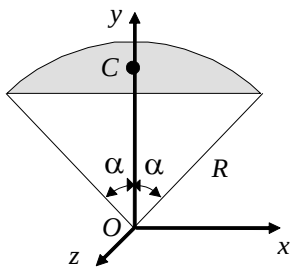
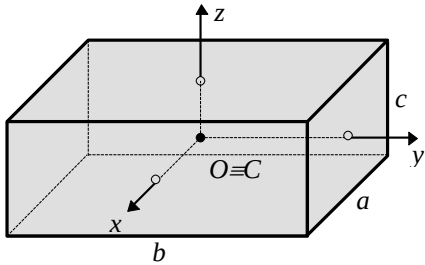
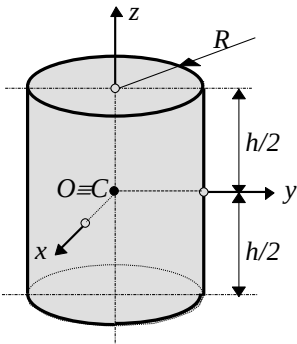
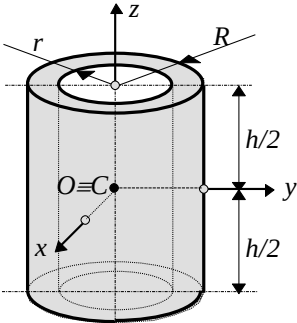
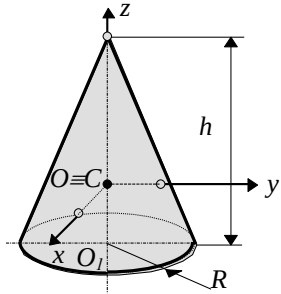
- 1) Павловський М. А., Путята Т. В. Теоретична механіка. - К.: Вища шк., Головне видавництво, 1985. - 328 с.
- 2) Фаворін М. В. Моменти інерції тіл. Довідник. - М.: Машинобудування, 1977. - 512 с.

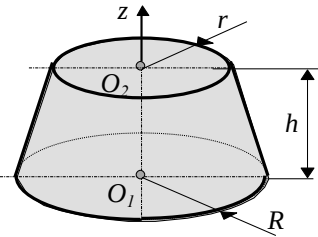
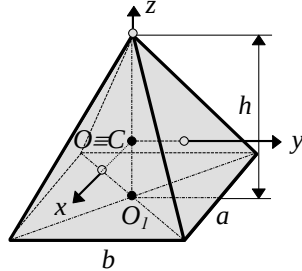
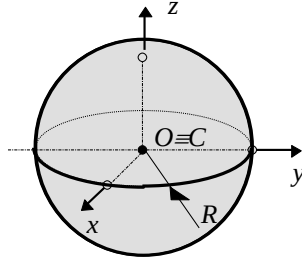
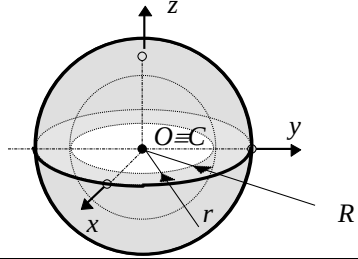
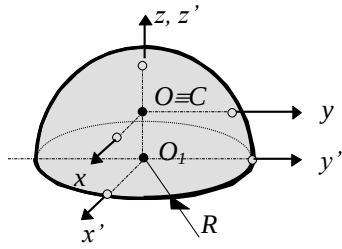
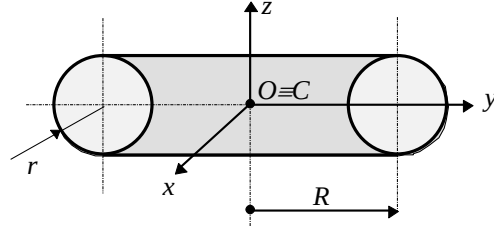
Таблиця 1. Головні осьові моменти інерції (маси) деяких однорідних ліній, поверхонь і тіл¹

№	Найменування фігури	Момент інерції маси
1.	Стрижень 	$I_y = I_z = \frac{m\ell^2}{12}; \quad I_x = I_{x'} = 0;$ $I_{y'} = I_{z'} = \frac{m\ell^2}{3}.$
2.	Дуга кола 	$I_x = \frac{mR^2}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right); \quad I_y = \frac{mR^2}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right);$ $I_z = mR^2;$ $OC = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$ Для $\alpha = \pi$ (повне коло): $I_x = I_y = \frac{mR^2}{2}; \quad I_z = mR^2.$
3.	Еліпс 	$I_x = \frac{mb^2}{4}; \quad I_y = \frac{ma^2}{4};$ $I_z = \frac{m}{4}(a^2 + b^2).$
4.	Парабола 	$I_x = \frac{mb^2}{4}; \quad I_y = \frac{ma^2}{4};$ $I_z = \frac{m}{35}(15a^2 + 7b^2);$ $OC = \frac{3}{5}a.$
5.	Рівнобедрений трикутник 	$I_x = \frac{mh^2}{6};$ $I_y = \frac{ma^2}{24};$ $I_z = \frac{m}{24}(a^2 + 4h^2);$ $OC = \frac{h}{3}.$
6.	Прямокутник 	$I_x = \frac{mh^2}{12};$ $I_y = \frac{ma^2}{12};$ $I_z = \frac{m}{12}(a^2 + h^2).$

¹ Позначення: m - маса, C - центр мас.

7.	Рівнобедрена трапеція 	$I_x = \frac{mh^2}{6} \cdot \frac{(a+3b)}{(a+b)};$ $I_y = \frac{m}{24}(a^2 + b^2);$ $I_z = \frac{m}{24} \cdot \frac{[4h^2(a+3b) + (a+b)(a^2 + b^2)]}{(a+b)};$ $OC = \frac{h}{3} \cdot \frac{(a+2b)}{(a+b)}.$
8.	Правильний багатокутник (шестикутник) 	$I_x = I_y = \frac{m(6R^2 - a^2)}{24} = \frac{m(12r^2 + a^2)}{48};$ $I_z = \frac{m(6R^2 - a^2)}{12} = \frac{m(12r^2 + a^2)}{24}.$
9.	Круг 	$I_x = I_y = \frac{mR^2}{4};$ $I_z = \frac{mR^2}{2}.$
10.	Півкруг 	$I_x = I_y = \frac{mR^2}{4};$ $I_z = \frac{mR^2}{2};$ $OC = \frac{4R}{3\pi}.$
11.	Круговий вінець 	$I_x = I_y = \frac{m}{4}(R^2 + r^2);$ $I_z = \frac{m}{2}(R^2 + r^2).$ Для тонкого обруча: $R \approx r$, и тогда $I_x = I_y = \frac{mR^2}{2}; \quad I_z = mR^2.$
12.	Круговий сектор 	$I_x = \frac{mR^2}{4} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right);$ $I_y = \frac{mR^2}{4} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right);$ $I_z = \frac{mR^2}{2};$ $OC = \frac{2}{3} R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$

13.	Круговий сегмент 	$I_x = \frac{mR^2}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right);$ $I_y = \frac{mR^2}{4} \left(1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right);$ $I_z = \frac{mR^2}{4} \left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right);$ $OC = \frac{4}{3} R \cdot \left(\frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right).$
14.	Прямокутний паралелепіпед 	$I_x = \frac{m}{12} (b^2 + c^2);$ $I_y = \frac{m}{12} (a^2 + c^2);$ $I_z = \frac{m}{12} (a^2 + b^2).$
15.	Прямий круговий циліндр 	$I_x = I_y = \frac{m}{12} (3R^2 + h^2);$ $I_z = \frac{mR^2}{2}.$
16.	Порожнистий круговий циліндр 	$I_x = I_y = \frac{m}{4} \left(R^2 + r^2 + \frac{h^3}{3} \right);$ $I_z = \frac{m}{2} (R^2 + r^2).$ Для тонкостінної труби: $R \approx r$, тоді $I_x = I_y = \frac{m}{12} (6R^2 + h^2);$ $I_z = mR^2.$
17.	Правильний прямий круговий конус 	$I_x = I_y = \frac{3}{20} m \left(R^2 + \frac{h^2}{4} \right);$ $I_z = \frac{3}{10} mR^2; \quad O_1C = \frac{h}{4}.$ Для бокової поверхні конуса: $I_z = \frac{mR^2}{2}.$

18.	Правильний прямий зрізаний конус	 $I_z = \frac{3}{10} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$ Для бокової поверхні зрізаного конуса: $I_z = \frac{m}{2} (R^2 + r^2).$
19.	Правильна прямокутна піраміда	 $I_x = \frac{m}{80} (4b^2 + 3h^2);$ $I_y = \frac{m}{80} (4a^2 + 3h^2);$ $I_z = \frac{m}{80} (a^2 + b^2);$ $O_1 C = \frac{h}{4}.$
20.	Сфера (куля)	 $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} m R^2.$ Для сферичної поверхні: $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} m R^2.$
21.	Порожниста сфера	 $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$
22.	Півсфера	 $I_x = I_y = \frac{83}{320} m R^2; \quad I_z = \frac{2}{5} m R^2;$ $I_{x'} = I_{y'} = I_{z'} = \frac{2}{5} m R^2;$ $O_1 C = \frac{3}{8} R.$
23.	Кругове кільце з круглим перерізом	 $I_x = I_y = \frac{m}{8} (4R^2 + 5r^2);$ $I_z = \frac{m}{4} (4R^2 + 3r^2).$

Тема 4.7. Основні теореми динаміки

14. Загальні теореми динаміки для системи матеріальних точок

14.1. Міри механічного руху

Покажемо методи складання перших інтегралів динамічних рівнянь руху, які називаються законами збереження механічного руху і зв'язані з введенням спеціальних функцій.

Прикладами таких функцій є міри механічного руху.

Першою мірою механічного руху є векторна функція $\vec{q} = m\vec{v}$, що називається кількістю руху матеріальної точки.

Кількість руху механічної системи дорівнює векторній сумі кількостей руху всіх точок, що входять до системи, тобто

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^n \vec{q}_i.$$

Вектор $\vec{Q}$ - головний вектор кількостей руху. Таким чином

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i.$$

Другою мірою механічного руху називається скалярна функція вигляду $T = \frac{mv^2}{2}$,

яка називається кінетичною енергією матеріальної точки.

Кінетичною енергією механічної системи називається сума кінетичних енергій всіх точок, що входять до системи, тобто

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Допоміжною мірою механічного руху є величина

$$\vec{k}_O = \vec{r} \times \vec{q},$$

яка називається моментом кількості руху матеріальної точки відносно центру O . Тут $\vec{r}$ - радіус-вектор точки, кількість руху якої дорівнює $\vec{q}$ (рис. 14.1).

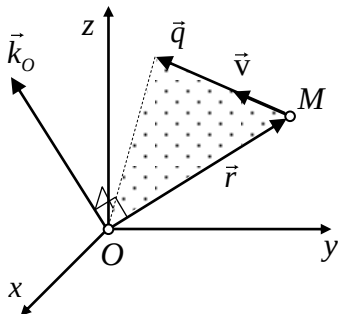


Рис. 14.1. До означення моменту кількості руху матеріальної точки

Головний момент кількостей руху (кінетичний момент) механічної системи дорівнює векторній сумі моментів кількостей руху всіх точок, що входять до системи.

$$\vec{K}_O = \sum_{i=1}^n \vec{k}_{Oi} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i).$$

14.2. Кількість руху механічної системи

За означенням центру мас маємо

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}, \quad (14.1)$$

звідки отримаємо

$$\sum m_i \vec{r}_i = m \vec{r}_C.$$

В такому разі запишемо вираз головного вектора кількостей руху

$$\vec{Q} = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt} (m \vec{r}_C) = m \frac{d\vec{r}_C}{dt} = m \vec{v}_C,$$

тобто

$$\vec{Q} = m \vec{v}_C. \quad (14.2)$$

Головний вектор кількостей руху механічної системи дорівнює добутку маси системи на швидкість центру мас.

З виразу (14.2) випливає, що

$$Q_\xi = m v_{C\xi}, \quad Q_\eta = m v_{C\eta}, \quad Q_\zeta = m v_{C\zeta}.$$

Проекції головного вектора кількостей руху механічної системи на осі нерухомої системи координат дорівнюють добуткам маси механічної системи на проекції швидкості центра мас на ті ж самі осі.

14.3. Теорема про зміну кількості руху механічної системи. Теорема про рух центру мас

Припустимо, що механічна система рухається під дією сил, які поділяються на зовнішні і внутрішні: $\vec{F}_i^E$ і $\vec{F}_i^I$ відповідно. Тоді для кожної точки системи можна записати

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i^E + \vec{F}_i^I.$$

Знайдемо суму всіх таких рівнянь для всіх матеріальних точок, що складають систему

$$\sum m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum \vec{F}_i^E + \sum \vec{F}_i^I.$$

Якщо далі взяти до уваги, що $\sum \vec{F}_i^I = \vec{0}$ і $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$, а сума $\sum \vec{F}_i^E$ дорівнює головному вектору зовнішніх сил $\vec{F}^E$, тоді отримаємо

$$\sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}^E, \text{ або } \frac{d}{dt} (\sum m_i \vec{v}_i) = \vec{F}^E.$$

Оскільки $\vec{Q} = \sum m_i \vec{v}_i$, то остаточно матимемо

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^E. \quad (14.3)$$

Таким чином, доведена **теорема I про зміну кількості руху** механічної системи (в диференціальній формі):

перша похідна за часом від головного вектора $\vec{Q}$ кількостей руху механічної системи, обчислена в будь-якій інерціальній системі відліку, дорівнює головному вектору всіх зовнішніх сил, що діють на механічну систему.

В проекціях на осі нерухомої системи координат $A\xi\eta\zeta$ (К) матимемо

$$\frac{dQ_\xi}{dt} = F_\xi^E, \quad \frac{dQ_\eta}{dt} = F_\eta^E, \quad \frac{dQ_\zeta}{dt} = F_\zeta^E. \quad (14.4)$$

Перші похідні за часом від проекцій головного вектора кількостей руху на координатні осі дорівнюють відповідним проекціям головного вектора зовнішніх сил на ті ж самі осі.

Припустимо, що $\vec{F}^E = \vec{F}^E(t)$, тоді беручи інтеграл від обох частин рівності (14.3) в границях від t_0 до t , отримаємо вираз

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \int_{t_0}^t \vec{F}^E dt, \quad (14.5)$$

який являє собою запис теореми І в інтегральній формі. Тут $\vec{Q}$ і $\vec{Q}_0$ - головний вектор кількостей руху механічної системи в моменти часу t і t_0 відповідно.

Розкриємо запис (14.5), беручи до уваги, що $\vec{F}^E = \sum \vec{F}_i^E$, -

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \int_{t_0}^t \vec{F}^E dt = \int_{t_0}^t \sum \vec{F}_i^E dt = \sum \int_{t_0}^t \vec{F}_i^E dt = \sum \int_{t_0}^t d\vec{S}_i^E = \sum \vec{S}_i^E = \vec{S}^E.$$

Тут $d\vec{S}_i^E = \vec{F}_i^E dt$ - елементарний імпульс сили $\vec{F}_i^E$,

$$\vec{S}_i^E = \int_{t_0}^t d\vec{S}_i^E = \int_{t_0}^t \vec{F}_i^E dt - \text{повний імпульс сили } \vec{F}_i^E,$$

$\vec{S}^E = \sum \vec{S}_i^E$ - головний вектор імпульсів всіх зовнішніх сил за проміжок часу $t - t_0$.

Таким чином маємо

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \vec{S}^E. \quad (14.6)$$

Це є так звана **теорема імпульсів** (теорема І в інтегральній формі):

зміна кількості руху механічної системи $\vec{Q} - \vec{Q}_0$ за деякий проміжок часу дорівнює головному вектору імпульсів зовнішніх сил за той же проміжок часу.

Проекціювання виразу (14.6) на координатні осі нерухомої системи координат ($A\xi\eta\zeta$)

дає

$$Q_\xi - Q_{0\xi} = S_\xi^E, \quad Q_\eta - Q_{0\eta} = S_\eta^E, \quad Q_\zeta - Q_{0\zeta} = S_\zeta^E. \quad (14.7)$$

Із виразів (14.7) випливає, що зміна проєкцій головного вектора кількостей руху механічної системи на координатні осі за деякий проміжок часу дорівнює проєкціям на ті ж самі осі головного вектора імпульсів зовнішніх сил.

Далі, з виразу (14.3), беручи до уваги, що $\vec{Q} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$, а також формулу

(14.1), матимемо

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \sum m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} (m\vec{r}_C) = m \frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} = m\vec{a}_C,$$

або остаточно запишемо вираз (14.3) у вигляді

$$m\vec{a}_C = \vec{F}^E, \quad (14.8)$$

де $\vec{a}_C$ є прискоренням центра мас.

Формула (14.8) є математичним виразом **теореми про рух центру мас**, яка формулюється наступним чином:

центр мас механічної системи рухається як вільна матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи, і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору зовнішніх сил, прикладених до системи.

В проєкціях на осі нерухомої системи координат з виразу (14.8) отримаємо

$$m\ddot{\xi}_C = F_\xi^E, \quad m\ddot{\eta}_C = F_\eta^E, \quad m\ddot{\zeta}_C = F_\zeta^E, \quad (14.9)$$

де ξ_C , η_C , ζ_C - координати центру мас у даній системі координат.

Рівняння (14.9) є диференціальними рівняннями руху центру мас механічної системи.

14.4. Закони збереження кількості руху механічної системи

1) Розглянемо замкнену механічну систему, на точки якої не діють ніякі зовнішні сили (тобто $\vec{F}^E = \vec{0}$). Тоді з рівняння (14.3) випливає, що

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q} = \text{const}. \quad (14.10)$$

В цьому рівнянні векторна стала $\overrightarrow{const}$ визначається із початкових умов.

Нехай у початковий момент часу t_0 точки M_i механічної системи з масами m_i мали початкові швидкості $\vec{v}_{i0}$. Тоді головний вектор кількостей руху у початковий момент часу дорівнюватиме $\vec{Q}_0 = \sum m_i \vec{v}_{i0}$, а оскільки має місце рівність (14.10), то матимемо

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0. \quad (14.11)$$

Це є *перший інтеграл* рівнянь руху механічної системи.

Оскільки $\vec{Q}_0 = \sum m_i \vec{v}_{i0} = m \vec{v}_{C0}$, тому враховуючи вираз (14.2), отримаємо з (14.11)

$$m \vec{v}_C = m \vec{v}_{C0} \Rightarrow \vec{v}_C = \vec{v}_{C0}, \quad (14.12)$$

інший вираз першого інтегралу рівнянь руху механічної системи.

Із виразу (14.12) випливає, що для замкненої механічної системи, яка рухається в інерціальній системі відліку, центр мас рухається з однією й тією ж постійною швидкістю, яка визначається із початкових умов.

Якщо проінтегрувати вираз (14.12), отримаємо

$$\vec{r}_C = \vec{r}_{C0} + \vec{v}_{C0} t. \quad (14.13)$$

Із цієї формули (14.13) випливає, що для замкненої механічної системи, яка рухається в інерціальній системі відліку, центр мас рухається прямолінійно і рівномірно.

2) Розглянемо випадок, коли механічна система не замкнена. Тут є два частинних випадки.

а) $\vec{F}^E = \vec{0}$. Тоді справедливі всі закони збереження кількості руху.

б) $\vec{F}^E \neq \vec{0}$, причому $F_\xi^E = 0$, $F_\eta^E \neq 0$, $F_\zeta^E \neq 0$. Тоді із першої з формул (14.4) отримаємо

$$\frac{dQ_\xi}{dt} = F_\xi^E \Rightarrow \frac{dQ_\xi}{dt} = 0 \Rightarrow Q_\xi = const,$$

яка визначається з початкових умов, і тоді матимемо

$$Q_\xi = Q_{\xi 0} \quad (14.14)$$

- *перший інтеграл у скалярній формі*.

Співвідношення (14.14) виражає закон збереження проекції головного моменту кількостей руху на вісь ξ .

14.5. Момент кількості руху матеріальної точки. Кінетичний момент механічної системи

Розглянемо спочатку одну матеріальну точку M маси m . Момент кількості руху цієї матеріальної точки відносно т. A ($\vec{k}_A$) визначається таким векторним добутком (див. рис. 14.2)

$$\vec{k}_A = \vec{r} \times \vec{q} = \vec{r} \times m\vec{v},$$

де $\vec{r} = \overrightarrow{AM}$, а $\vec{q} = m\vec{v}$ - кількість руху матеріальної точки.

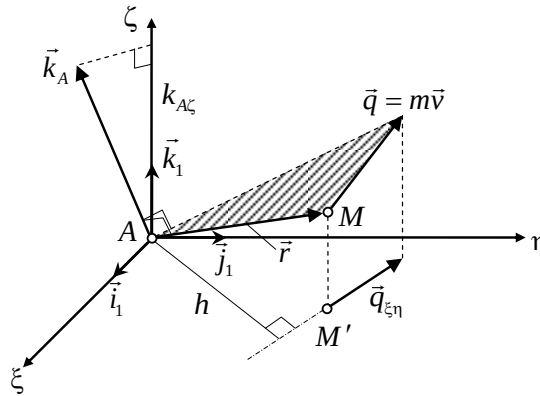


Рис. 14.2. До означення моменту кількості руху

З одного боку можна записати вираз $\vec{k}_A$ через визначник:

$$\vec{k}_A = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ \xi & \eta & \zeta \\ m\dot{\xi} & m\dot{\eta} & m\dot{\zeta} \end{vmatrix} = m(\eta\dot{\zeta} - \zeta\dot{\eta})\vec{i}_1 + m(\zeta\dot{\xi} - \xi\dot{\zeta})\vec{j}_1 + m(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi})\vec{k}_1,$$

а з іншого боку - через проекції

$$\vec{k}_A = k_{A\xi}\vec{i}_1 + k_{A\eta}\vec{j}_1 + k_{A\zeta}\vec{k}_1.$$

Порівняння цих виразів дає змогу записати

$$k_{A\xi} = m(\eta\dot{\zeta} - \zeta\dot{\eta}), \quad k_{A\eta} = m(\zeta\dot{\xi} - \xi\dot{\zeta}), \quad k_{A\zeta} = m(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}).$$

Ці співвідношення дозволяють визначити проекції вектора моменту кількості руху матеріальної точки на осі нерухокої системи координат $A\xi\eta\zeta$.

Зауважимо, що вектор $\vec{k}_A$ завжди перпендикулярний до площини, яка утворюється вектором $\vec{q}$ і точкою A . Тут $k_{A\zeta}$ є проекцією вектора моменту кількості руху точки M відносно точки A на вісь ζ . З іншого боку ця величина являє собою момент кількості руху точки M відносно осі ζ , тобто $k_{A\zeta} = q_{\xi\eta}h$. Знак моменту $k_{A\zeta}$ визначається наступним чином: момент $k_{A\zeta}$ вважається додатним, якщо спостерігач з додатного напрямку осі ζ бачить обертання точки M' під дією вектора $\vec{q}_{\xi\eta}$ проти руху годинникової стрілки.

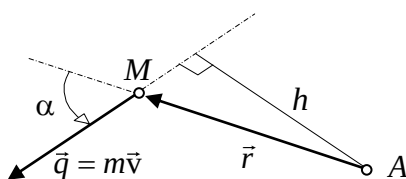


Рис. 14.3. Плече моменту кількості руху

З того, що $\vec{k}_A = \vec{r} \times \vec{q}$, випливає, що модуль k_A цього вектора дорівнюватиме $k_A = r q \sin(\vec{r}; \vec{q}) = r q \sin \alpha$, а оскільки $r \sin \alpha = h$, матимемо (див. рис. 14.3)

$$k_A = qh = mvh.$$

Нехай тепер маємо систему n - матеріальних точок M_i з масами m_i ($i = \overline{1, n}$).

Головний момент кількостей руху механічної системи $\vec{K}_A$ (або кінетичний момент механічної системи) відносно деякого центру A дорівнює векторній сумі моментів кількостей руху всіх точок, що входять до системи, відносно того ж центру A (рис. 14.4).

Таким чином маємо

$$\vec{K}_A = \sum_{i=1}^n \vec{k}_{Ai} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{q}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i). \quad (14.15)$$

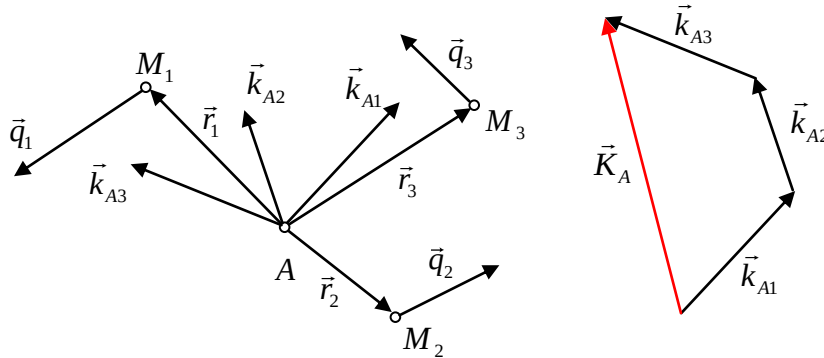


Рис. 14.4. Кінетичний момент механічної системи

Кінетичний момент системи можна визначити за допомогою суми визначників, а саме:

$$\vec{K}_A = \sum_i \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ m_i \dot{\xi}_i & m_i \dot{\eta}_i & m_i \dot{\zeta}_i \end{vmatrix},$$

а оскільки цей же вектор також можна подати у вигляді

$$\vec{K}_A = K_{A\xi} \vec{i}_1 + K_{A\eta} \vec{j}_1 + K_{A\zeta} \vec{k}_1,$$

тому з порівняння цих виразів випливає, що

$$\begin{cases} K_{A\xi} = n \sum m_i (\eta_i \dot{\zeta}_i - \zeta_i \dot{\eta}_i), \\ K_{A\eta} = n \sum m_i (\zeta_i \dot{\xi}_i - \xi_i \dot{\zeta}_i), \\ K_{A\zeta} = n \sum m_i (\xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i). \end{cases}$$

14.6. Перетворення кінетичного моменту механічної системи при зміні центра зведення

Кінетичний момент механічної системи відносно центру A має вигляд (14.15). Тут вектор $\vec{r}_i$ являє собою радіус-вектор, проведений з точки A (центру зведення) до i -тої точки M_i (див. рис. 14.5).

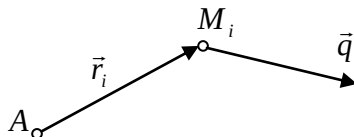


Рис. 14.5. Радіус-вектор i -тої точки

Подивимось тепер, як зміниться кінетичний момент $\vec{K}_A$ механічної системи при зміні центра зведення з A на B (рис. 14.6).

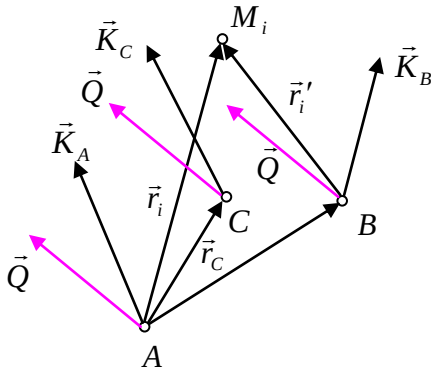


Рис. 14.6. До зміни кінетичного моменту при зміні центра зведення

Зауважимо, що за аналогією із статикою, головний вектор кількостей руху $\vec{Q}$, як і головний вектор системи сил $\vec{F}_O$, є незмінним вектором, який не залежить від вибору центра зведення.

Розглянемо в якості центра зведення іншу точку (т. B). Тоді матимемо

$$\vec{K}_B = \sum_{i=1}^n \vec{k}_{Bi} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_i). \quad (14.16)$$

З рисунку випливає, що $\vec{r}_i = \vec{AB} + \vec{r}'_i$, тоді

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{AB}. \quad (14.17)$$

Підставимо вираз (14.17) в формулу (14.16):

$$\vec{K}_B = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{AB}) \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i - \vec{AB} \times \sum_i m_i \vec{v}_i.$$

Зменшуване у правій частині цього виразу за формулою (14.15) дорівнює $\vec{K}_A$, а остання сума у від'ємнику складає $\vec{Q}$, тому остаточно можна записати:

$$\vec{K}_B = \vec{K}_A - \vec{AB} \times \vec{Q}$$

- формула, що визначає зміну кінетичного моменту механічної системи при зміні центру зведення. Тут від'ємник $\vec{AB} \times \vec{Q}$ є моментом вектора $\vec{Q}$, прикладеного в новому центрі B, відносно старого центра A.

Кінетичний момент механічної системи при зміні центру зведення змінюється на величину, яка дорівнює моменту головного вектора кількостей руху механічної системи ($\vec{Q}$), прикладеного в новому центрі, відносно старого центра зведення.

Для центра зведення в т. C матимемо

$$\vec{K}_C = \vec{K}_A - \vec{AC} \times \vec{Q} = \vec{K}_A - \vec{r}_C \times \vec{Q}.$$

14.7. Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи

Розглянемо механічну систему, що складається з n матеріальних точок M_i з масами m_i і рухається відносно інерціальної системи відліку. Сили, що діють на точки даної системи, можна розділити на зовнішні і внутрішні (рис. 14.7).

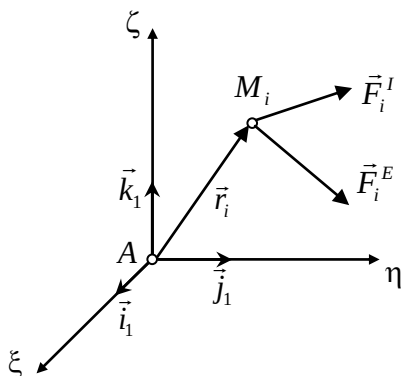


Рис. 14.7. Сили, прикладені до i -тої точки

Тут $\vec{F}_i^E$ - рівнодійна всіх зовнішніх сил, що діють на i -ту точку; $\vec{F}_i^I$ - рівнодійна всіх внутрішніх сил, що діють на i -ту точку.

Запишемо динамічні рівняння руху механічної системи

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i^E + \vec{F}_i^I, \quad i = \overline{1, n} \quad (14.18)$$

Помножимо векторно ліву і праву частини цих рівнянь (14.18) на $\vec{r}_i$ зліва

$$\vec{r}_i \times m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E + \vec{r}_i \times \vec{F}_i^I, \quad i = \overline{1, n}$$

Почленно підсумуємо ці рівняння

$$\sum \vec{r}_i \times m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E + \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^I. \quad (14.19)$$

Оскільки головний момент всіх внутрішніх сил, що діють на точки системи, відносно т. А дорівнює нулю, тобто $\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^I = \vec{0}$, а головний момент всіх зовнішніх сил відносно тієї ж точки є $\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E = \vec{M}_A^E$, то з рівняння (14.19), змінюючи зліва порядок підсумовування і диференціювання, отримаємо

$$\frac{d}{dt} \sum \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{M}_A^E,$$

звідки, враховуючи, що $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$, матимемо

$$\frac{d\vec{K}_A}{dt} = \vec{M}_A^E. \quad (14.20)$$

Запис (14.20) є математичним виразом **теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи в диференціальній формі**, яка формулюється наступним чином.

Перша похідна за часом від кінетичного моменту механічної системи, який обчислюється відносно центра зведення А, дорівнює головному моменту ($\vec{M}_A^E$) всіх зовнішніх сил, що діють на дану механічну систему, відносно того ж центра А.

Розглянемо вираз (14.20) в проекціях на осі нерухомої системи координат $A\xi\eta\zeta$

$$\frac{dK_{A\xi}}{dt} = M_{A\xi}^E, \quad \frac{dK_{A\eta}}{dt} = M_{A\eta}^E, \quad \frac{dK_{A\zeta}}{dt} = M_{A\zeta}^E,$$

де $M_{A\xi}^E, M_{A\eta}^E, M_{A\zeta}^E$ - проекції головного моменту зовнішніх сил ($\vec{M}_A^E$) на осі ξ, η, ζ відповідно.

Наслідок з теореми: *перша похідна за часом від проекції кінетичного моменту механічної системи на деяку вісь дорівнює проекції головного моменту зовнішніх сил на ту ж саму вісь.*

Якщо праву частину рівності (14.20) можна подати у вигляді функції, яка явно залежить від часу, тоді, помножуючи ліву і праву частини (14.20) на dt і інтегруючи їх за часом t в межах від t_0 до t , отримаємо

$$\vec{K}_A - \vec{K}_{A0} = \int_{t_0}^t \vec{M}_A^E dt, \quad (14.21)$$

де $\vec{K}_A$ і $\vec{K}_{A0}$ - кінетичні моменти механічної системи в моменти часу t і t_0 відповідно. Права частина виразу (14.21) являє собою *головний момент імпульсів зовнішніх сил*, а сам вираз – **теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи в інтегральній формі**.

Зміна кінетичного моменту механічної системи за деякий проміжок часу дорівнює головному моменту імпульсів зовнішніх сил, що діють на дану систему, за той же проміжок часу.

14.8. Закони збереження кінетичного моменту механічної системи

1) Розглянемо замкнену механічну систему (на неї не діють зовнішні сили).

Тоді головний вектор і головний момент зовнішніх сил дорівнюватимуть нулю, тобто

$$\vec{F}_A^E = \vec{0}, \quad \vec{M}_A^E = \vec{0}. \quad (14.22)$$

Якщо умова (14.22) виконується, тоді рівняння (14.20) попередньої лекції ($\frac{d\vec{K}_A}{dt} = \vec{M}_A^E$)

набуває вигляду $\frac{d\vec{K}_A}{dt} = \vec{0}$, звідки випливає, що кінетичний момент системи $\vec{K}_A$ є векторною сталою, яка визначається початковими умовами, тобто $\vec{K}_A = \overrightarrow{const}$.

Припустимо, що в початковий момент часу $t = t_0$: $\vec{r}_i = \vec{r}_{i0}$, а $\vec{v}_i = \vec{v}_{i0}$, тоді кінетичний момент у початковий момент часу визначиться так:

$$\vec{K}_{A0} = \sum (\vec{r}_{i0} \times m_i \vec{v}_{i0}),$$

а тому

$$\boxed{\vec{K}_A = \vec{K}_{A0}}. \quad (14.23)$$

Це співвідношення являє собою перший інтеграл рівнянь руху механічної системи (в векторній формі) і виражає закон збереження кінетичного моменту для замкненої механічної системи.

2) Розглянемо незамкнену механічну систему (на неї діють зовнішні сили).

а) Розглянемо випадок, коли головний вектор і головний момент зовнішніх сил дорівнюють нулю, тобто

$$\vec{F}_A^E = \vec{0}, \quad \vec{M}_A^E = \vec{0}. \quad (14.24)$$

Для цього випадку є справедливим співвідношення (14.23), тобто для незамкненої системи, у разі виконання умов (14.24), кінетичний момент є сталим.

б) Нехай тепер $\vec{M}_A^E \neq \vec{0}$, але $M_{A\xi}^E = 0$. Скористаємося тоді виразами (14.20) з

попередньої лекції ($\frac{dK_{A\xi}}{dt} = M_{A\xi}^E$, $\frac{dK_{A\eta}}{dt} = M_{A\eta}^E$, $\frac{dK_{A\zeta}}{dt} = M_{A\zeta}^E$), з першого з яких

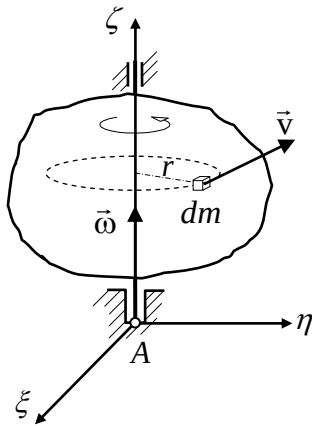
отримаємо: $\frac{dK_{A\xi}}{dt} = 0$, звідки маємо $K_{A\xi} = const$ (ця скалярна стала, як і раніше, визначається з початкових умов), тому матимемо

$$\boxed{K_{A\xi} = K_{A\xi 0}}.$$

Це співвідношення являє собою перший скалярний інтеграл рівнянь руху механічної системи і виражає закон збереження проекції кінетичного моменту незамкненої механічної системи на вісь $A\xi$.

14.9. Кінетичний момент твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі

В тілі, що обертається навколо нерухомої осі (рис. 14.8), виділимо елементарний об'єм з масою dm . Тоді швидкість цього об'єму становитиме $\vec{v}$ ($v = \omega r$), кількість руху -



$$dQ = v dm = \omega r dm.$$

Елементарний кінетичний момент відносно осі $A\zeta$ дорівнюватиме

$$dK_\zeta = r dQ = r v dm = \omega r^2 dm.$$

Для всього тіла матимемо (інтегруємо за масою)

$$K_\zeta = \omega \int_{(m)} r^2 dm.$$

Оскільки інтеграл у правій частині цього виразу є осевим моментом інерції тіла відносно осі обертання $A\zeta$, тобто,

$$I_\zeta = \int_{(m)} r^2 dm,$$

тому отримаємо

$$K_\zeta = I_\zeta \omega.$$

Кінетичний момент твердого тіла (K_ζ) відносно осі обертання $A\zeta$ дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно цієї ж осі і кутової швидкості обертання тіла.

14.10. Кінетична енергія (T)

1) Кінетична енергія матеріальної точки і системи матеріальних точок

Як зазначалося раніше, кінетична енергія матеріальної точки маси m дорівнює

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m v^2.$$

Розглянемо вирази кінетичної енергії точки для трьох способів задання руху точки.

а) Векторний спосіб

Рух задається радіус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$, тоді швидкість точки дорівнюватиме $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$,

звідки отримуємо вираз кінетичної енергії

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2.$$

б) Координатний спосіб

Рух задається виразами: $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$, $\zeta = \zeta(t)$, тому $v = \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2}$, а вираз кінетичної енергії набуде вигляду

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2).$$

в) Натуральний спосіб

Рух задається дуговою координатою точки як функції часу: $s = s(t)$, тоді $\vec{v} = v_\tau \vec{\tau}$, де $v_\tau = \dot{s}$, а для кінетичної енергії матимемо такий вираз:

$$T = \frac{1}{2} m (v_\tau \vec{\tau} \cdot v_\tau \vec{\tau}) = \frac{1}{2} m v_\tau^2 = \frac{1}{2} m \dot{s}^2,$$

тому що $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1$.

Розглянемо тепер систему матеріальних точок M_i з масами m_i ($i = \overline{1, n}$). Припустимо, що кожна точка має швидкість $\vec{v}_i$, тоді

$$T = \sum T_i = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2.$$

Кінетична енергія механічної системи дорівнює сумі кінетичних енергій всіх тіл, що входять до даної системи.

2) Перетворення кінетичної енергії механічної системи при переході від неінерціальної системи відліку, що рухається поступально, до нерухомої

Розглянемо механічну систему, що складається з n матеріальних точок з масами m_i , які рухаються в неінерціальній системі відліку (K'), яка, в свою чергу, рухається поступально відносно нерухомої (інерціальної) системи відліку (K).

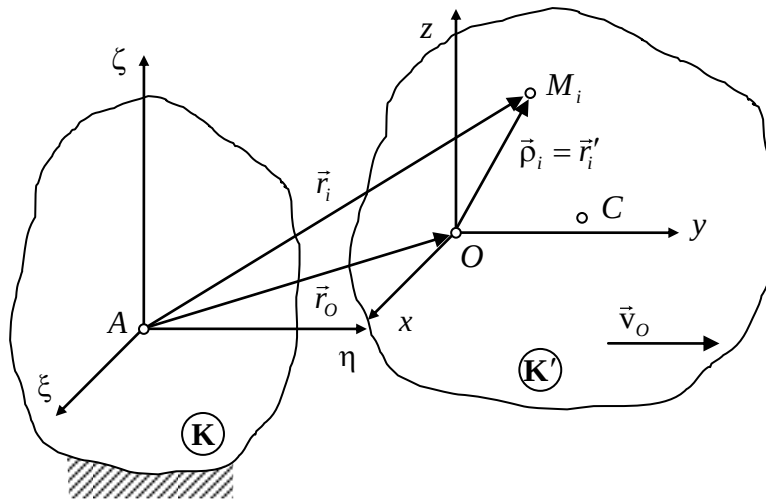


Рис. 14.9. Неінерціальна (K') і інерціальна (K) системи відліку

Тут $\vec{v}_O$ - швидкість поступального руху неінерціальної системи відліку.

З рисунку випливає, що $\vec{r}_i = \vec{r}_O + \vec{r}'_i$. Звідси шляхом диференціювання отримуємо

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{v}'_i,$$

де $\vec{v}'_i$ - швидкість i -тої точки в рухомій системі координат $Ox\eta z$.

Тоді кінетична енергія механічної системи визначиться за формулою:

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i (\vec{v}_O + \vec{v}'_i)^2}{2} = \sum \frac{m_i v_O^2}{2} + \sum m_i \vec{v}_O \cdot \vec{v}'_i + \sum \frac{m_i (\vec{v}'_i)^2}{2} = \frac{m v_O^2}{2} + T' + m \vec{v}_O \cdot \vec{v}'_C,$$

де $T' = \sum \frac{m_i (\vec{v}'_i)^2}{2}$ - кінетична енергія механічної системи в її русі відносно рухомої системи координат. Останній доданок у попередньому виразі для T утворився так:

$$\sum m_i \vec{v}_O \cdot \vec{v}'_i = \vec{v}_O \cdot \sum m_i \vec{v}'_i = \vec{v}_O \cdot m \vec{v}'_C = m \vec{v}_O \cdot \vec{v}'_C.$$

Таким чином, маємо

$$T = \frac{m v_O^2}{2} + T' + m \vec{v}_O \cdot \vec{v}'_C. \quad (14.25)$$

Вираз (14.25) являє собою формулу перетворення кінетичної енергії механічної системи при переході від неінерціальної системи відліку, що рухається поступально, до нерухомої (інерціальної).

3) Теорема Кеніґа

Введемо поняття кенігової системи відліку.

Якщо початок рухомої системи координат помістити в центр мас механічної системи і при цьому вказану систему змусити рухатись поступально, так, щоб осі Cx, Cy, Cz весь час руху були паралельні осям $A\xi, A\eta, A\zeta$ відповідно, тоді така система відліку називається кеніговою і позначається K^C .

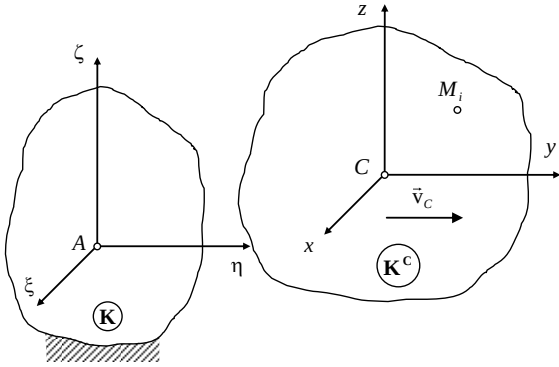


Рис. 14.10. Кенігова система відліку

За неінерціальну систему відліку прийемо кенігову систему відліку (рис. 14.10). Для цієї системи відліку маємо: $\vec{v}_O = \vec{v}_C$, а $\vec{v}'_C = \vec{0}$, оскільки швидкість початку рухомої системи координат (центру мас C) по відношенню до неї самої дорівнює нулю.

Тоді вираз (14.25) набуває вигляду

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + T'. \quad (14.26)$$

Це і є математичний вираз **теорема Кеніґа**:

Кінетична енергія механічної системи відносно нерухомої системи відліку дорівнює сумі двох доданків: кінетичній енергії поступального руху механічної системи, що визначається рухом центру мас за умови, що маса всієї системи зосереджена в центрі мас, і кінетичній енергії механічної системи в її відносному русі в кеніговій системі відліку.

Тепер розглянемо рух механічної системи як складний, приймаючи за переносний рух поступальний рух рухомої системи відліку, а за відносний – рух механічної системи в кеніговій системі відліку.

За теоремою про додавання швидкостей при складному русі точки для кожної i -тої точки маємо

$$\vec{v}_{ai} = \vec{v}_{ei} + \vec{v}_{ri},$$

де $\vec{v}_{ai} = \vec{v}_i$ - абсолютна швидкість точки, $\vec{v}_{ei} = \vec{v}_C$ - переносна швидкість, а відносна швидкість $\vec{v}_{ri} = \vec{v}'_i$.

В такому разі знайдемо вираз кінетичної енергії механічної системи з урахуванням наведених вище залежностей:

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i}{2} (\vec{v}_C + \vec{v}'_i)^2 = \sum \frac{m_i}{2} v_C^2 + \sum m_i \vec{v}_C \cdot \vec{v}'_i + \sum \frac{m_i}{2} (v'_i)^2 = \frac{mv_C^2}{2} + T' = T_e + T_r.$$

Тут враховано, що $\sum m_i \vec{v}_C \cdot \vec{v}'_i = \vec{v}_C \sum m_i \vec{v}'_i = \vec{v}_C \cdot m \vec{v}'_C = 0$, оскільки $\vec{v}'_C = \vec{0}$.

Таким чином, остаточно отримуємо

$$T = T_e + T_r,$$

тобто кінетична енергія механічної системи в її абсолютному русі дорівнює сумі кінетичних енергій в її переносному і відносному рухах.

Проаналізуємо частинні випадки, що впливають з виразу (14.26) теорема Кеніґа.

а) Для поступального руху твердого тіла маємо:

$$T = \frac{mv_C^2}{2}.$$

б) Визначимо кінетичну енергію тіла, яке обертається навколо нерухомої осі $A\zeta$.

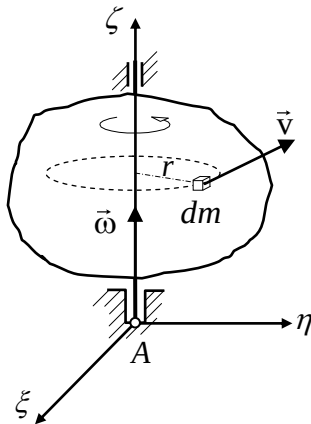


Рис. 14.11. До визначення кінетичної енергії тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Для цього виділимо елементарний об'єм тіла з масою dm і знайдемо елементарну кінетичну енергію цього об'єму (див. рис. 14.11):

$$\frac{dmv^2}{2} = \frac{dm}{2}(\omega r)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 dm,$$

інтегрування якого за масою дає

$$T = \frac{1}{2} \int_{(m)} \omega^2 r^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int_{(m)} r^2 dm = \frac{1}{2} I_\zeta \omega^2.$$

Таким чином, *кінетична енергія твердого тіла в його обертальному русі навколо осі $A\zeta$ дорівнює половині добутку моменту інерції цього тіла відносно осі, навколо якої воно обертається, на квадрат кутової швидкості обертання.*

в) Якщо тіло здійснює плоскопаралельний рух, тоді його кінетична енергія визначиться за теоремою Кеніга:

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{1}{2} I_{zC} \omega^2.$$

Теорема Кеніга (для плоскопаралельного руху):

кінетична енергія тіла в його плоскопаралельному русі дорівнює сумі двох доданків: кінетичній енергії поступального руху твердого тіла, яка визначається рухом центру мас, і кінетичній енергії цього тіла в обертальному русі відносно осі Oz , що проходить через центр мас тіла.

Задача 1

Визначити кінетичну енергію механічної системи, що складається з суцільного однорідного шківa маси m_2 та радіуса r і тягаря маси m_1 , з'єднаних ідеальним тросом (рис. 1). Шків обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω .

Дано: $m_1, m_2; \omega, r$.

Знайти: T .

Розв'язання

Кінетична енергія T даної механічної системи складається з двох складових: кінетичної енергії T_1 тягаря та кінетичної енергії T_2 шківу, тобто $T = T_1 + T_2$.

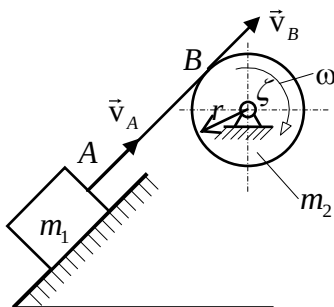


Рис. 1. Досліджувана механічна система

Тягар рухається поступально, тому його кінетична енергія має вираз

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_C^2 = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 = \frac{1}{2} m_1 v_B^2 = \frac{1}{2} m_1 r^2 \omega^2,$$

тому що $v_A = v_B = \omega r$.

Шків обертається навколо нерухомої осі, тому його кінетична енергія визначиться за формулою

$$T_2 = \frac{1}{2} I_\zeta \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{m_2 r^2}{2} \omega^2 = \frac{1}{4} m_2 r^2 \omega^2.$$

Зауважимо, що осьовий момент інерції диска залежить від розподілу його маси (див. табл. 2).

Таблиця 2. Осьовий момент інерції диску

Тип диску	Ескіз поперечного перерізу	Осьовий момент інерції
Суцільний однорідний диск		$I_z = \frac{1}{2}mr^2$
Диск з масою, рівномірно розподіленою по його ободу		$I_z = mr^2$

Таким чином, кінетична енергія цієї механічної системи дорівнюватиме

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right) r^2 \omega^2.$$

Задача 2

Визначити кінетичну енергію механічної системи, що складається з суцільного однорідного шківa маси m_2 та радіуса r і тягаря маси m_1 , який являє собою суцільний однорідний диск, з'єднаних ідеальним тросом (рис. 1). Шків обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω , а тягар рухається вздовж похилої площини без ковзання.

Дано: $m_1, m_2; \omega, r$.

Знайти: T .

Розв'язання

Кінетична енергія T даної механічної системи складається з двох складових: кінетичної енергії тягаря T_1 та кінетичної енергії шківу T_2 , тобто $T = T_1 + T_2$.

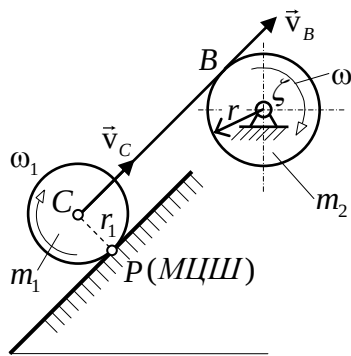


Рис. 1. Досліджувана механічна система

Кінетична енергія шківу, що обертається навколо нерухомої осі, визначиться за формулою (див. попередню задачу 1):

$$T_2 = \frac{1}{2} I_{\zeta} \omega^2 = \frac{1}{4} m_2 r^2 \omega^2.$$

Тягар знаходиться у плоскопаралельному русі, тому його кінетична енергія за теоремою Кеніга матиме вираз

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC} \omega_1^2,$$

а оскільки $v_C = v_B = \omega r$ та $\omega_1 = \frac{v_C}{r_1} = \frac{r}{r_1} \omega$, тому

$$T = \frac{1}{2} m_1 r^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 r_1^2}{2} \frac{r^2}{r_1^2} \omega^2 + \frac{1}{4} m_2 r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m_1 r^2 \omega^2 + \frac{1}{4} m_1 r^2 \omega^2 + \frac{1}{4} m_2 r^2 \omega^2,$$

і остаточно

$$T = \frac{1}{4} (3m_1 + m_2) r^2 \omega^2.$$

14.11. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

1) Розглянемо вільну матеріальну точку (рис. 14.12)

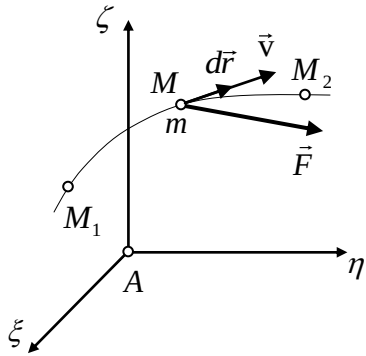


Рис. 14.12. Вільна матеріальна точка

На підставі II-го закону Ньютона маємо

$$\boxed{\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}}. \quad (14.27)$$

Помножимо цей вираз (14.27) скалярно на вектор $\vec{v}$

$$(\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}): \quad \vec{v} \cdot \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Внесемо $\vec{v}$ під знак диференціала:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}, \text{ або } d \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Величина $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ є *елементарною роботою* сили $\vec{F}$ на елементарному дійсному переміщенні $d\vec{r}$, і позначається $\vec{F} \cdot d\vec{r} = d'A$. Тоді останній вираз можна перетворити таким чином:

$$\boxed{dT = d'A}.$$

Це є математичний запис **теорему** про зміну кінетичної енергії вільної матеріальної точки в диференціальній формі:

Елементарний приріст кінетичної енергії вільної матеріальної точки дорівнює елементарній роботі сил, що діють на матеріальну точку.

Штрих в позначенні елементарної роботи $d'A$ означає, що вираз $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ не є повним диференціалом деякої функції координат точки і, можливо, часу.

Далі, проінтегрувавши вираз $dT = d'A$, матимемо

$$\boxed{T - T_0 = A}. \quad (14.28)$$

В цій формулі $A = \int_{M_1 M_2} d'A = \int_{M_1 M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, де $d\vec{r} = \vec{v}dt$.

Формула (14.28) є математичним записом **теорему** про зміну кінетичної енергії вільної матеріальної точки в інтегральній формі:

Зміна кінетичної енергії вільної матеріальної точки на деякому відрізку дуги її траєкторії дорівнює роботі сили, прикладеної до точки, на тому ж відрізку дуги траєкторії ($M_1 M_2$).

Скалярний добуток $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ є елементарною роботою по переміщенню точки прикладання сили. T_0, T - вирази кінетичної енергії матеріальної точки, які відповідають її положенням M_1 і M_2 на дузі траєкторії.

Таким чином, можна записати такий вираз цієї теорему:

$$\boxed{\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A}. \quad (14.29)$$

Із виразів (14.28) і (14.29) випливає, що зміна другої міри механічного руху вільної матеріальної точки за деякий проміжок часу визначається роботою сили, яка діє на цю точку, на відповідному цьому проміжку часу скінченному відрізку дуги траєкторії.

2) Теорема про зміну кінетичної енергії невільної матеріальної точки

Нехай матеріальна точка маси m рухається по ідеально гладенькій поверхні, рівняння якої має вигляд:

$$\varphi(x, y, z, t) = 0.$$

Рух невільної матеріальної точки описується рівнянням (10.4) лекції 4:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R},$$

де $\vec{F}$ - рівнодійна активних сил, а $\vec{R}$ - рівнодійна реакцій в'язей. Тобто сили, прикладені до точки, розділені на активні і реакції в'язей.

Так як $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, з останнього виразу отримаємо

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{R}. \quad (14.30)$$

Враховуючи, що елементарне переміщення точки дорівнює $d\vec{r} = \vec{v}dt$, та домножуючи скалярно обидві частини рівняння (14.30) на $d\vec{r}$, матимемо

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = \vec{F} \cdot d\vec{r} + \vec{R} \cdot d\vec{r},$$

або

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F} \cdot d\vec{r} + \vec{R} \cdot d\vec{r}. \quad (14.31)$$

Розглянемо більш детально останній доданок $\vec{R} \cdot d\vec{r}$ у формулі (14.31). Реакцію в'язі $\vec{R}$ подамо у вигляді підстановки Лагранжа (оскільки в'язь ідеальна)

$$\vec{R} = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} \varphi,$$

$$\text{де } \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}.$$

Оскільки $d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$, то $\vec{R} \cdot d\vec{r}$ набуде вигляду

$$\vec{R} \cdot d\vec{r} = \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right). \quad (14.32)$$

Вираз повного диференціалу функції в'язі

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = 0$$

помножимо на λ , тоді матимемо

$$\lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt \right) = 0,$$

звідки отримаємо

$$\lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt.$$

В цьому разі вираз (14.32) для $\vec{R} \cdot d\vec{r}$ запишеться наступним чином

$$\vec{R} \cdot d\vec{r} = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt.$$

Таким чином, рівняння (14.31) набуває остаточного вигляду

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = d'A^a - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt, \quad (14.33)$$

де $d'A^a = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ - елементарна робота активних сил.

Рівняння (14.33) виражає *теорему про зміну кінетичної енергії для невідільної матеріальної точки*.

У разі стаціонарних в'язей (що не змінюються з часом) матимемо $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, і тоді вираз (14.33) набуде вигляду

$$dT = d'A^a, \quad (14.34)$$

який є математичним виразом наступної теореми.

Теорема

У разі стаціонарних в'язей елементарний приріст кінетичної енергії невідільної матеріальної точки, яка рухається по ідеальній гладенькій поверхні, дорівнює елементарній роботі активних сил, що діють на цю точку.

Штрих у виразі (14.34), а також у всіх попередніх, означає, що скалярний добуток $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ не є повним диференціалом деякої функції координат точки і, можливо, часу.

14.12. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи

Розглянемо систему n -точок, на кожную з яких діють внутрішні і зовнішні сили.

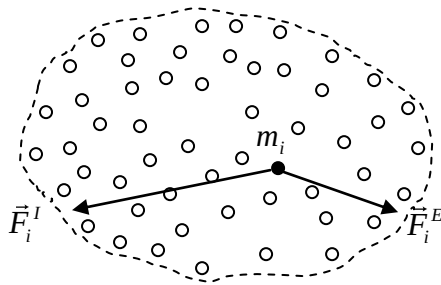


Рис. 14.13. Внутрішні і зовнішні сили, прикладені до точок системи

Для кожної точки запишемо вираз теореми про зміну кінетичної енергії (див. рис. 14.13)

$$\frac{m_i v_{2i}^2}{2} - \frac{m_i v_{1i}^2}{2} = A_i^E + A_i^I.$$

Додаючи такі рівняння, записані для всіх точок системи, отримаємо

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{2i}^2}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{1i}^2}{2} = \sum_{i=1}^n A_i^E + \sum_{i=1}^n A_i^I,$$

або

$$\boxed{T_2 - T_1 = A^E + A^I}.$$

Таким чином, доведена **теорема** (про зміну кінетичної енергії механічної системи): *приріст кінетичної енергії системи за деякий проміжок часу дорівнює повній роботі, виконаній зовнішніми і внутрішніми силами, прикладеними до системи, за той же проміжок часу.*

14.13. Робота сили

Елементарною роботою сили $\vec{F}$ на елементарному переміщенні $d\vec{r}$ називається скалярна міра дії сили, що дорівнює скалярному добутку сили $\vec{F}$ на елементарне переміщення $d\vec{r}$ точки прикладення сили, тобто

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (14.35)$$

Криволінійний інтеграл від виразу (14.35), якщо його взяти вздовж дуги $M_1 M_2$ кривої, яку описує точка прикладення сили, являє собою *повну роботу сили*.

$$\boxed{A = \int_{M_1 M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}}. \quad (14.36)$$

Ця величина ще називається *роботою сили на скінченному переміщенні*.

Записи (14.35) і (14.36) відповідають випадку, коли рух точки заданий векторним способом.

Для координатного способу задання руху точки маємо:

$$d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

і відповідно

$$A = \int_{M_1 M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (14.37)$$

Так як $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$, то $dx = \dot{x}dt$, $dy = \dot{y}dt$, $dz = \dot{z}dt$, і тоді отримаємо такий вираз для повної роботи сили:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt.$$

Для натурального способу задання руху матеріальної точки, для якого $d\vec{r} = \vec{\tau} ds$ ($\vec{\tau}$ - одиничний вектор дотичної, $\tau = 1$) вираз повної роботи має вигляд

$$A = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = \int_{s_1}^{s_2} F ds \cos(\vec{F}; \vec{\tau}).$$

Тут s_1, s_2 - дугові координати, які відповідають положенням M_1 і M_2 матеріальної точки.

Зауважимо, що робота сили на елементарному переміщенні є інваріантом (незмінною) по відношенню до вибору системи координат, що впливає з властивостей скалярного добутку.

Якщо на матеріальну точку діє *система сил*, які зводяться до рівнодійної, тоді елементарна робота рівнодійної дорівнюватиме сумі елементарних робіт всіх сил, що діють на точку, тобто

$$d'A = \sum_{i=1}^n d'A_i.$$

Дійсно,

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{r} = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \dots + \vec{F}_n \cdot d\vec{r} = d'A_1 + d'A_2 + \dots + d'A_n = \sum_{i=1}^n d'A_i.$$

14.14. Робота сили ваги

Нехай матеріальна точка M рухається у просторі по дузі траєкторії під дією лише сили ваги ($m\vec{g}$) цієї точки.

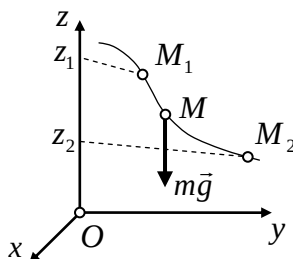


Рис. 14.14. До обчислення роботи сили ваги

Обчислимо повну роботу сили $m\vec{g}$ за формулою (14.37), для цього спочатку знайдемо проекції сили $\vec{F}$ ($= m\vec{g}$) на осі системи координат $Oxyz$ (рис. 14.14):

$F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = -mg$. Тоді за формулою (14.37) матимемо:

$$A = - \int_{z_1}^{z_2} mg dz = -mg(z_2 - z_1) = -mgh.$$

Таким чином, маємо

$$A = -mgh,$$

де $h = z_2 - z_1 < 0$.

Зауважимо, що коли точка наближається до поверхні Землі ($z_2 < z_1$ і $h < 0$), тоді $A > 0$, і навпаки, коли точка віддаляється від поверхні Землі, тоді $z_2 > z_1$, $h > 0$, а $A < 0$.

Робота сили ваги матеріальної точки:

- дорівнює добутку модуля цієї сили на різницю висот початкового і кінцевого положень точки;
- ніколи не залежить від форми траєкторії, по якій точка перейшла з початкового положення в кінцеве;
- є додатною, якщо кінцеве положення точки нижче за початкове;
- дорівнює нулю у разі, якщо точка повертається на ту ж саму висоту над горизонтальною площиною, на якій вона знаходилася спочатку.

14.15. Робота сил, що діють на механічну систему

Елементарною роботою сил, що діють на механічну систему, називається сума елементарних робіт всіх сил (зовнішніх і внутрішніх), що діють на систему.

$$d'A_i = d'A_i^E + d'A_i^I, \quad A_i = \int d'A_i^E + \int d'A_i^I,$$

$$d'A = \sum_{i=1}^n d'A_i, \quad A^I = 0.$$

Без доведення прийемо, що сума елементарних робіт всіх сил, що діють на тверде тіло (незмінювану систему матеріальних точок), є сумою елементарних робіт лише зовнішніх сил:

$$d'A = \sum_{i=1}^n d'A_i^E, \quad \text{або} \quad \boxed{d'A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^E \cdot d\vec{r}_i}.$$

14.16. Елементарна робота реакцій ідеальних в'язей

Розглянемо n матеріальних точок M_i ($i = \overline{1, n}$), які підкорені j в'язям ($j = \overline{1, \kappa}$), причому $\kappa < n$. Тоді через те, що в'язі ідеальні, можна записати:

$$\vec{R}_j = \lambda_j \overrightarrow{\text{grad}}(\varphi_j),$$

а $\vec{R}_i = \sum_{\mu} \vec{R}_{i\mu}$ є рівнодієюною реакцій тих μ в'язей ($\mu \subset \kappa$), що прикладені до i -тої точки.

Рівнянням ідеальної стаціонарної утримуючої в'язі є

$$\varphi_j(x, y, z) = 0.$$

Знайдемо елементарну роботу реакції такої ідеальної в'язі на дійсному елементарному переміщенні:

$$d'A_i^R = \vec{R}_i \cdot d\vec{r}_i.$$

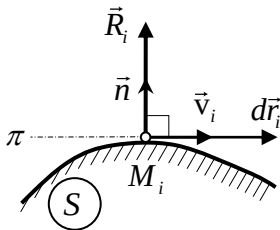


Рис. 14.15. Реакція ідеальної в'язі

Для ідеальної в'язі вектор її реакції $\vec{R}_i$ завжди напрямлений перпендикулярно до поверхні в'язі, тобто по нормалі (з ортом $\vec{n}$) до неї в даній точці M_i (рис. 14.15). Вектор $d\vec{r}_i$ розташований у дотичній площині π до поверхні S у точці M_i , оскільки $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$ і збігається за напрямком з вектором швидкості точки $\vec{v}_i$, який завжди напрямлений по дотичній до траєкторії в т. M_i .

Тому вектори $\vec{R}_i$ та $d\vec{r}_i$ завжди взаємно перпендикулярні і їх

скалярний добуток дорівнює нулю, тобто $\vec{R}_i \cdot d\vec{r}_i = 0$, тому отримаємо

$$\boxed{d'A^R = \sum d'A_i^R = \sum \vec{R}_i \cdot d\vec{r}_i = 0}.$$

Отже, елементарна робота реакцій ідеальних в'язей на елементарних переміщеннях дорівнює нулю.

14.17. Елементарна робота сил, що прикладені до твердого тіла

Розглянемо тверде тіло, яке здійснює вільний рух. На точки M_i цього тіла діють зовнішні сили $\{\vec{F}_i^E\}$. Тоді матимемо наступний вираз елементарної роботи цих сил:

$$d'A = \sum \vec{F}_i^E \cdot d\vec{r}_i = \sum \vec{F}_i^E \cdot \vec{v}_i dt. \quad (14.38)$$

З курсу кінематики відомо, що швидкість будь-якої точки вільного тіла визначається формулою

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i, \quad (14.39)$$

де $\vec{v}_O$ - швидкість точки, яку приймають за полюс;

$\vec{\omega}$ - кутова швидкість тіла,

$\vec{\rho}_i$ - радіус-вектор точки M_i відносно полюса.

Тепер підставимо формулу (14.39) в вираз (14.38):

$$d'A = \sum \vec{F}_i^E \cdot (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) dt = \sum \vec{F}_i^E \cdot \vec{v}_O dt + \sum \vec{F}_i^E \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) dt.$$

Розглянемо кожний доданок окремо:

$$\sum \vec{F}_i^E \cdot \vec{v}_O dt = \vec{v}_O \cdot \underbrace{\sum \vec{F}_i^E}_{\substack{\text{головний вектор} \\ \text{зовнішніх сил}}} dt = \vec{F}^E \cdot \vec{v}_O dt,$$

$$\sum \vec{F}_i^E \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) dt = \vec{\omega} \cdot \underbrace{\sum (\vec{\rho}_i \times \vec{F}_i^E)}_{\substack{\text{головний момент} \\ \text{зовнішніх сил}}} dt = \vec{M}_O^E \cdot \vec{\omega} dt.$$

Тут використана циклічна перестановка множників у змішаному скалярно-векторному добутку.

Таким чином, маємо

$$d'A = \vec{F}^E \cdot \vec{v}_O dt + \vec{M}_O^E \cdot \vec{\omega} dt. \quad (14.40)$$

Це є вираз для елементарної роботи зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, яке здійснює вільний рух. Ця робота визначається через головний вектор ($\vec{F}^E$) і головний момент ($\vec{M}_O^E$) зовнішніх сил відносно точки O , яку приймаємо за полюс. При цьому окрім вказаних характеристик дії зовнішніх сил необхідно знати ще й швидкість $\vec{v}_O$ полюса і кутову швидкість $\vec{\omega}$ тіла.

Надамо виразу (14.40) більш простої форми.

Для цього введемо вектор елементарного переміщення полюса, тобто т. O : $d\vec{r}_O = \vec{v}_O dt$, а також елементарний поворот тіла відносно полюса: $d\vec{\phi} = \vec{\omega} dt$, тоді вираз (14.40) набуде такого вигляду:

$$d'A = \vec{F}^E \cdot d\vec{r}_O + \vec{M}_O^E \cdot d\vec{\phi}, \quad (14.41)$$

тобто

елементарна робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, яке здійснює вільний рух, дорівнює сумі елементарної роботи головного вектора зовнішніх сил на елементарному переміщенні полюса і елементарної роботи головного моменту зовнішніх сил, обчисленого відносно полюса, на елементарному повороті тіла навколо полюса.

14.18. Частинні випадки обчислення елементарних робіт для різних видів руху тіла

1) Поступальний рух твердого тіла

За такої умови маємо $\omega = 0$, і з виразу (14.41) випливає, що $d'A = \vec{F}^E \cdot d\vec{r}_O$.

2) Обертальний рух тіла відносно нерухомої осі

Якщо вибрати полюс O на осі обертання (Oz), тоді $v_O = 0$ і матимемо:

$$d'A = \vec{M}_O^E \cdot d\vec{\varphi}_z = \vec{M}_O^E \cdot \vec{k} d\varphi_z = M_{Oz}^E d\varphi_z,$$

оскільки $d\vec{\varphi}_z = d\varphi_z \vec{k}$ ($\vec{k}$ - орт осі Oz).

3) Плоскопаралельний рух твердого тіла

Вважаємо, що вісь Oz перпендикулярна основній площині, тоді з виразу (14.41) маємо:

$$d'A = \vec{F}^E \cdot d\vec{r}_O + M_{Oz}^E \cdot d\varphi.$$

Вирази повних робіт отримуються шляхом інтегрування відповідних виразів для елементарних робіт.

Так, для випадку 2) матимемо (за умови $M_{Oz}^E = \text{const}$):

$$A^E = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d'A = M_{Oz}^E (\varphi - \varphi_0).$$

Очевидно, що таке інтегрування може бути виконано лише у найпростіших випадках, наприклад, коли силові фактори є незмінними за величиною і напрямком у просторі.

Покажемо на прикладах, яким чином обчислюється елементарна і повна робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла.

Задача 1

Колесо маси m і радіуса r котиться по шорсткій горизонтальній поверхні (коефіцієнт тертя ковзання μ) без проковзування під дією відомої горизонтальної сили $\vec{F}$, прикладеної до його центра (рис. 1). Тертям кочення знехтувати.

Обчислити роботу всіх зовнішніх сил, прикладених до колеса, на переміщенні ℓ його центра.

Дано: F, m, r, ℓ, μ .

Знайти A^E .

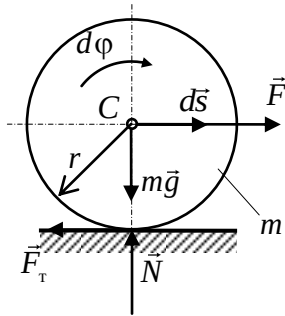


Рис. 1. Колесо, що котиться по горизонтальній поверхні

Розв'язання

Для застосування наведених вище формул треба спочатку проаналізувати всі сили, прикладені до колеса. Це активні сили ($\vec{F}$ і $m\vec{g}$) та складові реакції горизонтальної поверхні ($\vec{N}$ і $\vec{F}_t$), вказані на рис. 1. Елементарна робота нормальної реакції $\vec{N}$ та сили тертя $\vec{F}_t$ дорівнює нулю, оскільки ці сили прикладені в МЦШ, елементарне переміщення якого дорівнює нулю. Елементарна робота сили ваги $m\vec{g}$ також дорівнює нулю, оскільки елементарне переміщення $d\vec{s}$ центра C колеса (точки прикладення сили $m\vec{g}$) є перпендикулярним до цієї сили. Отже, залишилося лише обчислити роботу рушійної сили $\vec{F}$:

$$d'A^E = d'A_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds.$$

Тоді повну роботу можна отримати шляхом такого інтегрування:

$$A^E = \int_0^{\ell} F ds = F \int_0^{\ell} ds = F \ell.$$

Задача 2

Визначити роботу зовнішніх сил, прикладених до механічної системи, що складається з суцільного однорідного шківa маси m_1 та радіуса r і тягаря маси m_2 , з'єднаних ідеальним тросом (рис. 1), при повороті шківa на кут φ . Шків обертається навколо нерухомої осі під дією моменту M пари сил і піднімає тягар по похилій (під кутом α до горизонту) шорсткій площині (коефіцієнт тертя ковзання μ).

Дано: $m_1, m_2; M, r, \alpha, \mu, \varphi$.

Знайти A^E .

Розв'язання

Зовнішніми силами для даної механічної системи є: вага тягаря і шківa ($m_1\vec{g}$ та $m_2\vec{g}$ відповідно), рушійний момент $\vec{M}$; сила тертя $\vec{F}_T$ тягаря по площині, нормальна реакція похилої площини $\vec{N}$, реакція $\vec{R}$ в опорному циліндричному шарнірі шківa (див. рис. 1).

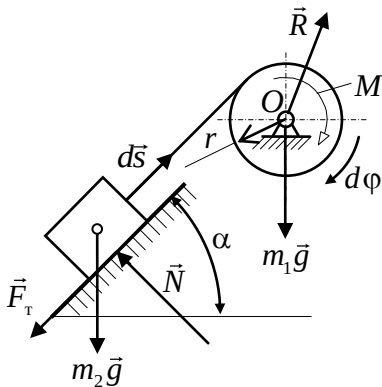


Рис. 1. Досліджувана механічна система

Надаємо шківові елементарне переміщення $d\varphi$. Тоді елементарне переміщення тягаря складатиме $ds = r d\varphi$. Елементарну роботу на цих переміщеннях будуть виконувати лише момент $\vec{M}$ пари сил, вага тягаря $m_2\vec{g}$ та сила тертя $\vec{F}_T$:

$$d'A_M = M d\varphi; \quad d'A_{m_2\vec{g}} = m_2\vec{g} \cdot d\vec{s}; \quad d'A_{\vec{F}_T} = \vec{F}_T \cdot d\vec{s}. \quad (1)$$

Сили $m_1\vec{g}$ та $\vec{R}$ прикладені у нерухомій точці, а сила $\vec{N}$ є перпендикулярною до елементарного переміщення $d\vec{s}$. Отже їхня елементарна і повна робота дорівнюватиме нулю.

Шляхом інтегрування виразів (1) отримаємо (рис. 2):

$$A_M = M\varphi;$$

$$A_{m_2\vec{g}} = -m_2gh = -m_2gs \sin \alpha = -m_2gr\varphi \sin \alpha$$

(оскільки висота підйому тягаря $h = s \sin \alpha$, а $s = r\varphi$);

$$A_{\vec{F}_0} = -F_0 s = -\mu m_2gs \cos \alpha = -\mu m_2gr\varphi \cos \alpha.$$

Отже остаточно матимемо

$$A^E = [M - m_2gr(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)]\varphi.$$

Задача 3

Визначити роботу зовнішніх сил, прикладених до механічної системи, що складається з суцільного однорідного шківa маси m_1 та радіуса r і тягаря маси m_2 , який являє собою суцільний однорідний диск, з'єднаних ідеальним тросом (рис. 1), при повороті шківa на кут φ . Шків обертається навколо нерухомої осі під дією моменту M пари сил і піднімає тягар по похилій (під кутом α до горизонту) шорсткій площині без ковзання.

Дано: $m_1, m_2; M, r, \alpha, \varphi$.

Знайти A^E .

Розв'язання

Як і в попередній задачі 2, зовнішніми силами для даної механічної системи є: вага тягаря і шківa ($m_1\vec{g}$ та $m_2\vec{g}$ відповідно), рушійний момент $\vec{M}$; сила тертя $\vec{F}_T$ тягаря по

площині, нормальна реакція похилої площини $\vec{N}$, реакція $\vec{R}$ в опорному циліндричному шарнірі шківів (див. рис. 1).

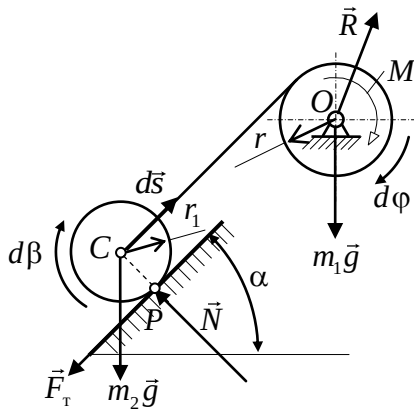


Рис. 1. Схема механічної системи

Надаємо шківові елементарне переміщення $d\varphi$. Тоді елементарні переміщення тягаря складатимуть

$$ds = r d\varphi, \quad d\beta = \frac{r}{r_1} d\varphi.$$

Елементарну роботу на цих переміщеннях будуть виконувати лише момент $\vec{M}$ пари сил і вага тягаря $m_2\vec{g}$:

$$d'A_M = M d\varphi; \quad d'A_{m_2\vec{g}} = m_2\vec{g} \cdot d\vec{s}; \quad d'A_{\vec{F}_t} = \vec{F}_t \cdot d\vec{s}. \quad (1)$$

Сили $m_1\vec{g}$, $\vec{F}_t$ та $\vec{R}$ прикладені у нерухомій точці P (миттєвий центр швидкостей), а сила $\vec{N}$ є перпендикулярною до елементарного переміщення $d\vec{s}$. Отже їхня елементарна і повна робота дорівнюватиме нулю.

Шляхом інтегрування виразів (1) отримаємо:

$$A_M = M\varphi;$$

$$A_{m_2\vec{g}} = -m_2gh = -m_2gs \sin \alpha = -m_2gr\varphi \sin \alpha$$

(оскільки висота підйому тягаря $h = s \sin \alpha$, а $s = r\varphi$);

Отже остаточно матимемо

$$A^E = (M - m_2gr \sin \alpha) \varphi.$$

Завдання на самостійну роботу

Вивчити за підручником М. А. Павловського «Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.» такі теми: Потенціальне силове поле. Силова функція. Потенціальна енергія механічної системи. Диференціальні рівняння руху механічної системи у зовнішньому потенціальному полі. Потужність сили (с. 249-257). Еквіпотенціальна поверхня (с. 257-264).

14.19. Отримання диференціальних рівнянь руху твердого тіла за допомогою загальних теорем динаміки

Як відомо, диференціальні рівняння руху матеріальної системи можна отримати, використовуючи для кожної її точки другий закон Ньютона. Кількість таких рівнянь дорівнюватиме числу точок, що містить система, і може бути досить великою. Для твердого тіла, що є частинним випадком матеріальної системи, кількість рівнянь може бути значно зменшена, оскільки на положення окремих точок, що складають тіло, накладена відома умова. Диференціальні рівняння руху твердого тіла можна отримати, використовуючи загальні теореми динаміки. При цьому слід пам'ятати, що *внутрішні сили* в твердому тілі зрівноважуються, тому із всіх сил, прикладених до твердого тіла, слід розглядати тільки *зовнішні сили*.

Якщо тверде тіло є невільним, то слід його звільнити від в'язей. Тоді за аксіомою про звільнення від в'язей, це тіло можна розглядати як вільне, але додати до діючих на нього активних сил реакції відкинутих в'язей.

Розглянемо диференціальні рівняння руху твердого тіла у частинних випадках.

1) Поступальний рух твердого тіла

Поступальний рух твердого тіла характеризується рухом однієї його точки, наприклад, - центра інерції (центра мас). Тому, застосовуючи теорему про рух центра мас, отримаємо *диференціальне рівняння поступального руху твердого тіла*

$$m\vec{a}_C = \vec{F}^E, \text{ або } m\ddot{\vec{r}}_C = \vec{F}^E, \quad (14.42)$$

де $\ddot{\vec{r}}_C$ - прискорення центра мас тіла, m - маса тіла, $\vec{F}^E$ - головний вектор зовнішніх сил.

Рівнянню поступального руху твердого тіла у векторній формі (14.42) відповідають три скалярних:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = F_x^E = \sum F_{ix}^E, \\ m\ddot{y}_C = F_y^E = \sum F_{iy}^E, \\ m\ddot{z}_C = F_z^E = \sum F_{iz}^E. \end{cases}$$

Інтегрування цих рівнянь дає можливість визначити координати центра мас тіла як функцій часу, і отже, охарактеризувати повністю поступальний рух твердого тіла. Сталі інтегрування, як і раніше, визначаються з початкових умов.

Зауважимо, що для здійснення поступального руху твердого тіла необхідно, щоб головний момент зовнішніх сил $\vec{M}_C^E$ відносно центра мас дорівнював нулю, тобто $\vec{M}_C^E = \vec{0}$.

2) Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

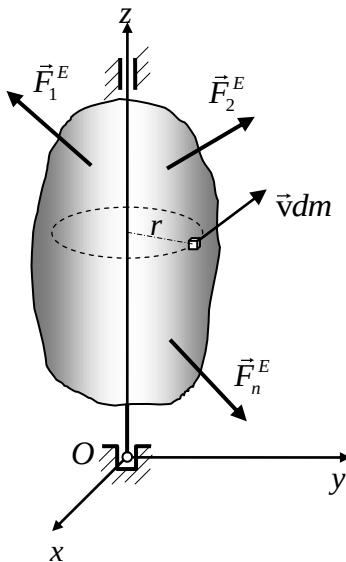
Нехай на тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі Oz (рис. 14.16), діють зовнішні сили $\{\vec{F}_i^E\}$.

Раніше було показано, що кінетичний момент такого тіла дорівнює добутку момента інерції тіла відносно осі обертання на величину кутової швидкості тіла, тобто

$$K_z = I_z \omega. \quad (14.43)$$

Згадаємо теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи (в проекції на вісь Oz):

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^E,$$



з якої за умови (14.43) матимемо

$$\frac{d}{dt}(I_z \omega) = M_z^E \Rightarrow I_z \varepsilon = M_z^E,$$

або остаточно

$$\boxed{I_z \ddot{\varphi} = M_z^E}. \quad (14.44)$$

Це рівняння (14.44) називається *диференціальним рівнянням обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі*.

Якщо порівняти вираз (14.44) з (14.42), то побачимо, що I_z в обертальному русі відіграє роль, аналогічну масі у поступальному русі тіла.

Якщо момент M_z^E відомий, то інтегруючи диференціальне рівняння (14.44) за заданих початкових умов, визначимо кут повороту φ як функцію часу t .

Рис. 14.16. Тіло, що обертається навколо нерухомої осі Oz

Помножуючи обидві частини виразу $I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^E$ на $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, знайдемо

$$I_z \omega \frac{d\omega}{dt} = M_z^E \omega, \text{ або } I_z \omega d\omega = M_z^E d\varphi. \quad (14.45)$$

Інтегруючи вираз (14.45) від t_0 до t , тобто в межах від φ_0 до φ та від ω_0 до ω , отримаємо

$$\frac{1}{2} I_z (\omega^2 - \omega_0^2) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z^E d\varphi = A^E, \quad (14.46)$$

де A^E - робота зовнішніх сил, що діють на тіло, I_z - момент інерції тіла відносно осі обертання, ω , ω_0 - відповідно кінцева і початкова кутові швидкості.

Рівняння (14.46) виражає теорему про зміну кінетичної енергії твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі:

приріст кінетичної енергії твердого тіла за деякий проміжок часу дорівнює сумі робіт всіх зовнішніх сил, прикладених до тіла, за цей же проміжок часу.

3) Плоскопаралельний рух твердого тіла

Нехай до твердого тіла прикладені зовнішні сили, що розташовані в основній площині (рис. 14.17).

Як відомо, рух плоскої фігури в основній площині можна розкласти на поступальний рух разом з полюсом і обертальний рух навколо полюса. За полюс приймемо центр мас C тіла. При заданих зовнішніх силах $\{\vec{F}_i^E\}$ будемо змушені розв'язувати динамічну задачу про визначення закону руху тіла разом з центром мас і закону руху тіла відносно центра мас.

Для розв'язання цієї задачі застосуємо теорему про рух центра мас та теорему про зміну кінетичного моменту у відносному русі по відношенню до центра мас. Таким чином отримаємо диференціальні рівняння плоскопаралельного руху твердого тіла

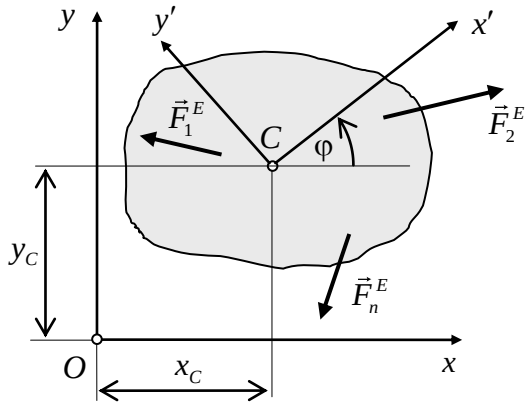


Рис. 14.17. До виводу диференціальних рівнянь плоскопаралельного руху

$$\begin{cases} m\vec{a}_C = \vec{F}^E, \\ I_C \ddot{\varphi} = \vec{M}_C^E, \end{cases} \quad (14.47)$$

де $\vec{F}^E$ - головний вектор всіх зовнішніх сил, прикладених до тіла; $\vec{M}_C^E$ - головний момент зовнішніх сил відносно центра мас.

Рівнянням (14.47) у векторній формі відповідають три рівняння у скалярній формі:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = \sum F_{ix}^E, \\ m\ddot{y}_C = \sum F_{iy}^E, \\ I_{Cz'} \ddot{\varphi} = M_{Cz'}^E, \end{cases} \quad (14.48)$$

де $I_{Cz'}$ - момент інерції тіла відносно осі Cz' , що проходить через центр мас перпендикулярно до площини Oxy , $M_{Cz'}^E$ - головний момент зовнішніх сил відносно тієї ж осі.

Інтегруючи рівняння (14.48) за даних початкових умов, визначаємо рух центру інерції C тіла, тобто знаходимо $x_C = x_C(t)$, $y_C = y_C(t)$, і закон відносного руху тіла по відношенню до центру мас, тобто $\varphi = \varphi(t)$.

При розв'язанні задач на плоскопаралельний рух твердого тіла застосовують або метод додавання і інтегрування диференціальних рівнянь руху, або теорему про зміну кінетичної енергії.

Задача

Визначити кут α нахилу до горизонту шорсткої (з коефіцієнтом тертя ковзання μ) похилої площини і прискорення горизонтальної осі однорідного циліндра, якщо останній скочується під дією власної ваги по цій площині (рис. 1). Опором кочення знехтувати. Під час руху проковзування циліндру по площині відсутнє.

Дано: μ .

Знайти: α , $a = \ddot{x}_C$.

Розв'язання

Складемо диференціальні рівняння плоскопаралельного руху твердого тіла (циліндра):

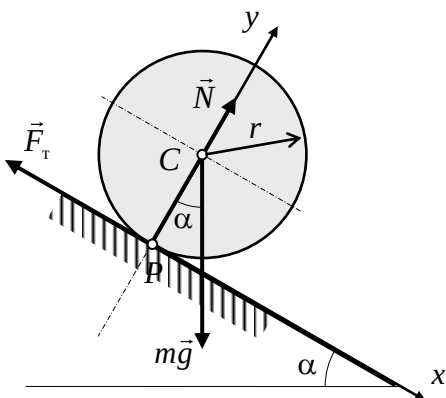


Рис. 1. Кочення циліндру по похилій площині

$$m\ddot{x}_C = mg \sin \alpha - F_t, \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = -mg \cos \alpha + N, \quad (2)$$

$$I_C \ddot{\varphi} = F_t r. \quad (3)$$

Нагадаємо, що точка P є миттєвим центром швидкостей циліндра. Швидкість точки C ($\dot{x}_C$) є швидкістю миттєво-обертального руху циліндра навколо МЦШ, тобто

$$\dot{x}_C = r\omega = r\dot{\varphi}, \quad (4)$$

звідки після диференціювання отримаємо

$$\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi}, \text{ або } \ddot{\varphi} = \ddot{x}_C / r. \quad (5)$$

Крім того, для однорідного циліндра маємо

$$I_C = \frac{mr^2}{2}. \quad (6)$$

Підстановка виразів (5) і (6) в (3) дає

$$\frac{mr^2}{2} \cdot \frac{\ddot{x}_C}{r} = F_T r, \text{ або } F_T = \frac{m\ddot{x}_C}{2}. \quad (7)$$

Підставляючи тепер (7) в (1), отримаємо

$$m\ddot{x}_C = mg \sin \alpha - \frac{1}{2} m\ddot{x}_C,$$

звідки знаходимо

$$\boxed{\ddot{x}_C = \frac{2}{3} g \sin \alpha = a}. \quad (8)$$

Далі підставляємо вираз (8) в рівняння (1), робимо заміну $F_T = \mu mg \cos \alpha$ і визначаємо кут нахилу α :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_C = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha &\Rightarrow \frac{2}{3} g \sin \alpha = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha \Rightarrow \frac{1}{3} \sin \alpha = \mu \cos \alpha \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 3\mu \Rightarrow \boxed{\alpha = \operatorname{arctg}(3\mu)}. \end{aligned}$$

Розділ 5. Аналітична механіка та її елементи

Тема 5.1. Теорія можливих переміщень

15. Класифікація в'язей, дійсні та можливі переміщення, ідеальні в'язі, число степенів вільності механічної системи

15.1. Класифікація в'язей та їх означення

Нехай на рух системи n матеріальних точок накладено k обмежень (в'язей), які описуються наступними нерівностями, що залежать від координат точок системи, їхніх швидкостей та, можливо, часу:

$$f_v(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) \geq 0. \quad v = \overline{1, k}$$

Подамо нижче деякі **види в'язей**.

Утримуючою в'яззю називається в'язь, яка припускає переміщення в одному напрямку і не припускає в протилежному, тоді

$$f_v(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) = 0.$$

Неутримуючою в'яззю називається в'язь, яка припускає переміщення в даному напрямку і в протилежному, тоді

$$f_v(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) \leq 0.$$

Прикладом утримуючої в'язі є однорідний стрижень довжиною ℓ , до якого прикріплена точка M .

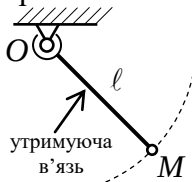


Рис. 15.1.

Утримуюча в'язь

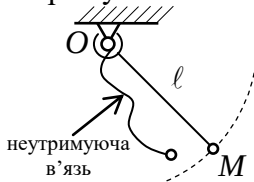


Рис. 15.2.

Неутримуюча в'язь

Рівняння цієї в'язі матиме вигляд

$$x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0.$$

Це є рівняння поверхні сфери з радіусом ℓ і центром у точці O (рис. 15.1).

Прикладом неутримуючої в'язі є нитка, до якої прикріплена матеріальна точка M (рис. 15.2). Вона припускає переміщення всередину сфери, але не припускає переміщення назовні в радіальному напрямку (по зовнішній нормалі до поверхні сфери).

Така неутримуюча в'язь описується нерівністю вигляду

$$x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 \leq 0.$$

Ця нерівність відповідає об'єму сфери радіуса ℓ , центр якої збігається з точкою O .

В'язі, в рівняння ¹ яких час явно не входить, називаються *стаціонарними* в'язями.

В'язі, в рівняння яких явно входить час, називаються *нестационарними*.

В'язі, рівняння яких містять тільки координати точок механічної системи, і, можливо, час, називаються *геометричними*. Рівняння цих в'язей мають вигляд

$$f_v(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0. \quad v = \overline{1, k}$$

¹ або нерівності

Якщо рівняння в'язей містять координати точок системи, перші похідні від цих координат за часом (швидкості) і, можливо, час, тоді відповідна в'язь називається *кінематичною* або *диференціальною*. Рівняння такої в'язі мають вигляд

$$f_v(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) = 0. \quad v = \overline{1, k} \quad (15.1)$$

Інколи рівняння (15.1) можуть бути проінтегровані і зведені до вигляду геометричної в'язі.

Відповідно до класифікації Г. Герца, в'язі, які накладені на механічну систему, поділяються на голономні та неголономні.

Голономні в'язі – це геометричні в'язі і ті кінематичні, які в результаті інтегрування можуть бути приведені до вигляду геометричних.

Неголономні в'язі – це кінематичні в'язі, рівняння яких не можуть бути приведені до вигляду геометричних.

15.2. Можливі та дійсні переміщення

Можливими переміщеннями точок системи називаються будь які нескінченно малі уявні переміщення точок, що дозволені в'язями, накладеними на ці точки в фіксований момент часу. Ці можливі переміщення позначаються префіксом символом δ , який є одночасно і символом операції варіювання, наприклад $\delta \vec{r}_0$.

Поняття можливого переміщення є суто геометричним, не пов'язаним з істинним рухом точок системи.

Координати точки M_i , отримані в результаті можливого переміщення

$$\delta \vec{r}_i = \delta x_i \vec{i} + \delta y_i \vec{j} + \delta z_i \vec{k},$$

тобто

$$M_i(x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i),$$

задовольняють рівнянням в'язей, але не рівнянням руху.

Навпаки, координати точки M_i , отримані в результаті дійсного переміщення $d\vec{r}_i$ в істинному русі за час dt

$$d\vec{r}_i = dx_i \vec{i} + dy_i \vec{j} + dz_i \vec{k},$$

тобто

$$M_i(x_i + dx_i, y_i + dy_i, z_i + dz_i),$$

задовольняють як рівнянням в'язей, так і рівнянням руху.

Поняття можливого переміщення слід відрізняти від поняття дійсного переміщення.

Дійсним переміщенням точки механічної системи називається нескінченно мале переміщення, яке здійснюється цією точкою в істинному русі під дією прикладених сил за малий проміжок часу Δt .

Розглянемо поняття можливого переміщення на прикладі однієї матеріальної точки, рух якої обмежений голономною утримуючою нестационарною в'яззю S (рис. 15.3):

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Нехай в момент часу t точка M займає положення $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яке визначається радіус-вектором $\vec{r}_0$:

$$\vec{r}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}.$$

Зафіксуємо час і уявно надамо точці M мале переміщення $\delta \vec{r} = \delta x \vec{i} + \delta y \vec{j} + \delta z \vec{k}$ із її положення M_0 таким чином, щоб це переміщення не порушувало в'язь S .

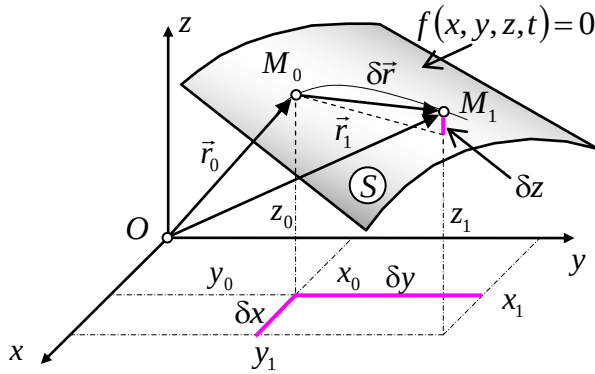


Рис. 15.3. Можливе переміщення точки

Тоді т. M переміститься в положення $M_1(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z)$ і при цьому $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \delta \vec{r}$. Рівняння в'язі в т. M_0 матиме вигляд

$$f(x_0, y_0, z_0, t) = 0, \quad (15.2)$$

а для т. M_1 отримаємо

$$f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z, t) = 0. \quad (15.3)$$

Розкладемо вираз (15.3) в ряд за степенями $\delta x, \delta y, \delta z$ в околі точки M_0

$$\begin{aligned} f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z, t) = & f(x_0, y_0, z_0, t) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{M_0} \delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{M_0} \delta y + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{M_0} \delta z + \\ & + \frac{1}{2!} \left[\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{M_0} (\delta x)^2 + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{M_0} (\delta y)^2 + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right|_{M_0} (\delta z)^2 + \right. \\ & \left. + 2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{M_0} \delta x \delta y + 2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right|_{M_0} \delta y \delta z + 2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right|_{M_0} \delta x \delta z \right] + \dots \end{aligned} \quad (15.4)$$

... + члени вищого порядку мализни.

Зауважимо, що ліва частина формули (15.4) через вираз (15.3) дорівнює нулю, перший доданок справа за виразом (15.2) теж дорівнює нулю.

Перепишемо розвинення (15.4) з точністю до членів другого порядку мализни:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{M_0} \delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{M_0} \delta y + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{M_0} \delta z = 0. \quad (15.5)$$

Оскільки

$$\overrightarrow{\text{grad}} \Big|_{M_0} f(x, y, z, t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{M_0} \vec{i} + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{M_0} \vec{j} + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{M_0} \vec{k},$$

запишемо вираз (15.5) у вигляді

$$\overrightarrow{\text{grad}} \Big|_{M_0} f(x, y, z, t) \cdot \delta \vec{r} = 0. \quad (15.6)$$

Відомо, що вектор $\overrightarrow{\text{grad}} \Big|_{M_0} f$ від деякої функції f завжди напрямлений за нормаллю до поверхні в'язі в точці M_0 (рис. 15.4).

Для виконання умови (15.6) необхідно, щоб вектор можливого переміщення $\delta \vec{r}$ був розташований у площині π , яка є дотичною до поверхні S в точці M_0 .

Таким чином, вектор $\delta \vec{r}$ належить дотичній площині π .

Розглянемо дійсне переміщення тієї ж точки у випадку стаціонарної і нестаціонарної в'язі.

1) Стаціонарна в'язь (поверхня в'язі не змінюється з часом за положенням і формою)
Рівняння такої в'язі має вигляд

$$f(x, y, z) = 0.$$

У цьому разі поверхня в'язі S повністю містить траєкторію точки (рис. 15.5).

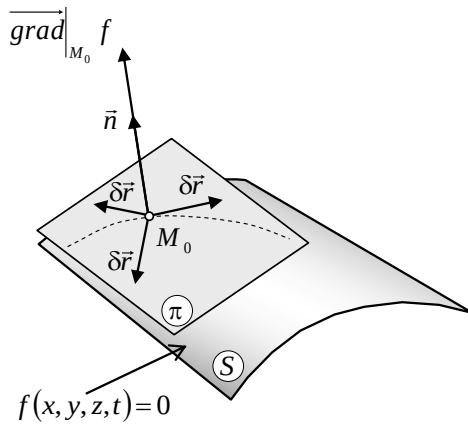


Рис. 15.4. Вектор $\overrightarrow{\text{grad}}|_{M_0} f$

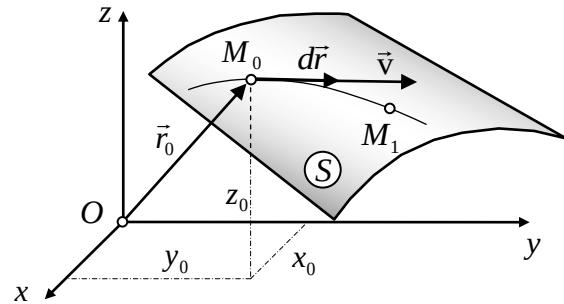


Рис. 15.5. Стаціонарна в'язь

Як відомо, швидкість $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, звідки випливає, що $d\vec{r} = \vec{v}dt$. Через проміжок часу dt точка M займе положення $M_1(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$. Очевидно, що проекції dx, dy, dz задовольняють співвідношенню (повний диференціал):

$$df(x, y, z)|_{M_0} = \frac{\partial f}{\partial x}|_{M_0} dx + \frac{\partial f}{\partial y}|_{M_0} dy + \frac{\partial f}{\partial z}|_{M_0} dz = 0, \quad (15.7)$$

оскільки у правій частині $f(x, y, z)$ дорівнює нулю.

Зауважимо, що за умови $dx = \delta x, dy = \delta y, dz = \delta z$ вираз (15.7) збігається із виразом (15.5).

Висновок: у разі стаціонарної в'язі дійсне переміщення деякої точки завжди збігається хоча б з одним із можливих переміщень цієї ж точки.

2) Нестаціонарна в'язь (поверхня в'язі змінюється з часом)

В момент часу t т. M_0 знаходиться на поверхні S_0 (рис. 15.6), яка не містить траєкторію точки, що рухається, оскільки за час dt точка M перейде на нову поверхню S_1 , рівняння якої

$$f(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) = 0.$$

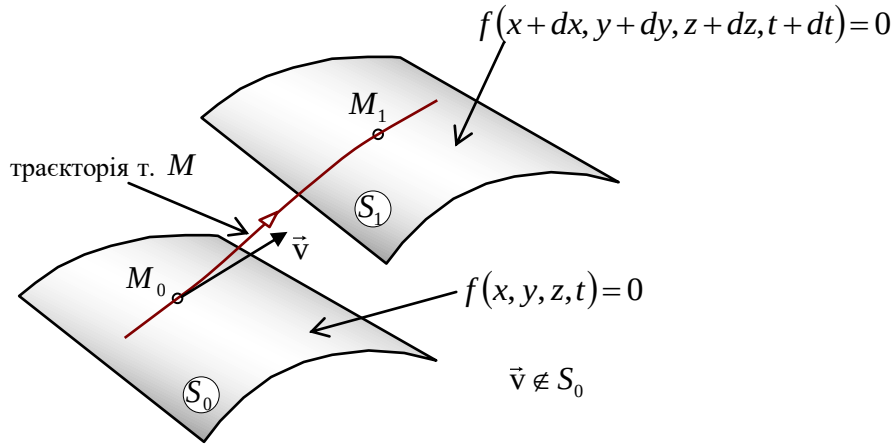


Рис. 15.6. Нестационарна в'язь

При цьому проекції дійсного переміщення точки задовольняють умові:

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Візьмемо повний диференціал від обох частин цього виразу:

$$df(x, y, z, t)|_{M_0} = \frac{\partial f}{\partial x}|_{M_0} dx + \frac{\partial f}{\partial y}|_{M_0} dy + \frac{\partial f}{\partial z}|_{M_0} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0. \quad (15.8)$$

Якщо у виразі (15.8) покласти $dx = \delta x$, $dy = \delta y$, $dz = \delta z$, тоді він не буде збігатися із виразом (15.5), оскільки $\frac{\partial f}{\partial t} dt \neq 0$.

Висновок: у разі нестационарної в'язі дійсне переміщення $d\vec{r}$ деякої точки не збігається з жодним із можливих переміщень $\delta\vec{r}$ цієї точки, що допускаються в'яззю, накладеною на т. М.

Узагальнимо викладене на випадок k в'язей, накладених на точки механічної системи.

Можливим переміщенням механічної системи називається будь-яка сукупність можливих переміщень її точок, що допускаються в'яззями.

Іншими словами, можливі переміщення механічної системи – це такі нескінченно малі уявні переміщення $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \dots, \delta\vec{r}_n$ із даного положення при фіксованому часі, за яких задовольняються рівності:

$$\delta f_v = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_v}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_v}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_v}{\partial z_i} \delta z_i \right). \quad v = \overline{1, k}$$

15.3. Можлива робота

Елементарна робота сил $\vec{F}_i$, що прикладені до точок механічної системи, на дійсних переміщеннях $d\vec{r}_i$ обчислюється за формулою

$$d'A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i.$$

Надамо всім n точкам системи можливі переміщення $\delta\vec{r}_i$ ($i = \overline{1, n}$) при фіксованому часі. Складемо вираз

$$\delta A = \sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i,$$

який є можливою роботою сил, прикладених до точок даної механічної системи, на можливих переміщеннях $\delta\vec{r}_i$ цих точок. Цей вираз можна переписати через проекції:

$$\delta A = \sum (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i).$$

15.4. Ідеальні в'язі. Можлива робота реакцій ідеальних в'язей

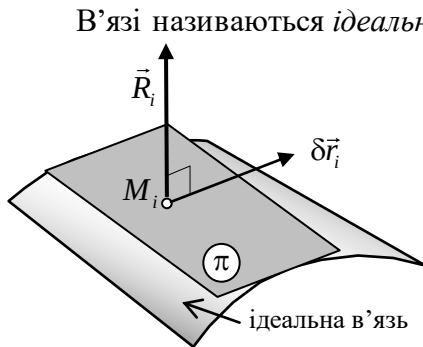


Рис. 15.7. Ідеальна в'язь та її реакція

В'язі називаються *ідеальними*, якщо сума можливих робіт реакцій цих в'язей на будь-яких можливих переміщеннях точок системи дорівнює нулю:

$$\delta A^R = \sum \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (15.9)$$

Вираз (15.9) називають *постулатом ідеальних в'язей* (див. рис. 15.7).

15.5. Число степенів вільності механічної системи

Знайдемо аналітичний вираз обмежень, що накладаються на можливі переміщення точок системи голономними, стаціонарними, утримуючими в'язями виду

$$f_v(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0. \quad (v = \overline{1, k}) \quad (15.10)$$

Нехай маємо вільну механічну систему з n матеріальних точок, кожній з яких надамо можливе переміщення $\delta \vec{r}_i$ ($i = \overline{1, n}$); проекції цих переміщень на осі координат складають набір

$$\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \dots, \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n. \quad (15.11)$$

Їх число $3n$. Вони є незалежними між собою.

У випадку невідільної механічної системи, на яку накладені в'язі вигляду (15.10), між можливими переміщеннями з набору (15.11) існують залежності, які визначаються (15.10).

Таким чином, число незалежних можливих переміщень складатиме

$$s = 3n - k. \quad (15.12)$$

Означення: число незалежних параметрів (можливих переміщень), які однозначно визначають положення даної механічної системи, називається числом степенів вільності цієї системи.

16. Принцип можливих переміщень

16.1. Загальне рівняння статички

Для рівноваги механічної системи, що підкорена ідеальним утримуючим стаціонарним в'язям, необхідно і достатньо, щоб дорівнювала нулю можлива робота активних сил на будь-яких можливих переміщеннях точок системи із розглядуваного положення рівноваги.¹

Д о в е д е н н я

Необхідність

Нехай механічна система, що складається з n матеріальних точок, знаходиться в рівновазі і підкоряється ідеальним стаціонарним утримуючим в'язям. Застосувавши аксіому про звільнення від в'язей, замінімо дію в'язей відповідними реакціями. Тоді на систему будуть діяти активні сили $\vec{F}_i^a$ і реакції в'язей $\vec{R}_i$. Як відомо (із курсу статички), механічна система знаходиться в рівновазі, якщо кожна точка цієї системи знаходиться в рівновазі. Із цього випливає, що для кожної точки механічної системи виконується умова:

$$\vec{F}_i^a + \vec{R}_i = \vec{0}, \quad i = \overline{1, n} \quad (16.1)$$

де $\vec{F}_i^a$ - рівнодійна всіх активних сил, що діють на i -ту точку;

$\vec{R}_i$ - рівнодійна всіх реакцій в'язей, що прикладені до i -тої точки.

Надамо всім точкам даної механічної системи можливі переміщення $\delta \vec{r}_i$, тоді помножуючи скалярно вирази (16.1) на $\delta \vec{r}_i$ і додаючи отримані рівняння, матимемо

$$\sum \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i + \sum \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (16.2)$$

Беручи до уваги постулат ідеальних в'язей ($\sum \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$), отримаємо

$$\boxed{\sum \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i = 0}, \quad (16.3)$$

або

$$\delta A = \sum (F_{ix}^a \delta x_i + F_{iy}^a \delta y_i + F_{iz}^a \delta z_i) = 0, \quad (16.4)$$

що і треба було довести.

Вирази (16.3) і (16.4) називаються *загальним рівнянням статички*, вони є також математичним виразом *принципу можливих переміщень* у разі утримуючих в'язей.²

Достатність

Припустимо, що виконується умова (16.3). Покажемо, що при цьому механічна система, яка підкорена ідеальним утримуючим в'язям, знаходиться в рівновазі.

Припустимо, що механічна система починає рухатися з деякого моменту часу. Обмежимося випадком стаціонарних в'язей (тоді дійсні переміщення входять у число можливих). Застосовуючи теорему про зміну кінетичної енергії системи, враховуючи, що $\delta T > 0$, і беручи до уваги те, що $\sum \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$, отримаємо

¹ Нагадаємо, що *положенням статичної рівноваги* називається таке положення механічної системи, в якому вона буде знаходитися весь час, якщо в початковий момент часу вона знаходилась в цьому положенні і швидкості всіх її точок дорівнювали нулю.

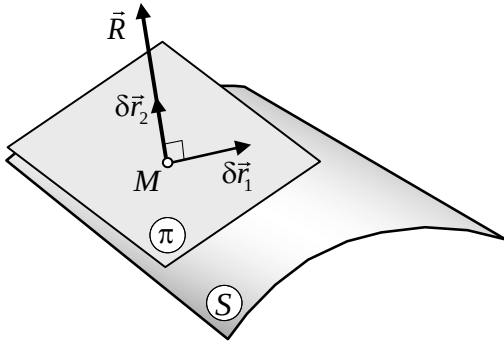
² Зауважимо, що неутримуючу в'язь називають ще *односторонньою*, а утримуючу – *двосторонньою*.

$$\delta T = \delta A = \sum (\vec{F}_i^a + \vec{R}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i > 0,$$

де $\delta \vec{r}_i$ - ті можливі переміщення точок системи, з якими збігаються дійсні переміщення $d\vec{r}_i$. Однак остання нерівність суперечить умові (16.3).

Таким чином теорема доведена.

Розглянемо випадок ідеальної неутримуючої в'язі (рис. 16.1). Нагадаємо, що у разі ідеальної утримуючої в'язі можливе переміщення $\delta \vec{r}_1$ знаходиться у дотичній площині π .



В розглядуваному випадку (неутримуючої в'язі), якщо в'язь є стаціонарною, тоді можливими переміщеннями будуть: переміщення $\delta \vec{r}_1$, розташоване у дотичній площині π , і переміщення $\delta \vec{r}_2$, напрямлене вздовж реакції в'язі.

Розглянемо роботу реакції в'язі на можливих переміщеннях $\delta \vec{r}_1$ і $\delta \vec{r}_2$:

$$\delta A = \vec{R} \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{R} \cdot \delta \vec{r}_2 \geq 0,$$

Рис. 16.1. Неутримуюча в'язь де $\vec{R} \cdot \delta \vec{r}_1 = 0$ через постулат ідеальних в'язей.

Таким чином, з виразу (16.2) у разі неутримуючих в'язей матимемо

$$\sum \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i \leq 0. \quad (16.5)$$

Співвідношення (16.5) є математичним виразом принципу можливих переміщень для неутримуючих в'язей.

Задача 1

На гладенькій похилій площині лежить тягар B вагою P (див. рисунок). Тягар B утримується ниткою, перекинutoю через невагомий блок A , до іншого кінця якої прикріплено тягар C вагою Q .

При якому куті α нахилу площини до горизонту тягарі будуть знаходитися в рівновазі?

Дано: P, Q .

Знайти α .

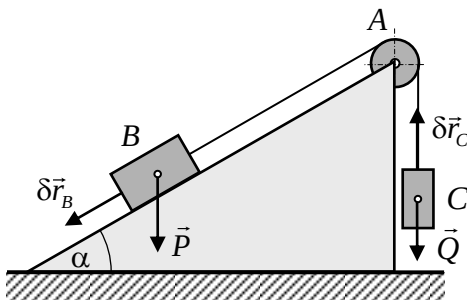


Рис. 1. Вихідна схема

Розв'язання

Дана механічна система, що складається з двох тіл B і C , є невідною. В'язями є похила площина і нитка, які розглядаються як ідеальні. Застосуємо для розв'язання задачі основне рівняння статки (16.3).

Активними силами є $\vec{P}$ і $\vec{Q}$.

Встановимо можливі переміщення тіл B і C , розглядаючи їх як матеріальні точки, які збігаються з центрами мас тіл.

Перша в'язь – похила площина – допускає переміщення тягара B вздовж неї. Позначимо це можливе переміщення $\delta \vec{r}_B$.

Друга в'язь – нитка – допускає вертикальне переміщення тягара C . Введемо можливе переміщення тягара C - $\delta \vec{r}_C$ (нитка перекинута через невагомий блок A , який лише змінює напрямок можливого переміщення, тобто, якщо тягар B рухається вздовж площини вниз, то тягар C піднімається догори).

Вираз можливої роботи сил $\vec{P}$ і $\vec{Q}$ на відповідних можливих переміщеннях $\delta \vec{r}_B$ і $\delta \vec{r}_C$ має вигляд

$$\delta A = \vec{P} \cdot \delta \vec{r}_B + \vec{Q} \cdot \delta \vec{r}_C = 0,$$

звідки, помітивши, що $\delta r_C = \delta r_B$ (адже нитка є ідеальною, тобто нерозтяжною), отримаємо

$$\delta A = (P \sin \alpha - Q) \delta r_B = 0.$$

Оскільки це рівняння повинно виконуватися на всіх можливих переміщеннях $\delta \vec{r}_B$, тому

$$P \sin \alpha - Q = 0 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{Q}{P} \Rightarrow \boxed{\alpha = \arcsin\left(\frac{Q}{P}\right)}.$$

Задача 2

Два тягари G і H мають вагу P кожний і зв'язані нерозтяжною мотузкою, перекинутою через невагомий блок B (див. рис. 1). Коефіцієнт тертя ковзання між тягарами та гранями AB і BC призми дорівнює μ . Кути призми дорівнюють:

$$\angle BAC = \angle BCA = \beta = 45^\circ; \angle ABC = 90^\circ.$$

Нехтуючи тертям мотузки по блоку, знайти кут α , при якому тягар G починає спускатися.

Дано: P, μ .

Знайти α .

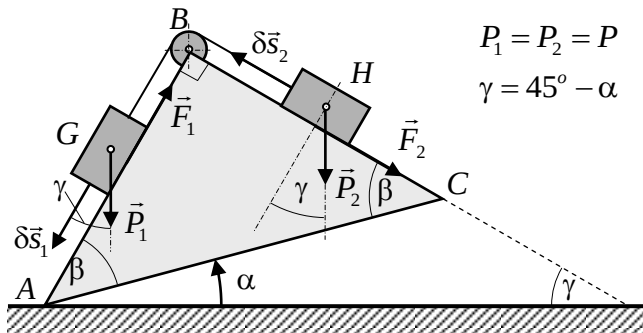


Рис. 1. Вихідна схема

Розв'язання

Використаємо для розв'язання задачі загальне рівняння статки (16.3).

Активними силами є сили ваги $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$, а також сили тертя ковзання $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. Нормальні складові реакцій граней призми не показані, оскільки їх робота на можливих переміщеннях тіл даної системи дорівнює нулю.

Накладені на систему в'язі (мотузка та грані призми) допускають тільки переміщення тягарів по гранях. Отже можливим переміщенням тягара G вздовж AB буде $\delta \vec{s}_1$. Таке ж за величиною можливе переміщення $\delta \vec{s}_2$ буде мати і інший тягар H , оскільки нерозтяжна мотузка, що з'єднує обидва тягари, перекинута через невагомий блок з нерухомою віссю обертання³, тобто $\delta s_1 = \delta s_2 = \delta s$.

Сили тертя ковзання можна визначити через сили нормального тиску:

$$F_1 = \mu N_1 = \mu P_1 \cos(90^\circ - \gamma) = \mu P \cos(45^\circ + \alpha),$$

$$F_2 = \mu N_2 = \mu P_2 \cos \gamma = \mu P \cos(45^\circ - \alpha) = \mu P \sin(45^\circ + \alpha).$$

Тоді, застосовуючи загальне рівняння статки, отримаємо:

$$\begin{aligned} \delta A &= \vec{P}_1 \cdot \delta \vec{s}_1 + \vec{F}_1 \cdot \delta \vec{s}_1 + \vec{P}_2 \cdot \delta \vec{s}_2 + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{s}_2 = P \delta s \cos \gamma - F_1 \delta s + P \delta s \cos(90^\circ + \gamma) - F_2 \delta s = \\ &= P \delta s \sin(45^\circ + \alpha) - \mu P \delta s \cos(45^\circ + \alpha) - P \delta s \cos(45^\circ + \alpha) - \mu P \delta s \sin(45^\circ + \alpha) = 0, \end{aligned}$$

звідки матимемо

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) - 1 = \mu [1 + \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)] \Rightarrow \mu = \frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) - 1}{1 + \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \operatorname{arctg} \mu}.$$

³ Таким чином, цей блок змінює лише напрямок можливого переміщення, а величина його залишається сталою.

16.2. Умови рівноваги вільного і невільного твердого тіла

Розглянемо вільне тіло, до якого прикладена система сил $\{\vec{F}_i\}_{i=1}^n$ (див. п. 14.17, присвячений обчисленню елементарної роботи сил, що прикладені до твердого тіла, яке здійснює вільний рух).

Надамо можливе переміщення $\delta\vec{r}_O$ точці, що називається *полюсом* (т. O), і можливе кутове переміщення $\delta\vec{\varphi}_O$, яке відповідає повороту тіла навколо полюса.

Складемо вираз можливої роботи сил, що прикладені до даного тіла, на вказаних можливих переміщеннях:

$$\delta A = \vec{F}_O \cdot \delta\vec{r}_O + \vec{M}_O \cdot \delta\vec{\varphi}_O.$$

Із принципу можливих переміщень випливає, що $\delta A = 0$, тобто

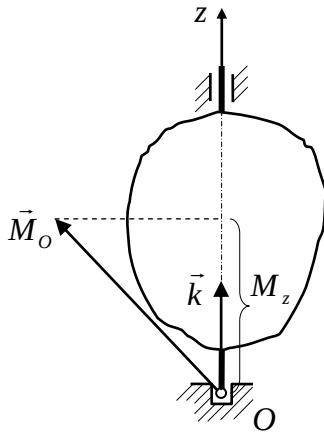
$$\vec{F}_O \cdot \delta\vec{r}_O + \vec{M}_O \cdot \delta\vec{\varphi}_O = 0. \quad (16.6)$$

Оскільки $\delta\vec{r}_O$ і $\delta\vec{\varphi}_O$ незалежні, для виконання умови (16.6) необхідно і достатньо, щоб виконувалися такі умови:

$$\vec{F}_O = \vec{0}, \quad \vec{M}_O = \vec{0}. \quad (16.7)$$

Це є умови рівноваги вільного тіла у векторній формі, де $\vec{F}_O$ - головний вектор, а $\vec{M}_O$ - головний момент зовнішніх сил, обчислений відносно полюса O . У скалярній формі вирази (16.7) набудуть вигляду

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0, \\ \sum F_{iy} = 0, \\ \sum F_{iz} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sum M_x(\vec{F}_i) = 0, \\ \sum M_y(\vec{F}_i) = 0, \\ \sum M_z(\vec{F}_i) = 0. \end{cases}$$



Для тіла, що обертається навколо нерухомої осі (рис. 16.2), якщо вибрати полюс O на осі обертання, матимемо: $\delta\vec{r}_O = \vec{0}$, а вираз (16.6) перетвориться на $\delta A = \vec{M}_O \cdot \delta\vec{\varphi}_O = 0$, або $\delta A = \vec{M}_O \cdot \delta\varphi_O \vec{k} = \vec{M}_O \cdot \vec{k} \delta\varphi_O = M_z \delta\varphi_O = 0$, звідки випливає, що $M_z = 0$, або

$$\sum M_z(\vec{F}_i) = 0. \quad (16.8)$$

Рис. 16.2. Тіло, що обертається навколо нерухомої осі

Вираз (16.8) є умовою рівноваги тіла з нерухомою віссю обертання.

17. Принцип Д'Аламбера-Лагранжа (загальне рівняння динаміки)

Розглянемо механічну систему, що складається з n матеріальних точок (знаходиться в русі) і підкорена ідеальним утримуючим (двостороннім) в'язям.

Застосуємо II-й закон Ньютона, доповнений аксіомою про звільнення від в'язей:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i.$$

Якщо застосувати принцип Д'Аламбера для кожної точки системи, то отримаємо

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = \vec{0}, \quad (17.1)$$

де $\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{a}_i$ - даламберова сила інерції.

Надамо кожній точці можливе переміщення $\delta\vec{r}_i$ і помножимо на нього скалярно кожне рівняння (17.1), після чого знайдемо суму цих рівнянь за всіма точками системи:

$$\sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum \vec{\Phi}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (17.2)$$

Через те, що система підкорена ідеальним утримуючим в'язям, другий доданок у формулі (17.2) дорівнює нулю, і тоді маємо

$$\sum (\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

- загальне рівняння динаміки, яке є також математичним записом принципу Д'Аламбера-Лагранжа у разі утримуючих в'язей.

Принцип Д'Аламбера-Лагранжа: при русі механічної системи, яка підкорена ідеальним утримуючим в'язям, необхідно щоб сума можливих робіт активних сил і сил інерції на будь-яких можливих переміщеннях точок механічної системи дорівнювала нулю:

$$\delta A^a + \delta A^{\Phi} = 0.$$

У разі неутримуючих ідеальних в'язей запис принципу Д'Аламбера-Лагранжа має вигляд:

$$\sum (\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i) \cdot \delta \vec{r}_i \leq 0.$$

Розглянемо складання рівнянь руху твердих тіл, за допомогою загального рівняння динаміки.

Задача 1

Колесо у формі круглого однорідного диску маси m і радіуса r котиться по шорсткій горизонтальній поверхні без проковзування під дією відомої горизонтальної сили $\vec{F}$, прикладеної до його центра (рис. 1). Тертям кочення знехтувати.

Знайти кутове прискорення ε колеса.

Дано: F, m, r .

Знайти ε .

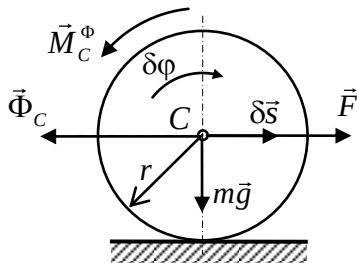


Рис. 1. Колесо, що котиться по горизонтальній поверхні

Розв'язання

Методика розв'язання задач за цим методом така ж сама, як і при використанні загального рівняння статки.

- Визначимо спочатку число степенів вільності: $s = 1$;
- Проаналізуємо активні сили і сили інерції, прикладені до колеса (рис. 1). Активними силами є $\vec{F}$ та $m\vec{g}$, а силовими факторами

інерції – сила $\vec{\Phi}_C = -m\vec{a}_C$ (модуль прискорення центра мас зв'язаний з кутовим прискоренням колеса відомим співвідношенням: $a_C = \varepsilon r$), прикладена в центрі

C колеса, і момент сил інерції $M_C^{\Phi} = I_{Cz} \varepsilon = \frac{mr^2}{2} \varepsilon$.

- Надамо центру C колеса можливе переміщення $\delta \vec{s}$ (його вважатимемо незалежним) і отримаємо можливе кутове переміщення $\delta \varphi$ навколо осі Cz , що проходить через т. C перпендикулярно до площини рисунку (основна площина), причому $\delta \varphi = \delta s / r$.
- Складемо загальне рівняння динаміки:

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{s} + m\vec{g} \cdot \delta \vec{s} + \vec{\Phi}_C \cdot \delta \vec{s} + M_C^{\Phi} \cdot \delta \varphi = 0,$$

або

$$\delta A = F \delta s + mg \delta s \cos 90^\circ - \Phi_C \delta s - M_C^{\Phi} \delta \varphi = 0;$$

$$\delta A = \left(F - \Phi_c - \frac{M_c^\Phi}{r} \right) \delta s = 0.$$

Оскільки можливе переміщення $\delta \vec{s}$ є незалежним, то маємо $F - \Phi_c - \frac{M_c^\Phi}{r} = 0$,

звідки отримуємо $F - m\epsilon r - \frac{mr^2}{2\cancel{r}} \epsilon = 0$, або остаточно $\boxed{\epsilon = \frac{2F}{3mr}}$.

Зауважимо, що отримане рівняння є звичайним диференціальним першого і другого порядку відносно кутової швидкості ω колеса і його кута повороту φ відповідно.

Порівняльне розв'язання задачі моделювання руху різними методами динаміки та аналітичної механіки на прикладі механічної системи з одним ступенем вільності¹

Задача

Механічна система починає рух із стану спокою під дією сил ваги; початкове положення системи вказано на рис. 1. Враховуючи тертя ковзання тіла 1 і опір коченню тіла 3, що котиться без ковзання, нехтуючи іншими силами опору і масами ниток, що припускаються нерозтяжними, визначити швидкість і прискорення тіла 1 в той момент, коли пройдений ним шлях S дорівнюватиме S_* . Необхідні розміри і дані наведені нижче.

Дано:

$$m_1 = m_2 = m, m_3 = 2m; S_* = 1,2 \text{ м}; R_2 = R_3 = 20 \text{ см}, r_2 = \frac{3}{4} R_2, i_{2z} = 16 \text{ см};$$

$$\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ; \mu = 0,2; \sigma = 0,32 \text{ см}.$$

Знайти: $v|_{S_*=1,2 \text{ м}}, a|_{S_*=1,2 \text{ м}}.$

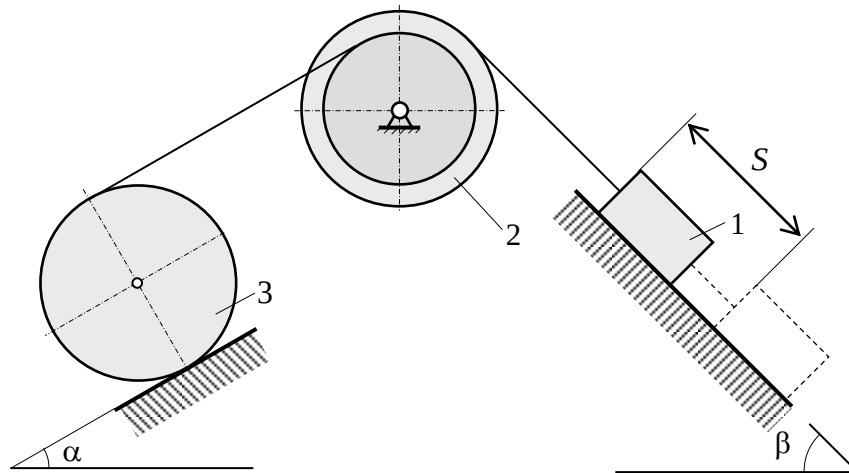


Рис. 1. Вихідна схема.

Розв'язання

1. Застосування теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи

Для розв'язання задачі застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи в інтегральній формі

$$T_k - T_n = A^E + A^I. \quad (1)$$

З умови задачі випливає, що початкова швидкість тіла 1 дорівнює нулю, тобто $v_0 = 0$, тому $T_n = 0$. Оскільки система складається з абсолютно твердих тіл, а в'язі, накладені на систему є ідеальними (сили тертя віднесемо до категорії активних сил), тому сума робіт внутрішніх сил, прикладених до точок системи, дорівнюватиме нулю, тобто $A^I = 0$.

Таким чином рівняння (1) спроститься до

$$T_k = A^E. \quad (2)$$

Вихідна задача тепер розділяється на дві окремі:

- визначення кінетичної енергії системи у кінцевий момент часу (T_k);
- визначення роботи A^E зовнішніх сил, прикладених до точок системи.

¹ Нумерація формул в цьому розділі є автономною.

а) Визначення T_k

Оскільки система складається з трьох абсолютно твердих тіл, що рухаються, то її кінетична енергія дорівнюватиме:

$$T_k = T_1 + T_2 + T_3, \quad (3)$$

де T_1, T_2, T_3 - кінетична енергія тіл 1, 2 і 3 відповідно.

Тіло 1 рухається поступально, тому (див. рис. 2):

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v^2.$$

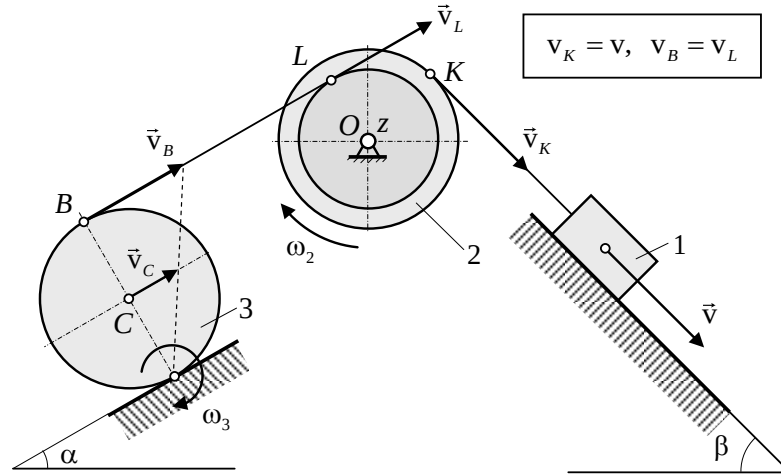


Рис. 2. До визначення кінетичної енергії досліджуваної механічної системи.

Тіло 2 здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі:

$$T_2 = \frac{1}{2} I_{Oz} \omega_2^2,$$

де I_{Oz} - момент інерції тіла 2 відносно нерухомої осі Oz , який дорівнює: $I_{Oz} = m_2 i_{2z}^2$, i_{2z} - радіус інерції тіла 2.

За формулою Ейлера кутова швидкість тіла 2 дорівнюватиме $\omega_2 = v / R_2$. Тому остаточно матимемо

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 i_{2z}^2 \left(\frac{v}{R_2} \right)^2 = \frac{1}{2} m_2 i_{2z}^2 \frac{v^2}{R_2^2}.$$

Тіло 3 здійснює плоскопаралельний рух, тому

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_3^2,$$

де $v_C = \frac{1}{2} v_B$ - швидкість центра мас тіла 3. У свою чергу $v_B = \omega_2 r_2 = \frac{r_2}{R_2} v$, тому $v_C = \frac{r_2}{2R_2} v$.

Момент інерції I_C тіла 3 (суцільний однорідний циліндр) відносно його центральної осі складає $I_C = \frac{1}{2} m_3 R_3^2$. Кутова швидкість обертального руху тіла 3 навколо МЦШ (т. P):

$\omega_3 = \frac{v_C}{CP} = \frac{r_2}{2R_2 R_3} v$. Тоді для T_3 отримаємо такий вираз:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \frac{r_2^2}{4R_2^2} v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_3 \cancel{R_3^2} \frac{r_2^2}{4R_2^2 \cancel{R_3^2}} v^2 = \frac{3}{16} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} v^2.$$

Далі за формулою (3) обчислюємо кінетичну енергію системи в кінцевий момент часу:

$$T_k = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 i_{2z}^2 \frac{v^2}{R_2^2} + \frac{3}{16} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} v^2 = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} m_2 + \frac{3}{8} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) v^2.$$

б) Обчислення роботи зовнішніх сил A^E

Робота зовнішніх сил, прикладених до точок механічної системи на переміщенні S , дорівнюватиме (див. рис. 3):

$$A^E = m_1 g S \sin \beta - F_{\tau 1} S - m_3 g S_C \sin \alpha + \sigma N_3 \varphi_3, \quad (4)$$

де $F_{\tau 1} = \mu N_1 = \mu m_1 g \cos \beta$ ($N_1 = m_1 g \cos \beta$); $N_3 = m_3 g \cos \alpha$, $S_C = \frac{r_2}{2R_2} S$, $\varphi_3 = \frac{S_C}{R_3} = \frac{r_2}{2R_2 R_3} S$.

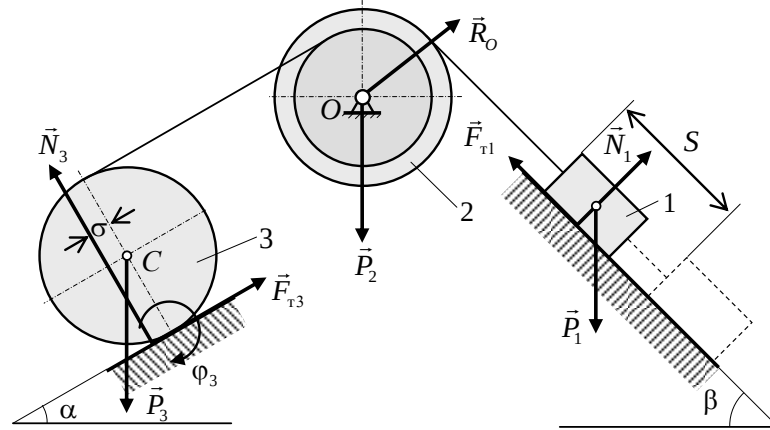


Рис. 3. До обчислення роботи зовнішніх сил, прикладених до тіл досліджуваної механічної системи.

Після підстановки знайдених значень у формулу (4) отримаємо:

$$\begin{aligned} A^E &= m_1 g S \sin \beta - \mu m_1 g S \cos \beta - m_3 g \frac{r_2}{2R_2} S \sin \alpha + \sigma m_3 g \frac{r_2}{2R_2 R_3} S \cos \alpha = \\ &= \left(m_1 \sin \beta - \mu m_1 \cos \beta - m_3 \frac{r_2}{2R_2} \sin \alpha + \sigma m_3 \frac{r_2}{2R_2 R_3} \cos \alpha \right) g S. \end{aligned}$$

Повертаючись до виразу (2) теореми, матимемо

$$\frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} m_2 + \frac{3}{8} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) v^2 = \left(m_1 \sin \beta - \mu m_1 \cos \beta - m_3 \frac{r_2}{2R_2} \sin \alpha + \sigma m_3 \frac{r_2}{2R_2 R_3} \cos \alpha \right) g S, \quad (5)$$

звідки знаходимо шукану швидкість:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2gS \left(m_1 \sin \beta - \mu m_1 \cos \beta - m_3 \frac{r_2}{2R_2} \sin \alpha + \sigma m_3 \frac{r_2}{2R_2 R_3} \cos \alpha \right)}{m_1 + \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} m_2 + \frac{3}{8} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 1,2 \text{ м} \cdot \left(\cancel{\text{м}} \frac{\sqrt{2}}{2} - 0,2 \cancel{\text{м}} \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cancel{\text{м}} \frac{15 \text{ см}}{40 \text{ см}} \cdot \frac{1}{2} + 0,32 \text{ см} \cdot 2 \cancel{\text{м}} \frac{15 \text{ см}}{40 \text{ см} \cdot 20 \text{ см}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{\cancel{\text{м}} \cdot 1 + \frac{16^2 \text{ см}^2}{20^2 \text{ см}^2} \cdot \cancel{\text{м}} + \frac{3}{8} \cdot 2 \cancel{\text{м}} \cdot \frac{15^2 \text{ см}^2}{20^2 \text{ см}^2}}} = 1,51 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Якщо продиференціювати вираз (5) за часом, то отримаємо

$$\left(m_1 + \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} m_2 + \frac{3}{8} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) \cdot \cancel{\text{м}} \cdot a = \left(m_1 \sin \beta - \mu m_1 \cos \beta - m_3 \frac{r_2}{2R_2} \sin \alpha + \sigma m_3 \frac{r_2}{2R_2 R_3} \cos \alpha \right) g \cancel{\text{м}},$$

звідки знаходимо шукане прискорення:

$$a = \frac{\left(m_1 \sin \beta - \mu m_1 \cos \beta - m_3 \frac{r_2}{2R_2} \sin \alpha + \sigma m_3 \frac{r_2}{2R_2 R_3} \cos \alpha \right) g}{m_1 + \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} m_2 + \frac{3}{8} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2}} = 0,96 \text{ м/с}^2.$$

2. Застосування загального рівняння динаміки

Для розглядуваної механічної системи з одним степенем вільності, що підкорена ідеальним двостороннім стаціонарним утримуючим в'язям („неідеальності” в'язей, наприклад, сили тертя, віднесемо до активних сил), загальне рівняння динаміки має вигляд

$$\delta A = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (6)$$

Для подальшого використання цього рівняння необхідно:

- проаналізувати активні сили, що діють на тіла системи (разом з доданими силами тертя), та сили інерції;
- надати тілам системи можливі переміщення, у відповідності до числа степенів вільності (у нашому випадку $s=1$) вибрати незалежні можливі переміщення і знайти вирази інших можливих переміщень через незалежні.

а) Аналіз сил

До системи прикладені такі сили, які треба розглянути у відповідності до загального рівняння динаміки (див. рис. 4):

- активні сили: сили ваги тіл системи $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, $m_3\vec{g}$;
- сили тертя ковзання $\vec{F}_{T1}$, $\vec{F}_{T3}$, та момент тертя кочення ($M_{\text{тк}} = \sigma N_3$);
- сили та моменти сил інерції: $\vec{\Phi}_1$, $\vec{\Phi}_C$, M_2^Φ , M_3^Φ .

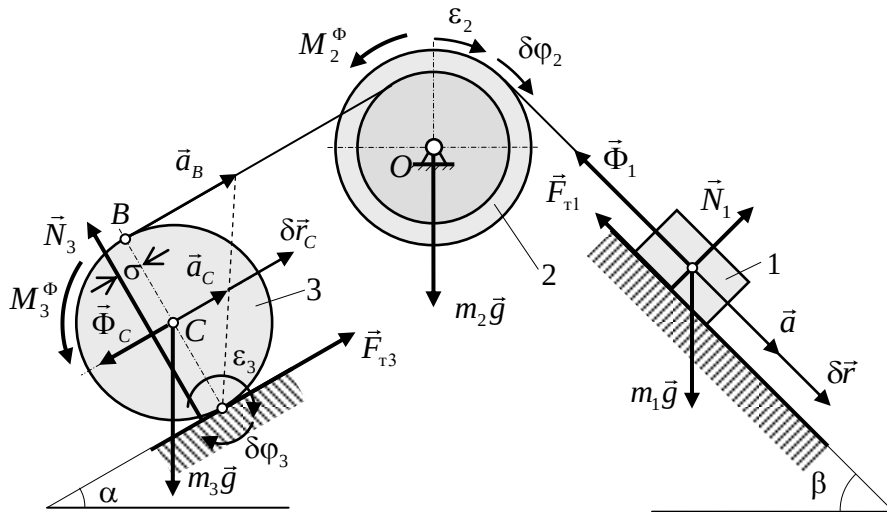


Рис. 4. До обчислення елементарної роботи активних сил та сил інерції.

Вказані сили мають такі величини:

$$F_{T1} = \mu N_1 = \mu m_1 g \cos \beta \quad (N_1 = m_1 g \cos \beta); \quad N_3 = m_3 g \cos \alpha, \quad S_C = \frac{r_2}{2R_2} S, \quad \Phi_3 = \frac{S_C}{R_3} = \frac{r_2}{2R_2 R_3} S.$$

$F_{T1} = \mu N_1 = \mu m_1 g \cos \beta$ - сила тертя ковзання тіла 1 по похилій поверхні;

$N_3 = m_3 g \cos \alpha$ - нормальна складова реакції нахиленої під кутом α площини;

$M_{\text{тк}} = \sigma N_3 = \sigma m_3 g \cos \alpha$ - момент тертя кочення;

$\Phi_1 = m_1 a$ - сила інерції тіла 1;

$\Phi_C = m_3 a_C$, але $a_C = \frac{r_2}{2R_2} a$; тоді $\Phi_C = m_3 \frac{r_2}{2R_2} a$ - сила інерції тіла 3;

$M_2^\Phi = I_{Oz} \epsilon_2$ - момент сил інерції обертального руху тіла 2; але оскільки $I_{Oz} = m_2 i_{2z}^2$, $\epsilon_2 = a / R_2$, отже отримаємо $M_2^\Phi = m_2 i_{2z}^2 a / R_2$;

$M_3^\Phi = I_C \varepsilon_3$, а $I_C = \frac{1}{2} m_3 R_3^2$, $\varepsilon_3 = \frac{r_2}{2R_2 R_3} a$, тому матимемо

$M_3^\Phi = \frac{1}{4} m_3 \frac{r_2 R_3}{R_2} a$ – момент сил інерції обертального руху тіла 3.

б) Аналіз можливих переміщень

Надамо незалежне можливе переміщення $\delta \vec{r}$ тілу 1. Тоді отримаємо відповідні залежні можливі переміщення $\delta \varphi_2$, $\delta \vec{r}_C$, $\delta \varphi_3$, які визначаються наступним чином:

$\delta \varphi_2 = \delta r / R_2$ – можливий кут повороту тіла 2;

$\delta r_C = \frac{r_2}{2R_2} \delta r$ – можливе переміщення точки C – центра мас тіла 3;

$\delta \varphi_3 = \frac{\delta r_C}{R_3} = \frac{r_2}{2R_2 R_3} \delta r$ – можливий кут повороту тіла 3.

Після цього можна за формулою (6) скласти відповідне загальне рівняння динаміки:

$$\delta A = m_1 \vec{g} \cdot \delta \vec{r} + \vec{F}_{T1} \cdot \delta \vec{r} + \vec{\Phi}_1 \cdot \delta \vec{r} + m_2 \vec{g} \cdot \vec{0} + \vec{M}_2^\Phi \cdot \delta \vec{\varphi}_2 + m_3 \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_C + \vec{M}_{T3} \cdot \delta \vec{\varphi}_3 + \vec{F}_{T3} \cdot \vec{0} + \vec{\Phi}_C \cdot \delta \vec{r}_C + \vec{M}_3^\Phi \cdot \delta \vec{\varphi}_3 = 0, \quad (7)$$

або, розкриваючи скалярні добутки, -

$$\delta A = m_1 g \cdot \delta r \sin \beta - F_{T1} \delta r - \Phi_1 \delta r - M_2^\Phi \cdot \delta \varphi_2 - m_3 g \cdot \delta r_C \sin \alpha + \sigma N_3 \delta \varphi_3 - \Phi_C \delta r_C - M_3^\Phi \delta \varphi_3 = 0.$$

Далі підставляємо у цю формулу отримані вище величини сил та можливих переміщень:

$$\delta A = \delta r \cdot (m_1 g \sin \beta - \mu m_1 g \cos \beta - m_1 a - m_2 \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} a - m_3 \frac{r_2}{2R_2} g \cdot \sin \alpha + \sigma m_3 \frac{r_2}{2R_2} g \cos \alpha \cdot \frac{1}{R_3} - m_3 \frac{r_2^2}{4R_2^2} a - \frac{1}{4} m_3 \frac{r_2 R_3}{R_2} a \cdot \frac{r_2}{2R_2 R_3}) = 0.$$

Оскільки $\delta r \neq 0$, то вираз у дужках дорівнює нулю:

$$m_1 g \sin \beta - \mu m_1 g \cos \beta - m_1 a - m_2 \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} a - m_3 \frac{r_2}{2R_2} g \cdot \sin \alpha + \sigma m_3 \frac{r_2}{2R_2 R_3} g \cos \alpha - m_3 \frac{r_2^2}{4R_2^2} a - \frac{1}{2} m_3 \frac{r_2^2}{4R_2^2} a = 0,$$

звідки знаходимо

$$\left(m_1 + \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} m_2 + \frac{3}{8} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) \cdot a = \left(m_1 \sin \beta - \mu m_1 \cos \beta - m_3 \frac{r_2}{2R_2} \sin \alpha + \sigma m_3 \frac{r_2}{2R_2 R_3} \cos \alpha \right) g, \quad (8)$$

отже

$$a = \frac{m_1 \sin \beta - \mu m_1 \cos \beta - m_3 \frac{r_2}{2R_2} \sin \alpha + \sigma m_3 \frac{r_2}{2R_2 R_3} \cos \alpha}{m_1 + \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} m_2 + \frac{3}{8} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2}} g = \frac{\cancel{m} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0,2 \cancel{m} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cancel{m} \frac{15 \text{ см}}{40 \text{ см}} \cdot \frac{1}{2} + 0,32 \text{ см} \cdot 2 \cancel{m} \frac{15 \text{ см}}{40 \text{ см} \cdot 20 \text{ см}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\cancel{m} \cdot 1 + \frac{16^2 \text{ см}^2}{20^2 \text{ см}^2} \cdot \cancel{m} + \frac{3}{8} \cdot 2 \cancel{m} \cdot \frac{15^2 \text{ см}^2}{20^2 \text{ см}^2}} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 = 0,96 \text{ м/с}^2.$$

Таким чином отримали

$$\boxed{a = 0,96 \text{ м/с}^2}.$$

Інтегруючи цей вираз за умови, що $S(0) = 0$, $v(0) = 0$ (а прискорення $a = \text{const}$), отримаємо

$$S(t) = S(0) + v(0)t + \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} a t^2,$$

$$v(t) = v(0) + at = at .$$

З першого рівняння знаходимо $t = \sqrt{2S(t)/a}$, після підстановки якого в друге рівняння

маємо: $v = a \sqrt{\frac{2S(t)}{a}} = \sqrt{2S(t)a}$, звідки, за умови $S = S_* = 1,2$ м, остаточно отримаємо

$$v = \sqrt{2S_*a} = \sqrt{2 \cdot 1,2 \text{ м} \cdot 0,96 \text{ м/с}^2} = 1,51 \text{ м/с}.$$

3. Розв'язання задачі за допомогою рівнянь Лагранжа II-го роду

Методика застосування рівнянь Лагранжа II-го роду полягає в наступному.

1) Визначаємо число степенів вільності механічної системи (в нашому випадку $s=1$); вибираємо узагальнену координату ($q_1 = S$), та записуємо відповідне рівняння Лагранжа

II-го роду: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}} \right) - \frac{\partial T}{\partial S} = Q_1.$

2) Знаходимо вираз кінетичної енергії системи через узагальнені координату і швидкість (див. п. 6.1): $T = T_k = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} m_2 + \frac{3}{8} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) \dot{S}^2.$

3) Визначаємо необхідні частинні похідні від T :

$$\frac{\partial T}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{S}} = \left(m_1 + \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} m_2 + \frac{3}{8} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) \dot{S}, \text{ а також } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}} \right) = \left(m_1 + \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} m_2 + \frac{3}{8} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) \ddot{S}.$$

4) З виразу (7) знаходимо суму елементарних робіт активних сил та реакцій неідеальних в'язей:

$$\delta A^{(a)} = m_1 \vec{g} \cdot \delta \vec{r} + \vec{F}_{T1} \cdot \delta \vec{r} + m_2 \vec{g} \cdot \vec{0} + \vec{F}_{T3} \cdot \vec{0} + m_3 \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_C + \vec{M}_{TK} \cdot \delta \vec{\phi}_3,$$

яка після підстановки відповідних величин набуває вигляду

$$\begin{aligned} \delta A^{(a)} &= m_1 g \cdot \delta r \sin \beta - F_{T1} \delta r - m_3 g \cdot \delta r_C \sin \alpha + \sigma N_3 \delta \phi_3 = \\ &= \left(m_1 g \sin \beta - \mu m_1 g \cos \beta - m_3 \frac{r_2}{2R_2} g \cdot \sin \alpha + \sigma m_3 \frac{r_2}{2R_2 R_3} g \cdot \cos \alpha \right) \delta r. \end{aligned}$$

Оскільки $\delta A^{(a)} = Q_1 \delta r$, то маємо

$$Q_1 = m_1 g \sin \beta - \mu m_1 g \cos \beta - m_3 \frac{r_2}{2R_2} g \cdot \sin \alpha + \sigma m_3 \frac{r_2}{2R_2 R_3} g \cdot \cos \alpha.$$

5) Складаємо рівняння Лагранжа II-го роду:

$$\left(m_1 + \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} m_2 + \frac{3}{8} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) \ddot{S} = \left(m_1 \sin \beta - \mu m_1 \cos \beta - m_3 \frac{r_2}{2R_2} \cdot \sin \alpha + \sigma m_3 \frac{r_2}{2R_2 R_3} \cdot \cos \alpha \right) \cdot g. \quad (9)$$

6) Знаходимо шукане прискорення (порівняти вираз (9) з виразом (8) у п. 6.2)

$$a = \ddot{S} = 0,96 \text{ м/с}^2.$$

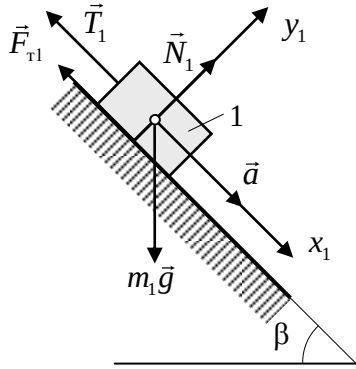
Шукана швидкість знаходиться таким же чином, як і у попередньому пункті 6.2.

4. Метод складання диференціальних рівнянь руху твердих тіл

За цим методом система уявно розділяється на окремі тіла, для кожного з яких записуються диференціальні рівняння руху, розв'язки яких потім „зшиваються” для отримання шуканих величин.

а) Розглянемо тіло 1

Воно здійснює поступальний рух, який описується двома диференціальними рівняннями (див. рис. 5):



$$x_1: m_1 a = m_1 g \sin \beta - T_1 - F_{\text{тр}1}, \quad (10)$$

$$y_1: 0 = N_1 - m_1 g \cos \beta. \quad (11)$$

З виразу (11) маємо

$$N_1 = m_1 g \cos \beta.$$

Відповідно до закону Кулона

$$F_{\text{тр}1} = \mu N_1 = \mu m_1 g \cos \beta.$$

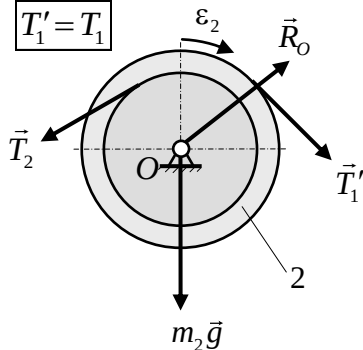
З рівняння (10) знаходимо, що величина сили натягу нитки, через яку тіло 1 зв'язане з тілом 2, дорівнює

$$T_1 = m_1 g \sin \beta - F_{\text{тр}1} - m_1 a = m_1 g \sin \beta - \mu m_1 g \cos \beta - m_1 a. \quad (12)$$

Рис. 5. До виводу рівнянь руху тіла 1.

б) Розглянемо тіло 2

Це тіло здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі Oz , який описується одним диференціальним рівнянням (див. рис. 6):



$$I_{Oz} \epsilon_2 = T_1 R_2 - T_2 r_2, \quad (13)$$

де $I_{Oz} = m_2 i_{2z}^2$; $\epsilon_2 = a / R_2$.

Тоді з рівняння (13) знаходимо натяг T_2 нитки, через яку тіло 2 зв'язано з тілом 3:

$$T_2 = \frac{R_2}{r_2} T_1 - m_2 \frac{i_{2z}^2}{R_2 r_2} a,$$

або, враховуючи (12), отримаємо

$$T_2 = \frac{R_2}{r_2} (m_1 g \sin \beta - \mu m_1 g \cos \beta - m_1 a) - m_2 \frac{i_{2z}^2}{R_2 r_2} a. \quad (14)$$

Рис. 6. Сили, прикладені до тіла 2.

в) Розглянемо тіло 3

Це тіло здійснює плоскопаралельний рух, який описується трьома диференціальними рівняннями (див. рис. 7):

$$x_3: m_3 a_C = T_2 + F_{\text{тр}3} - m_3 g \cdot \sin \alpha, \quad (15)$$

$$y_3: 0 = N_3 - m_3 g \cdot \cos \alpha, \quad (16)$$

$$z_3: I_C \epsilon_3 = T_2 R_3 + \sigma N_3 - F_{\text{тр}3} R_3. \quad (17)$$

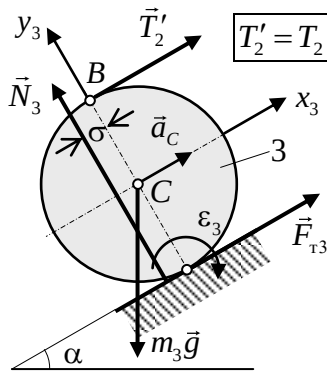


Рис. 7. Сили, прикладені до тіла 3.

З виразу (16) маємо

$$N_3 = m_3 g \cdot \cos \alpha .$$

З рівняння (15) знаходимо силу зчеплення циліндра 3 з похилою площиною

$$F_{\text{тр}3} = m_3 a_C - T_2 + m_3 g \cdot \sin \alpha ,$$

де $a_C = \frac{r_2}{2R_2} a$.

Далі з рівняння (17), враховуючи, що

$$I_C = \frac{1}{2} m_3 R_3^2, \text{ а } \epsilon_3 = \frac{r_2}{2R_2 R_3} a, \text{ маємо:}$$

$$\frac{1}{2} m_3 \frac{R_3 r_2}{2R_2} a = T_2 R_3 + \sigma m_3 g \cos \alpha - m_3 \frac{R_3 r_2}{2R_2} a + T_2 R_3 - m_3 g R_3 \sin \alpha ,$$

звідки отримуємо вираз для T_2 :

$$T_2 = \frac{3}{4} m_3 \frac{r_2}{2R_2} a - \sigma m_3 \frac{1}{2R_3} g \cos \alpha + \frac{1}{2} m_3 g \sin \alpha . \quad (18)$$

Прирівнюючи («зшиваючи») вирази (14) і (18), дістанемо наступний вираз:

$$\frac{R_2}{r_2} (m_1 g \sin \beta - \mu m_1 g \cos \beta - m_1 a) - m_2 \frac{i_{2z}^2}{R_2 r_2} a = \frac{3}{4} m_3 \frac{r_2}{2R_2} a - \sigma m_3 \frac{1}{2R_3} g \cos \alpha + \frac{1}{2} m_3 g \sin \alpha ,$$

або

$$\left(m_1 + \frac{i_{2z}^2}{R_2^2} m_2 + \frac{3}{8} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) \cdot a = \left(m_1 \sin \beta - \mu m_1 \cos \beta - m_3 \frac{r_2}{2R_2} \sin \alpha + \sigma m_3 \frac{r_2}{2R_2 R_3} \cos \alpha \right) g .$$

Цей вираз повністю збігається з отриманими вище виразами (8) і (9). Отже шукане прискорення a дорівнюватиме

$$a = 0,96 \text{ м/с}^2.$$

Шукана швидкість знаходиться так, як у пункті 6.2.

5. Висновки

Як і очікувалось, розв'язки даної задачі за всіма методами збігаються.

Зауважимо, що якщо за умовою задачі треба знаходити швидкість (кутову швидкість) тіла, або пройдений ним шлях (кут повороту), то тоді краще використовувати теорему про зміну кінетичної енергії. Застосування цієї теореми не вимагає складання диференціальних рівнянь руху системи, що значно спрощує розрахунки.

Використання загального рівняння динаміки або рівнянь Лагранжа II-го роду виправдане за умови, якщо вимагається знайти математичну модель руху у вигляді диференціального рівняння, або прискорення (кутове прискорення) тіла, що входить до системи. Кількість рівнянь у даному разі найменша і визначається числом степенів вільності розглядуваної механічної системи.

Нарешті, перевагою останнього методу є те, що за рахунок аналізу системи і розбивання її на окремі тіла, отримуємо більш прості диференціальні та алгебричні рівняння (але кількість їх не є найменшою). Крім цього, він дозволяє визначити внутрішні сили в системі (наприклад, натяг нитки). Недоліком методу є те, що він є більш громіздким і вимагає більшої уваги при виконанні обчислень.

Підбиваючи підсумки вивчення теоретичної механіки відмітимо, що ця наука відіграє подвійну роль у системі підготовки висококваліфікованих інженерних кадрів України. По-перше, вона є світоглядною наукою, яка поруч із математикою та фізикою формує у студента діалектичний світогляд, розвиває логічне мислення, вводить до широкого кола явищ, що відносяться до механічного руху. По-друге, теоретична механіка – наукова база сучасної техніки.

Розглянемо ці твердження більш детально.

Теоретична механіка історією свого виникнення, внутрішньою структурою та логікою розвитку підтверджує діалектичний шлях пізнання істини, об'єктивної реальності – «від живого споглядання до абстрактного мислення і від нього до практики». Дійсно, механіка – одна із перших і найбільш стародавніх природних наук, яка зародилася декілька тисячоліть тому із потреб людини у машинах, що підвищують продуктивність праці: важіль, блок, поліспаст, і т. п. Знання людини, які дозволили створити ці машини, являли собою узагальнення результатів спостережень над явищами природи. Досконалість цих машин перевірялася практикою у широкому сенсі цього слова. Таким чином, на зорі свого існування механіка підтверджувала вищевказану формулу. Однак, попри свою древність, механіка стала справжньою наукою біля трьох століть тому, коли в ній склалися свої методи теоретичного дослідження.

Механіка Ньютона – це результат наукового узагальнення експериментальних даних про властивості механічних рухів тіл, встановлених Галілеєм та Кеплером. Складність явища, що вивчається, змусила ввести в науку граничні абстракції: матеріальну точку, систему матеріальних точок, ньютонівський простір, ньютонівський час, тощо. Геніальність Ньютона полягає в тому, що при введенні цих абстракцій він виділив необхідні характеристики руху в цих матеріальних об'єктах і в категоріях простору і часу. Завдяки цим абстракціям механіка отримала блискучу завершеність, підтверджену її тріумфом як в інженерній практиці, так і в науці в цілому. Особливо слід відзначити евристичну функцію теоретичної механіки. Кожна з її основних (загальних) теорем динаміки виявлялася основою достовірного і ясного знання в таких царинах, як теорія реактивного руху, теорія гіроскопічних пристроїв, динаміка машин. Закони Ньютона, доповнені законами фізики про поведінку макроскопічних середовищ при зміні їх форми, описують рух і рівновагу деформованих твердих тіл, тіл рідких і газоподібних.

Тріумф механіки Ньютона викликав прагнення вчених доробити останню – знайти найбільш широкі принципи побудови, більш точні формулювання її понять. Це створило можливість більш стрункої її побудови за допомогою аналітичних методів. Головними представниками такого «аналітичного» напрямку були Л. Ейлер (Euler), Ж. Л. Лагранж (Lagrange). Не зупиняючись на аналізі видатного внеску Л. Ейлера у розвиток механіки, зупинимось на короткому аналізі механіки Лагранжа.

Ж. Л. Лагранж намагався побудувати єдину теорію всіх явищ природи виключно аналітичним способом. Він побудував аналітичну механіку системи матеріальних точок, розглянуту в даному курсі, механіку абсолютно твердого тіла і ідеальної рідини. Рівняння Лагранжа II-го роду є досконалим алгоритмом розв'язання задач не тільки механіки, але й суміжних наук, наприклад, теоретичної електродинаміки, релятивістської механіки та інших, які користуються лагранжевим формалізмом. Цей факт є ще одним підтвердженням евристичної функції механіки.

Механіка Гамільтона (Hamilton), що є розвитком механіки Лагранжа, може розглядатися як конкретизація квантово-хвильової наукової картини Всесвіту. Про роль цієї механіки в створенні квантової механіки засновник останньої сказав наступне: «В нашому розпорядженні немає добре відпрацьованої процедури переходу від класичної теорії до квантової. Цінність класичної теорії полягає в тому, що в ній містяться натяки, які дозволяють нам отримати квантову теорію. Якщо б ми володіли достатніми здібностями,

¹ За матеріалами академіка АНУ, проф. М. О. Кільчевського.

щоб безпосередньо розглядати гарну квантову теорію, ми взагалі могли б обійтись без класичної теорії. Однак наші здібності не настільки блискучі і тому ми повинні використати всі, навіть маленькі, вказівки, здатні полегшити нам побудову гарної квантової теорії. Без класичної теорії ми взагалі не мали б ніякої відправної точки. В класичній механіці є теорія перетворень, тісно пов'язана із теорією перетворень квантової механіки. Цей зв'язок виникає через схожість дужок Пуассона (Poisson) в обох випадках. Схожість дужок Пуассона – річ більш сильна, ніж просто натяк. Саме в цьому пункті маємо тісний зв'язок між класичною і квантовою механікою.» (Дірак П. Лекції з квантової теорії поля. М.: Мир, 1971). Розглянута в курсі оптико-механічна аналогія вказує на зв'язок теоретичної механіки і механіки хвильової. Сказане є підтвердженням евристичної функції гамільтонової механіки.

Підбиваючи підсумки до вищесказаного робимо висновок, що логічний розвиток теоретичної механіки є відображенням логічного розвитку загальнолюдської практики. В поняттях теоретичної механіки знайшли відображення основні категорії діалектики. Поняття механічного руху відображає головну категорію діалектики – протиріччя: тіло одночасно знаходиться у даному місці простору і не знаходиться в ньому. Поняття резонансу і всіх величин, що визначаються через граничний перехід, відображає категорію діалектики про перехід кількісних змін в якісні. Нарешті, можливість введення деяких понять як наслідок інших є відображенням категорії діалектики про взаємний зв'язок і обумовленість явищ природи. У нашому курсі ми неодноразово зустрічалися з такими фактами. Можна відмітити також зв'язок законів збереження основних динамічних величин із просторово-часовою симетрією системи.

Зупинимось на другій ролі теоретичної механіки – науковій базі сучасної техніки.

Оскільки теоретична механіка розглядає властивості механічних рухів абстрактних моделей, наділеними властивостями, притаманними всім тілам, то її закони описують механічний рух всіх тіл, що зустрічаються у природі: плазми у магнітному полі, вихідних речовин і каталізаторів в хімічних реакціях, морських кораблів та залізничного транспорту, земної тверді під час землетрусів, тварин на суші і птахів у повітрі, лімфи і крові у живому організмі і т. д., і т. п. Механіка зіграла основну роль у розвитку теоретичних основ повітроплавання і теорії руху ракет. Вона навчила інженерів робити складні розрахунки на міцність та стійкість літальних апаратів. Безпомилковий політ вітчизняних космічних кораблів за заданими орбітами забезпечили надточні гіроскопічні та інші командні прилади, що базуються на використанні надтонких особливостей механічних явищ. Студенти НТУУ «Київський політехнічний інститут» також широко користуються законами теоретичної механіки як під час навчання в університеті, так і в інженерній практиці.

Наведемо декілька підтверджень вищесказаному. Знання законів кінематики і динаміки обертального руху твердого тіла дозволяє виконувати розрахунки в теорії приводу. Знання кінематики твердого тіла дає можливість визначати кінематичні характеристики різних точок приладів. Кінематичні характеристики часток у приладах, встановлених на рухомих об'єктах, можна визначати за законами кінематики складного руху точки. Дослідження руху заряджених часток в електромагнітних полях – реалізація принципу детермінізму класичної механіки для абсолютного і відносного рухів точки. Дослідження вібрацій приладів та пристроїв, та їх елементів, виконується на основі теорії малих коливань системи, розглянутої в курсі. Теорія головних (нормальних) координат дозволяє звести задачу про коливання системи зв'язаних часток до задачі про набір гармонійних осциляторів. Аналогічна задача розв'язується в теорії електромагнітного поля. В курсах теоретичних основ електротехніки показано, що коливання простого електричного контуру описуються рівняннями, аналогічними до рівнянь механічних коливань точки, розглянутим в даному курсі.

І все ж, основне значення прослуханого вами курсу – в його загальності, його фундаментальності. Тут має сенс навести слова Луї Пастера (Pasteur) і коментарі до них К. А. Тімірязєва.

Луї Пастер: «мало знайдеться людей, що розуміють істинне походження див промисловості і народних багатств. Як один з доказів цього, я наведу все частіше й частіше застосовуване в розмові, в офіційній мові, в різного роду статтях, цілковито невідповідний

вираз «прикладні науки». Хтось недавно в присутності одного дуже талановитого міністра висловив жаль, що наукові кар'єри залишаються людьми, які з успіхом могли б на них підвизатися. Заперечуючи це, державний муж намагався довести, що цьому не слід дивуватися, оскільки в теперішній час значення теоретичних наук поступилося місцем пануванню прикладних наук. Немає нічого більш помилкового за цю думку, немає нічого – наважуся сказати – небезпечніше тих наслідків, які можуть виникнути на практиці від подібних слів Ні, тисячу разів ні, не існує жодної категорії наук, якій можна було б дати назву прикладних наук. Існують науки і застосування наук, зв'язані між собою як плід і дерево, що його породило.»

К. А. Тімірязев: «чи не повинні ми бачити в цьому відповідь і науку життєвським мудрецам ..., які завжди готові підносити матеріальну і моральну зверхність так званого прикладного знання над знанням теоретичним. Практичною, в найвищому сенсі цього слова, виявилась не вікова практика медицини, а теорія Пастера. Сорок років теорії дали людству те, що не змогли йому дати сорок віків практики. Ось головна наука, яку ми повинні винести із діяльності цього великого вченого».

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Павловский М. А., Акинфиева Л. Ю., Бойчук О. Ф. Теоретическая механика. Динамика. – К.: Вища шк., 1990. – 480 с.
3. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике.- М.: Наука, 1986. - 448с.
4. Теоретична механіка: Збірник задач / О. С. Апостолук, В. М. Воробйов, Д. І. Ільчишина та ін.; За ред. М.А. Павловського. - К.: Техніка, 2007. – 400 с.
5. Розв'язування задач з коливань матеріальної точки за допомогою комп'ютера: Метод. вказівки до викон. практ. завдань з теоретичної механіки для студ. усіх спец. / Уклад.: О. С. Апостолук, В. О. Апостолук. – К.: НУТУ «КП», 2006. – 64 с.
6. Теор
7. [10-11-090.doc](http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/859) : Теоретична механіка. Кінематика. Динаміка та аналітична механіка [Електронний ресурс] : навчальний посібник / Г. Я. Міщук, Н. І. Штефан ; НТУУ «КП». – Електронні текстові дані (1 файл: 108.4 Мбайт). – Київ : НТУУ «КП», 2010. - Назва з екрана.- Доступ: <http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/859>
8. [10-11-174.doc](http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/769) :Теоретична механіка [Електронний ресурс] : методичні вказівки для самостійної роботи над тестами для студентів інженерних спеціальностей / НТУУ «КП» ; уклад. В. Г. Савін, Н. І. Штефан. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,40 Мбайт). – Київ : НТУУ «КП», 2010. - Назва з екрана.- Доступ: <http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/769>
9. [10-11-060.doc](http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/830): Теоретична механіка. Динаміка точки [Електронний ресурс] : методичні вказівки для самостійної роботи студентів / НТУУ «КП» ; уклад. Н. І. Штефан. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,98 Мбайт). – Київ : НТУУ «КП», 2010. - Назва з екрана. - Доступ: <http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/830>
10. [11-12-082 .docx](http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/1604) : Теоретична механіка: Загальні теореми динаміки [Електронний ресурс] : методичні вказівки до проведення практичних занять та самостійної роботи студентів технічних напрямів підготовки / НТУУ «КП» ; уклад. В. Г. Савін, Н. І. Штефан. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,62 Мбайт). – Київ : НТУУ «КП», 2011. – Назва з екрана. - Доступ: <http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/1604>
11. [11-12-189.doc](http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/1604): Теоретична механіка. Розділ: Аналітична механіка [Електронний ресурс] : методичні вказівки до проведення практичних занять та самостійної роботи студентів технічних напрямів підготовки / НТУУ «КП» ; уклад. В. Г. Савін, Н. І. Штефан, Н. В. Гнатейко. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,54 Мбайт). – Київ : НТУУ «КП»,

2012. — Назва з екрана.- Доступ:
<http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/1881>
12. Теоретична механіка. Динаміка та аналітична механіка [Електронний ресурс] : методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи (РГР) для студентів технічних напрямів підготовки денної та заочної форм навчання / НТУУ «КПІ» ; уклад. В. Г. Савін, В. М. Федоров, Н. І. Штефан. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,90 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2013. – 35 с. – Назва з екрана. – Доступ: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/3558>
13. Дистанційний курс . Електронний курс лекцій: Динаміка та аналітична механіка/ для студентів технічних напрямків підготовки / Уклад. Н. І. Штефан, . О. С. Апостолук, Н. В. Гнатейко , В. Г. Савін - Доступ: <http://moodle.udc.ntu-kpi.kiev.ua/moodle/course/view.php?id=591>

Додаткова

14. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. - М.: Наука. Т.1-2, 1979.
15. Бать М.И., Джанелидзе М.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. - М.: Наука. Т. 2, 1972.
16. Кильчевский Н. А., Ремизова Н. И., Кильчевская Е. Н. Основы теоретической механики. – К.: Вища школа, 1986. – 296 с.
17. Сборник коротких задач по теоретической механике: Учебное пособие для втузов. / О. Э. Кеппе, Я. А. Виба, О. П. Грапис и др.; Под ред. О. Э. Кеппе.- М.: Высш. шк., 1989.- 368 с.

ЗМІСТ ЛЕКЦІЙ

	Лекція	Стор.
Вступ до модуля		3
Розділ 4. Динаміка	1	4
Тема 4.1. Динаміка вільної матеріальної точки		
9. Динаміка вільної матеріальної точки		5
9.1. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки		5
9.2. Дві задачі динаміки вільної матеріальної точки		6
Тема 4.2. Прямолінійні коливання матеріальної точки		
9.3. Прямолінійні (вільні та згасаючі) коливання матеріальної точки	2, 3	8
Тема 4.3. Динаміка невільної матеріальної точки		
10. Динаміка невільної матеріальної точки	4	17
10.1. В'язі. Звільнення від в'язей		17
10.2. Динамічні рівняння руху невільної матеріальної точки. Дві задачі динаміки невільної матеріальної точки. Рівняння руху матеріальної точки по нерухомій поверхні (рівняння Лагранжа I-го роду)		19
10.3. Рівняння руху невільної матеріальної точки по нерухомій кривій (рівняння Лагранжа I-го роду)		20
Тема 4.4. Метод кінетостатики		
11. Метод кінетостатики	5	22
11.1. Принцип Д'Аламбера для матеріальної точки		22
11.2. Принцип Д'Аламбера для системи матеріальних точок		23
Тема 4.5. Динаміка відносного руху матеріальної точки		
12. Динаміка відносного руху матеріальної точки	6	25
12.1. Основне рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки		25
12.2. Частинні випадки руху вільної матеріальної точки		29
Тема 4.6. Динаміка механічної системи		
13. Загальні відомості про механічну систему. Динамічні рівняння руху. Геометрія мас	7	30
13.1. Механічна система. Класифікація сил		30
13.2. Динамічні рівняння руху механічної системи		31
13.3. Маса системи. Центр ваги, центр мас або центр інерції		32
13.4. Моменти інерції механічної системи	8	33
Тема 4.7. Основні теореми динаміки		
14. Загальні теореми динаміки для системи матеріальних точок	9	41
14.1. Міри механічного руху		41
14.2. Кількість руху механічної системи		41
14.3. Теорема про зміну кількості руху механічної системи. Теорема про рух центру мас		42
14.4. Закони збереження кількості руху механічної системи		43
14.5. Момент кількості руху матеріальної точки. Кінетичний момент механічної системи	10	45
14.6. Перетворення кінетичного моменту механічної системи при зміні центру зведення		46
14.7. Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи		47
14.8. Закони збереження кінетичного моменту механічної системи	11	49

14.9. Кінетичний момент твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі		50
14.10. Кінетична енергія		50
14.11. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки	12	55
14.12. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи	13	57
14.13. Робота сили		57
14.14. Робота сили ваги		58
14.15. Робота сил, що діють на механічну систему		59
14.16. Елементарна робота реакцій ідеальних в'язей		59
14.17. Елементарна робота сил, що прикладені до твердого тіла	14	60
14.18. Частинні випадки обчислення елементарних робіт для різних видів руху тіла		61
14.19. Отримання диференціальних рівнянь руху твердого тіла за допомогою загальних теорем динаміки	15	64
Розділ 5. Аналітична механіка	16	68
Тема 5.1. Теорія можливих переміщень		
15. Класифікація в'язей, дійсні та можливі переміщення, ідеальні в'язі, число степенів вільності механічної системи, узагальнені координати, узагальнені сили		68
15.1. Класифікація в'язей та їх означення		68
15.2. Можливі та дійсні переміщення		69
15.3. Можлива робота	17	72
15.4. Ідеальні в'язі. Можлива робота реакцій ідеальних в'язей		73
15.5. Число степенів вільності механічної системи		73
16. Принцип можливих переміщень	18	74
16.1. Загальне рівняння статички		74
16.2. Умови рівноваги вільного і невільного твердого тіла		77
17. Принцип Д'Аламбера-Лагранжа (загальне рівняння динаміки)	19	78
Порівняльне розв'язання задачі моделювання руху різними методами динаміки та аналітичної механіки на прикладі механічної системи з одним степенем вільності		80
1. Застосування теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи		94
2. Застосування загального рівняння динаміки		97
3. Розв'язання задачі за допомогою рівнянь Лагранжа II-го роду		99
4. Метод складання диференціальних рівнянь руху твердих тіл		100
5. Висновки		101
Заключне слово		
Список літератури		107