

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Математичні аспекти загального страхування

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за спеціальністю Е7 Математика

Укладач: О. І. Василик

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2025

УДК 519.2

Укладач: *Василик О.І.*, доктор фіз.-мат.наук, доцент

Рецензент: *Яневич Т.О.*, канд. фіз.-мат.наук, доцент
кафедри теорії ймовірностей,
статистики та актуарної математики,
механіко-математичний факультет,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Відповідальний

редактор: *Клесов О.І.*, доктор фіз.-мат.наук, професор,
завідувач кафедри математичного
аналізу та теорії ймовірностей,
ФМФ, НТУУ “КПІ ім. Ігоря Сікорського”

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 9 від 26.06.2025 р.)
за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 7 від 04.06.2025 р.)*

Василик О.І.

М34 Математичні аспекти загального страхування [Електронний ресурс]:
навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою
«Страхова та фінансова математика» спец. Е7 Математика / КПІ ім. Ігоря
Сікорського; уклад.: О. І. Василик. – Електрон. текст. дані (1 файл). –
Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. – 145 с.

Посібник містить основні поняття та результати, які використовуються в загальному страхуванні. Розглядаються такі моделі страхування як модель колективного ризику, модель індивідуального ризику, факторизаційна модель, вивчаються наближення для складних розподілів. Наведено деякі відомості з теорії банкрутства. Представлено методи оцінювання резервів. Для студентів спеціальності Е7 “Математика” Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”.

УДК 519.2

Реєстр. № 24/25-610. Обсяг 6,59 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Берестерський проспект, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідectво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

Зміст

1	Основні поняття страхової справи	7
1.1	Страхова термінологія згідно із “Законом України про страхування”	7
1.2	Умови забезпечення платоспроможності страховиків	13
2	Необхідні відомості з теорії ймовірностей	15
2.1	Стохастичні ситуації та їх математичні моделі	16
2.2	Незалежні події. Умовні ймовірності	17
2.3	Формула повної ймовірності. Формула Байєса	17
2.4	Випадкові величини та їх розподіли	18
2.4.1	Дискретні випадкові величини	18
2.4.2	Абсолютно неперервні випадкові величини	19
2.4.3	Моменти випадкових величин	19
2.5	Генератриса	20
2.5.1	Генератриса розподілу	20
2.5.2	Генератриса моментів	21
2.5.3	Генератриса кумулянт	22
2.6	Основні типи розподілів індивідуальних позовів та кількості позовів	22
2.6.1	Дискретні розподіли	23
2.6.2	Розподіли абсолютно неперервних випадкових величин	29
2.7	Випадкові вектори	39
2.8	Незалежні випадкові величини	42
2.9	Умовні розподіли та щільності	43
2.10	Умовне математичне сподівання	44
2.11	Закон великих чисел	45
3	Моделі і задачі теорії ризику	46
3.1	Класифікація моделей ризику	47
3.1.1	Банкрутство	47
3.1.2	Основні задачі статичної моделі ризику	48
3.1.3	Основні задачі динамічної моделі ризику	48
3.2	Модель колективного ризику	49
3.2.1	Опис моделі колективного ризику	49
3.2.2	Розподіл сумарної величини виплат за портфелем та його характе- ристики	49
3.2.3	Моменти	50
3.2.4	Генератриса розподілу	51
3.2.5	Генератриса моментів	51

3.2.6	Складний пуассонівський розподіл	52
3.2.7	Складний біноміальний розподіл	53
3.2.8	Складний від'ємний біноміальний розподіл	53
3.3	Модель індивідуального ризику	55
3.4	Мінливість або невизначеність параметрів моделі	56
3.4.1	Мінливість у неоднорідному портфелі	56
3.4.2	Мінливість в однорідному портфелі	58
3.4.3	Мінливість у кількості й величині позовів та невизначеність у параметрах	60
3.5	Факторизаційна модель	64
3.5.1	Оптимальна страхова ставка	65
4	Суміші розподілів. Статистичне оцінювання параметрів розподілу. Наближення для складних розподілів	68
4.1	Суміші розподілів	68
4.2	Статистичне оцінювання параметрів розподілу	70
4.2.1	Точкові оцінки	70
4.2.2	Метод моментів	72
4.2.3	Метод максимальної вірогідності	73
4.3	Наближення для складних розподілів	75
4.3.1	Нормальне наближення	77
4.3.2	Класична центральна гранична теорема	77
4.3.3	“Удосконалена” центральна гранична теорема у випадку складного розподілу Пуассона	78
4.3.4	Зміщені гамма-наближення та логнормальне наближення	79
4.3.5	Наближення Еджворта	80
5	Теорія банкрутства. Імовірність банкрутства у моделі з дискретним часом	82
5.1	Теорія банкрутства	82
5.2	Випадкові процеси	82
5.2.1	Процес Пуассона	84
5.2.2	Випадкові процеси у страхуванні	84
5.3	Модель із дискретним часом	86
5.4	Неперервна модель	86
5.5	Імовірності небанкрутства (виживання)	87
5.6	Імовірність банкрутства	88
5.7	Імовірність банкрутства у моделі з дискретним часом	88
5.8	Метод згорток	89
6	Принципи розрахунку страхових премій. Тарифікація з використанням регресійних моделей. Системи знижок за відсутність позовів	91
6.1	Принципи розрахунку страхових премій	91
6.1.1	Тарифікація з використанням регресійних моделей.	94
6.2	Системи знижок за відсутність позовів	97

6.2.1	Системи бонус-малус розрахунку премій з урахуванням попередньої історії подання позовів	97
6.2.2	Дисконтні категорії	98
6.2.3	Матриця переходів	99
6.2.4	Ланцюги Маркова з дискретним часом і скінченною кількістю станів	99
6.2.5	Граф переходів ланцюга Маркова	100
6.2.6	Рівняння Колмогорова-Чепмена	101
6.2.7	Ергодична теорема	102
6.2.8	Аналізування стаціонарного стану	103
6.2.9	Неоднорідність портфелю	104
6.3	Вплив систем бонус-малус на схильність до позовів	106
6.4	Витяг із Закону України “Про обов’язкове страхування цивільно-правової відповідальності ...”	107
7	Методи розрахунку резервів	109
7.1	Вступ	109
7.2	Склад технічних резервів	110
7.3	Формування резерву незароблених премій	110
7.4	Резерв заявлених, але не виплачених збитків	113
7.5	Резерв збитків, які виникли, але не заявлені	114
7.6	Метод ланцюгових сходів	114
7.6.1	Точність методу ланцюгових сходів	119
8	Метод Борнхуеттера-Фергюсона	127
8.1	Коефіцієнт рівня збитковості	127
8.2	Основні припущення та концепція базового методу Борнхуеттера-Фергюсона	128
8.3	Розширений метод Борнхуеттера-Фергюсона	130
8.4	Ітерований метод Борнхуеттера-Фергюсона	131
9	Помилка прогнозу методу Борнхуеттера-Фергюсона. Мюнхенський ланцюговий метод	133
9.1	Помилка прогнозу методу Борнхуеттера-Фергюсона	133
9.2	Вибір оптимальної оцінки резерву	139
9.3	Мюнхенський ланцюговий метод (Munich Chain Ladder)	141
	Список рекомендованої літератури	145

ВСТУП

Головною функцією страхування є захист фізичних та юридичних осіб від ймовірних збитків у разі настання страхових подій. Водночас страхові компанії підпадають під потенційний негативний вплив ризиків, які можуть загрожувати їх платоспроможності та мати негативні наслідки для споживачів послуг страхування. Для забезпечення платоспроможності страхової компанії необхідні спеціалісти, які вміють визначати страхові тарифи, платежі, необхідні технічні резерви тощо на підставі строго обґрунтованих актуарних розрахунків.

В рамках курсу “Математичні аспекти загального страхування” вивчаються ризики, які підлягають страхуванню, принципи розрахунку премій, ймовірнісні розподіли для величин збитків та кількості страхових випадків, основні моделі ризику, використання індивідуальної історії для розрахунку премій, методи оцінювання резервів та забезпечення платоспроможності страхової компанії.

Посібник містить матеріал семестрових лекцій з курсу “Математичні аспекти загального страхування”, призначеного для студентів спеціальності Е7 “Математика” Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”.

Необхідною умовою успішного засвоєння вмісту посібника є володіння базовими знаннями з теорії ймовірностей та математичної статистики.

Посібник складається з дев'яти розділів та списку рекомендованої літератури. Перший розділ містить основні поняття страхової справи та умови забезпечення платоспроможності страхових компаній. У другому розділі наведено необхідні відомості з теорії ймовірностей. Третій розділ присвячено вивченню моделей і задач теорії ризику, зокрема, розглядається модель колективного ризику, наведено особливості моделі індивідуального ризику та досліджується питання мінливості і невизначеності у страховому портфелі. У четвертому розділі розглядаються суміші розподілів, статистичне оцінювання параметрів розподілу та наближення для складних розподілів. П'ятий розділ присвячено теорії банкрутства, зокрема, досліджується ймовірність банкрутства у моделі з дискретним часом. У шостому розділі наведено принципи розрахунку страхових премій, тарифікацію з використанням регресійних моделей та особливості системи знижок за відсутність позовів. Розділи 7-9 присвячено методам розрахунку резервів.

Теоретичний матеріал супроводжується ілюстративними прикладами.

Посібник може бути корисним не тільки для студентів та аспірантів, які навчаються за освітніми програмами з математики та статистики, а й для тих, хто на практиці використовує математичні методи в страхуванні.

Розділ 1

Основні поняття страхової справи

1.1 Страхова термінологія згідно із “Законом України про страхування”

Загальне страхування – “non-life” insurance, general insurance – всі види страхування, які не відносяться до страхування життя. В рамках цієї дисципліни будемо вивчати ризики, які підлягають страхуванню, ймовірнісні розподіли для величин збитків та кількості страхових випадків, основні моделі ризику, принципи розрахунку премій, елементи теорії банкрутства, забезпечення платоспроможності страхової компанії.

Загальна ідея страхування полягає в тому, щоб побудувати спільноту (колектив), до якої кожен вносить певну суму, а потім фінансовий збиток фінансується за рахунок цієї спільноти. Основною особливістю такої спільноти є те, що її члени стикаються з подібними (однотипними) ризиками незалежно один від одного. Відповідно, до цієї спільноти можна застосувати закон великих чисел.

Основні поняття, які використовуються у галузі страхування, сформулюємо так, як вони визначені у Законі України про страхування [1].

Страхування – це вид цивільно-правових відносин щодо захисту майнових інтересів фізичних осіб та юридичних осіб у разі настання певних подій (страхових випадків), визначених договором страхування або чинним законодавством, за рахунок грошових фондів, що формуються шляхом сплати фізичними особами та юридичними особами страхових платежів (страхових внесків, страхових премій) та доходів від розміщення коштів цих фондів.

Страховиками, які мають право здійснювати страхову діяльність на території України, є:

фінансові установи, які створені у формі акціонерних, повних, командитних товариств або товариств з додатковою відповідальністю згідно із Законом України “Про господарські товариства”, з урахуванням того, що учасників кожної з таких фінансових установ повинно бути не менше трьох,

та інших особливостей, передбачених цим Законом, а також одержали у встановленому порядку ліцензію на здійснення страхової діяльності (далі - страховики-резиденти);

zareєстровані Уповноваженим органом відповідно до цього Закону та законодавства України постійні представництва у формі філій іноземних страхових компаній, які також одержали у встановленому порядку ліцензію на здійснення страхової діяльності (далі - філії страховиків-нерезидентів).

Слова “страховик”, “ страхова компанія”, “ страхова організація” та похідні від них дозволяється використовувати у назві лише тим юридичним особам, які мають ліцензію на здійснення страхової діяльності.

Предметом безпосередньої діяльності страховика може бути лише страхування, перестрахування і фінансова діяльність, пов’язана з формуванням, розміщенням страхових резервів та їх управлінням.

Страхувальниками визнаються юридичні особи, фізичні особи-підприємці та дієздатні фізичні особи, які уклали із страховиками договори страхування або є страхувальниками відповідно до законодавства України.

Страхування може бути **добровільним** або **обов’язковим**.

Добровільне страхування – це страхування, яке здійснюється на основі договору між страхувальником і страховиком. Загальні умови і порядок здійснення добровільного страхування визначаються правилами страхування, що встановлюються страховиком самостійно відповідно до вимог цього Закону. Конкретні умови страхування визначаються при укладенні договору страхування відповідно до законодавства.

Види добровільного страхування, на які видається ліцензія, визначаються згідно з прийнятими страховиком правилами (умовами) страхування, zareєстрованими Уповноваженим органом.

Видами добровільного страхування можуть бути:

- 1) страхування життя;
- 2) страхування від нещасних випадків;
- 3) медичне страхування (безперервне страхування здоров’я);
- 4) страхування здоров’я на випадок хвороби;
- 5) страхування залізничного транспорту;
- 6) страхування наземного транспорту (крім залізничного);
- 7) страхування повітряного транспорту;
- 8) страхування водного транспорту (морського внутрішнього та інших видів водного транспорту);
- 9) страхування вантажів та багажу (вантажобагажу);
- 10) страхування від вогневих ризиків та ризиків стихійних явищ;
- 11) страхування майна (іншого, ніж передбачено пунктами 5-9 цієї статті);

- 12) страхування цивільної відповідальності власників наземного транспорту (включаючи відповідальність перевізника);
- 13) страхування відповідальності власників повітряного транспорту (включаючи відповідальність перевізника);
- 14) страхування відповідальності власників водного транспорту (включаючи відповідальність перевізника);
- 15) страхування відповідальності перед третіми особами (іншої, ніж передбачена пунктами 12-14 цієї статті);
- 16) страхування кредитів (у тому числі відповідальності позичальника за непогашення кредиту);
- 17) страхування інвестицій;
- 18) страхування фінансових ризиків;
- 19) страхування судових витрат;
- 20) страхування виданих гарантій (порук) та прийнятих гарантій;
- 21) страхування медичних витрат;
- 21-1) страхування цивільно-правової відповідальності арбітражного керуючого за шкоду, яку може бути завдано у зв'язку з виконанням його обов'язків
- 21-2) страхування життя і здоров'я волонтерів на період надання ними волонтерської допомоги;
- 22) страхування сільськогосподарської продукції;
- 23) інші види добровільного страхування.

Страхування життя - це вид особистого страхування, який передбачає обов'язок страховика здійснити страхову виплату згідно з договором страхування у разі смерті застрахованої особи, а також, якщо це передбачено договором страхування, у разі дожиття застрахованої особи до закінчення строку дії договору страхування та (або) досягнення застрахованою особою визначеного договором віку. Умови договору страхування життя можуть також передбачати обов'язок страховика здійснити страхову виплату у разі нещасного випадку, що стався із застрахованою особою, та (або) хвороби застрахованої особи. У разі, якщо при настанні страхового випадку передбачено регулярні послідовні довічні страхові виплати (страхування довічної пенсії), обов'язковим є передбачення у договорі страхування ризику смерті застрахованої особи протягом періоду між початком дії договору страхування та першою страховою виплатою з числа довічних страхових виплат. В інших випадках передбачення ризику смерті застрахованої особи є обов'язковим протягом всього строку дії договору страхування життя.

Страховики мають право займатися тільки тими видами добровільного страхування, які визначені в ліцензії.

Страховий ризик - певна подія, на випадок якої проводиться страху-

вання і яка має ознаки ймовірності та випадковості настання.

Страховий випадок - подія, передбачена договором страхування або законодавством, яка відбулася і з настанням якої виникає обов'язок страховика здійснити виплату страхової суми (страхового відшкодування) страхувальнику, застрахованій або іншій третій особі.

Страхова сума - грошова сума, в межах якої страховик відповідно до умов страхування зобов'язаний провести виплату при настанні страхового випадку.

Страхова виплата - грошова сума, яка виплачується страховиком відповідно до умов договору страхування при настанні страхового випадку.

Страхові виплати за договором страхування життя здійснюються в розмірі страхової суми (її частини) та (або) у вигляді регулярних, послідовних виплат обумовлених у договорі страхування сум (ануїтету).

Розмір страхової суми та (або) розміри страхових виплат визначаються за домовленістю між страховиком та страхувальником під час укладання договору страхування або внесення змін до договору страхування, або у випадках, передбачених чинним законодавством.

Страхова сума може бути встановлена по окремому страховому випадку, групі страхових випадків, договору страхування у цілому.

Страхова сума не встановлюється для страхового випадку, у разі настання якого здійснюються регулярні, послідовні страхові виплати у вигляді ануїтету.

Прийняті страховиком додаткові страхові зобов'язання повідомляються страхувальнику письмово і не можуть бути у подальшому зменшені в односторонньому порядку.

Договором страхування життя може бути передбачено індексацію (зміну) за офіційним індексом інфляції розміру страхової суми та (або) страхових виплат протягом дії договору страхування життя за умови відповідної індексації (зміни) розміру страхового платежу (страхового внеску, страхової премії). Порядок та умови індексації визначаються правилами та договором страхування.

Страхові виплати за договорами особистого страхування здійснюються незалежно від суми, яку має отримати одержувач за державним соціальним страхуванням та соціальним забезпеченням, і суми, що має бути йому сплачена як відшкодування збитків.

Розмір страхової суми визначається договором страхування або чинним законодавством під час укладання договору страхування чи зміни договору страхування. У разі якщо при настанні страхового випадку передбачаються послідовні довічні страхові виплати, у договорі страхування визначаються розміри таких послідовних довічних страхових виплат, а страхова сума по

цих випадках не встановлюється.

При страхуванні майна страхова сума встановлюється в межах вартості майна за цінами і тарифами, що діють на момент укладання договору, якщо інше не передбачено договором страхування або законом.

Страхове відшкодування - страхова виплата, яка здійснюється страховиком у межах страхової суми за договорами майнового страхування і страхування відповідальності при настанні страхового випадку.

Страхове відшкодування не може перевищувати розміру прямого збитку, якого зазнав страхувальник. Непрямі збитки вважаються застрахованими, якщо це передбачено договором страхування. У разі коли страхова сума становить певну частку вартості застрахованого предмета договору страхування, страхове відшкодування виплачується у такій же частці від визначених по страховій події збитків, якщо інше не передбачено умовами страхування.

Франшиза - частина збитків, що не відшкодовується страховиком згідно з договором страхування.

Страховий платіж (страховий внесок, страхова премія) - плата за страхування, яку страхувальник зобов'язаний внести страховику згідно з договором страхування.

Страховий тариф - ставка страхового внеску з одиниці страхової суми за визначений період страхування.

Страхові тарифи при добровільній формі страхування обчислюються страховиком актуарно (математично) на підставі відповідної статистики настання страхових випадків, а за договорами страхування життя - також з урахуванням величини інвестиційного доходу, яка повинна зазначатися у договорі страхування. Конкретний розмір страхового тарифу визначається в договорі страхування за згодою сторін.

Актуарними розрахунками можуть займатися особи, які мають відповідну кваліфікацію згідно з вимогами, встановленими Уповноваженим органом, яка підтверджується відповідним свідоцтвом.

Співстрахування. Предмет договору страхування може бути застрахований за одним договором страхування та за згодою страхувальника кількома страховиками (співстрахування). При цьому в договорі повинні міститися умови, що визначають права і обов'язки кожного страховика.

Перестрахування - страхування одним страховиком (цедентом, перестрахувальником) на визначених договором умовах ризику виконання частини своїх обов'язків перед страхувальником у іншого страховика (перестраховика) резидента або нерезидента, який має статус страховика або перестраховика, згідно з законодавством країни, в якій він зареєстрований.

Договір страхування - це письмова угода між страхувальником і стра-

ховиком, згідно з якою страховик бере на себе зобов'язання у разі настання страхового випадку здійснити страхову виплату страхувальнику або іншій особі, визначеній у договорі страхування страхувальником, на користь якої укладено договір страхування (подати допомогу, виконати послугу тощо), а страхувальник зобов'язується сплачувати страхові платежі у визначені строки та виконувати інші умови договору.

Страховики, які здійснюють страхування життя, зобов'язані вести персоніфікований (індивідуальний) облік договорів страхування життя в порядку та на умовах, визначених Уповноваженим органом.

Договори страхування укладаються відповідно до правил страхування.

Договір страхування повинен містити:

- назву документа;
- назву та адресу страховика;
- прізвище, ім'я, по батькові або назву страхувальника та застрахованої особи, їх адреси та дати народження;
- прізвище, ім'я, по батькові, дату народження або назву вигодонабувача та його адресу;
- зазначення предмета договору страхування;
- розмір страхової суми за договором страхування іншим, ніж договір страхування життя;
- розмір страхової суми та (або) розміри страхових виплат за договором страхування життя;
- перелік страхових випадків;
- розміри страхових внесків (платежів, премій) і строки їх сплати;
- страховий тариф (страховий тариф не визначається для страхових випадків, для яких не встановлюється страхова сума);
- строк дії договору;
- порядок зміни і припинення дії договору;
- умови здійснення страхової виплати;
- причини відмови у страховій виплаті;
- права та обов'язки сторін і відповідальність за невиконання або неналежне виконання умов договору;
- інші умови за згодою сторін;

- підписи сторін.

Уповноважений орган має право встановлювати додаткові вимоги до договорів страхування життя та договорів страхування майна фізичних осіб.

1.2 Умови забезпечення платоспроможності страховиків

Страховики зобов'язані дотримуватися таких умов забезпечення платоспроможності:

- наявності сплаченого статутного фонду для страховиків-резидентів або гарантійного депозиту для філій страховиків-нерезидентів та наявності гарантійного фонду страховика;
- створення страхових резервів, достатніх для майбутніх виплат страхових сум і страхових відшкодувань;
- перевищення фактичного запасу платоспроможності страховика над розрахунковим нормативним запасом платоспроможності.

Мінімальний розмір статутного фонду (гарантійного депозиту) страховика, який займається видами страхування іншими, ніж страхування життя, встановлюється у сумі, еквівалентній 1 млн євро, а страховика, який займається страхуванням життя, 10 млн євро за валютним обмінним курсом валюти України.

До гарантійного фонду страховика належить додатковий та резервний капітал, а також сума нерозподіленого прибутку.

Страховики за рахунок нерозподіленого прибутку можуть створювати вільні резерви.

Вільні резерви - це частка власних коштів страховика, яка резервується з метою забезпечення платоспроможності страховика відповідно до прийнятої методики здійснення страхової діяльності.

Страхові резерви утворюються страховиками з метою забезпечення майбутніх виплат страхових сум і страхового відшкодування залежно від видів страхування (перестрахування).

Страхові резерви поділяються на технічні резерви і резерви із страхування життя (математичні резерви).

Формування резервів із страхування життя, медичного страхування і обов'язкових видів страхування здійснюється окремо від інших видів страхування.

Страховики зобов'язані формувати і вести облік таких технічних резервів за видами страхування (крім страхування життя):

- незароблених премій (резерви премій), що включають частки від сум надходжень страхових платежів (страхових внесків, страхових премій), що відповідають страховим ризикам, які не минули на звітну дату;
- збитків, що включають зарезервовані несплачені страхові суми та страхові відшкодування за відомими вимогами страхувальників, з яких не прийнято рішення щодо виплати або відмови у виплаті страхової суми чи страхового відшкодування.

Для забезпечення страхових зобов'язань із страхування життя та медичного страхування страховики формують окремі резерви за рахунок надходження страхових платежів і доходів від інвестування коштів сформованих резервів за цими видами страхування.

Кошти резервів із страхування життя не є власністю страховика і мають бути відокремлені від його іншого майна. Страховик зобов'язаний обліковувати кошти резервів із страхування життя на окремому балансі і вести їх окремий облік.

Розділ 2

Необхідні відомості з теорії ймовірностей

Коли говорять про страхову справу, то, у першу чергу, мають на увазі фінансові збитки. Саме для того, щоб позбутися фінансових втрат, пов'язаних із невизначеністю в настанні тих чи інших випадкових подій, укладають договори страхування.

До підписання контракту й придбання страхового полісу клієнт наражався на деякий ризик, що міг призвести до збитків, величину яких не можна точно передбачити заздалегідь. Придбавши страховий поліс і заплативши за нього детерміновану суму p (*страхову премію*), клієнт позбавляється ризику, але сам ризик не зникає – його бере на себе страхова компанія. Тому оцінка ризику (тобто фінансових втрат страхової компанії, пов'язаних із виплатами за страховими позовами власників полісів) становить значний інтерес для правильного менеджменту страхової компанії, її стабільної фінансової діяльності та служить підґрунтям для прийняття багатьох важливих рішень.

Договори страхування умовно можна поділити на дві групи: короткотермінові та довготермінові.

При вивченні моделей короткотермінових договорів страхування не беруть до уваги можливий вплив інфляції та прибуток від інвестицій; також вважають незмінними основні ймовірнісні характеристики складових ризику, а саме кількості можливих позовів та їх величини.

При вивченні довготермінових договорів на перший план виходить динаміка надходження платежів (страхових премій) і позовів на відшкодування збитків. Важливу роль починають відігравати інфляція, можливість інвестування тимчасово вільних коштів.

2.1 Стохастичні ситуації та їх математичні моделі

Питання адекватності математичної моделі реальної ситуації викликає особливу увагу в такій прикладній галузі математики, як актуарна математика.

Властивості чи умови стохастичної ситуації (стохастичного експеримента) [2]:

- **непередбачуваність:** результат ситуації неможливо наперед передбачити з абсолютною точністю;
- **відтворюваність:** є принаймні теоретична можливість відтворити розглянуту ситуацію скільки завгодно разів за незмінних умов;
- **стійкість частот:** якою б не була подія, що нас цікавить, під час багатократного відтворювання ситуації частота події (тобто відношення кількості випадків, коли спостерігали дану подію, до загальної кількості відтворювань ситуації) коливається біля деякого числа і наближається до нього все ближче і ближче при збільшенні кількості відтворювань ситуації.

Нехай Ω – непорожня множина, елементи якого позначають ω . Будемо отождествлювати елементи Ω з можливими елементарними, тобто неподільними, наслідками деякої стохастичної ситуації. Відповідно до цього множину Ω називають *множиною елементарних подій*.

Нехай $\mathcal{F}$ – множина підмножин множини Ω елементарних подій, яка має такі властивості:

- $\Omega \in \mathcal{F}$;
- якщо $B \in \mathcal{F}$, то і $\overline{B} \in \mathcal{F}$, де $\overline{B}$ – доповнення до множини B ;
- якщо $B_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \dots$, то

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}.$$

Множину $\mathcal{F}$ називають *σ -алгеброю випадкових подій*, а її елементи (які є підмножинами множини Ω) називають *випадковими подіями*.

Міру, тобто σ -адитивну функцію множин, P , визначену на $\mathcal{F}$ і нормовану умовою $P(\Omega) = 1$, називають *імовірнісною мірою* або *ймовірністю*. Нагадаємо, що властивість σ -адитивності полягає в наступному: якщо $A_1, A_2, \dots$ – несумісні випадкові події, тобто $A_i \in \mathcal{F}$ та $A_i \cap A_j = \emptyset$ при

$i \neq j$, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Для $A \in \mathcal{F}$ значення $P(A)$ називають ймовірністю події A .

Трійку $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ називають *ймовірнісним простором* або *ймовірнісною моделлю*.

2.2 Незалежні події. Умовні ймовірності

Події A та B називають *незалежними*, якщо

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Нехай $P(B) \neq 0$. *Умовна ймовірність* події A за умови B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Якщо події A та B незалежні, то

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A) \cdot P(B)/P(B) = P(A).$$

Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називають *взаємно незалежними* або *незалежними у сукупності*, якщо для довільного $m \leq n$ та будь-яких індексів $i_1, \dots, i_m$ ($i_p \neq i_q$ при $p \neq q$ та $1 \leq i_p \leq n$, $p = 1, \dots, m$)

$$P\left(\bigcap_{p=1}^m A_{i_p}\right) = \prod_{p=1}^m P(A_{i_p}).$$

2.3 Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Розглянемо події $H_1, H_2, \dots, H_n$ ($n \geq 2$), які мають такі властивості:

- а) події $H_1, H_2, \dots, H_n$ несумісні, тобто жодні дві з них не можуть здійснитися одночасно;
- б) одна з подій $H_1, H_2, \dots, H_n$ обов'язково відбудеться, тобто $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$, причому $P(H_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Якщо події $H_1, H_2, \dots, H_n$ мають властивості а) та б), то кажуть, що вони утворюють *повну групу подій*.

Лема 2.1 (Формула повної ймовірності). *Нехай A – деяка подія, а події $H_1, H_2, \dots, H_n$ утворюють повну групу. Тоді має місце рівність*

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A|H_k)P(H_k). \quad (2.1)$$

Доведення.

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A \cap H_k) = \sum_{k=1}^n \frac{P(A \cap H_k)}{P(H_k)} P(H_k) = \sum_{k=1}^n P(A|H_k)P(H_k).$$

□

Теорема 2.1 (Формула Байєса). *Нехай A – деяка подія, яка має додатну ймовірність, $P(A) > 0$, а події $H_1, H_2, \dots, H_n$ утворюють повну групу. Тоді має місце рівність*

$$P(H_k|A) = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{\sum_{k=1}^n P(A|H_k)P(H_k)}. \quad (2.2)$$

Доведення. Безпосередньо застосовуючи визначення умовної ймовірності

$$P(H_k|A) = \frac{P(A \cap H_k)}{P(A)}, \quad P(A \cap H_k) = P(A|H_k)P(H_k)$$

та формулу повної ймовірності (2.1), отримуємо твердження теореми. □

Значення $P(H_k)$ називають попередніми (апріорними) ймовірностями, а умовні ймовірності $P(H_k|A)$ – апостеріорними.

2.4 Випадкові величини та їх розподіли

2.4.1 Дискретні випадкові величини

Розглянемо події $B_1, B_2, \dots$, такі, що $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$ та $\bigcup_j B_j = \Omega$. Нехай $\{x_1, x_2, \dots\}$ – дійсні числа. Випадкову величину

$$X(\omega) = \sum_j x_j \mathbb{I}_{B_j}(\omega)$$

називають *дискретною*. При цьому $B_j = \{\omega : X(\omega) = x_j\}$.

Позначимо $p_i = P(B_i)$. Набір $\{(x_i, p_i)\}_{i \geq 1}$ називають *законом розподілу ймовірностей* чи просто *розподілом* дискретної випадкової величини X .

Розглянемо ймовірність $P(X \in A)$ у випадку, коли множина A є нескінченним інтервалом вигляду $(-\infty, x)$, $x \in \mathbb{R}$. Покладемо

$$F_X(x) = P(X < x).$$

Функція $F(x)$ визначена для кожного дійсного x . Її називають *функцією розподілу* випадкової величини X .

Функція розподілу $F(x)$ будь-якої випадкової величини має такі властивості:

- $F(x)$ монотонно зростаюча і неперервна зліва;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Обернене твердження також істинне: для довільної функції $F(x)$, яка задовольняє ці три умови, існують ймовірнісний простір і задана на ньому випадкова величина така, що $F(x)$ є її функцією розподілу.

2.4.2 Абсолютно неперервні випадкові величини

Випадкову величину X та її функцію розподілу F_X називають *абсолютно неперервними*, якщо існує невід'ємна функція $f_X(x)$ така, що

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy$$

для будь-якого $x \in \mathbb{R}$. Функцію $f_X(x)$ називають *щільністю розподілу* випадкової величини X та функції розподілу F_X .

Властивості щільності:

- **невід'ємність:** $f_X(x) \geq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$;
- **нормованість:** $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y) dy = 1$.

Якщо функція розподілу диференційовна, то

$$f_X(x) = F'_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$

2.4.3 Моменти випадкових величин

Математичним сподіванням EX випадкової величини X є її інтеграл Лебега:

$$EX = \int_{\Omega} X dP.$$

EX існує тоді і лише тоді, коли існує $E|X|$. Тоді випадкову величину X називають *інтегрованою*.

Має місце рівність

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x),$$

у правій частині якого стоїть інтеграл Стільтєса.

Якщо випадкова величина X абсолютно неперервна і має щільність $f_X(x)$, то

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx.$$

Якщо X – дискретна випадкова величина з розподілом $\{(x_i, p_i)\}_{i \geq 1}$, то

$$EX = \sum_{i \geq 1} p_i x_i \quad \left(= \sum_{i \geq 1} x_i P(X = x_i) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega) \right).$$

Нехай $g(x)$ – борелівська функція, т.б. дійсна функція, визначена на $\mathbb{R}$ так, що для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ множина $\{x: g(x) < a\}$ є борелівською. Тоді

$$Eg(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_X(x).$$

Якщо випадкові величини X та Y незалежні, то

$$EXY = EX \cdot EY.$$

Математичне сподівання випадкової величини X^k називають *моментом порядку k* чи *k -м моментом* випадкової величини X :

$$m_k = EX^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF_X(x).$$

Центральний момент порядку k випадкової величини X визначають рівністю:

$$\mu_k = E(X - EX)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^k dF_X(x).$$

Особливу роль відіграє другий центральний момент μ_2 , який називають *дисперсією* випадкової величини X :

$$DX = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2.$$

Величину $\sigma_X = \sqrt{DX}$ називають *середньоквадратичним* або *стандартним відхиленням* випадкової величини X .

2.5 Генератрисы

2.5.1 Генератриса розподілу

Нехай X – цілочисельна невід’ємна випадкова величина з розподілом імовірностей

$$P(X = k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Генератрисою $G_X(t)$ розподілу випадкової величини X називають ряд

$$G_X(t) = Et^X = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k, \quad |t| \leq 1.$$

Степеневий ряд однозначно визначений своїми коефіцієнтами, тому зв'язок між розподілами і відповідними генератрисами взаємно однозначний. Розподіл імовірностей відновлюють за генератрисою:

$$p_k = \frac{1}{k!} G_X^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, \dots$$

Зокрема, $G_X(0) = P(X = 0)$. Також $G_X(1) = p_0 + p_1 + \dots = 1$.

Генератрису $G_X(t)$ можна використовувати для простого знаходження моментів нижчих порядків. Розвинемо функцію t^X у ряд Тейлора в околі точки 1:

$$t^X = 1 + X(t-1) + X(X-1)\frac{(t-1)^2}{2!} + X(X-1)(X-2)\frac{(t-1)^3}{3!} + \dots$$

Тоді

$$\begin{aligned} G_X(t) = Et^X &= 1 + (t-1)EX + \frac{(t-1)^2}{2!}EX(X-1) + \\ &+ \frac{(t-1)^3}{3!}EX(X-1)(X-2) + \dots \end{aligned}$$

Диференціюючи цей вираз по t і покладаючи $t = 1$, отримуємо математичне сподівання. Подальше диференціювання дає формули для визначення моментів інших порядків.

2.5.2 Генератриса моментів

Генератрисою моментів $M_X(t)$ випадкової величини X називають функцію

$$M_X(t) = E \exp\{tX\}.$$

$M_X(t)$ визначена для всіх значень t , для яких існує EX .

Різним імовірнісним розподілам відповідають різні генератрисы моментів. Зокрема, існує взаємно однозначна відповідність між генератрисами моментів та розподілами, для яких вони існують.

k -й момент випадкової величини X можна отримати за допомогою диференціювання $M_X(t)$ у точці 0. Для цього розвинемо у ряд Тейлора експоненційну функцію:

$$M_X(t) = 1 + tEX + \frac{t^2}{2!}EX^2 + \frac{t^3}{3!}EX^3 + \dots$$

Тоді

$$m_k = M_X^{(k)}(0), \quad k = 1, 2, \dots$$

Нехай цілочисельна невід’ємна випадкова величина X має генератрису розподілу $G_X(t) = Et^X$. Її генератрису моментів можна отримати, підставивши e^t замість t у $G_X(t)$, тобто

$$M_X(t) = G_X(e^t).$$

2.5.3 Генератриса кумулянт

Для багатьох випадкових величин знаходження математичного сподівання і дисперсії за допомогою генератрис кумулянт є простішим, ніж за допомогою генератрис моментів.

Генератрисою кумулянт $C_X(t)$ випадкової величини X називають функцію

$$C_X(t) = \ln M_X(t).$$

r -ю кумулянтною називають коефіцієнт $\frac{t^r}{r!}$ у розкладі в ряд Тейлора функції $C_X(t)$.

Коли відома $C_X(t)$, можна легко визначити $M_X(t)$:

$$M_X(t) = \exp\{C_X(t)\}.$$

Розглянемо перші дві похідні генератрис кумулянт:

$$C'_X(t) = \frac{M'_X(t)}{M_X(t)} \quad \text{та} \quad C''_X(t) = \frac{M''_X(t)M_X(t) - (M'_X(t))^2}{M_X^2(t)}.$$

Оскільки $M_X(0) = 1$, то

$$C'_X(0) = \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} = EX \quad \text{та}$$

$$C''_X(0) = \frac{M''_X(0)M_X(0) - (M'_X(0))^2}{M_X^2(0)} = EX^2 - (EX)^2 = DX.$$

Таким чином, перші дві похідні $C_X(t)$, обчислені при $t = 0$, безпосередньо дають середнє значення та дисперсію випадкової величини X .

2.6 Основні типи розподілів індивідуальних позовів та кількості позовів

Розглянемо деякі спеціальні розподіли, які надалі ми будемо часто використовувати для моделювання кількості індивідуальних позовів та їх величин (розмірів).

2.6.1 Дискретні розподіли

Дискретні розподіли, які ми будемо тут розглядати, є моделями кількості якихось подій: числа “успіхів”, числа “випробувань”, кількості смертей, кількості вимог тощо.

Відповідно, значення, яких набуває така випадкова величина, є цілими невід’ємними числами.

Дискретний рівномірний розподіл

Множина елементарних подій $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Всі елементарні події відбуваються з рівною ймовірністю $\frac{1}{n}$. Визначимо випадкову величину X так: $X(i) = i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тоді розподіл X має вигляд

$$P(X = k) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Обчислимо моменти випадкової величини X :

$$\begin{aligned} m_1 &= EX = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n} = \frac{n+1}{2}; \\ m_2 &= EX^2 = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}; \\ \mu_2 &= DX = m_2 - m_1^2 = \frac{n^2 - 1}{12}. \end{aligned}$$

Розподіл Бернуллі

Випробуванням Бернуллі називають стохастичну ситуацію, яка може закінчитися лише одним із двох результатів: або “успіхом” (У) або “невдачею” (Н).

Множина елементарних подій $\Omega = \{У, Н\}$. Ймовірнісна міра:

$$P(\{У\}) = \theta, \quad P(\{Н\}) = 1 - \theta, \quad 0 < \theta < 1.$$

Випадкову величину X визначимо так: $X(У) = 1$, $X(Н) = 0$. Тоді X є кількістю успіхів, що відбулися (0 чи 1).

Розподіл випадкової величини X :

$$P(X = k) = \theta^k (1 - \theta)^{1-k}, \quad k = 0, 1.$$

Моменти X :

$$m_1 = \theta, \quad m_2 = \theta, \quad \mu_2 = \theta(1 - \theta).$$

Біноміальний розподіл

Розглянемо послідовність із n випробувань Бернуллі, які

- незалежні у сукупності між собою, причому
- ймовірність успіху не залежить від номеру випробування.

Таку послідовність називають *схемою випробувань Бернуллі*.

Множина елементарних подій Ω є об'єднанням усіх можливих елементарних результатів n випробувань.

Нехай випадкова величина X позначає кількість успіхів з-поміж n випробувань. Тоді розподіл X такий:

$$P(X = k) = C_n^k \theta^k (1 - \theta)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad 0 < \theta < 1.$$

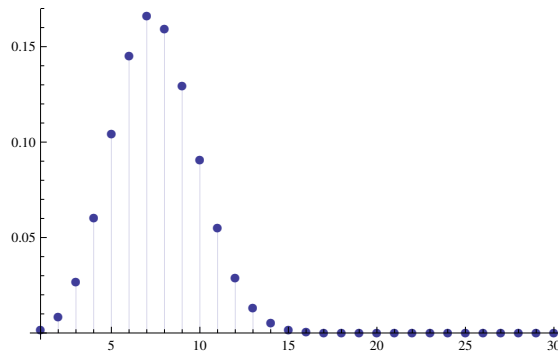


Рис. 2.1: Біноміальний розподіл, $n = 30$, $\theta = \frac{1}{4}$

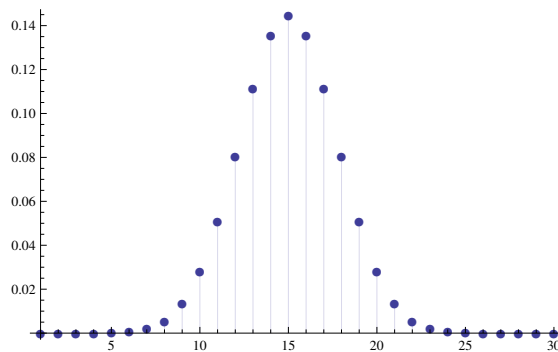


Рис. 2.2: Біноміальний розподіл, $n = 30$, $\theta = \frac{1}{2}$

Знайдемо генератриси біноміально розподіленої випадкової величини X :

$$G_X(t) = Et^X = \sum_{k=0}^n C_n^k \theta^k (1 - \theta)^{n-k} t^k = (\theta t + 1 - \theta)^n;$$

$$M_X(t) = G_X(e^t) = (\theta e^t + 1 - \theta)^n;$$

$$C_X(t) = \ln M_X(t) = n \ln(\theta e^t + 1 - \theta).$$

Знаючи вигляд генератриси розподілу $G_X(t)$, легко обчислити моменти

біноміально розподіленої випадкової величини X :

$$\begin{aligned} G'_X(t) &= n\theta(\theta t + 1 - \theta)^{n-1} \Rightarrow m_1 = G'_X(1) = n\theta; \\ G''_X(t) &= n(n-1)\theta^2(\theta t + 1 - \theta)^{n-2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2 - m_1 &= G''_X(1) = n(n-1)\theta^2; \\ m_2 &= n(n-1)\theta^2 + n\theta; \quad \mu_2 = n\theta(1 - \theta). \end{aligned}$$

Геометричний розподіл

Знову розглянемо схему випробувань Бернуллі з $P(\{Y\}) = \theta$, $0 < \theta < 1$, яка триває до здійснення першого успіху.

Множина елементарних подій $\Omega = \{Y, NY, NNY, NNNY, \dots\}$.

Визначимо випадкову величину X як номер випробування, коли відбувся успіх. Тоді

$$P(X = k) = \theta(1 - \theta)^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

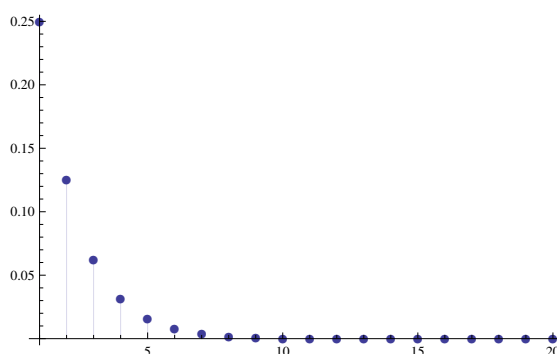


Рис. 2.3: Геометричний розподіл, $\theta = \frac{1}{2}$

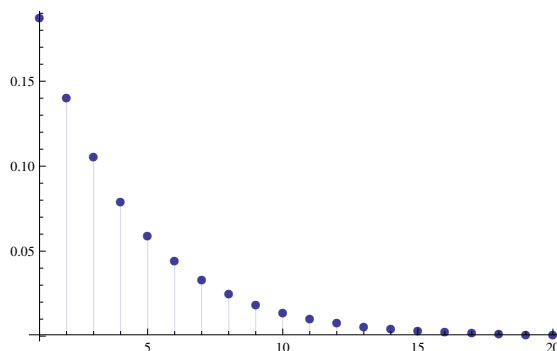


Рис. 2.4: Геометричний розподіл, $\theta = \frac{1}{4}$

Генератриса:

$$G_X(t) = Et^X =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \theta(1-\theta)^{k-1} t^k = \theta t \sum_{k=0}^{\infty} (1-\theta)^k t^k = \frac{\theta t}{1 - (1-\theta)t};$$

$$M_X(t) = G_X(e^t) = \frac{\theta e^t}{1 - (1-\theta)e^t};$$

$$C_X(t) = \ln M_X(t) = t + \ln \theta - \ln(1 - (1-\theta)e^t).$$

Моменти X :

$$\begin{aligned} M'_X(t) &= \frac{\theta e^t}{(1 - (1-\theta)e^t)^2} \Rightarrow m_1 = M'_X(0) = \frac{1}{\theta}; \\ M''_X(t) &= \frac{\theta e^t(1 + (1-\theta)e^t)}{(1 - (1-\theta)e^t)^3} \Rightarrow m_2 = M''_X(0) = \frac{2-\theta}{\theta^2}, \\ \mu_2 &= m_2 - m_1^2 = \frac{1-\theta}{\theta^2} \end{aligned}$$

Розподіл Пуассона

Цей розподіл моделює кількість подій, які сталися протягом зазначеного проміжку часу, коли події відбуваються одна за одною за певним правилом. Це правило передбачає, що події здійснюються окремо, зі сталою інтенсивністю, а кількості подій, які відбулися на неперетинних проміжках часу, є незалежними між собою.

Як інший підхід до розподілу Пуассона можна розглянути послідовність біноміальних розподілів з параметрами (n, θ) , коли $n \rightarrow \infty$ та $\theta \rightarrow 0$ одночасно так, що середнє значення $n\theta$ є сталим і дорівнює λ .

Випадкова величина X має розподіл Пуассона з параметром $\lambda > 0$, якщо

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Ці ймовірності отримують з біноміальних при $n \rightarrow \infty$ та $\theta = \frac{\lambda}{n} \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{(1 - \lambda/n)^n}{(1 - \lambda/n)^k} \rightarrow \\ &\rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Генератриса:

$$\begin{aligned} G_X(t) &= Et^X = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} t^k = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}; \\ M_X(t) &= G_X(e^t) = e^{\lambda(e^t-1)}; \quad C_X(t) = \ln M_X(t) = \lambda(e^t - 1). \end{aligned}$$

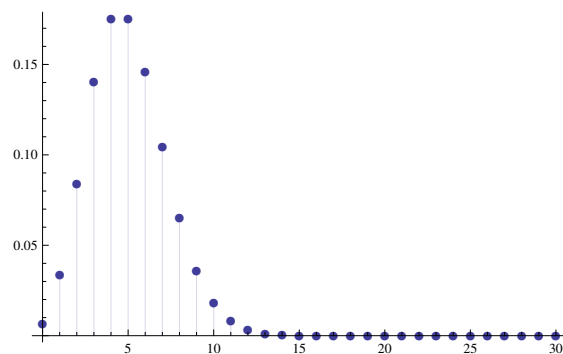


Рис. 2.5: Розподіл Пуассона, $\lambda = 5$

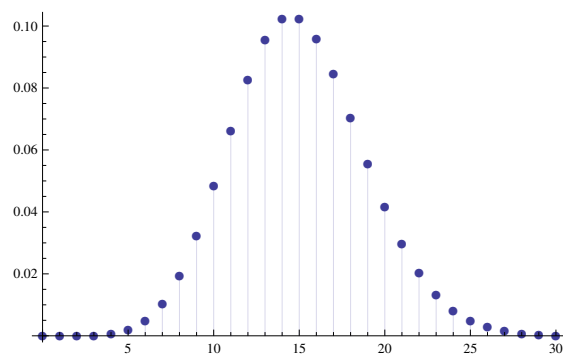


Рис. 2.6: Розподіл Пуассона, $\lambda = 15$

Моменти X :

$$C'_X(t) = \lambda e^t \Rightarrow m_1 = C'_X(0) = \lambda; \quad C''_X(t) = \lambda e^t \Rightarrow \mu_2 = C''_X(0) = \lambda.$$

Від'ємний біноміальний розподіл

Цей розподіл є узагальненням геометричного. Нехай випадкова величина X – номер того випробування, на якому відбувся k -й успіх, де k – натуральне число. Тоді розподіл X такий:

$$P(X = j) = C_{j-1}^{k-1} \theta^k (1 - \theta)^{j-k}, \quad j = k, k+1, \dots, \quad 0 < \theta < 1.$$

Зокрема, при $k = 1$ випадкова величина X має геометричний розподіл.

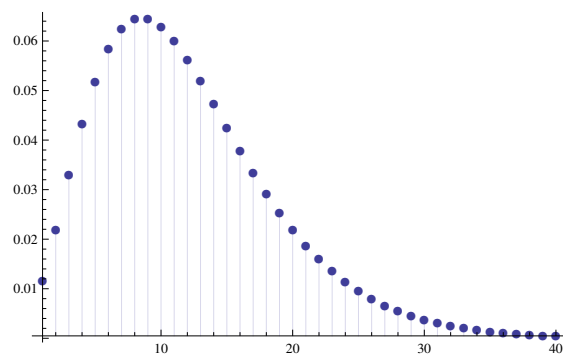


Рис. 2.7: Від'ємний біноміальний розподіл, $k = 4$, $\theta = \frac{1}{4}$

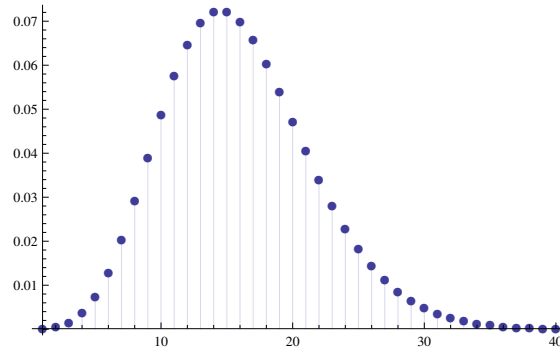


Рис. 2.8: Від'ємний біноміальний розподіл, $k = 10$, $\theta = \frac{1}{2}$

Генератрис:

$$\begin{aligned}
 G_X(t) &= \sum_{j=k}^{\infty} C_{j-1}^{k-1} \theta^k (1-\theta)^{j-k} t^j = (\theta t)^k \sum_{j=k}^{\infty} C_{j-1}^{k-1} (1-\theta)^{j-k} t^{j-k} = \\
 &= \frac{\theta^k t^k}{(1 - (1-\theta)t)^k}; \\
 M_X(t) &= \left(\frac{\theta e^t}{1 - (1-\theta)e^t} \right)^k; \quad C_X(t) = k(t + \ln \theta - \ln(1 - (1-\theta)e^t))
 \end{aligned}$$

Моменти X :

$$\begin{aligned}
 C'_X(t) &= \frac{k}{1 - (1-\theta)e^t} \Rightarrow m_1 = C'_X(0) = \frac{k}{\theta}; \\
 C''_X(t) &= \frac{k(1-\theta)e^t}{(1 - (1-\theta)e^t)^2} \Rightarrow \mu_2 = C''_X(0) = \frac{k(1-\theta)}{\theta^2}.
 \end{aligned}$$

Математичне сподівання та дисперсія у k разів більші, ніж для геометрично розподіленої випадкової величини. Це можна пояснити тим, що випадкову величину із від'ємно біноміальним розподілом можна подати як суму k випадкових величин із геометричним розподілом (кількість випробувань до першого успіху, плюс кількість випробувань від першого до другого успіху, ..., плюс кількість випробувань від $k-1$ -го до k -го успіху).

Часто використовують інше формулювання від'ємного біноміального розподілу. Нехай випадкова величина Y – це кількість невдач перед k -м успіхом. Тоді $Y = X - k$, де випадкову величин X визначено вище, та

$$\begin{aligned}
 P(Y = j) &= C_{k+j-1}^j \theta^k (1-\theta)^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \\
 EY &= EX - k = \frac{k(1-\theta)}{\theta}, \quad DY = DX = \frac{k(1-\theta)}{\theta^2}.
 \end{aligned}$$

2.6.2 Розподіли абсолютно неперервних випадкових величин

Розподіли абсолютно неперервних випадкових величин дають можливість моделювати розміри індивідуальних позовів, що надходять до страхової компанії.

Відповідно, значення, яких набуває така випадкова величина, є невід’ємними.

Рівномірний розподіл

Випадкова величина X має рівномірний розподіл на відрізку $[a, b]$, що позначається $X \sim \mathcal{U}[a, b]$, якщо її щільність є сталою всередині цього відрізка та дорівнює нулю поза ним, тобто

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{x \in [a, b]}. \quad (2.3)$$

Моменти:

$$m_1 = EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2};$$

$$m_2 = EX^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{a^2 + ab + b^2}{3};$$

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Гамма-розподіл (зокрема, експоненційний та хі-квадрат)

Сім’я гамма-розподілів має два додатних параметри і є дуже гнучкою. Щільність може набувати різної форми залежно від значень параметрів і визначена на додатній півосі $\{x: x > 0\}$.

Нагадаємо спершу, що гамма-функцію $\Gamma(\alpha)$ визначають для $\alpha > 0$ таким чином:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy.$$

Зокрема, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$ для $\alpha > 1$ (тобто коли n – ціле число, то $\Gamma(n) = (n-1)!$) та $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Щільність гамма-розподілу з параметрами α та λ має вигляд

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

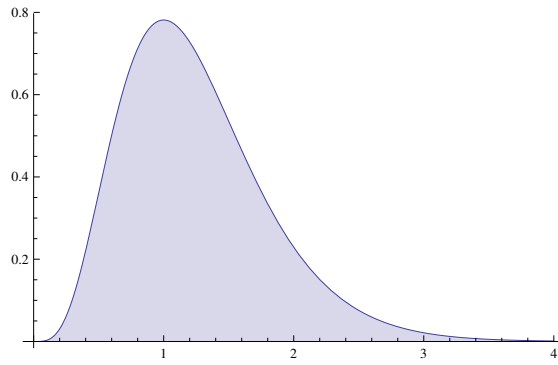


Рис. 2.9: Щільність гамма-розподілу, $\alpha = 5$, $\lambda = 4$

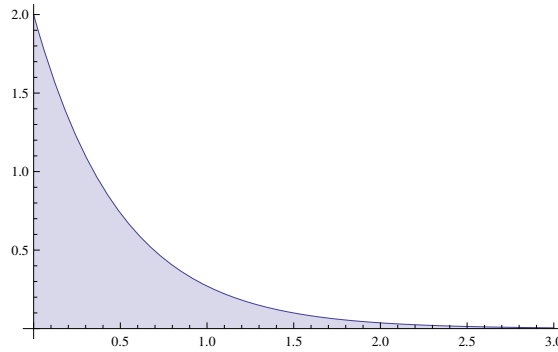


Рис. 2.10: Щільність гамма-розподілу, $\alpha = 1$, $\lambda = 2$:
експоненціальний розподіл з $\lambda = 2$

Обчислимо генератрису моментів $M_X(t)$, використовуючи заміну $y = (\lambda - t)x$:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}e^{tX} = \int_0^\infty e^{tx} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1} e^{-y}}{(\lambda-t)^\alpha} dy = \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(\lambda-t)^\alpha} \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha}. \end{aligned}$$

Моменти:

$$m_1 = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad \mu_2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Гамма-розподіл. Спеціальний випадок 1

Експоненційний (показниковий) розподіл

Це гамма-розподіл з параметром $\alpha = 1$.

Функція розподілу та щільність експоненційного розподілу:

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0; \quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Моменти:

$$m_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad \mu_2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

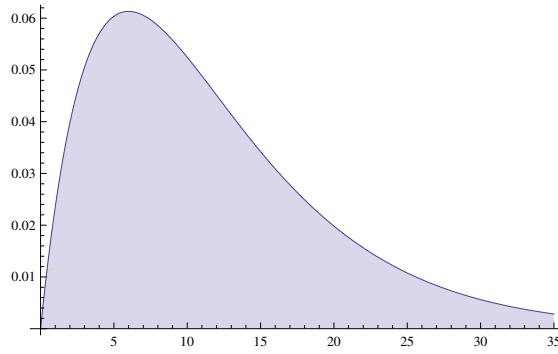


Рис. 2.11: Щільність гамма-розподілу, $\alpha = 2$, $\lambda = \frac{1}{6}$

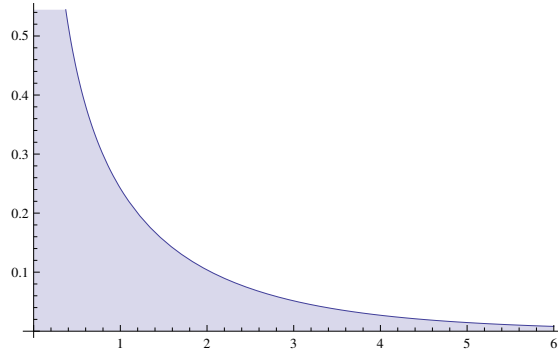


Рис. 2.12: Щільність гамма-розподілу, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ (хі-квадрат розподіл з $\nu = 1$)

Експоненційний розподіл часто використовують як просту модель тривалості життя певних типів обладнання.

Гамма-розподіл. Спеціальний випадок 2

хі-квадрат (χ^2) розподіл з параметром ν “ступенями вільності”

Це гамма-розподіл з параметрами $\alpha = \frac{\nu}{2}$, де ν – натуральне число, та $\lambda = \frac{1}{2}$.

Щільність хі-квадрат розподілу з ν ступенями вільності:

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0.$$

Моменти:

$$m_1 = \nu, \quad \mu_2 = 2\nu.$$

Бета-розподіл

Також є іншою досить гнучкою сім'єю розподілів із двома параметрами, визначених на $\Omega = (0, 1)$.

Бета-функція

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Щільність бета-розподілу:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = \frac{1}{B(\alpha + \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1.$$

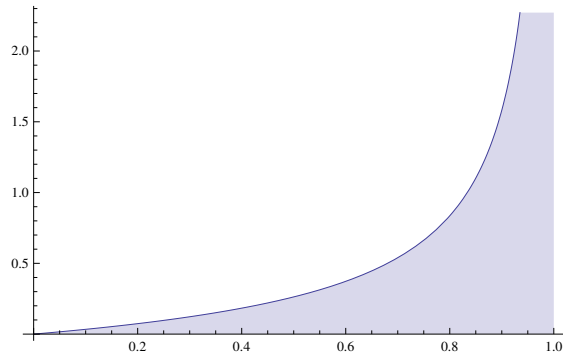


Рис. 2.13: Щільність бета-розподілу, $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{4}$

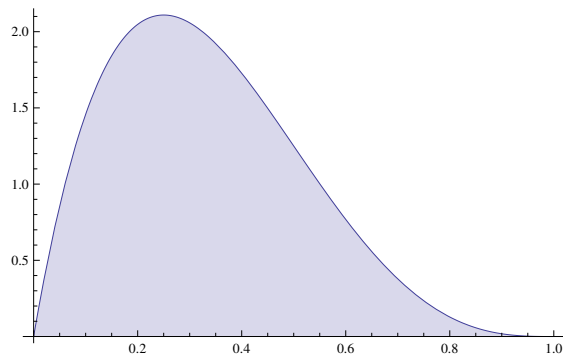


Рис. 2.14: Щільність бета-розподілу, $\alpha = 2$, $\beta = 4$

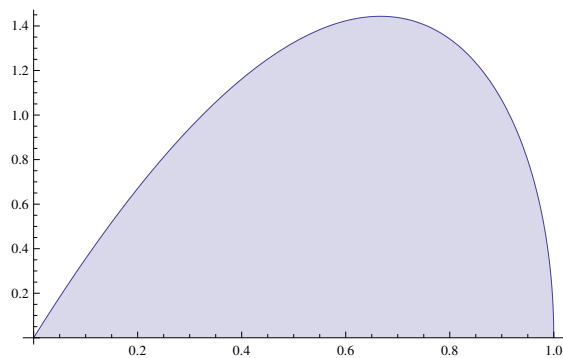


Рис. 2.15: Щільність бета-розподілу, $\alpha = 2$, $\beta = \frac{3}{2}$

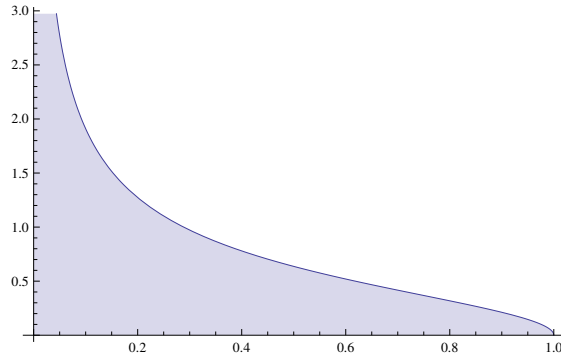


Рис. 2.16: Щільність бета-розподілу, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{3}{2}$

Генератриса моментів:

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= \mathbb{E}e^{tX} = \int_0^1 e^{tx} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \int_0^1 x^{\alpha+k-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \frac{\Gamma(\alpha + k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + k + \beta)} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + k)} \frac{t^k}{k!}.
 \end{aligned}$$

Моменти:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= M'_X(0) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}; \\
 m_2 &= M''_X(0) = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2)} = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)}; \\
 \mu_2 &= m_2 - m_1^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.
 \end{aligned}$$

Нормальний (гауссівський) розподіл

Нормальний розподіл $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ має два параметри, які зручним чином безпосередньо виражаються через середнє μ та стандартне відхилення σ . Розподіл симетричний відносно μ . Щільність нормального розподілу

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Нормальний розподіл використовують для побудови багатьох інших розподілів (логнормальний, хі-квадрат, Фішера, Стюдента тощо), на ньому ґрунтується велика кількість статистичних висновків.

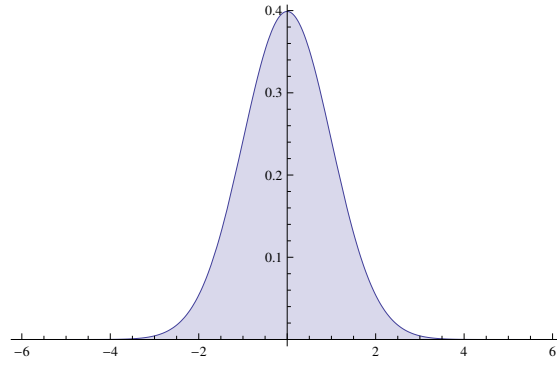


Рис. 2.17: Щільність нормального розподілу, $\mu = 0$, $\sigma = 1$

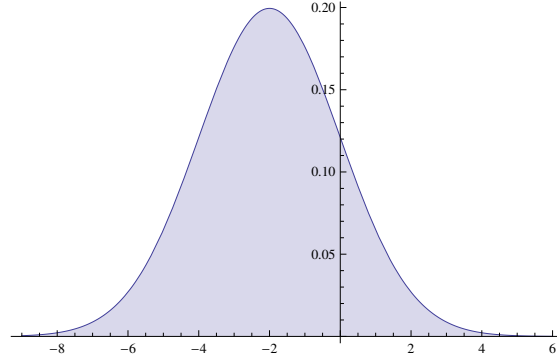


Рис. 2.18: Щільність нормального розподілу, $\mu = -2$, $\sigma = 2$

Генератриса моментів:

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= E \exp\{tX\} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{tx\} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2(\mu + t\sigma^2)x + \mu^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x - \mu - t\sigma^2)^2 + \mu^2 - (\mu + t\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\
 &= \exp\left\{\frac{2\mu t\sigma^2 + t^2\sigma^4}{2\sigma^2}\right\} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x - \mu - t\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\
 &= \exp\left\{\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}\right\}
 \end{aligned}$$

Генератриса кумулянт $C_X(t) = \mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}$.

Моменти: $m_1 = C'_X(0) = \mu$; $\mu_2 = C''_X(0) = \sigma^2$.

Логнормальний розподіл

Якщо X відображає, наприклад, величину вимоги, а $Y = \ln X$ має нормальний розподіл, то кажуть, що випадкова величина X має логнормальний розподіл, $X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$.

Щільність логнормального розподілу:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad 0 < x < \infty.$$

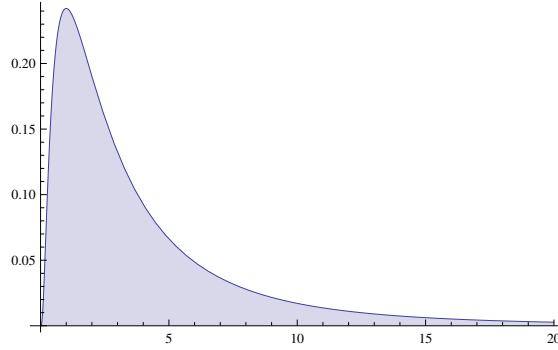


Рис. 2.19: Щільність логнормального розподілу, $\mu = 1$, $\sigma = 1$

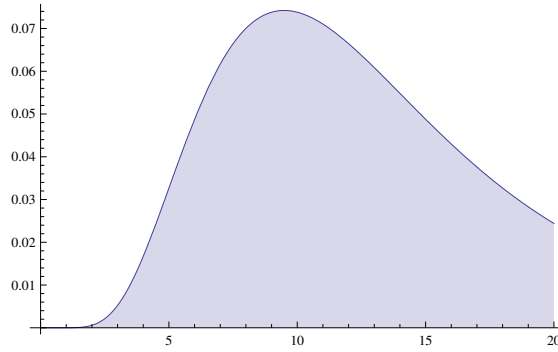


Рис. 2.20: Щільність логнормального розподілу, $\mu = \frac{5}{2}$, $\sigma = \frac{1}{2}$

Генератриса моментів:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E} \exp\{tX\} = \int_0^\infty \exp\{tx\} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} dx \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \exp\{te^y\} \exp \left\{ -\frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} dy \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k \exp\{ky\}}{k!} \exp \left\{ -\frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} dy \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \exp \left\{ -\frac{(y - \mu)^2 - 2k\sigma^2}{2\sigma^2} \right\} dy \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!} \exp \left\{ \mu k + \frac{k^2\sigma^2}{2} \right\} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \exp \left\{ -\frac{(y - \mu - k\sigma^2)^2}{2\sigma^2} \right\} dy \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!} \exp \left\{ \mu k + \frac{k^2\sigma^2}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо моменти, як відповідні коефіцієнти при $\frac{t^k}{k!}$:

$$m_1 = M'_X(0) = \exp \left\{ \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right\};$$

$$m_2 = M''_X(0) = \exp \{ 2\mu + 2\sigma^2 \};$$

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \exp \{ 2\mu + 2\sigma^2 \} - \exp \{ 2\mu + \sigma^2 \} \\ &= \exp \{ 2\mu + \sigma^2 \} (\exp \{ \sigma^2 \} - 1). \end{aligned}$$

Розподіл Парето

Випадкова величина X має розподіл Парето з параметрами $a > 0$, $\lambda > 0$, якщо

$$f_X(x) = \frac{a\lambda^a}{(\lambda + x)^{a+1}}, \quad x > 0.$$

Тоді функція розподілу X має вигляд

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x} \right)^a, \quad x > 0.$$

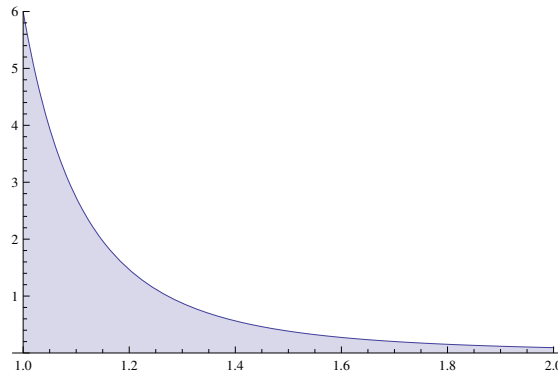


Рис. 2.21: Щільність розподілу Парето, $a = 2$, $\lambda = \frac{1}{3}$

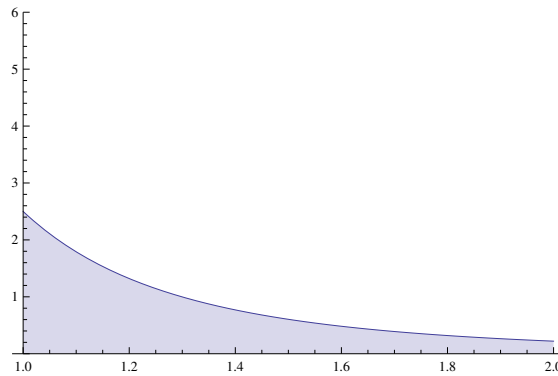


Рис. 2.22: Щільність розподілу Парето, $a = \frac{5}{2}$, $\lambda = 1$

Моменти порядку k випадкової величини X скінченні лише для $k < a$:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \int_0^\infty x f_X(x) dx = a\lambda^a \int_0^\infty \frac{x}{(\lambda+x)^{a+1}} dx \\
 &= a\lambda^a \int_0^\infty \left(\frac{1}{(\lambda+x)^a} - \frac{\lambda}{(\lambda+x)^{a+1}} \right) dx \\
 &= a\lambda^a \left(\frac{\lambda^{-a+1}}{a-1} - \frac{\lambda\lambda^{-a}}{a} \right) = \frac{\lambda}{a-1}, \quad a > 1; \\
 m_2 &= \int_0^\infty x^2 f_X(x) dx = a\lambda^a \int_0^\infty \frac{x^2}{(\lambda+x)^{a+1}} dx \\
 &= a\lambda^a \int_0^\infty \left(\frac{1}{(\lambda+x)^{a-1}} - \frac{2\lambda}{(\lambda+x)^a} + \frac{\lambda^2}{(\lambda+x)^{a+1}} \right) dx \\
 &= a\lambda^a \left(\frac{\lambda^{-a+2}}{a-2} - 2\frac{\lambda\lambda^{-a+1}}{a-1} + \frac{\lambda^2\lambda^{-a}}{a} \right) = \frac{2\lambda^2}{(a-1)(a-2)}, \quad a > 2; \\
 \mu_2 &= m_2 - m_1^2 = \frac{a\lambda^2}{(a-1)^2(a-2)}, \quad a > 2.
 \end{aligned}$$

Розподіл Вейбулла

Випадкова величина X має розподіл Вейбулла з параметрами $c > 0$, $\gamma > 0$, якщо

$$f_X(x) = c\gamma x^{\gamma-1} \exp\{-cx^\gamma\}, \quad x > 0.$$

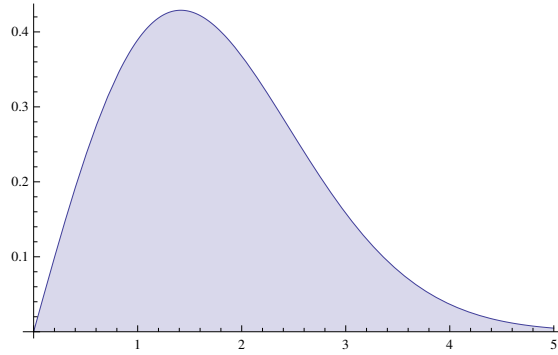


Рис. 2.23: Щільність розподілу Вейбулла, $\gamma = 2$, $c = \frac{1}{4}$

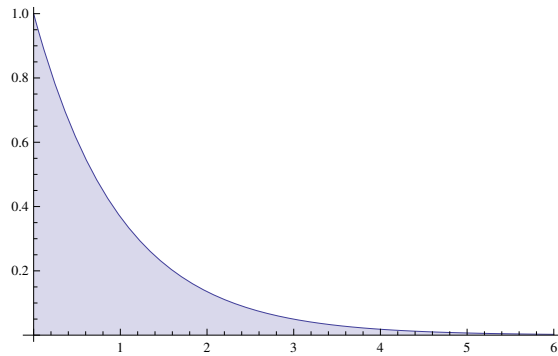


Рис. 2.24: Щільність розподілу Вейбулла, $\gamma = 1$, $c = 1$

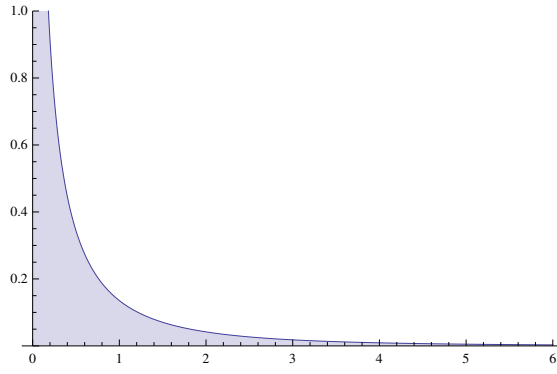


Рис. 2.25: Щільність розподілу Вейбулла, $\gamma = \frac{1}{2}$, $c = 2$

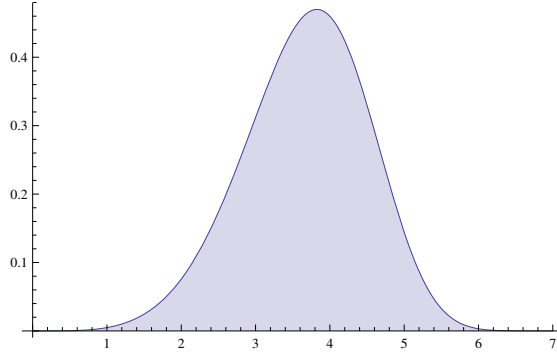


Рис. 2.26: Щільність розподілу Вейбулла, $\gamma = 8$, $c = 2^{-10}$

Генератриса моментів (використаємо заміну $cx^\gamma = y$):

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E} \exp\{tX\} = \int_0^\infty \exp\{tx\} c\gamma x^{\gamma-1} \exp\{-cx^\gamma\} dx \\ &= \int_0^\infty \exp\left\{t \left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right\} \exp\{-y\} dy = \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!} \left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{k}{\gamma}} \exp\{-y\} dy \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!} c^{-\frac{k}{\gamma}} \int_0^\infty y^{\frac{k}{\gamma}} \exp\{-y\} dy = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!} c^{-\frac{k}{\gamma}} \Gamma\left(1 + \frac{k}{\gamma}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Моменти: } m_k = M^{(k)}(0) = c^{-\frac{k}{\gamma}} \Gamma\left(1 + \frac{k}{\gamma}\right),$$

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = c^{-\frac{2}{\gamma}} \left(\Gamma(1 + 2\gamma^{-1}) - (\Gamma(1 + \gamma^{-1}))^2 \right).$$

Зауважимо, що розглянутий вище розподіл Парето – це розподіл, у якого “правий хвіст”

$$\mathbb{P}(X > x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + x} \right)^a$$

прямує до нуля як x^{-a} і є значно “важчим”, ніж експоненційний, у якого

$$\mathbb{P}(X > x) = \exp\{-\lambda x\}.$$

Повертаючись до розподілу Вейбулла, маємо такі випадки:

- якщо $\gamma < 1$, то виникає розподіл, який, у певному розумінні, є проміжним між експоненційним та розподілом Парето;

- при $\gamma > 1$ правий хвіст легший за експоненційний;
- випадок $\gamma = 1$ відповідає експоненційному розподілу.

Така гнучкість розподілу Вейбулла дозволяє використовувати його для моделювання збитків (як правило, з $\gamma < 1$).

2.7 Випадкові вектори

Розглянемо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, на якому визначені n випадкових величин $X_1, \dots, X_n$. Вектор $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ називають *випадковим вектором* або *n -вимірною випадковою величиною* (в.в.).

Сумісний розподіл дискретних випадкових величин

Нехай $X_1, \dots, X_n$ – дискретні випадкові величини.

Функція

$$p(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

для всіх значень $(x_1, \dots, x_n)$ називається *сумісним* або *n -вимірним розподілом дискретного випадкового вектора* $(X_1, \dots, X_n)$.

Вона має такі властивості:

- $p(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ для всіх значень $x_1, \dots, x_n$;
- $\sum_{x_1} \cdots \sum_{x_n} p(x_1, \dots, x_n) = 1$.

Маргінальний (тобто одновимірний) розподіл в.в. X_k за відомим сумісним розподілом визначають так:

$$p_k = P(X_k = x_k) = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{k-1}} \sum_{x_{k+1}} \cdots \sum_{x_n} p(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Сумісні функції розподілу

Нехай тепер $X_1, \dots, X_n$ – довільні випадкові величини. *Сумісною функцією розподілу* випадкового вектора $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ називають функцію $F_{\mathbf{X}}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, яка в точці $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ дорівнює

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &\equiv F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n). \end{aligned}$$

Як і в одновимірному випадку, багатовимірна функція розподілу має подібні властивості:

- $F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)$ – неспадна функція за будь-яким аргументом;

- неперервна зліва за будь-яким аргументом;
- задовольняє співвідношення

$$F_X(+\infty, \dots, +\infty) = 1,$$

$$\lim_{x_k \rightarrow -\infty} F_X(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

для довільних значень інших аргументів.

Нехай випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ має сумісну функцію розподілу $F_{\mathbf{X}}$. Маргінальну (одновимірну) функцію розподілу в.в. X_k визначають так:

$$F_{X_k}(x_k) = P(X_k < x_k) = F_{\mathbf{X}}(\infty, \dots, \infty, x_k, \infty, \dots, \infty),$$

де x_k – k -ий аргумент функції $F_{\mathbf{X}}$.

Сумісні щільності

Випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ та його сумісну функцію розподілу $F_{\mathbf{X}}$ називають абсолютно неперервними, якщо існує невід’ємна вимірна функція $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \equiv f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)$ така, що

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= \int_{(-\infty, \mathbf{x})} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n \end{aligned}$$

для будь-якого

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Функцію $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ називають *сумісною щільністю* випадкового вектора та сумісної функції розподілу $F_{\mathbf{X}}$.

Якщо випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ має сумісну щільність $f_{\mathbf{X}}$, то його координати мають маргінальні (одновимірні) щільності, які визначаються так:

$$\begin{aligned} f_{X_k}(x) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, y_n) dy_1 \dots dy_{k-1} dy_{k+1} \dots dy_n. \end{aligned}$$

Властивості сумісної щільності

- $f_X(x_1, \dots, x_n) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$;
- $P(x_{11} < X_1 < x_{12}, \dots, x_{n1} < X_n < x_{n2}) = \int_{x_{11}}^{x_{12}} \cdots \int_{x_{n1}}^{x_{n2}} f_{\mathbf{X}}(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n$;

- якщо сумісна ф-ція розподілу диференційовна, то сумісна щільність (майже напевне) збігається з похідною ф-ції р-лу:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n).$$

Числові характеристики випадкових векторів

Обчислення математичного сподівання вимірної функції $g(X_1, \dots, X_n)$ від випадкового вектора $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ проводять так:

- для дискретних в.в.:

$$\begin{aligned} E g(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{x_1} \dots \sum_{x_n} g(x_1, \dots, x_n) p_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{x_1} \dots \sum_{x_n} g(x_1, \dots, x_n) P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n), \end{aligned}$$

де суму обчислюють по всіх можливих значеннях $x_1, \dots, x_n$, яких набувають в.в. $X_1, \dots, X_n$;

- для абсолютно неперервних в.в.:

$$E g(X_1, \dots, X_n) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Нехай X та Y – дві в.в. зі скінченними другими моментами. Величину

$$\text{cov}(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY) = EXY - EXEY$$

називають *коваріацією* в.в. X та Y . Вона є скінченною за нерівністю Коші:

$$\text{cov}(X, Y) \leq \sqrt{E(X - EX)^2(Y - EY)^2} = \sqrt{DXDY} = \sigma_X \sigma_Y.$$

Коефіцієнтом кореляції в.в. X та Y називають безрозмірну в.в.

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

яка внаслідок нерівності Коші набуває значень з $[-1, 1]$.

Коефіцієнт кореляції вказує на те, наскільки лінійно залежні між собою в.в. X та Y , зокрема, коли $|\rho(X, Y)| = 1$, то існують числа $a \neq 0$ та b такі, що $P(X = aY + b) = 1$, причому $\text{sign } a = \text{sign } \rho(X, Y)$.

В.в. X та Y називають *некорельованими*, якщо $\text{cov}(X, Y) = 0$. Якщо в.в. X та Y незалежні, то вони некорельовані. Обернене твердження не правильне.

$$D(X \pm Y) = DX + DY \pm \text{cov}(X, Y).$$

Зокрема, коли в.в. X та Y незалежні, то

$$D(X \pm Y) = DX + DY.$$

2.8 Незалежні випадкові величини

Випадкові величини $X_1, \dots, X_n$ незалежні в сукупності, якщо всі порожені ними випадкові події незалежні в сукупності, тобто для довільних $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{k=1}^n P(X_k \in B_k).$$

Зокрема, випадкові величини $X_1, \dots, X_n$ незалежні в сукупності тоді й лише тоді, коли відповідна сумісна функція розподілу для всіх $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ розкладається у добуток

$$\begin{aligned} F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) &= P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n) \\ &= \prod_{k=1}^n P(X_k < x_k) = \prod_{k=1}^n F_{X_k}(x_k). \end{aligned}$$

Дискретні випадкові величини $X_1, \dots, X_n$ будуть незалежними в сукупності тоді й лише тоді, коли

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{k=1}^n P(X_k = x_k)$$

для всіх можливих значень $(x_1, \dots, x_n)$.

Коли випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ має сумісну щільність $f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)$, то абсолютно неперервні випадкові величини $X_1, \dots, X_n$ незалежні в сукупності тоді й лише тоді, коли

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n f_{X_k}(x_k).$$

Має місце наступна теорема про перетворення незалежних випадкових величин

Теорема 2.2. *Нехай випадкові величини $X_1, \dots, X_n$ незалежні в сукупності, а $g_1(x), \dots, g_n(x)$ – борелівські. Тоді випадкові величини $g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)$ незалежні в сукупності.*

Розподіл суми незалежних випадкових величин

Невід’ємні цілочисельні випадкові величини

Якщо X та Y – незалежні невід’ємні цілочисельні випадкові величини з розподілами

$$p_k = P(X = k), \quad q_k = P(Y = k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

та генератрисами $G_X(t)$ і $G_Y(t)$ відповідно, то сума $X + Y$ має розподіл

$$P(X + Y = k) = \sum_{j=0}^k p_j q_{k-j},$$

та генератрису

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t).$$

Абсолютно неперервні випадкові величини

Теорема 2.3. Якщо X та Y – незалежні в.в. із ϕ -ми розподілу $F_X(x)$ і $F_Y(x)$, щільностями $f_X(x)$ і $f_Y(x)$ та генератрисами моментів $M_X(t)$ і $M_Y(t)$ відповідно, то сума $X + Y$ має ϕ -ю розподілу

$$F_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x-y) dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(x-y) dF_X(y),$$

яку називають згорткою функцій розподілу $F_X(x)$ і $F_Y(x)$ і позначають $F_X * F_Y(x) = F_{X+Y}(x)$;

щільність, яка дорівнює згортці щільностей $f_X(x)$ і $f_Y(x)$, тобто

$$f_X * f_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(x-y) f_X(y) dy,$$

та генератрису моментів

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t).$$

2.9 Умовні розподіли та щільності

Розподіл випадкової величини X для певного значення випадкової величини Y називають *умовним розподілом випадкової величини X при заданому значенні $Y = y$* .

Дискретні випадкові величини

Умовний розподіл X при заданому $Y = y$ для дискретних випадкові величини X та Y дорівнює

$$p_{X|Y=y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)},$$

де $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$ – сумісний розподіл випадкових величин X та Y .

Умовний розподіл $p_{X|Y=y}(x|y)$ визначають лише для тих значень y , для яких розподіл $p_Y(y) = P(Y = y) > 0$.

Абсолютно неперервні випадкові величини

Припустимо, що пара (X, Y) має сумісну щільність $f_{X,Y}$. Розглянемо умовну ймовірність події $X < x$ за умови $y \leq Y < y + h$, $h > 0$:

$$P(X < x|y \leq Y < y + h) = \frac{\int_{-\infty}^x \int_y^{y+h} f_{X,Y}(u, v) dv du}{\int_y^{y+h} f_Y(v) dv}.$$

Поділимо чисельник і знаменник на h . Тоді при $h \rightarrow 0$ отримуємо *умовну функцію розподілу* в.в. X при заданому $Y = y$

$$F_{X|Y=y}(x|y) = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u, y) du.$$

Відповідна *умовна щільність* випадкових величин X при заданому $Y = y$ дорівнює

$$f_{X|Y=y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}. \quad (2.4)$$

Ці умовні функції розподілу визначають лише для тих значень y , для яких $f_Y(y) > 0$.

2.10 Умовне математичне сподівання

Умовне математичне сподівання випадкової величини X за умови, що $Y = y$ визначають, як

$$\begin{aligned} E(X|Y = y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y=y}(x|y) dx \\ &= \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,Y}(x, y) dx, \end{aligned}$$

за припущення, що інтеграл у правій частині абсолютно збіжний.

Якщо розглядати y як змінну величину, то права частина є функцією від y . Зокрема, ототожнюючи y із випадковою величиною Y , отримаємо випадкову величину, яку називають *регресією X на Y* та позначають $E(X|Y)$.

Ця випадкова величина є функцією лише однієї змінної Y (не X)!

Для довільної борелівської функції $h(x, y)$ можна отримати більш загальне визначення, замінивши випадкову величину X на $h(X, Y)$:

$$E(h(X, Y)|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) f_{X|Y=y}(x|y) dx.$$

Аналогічно, умовне математичне сподівання $E(h(X, Y)|Y)$ можна розглядати як випадкову величину, яка є функцією від Y .

Якщо вибрати $h(X, Y) = (X - E(X|Y))^2$, тоді математичне сподівання цієї функції за умовного розподілу X при заданому Y є дисперсією відповідного умовного розподілу:

$$D(X|Y) = E((X - E(X|Y))^2|Y) = E(X^2|Y) - (E(X|Y))^2.$$

Очевидно, що вона також є функцією від Y .

Теорема 2.4 (Формула повного математичного сподівання).

$$EX = E(E(X|Y)), \quad (2.5)$$

тобто математичне сподівання від умовного математичного сподівання X при даному Y дорівнює математичному сподіванню X .

Теорема 2.5 (Формула повної дисперсії).

$$DX = E(D(X|Y)) + D(E(X|Y)). \quad (2.6)$$

2.11 Закон великих чисел

Теорема 2.6 (Закон великих чисел). *Нехай $X_1, \dots, X_n$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини (н.о.р.в.в.) зі скінченними математичним сподіванням $EX_j = m_1$ та дисперсією $DX = \sigma^2$. Покладемо*

$$S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ має місце границя

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m_1\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0, \quad \text{коли } n \rightarrow \infty.$$

Інакше кажучи, усереднена сума $\frac{S_n}{n}$ н.о.р.в.в. $X_1, \dots, X_n$ із середнім $EX_j = m_1$ та дисперсією $DX = \sigma^2$ збігається за ймовірністю до m_1 .

Розділ 3

Моделі і задачі теорії ризику

Ризик – це характеристика ситуації, що має невизначеність результату, при обов’язковій наявності несприятливих наслідків. Простіше кажучи, ризик – це можливість того, що станеться щось погане. Ризик передбачає невизначеність щодо ефектів/наслідків діяльності щодо чогось, що люди цінують (наприклад, здоров’я, добробут, багатство, майно чи навколишнє середовище), часто акцентуючи увагу на негативних, небажаних наслідках. Існує багато різних визначень ризику. Міжнародним стандартним визначенням ризику для загального розуміння в різних застосуваннях є “вплив невизначеності на цілі”.

Головна область, у якій застосовується поняття ризику – це страхування як протистояння різноманітним небезпекам. З точки зору ризику небезпека і випадковість виступають як синоніми, тому можна вважати, що страхування – це механізм боротьби з небезпечними випадковостями чи випадковими небезпеками. Так як головною наукою, що вивчає математичні моделі випадковостей, є теорія ймовірностей, то саме методи цієї науки і склали ядро так званої математичної теорії ризику, під якою розуміють, як правило, страхову математику.

Згідно із Законом України про страхування, **страховий ризик** – це певна подія, на випадок якої проводиться страхування і яка має ознаки ймовірності та випадковості настання.

Всю страхову математику можна (дуже умовно) поділити на дві галузі: теорію ризику, що вивчає так звані ризикові види страхування (загальне страхування або non-life insurance, тобто види, відмінні від страхування життя), та теорію страхування життя. При цьому термін “актуарна математика” зазвичай використовується для сукупності методів, що належать до другої галузі, тобто, до страхування життя.

Розглянемо традиційні моделі та задачі теорії ризику.

Елементарною складовою ризику страховика зазвичай вважається *ін-*

дивідувальний позов (страхова вимога (claim)), що дорівнює сумі коштів, виплачених страховиком за деяким договором страхування, тобто, це випадкова величина, яка набуває нульового значення, якщо за цим договором страхування виплат не відбулося (не відбулася страхова подія), і має відмінне від нуля значення, що дорівнює сумі всіх страхових виплат за цим договором, якщо хоча б одна страхова подія відбулася. Умовне значення величини позову за умови, що позов відмінний від 0, називається *збитком*.

3.1 Класифікація моделей ризику

У існуючій літературі з теорії ризику наводиться наступна класифікація моделей ризику.

Статичні моделі ризику/страхування описують ситуації, в яких розглядається сукупність об'єктів страхування (страховий портфель), сформована одноразово, страхові премії зібрані в момент формування портфеля, термін дії всіх договорів страхування однаковий, і протягом цього терміну відбуваються страхові події, що призводять до страхових виплат (позовів). Це моделі ризику для **короткострокового страхування**. У таких моделях *не беруть до уваги нарахування відсотків та інфляцію*.

Динамічні моделі ризику/страхування, в яких передбачається, що договори страхування укладаються страховиком у моменти часу, що утворюють деякий випадковий процес, кожен із договорів має свою власну тривалість, і протягом часу дії цього договору можуть відбуватися страхові події, що призводять до збитків страхової компанії (страховика).

Такі моделі можуть розглядатися як на скінченному, так і на нескінченному інтервалі часу. При розгляді динамічної моделі завжди передбачається наявність деякого початкового капіталу, що виділяється страховиком для даного страхового портфеля.

У зв'язку з цими моделями найчастіше ставляться і вирішуються дві взаємозалежні задачі:

- (і) обчислення розподілу сумарного позову, тобто суми всіх виплат (збитків) страховика за підсумками страхової діяльності по всьому страховому портфелю (в рамках статичної моделі) або за підсумками діяльності протягом деякого інтервалу часу (в рамках динамічної моделі);
- (ii) обчислення (або оцінка) страхових премій, що забезпечують задану (зазвичай близьку до 1) ймовірність небанкрутства страховика.

3.1.1 Банкрутство

Банкрутство (розорення, ruin) – це подія, яка полягає в тому, що сума страхових виплат страховика у певний момент часу виявляється більшою,

ніж сума його початкового резерву та сума зібраних страхових премій; під страховою премією далі розуміється лише та частина повного внеску страхувальника (брутто-премії), яка зараховується до страхового фонду, тобто до фонду, призначеного для покриття майбутніх страхових виплат.

Термін “банкрутство” і, відповідно, термін “небанкрутство” не слід розуміти буквально, оскільки мається на увазі не справжнє банкрутство страховика, а саме та подія, яка визначена вище, причому найчастіше вона розглядається стосовно не всієї страхової діяльності, а стосовно окремого виду страхування або окремого страхового портфеля.

3.1.2 Основні задачі статичної моделі ризику

При обчисленні ймовірності банкрутства для статичної моделі ризику досить розглянути результуючі суми збитків та страхових премій по всьому страховому портфелю.

Розглядаються задачі обчислення розподілу сумарних збитків страховика (сумарного позову), тобто суми всіх виплат (збитків) страховика за підсумками страхової діяльності по всьому страховому портфелю; обчислення математичного сподівання, дисперсії, коефіцієнта варіації сумарних збитків страховика; побудова довірчих інтервалів, тощо.

3.1.3 Основні задачі динамічної моделі ризику

При розгляді динамічної моделі ймовірність банкрутства можна розуміти як мінімум у трьох сенсах. По-перше, можна розглядати ймовірність банкрутства в даний момент часу, тобто, ймовірність того, що в даний момент часу сума збитків перевищує величину страхового фонду страховика (тобто суму початкового капіталу і зібраних до цього моменту страхових премій). По-друге, можна розглядати ймовірність банкрутства на фіксованому скінченному інтервалі часу, тобто, ймовірність того, що протягом розглянутого інтервалу часу сума збитків хоча б раз перевищить величину страхового фонду. По-третє, можна розглядати ймовірність банкрутства на нескінченному інтервалі часу, тобто, ймовірність того, що коли-небудь сума збитків перевищить величину страхового фонду страховика. Останній випадок вивчений найбільш глибоко і всебічно.

В рамках дисципліни “**Математичні аспекти загального страхування**” ми розглянемо такі моделі ризику для короткострокового страхування (статичні моделі ризику):

- **модель колективного ризику,**
- **модель індивідуального ризику.**

Динамічні моделі ризику вивчаються в рамках дисципліни “Основні математичні моделі процесів ризику”.

3.2 Модель колективного ризику

3.2.1 Опис моделі колективного ризику

Розглянемо сумарну величину S позовів $X_1, \dots, X_N$, які виникли за певний короткий проміжок часу у деякому страховому портфелі [2]. Будемо припускати, що:

- кількість позовів (випадкова величина N) не впливає на величини індивідуальних позовів;
- на величину окремого позову ніяк не впливають величини інших позовів;
- розподіл величини індивідуальних позовів не змінюється протягом терміну дії поліса.

Тобто $S = X_1 + \dots + X_N$, де X_i – незалежні однаково розподілені випадкові величини та N не залежить від $\{X_i\}_{i \geq 1}$, зокрема $S = 0$, коли $N = 0$.

3.2.2 Розподіл сумарної величини виплат за портфелем та його характеристики

Позначимо через $G(x)$ та $F(x)$ функції розподілу випадкових величин S та X_i відповідно:

$$G(x) = P(S < x), \quad F(x) = P(X_i < x), \quad 1 \leq i \leq N, \quad x \in R.$$

Для зручності часто припускатимемо існування щільності у $F(x)$, яку позначатимемо $f(x)$, $x \in R$.

Нехай також $m_k = EX_i^k$ та $\mu_k = E(X_i - m_1)^k$ – відповідно k -й нецентральний та центральний моменти X_i . Крім того, вважатимемо, що величина позовів не може бути від’ємною, тобто $F(0) = P(X_j < 0) = 0$.

Отримаємо загальні формули для функції розподілу, математичного сподівання, дисперсії та генератриси моментів випадкової величини S .

Розглянемо подію $\{S < x\}$ для довільного $x \geq 0$. Вона має місце, якщо відбувається лише одна з таких несумісних подій:

- $\{S < x \text{ та } N = 0\}$, що означає відсутність позовів;
- $\{S < x \text{ та } N = 1\}$, тобто надійшов один позов, величина якого менша x ;

- $\{S < x \text{ та } N = 2\}$, надійшли два позови, сумарна величина яких менша x ;
 $\vdots$
- $\{S < x \text{ та } N = n\}$, надійшли n позовів, сумарна величина яких менша x ;
 $\vdots$

$$\{S < x\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{S < x, N = n\},$$

$$G(x) = P(S < x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S < x, N = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(S < x | N = n) P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x) P(N = n),$$

оскільки при $N = n$ сумарні виплати S є сумою фіксованої кількості n в.в. $\{X_i\}_{i=1}^n$, а тому

$$P(S < x | N = n) = F^{n*}(x),$$

де $F^{n*}(x)$ є n -кратною згорткою функції розподілу $F(x)$.

Загальний вираз для функції розподілу S отримано без жодних припущень щодо розподілів випадкових величин N та X_i .

3.2.3 Моменти

Для знаходження моментів випадкової величини S використаємо властивості умовних математичних сподівань. Зокрема, щоб визначити ES , використаємо формулу повного математичного сподівання $ES = E(E(S|N))$. Обчислимо спочатку

$$E(S|N = n) = \sum_{i=1}^n EX_i = nm_1.$$

Отже,

$$E(S|N) = Nm_1,$$

тоді

$$ES = E(Nm_1) = m_1 EN = EX_i EN. \quad (3.1)$$

Таким чином, математичне сподівання сумарних виплат дорівнює добутку середньої очікуваної кількості позовів та математичного сподівання величини індивідуального позову.

Щоб знайти вираз для DS , застосуємо формулу повної дисперсії $DS = E(D(S|N)) + D(E(S|N))$. Тоді, пам'ятаючи, що величини X_i позовів незалежні, маємо

$$D(S|N = n) = D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n DX_i = n\mu_2.$$

Звідси маємо, що

$$D(S|N) = N\mu_2.$$

Отже,

$$DS = E(N\mu_2) + D(N\mu_2) = \mu_2 EN + \mu_2^2 DN = DX_i EN + (EX_i)^2 DN, \quad (3.2)$$

тобто дисперсія S визначається через перші два моменти в.в. N та X_i .

3.2.4 Генератриса розподілу

Нехай $G_N(t)$ та $G_X(t)$ – генератриса розподілів випадкових величин N та X_i відповідно. Визначимо вигляд генератриса розподілу S . За формулою повної ймовірності маємо

$$\begin{aligned} G_S(t) &= Et^S = \sum_{n=0}^{\infty} E(t^S|N = n)P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E(t^{X_1+\dots+X_n})P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n E(t^{X_i})P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (G_X(t))^n P(N = n) = G_N(G_X(t)). \end{aligned}$$

3.2.5 Генератриса моментів

За формулою повного математичного сподівання

$$M_S(t) = E \exp\{tS\} = E(E(\exp\{tS\}|N)).$$

Нехай $M_X(t)$ – генератриса моментів випадкових величин X_i . З того, що $\{X_i\}$ – незалежні випадкові величини, випливає, що

$$\begin{aligned} E(\exp\{tS\}|N = n) &= E \exp\left\{t \sum_{i=1}^n X_i\right\} = E \prod_{i=1}^n \exp\{tX_i\} \\ &= \prod_{i=1}^n E \exp\{tX_i\} = \prod_{i=1}^n M_X(t) = (M_X(t))^n. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} E(\exp\{tS\}|N) &= (M_X(t))^N \\ M_S(t) &= E(M_X(t))^N = E \exp\{N \ln M_X(t)\} = M_N(\ln M_X(t)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.2.6 Складний пуассонівський розподіл

Розглянемо сумарну величину позовів S у випадку, коли їхня кількість N має розподіл Пуассона з параметром $\lambda > 0$. Тоді випадкова величина S матиме складний розподіл Пуассона з параметрами λ і $F(x)$, де $F(x)$ – функція розподілу величини індивідуального позову X_i .

Нагадаємо, що

$$\mathbb{E}N = \mathbb{D}N = \lambda, \quad M_N(t) = \exp\{\lambda e^t - 1\}.$$

Тоді згідно з формулами (3.1) – (3.3), маємо

$$\mathbb{E}S = \lambda m_1, \quad \mathbb{D}S = \lambda m_2, \quad M_S(t) = \exp\{\lambda(M_X(t) - 1)\}, \quad (3.4)$$

де $m_k = \mathbb{E}X_i^k$, $k = 1, 2, \dots$, $M_X(t)$ – генератриса моментів X_i .

Важливою особливістю складного пуассонівського розподілу є той факт, що сума незалежних випадкових величин, які мають складний розподіл Пуассона, також розподілена за складним пуассонівським законом. Сформулюємо цю властивість у вигляді наступної теореми.

Теорема 3.1. *Нехай $S_1, \dots, S_n$ – незалежні в.в., причому S_i має складний розподіл Пуассона з параметрами $\lambda_i > 0$ та $F_i(x)$. Позначимо їх суму $S := S_1 + \dots + S_n$. Випадкова величина S має складний розподіл Пуассона з параметрами*

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{та} \quad F(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i F_i(x).$$

Доведення. Оскільки $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1$, то $F(x)$ є зваженим середнім функцій розподілу $F_i(x)$, а значить, також є функцією розподілу.

Нехай $M(t)$ – генератриса моментів в.в. із функцією розподілу $F(x)$. Тоді

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_0^\infty e^{tx} dF(x) \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty e^{tx} dF_i(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n M_i(t). \end{aligned}$$

Розглянемо тепер генератрису моментів S .

Використовуючи незалежність S_i , маємо

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \mathbb{E}e^{tS} = \mathbb{E}e^{t(S_1 + \dots + S_n)} = \mathbb{E} \prod_{i=1}^n e^{tS_i} \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}e^{tS_i} = \prod_{i=1}^n \exp\{\lambda_i(M_i(t) - 1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i (M_i(t) - 1) \right\} \\
&= \exp \left\{ \lambda \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} (M_i(t) - 1) \right\} \\
&= \exp \left\{ \lambda \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} M_i(t) - 1 \right) \right\},
\end{aligned}$$

тобто

$$M_S(t) = \exp\{\lambda(M(t) - 1)\}.$$

Внаслідок взаємно однозначної відповідності між функціями розподілу і генератрисами моментів випадкових величин з останньої формули випливає, що S має складний розподіл Пуассона з параметром λ та $F(x)$. $\square$

3.2.7 Складний біноміальний розподіл

За певних умов природним вибором в якості розподілу для кількості позовів N виникає біноміальний розподіл. Наприклад, у полісі групового страхування життя для групи з n осіб розподілом кількості смертей протягом року є біноміальний, якщо припускати, що всі застраховані особи незалежні між собою відносно смерті та мають однакову інтенсивність смертності.

Нагадаємо, що для випадкової величини N , яка має біноміальний розподіл з параметрами n та $0 < \theta < 1$,

$$EN = n\theta, \quad DN = n\theta(1 - \theta), \quad M_N(t) = (\theta e^t + 1 - \theta)^n.$$

Коли N має біноміальний розподіл, то S – складний біноміальний розподіл. Важливою умовою для вибору біноміального розподілу для N є те, що існує верхня межа n для кількості позовів.

Згідно з формулами (3.1) – (3.3), маємо

$$ES = n\theta m_1, \quad DS = n\theta m_2 - n\theta^2 m_1^2, \quad (3.5)$$

$$M_S(t) = (\theta M_X(t) + 1 - \theta)^n.$$

3.2.8 Складний від'ємний біноміальний розподіл

Нехай випадкова величина N має від'ємний біноміальний розподіл з параметрами k та $0 < \theta < 1$:

$$P(N = n) = C_{k+n-1}^n \theta^k (1 - \theta)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тоді

$$EN = \frac{k(1-\theta)}{\theta}, \quad DN = \frac{k(1-\theta)}{\theta^2}, \quad M_N(t) = \theta^k(1 - (1-\theta)e^t)^{-k}.$$

Зокрема, у частковому випадку при $k = 1$ випадкова величина N має геометричний розподіл.

Від'ємний біноміальний розподіл виступає альтернативою розподілу Пуассона для N .

Однією з переваг від'ємного біноміального розподілу над пуассонівським є те, що його дисперсія перевищує математичне сподівання.

У розподілі Пуассона ці дві величини однакові.

Відповідно до цього від'ємний біноміальний розподіл може краще відповідати множині даних, у якій вибіркова дисперсія більша за вибіркове середнє значення.

Отже, коли кількість позовів N розподілена за від'ємним біноміальним законом, то величина S сумарних виплат має складний від'ємний біноміальний розподіл.

Знову використовуючи формули (3.1) – (3.3), отримуємо вирази для математичного сподівання, дисперсії та генератриси моментів S :

$$\begin{aligned} ES &= \frac{k(1-\theta)}{\theta} m_1, \\ DS &= \frac{k(1-\theta)}{\theta} m_2 + \frac{k(1-\theta)^2}{\theta^2} m_1^2, \\ M_S(t) &= \theta^k(1 - (1-\theta)M_X(t))^{-k}. \end{aligned}$$

3.3 Модель індивідуального ризику

Модель індивідуального ризику відображає сумарні витрати у вигляді фіксованої суми незалежних (але не обов'язково однаково розподілених) випадкових величин [2]:

$$S = X_1 + \dots + X_n,$$

де X_j – величина позову, який виник за j -им ризиком, а n дорівнює загальній кількості ризиків.

Зауважимо, що деякі з ризиків можуть і не призвести до позовів, тобто деякі зі спостережених значень $\{X_j\}_{j=1}^n$ можуть дорівнювати нулю.

Таку модель зазвичай використовують під час дослідження сумарних витрат від n страхових угод, наприклад, для полісу групового страхування життя n осіб.

Отже, стосовно кожного ризику роблять такі припущення:

- i) кількість позовів N_j від j -го ризику дорівнює 0 або 1;
- ii) імовірність позову від j -го ризику дорівнює q_j , тобто

$$P(N_j = 1) = q_j.$$

Якщо позов спричинений j -им ризиком, то величину збитків позначимо через Y_j . Нехай також $EY_j = m_{1j}$, $DY_j = \mu_{2j}$.

Припущення i) звужує сферу застосування моделі.

Зокрема, з нього випливає, що від кожного ризику може виникнути не більше одного позову.

Такий підхід охоплює договори страхування життя, у якому ймовірність смерті j -ої особи протягом року дорівнює q_j , але усуває багато типів договорів загального страхування. Наприклад, немає жодних обмежень на кількість позовів, які можуть протягом року виникнути за полісом страхування домашнього майна.

Наголосимо, які відмінності від моделі колективного ризику має модель індивідуального ризику:

- кількість ризиків у портфелі є фіксованою. У моделі колективного ризику немає необхідності точно визначати цю кількість чи вважати, що вона незмінна протягом терміну дії страхового покриття;
- кількість позовів за кожним індивідуальним полісом обмежена на відміну від моделі колективного ризику – вона таких обмежень не має;
- припускають, що індивідуальні ризики незалежні. У моделі колективного ризику незалежними є величини індивідуальних позовів.

З припущень i)-ii) видно, що в.в. N_j мають біноміальний розподіл із параметрами $n = 1$ та q_j . Тому розподіл X_j є складним біноміальним з індивідуальними позовами, розподіленими, як Y_j . З того, що ми знаємо про складний біноміальний розподіл, випливає, що

$$EX_j = q_j m_{1j}, \quad DX_j = q_j \mu_{2j} + q_j(1 - q_j)m_{1j}^2.$$

Як бачимо, випадкова величина S є сумою n незалежних (можливо, не однаково розподілених) випадкових величин зі складним біноміальним розподілом. Розподіл S є згорткою n функцій розподілу випадкової величини X_j , який можна просто обчислити лише у випадку незалежних однаково розподілених складних біноміальних випадкових величин. Проте легко знайти середнє та дисперсію S :

$$\begin{aligned} ES &= E \sum_{j=1}^n X_j = \sum_{j=1}^n EX_j = \sum_{j=1}^n q_j m_{1j}, \\ DS &= D \sum_{j=1}^n X_j = \sum_{j=1}^n DX_j = \sum_{j=1}^n (q_j \mu_{2j} + q_j(1 - q_j)m_{1j}^2). \end{aligned}$$

В окремому випадку, коли $\{X_j\}$ є послідовністю н.о.р. в.в., тоді для всіх полісів значення q_j , m_{1j} та μ_{2j} однакові і рівні q , m_1 та μ_2 відповідно.

Випадкова величина S матиме складний біноміальний розподіл з параметрами n , q та індивідуальними позовами з тією самою функцією розподілу $F(x)$. Таким чином, цей випадок зводиться до моделі колективного ризику.

Легко бачити, що

$$ES = nqm_1, \quad DS = nq\mu_2 + nq(1 - q)m_1^2.$$

3.4 Мінливість або невизначеність параметрів моделі

Досі при вивченні моделей ризику ми припускали, що розподіли кількості позовів та величин індивідуальних позовів повністю відомі.

Однак, вони можуть бути невідомими, і тоді їх треба оцінювати за спостереженими даними. Спробуємо узагальнити введені раніше моделі, щоб охопити випадок невизначеності або мінливості параметрів.

Для цього розглянемо кілька прикладів. Більшість із них стосується невизначеності у розподілах кількості позовів, бо саме цій проблемі приділяють більше уваги в актуарній літературі.

3.4.1 Мінливість у неоднорідному портфелі

Розглянемо портфель, що складається з n незалежних полісів. Сумарні позови від i -го поліса позначимо через S_i , де в.в. S_i має складний розподіл Пуассона з параметрами λ_i та $F(x)$.

Для простоти розподіл величин індивідуальних позовів $F(x)$ вважати-
мемо однаковим для всіх полісів. Тут розподіл $F(x)$ є відомим, але невідомими є значення пуассонівських параметрів λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Також припускатимемо, що λ_i є вибірковими значеннями незалежних в.в. з однаковим розподілом.

Інакше кажучи, $\{\lambda_i\}$ будемо трактувати як множину н.о.р. в.в. із відомим розподілом. Це означає, що коли поліс вибрано навмання з портфелю, то значення його пуассонівського параметра невідоме, але стосовно нього можна сформулювати певні ймовірнісні твердження, наприклад, про довірчі інтервали.

Важливо розуміти, що пуассонівський параметр для поліса, вибраного з портфелю, є фіксованою величиною. Проблема полягає в тому, що ця величина невідома.

Приклад 3.1. Припустимо, що параметр Пуассона для окремих полісів вибирають із гамма-розподілу з параметрами α й δ . Треба знайти розподіл кількості позовів від поліса, вибраного навмання з портфелю.

Позначимо через N_i кількість позовів від i -го поліса із заданого портфелю та через λ_i – відповідний пуассонівський параметр. Тоді N_i має розподіл Пуассона з параметром λ_i , але проблема в тому, що значення λ_i невідоме. Відомий лише розподіл, з якого вибирають λ_i .

Знайдемо безумовний розподіл N_i .

$$f_{\lambda_i}(\nu) = \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \nu^{\alpha-1} e^{-\delta\nu}, \quad \nu > 0,$$

$$p_{N_i|\lambda_i=\nu}(k, \nu) = P(N_i = k | \lambda_i = \nu) = \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Використаємо аналог формули повної ймовірності. Маємо

$$\begin{aligned} P(N_i = k) &= \int_0^\infty p_{N_i|\lambda_i=\nu}(k, \nu) f_{\lambda_i}(\nu) d\nu = \int_0^\infty \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu} \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \nu^{\alpha-1} e^{-\delta\nu} d\nu \\ &= \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)k!} \int_0^\infty \nu^{\alpha+k-1} e^{-(\delta+1)\nu} d\nu = \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)k!(\delta+1)^{\alpha+k}} \int_0^\infty x^{\alpha+k-1} e^{-x} dx \\ &= \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)k!} \frac{\delta^\alpha}{(\delta+1)^{\alpha+k}} = \frac{(k+\alpha-1)!}{(\alpha-1)!k!} \left(\frac{\delta}{\delta+1} \right)^\alpha \left(\frac{1}{\delta+1} \right)^k. \end{aligned}$$

Звідси видно, що безумовний розподіл N_i є від'ємним біноміальним розподілом з параметрами α та $\delta/(\delta+1)$.

Приклад 3.2. Припустимо, що пуассонівські параметри полісів точно невідомі, але з однаковою ймовірністю можуть набувати значення 0,1 або 0,3. Треба знайти:

а) середнє та дисперсію (у термінах m_1 та m_2) сумарних позовів від поліса, вибраного навмання з портфелю;

б) середнє та дисперсію (у термінах m_1 , m_2 та n) сумарних позовів від усього портфелю в цілому.

Нехай λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ – значення пуассонівського параметра i -го поліса, де $\{\lambda_i\}$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини, кожна з яких має розподіл $P(\lambda_i = 0, 1) = P(\lambda_i = 0, 3) = 0,5$. Звідси

$$E\lambda_i = 0,1 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,5 = 0,2;$$

$$D\lambda_i = E\lambda_i^2 - (E\lambda_i)^2 = (0,1)^2 \cdot 0,5 + (0,3)^2 \cdot 0,5 - (0,2)^2 = 0,01.$$

Оскільки випадкові величини S_i за умови фіксованого значення λ_i мають складний розподіл Пуассона з відповідним параметром, то

$$E(S_i|\lambda_i) = \lambda_i m_1, \quad D(S_i|\lambda_i) = \lambda_i m_2$$

і за формулами повного математичного сподівання та повної дисперсії

$$\begin{aligned} ES_i &= E(E(S_i|\lambda_i)) = E(\lambda_i m_1) = m_1 E\lambda_i = 0,2m_1; \\ DS_i &= E(D(S_i|\lambda_i)) + D(E(S_i|\lambda_i)) = E(\lambda_i m_2) + D(\lambda_i m_1) \\ &= m_2 E\lambda_i + m_1^2 D\lambda_i = 0,2m_2 + 0,01m_1^2. \end{aligned}$$

б) В.в. S_i , $i = 1, 2, \dots, n$, є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, кожна з яких має розподіл, наведений у п. а). Отже,

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^n S_i\right) &= nES_i = 0,2m_1n; \\ D\left(\sum_{i=1}^n S_i\right) &= \sum_{i=1}^n DS_i = nDS_i = (0,2m_2 + 0,01m_1^2)n. \end{aligned}$$

3.4.2 Мінливість в однорідному портфелі

Розглянемо портфель із n полісів. Припустимо, що сумарні позови від одного поліса мають складний розподіл Пуассона з параметрами λ та $F(x)$.

Ці параметри є однаковими для всіх полісів у портфелі.

Якщо значення λ відоме, то сумарні позови від різних полісів будуть незалежними.

Вважатимемо, що **значення λ невідоме** (наприклад, воно міняється щороку), проте є певні міркування щодо ймовірності значень, які може набувати λ .

Як і у попередній частині лекції, для простоти припустимо, що немає невизначеності стосовно моментів або розподілу величин індивідуальних позовів, тобто відносно $F(x)$.

Невизначеність щодо значень λ можна змодельовати, вважаючи цей параметр випадковою величиною з відомим розподілом.

Приклад 3.3. Припустимо, що параметр λ розподілу Пуассона з однаковою ймовірністю набуває значення 0,1 або 0,3. Треба знайти:

а) середнє та дисперсію (у термінах m_1 та m_2) сумарних позовів від поліса, вибраного навмання з даного портфелю;

б) середнє та дисперсію (у термінах m_1 , m_2 та n) сумарних позовів від усього портфелю.

Як і раніше, через S_i позначимо сумарні позови від i -го поліса. У нашій ситуації випадкові величини $\{S_i|\lambda\}$ є н.о.р. в.в., кожна з яких має складний розподіл Пуассона з параметрами λ та $F(x)$.

Випадкова величина λ має розподіл $P(\lambda = 0,1) = P(\lambda = 0,3) = 0,5$. Звідси

$$E\lambda = 0,1 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,5 = 0,2;$$

$$D\lambda = E\lambda^2 - (E\lambda)^2 = (0,1)^2 \cdot 0,5 + (0,3)^2 \cdot 0,5 - (0,2)^2 = 0,01.$$

а) За формулами повного математичного сподівання та повної дисперсії отримуємо

$$\begin{aligned} ES_i &= E(E(S_i|\lambda)) = E(\lambda m_1) = m_1 E\lambda = 0,2m_1; \\ DS_i &= E(D(S_i|\lambda)) + D(E(S_i|\lambda)) = E(\lambda m_2) + D(\lambda m_1) \\ &= m_2 E\lambda + m_1^2 D\lambda = 0,2m_2 + 0,01m_1^2. \end{aligned}$$

б) Оскільки в.в. S_i є однаково розподіленими, то

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^n S_i\right) &= nES_i = 0,2m_1n; \\ D\left(\sum_{i=1}^n S_i\right) &= E\left(D\left(\sum_{i=1}^n S_i|\lambda\right)\right) + D\left(E\left(\sum_{i=1}^n S_i|\lambda\right)\right) \\ &= E(n\lambda m_2) + D(n\lambda m_1) \\ &= nm_2 E\lambda + n^2 m_1^2 D\lambda = 0,2m_2n + 0,01m_1^2 n^2. \end{aligned}$$

Значення середніх в обох прикладах однакові, як і дисперсії для окремих полісів (п. а)). Різниця виникає, коли розглядають дисперсії більш ніж одного поліса (п. б)), де більша дисперсія виникає у прикладі 3.3.

Практична ситуація, до якої підходить останній приклад, стосується портфелю полісів страхування будівель у деякому районі. Кількість позовів може залежати, крім інших факторів, від погоди протягом року – незвично велика кількість штормів може призвести до великої очікуваної кількості позовів (тобто до великого значення λ) для усіх полісів одночасно, і навпаки, за гарної погоди значення λ будуть малими.

3.4.3 Мінливість у кількості й величині позовів та невизначеність у параметрах

Розглянемо ще два приклади. Перший з них містить невизначеність як у величинах позовів, так і в їх кількості.

Приклад 3.4. Страхова компанія моделює позови, викликані ураганами, при страхуванні домогосподарств за таких припущень:

- i) кожного року кількість K ураганів має розподіл Пуассона з параметром λ ;
 - ii) кількість позовів N_i , викликаних i -им ураганом, має розподіл Пуассона з параметром Θ_i , $i = 1, \dots, K$;
 - iii) параметри Θ_i – це н.о.р. в.в. такі, що $E\Theta_i = n$, $D\Theta_i = s_1^2$, $i = 1, \dots, K$;
 - iv) величина j -го позову, викликаного i -им ураганом, тобто X_{ij} , $j = 1, \dots, N_i$, $i = 1, \dots, K$, має логнормальний розподіл з параметрами μ_i та σ , де значення σ вважають відомими, а значення μ_i – ні. Припускають, що середні величини позовів, спричинені i -им ураганом, дорівнюють $\Lambda_i = \exp\{\mu_i + \sigma^2/2\}$, які є н.о.р. в.в. із середнім p та дисперсією s_2^2 ;
 - v) Θ_i та Λ_i незалежні.
- а) Покажемо, що $EX_{ij} = p$, $DX_{ij} = \exp\{\sigma^2\}(p^2 + s_2^2) - p^2$.

б) Нехай $S_i = \sum_{j=1}^{N_i} X_{ij}$ – сумарні виплати, спричинені i -им ураганом, тоді умовний розподіл $S_i | \{\Theta_i, \Lambda_i\}$ – це складний розподіл Пуассона. Доведемо, що $ES_i = np$ та $DS_i = (p^2 + s_2^2)(n^2 + s_1^2 + n \exp\{\sigma^2\}) - n^2 p^2$.

в) Знайдемо вираз для математичного сподівання та дисперсії сумарних річних позовів від усіх ураганів.

Розв'язання

а) Використаємо формули повного математичного сподівання і дисперсії. Тоді

$$EX_{ij} = E(E(X_{ij} | \Lambda_i)) = E\Lambda_i = p;$$

$$\begin{aligned}
DX_{ij} &= E(D(X_{ij}|\Lambda_i)) + D(E(X_{ij}|\Lambda_i)) \\
&= E(\Lambda_i^2(\exp\{\sigma^2\} - 1)) + D\Lambda_i \\
&= (p^2 + s_2^2)(\exp\{\sigma^2\} - 1) + s_2^2 \\
&= (p^2 + s_2^2)\exp\{\sigma^2\} - p^2.
\end{aligned}$$

б) Оскільки умовний розподіл $S_i|\{\Theta_i, \Lambda_i\}$ – це складний розподіл Пуассона, то

$$E(S_i|\Theta_i, \Lambda_i) = \Theta_i \Lambda_i.$$

З формули повного математичного сподівання та незалежності Θ_i та Λ_i випливає, що

$$ES_i = E(E(S_i|\Theta_i, \Lambda_i)) = E(\Theta_i \Lambda_i) = E\Theta_i E\Lambda_i = np.$$

Звідси матимемо

$$\begin{aligned}
D(S_i|\Theta_i, \Lambda_i) &= \Theta_i E(X_{ij}^2|\Lambda_i) = \Theta_i(\Lambda_i^2 \exp\{\sigma^2\}) \\
E(D(S_i|\Theta_i, \Lambda_i)) &= n(p^2 + s_2^2) \exp\{\sigma^2\}, \\
D(E(S_i|\Theta_i, \Lambda_i)) &= D(\Theta_i \Lambda_i) \\
&= E(\Theta_i^2 \Lambda_i^2) - n^2 p^2 = (n^2 + s_1^2)(p^2 + s_2^2) - n^2 p^2.
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$D(S_i) = (n^2 + s_1^2)(p^2 + s_2^2) - n^2 p^2 + n(p^2 + s_2^2) \exp\{\sigma^2\}.$$

в) Нехай S – в.в., яка позначає річні сумарні позови, що надійшли від усіх ураганів, тобто $S = S_1 + \dots + S_K$, де K має пуассонівський розподіл з параметром λ , а S_i – н.о.р. в.в. Тому S має складний розподіл Пуассона та

$$ES = \lambda ES_i = \lambda np;$$

$$DS = \lambda ES_i^2 = \lambda(DS_i + (ES_i)^2) = \lambda(p^2 + s_2^2)(n^2 + s_1^2 + n \exp\{\sigma^2\}).$$

Приклад 3.5. Щороку страхова компанія підписує ряд договорів страхування домогосподарств, для кожного з яких страхова премія становить £80. Сумарні річні позови від кожного поліса мають складний розподіл Пуассона з параметром 0,4 та індивідуальними позовами з гамма-розподілу з параметрами α і λ .

Накладні витрати на опрацювання позову є в.в., рівномірно розподіленою між £50 та £ b , ($b > 50$), і не залежать від величини цього позову. В.в. S відображає сумарні позови й витрати від усього портфелю протягом року. Вважають, що S має близький до нормального розподіл.

а) Нехай $\alpha = 1$, $\lambda = 0,01$, $b = 100$. Доведемо, що компанія повинна продати за рік не менше 884 полісів, щоб досягти принаймні 99% упевненості

в тому, що надходження премій перевищить видатки на покриття позовів і накладні витрати.

б) Припустимо тепер, що значення α , λ та b достовірно невідомі, але можуть знаходитися у таких межах: $0,95 \leq \alpha \leq 1,05$; $0,009 \leq \lambda \leq 0,011$; $90 \leq b \leq 110$.

Вибравши найгірші можливі для компанії значення α , λ , b , визначимо кількість полісів, які має продати компанія, щоб на 99% бути впевненою у тому, що надходження премій перевищуватиме видатки на покриття позовів і накладні витрати на їх опрацювання.

Нехай X_i – це величина i -го позову, а Y_i – величина відповідних накладних витрат. Позначимо через N загальну кількість позовів за портфелем, а через n – кількість полісів у портфелі.

Оскільки N є сумою пуассонівських н.о.р. в.в., то N має розподіл Пуассона з параметром $0,4n$, а S можна зобразити, як

$$S = \sum_{i=1}^N (X_i + Y_i),$$

де $\{X_i + Y_i\}_{i \geq 1}$ є послідовністю н.о.р. в.в., незалежних від N . Звідси випливає, що S має складний розподіл Пуассона, у якому $Z_i = X_i + Y_i$ відображає величину i -го індивідуального позову (i -го доданка). Тоді

$$\begin{aligned} ES &= 0,4nE(X_i + Y_i), \\ DS &= 0,4nE(X_i + Y_i)^2 = 0,4n(EX_i^2 + 2EX_iY_i + EY_i^2) \\ &= 0,4n(EX_i^2 + 2EX_iEY_i + EY_i^2). \end{aligned}$$

Обчислимо моменти X_i , Y_i у термінах α , λ та b :

$$\begin{aligned} EX_i &= \frac{\alpha}{\lambda}; \\ EX_i^2 &= \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\lambda^2}; \\ EY_i &= \frac{50 + b}{2}; \\ EY_i^2 &= \frac{b^2 + 50b + 2500}{3}. \end{aligned}$$

а) Покладемо $\alpha = 1$, $\lambda = 0,01$, $b = 100$, тоді матимемо $ES = 70n$ та $DS = (127,80)^2n$. І, відповідно, S наближено має нормальний розподіл із середнім $70n$ та стандартним відхиленням $127,80\sqrt{n}$.

Надходження премій склало $80n$, і нам потрібно визначити найменше значення n , яке задовольнить нерівність

$$P(S < 80n) \geq 0,99.$$

Стандартизуємо випадкову величину S , тобто, центруємо її (віднімаємо її математичне сподівання) та нормуємо (ділимо на корінь з дисперсії). Тоді

$$P\left(\frac{S - 70n}{127,80\sqrt{n}} < \frac{80n - 70n}{127,80\sqrt{n}}\right) \geq 0,99. \quad (3.6)$$

Нагадаємо, що *квантилем рівня α або $\alpha\%$ -им квантилем* розподілу $F_X(x)$ називають таку точку x_α , що

$$F_X(x_\alpha) = P(X < x_\alpha) = \alpha.$$

99%-ий квантиль стандартного нормального розподілу дорівнює 2,326, отже, нерівність (3.6) перетворюється на таку:

$$\frac{80n - 70n}{127,80\sqrt{n}} \geq 2,326,$$

звідки маємо $n \geq 883,7$ або $n \geq 884$, якщо розглядати найближче **більше** ціле число.

б) Найгіршою можливою комбінацією значень α , λ та b для страхової компанії є комбінація, яка дає найбільші можливі значення для ES й DS . Для того, щоб пересвідчитися у цьому, позначимо через μ та σ математичне сподівання та стандартне відхилення сумарних позовів та витрат на їх опрацювання для індивідуального полісу. Параметри μ і σ будуть функціями від α , λ , b , причому $ES = n\mu$ та $DS = n\sigma^2$. Аналогічним чином, як у п. а), отримуємо нерівність для n :

$$\frac{(80 - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \geq 2,326,$$

звідки маємо, що

$$n \geq \left(\frac{2,326\sigma}{80 - \mu}\right)^2.$$

Отже, найбільше значення n відповідає найбільшим значенням μ і σ (за умови, що найбільше значення μ є меншим за 80).

Зауважимо також, що $\mu = 0,4E(X_i + Y_i)$, $\sigma^2 = 0,4E(X_i + Y_i)^2$. З цих формул для моментів $X_i + Y_i$ випливає, що μ і σ є максимальними, коли α та b набувають найбільших, а λ найменшого значень, тобто $\alpha = 1,05$; $b = 110$; $\lambda = 0,009$. Така комбінація дає $\mu = 78,67$ та $\sigma = 144,14$. Отже, n має бути принаймні 63,546 для того, щоб страхова компанія на 99% була впевнена, що надходження премій перевищить величину видатків на покриття позовів і відповідні накладні витрати.

3.5 Факторизаційна модель

Розглянемо ситуацію, коли стохастична природа величини виплат страховика за окремим договором страхування пов'язана не тільки з випадковим характером величини збитків (яка стає відома тільки після настання страхових випадків), але і з випадковим характером страхової суми, яка відіграє роль “масштабу” ризику страховика за окремими договорами (і визначається вже у момент укладання договору).

Передбачається, що кожному договору страхування (з номером j) з деякого страхового портфеля ставиться у відповідність додатня для всіх елементарних подій ω випадкова величина S_j , яка називається страховою сумою, причому для всіх ω випадкова величина позову Y_j задовольняє умові $Y_j \leq S_j$.

Визначимо випадкову величину $X_j = Y_j/S_j$. Очевидно, що ця випадкова величина завжди коректно визначена. Величину X_j можна назвати **відносним позовом** (позовом, розрахованим на одиницю страхової суми). Суть **факторизаційної моделі** (Ф-моделі) зводиться до того що, що випадкові величини X_j і S_j вважаються незалежними.

При цьому величина позову може бути подана у вигляді добутку незалежних випадкових величин:

$$Y_j = X_j S_j \quad (3.7)$$

Позови, що задовольняють цій умові, називаються **факторизованими**.

Припустимо, що для кожного договору страхування страхового портфеля страхова премія Z_j визначається з урахуванням випадкової страхової суми (“масштабу” ризику) за цим договором страхування S_j як

$$Z_j = z S_j, \quad (3.8)$$

де z – деяка стала для всіх договорів страхування величина, яка називається **ставкою страхової премії** (чи просто ставкою премії, або страховим тарифом). При цьому, очевидно, що у цій моделі премії є випадковими величинами, що залежать від S_j . Зазначимо, що з природних практичних міркувань премія Z_j не може перевищувати страхову суму S_j , отже надалі вважатимемо, що $z \leq 1$.

Очевидно, що ситуація, що традиційно розглядається, коли страхова сума – постійна величина, є найпростішим окремим випадком Ф-моделі.

Цікавішим і важливим з практичної точки зору прикладом є пропорційне страхування сукупності деяких однорідних об'єктів. При пропорційному страхуванні страхова сума визначається за кожним договором у межах дійсної вартості кожного об'єкта страхування на момент укладання договору

страхування (що називається страховою вартістю).

Величина відшкодування дорівнює добутку страхової суми на відношення реальної вартості заподіяного страховою подією збитку до його страхової вартості. Формально, якщо C – страхова вартість, S – страхова сума ($S \leq C$), U – реальна шкода, заподіяна об’єкту страхування ($0 \leq U \leq C$), то сума відшкодування (позов) Y дорівнює $(U/C)S$ (зазначимо, що U/C це величина відносного позову X). Стохастична незалежність величин U/C і S може бути обґрунтована суттєво різною природою цих величин: значення $X = U/C$ визначається випадковими факторами, породженими конкретним страховим випадком, а величина страхової суми визначається на момент початку дії договору за згодою між страховиком та страхувальником та залежить за умови однорідності об’єктів страхування, передусім, від фінансових можливостей страхувальника: премія за кожним договором страхування визначається як добуток сталої для всіх позовів даного страхового портфеля ставки премії на величину страхової суми для даного договору страхування.

Ще одним прикладом такої моделі є страхування від нещасних випадків, коли здійснюється страхування на деяку суму, що виплачується або повністю – за такої серйозної шкоди здоров’ю, яка вважається за умовами договору страхування “максимальною”, або частково – відповідно до конкретного виду заподіяної шкоди здоров’ю. Ступінь шкоди здоров’ю визначається відповідною експертною комісією і залежить від максимальної суми, на яку застрахований клієнт, тобто від страхової суми.

Зазначені міркування можуть бути застосовані до всіх видів ризикового страхування. При цьому має виконуватися умова однорідності страхового портфеля, яка вимагає, що портфель повинен формуватися лише з досить однотипних договорів страхування.

3.5.1 Оптимальна страхова ставка

Вважатимемо, що кількість договорів страхування N , що включаються до страхового портфеля, взагалі кажучи, є випадковою величиною (як важливі окремі випадки розглядаються випадкова величина N з виродженим розподілом, для якої $DN = 0$, випадкова величина N з пуассонівським розподілом, для якої $EN = DN = \lambda$, а також випадкова величина N з узагальненим пуассонівським розподілом).

Припустимо, що всі позови Y_j факторизуються, випадкові вектори (S_j, X_j) , $j = 1, 2, \dots$, і випадкова величина N незалежні в сукупності. Також припустимо, що має місце “відносна однорідність” позовів, тобто однаково розподілені всі випадкові величини S_j ($j = 1, 2, \dots$), і всі випадкові величини X_j ($j = 1, 2, \dots$).

Випадкова сума зібраних за страховим портфелем премій дорівнює

$$\bar{Z} = \sum_{j=1}^N Z_j.$$

Випадкова сума відшкодувань (сума позовів) дорівнює

$$\bar{Y} = \sum_{j=1}^N Y_j.$$

Нехай початковий резерв (початковий капітал) за даним страховим портфелем дорівнює r . Тоді сумарний страховий фонд (за результатами роботи з цим страховим портфелем) дорівнює

$$R = r + \bar{Z} - \bar{Y}.$$

Першою із задач, що виникають у зв'язку з описаною моделлю, є вивчення асимптотики розподілу випадкової величини R за відомої величини страхової ставки z . Друга задача – це визначення такого мінімального значення z , при якому результати страхової діяльності по даному страховому портфелю в певному сенсі будуть прийнятними для страховика.

Достатньо природними є такі умови визначення страхової ставки z :

- умова “середньої беззбитковості”, відповідно до якої страхова ставка z повинна задовольняти нерівність

$$z \geq EX_j; \quad (3.9)$$

- умова “підсумкового небанкрутства”, відповідно до якої ставка z повинна визначатися так, щоб виконувалася нерівність

$$P(R \geq 0) \geq Q, \quad (3.10)$$

де Q – деяке заздалегідь задане число ($0 < Q < 1$).

Умова (3.10) є досить традиційною та природною. У формулі (3.10) величина Q є мінімальною допустимою для страховика ймовірністю “підсумкового небанкрутства”. Передбачається, що величина Q вибирається самим страховиком відповідно до ступеня його схильності до ризику. У прикладній літературі трапляються стандартно рекомендовані значення Q , рівні 0.9, 0.95 тощо.

Умова (3.9) при $Q > 0.5$ та великій кількості договорів страхування (тобто коли розподіл випадкової величини R близький до нормального), природно, є наслідком (3.10). Але загалом це не так. Умова (3.9) запроваджується для того, щоб забезпечити додатне значення середньої різниці між зібраними страховими преміями та виплатами страховика.

Якщо ставка страхової премії забезпечує одночасне виконання умов (3.9) і (3.10), можна сказати, що вона “достатня” чи задовольняє умові “достатності”.

Поряд з умовою “достатності” можна запровадити умову “помірності”, яка означає, що ставка страхової премії дорівнює числу z_0 – інфімуму (точній нижній межі/грані) величин z , що задовольняють умові “достатності”, тобто забезпечують одночасне виконання умов (3.9) і (3.10).

Ставку, що задовольняє умову “помірності”, природно називати мінімально допустимою. Така величина називається **оптимальною страховою ставкою** (оптимальним стороховим тарифом).

Задача визначення оптимальної страхової ставки (асимптотичні формули, верхні оцінки тощо) детально розглядається в рамках дисципліни “Статистичні методи у ризиковому страхуванні”.

Розділ 4

Суміші розподілів. Статистичне оцінювання параметрів розподілу. Наближення для складних розподілів

4.1 Суміші розподілів

Нехай заданий умовний розподіл випадкової величини X при заданому значенні випадкової величини $Y = y$ [2]. Функцію розподілу

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{X|Y=y}(x|y) dF_Y(y) \quad (4.1)$$

будемо називати *сумішшю функції розподілу $F_{X|Y=y}(x|y)$ по y відносно розподілу $F_Y(y)$* .

У разі, коли існують відповідні щільності випадкових величин X та Y , функцію

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y=y}(x|y) f_Y(y) dy \quad (4.2)$$

будемо називати *сумішшю щільності розподілу $f_{X|Y=y}(x|y)$ по y відносно щільності $f_Y(y)$* .

Суміші пуассонівських розподілів

Якщо $F_{X|Y=y}(x|y)$ – розподіл Пуассона з параметром y , то розподіл $F_X(x)$ називають *змішаним пуассонівським*. Якщо $F_Y(y)$ – розподіл Пуассона, то розподіл $F_X(x)$ називають *пуассонівськи-змішаним*.

Нехай

$$F_{X|Y=y}(x|y) = G^{*y}(x)$$

для деякої функції розподілу $G(x)$, де $G^{*k}(x)$ – k -кратна згортка функції $G(x)$ з собою:

$$G^{*k}(x) = G * G^{k-1}(x), \quad k \geq 0,$$

$G^{*0}(x)$ – функція розподілу з одиничним стрибком в нулі. Тоді співвідношення (4.1) набуває вигляду

$$F_X(x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} G^{*k}(x). \quad (4.3)$$

Розподіли вигляду (4.3) називають *узагальненими пуассонівськими*. Прикладом узагальненого пуассонівського розподілу є складний пуассонівський розподіл.

Розподіл Парето як суміш експоненціальних розподілів

Припустимо, що кожен окремий поліс із великого страхового портфеля призводить до збитків, які розподілені за експоненціальним законом, який є одним із найпростіших для моделювання збитків. Зрозуміло, що у більшості страхових портфелів середнє значення збитків є різним для різних застрахованих осіб. Тобто модель портфелю передбачає, що для кожного окремого поліса збитки розподілені за експоненціальним законом зі своїм значенням параметра λ .

Як адекватний підхід до відображення мінливості у середніх значеннях збитків виступає припущення, що значення параметра λ експоненціальних розподілів у межах портфелю самі є реалізацією деякої в.в.

Припустимо, що мінливість параметра λ можна зобразити за допомогою гамма-розподілу з параметрами α та δ і, відповідно, щільністю

$$f_{\lambda}(\nu) = \frac{\delta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \nu^{\alpha-1} e^{-\delta\nu}, \quad \nu > 0.$$

У такій задачі моделювання величини збитків X для всього портфелю гамма-розподіл використовують для усереднення експоненціальних розподілів, трактуючи його як “змішувальний”, а одержаний розподіл збитків як суміш розподілів.

Маргінальну щільність розподілу X можна отримати через сумісну та умовну щільності в.в. X та λ :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^{\infty} f_{X,\lambda}(x, \nu) d\nu = \int_0^{\infty} f_{\lambda}(\nu) f_{X|\lambda=\nu}(x|\nu) d\nu \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\delta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \nu^{\alpha-1} e^{-\delta\nu} \nu e^{-\nu x} d\nu = \frac{\delta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \nu^{\alpha} e^{-(\delta+x)\nu} d\nu \\ &= \frac{\delta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\delta+x)^{\alpha+1}} = \frac{\alpha\delta^{\alpha}}{(\delta+x)^{\alpha+1}}, \quad x > 0, \end{aligned}$$

у якій можна впізнати щільність розподілу Парето з параметрами α та δ .

Узагальнений розподіл Парето як суміш розподілів Ерланґа

Коли збитки мають експоненціальний розподіл з параметром λ , який, у свою чергу, є гамма-розподіленою в.в. з параметрами α , δ , маргінальний розподіл величини збитків є розподілом Парето.

Цей результат можна узагальнити, припустивши, що збитки мають розподіл Ерланґа (гамма-розподіл з параметрами k та λ , коли k – ціле), а λ має гамма-розподіл з параметрами α та δ . Випадок $k = 1$ зводиться до розглянутого вище.

Для довільного k маргінальна щільність величини збитків X дорівнює

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^\infty f_{X,\lambda}(x, \nu) d\nu = \int_0^\infty f_\lambda(\nu) f_{X|\lambda=\nu}(x|\nu) d\nu \\
&= \int_0^\infty \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \nu^{\alpha-1} e^{-\delta\nu} \frac{\nu^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\nu x} d\nu \\
&= \frac{\delta^\alpha x^{k-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k)} \int_0^\infty \nu^{\alpha+k-1} e^{-(\delta+x)\nu} e^{-\nu x} d\nu \\
&= \frac{\delta^\alpha \Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k)} \frac{x^{k-1}}{(\delta+x)^{\alpha+k}}, \quad x > 0.
\end{aligned}$$

Отримана функція є щільністю *узагальненого розподілу Парето*.

4.2 Статистичне оцінювання параметрів розподілу

На практиці точний розподіл величини позовів (чи їх кількості) рідко буває відомим.

Припустимо, що розподіл позовів належить певній параметричній сім'ї розподілів

$$F_\theta(x), \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_d) \in \mathbb{R}^d, \quad d \geq 1,$$

але значення параметрів $\theta_1, \dots, \theta_d$ невідомі. Тоді їх треба оцінити за відомими величинами позовів, використовуючи прийнятний статистичний метод.

Згадаємо коротко такі основні методи оцінювання, як метод моментів та метод максимальної вірогідності.

4.2.1 Точкові оцінки

Випадковий вектор $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ зі значеннями в просторі $\mathbb{R}^n$ називають *вибіркою*. Вибірку, утворену послідовністю н.о.р. в.в. $X_1, \dots, X_n$, кожна з яких має розподіл F , називають *повторною* або *n-кратною вибіркою з розподілу F*

Точно чи наближено визначити значення θ за спостереженнями $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ вибірки $\mathbf{X}$ означає, що реалізації $\mathbf{x}$ вибірки $\mathbf{X}$ треба поставити у відповідність значення θ , тобто задати функцію $T(\cdot)$ зі значеннями в Θ – множині можливих значень параметра θ – таку, що $T(\mathbf{x})$ точно чи хоча б наближено дорівнює θ . Значення $\hat{\theta} = T(\mathbf{x})$ надалі й будемо використовувати як θ .

Треба зазначити, що для кожної реалізації $\mathbf{x}$ вибірки $\mathbf{X}$ значення $\hat{\theta}$ буде своє, а тому є в.в. як функція від вибірки $\mathbf{X}$, тобто $\hat{\theta} = T(\mathbf{X})$.

Борелеву функцію $T: \mathbb{R}^n \mapsto \Theta$ називають *статистикою*, а $T(\mathbf{X}) = T(X_1, \dots, X_n)$ – борелеву функцію від вибірки зі значеннями в Θ – *оцінкою*.

Для того самого θ можна запропонувати багато оцінок.

Наскільки великою є похибка $|\theta - \hat{\theta}|$ від заміни справжнього значення параметра θ на оцінене $\hat{\theta}$?

Кількісно міру похибки від заміни θ на $\hat{\theta}$ (міру розсіювання $\hat{\theta}$ відносно θ) описують за допомогою величини

$$E_{\theta}|\theta - \hat{\theta}|^2,$$

де $E_{\theta}X$ означає математичне сподівання в.в. X відносно параметричної сім'ї розподілів F_{θ} та є функцією θ :

$$E_{\theta}X = \int_{\mathbb{R}} x dF_{\theta}(x).$$

Серед усіх оцінок з однією й тією самою дисперсією $D_{\theta}\hat{\theta}$ мінімальну міру розсіювання відносно θ мають оцінки, для яких $E_{\theta}\hat{\theta} = \theta$. Це впливає з перетворень

$$\begin{aligned} E_{\theta}|\theta - \hat{\theta}|^2 &= E_{\theta}|(\theta - E_{\theta}\hat{\theta}) + (E_{\theta}\hat{\theta} - \hat{\theta})|^2 \\ &= E_{\theta}(\hat{\theta} - E_{\theta}\hat{\theta})^2 + 2E_{\theta}(\theta - E_{\theta}\hat{\theta})(E_{\theta}\hat{\theta} - \hat{\theta}) + E_{\theta}(\theta - E_{\theta}\hat{\theta})^2 \\ &= D_{\theta}\hat{\theta} + E_{\theta}(\theta - E_{\theta}\hat{\theta})^2. \end{aligned}$$

Оцінку $\hat{\theta}$ називають *незміщеною оцінкою параметра θ* , якщо

$$E_{\theta}\hat{\theta} = \theta.$$

Часто можна розглядати не одну оцінку $\hat{\theta} = T(\mathbf{X})$, побудовану за вибіркою $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, а послідовність оцінок $\hat{\theta}_n = T_n(\mathbf{X})$, $n = 1, 2, \dots$. У цьому разі природно говорити про асимптотичну поведінку послідовності оцінок $\hat{\theta}_n$.

Послідовність оцінок $\hat{\theta}_n$ називають *конзистентною послідовністю оцінок параметра θ* , якщо для довільного $\varepsilon > 0$

$$P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Послідовність оцінок $\hat{\theta}_n$ називають *асимптотично незміщеною послідовністю оцінок параметра θ* , якщо для довільного $\varepsilon > 0$

$$E_{\theta}\hat{\theta}_n \rightarrow \theta, \quad n \rightarrow \infty.$$

Оцінка $\hat{\theta}_n$ параметра θ називається *асимптотично нормальною*, якщо знайдеться числова нормуюча послідовність $c_n = c_n(\theta)$ така, що має місце слабка збіжність

$$c_n(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{W_{\theta}} \zeta \simeq N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Інтервальна оцінка $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ невідомого параметра θ є *незміщеною оцінкою надійності p* , якщо для всіх $\theta \in \Theta$

$$P_{\theta}(\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2) = p.$$

Якщо оцінка $\hat{\theta}_n$ є асимптотично нормальною, а $c_n \sim \sqrt{n}/\sigma$, то за теоремою про добуток слабо збіжної послідовності зі збіжною

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \rightarrow^W \sigma\zeta \equiv \eta \simeq N(0, \sigma^2), \quad n \rightarrow \infty.$$

У цьому разі величина σ^2 називається асимптотичною дисперсією оцінки $\hat{\theta}_n$. Істинне її значення $\sigma^2 = \sigma^2(\theta)$ є відомою функцією параметра θ .

З наведеної слабкої збіжності випливає, що розподіл нормованої величини $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)/\sigma(\theta)$ наближається до розподілу стандартної нормальної величини ζ . Оберемо для заданого рівня $p \in (0, 1)$ значення x_p так, щоб

$$\mathbf{P}(|\zeta| \leq x_p) = p.$$

Для знаходження x_p досить чисельно розв'язати рівняння

$$\Phi(x_p) = (1 + p)/2.$$

Наприклад, $x_{0.997} \approx 3$ за правилом трьох сигма.

Тоді при великих n наближено

$$\mathbf{P}_\theta \left(\sqrt{n}|\hat{\theta}_n - \theta|/\sigma(\theta) \leq x_p \right) \approx \mathbf{P}(|\zeta| \leq x_p) = p.$$

Припустимо, що функція $\sigma(\theta)$ неперервна, а оцінка $\hat{\theta}_n$ – конзистентна. З цих припущень випливає збіжність за ймовірністю $\sigma(\hat{\theta}_n) \rightarrow^P \sigma(\theta)$. Тому можна наближено замінити $\sigma(\theta)$ на $\sigma(\hat{\theta}_n)$ під знаком імовірності і стверджувати (внаслідок теореми про добуток слабо збіжної послідовності зі збіжною), що при великих n подія $\{\sqrt{n}|\hat{\theta}_n - \theta|/\sigma(\hat{\theta}_n) \leq x_p\}$ наближено теж має ймовірність p . Отже, властивості асимптотичної нормальності та конзистентності дають можливість наближеної побудови інтервальних асимптотично незміщених оцінок надійності p для невідомого параметра, що мають вигляд

$$\mathbf{P}_\theta \left(\hat{\theta}_n - x_p\sigma(\hat{\theta}_n)/\sqrt{n} \leq \theta \leq \hat{\theta}_n + x_p\sigma(\hat{\theta}_n)/\sqrt{n} \right) \approx p, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

4.2.2 Метод моментів

Першим загальним методом побудови оцінок невідомих параметрів за вибіркою був метод моментів, запропонований Карлом Пірсоном. Згідно з цим методом певну кількість вибірових моментів

$$\hat{m}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \tag{4.4}$$

прирівнюють до відповідних теоретичних моментів

$$m_k(\boldsymbol{\theta}) = m_k(\theta_1, \dots, \theta_d) = \int_{\mathbb{R}} x^k dF_{\boldsymbol{\theta}}(x) \tag{4.5}$$

розподілу $F_{\theta}(x)$, обчислених за значеннями параметрів $\theta_1, \dots, \theta_d$, що дорівнюють відповідно $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_d$.

Перший вибіркового момент

$$\hat{m}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

привносять до першого теоретичного моменту

$$m_1(\hat{\theta}) = m_1(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_d) = \int_{\mathbb{R}} x dF_{\hat{\theta}}(x);$$

другий вибіркового момент

$$\hat{m}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

– до другого теоретичного моменту

$$m_2(\hat{\theta}) = m_2(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_d) = \int_{\mathbb{R}} x^2 dF_{\hat{\theta}}(x)$$

і так далі.

Розглядаючи кількість моментів, що дорівнює кількості невідомих параметрів, які треба оцінити, одержують таку саму кількість рівнянь для визначення невідомих параметрів:

$$\begin{aligned} \hat{m}_1 &= m_1(\hat{\theta}); \\ \hat{m}_2 &= m_2(\hat{\theta}); \\ &\vdots \\ \hat{m}_d &= m_d(\hat{\theta}). \end{aligned}$$

Розв'язуючи ці рівняння відносно $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_d$, знаходять шукані оцінки. Оцінка методу моментів є строго конзистентною.

4.2.3 Метод максимальної вірогідності

Досить простий метод утворення оцінок невідомого параметра запропонував Р. Фішер, припустивши, що в експерименті спостерігають ті дані, які відповідають параметру, при якому ймовірність спостерігати ці дані максимальна.

Нехай $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ – повторна вибірка із генеральної сукупності з функцією розподілу $F_{\theta}(x)$ та щільністю розподілу $f_{\theta}(x)$, $\theta \in \Theta$, а $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ – спостережені значення вибірки $\mathbf{X}$.

Функцію

$$L = L(\theta, \mathbf{x}) = f_{\theta}(x_1) \dots f_{\theta}(x_n) \quad (4.6)$$

називають *функцією вірогідності*.

Для дискретних в.в., які набувають значення в множині $\{x_1, \dots, x_n\}$ з розподілами $f_{\theta}(x) = P_{\theta}(X_i = x) := p_{\theta}(x)$, функція вірогідності має вигляд

$$L = L(\theta, \mathbf{x}) = p_{\theta}(x_1) \dots p_{\theta}(x_n).$$

Оцінкою максимальної вірогідності параметра $\theta \in \Theta$ називають значення параметра, при якому функція вірогідності L набуває найбільшого значення.

Часто функція L досягає максимуму у внутрішній точці множини Θ і є диференційованою. Оскільки функція $\ln L$ при даних значеннях вибірки $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ досягає свого максимуму в тій самій точці, що й функція L , то для знаходження оцінки максимальної вірогідності можна розв'язати рівняння вірогідності

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$$

та вибрати серед коренів такі, для яких матриця

$$\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)$$

буде від'ємно визначеною.

ОМВ є асимптотично незміщеною та конзистентною.

Принцип інваріантності

Якщо функція $a(\theta): \Theta \rightarrow Q \subseteq \mathbb{R}^d$ є взаємно однозначною, а $\hat{\theta}_n$ – ОМВ параметра $\theta \in \Theta$, то $\hat{a}_n = a(\hat{\theta}_n)$ буде ОМВ для $a(\theta)$. Цей простий принцип утворення оцінок максимальної вірогідності функцій від параметрів називають *принципом інваріантності*.

Приклад 4.1. Нехай $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ – повторна вибірка з логнормального розподілу $LN(\theta_1, \theta_2^2)$. Оскільки $\ln X_i \sim N(\theta_1, \theta_2^2)$, то ОМВ параметрів θ_1 та θ_2^2 мають вигляд

$$\hat{\theta}_{1n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i, \quad \hat{\theta}_{2n}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \hat{\theta}_{1n})^2.$$

Оскільки

$$EX_1 = m_1 = \exp \left\{ \theta_1 + \frac{\theta_2^2}{2} \right\}, \quad DX = \mu_2 = m_1^2 (\exp\{\theta_2^2\} - 1),$$

то ОМВ математичного сподівання m_1 та дисперсії μ_2 логнормального закону згідно з принципом інваріантності мають вигляд

$$\hat{m}_{1n} = \exp \left\{ \hat{\theta}_{1n} + \frac{\hat{\theta}_{2n}^2}{2} \right\}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \exp \left\{ \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i)^2 \right\},$$

$$\hat{\mu}_{2n} = \hat{m}_{1n}^2 \left(\exp \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i)^2 \right\} - 1 \right).$$

4.3 Наближення для складних розподілів

У моделі колективного ризику ми досить легко отримали формули для обчислення математичного сподівання і дисперсії сумарних виплат за деяким портфелем. Але знаходження функції розподілу цієї випадкової величини зазвичай є дуже непростою задачею.

У багатьох застосуваннях використовуються наближення для випадкової величини $S = \sum_{i=1}^N Y_i$, яка є сумою випадкового числа випадкових величин. Це може бути обґрунтовано центральною граничною теоремою (ЦГТ), якщо очікувана кількість позовів щодо відшкодування збитків велика.

Складні розподіли можуть мати два різних джерела ризику в хвості функції розподілу, а саме, кількість позовів N може сприяти великим значенням S або окремі великі позови (вимоги на виплату) серед $Y_1, \dots, Y_N$ можуть призводити до екстремальних значень S .

Розподіл величини позову (виплати) є розподілом з **легким хвостом**, якщо:

$$\exists \beta > 0 : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(x)}{\exp(-\beta x)} = c < \infty$$

Це означає, що хвіст функції розподілу спадає так само швидко, як хвіст експоненційного розподілу ($c > 0$) або навіть швидше ($c = 0$).

До розподілів із легким хвостом відносяться експоненційний розподіл, нормальний розподіл, а також довільні розподіли на скінченному відрізку (наприклад, рівномірний).

Розподіл величини позову (виплати) є розподілом з **важким хвостом**, якщо:

$$\forall \beta > 0 : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(x)}{\exp(-\beta x)} = \infty$$

До розподілів із важким хвостом відносяться лог-нормальний розподіл, розподіл Вейбулла (при певних значеннях параметра), розподіл Парето тощо.

Зокрема, розподіл Парето – це розподіл, у якого “правий хвіст”

$$1 - F(x) = P(X > x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + x} \right)^a$$

прямує до нуля як x^{-a} і є значно “важчим”, ніж експоненційний, у якого

$$P(X > x) = \exp\{-\lambda x\}.$$

Для розподілу Вейбулла з параметрами $c > 0$, $\gamma > 0$ та щільністю

$$f_X(x) = c\gamma x^{\gamma-1} \exp\{-cx^\gamma\}, \quad x > 0,$$

маємо такі випадки:

- якщо $\gamma < 1$, то виникає розподіл, який, у певному розумінні, є проміжним між експоненційним та розподілом Парето;
- при $\gamma > 1$ правий хвіст легший за експоненційний;
- випадок $\gamma = 1$ відповідає експоненційному розподілу.

Така гнучкість розподілу Вейбулла дозволяє використовувати його для моделювання збитків.

Зауваження 4.1. Значення моментів використовуються в теорії розподілів для означення таких спеціальних характеристик:

коефіцієнт варіації (дорівнює 1 для показникового розподілу):

$$k_v = \frac{\sigma}{m_1},$$

коефіцієнт асиметрії (нульовий для симетричних розподілів):

$$k_a = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

коефіцієнт ексцесу (нульовий для нормального розподілу):

$$k_e = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Всі наведені характеристики є безрозмірними та відображають певні особливості форми відповідного розподілу.

Асиметрія додатна, якщо “довша частина” розподілу знаходиться **праворуч** від математичного сподівання; **асиметрія від’ємна**, якщо “довша частина” кривої знаходиться **ліворуч** від математичного сподівання.

Ексцес нормального розподілу дорівнює нулю. Якщо ексцес деякого розподілу відмінний від нуля, то крива щільності цього розподілу відрізняється від кривої щільності нормального розподілу: якщо **ексцес додатний**, то крива такого розподілу має **вищу та “гострішу” вершину**, ніж крива нормального розподілу з такими самими значеннями математичного сподівання та дисперсії; якщо **ексцес від’ємний**, то крива такого розподілу

має **нижчу та “пласкішу” вершину**, ніж крива нормального розподілу з такими самими значеннями математичного сподівання та дисперсії.

Зосередимося на складній моделі Пуассона. У випадку, коли розміри вимог на виплату Y_i мають розподіли з важкими хвостами, вони здебільшого вносять свій вклад у хвостову частину розподілу випадкової величини S . У випадку складної моделі Пуассона слід відокремлювати малі та великі позови, що призводить до розкладу S на незалежні складові $S = S_{sc} + S_{lc}$.¹ Далі, якщо очікувана кількість малих позовів λ_{sc} велика, S_{sc} можна апроксимувати параметричною функцією розподілу, а S_{lc} слід моделювати якомога точніше.

4.3.1 Нормальне наближення

Нормальне наближення ґрунтується на центральній граничній теоремі.

У класичній центральній граничній теоремі доводиться, що центрована та нормована сума незалежних величин слабо збігається до нормальної величини для практично довільних розподілів окремих доданків.

Цей клас теорем є підставою для широкого застосування *нормального розподілу* в статистиці, принаймні у випадку великої кількості спостережень.

Означення 4.1. Нехай $\xi, (\xi_n, n \geq 1)$ – випадкові величини з функціями розподілу $F, (F_n, n \geq 1)$ відповідно. Має місце слабка збіжність:

$$\xi_n \rightarrow^W \xi, \quad F_n \rightarrow^W F, \quad n \rightarrow \infty,$$

якщо для кожної неперервної обмеженої функції g (тобто $\forall g \in C_b(\mathbb{R})$) збігаються математичні сподівання

$$\mathbf{E}g(\xi_n) \rightarrow \mathbf{E}g(\xi), \quad n \rightarrow \infty,$$

або ж збігаються інтеграли

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_n(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x), \quad n \rightarrow \infty.$$

4.3.2 Класична центральна гранична теорема

Теорема 4.1. Нехай (ξ_n) – послідовність незалежних у сукупності однаково розподілених випадкових величин зі скінченними середніми та дисперсіями: $\mu = \mathbf{E}\xi_1$, $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi_1 > 0$, а $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, n \geq 1$. Тоді

$$\frac{(S_n - \mathbf{E}S_n)}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}} = \frac{(S_n - n\mu)}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow^W \zeta \simeq N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty.$$

¹“sc” – small claims, “lc” – large claims

Наслідок 4.1. *Оскільки збіжність в основному впливає зі слабкої збіжності, а нормальна функція розподілу неперервна, то для всіх $x \in \mathbb{R}$ має місце збіжність функцій розподілу*

$$\mathbf{P} \left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x \right) \rightarrow \Phi(x) \equiv \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} y^2 \right) dy, \quad n \rightarrow \infty.$$

Зокрема, звідси при довільному розподілі окремих доданків за правилом трьох сигма для досить великих n впливає наближена рівність

$$\mathbf{P}(|S_n - n\mu| < 3\sigma\sqrt{n}) \approx 0.997.$$

Класична ЦГТ діє для фіксованої кількості доданків. У нашому підході кількість позовів не фіксована, тому нам знадобиться уточнення А.М. Ляпунова центральної граничної теореми. Ми робимо це для пуассонівської кількості позовів N , зберігаючи фіксовану очікувану частоту позовів λ і спрямовуючи обсяг $n \rightarrow \infty$.

У контексті страхування, не пов'язаного з життям, випадкову змінну N часто пов'язують з базовим (детермінованим) обсягом (експозицією) $n > 0$. Експозиція стає особливо важливою для вивчення переваг диверсифікації, оцінки параметрів та оцінювання мінливості оцінки параметра.

Обсяг/експозиція може мати різний характер залежно від конкретного страхового бізнесу, і завжди слід вибирати найбільш підходящий. Типовими варіантами є: кількість застрахованих осіб, кількість полісів, кількість ризиків або час експозиції. У страхуванні здоров'я та від нещасних випадків це також може бути сукупна застрахована заробітна плата або у страхуванні від пожежі загальна застрахована вартість будівлі. Простіше кажучи, ми інтерпретуємо $n > 0$ як кількість застрахованих ризиків. Якщо N рахує кількість позовів, відношення N/n називається частотою позовів, а очікувана кількість позовів визначається як

$$\mathbf{E}N = \lambda n,$$

де $\lambda > 0$ позначає очікувану частоту позовів.

4.3.3 “Удосконалена” центральна гранична теорема у випадку складного розподілу Пуассона

Теорема 4.2. *Нехай $S \simeq \text{CompPoi}(\lambda n, F)$ (тобто, має складний розподіл Пуассона з параметрами λn і F), де функція розподілу величин позовів F має скінченний другий момент. Тоді*

$$\frac{S - \lambda n \mathbf{E}(Y_1)}{\sqrt{\lambda n \mathbf{E}(Y_1^2)}} \rightarrow^w N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty$$

Зауважимо, що ми розглядаємо особливий клас функцій розподілу F , що мають скінченний другий момент. Поки ми працюємо сумарною величиною малих позовів S_{sc} , це не є обмеженням, оскільки розміри позовів обмежені порогом великих значень позовів M і тому мають скінченну дисперсію.

Наслідок 4.2. *З останньої теореми отримуємо таке наближення для функції розподілу сумарних виплат S :*

$$P[S < x] = P\left[\frac{S - \lambda n E(Y_1)}{\sqrt{\lambda n E(Y_1^2)}} < \frac{x - \lambda n E(Y_1)}{\sqrt{\lambda n E(Y_1^2)}}\right] \approx \Phi\left(\frac{x - \lambda n E(Y_1)}{\sqrt{\lambda n E(Y_1^2)}}\right),$$

де Φ – функція розподілу стандартної нормальної (гауссової) випадкової величини.

Нормальне наближення добре працює, коли n є великим (великий розмір страхового портфелю) і величини позовів Y_i не мають функцій розподілу з важкими хвостами (відсутні великі вимоги на виплату). Інакше воно недооцінює справжній потенціал великих значень S і забезпечує гарну апроксимацію лише навколо середнього значення S , зокрема тому, що гаусівський розподіл має нульову асиметрію.

Для портфелів малого розміру таке наближення може бути поганим, тому що справжній розподіл часто має суттєву додатну асиметрію.

4.3.4 Зміщені гамма-наближення та логнормальне наближення

Оберемо $k \in \mathbb{R}$ та визначимо (зміщені) випадкові величини

$$X = k + Z, \quad Z \sim \Gamma(\gamma, c) \quad \text{або} \quad Z \sim LN(\mu, \sigma^2)$$

У випадку зміщеного гамма-розподілу матимемо такі вирази для обчислення математичного сподівання, дисперсії та коефіцієнта асиметрії випадкової величини X :

$$E(X) = k + \gamma/c, \quad D(X) = \gamma/c^2, \quad \zeta_X = 2\gamma^{-1/2} > 0,$$

а у випадку зміщеного логнормального розподілу матимемо

$$E(X) = k + \exp\{\mu + \sigma^2/2\},$$

$$D(X) = \exp\{2\mu + \sigma^2\}(\exp\{\sigma^2\} - 1),$$

$$\zeta_X = (\exp\{\sigma^2\} + 2)(\exp\{\sigma^2\} - 1)^{1/2} > 0.$$

Тепер ідея полягає в тому, щоб “підігнати” моменти випадкових величин S та X . Припустимо, що S має скінченний третій момент. Обираємо

$$X = k + Z, \quad Z \sim \Gamma(\gamma, c) \quad \text{або} \quad Z \sim LN(\mu, \sigma^2)$$

так, щоб

$$E(X) = E(S), \quad D(X) = D(S) \quad \text{та} \quad \zeta_X = \zeta_S,$$

а потім цю підігнану випадкову величину X використовуємо як наближення для S .

4.3.5 Наближення Еджворта

Наближення Еджворта названо на честь Френсіса Ісідро Еджворта (1845–1926). Наближення, представлені в попередньому розділі, були досить специфічними. Ми обрали (просту) функцію розподілу, яка має асиметрію, а потім підігнали моменти (без додаткових припущень щодо форми апроксимуючої функції розподілу). Апроксимація Еджворта починається з центральної граничної теореми, а потім члени вищого порядку в цій апроксимації уточнюються шляхом оцінювання генератрисы моментів з використанням розкладу в ряд Тейлора.

Припустимо, що величина сумарних виплат S має складний розподіл Пуассона з розподілом величин виплат F .

Розглянемо “нормалізовану” випадкову величину

$$Z = \frac{S - \lambda n E(Y_1)}{\sqrt{\lambda n E(Y_1^2)}}.$$

Тут маємо $EZ = 0$, $DZ = 1$ та коефіцієнт асиметрії $\zeta_Z = \zeta_S$.

Ідея полягає в тому, щоб тепер наблизити генератрису моментів випадкової величини Z відповідними членами в розкладі генератрисы моментів нормального розподілу. Тому спочатку розглянемо наступний розклад в ряд Тейлора в околі нуля при $m \geq 3$:

$$\ln M_Z(r) = \sum_{k=0}^m \frac{\frac{d^k}{dr^k} \ln M_Z(r)|_{r=0}}{k!} r^k + o(r^m), \quad r \rightarrow 0$$

Позначимо $a_k = \frac{\frac{d^k}{dr^k} \ln M_Z(r)|_{r=0}}{k!}$ і зауважимо, що $a_0 = \ln M_Z(0) = 0$, $a_1 = EZ = 0$ та $a_2 = DZ/2! = 1/2$. Отримаємо таке наближення:

$$\begin{aligned} M_Z(r) &\approx \exp \left\{ \frac{1}{2} r^2 + \sum_{k=3}^m a_k r^k \right\} = \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} r^2 \right\} \exp \left\{ \sum_{k=3}^m a_k r^k \right\}. \end{aligned}$$

Застосовуючи до останньої експоненційної функції в цьому виразі розклад в ряд Тейлора $e^x = 1 + x + x^2/2! + \dots$, отримаємо наближення для

генератриси моментів випадкової величини Z у вигляді

$$M_Z(r) \approx e^{\frac{r^2}{2}} \left[1 + \sum_{k=3}^m a_k r^k + \frac{\left(\sum_{k=3}^m a_k r^k \right)^2}{2!} + \dots \right].$$

Залежно від того, якою саме є необхідна точність наближення при $r \rightarrow 0$, можна брати більше доданків у квадратних дужках та/або більше значення верхнього індекса m у відповідній сумі. Таким чином, для відповідних констант $b_k \in \mathbb{R}$ отримуємо наближення (при малих r)

$$M_Z(r) \approx e^{\frac{r^2}{2}} \left[1 + a_3 r^3 + \sum_{k \geq 4} b_k r^k \right]. \quad (4.7)$$

Лема 4.1. *Нехай Φ – стандартна гауссівська (нормальна) функція розподілу та $\Phi^{(k)}$ – її k -та похідна. Для $k \in \mathbb{N}_0$ та $r \in \mathbb{R}$ виконується співвідношення*

$$r^k e^{\frac{r^2}{2}} = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} \Phi^{(k+1)}(x) dx.$$

Нехай $X \sim N(0, 1)$. Ця лема дає можливість записати наближення (4.7) при малих r у вигляді

$$\begin{aligned} M_Z(r) &\approx \mathbb{E}(e^{rX}) - a_3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} \Phi^{(4)}(x) dx + \sum_{k \geq 4} b_k (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} \Phi^{(k+1)}(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{rx} \left[\Phi'(x) - a_3 \Phi^{(4)}(x) + \sum_{k \geq 4} b_k (-1)^k \Phi^{(k+1)}(x) \right] dx \end{aligned} \quad (4.8)$$

Якщо випадкова величина Z має функцію розподілу F_Z , то вираз (4.8) означає, що для цієї функції має місце наближення

$$dF_Z(z) \approx \left[\Phi'(z) - a_3 \Phi^{(4)}(z) + \sum_{k \geq 4} b_k (-1)^k \Phi^{(k+1)}(z) \right] dz$$

Інтегруючи це співвідношення та використовуючи позначення $x = \sqrt{\lambda n \mathbb{E}(Y_1^2)} z + \lambda n \mathbb{E}(Y_1)$, отримаємо **наближення Еджворта**:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S < z] &= F_Z(z) \approx \\ &\approx EW(z) := \Phi(z) - a_3 \Phi^{(3)}(z) + \sum_{k \geq 4} b_k (-1)^k \Phi^{(k)}(z). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ця формула забезпечує уточнення нормального наближення, а саме, ми покращуємо наближення першого порядку (яке відображається тільки стандартною нормальною функцією розподілу Φ) за допомогою членів вищих порядків, які, зокрема, враховують асиметрію.

Розділ 5

Теорія банкрутства. Імовірність банкрутства у моделі з дискретним часом

5.1 Теорія банкрутства

Банкрутство (розорення, ruin) – це подія, яка полягає в тому, що сума страхових виплат страховика у певний момент часу виявляється більшою, ніж сума його початкового резерву та сума зібраних страхових премій.

Теорія банкрутства – це розділ страхової математики, у якому досліджується ця подія, зокрема, за яких умов страхова компанія зазнає банкрутства, з якою ймовірністю це може відбутися, яким є розподіл часу до банкрутства тощо. Початком розвитку теорії банкрутства послужила математична модель капіталу страхової компанії, яка вперше була представлена Філіпом Лундбергом в 1903 році. (*Ернст Філіп Оскар Лундберг* (2 червня 1876 – 31 грудня 1965) – шведський актуарій і математик. Лундберг є одним із засновників математичної теорії ризику та працював керуючим директором кількох страхових компаній.)

Для того, щоб ознайомитись з основними поняттями теорії банкрутства, розглянемо деякі досить прості динамічні моделі ризику (детально різні динамічні моделі ризику вивчаються в рамках дисципліни “Основні математичні моделі процесів ризику”). Основна відмінність між цією лекцією і попередніми полягає в тому, що тепер ми будемо досліджувати, як розвивається портфель з часом.

Надалі нам знадобляться деякі відомості з теорії випадкових процесів.

5.2 Випадкові процеси

Теорія випадкових процесів вивчає нескінченні сукупності випадкових величин. Такі сукупності існують і в природознавстві, і в техніці, і в соціальних явищах. Наприклад, фізичний процес броунівського руху, розпо-

всюдження радіохвиль з шумом, температура повітря, атмосферний тиск, транспортні потоки, ціна акцій і т.д., і т.п.

Теорія випадкових процесів має велике значення для сучасної фінансової та актуарної математики.

Випадкові величини можуть залежати від параметра, що є цілим числом (випадкова послідовність), або від дійсного параметра, який найчастіше тлумачать як час (випадковий процес), або від векторного параметра (випадкове поле).

Випадковий процес трактується як стан певної системи, що змінюється випадково з часом. Якщо розглядати стан системи лише в дискретні моменти часу, то дістанемо *випадкову послідовність, або процес з дискретним часом*.

Випадкові поля характеризують зміну випадкових величин у часі і просторі.

Завжди, коли йде мова про щось випадкове, маємо на увазі певний ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Означення 5.1. Нехай кожному $t \in T \subset \mathbb{R}$ поставлено у відповідність випадкову величину $X(t)$, тоді кажуть, що на T задано *випадковий процес* $\{X(t), t \in T\}$.

Означення 5.2. При фіксованому значенні $\omega \in \Omega$ *реалізацією* або *траєкторією* випадкового процесу $\{X(t), t \in T\}$ називається функція $X(\cdot, \omega): T \rightarrow S$, яка ставить у відповідність кожному $t \in T$ одне з можливих значень $X(t) \in S$ (S – множина можливих значень $X(t)$).

Означення 5.3. $\{X(t), t \in T\}$ називають процесом із незалежними приростами, якщо для будь-яких $s < t \leq u < v$ випадкові величини $X(t) - X(s)$ та $X(u) - X(v)$ є незалежними.

Означення 5.4. Кажуть, що процес $\{X(t), t \in T\}$ має *стаціонарні прирости*, якщо якщо для будь-яких $s < t$ розподіл приросту $X(t) - X(s)$ залежить лише від різниці $t - s$.

Випадковий процес з дискретним часом (дискретний випадковий процес) зазвичай позначають через $\{X_t; t = 0, 1, 2, \dots\}$. Скінченновимірні розподіли дискретного випадкового процесу визначаються як сумісні розподіли випадкових величин $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ для цілих t_i та всіх n .

Дискретний процес можна отримати із неперервного процесу, якщо записувати значення X_t у цілі моменти часу. У цій лекції всі процеси з дискретним часом вимірюватимуть в кінці кожного періоду спостереження, наприклад, місяця, кварталу або року.

5.2.1 Процес Пуассона

Процес Пуассона є моделлю для випадкових потоків подій, які відбуваються в неперервному часі. Наприклад, для потоку викликів, що надходять до телефонної станції чи мережевого сервера, потоку вимог на виплати, що надходять до страхової компанії тощо.

Зробимо такі природні припущення про характер надходження позовів:

1. події, пов'язані з появою позовів на інтервалах часу, які не перетинаються, є незалежними випадковими подіями;
2. розподіл кількості позовів, що надійшли протягом інтервалу часу $[t, t+h)$, не залежить від t , а залежить лише від h ;
3. ймовірність того, що протягом інтервалу $[t, t+h)$ буде подано принаймні один позов, дорівнює $\lambda h + o(h)$, де λ – стала, а $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$;
4. ймовірність того, що протягом інтервалу $[t, t+h)$ виникне більш ніж один позов, дорівнює $o(h)$.

Нехай $N(t)$ – кількість позовів, які надійшли протягом часу $[0, t)$. Позначимо

$$p_N(k; t) = P(N(t) = k).$$

Має місце таке твердження.

Теорема 5.1. *В.в. $N(t)$ має розподіл Пуассона з параметром λt , тобто*

$$p_N(k; t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.1)$$

Параметр λ називається *інтенсивністю* процесу Пуассона.

Експоненціальність приростів. Важливою властивістю процесу Пуассона є те, що інтервали часу між послідовними моментами настання подій є незалежними однаково показниково (експоненціально) розподіленими випадковими величинами з математичним сподіванням $\frac{1}{\lambda}$, тобто, параметр цього експоненціального розподілу дорівнює інтенсивності процесу Пуассона λ .

5.2.2 Випадкові процеси у страхуванні

Нехай $\{S_t; t \geq 0\}$ – загальні виплати за позовами (збитки) за деяким страховим портфелем від часу від 0 до t . Для початку покажемо, як можна використати модель колективного ризику для опису цього процесу.

Припустимо для простоти, що $t_1 < \dots < t_n$. Нехай

$$W_j := S_{t_j} - S_{t_{j-1}},$$

де $S_{t_0} = S_0 = 0$, та W_j – незалежні випадкові величини з розподілами, заданими деякою моделлю колективного ризику. Розподіли індивідуальних збитків можуть бути однаковими, коли розподіл частот настання страхових подій має середнє, що пропорційне тривалості періоду $t_j - t_{j-1}$. Приклад реалізації (траєкторії) такого процесу наведено на рисунку нижче:

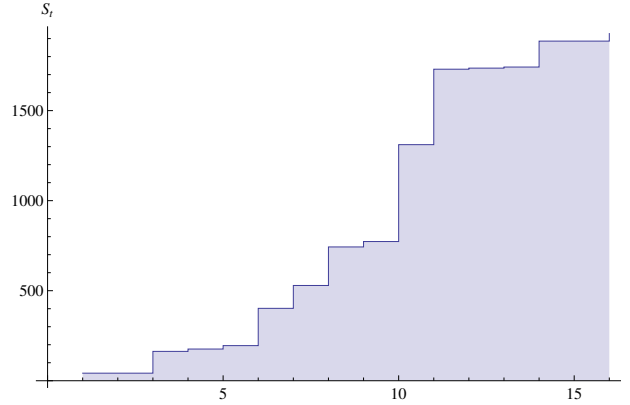


Рис. 5.1: Приклад траєкторії процесу ризику

Нехай $X_1, X_2, \dots$ відображають загальні виплати за позовами (збитки) за кожен період, причому випадкові величини X_j – незалежні однаково розподілені, і кожна випадкова величина X_j має складний розподіл. Тоді процес сумарних збитків матиме вигляд $S_t = X_1 + X_2 + \dots + X_t$. Цей процес має незалежні стаціонарні прирости, оскільки приріст

$$S_t - S_s = X_{s+1} + X_{s+2} + \dots + X_t$$

залежить тільки від кількості X_j , яка дорівнює $t - s$. Приклад такого процесу зображено на рисунку нижче:

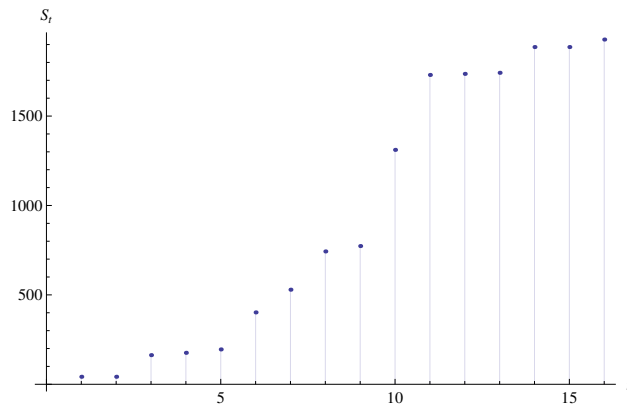


Рис. 5.2: Приклад процесу ризику з незалежними стаціонарними приростами

Нехай в нульовий момент часу страхова компанія має початковий капітал $u = U_0$.

Означення 5.5. Процес капіталу (процес чистого доходу, процес залишків, *англ.: surplus process*) страхової компанії визначається так: капітал в

момент часу t становить

$$U_t = U_0 + P_t - S_t,$$

де $\{P_t, t \geq 0\}$ – це процес надходження премій, який підраховує величину всіх премій, зібраних до моменту t , і $\{S_t, t \geq 0\}$ – це процес ризику, який визначає сумарні виплати за позовами (збитки), сплачені на момент часу $t \geq 0$.

Можливо, хоча й не обов’язково, відокремити частотну компоненту S_t . Нехай $\{N_t, t \geq 0\}$ – процес надходження вимог на виплату, який записує кількість позовів на момент часу t . Тоді

$$S_t = X_1 + X_2 + \dots + X_{N_t}.$$

Якщо послідовність $X_1, X_2, \dots$ складається з однаково розподілених в.в., хоч це й необов’язково мусить бути так, і вони не залежать від N_t , то S_t матиме складний розподіл.

Розглянемо два окремих випадки процесу капіталу.

5.3 Модель із дискретним часом

Нехай приріст у процесі капіталу за t -ий рік визначено так:

$$W_t = P_t - P_{t-1} - S_t + S_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots$$

Тоді капітал можна подати у вигляді

$$U_t = U_{t-1} + W_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

З цього зображення можна відносно легко визначити розподіл $\{U_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$ за умови, що випадкова величина W_t не залежить від інших в.в. W_t , а залежить лише від U_{t-1} .

5.4 Неперервна модель

У більшості випадків дуже важко аналізувати неперервні моделі, тому що треба визначити сумісний розподіл у будь-який момент часу, а не лише для скінченної множини моментів часу. Одна із моделей, яка добре досліджена, – це модель зі складним процесом Пуассона, у якій премії надходять зі сталою неперервною не випадковою інтенсивністю

$$P_t = (1 + \theta)E(S_1)t$$

а процес ризику має вигляд

$$S_t = X_1 + X_2 + \dots + X_{N_t},$$

де $\{N_t, t \geq 0\}$ – пуассонівський процес.

5.5 Імовірності небанкрутства (виживання)

Основною метою побудови моделі процесу ризику є оцінка небанкрутства – “виживання” портфеля з плином часу. Імовірність небанкрутства може бути визначена чотирма різними способами.

(1) *Імовірність небанкрутства для неперевного часу й нескінченного горизонту* визначають так:

$$\phi(u) = P(U_t \geq 0 \text{ для всіх } t \geq 0 | U_0 = u). \quad (5.2)$$

Тут постійно перевіряємо капітал і вимагаємо, щоб портфель завжди був платоспроможним. Обидві вимоги: неперевне перевіряння та “вічність” портфелю є нереалістичними. На практиці, імовірніше, прирости перевірятимуть у регулярні моменти часу. Також постає питання, чи здатна така модель робити прогноз на нескінченність.

(2) *Імовірність небанкрутства для дискретного часу і скінченного горизонту* визначають як

$$\tilde{\phi}(u, \tau) = P(U_t \geq 0 \text{ для всіх } t = 0, 1, \dots, \tau | U_0 = u). \quad (5.3)$$

У цьому випадку нашому портфелю необхідно не набувати від’ємних значень протягом τ періодів (як правило, років), і ми робимо перевірку лише в кінці кожного періоду.

Виділимо з наведених визначень два проміжні випадки.

(3) *Імовірність небанкрутства для неперевного часу і скінченного горизонту* визначають як

$$\phi(u, \tau) = P(U_t \geq 0 \text{ для всіх } 0 \leq t \leq \tau | U_0 = u), \quad (5.4)$$

(4) *Імовірність небанкрутства для дискретного часу й нескінченного горизонту* – як

$$\tilde{\phi}(u) = P(U_t \geq 0 \text{ для всіх } t = 0, 1, \dots | U_0 = u). \quad (5.5)$$

Очевидно, що мають місце такі нерівності:

$$\tilde{\phi}(u, \tau) \geq \tilde{\phi}(u) \geq \phi(u)$$

і

$$\tilde{\phi}(u, \tau) \geq \phi(u, \tau) \geq \phi(u),$$

та граничні переходи:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi(u, \tau) = \phi(u)$$

і

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{\phi}(u, \tau) = \tilde{\phi}(u).$$

5.6 Імовірність банкрутства

Тепер визначимо ймовірність банкрутства.

Імовірність банкрутства в неперервному часі з нескінченним горизонтом визначають так:

$$\psi(u) = 1 - \phi(u).$$

Інші три ймовірності банкрутства визначають і записують аналогічно.

5.7 Імовірність банкрутства у моделі з дискретним часом

Нехай P_j – це премії, зібрані за j -ий період часу (напр., j -ий рік), а S_j – виплати, здійснені протягом цього періоду. Додамо одне узагальнення. Нехай C_j будуть будь-якими іншими грошовими потоками, ніж збирання страхових премій і виплачування збитків.

Найважливішим є грошовий потік доходу від інвестування капіталу, наявного на початку кожного періоду. Тоді

$$U_t = u + \sum_{j=1}^t (P_j + C_j - S_j) = U_{t-1} + P_t + C_t - S_t \quad (5.6)$$

Припустимо, що за даного значення U_{t-1} приріст у процесі капіталу за t -ий рік – випадкова величина $W_t = P_t + C_t - S_t$ залежить лише від U_{t-1} , а не від будь-якого іншого попереднього стану процесу. (Ця особливість робить $\{U_t; t = 1, 2, \dots\}$ марківським процесом.)

Для обчислення ймовірності банкрутства розглянемо ще один процес, який визначається наступним чином. Спершу визначимо

$$W_t^* = \begin{cases} 0, & U_{t-1}^* < 0 \\ W_t, & U_{t-1}^* \geq 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

і

$$U_t^* = U_{t-1}^* + W_t^*, \quad (5.8)$$

де новий процес стартує з $U_0^* = u$. В цьому випадку ймовірність небанкрутства для скінченного горизонту дорівнює

$$\tilde{\phi}(u, \tau) = P(U_\tau^* \geq 0).$$

Після цього досить перевірити U_t^* в момент часу τ , оскільки в разі банкрутства йому не дозволяють набутися невід’ємних значень.

Існують різні методи обчислення ймовірності банкрутства. Один із методів, який завжди доступний – це **моделювання**.

Так само, як може бути змодельований сумарний розподіл витрат, можна змодельовати і процес чистого доходу (капіталу) страхової компанії.

Для дуже складних моделей (наприклад, для медичного страхування, яке включає госпіталізацію, виписані ліки, відвідування пацієнтів, а також і випадкову інфляцію, відсоткові ставки та рівні утилізації), такий шлях може виявитися єдиним.

Для більш простих умов наступний метод дає гарні результати.

5.8 Метод згортки

Для практичного застосування цього методу розподіл всіх випадкових величин має бути дискретним зі скінченною множиною значень. Якщо це не так, то повинні бути побудовані деякі дискретні наближення. Обчислення робляться рекурсивно, використовуючи формули

$$W_t^* = \begin{cases} 0, & U_{t-1}^* < 0 \\ W_t, & U_{t-1}^* \geq 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

і

$$U_t^* = U_{t-1}^* + W_t^*. \quad (5.10)$$

Для простоти позначень, припустимо, що ми знаємо закон розподілу U_{t-1}^* (або маємо припущення щодо нього).

Тоді ймовірність банкрутства

$$\tilde{\psi}(u, t-1) = P(U_{t-1}^* < 0),$$

а розподіл невід'ємних значень капіталу

$$f_j = P(U_{t-1}^* = u_j), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

де $u_j \geq 0$ для всіх j , u_n є максимальним можливим значенням U_{t-1}^* .

Ми припускаємо, що для кожного додатного значення U_{t-1}^* розподіл W_t відомий. Нехай $g_{j,k} = P(W_t = w_{j,k} | U_{t-1}^* = u_j)$. Залишимо відкритою можливість того, що значення W_t можуть залежати від u_j . Тепер можна обчислити ймовірності банкрутства і розподіл для U_t^* через згортку. Спершу визначимо

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(u, t) &= P(U_t^* < 0) = \tilde{\psi}(u, t-1) + P(U_{t-1}^* \geq 0 \text{ та } U_{t-1}^* + W_t < 0) \\ &= \tilde{\psi}(u, t-1) + \sum_{j=1}^n P(U_{t-1}^* + W_t < 0 | U_{t-1}^* = u_j) P(U_{t-1}^* = u_j) \\ &= \tilde{\psi}(u, t-1) + \sum_{j=1}^n P(u_j + W_t < 0 | U_{t-1}^* = u_j) f_j \\ &= \tilde{\psi}(u, t-1) + \sum_{j=1}^n \sum_{w_{j,k} < -u_j} g_{j,k} f_j. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
 P(U_t^* = x) &= P(U_t^* \geq 0 \text{ та } U_{t-1}^* + W_t = x) \\
 &= \sum_{j=1}^n P(U_{t-1}^* \geq 0 \text{ та } U_{t-1}^* + W_t = x | U_{t-1}^* = u_j) P(U_{t-1}^* = u_j) \\
 &= \sum_{j=1}^n P(u_j + W_t = x | U_{t-1}^* = u_j) f_j \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{w_{j,k} + u_j = x} g_{j,k} f_j.
 \end{aligned}$$

Застосування методу згорток буде проілюстровано на відповідному практичному занятті.

Розділ 6

Принципи розрахунку страхових премій. Тарифікація з використанням регресійних моделей. Системи знижок за відсутність позовів

6.1 Принципи розрахунку страхових премій

У попередніх розділах, присвячених основним поняттям теорії банкрутства, ми побачили, що для дослідження ризиків у страхуванні необхідними є такі базові об'єкти:

- 1) u – початковий капітал страхової компанії;
- 2) неспадна послідовність випадкових величин $\tau_0 = 0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_n \leq \dots$ – моментів появи окремих позовів, при цьому різниці $T_n = \tau_n - \tau_{n-1}, n \in \mathbb{N}$, – це часові інтервали між появами позовів;
- 3) загальна кількість позовів, поданих до моменту $t \geq 0$:

$$N(t) = \sup_n \{n \in \mathbb{N}_0 : \tau_n \leq t\},$$

тобто,

$$\{N(t) = n\} = \{\tau_n \leq t < \tau_{n+1}\};$$

- 4) послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$, які є можливими розмірами позовів у моменти τ_n ;
- 5) **процес ризику**

$$S(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n,$$

що визначає сумарні виплати за позовами до моменту $t \geq 0$ ($S(t) = 0$ при $N(t) = 0$);

- 6) **процес суми премій** $\Pi(t)$, одержаних до моменту $t \geq 0$;

7) процес чистого доходу (капіталу) страхової компанії

$$U(t) = u + \Pi(t) - S(t)$$

у момент $t \geq 0$.

Основною мірою ризику в страхуванні традиційно вважається ймовірність банкрутства компанії:

$$1 - P\{U(t) \geq 0, t \in [0, T]\},$$

де T – деякий наперед визначений часовий “горизонт”.

Функція розподілу процесу ризику

$$F_{S(t)}(x) = P\{S(t) < x\} = P\left\{\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n < x\right\}$$

не може бути обчислена без додаткових припущень. Зазвичай вважається, що процес $N(t)$ та послідовність випадкових величин $\{Y_n\}$ незалежні, хоч іноді це не так: при страхуванні автотранспорту взимку аварій більше, ніж влітку через гірший стан дороги, але збитки від них менші через нижчу середню швидкість руху.

Розрахунок премій, або знаходження процесу $\Pi(t)$, є однією з найважливіших та досить складних проблем страховика, бо, з одного боку, вони повинні гарантувати виплати з позовів, а з другого боку – вони мусять враховувати умови конкуренції, коли інші компанії можуть привабити клієнтів такими ж самими гарантіями, але при нижчих преміях. Найчастіше премії $\Pi(t)$ (так звані, *брутто-премії*) на часовому проміжку $[0, t]$ обчислюються у вигляді:

$$\Pi(t) = (1 + \theta)EN(t)EY_1,$$

де $EY_1 = EY_2 = \dots = EY_n$, θ – стала, яка називається коефіцієнтом навантаження. Ця рівність означає, що брутто-премія повинна бути в середньому більшою, ніж кумулятивні виплати за позовами на величину *навантаження* $L(t) = \theta EN(t)EY_1$, яке пов’язане з витратами страховика по веденню справ та його прибутком від цього. Інша частина премії $H\Pi(t) = EN(t)EY_1$ називається *нетто-премією*, а принцип її обчислення, втілений у останній рівності, називається *принципом еквівалентності фінансових зобов’язань* страховика та страхувальника.

Існують інші принципи формування премій, наприклад, система *bonus-malus*, коли власники страхових полісів розподіляються на декілька груп залежно від передісторії подачі позовів, і можуть бути переміщені з однієї групи до іншої. Типовим прикладом є застосування системи *bonus-malus* у

автомобільному страхуванні: якщо власник протягом певного часу не подавав позовів, то він може бути переведений до групи клієнтів, що сплачують меншу премію.

Обчислення адекватної премії полягає у побудові процесу $\Pi(t)$ за функцією розподілу процесу ризику $F_{S(t)}$. При цьому важливо намагатися обчислити премію на основі якомога простіших характеристик процесу ризику: математичного сподівання та дисперсії. Щоб підкреслити вплив ризику на формування премій будемо позначати залежність премій від процесу ризику через $\Pi(S)$.

У сучасній актуарній математиці поширені **такі принципи формування страхових премій**:

- принцип середнього (принцип математичного сподівання):

$$\Pi(S) = (1 + a)ES, \quad a > 0;$$

- принцип дисперсії:

$$\Pi(S) = ES + aDS, \quad a > 0;$$

- принцип стандартного відхилення:

$$\Pi(S) = ES + a\sqrt{DS}, \quad a > 0;$$

- модифікований принцип дисперсії:

$$\Pi(S) = \begin{cases} ES + aDS(ES)^{-1}, & ES > 0, \\ 0, & ES = 0, \end{cases} \quad a > 0;$$

- принцип експоненціальної корисності:

$$\Pi(S) = a^{-1} \ln(Ee^{aS}), \quad a > 0;$$

- квантильний принцип:

$$\Pi(S) = F_S^{-1}(1 - \varepsilon);$$

- принцип абсолютного відхилення:

$$\Pi(S) = ES + aE|S - F_S^{-1}(1/2)|, \quad a > 0;$$

- для заданої функції корисності Υ часто використовують принцип нульової корисності, за яким премію визначають зі співвідношення:

$$E(\Upsilon(\Pi(S) - S)) = \Upsilon(0).$$

З наведеного вище випливає, що в традиційному страхуванні не існує єдиного методу розрахунку премій, що пояснюється історією і практикою страхування. З теоретичної точки зору пояснення такої неоднозначності полягає в тому, що страхові ринки, якщо користуватися термінологією фінансової математики, є неповними та безарбітражними. Подібна неоднозначність призводить і до важливого практичного висновку про існування ризиків, що не підлягають страхуванню.

6.1.1 Тарифікація з використанням регресійних моделей.

Припустимо, що ми маємо $n \in \mathbb{N}$ страхових полісів, з індексами $l = 1, \dots, n$. Ці страхові поліси мають бути достатньо схожими для того, щоб страховий портфель був однорідним і до нього можна було застосувати закон великих чисел. Ідеальний випадок незалежних однаково розподілених ризиків обґрунтовує призначення однакової страхової премії всім полісам. Якщо ж немає ідеальної однорідності, а фактично її ніколи немає, тоді існує два шляхи призначення премій: 1) всі сплачують однакову премію, яка швидше відображає аспекти соціального страхування; 2) індивідуальні премії відображають характеристики конкретних страхових полісів. У цій лекції розглянемо випадок 2).

Запишемо сумарну величину виплат за страховим портфелем у вигляді:

$$S = \sum_{i=1}^N Y_i = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N^{(l)}} Y_i^{(l)} = \sum_{l=1}^n S_l,$$

де незалежні випадкові величини $S_l = \sum_{i=1}^{N^{(l)}} Y_i^{(l)}$ мають складний розподіл Пуассона та описують сумарні величини виплат за окремими страховими полісами, $l = 1, \dots, n$.

На рівні окремого полісу ми маємо призначати нетто-премію (чисту премію без навантажень) виходячи з математичного сподівання сумарної величини виплат за цим полісом:

$$ES_l = n_l \lambda_l EY_1^{(l)} = |\text{нехай } n_l = 1| = \lambda_l EY_1^{(l)},$$

де $\lambda_l > 0$, $Y_i^{(l)} \sim G_l$ – функція розподілу виплат за l -м полісом, і для спрощення приймаємо, що обсяг (експозиція) $n_l = 1$.

У випадку неоднорідного страхового портфеля нетто-премії ES_l зазвичай відрізняються. Визначимо *середню нетто-премію* для всього портфелю так:

$$\mu = \frac{ES}{n} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n ES_l = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \lambda_l EY_1^{(l)}.$$

Тоді кожен поліс описується *характеристикою ризику*

$$\chi^{(l)} = \frac{\lambda_l \mathbb{E}Y_1^{(l)}}{\mu} > 0,$$

яка визначає відносний рівень ціни l -го полісу у порівнянні з середньою ціною у портфелі, та

$$\mathbb{E}S = \sum_{l=1}^n \mathbb{E}S_l = \sum_{l=1}^n \lambda_l \mathbb{E}Y_1^{(l)} = \mu \sum_{l=1}^n \chi^{(l)}.$$

Як наслідок, це вимагає моделювання n різних параметрів характеристик ризику $\chi^{(l)}$, що описують “схильність до претензій (подання вимог на виплату)” кожного окремого поліса, $l = 1, \dots, n$. Оскільки ці “схильності до претензій” точно не відомі, наша мета буде полягати в тому, щоб описати характеристики ризику за допомогою коваріат $\mathbf{z}_l$ (допоміжних змінних, характеристик, незалежних величин), які дають змогу відрізнати поліси. Таким чином, ми припускаємо існування функції регресії:

$$\chi : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{z} \mapsto \chi(\mathbf{z}), \quad (6.1)$$

яка задовольняє властивість $\chi^{(l)} = \chi(\mathbf{z}_l)$ для всіх $l = 1, \dots, n$.

У кращому випадку ці коваріати $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}$ мають причинно-наслідковий зв'язок зі схильністю до претензій, однак у більшості випадків коваріати служать лише посередниками для факторів ризику. Наприклад, в автострахуванні використовують вік водія, тип автомобіля, річний пробіг тощо.

Сучасне ціноутворення у страхуванні має на меті знайти хороший коваріативний простір $\mathbf{Z}$ і відповідну регресійну функцію (6.1), яка служить меті розрізнення страхових полісів (знаходження систематичних ефектів) відносно схильності до претензій. Основна складність регресійного моделювання полягає в тому, щоб знайти хорошу структурну/функціональну форму в (6.1), наприклад, якщо ми знаємо вік водія, як ця інформація повинна входити в $\chi(\cdot)$ і як ця інформація повинна взаємодіяти з іншою інформацією, наприклад, типом автомобіля? Це досить складні питання моделювання, тому розглянемо простіший непараметричний підхід до моделювання.

Для ілюстрації зробимо наступні припущення моделювання.

Припустимо, що

- (а) ми маємо $K = 2$ складові коваріати (допоміжні змінні) в $\mathbf{z}$, та
- (б) будемо використовувати мультиплікативну структуру страхового тарифу.

У підході непараметричного моделювання ми будемо класи ризику (комірки ризику). Для першої коваріатної складової $\mathbf{z}$ вибираємо I міток/рівнів ризику $i \in \{1, \dots, I\}$ та для другої коваріатної складової $\mathbf{z}$ ви-

бираємо J міток/рівнів ризику $j \in \{1, \dots, J\}$. Таким чином, ми отримуємо $M = I \cdot J$ різних категорійних класів ризику (комірок ризику).

Зокрема, це означає, що ми вибираємо коваріатний простір (простір ознак) $\mathbf{Z} = \{1, \dots, I\} \times \{1, \dots, J\}$, а для страхового поліса l , що належить до класу ризику $(i, j) \in \mathbf{Z}$, припускаємо, що він має функцію регресії (6.1), задану як

$$\mathbf{z}_l \mapsto \chi^{(i,j)} = \chi(\mathbf{z}_l) = \chi(i, j),$$

де $\mathbf{z}_l = (i, j) \in \mathbf{Z}$ є коваріатами полісу l , який потрапив до класу ризику (i, j) , та $\chi^{(i,j)}$ описує характеристики ризику цього класу. Нашою метою є встановлення мультиплікативної структури тарифу для цих $K = 2$ допоміжних змінних, тобто, ми припускаємо мультиплікативні систематичні ефекти

$$\chi^{(i,j)} = \chi_{(1,i)} \chi_{(2,j)}, \quad (6.2)$$

де $\chi_{(k,l_k)} > 0$ описує специфіку допоміжної змінної $k = 1, 2$, коли вона пов'язана з міткою ризику l_k .

Тепер треба знайти оптимальні коефіцієнти ціноутворення $\chi_{(k,l_k)} > 0$ у випадку $K = 2$ категорійних коваріатних складових.

Позначимо через $S_{i,j} \geq 0$ сумарну величину виплат у класі ризику (i, j) та через $n_{i,j}$ – кількість полісів у відповідному класі. Тоді

$$\sum_{i,j} S_{i,j} = S, \quad \sum_{i,j} n_{i,j} = n,$$

$$ES_{i,j} = n_{i,j} \frac{ES}{n} \chi^{(i,j)} = n_{i,j} \mu \chi_{1,i} \chi_{2,j}.$$

Для простоти припустимо, що $n_{i,j} > 0$ для всіх класів ризику (i, j) .

Роберт А. Бейлі та Лерой Дж. Саймон у 1960 році запропонували метод, який є досить простим і не мотивованим безпосередньо стохастичною моделлю. Згідно з цим методом параметри μ , $\chi_{1,i}$ та $\chi_{2,j} > 0$ визначаються так, щоб мінімізувати наступний вираз

$$X^2 = \sum_{i,j} \frac{(S_{i,j} - n_{i,j} \mu \chi_{1,i} \chi_{2,j})^2}{n_{i,j} \mu \chi_{1,i} \chi_{2,j}}.$$

Результуючі оцінки цих параметрів використовуються для обчислення індивідуальних нетто-премій відповідно до тих класів ризику, яким належать страхові поліси.

6.2 Системи знижок за відсутність позовів

6.2.1 Системи бонус-малус розрахунку премій з урахуванням попередньої історії подання позовів

Під час прийняття рішення про величину премії, яку повинен заплатити страхувальник, багато страхових компаній використовують інформацію про кількість позовів, заявлених власником поліса протягом попередніх років.

Це дає можливість краще визначити вірогідність того, що власник поліса звернеться з позовом у майбутньому.

Залежно від ступеня ризику в кожному конкретному випадку ставки страхових платежів можуть бути знижені або підвищені шляхом застосування відповідних коефіцієнтів.

Надання знижки за відсутність страхових випадків або навпаки, збільшення тарифу при їх наявності, носить назву *системи бонусів*, принцип якої полягає у вторинній диференціації премії, тобто застосування знижок або надбавок до індивідуальних договорів, які відносяться до однієї однорідної групи за певною ознакою залежно від збитковості, яка склалася для індивідуального клієнта.

Такі системи часто застосовуються при страхуванні автотранспорту, цивільної відповідальності власників транспортних засобів і подібних їм ризиків, в основному пов'язаних із майном чи відповідальністю.

Застосування системи знижок за відсутність страхових випадків іноді називають *системою дисконтування за відсутність вимог виплат* (No claims discount system, NCD-system) або *знижкою за безаварійність*. В європейській страховій традиції такі системи називають *системами бонус-малус* (Bonus-Malus System, BMS), що в перекладі з латині означає “хороший-поганий”.

Надаючи знижку за відсутність страхових випадків, страхова компанія зберігає існуючих клієнтів і залучає нових, які, у свою чергу, сподіваються на надання такої знижки.

За наявності великої кількості вимог від одного страхувальника протягом періоду страхування можливий інший розвиток подій — підвищення тарифів. Розмір знижок безпосередньо залежить від кількості років без позовів від клієнта.

Коли власник поліса вирішує, чи звертатися з позовом, чи ні, він має взяти до уваги вплив позовів на величину премії в наступні роки. Таким чином, однією з причин введення системи знижок є намагання уникнути малих позовів.

Власник поліса не звернеться з позовом, якщо розмір виплати буде мен-

шим, ніж наступне збільшення страхової премії. Отже, система знижок за відсутності вимог виплат зменшує кількість малих позовів до страхової компанії і загальну вартість позовів, що перебиває зменшення надходження премій.

Ще важливішим є зменшення витрат на адміністрування вимог. Чим меншу кількість вимог треба адмініструвати, тим меншими можна зробити нарахування (у премії) на витрати для клієнта. Зменшуючи кількість малих позовів, фірма витісняє позови, вартість адміністрування яких є непропорційно великою. Це робить величини премій даної страхової компанії більш конкурентноспроможними.

У системі бонус-малус виділяють дві частини: дисконтні категорії та правила переходу між категоріями. Щоб дослідити властивості таких систем, треба знати щорічну ймовірність позову для даного клієнта.

6.2.2 Дисконтні категорії

Часто категорії пов'язують із кількістю років без позовів. У той же час правило переходу фактично не пов'язані з кількістю років після позову. Поява вимоги не означає для клієнта відміни знижок: як правило, клієнт просто переходить до іншої категорії з меншим дисконтом.

Приклад 6.1. Розглянемо систему бонус-малус, яка має три категорії:

Категорія	Дисконт, %
0	0
1	25
2	40

У категорії 0 клієнт платить певну премію, розмір якої визначається персонально залежно від індивідуальних особливостей застрахованого (наприклад, віку, статі), які є рейтинговими факторами. Для простоти розглянемо множину застрахованих, яких можна вважати однаковими відносно рейтингових факторів. У цьому разі повна премія однакова для всіх полісів у портфелі.

У категорії 1 власник поліса платить лише 75% повної премії, а в категорії 2 – лише 60%. Якщо застрахований не подає жодного полісу протягом року, то він переходить до наступної категорії (чи залишається у категорії 2). Якщо подано один чи більше позовів, то клієнт переходить на нульовий рівень дисконту.

Зазвичай застосовують п'ять-шість (іноді значно більше) категорій, і позов може спричинити перехід більш ніж на одну категорію.

6.2.3 Матриця переходів

Позначимо очікувану частку власників полісів у j -ій дисконтній категорії, $j = 0, 1, \dots, n$, t -ий рік тривалості договору страхування (чи інший період часу) через $\pi_j(t)$.

$$\pi_0(t) + \pi_1(t) + \dots + \pi_n(t) = 1.$$

Розподіл власників за категоріями зобразимо за допомогою вектора $\boldsymbol{\pi}(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \dots, \pi_n(t))$. Ймовірності того, що власник поліса з категорії i (у даному році) перейде до категорії j (у наступному році) не залежать від моменту часу t і можуть бути зображені за допомогою *матриці перехідних імовірностей*

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \dots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n0} & p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

де p_{ij} , $i, j = 0, \dots, n$, – ймовірність переходу з категорії i до j .

Припустимо, що всі клієнти починають з категорії 0. Тому на початку першого року дії поліса, тобто в момент $t = 0$, $\pi_0(0) = 1$, і розподіл клієнтів за категоріями заданий вектором $\boldsymbol{\pi}(0) = (1, 0, \dots, 0)$. На початку другого року власники полісів будуть перерозподілені по кожній категорії згідно з ймовірностями переходу p_{0j} зі стану 0 в стан j , тобто

$$\boldsymbol{\pi}(1) = (p_{00}, p_{01}, \dots, p_{0n}) = \boldsymbol{\pi}(0)P.$$

Аналогічно,

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(t-1)P = \dots = \boldsymbol{\pi}(0)P^t.$$

Обґрунтуємо цей висновок та проаналізуємо поведінку $\boldsymbol{\pi}(t)$ для великих значень t , використовуючи основні поняття теорії ланцюгів Маркова з дискретним часом і скінченною кількістю станів.

6.2.4 Ланцюги Маркова з дискретним часом і скінченною кількістю станів

Нехай $U = \{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ – деяка скінченна множина, елементи якої будемо називати *станами*. Для простоти $U = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Розглянемо деякий процес, який у момент $t = 0, 1, 2, \dots$ може перебувати в одному із цих станів, а в $t + 1$ перейти в деякий інший стан чи залишитися в попередньому. Кожен такий перехід не є точно визначеним: із певними ймовірностями процес може перейти в один із станів $i \in U$.

Означення 6.1. Якщо ймовірності переходу залежать лише від часу t і стану, в якому перебуває процес в цей час, і не залежать від станів, в яких

процес перебував у моменти $0, 1, 2, \dots, t - 1$, то такий процес називають *ланцюгом Маркова з дискретним часом і скінченною кількістю станів*.

Послідовність дискретних в.в. $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ утворює ланцюг Маркова з дискретним часом, якщо має місце **марківська властивість**

$$\begin{aligned} P(X(t+1) = i_{t+1} | X(t) = i_t, X(t-1) = i_{t-1}, \dots, X(0) = i_0) \\ = P(X(t+1) = i_{t+1} | X(t) = i_t), \quad i_k \in U, k \geq 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Ланцюг Маркова повністю заданий, коли визначений розподіл ймовірностей

$$\pi(0) = (\pi_0(0), \pi_1(0), \dots, \pi_n(0))$$

перебування процесу в станах $k \in U$ у початковий момент часу $t = 0$, тобто $\pi_k(0) = P(X(0) = k)$, та визначені ймовірності

$$p_{ij}(t) = P(X(t+1) = j | X(t) = i)$$

переходу зі стану $i \in U$ в стан $j \in U$ в наступні моменти часу $t = 1, 2, \dots$

Означення 6.2. Якщо ймовірності переходу не залежать від часу (тобто $p_{ij}(t) = p_{ij}$ для довільного t), то такий ланцюг Маркова називають *однорідним*.

Саме однорідні ланцюги Маркова ми і будемо вивчати.

6.2.5 Граф переходів ланцюга Маркова

Поширеним способом візуального задання ланцюга Маркова є граф переходів.

Вершини цього графа ототожнюють зі станами, а орієнтоване ребро з початком у вершині i та кінцем у вершині j , сполучає ці вершини лише у тому випадку, коли ймовірність переходу $p_{ij} \neq 0$. Дану ймовірність переходу також пишуть біля відповідного ребра.

Приклад 6.2. Продовження прикладу

Припустимо, що ймовірністю p власник поліса залишається у категорії 0, з ймовірністю q переходить від першої до другої дисконтної категорії та з ймовірністю s залишається у категорії 2. Тоді матриця перехідних ймовірностей дорівнює

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 1-q & 0 & q \\ 1-s & 0 & s \end{pmatrix},$$

а граф переходів відповідного ланцюга Маркова має вигляд

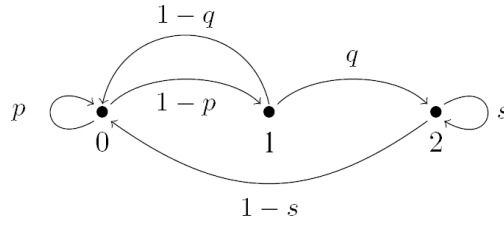


Рис. 6.1: Граф переходів ланцюга Маркова

Теорема 6.1. *Нехай послідовність в.в. $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ утворює однорідний ланцюг Маркова з дискретним часом і скінченною множиною станів $U = \{0, 1, \dots, n\}$ та матрицею перехідних імовірностей $P = (p_{ij})_{i,j=0}^n$. Тоді*

$$P(X(t+1) = k) = \sum_{j \in U} P(X(t) = j) p_{jk}, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Результат цієї теореми можна записати у матричній формі. Нехай вектор

$$\boldsymbol{\pi}(t) = (\pi_0(t), \pi_1(t), \dots, \pi_n(t))$$

визначає розподіл імовірностей перебування процесу в станах $0, 1, \dots, n$ у момент часу t , тобто

$$\pi_k(t) = P(X(t) = k)$$

– ймовірність потрапляння після t переходів у стан k . Тоді твердження теореми 6.1 можна подати у формі

$$\boldsymbol{\pi}(t+1) = \boldsymbol{\pi}(t)P, \quad t \geq 1.$$

Послідовно застосовуючи цю формулу, отримуємо наступну теорему.

Теорема 6.2. *Нехай $\boldsymbol{\pi}(t)$ – розподіл імовірностей перебування ланцюга Маркова $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ на множині станів U в момент часу t , P – матриця перехідних імовірностей. Тоді*

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(0)P^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

6.2.6 Рівняння Колмогорова-Чепмена

Позначимо через

$$p_{ij}^{(t)} = P(X(t) = j | X(0) = i) = P(X(t+s) = j | X(s) = i), \quad s = 0, 1, \dots$$

ймовірності переходу за t кроків зі стану i у стан j . Нехай також

$$P^{(t)} = \{p_{ij}^{(t)}\}$$

– матриця таких перехідних ймовірностей.

Теорема 6.3 (Рівняння Колмогорова-Чепмена).

$$p_{ij}^{(t+s)} = \sum_{u \in U} p_{iu}^{(t)} p_{uj}^{(s)}, \quad (6.4)$$

або, в матричній формі, $P^{(t+s)} = P^{(t)} P^{(s)}$.

Зауваження 6.1. Оскільки $P^{(1)} = P$, то $P^{(k)} = P^k$, що означає, що для однорідних ланцюгів Маркова ймовірності переходу за k кроків $p_{ij}^{(k)}$ є елементами k -их степенів матриці P .

Це зауваження та теорема 6.2 показують, що ключовим у вивченні розподілів перебування процесу на множині станів є вивчення степенів матриці перехідних ймовірностей. Елементи цих степенів самі допускають цікаву ймовірнісну інтерпретацію.

Зокрема, розглянемо в якості початкового вектора $\pi(0)$ вектор, у якого i -та компонента дорівнює 1, а всі інші – 0. Тоді за теоремою 6.2 $\pi(t) = \pi(0)P^t$. Але $\pi(0)P^t$ – це i -ий рядок матриці P^t . Тому i -ий рядок t -ого степеня матриці переходу дає ймовірності перебування в одному з можливих станів у момент t за умови, що процес почався зі стану i .

6.2.7 Ергодична теорема

Означення 6.3. Стан j називають *досяжним зі стану i* , якщо існує момент часу $t = t(i, j)$ такий, що

$$p_{ij}^{(t)} = P(X(t) = j | X(1) = i) > 0.$$

Досяжність j зі стану i позначають $i \rightarrow j$. Якщо $i \rightarrow j$ та $j \rightarrow i$, то використовують позначку $i \leftrightarrow j$.

Дане відношення є відношенням еквівалентності. Відповідно до цього множину станів можна розбити на неперетинні класи еквівалентності.

Означення 6.4. Якщо вся множина станів належить до одного класу еквівалентності, то такий ланцюг Маркова називають *нерозкладним*.

Інакше кажучи, ланцюг Маркова є нерозкладним, якщо з будь-якого його стану можна досягти будь-який інший стан за скінченну кількість переходів.

Наступна теорема описує широкий клас ланцюгів Маркова, які відзначаються так званою властивістю ергодичності: границі

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^{(t)}$$

не тільки існують, не залежать від i , а й утворюють розподіл ймовірностей ($\pi_j \geq 0, \sum_j \pi_j = 1$), причому $\pi_j > 0$ для всіх $j \in U$.

Теорема 6.4 (Ергодична теорема). Нехай $P = (p_{ij})$ – матриця переходних імовірностей ланцюга Маркова зі скінченною множиною станів $U = \{0, 1, \dots, n\}$.

а) Якщо для деякого t_0

$$\min_{i,j} p_{ij}^{(t_0)} > 0, \quad (6.5)$$

то знайдуться числа $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n$ такі, що

$$\pi_j > 0, \quad \sum_{j=0}^n \pi_j = 1, \quad (6.6)$$

причому для довільних станів i та j

$$p_{ij}^{(t)} \rightarrow \pi_j, \quad t \rightarrow \infty. \quad (6.7)$$

б) Навпаки, коли існують числа $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n$, які задовольняють умови (6.6) та (6.7), то знайдеться t_0 таке, що виконується умова (6.5).

в) Числа $(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$ з а) є розв'язками наступної системи рівнянь:

$$\pi_j = \sum_{u=0}^n \pi_u p_{uj}, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (6.8)$$

Якщо граничний розподіл (6.6) заданий вектором

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n),$$

то систему рівнянь (6.8) можна подати у матричній формі:

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P. \quad (6.9)$$

6.2.8 Аналізування стаціонарного стану

Означення 6.5. Кожен розв'язок $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$ рівняння (6.9), який задовольняє умови (6.6), називають *стаціонарним* або *інваріантним розподілом*, іноді – *розподілом рівноваги*.

Пояснити цю назву можна наступним чином. Розглянемо розподіл $\boldsymbol{\pi}$ в якості початкового розподілу $\boldsymbol{\pi}(0)$, тобто $\pi_j(0) = \pi_j$, $j = 0, 1, \dots, n$. Тоді

$$\pi_j(1) = \sum_{u=0}^n \pi_u(0) p_{uj} = \sum_{u=0}^n \pi_u p_{uj} = \pi_j,$$

і взагалі $\pi_j(t) = \pi_j$. Інакше кажучи, якщо в якості початкового розподілу взяти стаціонарний, то він не буде мінятися з часом

$$P(X(t) = j) = P(X(0) = j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Умова (6.5) гарантує існування граничного стаціонарного розподілу $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$. Доведемо єдиність цього розподілу.

Дійсно, нехай $\boldsymbol{\pi}' = (\pi'_0, \pi'_1, \dots, \pi'_n)$ – ще один стаціонарний розподіл. Тоді

$$\pi'_j = \sum_{u=0}^n \pi'_u p_{uj} = \dots = \sum_{u=0}^n \pi'_u p_{uj}^{(t)},$$

та з (6.7) випливає, що

$$\pi'_j = \sum_{u=0}^n \pi'_u \pi_j = \pi_j.$$

Зауваження 6.2. Стаціонарний розподіл імовірностей може існувати і для неергодичних ланцюгів. Дійсно, якщо

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$P^{2t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad P^{2t+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

і, відповідно, границі $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^{(t)}$ не існують. В той же час система рівнянь

$q_j = \sum_{u=0}^1 q_u p_{uj}$, $j = 0, 1$, дає єдиний розв'язок $q_0 = q_1$, який згідно з умовою $q_0 + q_1 = 1$ дорівнює $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Приклад 6.3. Продовження прикладу Нехай імовірність того, що застрахований не звернеться з позовом, дорівнює 0,9. Тоді $\boldsymbol{\pi}$ є розв'язком рівняння

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} 0,1\pi_0 + 0,1\pi_1 + 0,1\pi_2 = \pi_0, \\ 0,9\pi_0 = \pi_1, \\ 0,9\pi_1 + 0,9\pi_2 = \pi_2. \end{cases}$$

Додатково використаємо рівняння $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$, після чого легко отримемо розв'язок $\boldsymbol{\pi} = (0, 1; 0, 09; 0, 81)$.

6.2.9 Неоднорідність портфелю

Один із чинників, який підтверджує доцільність систем бонус-малус, полягає в тому, що вони приводять до автоматичного визначення премій. Інакше кажучи, застрахований, який подає менше позовів, платить меншу премію, ніж той, від кого надходить більше позовів.

Незважаючи на очевидність цього факту, більш глибокі дослідження систем бонус-малус показали, що вони спрацьовують не так добре, як на те сподівалися, і власники полісів сплачують премії, не пропорційні їхній ймовірності подати позов.

Частково це відбувається внаслідок малої кількості дисконтних категорій і відносно низькі рівні запропонованих знижок, а також через невелику ймовірність виникнення позовів (а значить, велику ймовірність для всіх застрахованих на певному етапі досягти максимального рівня дисконту).

Якщо задано ймовірності позовів для всіх застрахованих, то дійсно є можливість математично визначити систему бонус-малус, яка через довгий проміжок часу приведе до того, що застраховані будуть платити нетто-премію, прямо пропорційну їхній ймовірності звернутися з позовом. Проте ця система складна для адміністрування й розуміння.

Наступний приклад демонструє іншу крайність, коли припускають, що існує всього два типи власників полісів і всього три категорії знижок.

Приклад 6.4. Нехай замість того, щоб знати стільки ймовірностей, скільки є застрахованих, маємо лише кращих та гірших водіїв.

Ймовірність позову від кращого водія досить мала і дорівнює, наприклад, 0,1, а від гіршого – удвічі більша. Припустимо також, що дисконтні категорії такі самі, як у попередніх прикладах.

Треба порівняти середні значення премій, які платитимуть кращі та гірші водії після досягнення стаціонарного розподілу.

Стаціонарний розподіл для кращих водіїв обчислено у прикладі: $\pi' = (0, 1; 0, 09; 0, 81)$. Аналогічно для: $\pi'' = (0, 2; 0, 16; 0, 64)$.

Оскільки гірші подають удвічі більше позовів, то природно очікувати, що їх нетто-премія (без адміністративних витрат і навантаження на ризик) у середньому також буде вдвічі більшою (за умови, що розподіл величини виплат однаковий для усіх водіїв). Подивимося, що відбудеться насправді.

Припустимо, що повна премія дорівнює P . Тоді середня нетто-премія для кращих водіїв дорівнює

$$0,1P + 0,09 \cdot 0,75P + 0,81 \cdot 0,6P = 0,6535P,$$

а для гірших $0,2P + 0,16 \cdot 0,75P + 0,64 \cdot 0,6P = 0,704P$. Отже, незважаючи на те, що гірші водії можуть удвічі частіше звертатися з позовами, середня премія, яку вони платять, зовсім не набагато перевищує премію для кращих водіїв.

У цьому простому прикладі максимально доступна знижка недостатня, щоб отримати ідеальну подвоєну премію. Спробуємо підібрати потрібні величини дисконтних знижок. Припустимо, що знижки за категоріями ста-

новлять α та β . Тоді, розв'язуючи рівняння

$$2(0,1 + 0,09(1 - \alpha) + 0,81(1 - \beta)) = 0,2 + 0,16(1 - \alpha) + 0,64(1 - \beta),$$

отримаємо параметричний розв'язок

$$\beta = 1,0204 - 0,0204\alpha > 1, \quad \alpha \in (0, 1)$$

Це означає, що для даної системи бонус-малус ідеальну пропорційну премію отримати неможливо.

Ситуацію можна поліпшити, якщо ввести більше дисконтних категорій, але при цьому, звичайно, система ускладниться.

6.3 Вплив систем бонус-малус на схильність до позовів

Раніше ми припускали, що ймовірність звернення з позовом була однаковою незалежно від того, до якої дисконтної категорії належить застрахований. Коли він вирішує, звертатися з позовом чи ні, то має також враховувати і можливе збільшення **майбутньої премії**.

Розглянемо, наприклад, застрахованого, який сплачує повну премію Π за системою бонус-малус із трьома дисконтними категоріями (див. приклад).

- Якщо за перший рік (або в наступні роки) не було жодного позову, майбутні премії: $0,75\Pi$; $0,6\Pi$; $0,6\Pi$; ...
- Якщо протягом першого року був позов, а в наступні роки – ні, то премії в наступні роки такі: Π ; $0,75\Pi$; $0,6\Pi$; $0,6\Pi$; ...

Отже, додаткова величина, на яку збільшується премія після виникнення позову за умови, що в наступні роки позови не виникнуть, дорівнює

$$\begin{aligned} &\Pi + 0,75\Pi + 0,6\Pi + 0,6\Pi + \dots \\ &- 0,75\Pi - 0,6\Pi - 0,6\Pi - \dots = 0,4\Pi. \end{aligned}$$

Аналогічно значення додаткової премії можна розрахувати для інших дисконтних категорій.

Таким чином, залежно від величини збитків та додаткової премії ймовірність того, що застрахований подасть позов, змінюється та стає різною для різних категорій. Цю різницю можна обчислити, розглядаючи виплати включно по той рік, у якому досягається максимальний дисконт.

Можливо, що застрахований не буде заглядати далеко в майбутнє, розуміючи, що все одно може подати принаймні один позов протягом цього періоду.

Кількість років, які він бере до уваги, називають *горизонтом застрахованого*.

Очевидно, ймовірність подання позову залежить від горизонту застрахованого.

Табл. 6.1: Пункт 8.1 статті 8 в редакції Закону N 2902-IV від 22.09.2005

Клас на початок строку страхування	Коефіцієнт	Клас по закінченню строку страхування з урахуванням наявності страхових випадків з вини страхувальника			
		0 страхових виплат	1 страхова виплата	2 страхові виплати	3 страхові виплати
М	2.45	0	М	М	М
0	2.3	1	М	М	М
1	1.55	2	М	М	М
2	1.4	3	1	М	М
3	1	4	1	М	М
4	0.95	5	2	М	М
5	0.9	6	3	1	М
6	0.85	7	4	1	М
7	0.8	8	4	1	М
8	0.75	9	5	2	М
9	0.7	10	5	2	1
10	0.65	11	6	2	1
11	0.6	12	6	2	1
12	0.55	13	6	2	1
13	0.5	13	7	2	1

6.4 Витяг із Закону України “Про обов’язкове страхування цивільно-правової відповідальності ...”

Стаття 8. Бонус-малус

8.1. Для заохочення безаварійної експлуатації транспортних засобів, при укладанні договорів обов’язкового страхування цивільно-правової відповідальності більше ніж на півроку, страховики мають право застосовувати коефіцієнт страхових тарифів залежно від наявності чи відсутності страхових випадків з вини осіб, відповідальність яких застрахована, в період дії попередніх договорів обов’язкового страхування цивільно-правової відповідальності (бонус-малус), який розраховується кожним із страховиків з урахуванням положень пункту 8.1 статті 8 цього Закону.

8.2. При укладанні договору обов’язкового страхування цивільно-правової відповідальності страхувальнику присвоюється клас залежно від частоти страхових випадків, які виникли з вини особи, відповідальність якої застрахована.

8.3. При укладанні договору обов’язкового страхування цивільно-правової відповідальності вперше страхувальнику присвоюється клас 3.

8.4. Залежно від кількості страхових випадків, які виникли у період дії попередніх договорів обов’язкового страхування цивільно-правової відповідальності при укладанні з ним такого договору на новий строк, застосовується підвищуючий коефіцієнт страхового тарифу з присвоєнням більш низького класу до найнижчого - М чи з урахуванням безаварійної екс-

плати за експлуатацію транспортного засобу та при відсутності страхових випадків, які виникли з вини страхувальника, - понижуючий коефіцієнт з присвоєнням більш високого класу.

Розділ 7

Методи розрахунку резервів

7.1 Вступ

Важливим напрямком актуарної діяльності є розрахунок резервів, необхідних для ефективної роботи страхової компанії та забезпечення її платоспроможності. У цій лекції основну увагу приділимо проблемі аналізу інформації і розрахунку резервів у випадку так званих **IBNR (incurred but not reported)** даних, тобто, даних відносно **збитків, які виникли, але не заявлені**.

Розрахунок резервів у випадку збитків, що виникли, але не заявлені, потрібен тоді, коли між виникненням страхової події і остаточним визначенням величини позову та розміру страхового відшкодування проходить деякий час.

Існує багато причин затримки точної інформації щодо остаточної суми відшкодування збитків. Запізнення може виникати у період від моменту настання страхової події до подачі позову, а також у період від подання позову і остаточним відшкодуванням збитків за позовами.

Про важливість розробки методів для розрахунку резервів у випадку збитків, які виникли, але не заявлені, свідчить той факт, що державна комісія з регулювання ринку фінансових послуг, яка 17.02.2004 р. прийняла розпорядження №3104 “МЕТОДИКА формування страхових резервів за видами страхування, іншими, ніж страхування життя”, включила туди спеціальний розділ “Методи розрахунку збитків, які виникли, але не заявлені”.

Ця Методика встановлює порядок формування страхових резервів за видами страхування, іншими, ніж страхування життя, а саме технічних резервів за договорами страхування, співстрахування та перестрахування.

7.2 Склад технічних резервів

Згідно з вказаною *Методикою* (<https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0019-05#Text>)

1. Страховики, які здійснюють види страхування, інші, ніж страхування життя, зобов'язані за видами страхування формувати і вести облік таких технічних резервів:

- незароблених премій (резерви премій), що включають частки від сум надходжень страхових платежів (страхових внесків, страхових премій), що відповідають страховим ризикам, які не минули на звітну дату;
- збитків, що включають зарезервовані несплачені страхові суми та страхові відшкодування за відомими вимогами страхувальників, з яких не прийнято рішення щодо виплати або відмови у виплаті страхової суми чи страхового відшкодування.

2. Крім технічних резервів, визначених пунктом 1, страховики додатково можуть прийняти рішення про запровадження з початку календарного року за методикою, наведеною у цій Методиці, формування і ведення обліку таких технічних резервів за видами страхування, іншими, ніж страхування життя:

- резерв збитків, які виникли, але не заявлені;
- резерв катастроф;
- резерв коливань збитковості.

3. Страховики, які отримали ліцензію на провадження діяльності з обов'язкового страхування цивільно-правової відповідальності власників наземних транспортних засобів, крім резервів, передбачених пунктом 1 цього розділу, **в обов'язковому порядку формують та ведуть облік резерву збитків, які виникли, але не заявлені, та страхового резерву коливань збитковості** за цим видом страхування.

4. Страховики, які отримали ліцензію на провадження діяльності з обов'язкового страхування цивільної відповідальності оператора ядерної установки за ядерну шкоду, що може бути заподіяна внаслідок ядерного інциденту, та є членами Ядерного страхового пулу, зобов'язані вести облік **резерву катастроф** за цим видом страхування.

7.3 Формування резерву незароблених премій

Резерв незароблених премій (unearned premium reserve) включає частки від сум надходжень страхових платежів, що відповідають стра-

ховим ризикам, які не минули на звітну дату.

Розрахунок розміру резерву незароблених премій здійснюється за кожним видом страхування окремо. Загальний розмір резерву незароблених премій дорівнює сумі розмірів резервів незароблених премій, розрахованих окремо за кожним видом страхування.

Розрахунок розміру резерву незароблених премій здійснюється на будь-яку звітну дату методом, визначеним Законом України «Про страхування» (метод «1/4»), а саме:

- розмір резервів незароблених премій на будь-яку звітну дату встановлюється залежно від часток надходжень сум страхових платежів (страхових премій, страхових внесків), які не можуть бути меншими ніж 80 відсотків загальної суми надходжень страхових платежів, з відповідних видів страхування у кожному місяці з попередніх дев'яти місяців і обчислюється в такому порядку:
- частки надходжень сум страхових платежів за перші три місяці розрахункового періоду множаться на одну четверту;
- частки надходжень сум страхових платежів за наступні три місяці розрахункового періоду множаться на одну другу;
- частки надходжень сум страхових платежів за останні три місяці розрахункового періоду множаться на три четвертих;
- одержані добутки додаються.

Тут розрахунковий період становить дев'ять місяців.

У разі якщо на дату розрахунку резервів незароблених премій з відповідних видів страхування «методом 1/4» страховик не має діючих договорів страхування та протягом останнього кварталу, що передує даті розрахунку, страховик не укладав договори страхування, а розрахункове значення таких резервів є додатнім, резерви незароблених премій з відповідних видів страхування приймаються рівними нулю.

Також страховик може прийняти рішення про запровадження формування і ведення обліку резерву незароблених премій одним з таких методів:

- 1) метод «1/365» («pro rata temporis»);
- 2) метод «1/24» («паушальний» метод);
- 3) метод «коефіцієнта збитковості».

Обраний метод розрахунку резерву незароблених премій страховик застосовує за всіма чинними протягом календарного року договорами страхування з виду страхування, щодо якого розраховується такий резерв.

Незароблена страхова премія, яка розраховується **методом «1/365» («pro rata temporis»)**, визначається за кожним договором як добуток

надходжень сум страхових платежів та результату, отриманого від ділення строку страхового покриття, який ще не минув на дату розрахунку (у днях), на весь строк страхового покриття (у днях).

Розмір резерву незароблених премій, який розраховується **методом «1/24»**, на будь-яку дату за групою договорів визначається як надходження сум страхових платежів з відповідних видів страхування та коефіцієнтів для його обчислення.

Для розрахунку резерву незароблених премій методом «1/24» договори групуються:

- за видами страхування;
- за датами початку строку страхового покриття, які припадають на однакові місяці;
- за строками страхового покриття (у місяцях).

У разі застосування такого методу строк страхового покриття не може встановлюватися менше ніж один місяць.

Припускається, що:

- строк страхового покриття припадає на середину місяця (15 число);
- строк страхового покриття, який не дорівнює цілому числу місяців, дорівнює найближчому більшому цілому числу місяців.

Загальна сума надходжень страхових платежів за договорами, які належать до однієї групи договорів, визначається їх підсумовуванням.

Резерв незароблених премій розраховується за кожною групою договорів як добуток загальної суми надходжень страхових платежів за договорами на коефіцієнти для розрахунку цього резерву.

Коефіцієнт для кожної групи договорів визначається як відношення строку страхового покриття такої групи, який не минув на дату розрахунку резерву незароблених премій (у половинах місяців), до всього строку страхового покриття групи (у половинах місяців).

Резерв незароблених премій методом «1/24» в цілому за видом страхування визначається шляхом підсумовування резервів незароблених премій за групами договорів.

Розмір резерву незароблених премій, який розраховується **методом «коефіцієнта збитковості»**, на будь-яку дату визначається для виду страхування (або для групи договорів) як сумарний розмір добутків незаробленої страхової премії за кожним договором, що діє на дату розрахунку, на суму коефіцієнта збитковості і коефіцієнта аквізиційних та адміністративних витрат для такого виду страхування.

Коефіцієнт збитковості за видом страхування розраховується за такою формулою:

$$КЗ = \frac{ФВ + ВВ + (РЗЗк - РЗЗп) + (РЗНЗк - РЗНЗп)}{\Pi + РНПп^0 - РНПк^0}$$

де ФВ – фактичні виплати - вимоги, які врегульовано протягом розрахункового періоду шляхом здійснення страхових виплат - як ті, що фактично виплачені страховиком, так і ті, що обліковуються у страховика як його кредиторська заборгованість за страховими виплатами, у розрахунковому періоді;

ВВ – витрати на врегулювання збитків у розрахунковому періоді;

РЗЗп, РЗЗк – розмір резерву заявлених, але не виплачених збитків на початок і кінець розрахункового періоду;

РЗНЗп, РЗНЗк – розмір резерву збитків, які виникли, але не заявлені на початок і кінець розрахункового періоду;

П – надходження сум страхових платежів протягом розрахункового періоду;

РНПп⁰, РНПк⁰ – величина резерву незароблених премій на початок і кінець розрахункового періоду, обчислена методом «1/365» («pro rata temporis»).

7.4 Резерв заявлених, але не виплачених збитків

Резерв заявлених, але не виплачених збитків (reported but not settled claims reserve - RBNS), - оцінка обсягу зобов'язань страховика для здійснення страхових виплат (страхового відшкодування) за заявленими вимогами, включаючи витрати на врегулювання збитків, які не врегульовано або врегульовано не в повному обсязі на дату розрахунку та виникли у зв'язку з подіями, що мали ознаки страхових випадків, які мали місце в розрахунковому або попередніх періодах, та про факт настання яких страховика повідомлено відповідно до вимог законодавства України та/або умов договору.

Розмір резерву заявлених, але не виплачених збитків, страховик (цедент, перестраховувальник) визначає за кожним видом страхування з урахуванням умов відповідних договорів на підставі заявлених вимог, отриманих у будь-якій формі (письмова заява, факсимільне повідомлення тощо), залежно від сум фактично зазнаних або очікуваних страхувальниками (та/або іншими особами, визначеними законодавством або договором страхування) збитків (шкоди) у результаті настання події, що має ознаки страхового випадку.

Розмір резерву заявлених, але не виплачених збитків, визначається як сума резервів заявлених, але не виплачених збитків, розрахованих за всіма видами страхування.

7.5 Резерв збитків, які виникли, але не заявлені

Резерв збитків, які виникли, але не заявлені (incurred but not reported claims reserve - IBNR), - оцінка обсягу зобов'язань страховика для здійснення страхових виплат, включаючи витрати на врегулювання збитків, які виникли у зв'язку зі страховими випадками у розрахунковому та попередніх періодах, про факт настання яких страховику не було заявлено на звітну дату в установленому законодавством та/або договором порядку.

Розрахунок резерву збитків, які виникли, але не заявлені, здійснюється за кожним видом страхування окремо. Розмір резерву збитків, які виникли, але не заявлені, визначається як сума резервів збитків, які виникли, але не заявлені, розрахованих за всіма видами страхування.

Розрахунок резерву збитків, які виникли, але не заявлені, здійснюється із застосуванням актуарних методів для аналізу розвитку збитків у страхуванні або методом фіксованого відсотка.

До актуарних методів належать:

- метод ланцюгових сходів, або ланцюговий метод (Chain Ladder method);
- метод Борнхуеттера-Фергюсона (Bornhuetter-Ferguson);
- метод Кейп-Код (Cape Code);
- Мюнхенський ланцюговий метод (Munich Chain Ladder);
- модифікація вищезазначених актуарних методів;
- лінійна комбінація вищезазначених актуарних методів.

7.6 Метод ланцюгових сходів

Метод ланцюгових сходів дуже популярний у актуаріїв-практиків.

Збитки, які виникли, але не заявлені, зустрічаються у різних типах страхування, коли може пройти певний час між виникненням страхової події та остаточним визначенням розміру відшкодування.

При використанні методу ланцюгових сходів зручно зображати дані щодо позовів у формі трикутників. Такі трикутники називають **трикутниками розвитку** або **«run-off» трикутниками**.

Будемо називати:

- **рік настання збитків (рік події)** – це той рік, у якому відбулася страхова подія і у страховика виник ризик;
- **період розвитку або запізнення** – це кількість років до виплати.

Введемо позначення: нехай S_{ij} , $1 \leq i \leq n$ – це сумарна виплата в j -ому році розвитку за страховими випадками, які відбулися в i -ому році настання збитків. Тоді за n років стають відомими значення S_{ij} , для яких $i + j \leq n + 1$. Ці значення і утворюють «run-off» трикутник.

Загальну форму «run-off» трикутника можна зобразити наступним чином.

Табл. 7.1: «Run-off» трикутник – трикутник розвитку

Рік настання збитків	Рік розвитку							
	1	...	j	...	...	...	$n-1$	n
1	S_{11}	...	S_{1j}	...	...	...	$S_{1,n-1}$	$S_{1,n}$
...	...	...	...	...	...	...		
i	S_{i1}	...	S_{ij}	...	...	$S_{i,n-i+1}$		
...	...	...	...	...				
...	...	...	...					
...	...	...	$S_{n-j+1,j}$					
$n-1$	$S_{n-1,1}$							
n	$S_{n,1}$							

Величина $S_i = \sum_{j=1}^n S_{ij}$ є сумарним збитком i -го року події. На даний момент є відомою лише частина сумарного збитку $\sum_{j=1}^{n-i+1} S_{ij}$.

Наше завдання – оцінити невідому частину $R_i = \sum_{j=n-i+2}^n S_{ij}$, де R_i – розмір необхідного резерву i -го року настання збитків, тобто доповнити трикутник до прямокутника.

Інколи трикутники будують в іншій формі.

Позначимо C_{ij} , $1 \leq i \leq n$ – сумарні (кумулятивні, накопичені) виплати (збитки), сплачені на кінець j -го року розвитку за страховими випадками, які відбулися в i -ому році настання збитків. Аналогічно до попереднього будується трикутник.

Табл. 7.2: Трикутник розвитку зі значеннями сумарних виплат

Рік настання збитків	Рік розвитку							
	1	...	j	...	...	...	$n-1$	n
1	C_{11}	...	C_{1j}	...	...	...	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
...	...	...	...	...	...	...		
i	C_{i1}	...	C_{ij}	...	...	$C_{i,n-i+1}$		
...	...	...	...	...				
...	...	...	...					
...	...	...	$C_{n-j+1,j}$					
$n-1$	$C_{n-1,1}$							
n	$C_{n,1}$							

Зрозуміло, що

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^j S_{ik},$$

а

$$S_{ij} = C_{ij} - C_{i,j-1}.$$

Тоді

$$R_i = \sum_{j=n-i+2}^n S_{ij} = \sum_{j=n-i+2}^n (C_{ij} - C_{i,j-1}) = C_{in} - C_{i,n-i+1}$$

Існують два основних типи трикутників:

1. трикутник сплачених збитків – трикутник, зіставлений з даних, які позначають суму сплачених збитків за k років. Тут значення завжди невід’ємні.
2. трикутник заявлених збитків – трикутник, зіставлений з даних, які позначають суму сплачених збитків за k років та сформованих до цього моменту резервів заявлених збитків. В цьому випадку значення в трикутнику можуть бути від’ємними.

Трикутник сплачених збитків, порівняно з трикутником заявлених збитків, є більш надійним для розрахунків, але для оцінки кінцевих збитків необхідна більша кількість років.

Різниця трикутника заявлених збитків і трикутника сплачених збитків представляє собою трикутник розвитку.

Метод ланцюгових сходів базується на ряді припущень. Сформулюємо перше з них:

- 1) Розподіл кінцевого збитку для всіх років настання події однаковий.

Представимо сумарний збиток для i -го року

$$S_i = \sum_{j=1}^n S_{ij} = C_{in}$$

у вигляді:

$$C_{in} = C_{i1} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} F_{ij},$$

де

$$F_{ij} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}$$

– коефіцієнт зростання (фактор розвитку, відношення зв’язку) сумарних виплат від j -го року до $(j+1)$, який використовують для прогнозування майбутніх виплат.

Таке представлення можливе тільки якщо $C_{ij} > 0$ для $\forall i, j$. В іншому випадку добуток треба починати з першого додатного C_{ij} .

Тоді перше припущення, що розподіл кінцевого збитку для всіх років настання події однаковий, можна трактувати як незалежність математичного сподівання F_{ij} від року настання збитків i . Тобто,

$$E(F_{ij}) = f_j,$$

для $\forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1$,

де f_j – це середній приріст збитків при переході від j -го до $(j+1)$ року (множники розвитку).

У методі ланцюгових сходів оцінки параметрів f_j визначають так:

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij} F_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}},$$

для $\forall 1 \leq j \leq n-1$.

Сумарний збиток оцінюється наступним чином:

$$\hat{C}_{in} = C_{i,n-i+1} \hat{f}_{n-i+1} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1}$$

для $\forall 2 \leq i \leq n$.

А резерв:

$$\hat{R}_i = C_{i,n-i+1} (\hat{f}_{n-i+1} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1} - 1).$$

Таким чином, прогноз ґрунтується лише на поточному рівні збитку $C_{i,n-i+1}$ року події i .

Розглянемо інші припущення.

- 2) Роки настання збитків $\{C_{i1}, \dots, C_{in}\}$ - незалежні.
- 3) Існують множники розвитку $f_j, 1 \leq j \leq n-1$ такі, що

$$E\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} \middle| C_{i1}, \dots, C_{ij}\right) = f_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1,$$

при $C_{ij} > 0$, або, що те саме,

$$E(C_{i,j+1} | C_{i1}, \dots, C_{ij}) = C_{ij} f_j.$$

Тобто, умовне математичне сподівання $C_{i,j+1}$ залежить лише від $C_{i,j}$ і не залежить від попередніх станів.

Позначимо $G = \{C_{ij} | i+j \leq n+1\}$ – накопиченні до поточного часу дані.

Теорема 7.1. Якщо виконуються припущення 2 і 3, тобто роки настання збитків $\{C_{i1}, \dots, C_{in}\}$ незалежні та $\exists f_j, 1 \leq j \leq n-1$:

$$E\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} \middle| C_{i1}, \dots, C_{ij}\right) = f_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1,$$

при $C_{ij} > 0$, то

$$1) \quad E(C_{in}|G) = C_{i,n-i+1}f_{n-i+1} \cdot \dots \cdot f_{n-1}, 1 \leq i \leq n.$$

2) Оцінки

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}}$$

є незміщеними і некорельованими, причому:

$$E(\hat{f}_{n-i+1} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1}) = f_{n-i+1} \cdot \dots \cdot f_{n-1}.$$

Доведення.

Позначимо $G_i = \{C_{ij} | 1 \leq j \leq n - i + 1\}$.

Тоді

$$\begin{aligned} E(C_{in}|G) &= E(C_{in}|G_i) \\ &= E(E(C_{in}|C_{i1}, \dots, C_{i,n-1})|G_i) \\ &= E(C_{i,n-1}f_{n-1}|G_i) \\ &= f_{n-1} \cdot E(C_{i,n-1}|G_i). \end{aligned}$$

Далі проробимо аналогічні дії для $E(C_{i,n-1}|G_i)$. Отримаємо:

$$E(C_{i,n-1}|G_i) = f_{n-1} \cdot f_{n-2} \cdot E(C_{i,n-2}|G_i).$$

Продовжуючи далі, за методом математичної індукції отримаємо:

$$E(C_{in}|G) = E(C_{i,n-i+1}|G_i) f_{n-i+1} \cdot \dots \cdot f_{n-1} = C_{i,n-i+1}f_{n-i+1} \cdot \dots \cdot f_{n-1}.$$

Отже, умову 1) теореми доведено.

2) Спочатку доведемо незміщеність $\hat{f}_j$.

Позначимо $B_j = \{C_{ik} | k \leq j, i + k \leq n + 1\}$, $1 \leq j \leq n$.

Оскільки виконуються припущення 2 і 3, то маємо, що

$$E(C_{i,j+1}|B_j) = C_{i,j}f_j, 1 \leq i \leq n - j + 1.$$

Тоді

$$\begin{aligned} E(\hat{f}_j|B_j) &= E\left(\frac{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j} C_{ij}} \middle| B_j\right) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} E(C_{i,j+1}|B_j)}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{f_j \cdot \sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}} = f_j.$$

Значить,

$$E(\hat{f}_j) = E(E(\hat{f}_j | B_j)) = f_j.$$

Отже, оцінка є незміщеною.

Тепер доведемо некорельованість.

Візьмемо $k \leq j$. Отримаємо:

$$E(\hat{f}_j \hat{f}_k) = E(E(\hat{f}_j \hat{f}_k | B_j)) = E(\hat{f}_k E(\hat{f}_j | B_j)) = f_j \cdot E(\hat{f}_k) = f_j f_k,$$

що і доводить некорельованість оцінок $\hat{f}_j$ та $\hat{f}_k$, $k \leq j$.

Доведемо рівність:

$$E(\hat{f}_{n-i+1} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1}) = f_{n-i+1} \cdot \dots \cdot f_{n-1}.$$

Вона отримується методом математичної індукції з попереднього:

$$\begin{aligned} E(\hat{f}_{n-i+1} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1}) &= E(E(\hat{f}_{n-i+1} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1} | B_{n-1})) \\ &= E(\hat{f}_{n-i+1} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-2} E(\hat{f}_{n-1} | B_{n-1})) = \\ &= f_{n-1} \cdot E(\hat{f}_{n-i+1} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-2}) = \dots = f_{n-i+1} \cdot \dots \cdot f_{n-1}. \end{aligned}$$

Отже, умову 2) теореми доведено.

Зауваження. Аналогічно доводиться некорельованість F_{ij} для кожного фіксованого року збитків i , $1 \leq j \leq n$.

7.6.1 Точність методу ланцюгових сходів

Резерв збитку R_i має бути оцінений величиною $\hat{R}_i$, яка буде мінімізувати середнє квадратичне відхилення прогнозу від дійсного значення – середню квадратичну похибку. Ми будемо розглядати умовну середню квадратичну похибку при заданому G :

$$E\left(\left(R_i - \hat{R}_i\right)^2 \middle| G\right),$$

бо нас цікавлять тільки майбутні відхилення, а безумовна середня квадратична похибка усереднила б відхилення по всім можливим наборам G :

$$E\left(R_i - \hat{R}_i\right)^2 = E\left(E\left(\left(R_i - \hat{R}_i\right)^2 \middle| G\right)\right).$$

Позначимо:

$$mse(\hat{R}_i) = E \left(\left(R_i - \hat{R}_i \right)^2 \middle| G \right)$$

– середньо квадратичну похибку $\hat{R}_i$.

Теорема 7.2. *Середньо квадратичні похибки $mse(\hat{R}_i)$ та $mse(\hat{C}_{in})$ однакові.*

Доведення.

Оскільки

$$R_i = C_{in} - C_{i,n-i+1}$$

і

$$\hat{R}_i = C_{i,n-i+1} \left(\hat{f}_{n-i+1} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1} - 1 \right) = \hat{C}_{in} - C_{i,n-i+1},$$

то маємо, що

$$\begin{aligned} mse(\hat{R}_i) &= E \left(\left(R_i - \hat{R}_i \right)^2 \middle| G \right) \\ &= E \left(\left(C_{in} - C_{i,n-i} - \hat{C}_{in} + C_{i,n-i} \right)^2 \middle| G \right) = \\ &= E \left(\left(C_{in} - \hat{C}_{in} \right)^2 \middle| G \right) = mse(\hat{C}_{in}). \end{aligned}$$

Тобто,

$$mse(\hat{R}_i) = mse(\hat{C}_{in}),$$

що і треба було довести.

Має місце рівність

$$E \left((X - g(Y))^2 \middle| Y \right) = D(X|Y) + (E(X|Y) - g(Y))^2,$$

де

$$\begin{aligned} D(X|Y) &= Cov(X, X|Y) = \\ &= E \left((X - E(X|Y))^2 \middle| Y \right). \end{aligned}$$

Використавши попереднє, маємо:

$$mse(\hat{C}_{in}) = E \left(\left(C_{in} - \hat{C}_{in} \right)^2 \middle| G \right) = D(C_{in}|G) + \left(E(C_{in}|G) - \hat{C}_{in} \right)^2.$$

Тепер сформулюємо четверте припущення методу ланцюгових сходів. Це припущення зумовлено тим, що мінімальне значення дисперсії оцінки

$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} \omega_{ij} C_{i,j+1}}{C_{ij}}$ з вагами $\omega_{ij} = \frac{C_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}}$, $1 \leq i \leq n-j+1$, досягається, коли ваги обернено пропорційні дисперсіям $D\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} \middle| C_{ij}\right)$ при фіксованому j (тобто дисперсія $D\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} \middle| C_{ij}\right)$ прямо пропорційна $\frac{1}{C_{ij}}$). Це впливає з наступної теореми.

Теорема 7.3. *Нехай $T_1, \dots, T_n$ – незалежні незміщені оцінки величини t , тобто $E(T_k) = t$ для $\forall 1 \leq k \leq n$, і нехай $T = \omega_1 T_1 + \dots + \omega_n T_n$ – лінійна комбінація оцінок, причому $\omega_1 + \dots + \omega_n = 1$, тобто $E(T) = t$. Тоді серед всіх можливих лінійних комбінацій виду T мінімальну дисперсію має комбінація з вагами ω_k обернено пропорційними до $D(T_k)$, тобто $\omega_k = \frac{\omega}{D(T_k)}$ для $\forall 1 \leq k \leq n$.*

На основі сказаного вище, отримуємо таке припущення:

1. Існують постійні коефіцієнти пропорційності $\sigma_1^2, \dots, \sigma_{n-1}^2$ такі, що при $C_{ij} > 0$: $D\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} \middle| C_{i1}, \dots, C_{ij}\right) = \frac{\sigma_j^2}{C_{ij}}$, для $\forall 1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n-1$, або $D(C_{i,j+1} | C_{i1}, \dots, C_{ij}) = C_{ij} \cdot \sigma_j^2$.

Оцінка невідомого параметра σ_j^2 має такий вигляд:

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{ij} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} - \hat{f}_j \right)^2, \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

Виведемо звідси наведену раніше формулу для оцінки $\hat{f}_j$. Вона впливає з умови мінімальності $\hat{\sigma}_j^2$:

$$\frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} - \hat{f}_j \right)^2 \rightarrow \min.$$

Очевидно, що це рівносильно наступному:

$$\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} - \hat{f}_j \right)^2 \rightarrow \min.$$

Розглянемо цю суму:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} - \hat{f}_j \right)^2 &= \sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij} \left(\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} \right)^2 - 2\hat{f}_j \cdot \frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} + (\hat{f}_j)^2 \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-j+1} \frac{(C_{i,j+1})^2}{C_{ij}} - \sum_{i=1}^{n-j+1} 2\hat{f}_j C_{i,j+1} + \sum_{i=0}^{n-j} C_{ij} (\hat{f}_j)^2 = \end{aligned}$$

$$= (\hat{f}_j)^2 \sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij} - 2\hat{f}_j \sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j+1} + \sum_{i=1}^{n-j+1} \frac{(C_{i,j+1})^2}{C_{ij}}.$$

Найменше значення досягається, коли $\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}}$. Отже, отримали формулу, яку наводили раніше.

Теорема 7.4. *Нехай виконуються припущення 2, 3 і 4. Тоді середньо квадратична похибка оцінки резерву $\hat{R}_i$ за методом ланцюгових сходів оцінюється величиною*

$$mse(\hat{R}_i) = \hat{C}_{in}^2 \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{ij}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{kj}} \right),$$

де

$$\hat{C}_{ij} = C_{i,n-i+1} \hat{f}_{n-i+1} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{j-1}, j > n - i + 1.$$

Для спрощення запису приймемо, що $\hat{C}_{i,n-i} = C_{i,n-i}$.

Доведення.

Має місце формула

$$mse(\hat{R}_i) = mse(\hat{C}_{in}) = D(C_{in}|G) + (E(C_{in}|D) - \hat{C}_{in})^2.$$

Позначимо $G_{ij} = \{C_{ik} | 1 \leq k \leq j\}$.

Тоді, за другим припущенням, перший доданок дорівнює

$$D(C_{in}|G) = D(C_{in}|G_{i,n+1-i}).$$

Застосуємо рекурсивну формулу, яка виконується при $j \geq n + 1 - i$

$$\begin{aligned} D(C_{i,j+1}|G_{i,n+1-i}) &= \\ &= E(D(C_{i,j+1}|G_{ij})|G_{i,n+1-i}) + D(E(C_{i,j+1}|G_{ij})|G_{i,n+1-i}) = \\ &= E(C_{ij}|G_{i,n+1-i})\sigma_j^2 + D(C_{ij}|G_{i,n+1-i})f_j^2 \end{aligned}$$

та рівність $E(C_{i,j+1}|G_{i,n+1-i}) = E(C_{ij}|G_{i,n+1-i})f_j$. Враховуючи, що $E(C_{i,n+1-i}|G_{i,n+1-i}) = C_{i,n+1-i}$ і $D(C_{i,n+1-i}|G_{i,n+1-i}) = 0$,

отримаємо

$$\begin{aligned} D(C_{in}|G_{i,n+1-i}) &= \sum_{j=n+1-i}^{n-1} E(C_{ij}|G_{i,n+1-i})\sigma_j^2 f_{j+1}^2 \cdot \dots \cdot f_{n-1}^2 = \\ &= C_{i,n+1-i} \sum_{j=n+1-i}^{n-1} f_{n+1-i} \cdot \dots \cdot f_{j-1} \sigma_j^2 f_{j+1}^2 \cdot \dots \cdot f_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Якщо замінити невідомі параметри f_j, σ_j^2 незміщеними оцінками $\hat{f}_j$ і $\hat{\sigma}_j^2$, то знайдемо оцінку для дисперсії $D(C_{in}|G)$:

$$\begin{aligned} C_{i,n+1-i} & \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \hat{f}_{n+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{j-1} \sigma_j^2 f_{j+1}^2 \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1}^2 = \\ & = \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \hat{C}_{ij} \hat{\sigma}_j^2 \hat{f}_{j+1}^2 \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1}^2 = \hat{C}_{in}^2 \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2 \hat{C}_{ij}}. \end{aligned}$$

У другому доданку виразу для $mse(\hat{R}_i)$

$$\left(E(C_{in}|G) - \hat{C}_{in}\right)^2 = C_{i,n+1-i}^2 \left(f_{n+1-i} \cdot \dots \cdot f_{n-1} - \hat{f}_{n+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1}\right)^2$$

не можемо замінити параметри f_j оцінками, бо отримаємо нуль, хоча значення цього доданку майже завжди відмінні від нуля.

Для оцінки другого доданку ми не будемо вважати спостереження заданими, а тому незмінними. Але варіювати будемо не весь трикутник G , а тільки необхідну для цього частину, щоб базис $C_{i,n+1-i}$ похибки $\left(E(C_{in}|G) - \hat{C}_{in}\right)^2$ не використовувався у наступній побудові математичного сподівання.

Позначимо $B_j = \{C_{ik} | i+k \leq n+1, k \leq j\}, 1 \leq j \leq n$.

Використовуючи рівності, отримані вище,

$$\begin{aligned} E(C_{in}|G) & = C_{i,n+1-i} f_{n+1-i} \cdot \dots \cdot f_{n-1} = \\ & = C_{i,n+1-i} E\left(\hat{f}_{n+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1} \middle| B_{n+1-i}\right) = E\left(\hat{C}_{in} \middle| B_{n+1-i}\right) \end{aligned}$$

отримаємо

$$\left(E(C_{in}|G) - \hat{C}_{in}\right)^2 = \left(\hat{C}_{in} - \left(\hat{C}_{in} \middle| B_{n+1-i}\right)\right)^2.$$

Останній вираз, так же як і раніше $D(C_{in}|G_{i,n+1-i})$, можна обчислити рекурсивно.

Спочатку розглянемо перетворення

$$\begin{aligned} & E\left(\left(\hat{C}_{i,j+1} - E\left(\hat{C}_{i,j+1} \middle| B_{n+1-i}\right)\right)^2 \middle| B_{n+1-i}\right) = D\left(\hat{C}_{i,j+1} \middle| B_{n+1-i}\right) = \\ & = E\left(D\left(\hat{C}_{ij} \hat{f}_j \middle| B_j\right) \middle| B_{n+1-i}\right) + D\left(E\left(\hat{C}_{ij} \hat{f}_j \middle| B_j\right) \middle| B_{n+1-i}\right) = \\ & = E\left(\hat{C}_{ij}^2 D\left(\hat{f}_j \middle| B_j\right) \middle| B_{n+1-i}\right) + D\left(\hat{C}_{ij} \middle| B_{n+1-i}\right) f_j^2 = \\ & = E\left(\hat{C}_{ij}^2 D\left(\hat{f}_j \middle| B_j\right) \middle| B_{n+1-i}\right) + E\left(\left(\hat{C}_{ij} - E\left(\hat{C}_{ij} \middle| B_{n+1-i}\right)\right)^2 f_j^2 \middle| B_{n+1-i}\right). \end{aligned}$$

Відкинувши оператор умовного математичного сподівання при заданному B_{n+1-i} в першому і останньому виразах, отримаємо наближену рекурсивну формулу

$$\begin{aligned} & \left(\hat{C}_{i,j+1} - E \left(\hat{C}_{i,j+1} \middle| B_{n+1-i} \right) \right)^2 \approx \\ & \approx \hat{C}_{ij}^2 D \left(\hat{f}_j \middle| B_j \right) + \left(\hat{C}_{ij} - E \left(\hat{C}_{ij} \middle| B_{n+1-i} \right) \right)^2 f_j^2. \end{aligned}$$

Використовуючи цю формулу та враховуючи рівності

$$\hat{C}_{i,j+1}^2 = \hat{C}_{ij}^2 f_j^2,$$

$$\hat{C}_{i,n+1-i} = C_{i,n+1-i}$$

та $\left(\hat{C}_{i,n+1-i} - E \left(\hat{C}_{i,n+1-i} \middle| B_{i,n+1-i} \right) \right)^2 = 0$,
отримаємо

$$\begin{aligned} & \left(\hat{C}_{in} - E \left(C_{in} \middle| G \right) \right)^2 = \left(\hat{C}_{in} - E \left(\hat{C}_{in} \middle| B_{n+1-i} \right) \right)^2 \approx \\ & \approx \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \hat{C}_{ij}^2 D \left(\hat{f}_j \middle| B_j \right) f_{j+1}^2 \cdot \dots \cdot f_{n-1}^2, \end{aligned}$$

де

Звідси, після заміни f_j на $\hat{f}_j$ і σ_j^2 на $\hat{\sigma}_j^2$ та враховуючи рівність $\hat{C}_{ij} \hat{f}_{j+1} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1} = \hat{C}_{in} / \hat{f}_j$, і впливає справедливості твердження.

Позначимо через $R = R_2 + \dots + R_n$ сукупний резерв. Очевидно, що він оцінюється як: $\hat{R} = \hat{R}_2 + \dots + \hat{R}_n$. Стандартну похибку величини $\hat{R}$ не можна розраховувати як суму квадратів стандартних помилок резервів $\hat{R}_i$ окремих років настання збитків, бо самі величини $\hat{R}_i$ не є незалежними.

Теорема 7.5. *Нехай виконуються припущення 2, 3 і 4. Тоді середньо квадратична похибка сукупного резерву оцінюється величиною*

$$\begin{aligned} & mse \left(\hat{R} \right) = \\ & = \sum_{i=1}^n \left(mse \left(\hat{R}_i \right) + \hat{C}_{in} \left(\sum_{k=i+1}^n \hat{C}_{kn} \right) \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{2\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{\sum_{m=1}^{n-j} C_{mj}} \right). \end{aligned}$$

Доведення.

Враховуючи отримані раніше формули для $mse \left(\hat{R}_i \right)$, маємо

$$mse \left(\sum_{i=2}^n \hat{R}_i \right) = E \left(\left(\sum_{i=2}^n \hat{R}_i - \sum_{i=2}^n R_i \right)^2 \middle| G \right) =$$

$$\begin{aligned}
& E \left(\left(\sum_{i=2}^n \hat{C}_{in} - \sum_{i=1}^2 C_{in} \right)^2 \middle| G \right) = \\
& = D \left(\sum_{i=2}^n C_{in} \middle| G \right) + \left(E \left(\sum_{i=2}^n C_{in} \middle| G \right) - \sum_{i=2}^n \hat{C}_{in} \right)^2.
\end{aligned}$$

Позначимо $G_i = \{C_{in}, \dots, C_{i,n+1-i}\}$.

Враховуючи друге припущення про незалежність років події, величини C_{in} і C_{kn} при $i \neq k$ умовно некорельовані:

$$\begin{aligned}
E(C_{in}C_{kn} | G) &= E(C_{in}C_{kn} | G_i, G_k) = E(E(C_{in}C_{kn} | G_i, G_k, C_{in}) | G_i, G_k) = \\
&= E(C_{in}E(C_{kn} | G_i, G_k, C_{in}) | G_i, G_k) = E(C_{in}E(C_{kn} | G_k) | G_i, G_k) = \\
&= E(C_{in} | G_i, G_k) \cdot E(C_{kn} | G_k) = E(C_{in} | G) \cdot E(C_{kn} | G)
\end{aligned}$$

Звідси випливає, що $D(\sum_{i=2}^n C_{in} | G) = \sum_{i=2}^n D(C_{in} | G)$.

Доданки $D(C_{in} | G)$ були обчислені при доведенні попередньої теореми. Тому зразу будемо розглядати другий доданок у виразі для $mse(\hat{R})$.

$$\begin{aligned}
& \left(E(\sum_{i=2}^n C_{in} | G) - \sum_{i=2}^n \hat{C}_{in} \right)^2 = \left(\sum_{i=2}^n (E(C_{in} | G) - \hat{C}_{in}) \right)^2 = \\
& = \sum_{i=1}^n (E(C_{in} | G) - \hat{C}_{in})^2 + \\
& + \sum_{2 \leq i < k \leq n} 2 (\hat{C}_{in} - E(C_{in} | G)) (\hat{C}_{kn} - E(C_{kn} | G)).
\end{aligned}$$

В результаті отримаємо, що

$$mse \left(\sum_{i=2}^n \hat{R}_i \right) = \sum_{i=2}^n mse(\hat{R}_i) + \sum_{i < k} 2 (\hat{C}_{in} - E(C_{in} | G)) (\hat{C}_{kn} - E(C_{kn} | G)).$$

Як і в попередньому доведенні, для підрахунку подвоєної суми скористаємося рівністю

$$E(C_{in} | G) = E(\hat{C}_{in} | B_{n+1-i}),$$

де $B_j = \{C_{ik} | i + k \leq n + 1, k \leq j\}$, $1 \leq j \leq n$.

Розглянемо спочатку умовне математичне сподівання при заданому B_{n+1-i}

$$\begin{aligned}
& E \left((\hat{C}_{in} - E(\hat{C}_{in} | B_{n+1-i})) \cdot (\hat{C}_{kn} - E(C_{kn} | G)) \middle| B_{n+1-i} \right) = \\
& = E \left((\hat{C}_{in} - E(\hat{C}_{in} | B_{n+1-i})) \cdot (\hat{C}_{kn} | B_{n+1-i}) \middle| B_{n+1-i} \right) = \\
& = Cov(\hat{C}_{in}, \hat{C}_{kn} | B_{n+1-i}),
\end{aligned}$$

де врахована рівність

$$E \left(\left(\hat{C}_{in} - E \left(\hat{C}_{in} \middle| B_{n+1-i} \right) \right) \cdot \left(E \left(\hat{C}_{kn} \middle| B_{n+1-i} \right) - E \left(C_{kn} \middle| G \right) \right) \middle| B_{n+1-i} \right) = 0,$$

яка справедлива внаслідок скалярності другого множника при заданому B_{n+1-i} .

Застосовуючи послідовно рекурсію при $j \geq n+1-i$ з початковим значенням $Cov \left(\hat{C}_{i,n+1-i}, \hat{C}_{k,n+1-i} \middle| B_{n+1-i} \right) = 0$:

$$\begin{aligned} Cov \left(\hat{C}_{i,j+1}, \hat{C}_{k,j+1} \middle| B_{n+1-i} \right) &= \\ &= E \left(Cov \left(\hat{C}_{i,j+1}, \hat{C}_{k,j+1} \middle| B_j \right) \middle| B_{n+1-i} \right) + \\ &+ Cov \left(E \left(\hat{C}_{i,j+1} \middle| B_j \right), E \left(\hat{C}_{k,j+1} \middle| B_j \right) \middle| B_{n+1-i} \right) = \\ &= E \left(Cov \left(\hat{C}_{i,j+1}, \hat{C}_{k,j+1} \middle| B_j \right) \middle| B_{n+1-i} \right) + \\ &+ Cov \left(\hat{C}_{ij}, \hat{C}_{kj} \middle| B_{n+1-i} \right) f_j^2, \end{aligned}$$

отримаємо:

$$\begin{aligned} Cov \left(\hat{C}_{in}, \hat{C}_{kn} \middle| B_{n+1-i} \right) &= \\ &= \sum_{j=n+1-i}^{n-1} E \left(Cov \left(\hat{C}_{i,j+1}, \hat{C}_{k,j+1} \middle| B_j \right) \middle| B_{n+1-i} \right) f_{j+1}^2 \cdot \dots \cdot f_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} E \left(\hat{C}_{in} - E \left(C_{in} \middle| G \right) \right) \cdot \left(\hat{C}_{kn} - E \left(C_{kn} \middle| G \right) \right) &= \\ &= E \left(\sum_{j=n+1-i}^{n-1} Cov \left(\hat{C}_{i,j+1}, \hat{C}_{k,j+1} \middle| B_j \right) f_{j+1}^2 \cdot \dots \cdot f_{n-1}^2 \middle| B_{n+1-i} \right). \end{aligned}$$

Відкинувши додатково введений оператор умовного математичного сподівання при заданому B_{n+1-i} , отримаємо наближену рівність

$$\begin{aligned} \left(\hat{C}_{in} - E \left(C_{in} \middle| G \right) \right) \cdot \left(\hat{C}_{kn} - E \left(C_{kn} \middle| G \right) \right) &\approx \\ &\approx \sum_{j=n+1-i}^{n-1} Cov \left(\hat{C}_{i,j+1}, \hat{C}_{k,j+1} \middle| B_j \right) f_{j+1}^2 \cdot \dots \cdot f_{n-1}^2 = \\ &= \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \hat{C}_{ij} \cdot \hat{C}_{kj} \cdot D \left(\hat{f}_j \middle| B_j \right) \cdot f_{j+1}^2 \cdot \dots \cdot f_{n-1}^2 = \\ &= \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \hat{C}_{ij} \cdot \hat{C}_{kj} \cdot \sigma_j^2 \cdot f_{j+1}^2 \cdot \dots \cdot f_{n-1}^2 / \sum_{n=1}^{n-j} C_{nj}. \end{aligned}$$

Тут була використана формула для $D \left(\hat{f}_j \middle| B_j \right)$, доведена в попередній теоремі.

Зробивши заміну параметрів їх оцінками і враховуючи рівність

$$\hat{C}_{in} = \hat{C}_{ij} \hat{f}_j \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1},$$

отримаємо оцінку для $mse \left(\hat{R} \right)$, вказану у теоремі.

Розділ 8

Метод Борнхуеттера-Фергюсона

8.1 Коефіцієнт рівня збитковості

Відношення величини заявлених позовів до величини отриманих премій називають **коефіцієнтом рівня збитковості**.

Коефіцієнти збитковості зазвичай ґрунтуються на преміях, але можливе використання інших величин, таких як обіг або фонд заробітної плати. Коефіцієнти рівня збитковості зазвичай досить стійкі та стабільні для кожного року розвитку, за умови відсутності кардинальних змін, зокрема помітних змін у розмірах премій, або катастрофи.

Таким чином, коефіцієнт збитковості, заснований на трендах попередніх даних, оцінках андерайтерів чи даних ринку, може використовуватись для оцінки остаточного розміру збитків, а отже і розміру несплачених збитків.

Якщо для підрахунку резервів планують використовувати коефіцієнт рівня збитковості, головним питанням є спосіб його вибору. Джерелами інформації для нього можуть бути:

1. попередні дані за даним видом страхування;
2. припущення, зроблені при визначенні страхового тарифу;
3. думка андерайтера або іншої особи; (*андерайтер* – це висококваліфікована й відповідальна особа страховика, уповноважена виконувати необхідні процедури з розгляду пропозицій і прийняття ризиків на страхування);
4. статистика ринку для однорідних видів страхування.

Але цими даними треба користуватись з обережністю: навіть якщо дані за останні 5 років по цьому виду страхування демонстрували стабільне значення коефіцієнта збитковості, це не гарантує, що це значення буде таким самим в поточному році, а це може привести до невірної визначення розміру резерву збитків, які виникли, але не заявлені (IBNR).

8.2 Основні припущення та концепція базового методу Борнхуеттера-Фергюсона

Метод Борнхуеттера-Фергюсона – це один з методів оцінювання резерву збитків, які виникли, але не заявлені (IBNR). Він був створений двома актуаріями, Борнхуеттером і Фергюсоном, і вперше представлений в 1972 році.

За популярністю він поступається лише методу ланцюгових сходів.

Цей метод поєднує в собі оцінки коефіцієнта рівня збитковості та методологію прогнозу для трикутників розвитку. Він може бути найбільш корисним у випадках, коли фактичні зареєстровані збитки не є хорошим показником IBNR. Це можливо, коли збитки мають малу частоту, але великі розміри – комбінація, яка ускладнює забезпечення точних оцінок. (Страховику легше передбачити, що відбудеться, у випадку, коли збитки малого розміру надходять з великою частотою.)

Суттєво використовується припущення, що наростаючі виплати за позовами, спричинені страховими подіями, які виникли протягом кожного року настання збитків, зростають однаково (стовпчики в трикутнику розвитку пропорційні). Іншими словами, для прогнозу майбутніх виплат для всіх років настання збитків застосовують одні й ті самі коефіцієнти розвитку.

Концепція даного методу полягає в тому, що:

- Як би не розвивались позови конкретного року настання страхової події до теперішнього часу, майбутня структура розвитку буде відповідати досвіду інших років настання страхових подій.
- Для заданого року настання страхової події, минулий розвиток не обов'язково є кращим показником майбутніх позовів, аніж загальний рівень збитковості.

Найпростіша форма методу Борнхуеттера-Фергюсона включає такі етапи.

- 1) Визначити коефіцієнт рівня збитковості λ з будь-якого з вищевказаних джерел.
- 2) Використовуючи коефіцієнт рівня збитковості λ , знайти початкові оцінки величини сумарних остаточних збитків BUL_i (від benchmark ultimate loss) для кожного періоду i настання збитків за формулою

$$BUL_i = \lambda P_i, \quad (8.1)$$

де P_i – зароблена премія для i -го року настання збитків.

Табл. 8.2: Трикутник розвитку та допоміжні розрахунки

Рік збитків	Рік розвитку					
	0	1	2	3	4	5
0	2866	3334	3503	3624	3712	3717
1	3359	3889	4033	4231	4319	
2	3848	4503	4779	4946		
3	4673	5422	5676			
4	5369	6142				
5	5818					
Суми	25933	23290	17991	12801	8031	3717
Суми без ост. даного	20115	17148	12315	7855	3712	
Коеф. розвитку ρ	1.158	1.049	1.039	1.022	1.001	1
Коеф. прогнозу f	1.29	1.115	1.063	1.023	1.001	1

- 3) Знаходження коефіцієнтів прогнозу f_i за даними трикутника розвитку. Як правило f_i - це фактор розвитку, що отримується застосуванням методу ланцюгових сходів, але можливі й інші варіанти. Зокрема, визначивши $\rho(l)$ - фактори розвитку для прогнозу на один крок від l до $l + 1$ року розвитку, покладаємо

$$f_i = \prod_{l=i}^n \rho(l). \quad (8.2)$$

- 4) Знаходження ефективних оцінок виплат/збитків для кожного року розвитку i шляхом ділення початкових оцінок BUL_i на визначений коефіцієнт прогнозу f_i . Отже, оновлені оцінки збитків для кожного року настання збитків мають вигляд

$$RUL_i = \frac{BUL_i}{f_i}. \quad (8.3)$$

- 5) Знаходження оцінок розвитку майбутніх виплат для i року настання збитків як різниці між відповідними початковими і оновленими оцінками сумарних остаточних збитків.

Таким чином, величину резерву для кожного року настання збитків розраховують за формулою

$$R_i = BUL_i - RUL_i = BUL_i \left(1 - \frac{1}{f_i}\right) = \lambda P_i \left(1 - \frac{1}{f_i}\right). \quad (8.4)$$

Розглянемо приклад застосування методу. В наступній таблиці наведений трикутник розвитку та допоміжні розрахунки для знаходження факторів розвитку згідно з методом ланцюгових сходів.

[h]

У таблиці наведено обсяг зароблених премій. Коефіцієнт рівня збитковості λ оцінений за даними 0 року настання збитків: $\lambda = \frac{C_{0,5}}{P_0} = \frac{3717}{4486} = 0.83$.

Табл. 8.4: Обсяг зароблених премій та початкові оцінки величини остаточних сумарних збитків BUL_i

AY	0	1	2	3	4	5
P_i	4486	5024	5680	6590	7428	8502
$BUL_i = 0.83P_i$	3723	4170	4714	5470	6210	7057

Табл. 8.6: Оцінювання резервів та остаточних сумарних виплат

AY	5	4	3	2	1	0
f	1.29	1.115	1.063	1.023	1.001	1
$1 - \frac{1}{f}$	0.225	0.103	0.059	0.022	0.001	
BUL_i	7057	6210	5470	4714	4170	3723
$R_i = BUL_i \left(1 - \frac{1}{f}\right)$	1588	640	323	104	4	0
Заявлені вимоги	5818	6142	5676	4946	4319	3717
Очікувані вимоги	7406	6782	5999	5050	4323	3717

Тут AY (accident year) – рік настання страхової події (рік настання збитків).

Наступний крок – застосування факторів розвитку для оцінювання майбутніх збитків та додавання позовів, що виникли і вже заявлені.

Сумарні очікувані збитки за всі ці 6 років складуть 33277.

8.3 Розширений метод Борнхуеттера-Фергюсона

Розширений метод Борнхуеттера-Фергюсона базується на припущенні, що існують вектори $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ та $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_n = 1$, такі, що рівність

$$EC_{i,k} = \gamma_k \alpha_i$$

виконується для будь-яких $k = \overline{0, n}$, та $i = \overline{0, n}$. Тоді, ми маємо $EC_{i,n} = \alpha_i$, а отже,

$$\gamma_k = \frac{EC_{i,k}}{EC_{i,n}},$$

що означає, що γ_k – модель розвитку (development pattern) для часток накопичення.

Розширений метод Борнхуеттера-Фергюсона також базується на додатковому припущенні, що вектори

$$\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_0, \dots, \hat{\gamma}_n), \quad \hat{\gamma}_n = 1$$

оцінок часток накопичення та

$$\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_0, \dots, \hat{\alpha}_n)$$

оцінок очікуваних остаточних збитків вже відомі. Зазначимо, що у цих припущеннях має місце рівність

$$EC_{i,k} = EC_{i,n-i} + (\gamma_k - \gamma_{n-i})\alpha_i.$$

Прогнози методу Борнхуеттера-Фергюсона накопичених збитків $C_{i,k}$, $i + k \geq n$ визначаються як

$$\hat{C}_{i,k}^{BF} = C_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{\alpha}_i.$$

Позначимо через

$$\hat{C}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) = \left\{ \hat{C}_{i,k}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) \right\}_{i+k \geq n} \quad (8.5)$$

трикутник всіх прогнозів методу Борнхуеттера-Фергюсона.

Розглядаючи різницю між прогнозом і поточними збитками маємо:

$$\hat{C}_{i,k}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) - C_{i,n-i} = (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{\alpha}_i.$$

У випадку $k = n$ це дає вираз

$$\hat{C}_{i,n}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) - C_{i,n-i} = (1 - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{\alpha}_i,$$

який є прогнозом для резерву $C_{i,n} - C_{i,n-i}$ для i -го року настання страхової події і має вигляд прогнозу резерву, який був запропонований Борнхуеттером і Фергюсоном в 1972 р. Проте, у початковій формі методу БФ припускалось, що оцінки очікуваних остаточних збитків базуються на преміях, і що очікувані рівні збитковості отримуються з трикутника розвитку. Обидва ці припущення відкинуті в розширеному методі БФ.

8.4 Ітерований метод Борнхуеттера-Фергюсона

У випадку, коли дані про поточні збитки є надійними, може бути бажаним модифікувати прогнози методу БФ з метою збільшити вагу поточних збитків, і зменшити вагу оцінок очікуваних остаточних збитків.

Ця мета може бути досягнута шляхом ітерування.

Наприклад, якщо в правій частині формули для прогнозу розширеним методом Борнхуеттера-Фергюсона замінити

$$\hat{\alpha}_i$$

на

$$\hat{C}_{i,n}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}).$$

Тоді остаточні прогнози накопичених збитків

$$C_{i,k}, \quad i + k \geq n$$

будуть прогнозами Бенктандера-Ховінен:

$$\hat{C}_{i,k}^{BH}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) = C_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{C}_{i,n}^{BF},$$

які у випадку

$$0 < \gamma_0 < \dots < \gamma_n$$

збільшують вагу поточних збитків і зменшують вагу апіорних оцінок очікуваних остаточних втрат.

Більш загально, прогнози накопичених збитків $C_{i,k}, i+k \geq n$ ітерованим методом Борнхуеттера-Фергюсона порядку $m \in \mathbb{N}_0$ визначаються таким чином:

$$\hat{C}_{i,k}^{(m)}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) = \begin{cases} C_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{\alpha}_i, & m = 0, \\ C_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{C}_{i,n}^{(m-1)}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Тоді ми маємо

$$\hat{C}_{i,k}^0(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) = \hat{C}_{i,k}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha})$$

та

$$\hat{C}_{i,k}^1(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) = \hat{C}_{i,k}^{BH}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}).$$

Позначимо через

$$\hat{C}^{(m)}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) = \left\{ \hat{C}_{i,k}^{(m)}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) \right\}_{i+k \geq n}$$

трикутник прогнозів ітерованого методу Борнхуеттера-Фергюсона порядку m . Поклавши

$$\hat{\alpha}_i^{(m)}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) = \begin{cases} \hat{\alpha}_i, & m = 0 \\ \hat{C}_{i,n}^{(m-1)}, & \text{інакше} \end{cases},$$

прогнози ітерованого методу Борнхуеттера-Фергюсона можуть бути записані як

$$\hat{C}_{i,k}^{(m)}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) = C_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{\alpha}_i^{(m-1)}$$

тоді з

$$\hat{\alpha}^{(m)}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) = (\hat{\alpha}_0^{(m)}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}), \dots, \hat{\alpha}_n^{(m)}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}))$$

ми отримаємо:

$$\hat{C}^{(m)}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) = \hat{C}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}^{(m)}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha})).$$

Таким чином, ітерований метод Борнхуеттера-Фергюсона порядку m є нічим іншим як розширенням методом Борнхуеттера-Фергюсона з $\hat{\gamma}$ та $\hat{\alpha}^{(m)}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha})$.

Розділ 9

Помилка прогнозу методу Борнхуеттера-Фергюсона. Мюнхенський ланцюговий метод

9.1 Помилка прогнозу методу Борнхуеттера-Фергюсона

Нехай $C_{i,k}$, $1 \leq i, k \leq n$ позначають накопичені збитки (сумарні виплати) в i році настання страхової події та k році розвитку, π_i – величину отриманих премій в i році настання страхової події. Тоді $C_{i,n+1-i}$ – відомі поточні збитки в i році настання страхової події.

Нехай $S_{i,k} = C_{i,k} - C_{i,k-1}$ – прирости збитків, а U_i – невідома величина остаточної збитків в i році настання страхової події. Тоді

$$R_i = U_i - C_{i,n+1-i}$$

– величина невідомого справжнього резерву в i році, а

$$S_{i,n+1} = U_i - C_{i,n}$$

– приріст збитків після n року розвитку (хвостовий розвиток).

Прогноз методу Борнхуеттера-Фергюсона визначається як:

$$\hat{R}_i^{BF} = \hat{U}_i(1 - \hat{z}_{n+1-i}),$$

де

$$\hat{U}_i = \pi_i \hat{q}_i$$

($\hat{q}_i$ – апіорна оцінка коефіцієнта рівня збитковості), а

$$\hat{z}_k \in [0, 1]$$

– оцінена частка остаточної збитків, яка очікується бути відомою після k року розвитку.

В класичному варіанті методу $\hat{q}_i$ брались з зовнішньої інформації, а $\hat{z}_k$ знаходились методом ланцюгових сходів.

Розглянемо стохастичну модель: припускаємо, що виконується рівність

$$EC_{i,k} = x_i z_k,$$

або, що еквівалентно,

$$ES_{i,k} = x_i y_k, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n+1.$$

Оскільки, x_k, y_k визначені з точністю до сталого множника, можемо вважати, що

$$\sum_{i=1}^{n+1} y_i = 1.$$

Це дає

$$EU_i = E(S_{i,1} + \dots + S_{i,n+1}) = x_i$$

і показує, що x_i може розглядатись як міра об'єму для i року настання страхової події.

Таким чином, маємо такі припущення для $S_{i,k}$:

1. усі $S_{i,k}$ незалежні;
2. існують x_i, y_k такі, що

$$ES_{i,k} = x_i y_k, \quad \sum_{i=1}^{n+1} y_i = 1;$$

3. існують s_k^2 такі, що $DS_{i,k} = s_k^2 x_i$.

З цього отримуємо

$$ER_i = x_i(y_{n+2-i} + \dots + y_{n+1}) = x_i(1 - z_{n+1-i}),$$

де $z_k = y_1 + \dots + y_k$, а це означає, що очікувані резерви співпадають з оцінкою резерву методом Борнхуеттера-Фергюсона. Також

$$DU_i = D(S_{i,1} + \dots + S_{i,n+1}) = x_i(s_1^2 + \dots + s_{n+1}^2)$$

і

$$DR_i = x_i(s_{n+2-i}^2 + \dots + s_{n+1}^2).$$

Перейдемо до оцінювання параметрів моделі.

Припускаємо, що оцінка $\hat{x}_i$ походить з ціноутворення і можемо вважати, що $\hat{U}_i$ є оцінкою для x_i , і в подальшому будемо писати $\hat{U}_i$ замість $\hat{x}_i$. Таким чином, нам залишилось знайти оцінки для

$$y_k \text{ та } s_k^2.$$

Головна проблема в тому, що ми маємо мало спостережень для останніх років розвитку.

Так як у нас нема спостережень після n року розвитку, ми не можемо оцінити залишкову (хвостову) частку y_{n+1} без додаткових припущень.

У цьому випадку, ми можемо скористатись зовнішньою інформацією зі схожих портфелів. Без подібної інформації, ми можемо отримати оцінку $\hat{y}_{n+1}$ шляхом екстраполяції з

$$\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n$$

(які поки невідомі). Аналогічно, оцінка для s_n^2 не може бути отримана з єдиного спостереження в n стовпчику, але також може бути отримана шляхом екстраполяції.

Тому, для ітеративної процедури спочатку розглянемо для визначеності випадок, коли у нас вже є оцінки для

$$\hat{y}_{n+1}, \hat{s}_1^2, \dots, \hat{s}_n^2.$$

Тоді ми можемо отримати оцінки зважених найменших квадратів для

$$y_1, \dots, y_n$$

мінімізуючи

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n+1-i} \frac{(S_{i,k} - \hat{U}_i \hat{y}_k)^2}{\hat{U}_i \hat{s}_k^2}$$

з обмеженням

$$\hat{y}_1 + \dots + \hat{y}_n = 1 - \hat{y}_{n+1}.$$

Як початкові наближення можна взяти

$$\hat{y}_k = \sum_{i=1}^{n+1-k} S_{i,k} / \sum_{i=1}^{n+1-k} \hat{U}_i,$$

але ці значення зазвичай не задовольняють обмеженню.

Далі можна визначити

$$\hat{s}_k^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{(S_{i,k} - \hat{U}_i \hat{y}_k)^2}{\hat{U}_i}, 1 \leq k \leq n-1.$$

Для отримання правдоподібних оцінок може знадобитися згладжування. Нехай ми отримали оцінки

$$\hat{y}_1^*, \dots, \hat{y}_{n+1}^*, \hat{s}_1^{2*}, \dots, \hat{s}_n^{2*}, \hat{s}_{n+1}^*,$$

з яких ми оцінюємо резерв методом Борнхуеттера-Фергюсона:

$$\hat{R}_i^{BF} = \hat{U}_i(\hat{y}_{n+2-i}^* + \dots + \hat{y}_{n+1}^*) = \hat{U}_i(1 - \hat{z}_{n+1-i}^*),$$

де

$$\hat{z}_k^* = \hat{y}_1^* + \dots + \hat{y}_k^*.$$

Властивості отриманих оцінок такі:

1. $\hat{y}_1^*, \dots, \hat{y}_{n+1}^*$ попарно від'ємно корельовані.
2. $\hat{y}_1^*, \dots, \hat{y}_{n+1}^*$, а отже і $\hat{z}_1^*, \dots, \hat{z}_{n+1}^*$ не залежать від $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n$.
3. $\hat{R}_i^{BF}$ та R_i незалежні.
4. $E\hat{U}_i = EU_i = x_i, 1 \leq i \leq n$.
5. $E\hat{y}_k^* = y_k, 1 \leq k \leq n+1$ і, відповідно, $E\hat{z}_k^* = z_k, 1 \leq k \leq n+1$.
6. $E\hat{s}_k^{2*} = s_k^2, 1 \leq k \leq n+1$.

Звідси випливає незміщеність оцінок резервів $\hat{R}_i^{BF}$:

$$E\hat{R}_i^{BF} = E(\hat{U}_i)E(1 - \hat{z}_{n+1-i}^*) = x_i(1 - z_{n+1-i}) = ER_i.$$

Перейдемо тепер безпосередньо до оцінки похибки прогнозу.

Середньоквадратична похибка прогнозу будь-якої оцінки резерву $\hat{R}_i$ визначається як

$$\sigma_p^2(\hat{R}_i) = E((\hat{R}_i - R_i)^2 | S_{i,1}, \dots, S_{i,n+1-i}).$$

За припущень

$$R_i = S_{i,n+2-i} + \dots + S_{i,n+1}$$

не залежить від $S_{i,1}, \dots, S_{i,n+1-i}$.

Також, оцінку резерву методом БФ можна взяти незалежною від $S_{i,1}, \dots, S_{i,n+1-i}$.

Тоді ми маємо

$$\begin{aligned} \sigma_p^2(\hat{R}_i^{BF}) &= E(\hat{R}_i^{BF} - R_i)^2 \\ &= D(\hat{R}_i^{BF} - R_i) + (E\hat{R}_i^{BF} - ER_i)^2 = D\hat{R}_i^{BF} + DR_i. \end{aligned}$$

Тобто, середньоквадратична похибка прогнозу є сумою середньоквадратичної похибки оцінки $D\hat{R}_i^{BF}$ та похибки методу DR_i .

Для похибки методу маємо:

$$DR_i = DS_{i,n+2-i} + \dots + DS_{i,n+1} = x_i(s_{n+2-i}^2 + \dots + s_{n+1}^2),$$

яка буде оціненою виразом

$$DR_i = \hat{U}_i(\hat{s}_{n+2-i}^{2*} + \dots + \hat{s}_{n+1}^{2*}).$$

Для оцінки похибки

$$\hat{R}_i^{BF} = \hat{U}_i(1 - \hat{z}_{n+1-i}^*)$$

скористаємось загальною формулою

$$DXY = (EX)^2DY + DXDY + (EY)^2DX$$

для незалежних в.в. X та Y . Маємо

$$D\hat{R}_i^{BF} = (x_i^2 + D\hat{U}_i)D\hat{z}_{n+1-i}^* + D\hat{U}_i(1 - \hat{z}_{n+1-i}^*)^2.$$

Зауважимо, що в той час, як ми вже маємо оцінки для x_i та z_{n+1-i} , нам все ще необхідні оцінки для $D\hat{U}_i$ і $D\hat{z}_{n+1-i}^*$.

Стандартна похибка $\sigma(\hat{U}_i)$ не може бути отримана з похибки $\sigma(\hat{R}_i^{BF(n-1)})$ резервів останнього року, тому що це ігноруватиме мінливість $C_{i,n-i}$, яка має бути врахована. Як і $\hat{U}_i$, $\sigma(\hat{U}_i)$ краще за все отримувати з переоцінки бізнесу (зовнішньої інформації).

У випадку некорельованості $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n$, можна використовувати формули:

$$(\sigma(\hat{U}_i))^2 = \frac{\pi_i}{n-1} \sum_{j=1}^n \pi_j \left(\frac{\hat{U}_j}{\pi_j} - \hat{q} \right)^2$$

та

$$\hat{q} = \sum_{j=1}^n \hat{U}_j / \sum_{j=1}^n \pi_j.$$

Тепер треба визначитись зі способом оцінки

$$D(1 - \hat{z}_{n+1-i}^*) = D\hat{z}_{n+1-i}^* = D(\hat{y}_1^* + \dots + \hat{y}_{n+1-i}^*) = D(\hat{y}_{n+2-i}^* + \dots + \hat{y}_{n+1}^*).$$

Із властивостей оцінок видно, що можна замінити

$$D(\hat{y}_1^* + \dots + \hat{y}_{n+1-i}^*)$$

на

$$D\hat{y}_1^* + \dots + D\hat{y}_{n+1-i}^*.$$

Але, тоді як остання сума збільшується з кожним доданком, цього не можна сказати про попередню, оскільки

$$D(\hat{y}_1^* + \dots + \hat{y}_{n+1}^*) = D(1) = 0.$$

Тоді будемо замінювати $D\hat{z}_k^*$ величиною

$$\min(D\hat{y}_1^* + \dots + D\hat{y}_k^*, D\hat{y}_{k+1}^* + \dots + D\hat{y}_{n+1}^*).$$

Так як

$$\hat{y}_k^* \approx \hat{\hat{y}}_k = \sum_{j=1}^{n+1-k} S_{j,k} / \sum_{j=1}^{n+1-k} x_j,$$

то

$$D\hat{y}_k^* \approx D \left(\sum_{j=1}^{n+1-k} S_{j,k} / \sum_{j=1}^{n+1-k} x_j \right) = \frac{s_k^2}{\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Таким чином, ми оцінюємо $D\hat{y}_k^*$, як

$$D\hat{y}_k^* = \frac{\hat{s}_k^{2*}}{\sum_{j=1}^{n+1-k} \hat{U}_j}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Але значення $\sigma(\hat{y}_{n+1}^*)$ має бути визначено із зовнішньої інформації. Інакше відповідним вибором буде

$$\sigma(\hat{y}_{n+1}^*) = 0.5\hat{y}_{n+1}^*.$$

Загалом, наша оцінка для $D\hat{z}_k^*$ буде такою:

$$(\sigma(\hat{z}_k^*))^2 = \min((\sigma(\hat{y}_1^*))^2 + \dots + (\sigma(\hat{y}_k^*))^2, (\sigma(\hat{y}_{k+1}^*))^2 + \dots + (\sigma(\hat{y}_{n+1}^*))^2).$$

При цьому матимемо $\sigma(\hat{z}_{n+1}^*) = \sigma(1) = 0$.

Остаточно отримуємо оцінку для середньоквадратичної похибки прогнозу

$$\begin{aligned} \sigma_p^2(\hat{R}_i^{BF}) &= \hat{U}_i(\hat{s}_{n+2-i}^{2*} + \dots + \hat{s}_{n+1}^{2*}) + (\hat{U}_i^2 \\ &+ (\sigma(\hat{U}_i))^2)(\sigma(\hat{z}_{n+1-i}^*))^2 + (\sigma(\hat{U}_i))^2(1 - \hat{z}_{n+1-i}^*)^2. \end{aligned}$$

У випадку необхідності перевірити значимість відмінності між різними оцінками або для побудови довірчого інтервалу для EU_i достатньо помилки оцінювання

$$(\sigma(\hat{R}_i^{BF}))^2 = (\hat{U}_i^2 + (\sigma(\hat{U}_i))^2)(\sigma(\hat{z}_{n+1-i}^*))^2 + (\sigma(\hat{U}_i))^2(1 - \hat{z}_{n+1-i}^*)^2.$$

Для загального резерву $R = R_1 + \dots + R_n$ ми маємо незміщену оцінку $\hat{R}^{BF} = \hat{R}_1^{BF} + \dots + \hat{R}_n^{BF}$. Його середньоквадратична похибка прогнозу

$$\sigma_p^2(\hat{R}^{BF}) = D\hat{R}^{BF} + DR.$$

Для DR маємо оцінку (внаслідок незалежності років):

$$DR = \sum_{i=1}^n \hat{U}_i(\hat{s}_{n+2-i}^{2*} + \dots + \hat{s}_{n+1}^{2*}).$$

Оцінка для DR^{BF} більш складна внаслідок корельованості величин $\hat{R}_1^{BF}, \dots, \hat{R}_n^{BF}$. Маємо

$$D\hat{R}^{BF} = \sum_{i=1}^n D\hat{R}_i^{BF} + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF}).$$

Для

$$\text{cov}(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF}) = \text{cov}(\hat{U}_i(1 - \hat{z}_{n+1-i}^*), \hat{U}_j(1 - \hat{z}_{n+1-j}^*))$$

використаємо загальну формулу $\text{cov}(XY, WZ)$

$$= \text{cov}(X, W)EY EZ + \text{cov}(X, W)\text{cov}(Y, Z) + EXEW\text{cov}(Y, Z),$$

де в.в. $\{X, W\}$ та $\{Y, Z\}$ незалежні.

Ми опустимо середній член, оскільки він має нижчий порядок і отримаємо

$$\begin{aligned} & \text{cov}(\hat{U}_i(1 - \hat{z}_{n+1-i}^*), \hat{U}_j(1 - \hat{z}_{n+1-j}^*)) \\ &= \rho_{ij}^U \sqrt{D\hat{U}_i D\hat{U}_j} E(1 - \hat{z}_{n+1-i}^*) E(1 - \hat{z}_{n+1-j}^*) + \\ & \quad + \rho_{ij}^z \sqrt{D\hat{z}_{n+1-i}^* D\hat{z}_{n+1-j}^*} E\hat{U}_i E\hat{U}_j, \end{aligned}$$

де коефіцієнти кореляції $\rho_{ij}^z = \frac{\text{cov}(1 - \hat{z}_{n+1-i}^*, 1 - \hat{z}_{n+1-j}^*)}{\sqrt{D\hat{z}_{n+1-i}^* D\hat{z}_{n+1-j}^*}}$ та $\rho_{ij}^U = \text{cov}(\hat{U}_i, \hat{U}_j) / \sqrt{D\hat{U}_i D\hat{U}_j}$.

Тепер нам потрібно лише оцінити ці коефіцієнти кореляції. Якщо в нас немає можливості оцінити ці коефіцієнти за допомогою наявних даних, то можна використовувати наступні апроксимації: $\rho_{ij}^U = \frac{1}{\sqrt{n}}$ або $\rho_{ij}^U = \frac{1}{1+|i-j|}$

та $\rho_{ij}^z = \sqrt{\frac{\hat{z}_{n+1-j}^*(1-\hat{z}_{n+1-i}^*)}{\hat{z}_{n+1-i}^*(1-\hat{z}_{n+1-j}^*)}}$, де $i < j$, $\hat{z}_1^* \leq \dots \leq \hat{z}_{n+1}^*$.

Остаточню маємо

$$(\sigma(\hat{R}^{BF}))^2 = \sum_{i=1}^n (\sigma(\hat{R}_i^{BF}))^2 + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF}),$$

де

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF}) &= \rho_{ij}^U \sigma(\hat{U}_i) \sigma(\hat{U}_j) E(1 - \hat{z}_{n+1-i}^*) E(1 - \hat{z}_{n+1-j}^*) + \\ & \quad + \rho_{ij}^z \sigma(\hat{z}_{n+1-i}^*) \sigma(\hat{z}_{n+1-j}^*) E\hat{U}_i E\hat{U}_j. \end{aligned}$$

9.2 Вибір оптимальної оцінки резерву

Для спрощення позначень розглянемо один рік настання страхової події. На кінець фіксованого року розвитку $k < n$ резерв Борнхуеттера-Фергюсона такий:

$$R^{BF} = (1 - z_k)U_0 = q_k U_0,$$

де U_0 – очікувана остаточна величина збитків. Нехай C_k – величина оплачених збитків, тоді фінальна оцінка остаточних збитків

$$U^{BF} = C_k + R^{BF}.$$

У методі ЛС ми мали

$$U^{CL} = \frac{C_k}{z_k} \quad \text{та} \quad R^{CL} = U^{CL} - C_k.$$

Помітимо, що $R^{CL} = q_k U^{CL}$.

Зазначимо, що метод БФ повністю ігнорує інформацію про поточні збитки в даному портфелі; в той час як у методі ЛС вважається, що поточні

збитки є цілком достовірними для прогнозування та ігноруються очікувані остаточні збитки. Таким чином, можна сказати, що ці методи представляють дві крайні позиції. Тому Бенктандер (Gunnar Benktander) в 1976 році запропонував замінити апріорне U_0 на довірчу суміш

$$U_c = cU^{CL} + (1 - c)U_0.$$

Оскільки фактор довіри c має зростати з розвитком збитків, він запропонував взяти $c = z_k$ й оцінювати резерви як

$$R^{GB} = R^{BF}U_{p_k}/U_0.$$

Помітимо, що

$$R^{GB} = q_k U_{p_k} \quad \text{та} \quad U_{p_k} = z_k U^{CL} + q_k U_0 = C_k + R^{BF} = U^{BF},$$

тобто $R^{GB} = q_k U^{BF}$.

Це означає, що резерв Бенктандера R^{GB} отримується застосуванням методу БФ на другому кроці до апостеріорної остаточної величини позовів U^{BF} , яка отримується зі звичайної процедури Борнхуеттера-Фергюсона. Тому цей метод іноді називають повторним методом Борнхуеттера-Фергюсона. Обчислимо

$$U^{GB} = C_k + R^{GB} = (1 - q_k^2)U^{CL} + q_k^2 U_0 = U_{1-q_k^2}.$$

Ховінен (Esa Novinen) у 1981 році застосував довірчу суміш безпосередньо до резервів, тобто запропонував оцінку резерву

$$R^{EH} = cR^{CL} + (1 - c)R^{BF} =: R_c$$

також з $c = z_k$. Але резерв Ховіненна

$$R^{EH} = z_k q_k U^{CL} + (1 - z_k) q_k U_0 = q_k U_{p_k} = R^{GB}.$$

Можна довести, що для довільної початкової точки $U^{(0)} = U_0$ ітераційне правило

$$R^{(m)} = q_k U^{(m)} \quad \text{та} \quad U^{(m+1)} = C_k + R^{(m)}, m \geq 0$$

дає довірчі суміші

$$U^{(m)} = (1 - q_k^m)U^{CL} + q_k^m U_0$$

і

$$R^{(m)} = (1 - q_k^m)R^{CL} + q_k^m R^{BF}$$

між резервами БФ і ЛС, які починаються з резерву БФ і прямують до резерву методу ЛС при $m \rightarrow \infty$.

Для порівняння R^{CL} , R^{BF} і R^{GB} використовуватимемо середньоквадратичну похибку

$$\sigma^2(R_c) = E(R_c - R)^2$$

як критерій точності оцінки резерву R_c . Так як R_c є лінійною по c , то $\sigma^2(R_c)$ досягає мінімуму. Надалі ми вважаємо, що U_0 оцінена незалежно від C_k , U , R та має математичне сподівання $EU_0 = EU$ і дисперсію DU_0 .

Теорема 9.1. *Оптимальний фактор довіри c^* , який мінімізує середньоквадратичну похибку $\sigma^2(R_c)$ знаходиться за формулою:*

$$c^* = \frac{z_k \operatorname{cov}(C_k, R) + z_k q_k DU_0}{q_k DC_k + z_k^2 DU_0}.$$

Доведення.

$E(R_c - R)^2 = E(c(R^{CL} - R^{BF}) + R^{BF} - R)^2 = c^2 E(R^{CL} - R^{BF})^2 - 2c E((R^{CL} - R^{BF})(R - R^{BF})) + E(R^{BF} - R)^2$. Тоді

$$0 = \frac{\partial}{\partial c} E(R_c - R)^2 = 2c E(R^{CL} - R^{BF})^2 - 2 E((R^{CL} - R^{BF})(R - R^{BF})) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} c^* &= \frac{E((R^{CL} - R^{BF})(R - R^{BF}))}{E(R^{CL} - R^{BF})^2} = \frac{z_k E((C_k - z_k U_0)(R - q_k U_0))}{q_k E(C_k - z_k U_0)^2} \\ &= \frac{z_k \operatorname{cov}(C_k - z_k U_0, R - q_k U_0)}{q_k D(C_k - z_k U_0)} = \frac{z_k \operatorname{cov}(C_k, R) + z_k q_k DU_0}{q_k DC_k + z_k^2 DU_0}. \end{aligned}$$

Тут використано $EC_k = z_k EU_0$, що є наслідком моделі.

9.3 Мюнхенський ланцюговий метод (Munich Chain Ladder)

Як уже зазначалося раніше, зазвичай використовують два різних види даних у формі трикутника розвитку: трикутник сплачених збитків і трикутник заявлених збитків. Майже завжди прогнози суми збитків, побудованих на різних трикутниках, не збігаються, незважаючи на те, що в реальності має місце збіг підсумкових рівнів заявленого та сплаченого збитків в кінці періоду розвитку.

Мюнхенський ланцюговий метод дозволяє врахувати взаємозалежність (кореляцію) між сплаченими збитками (страховими виплатами) та заявленими збитками та покликаний зменшити розрив між оцінками резерву збитків, які виникли, але не заявлені, на основі сплачених збитків і на основі заявлених збитків.

Мюнхенський ланцюговий метод є узагальненням методу ланцюгових сходів: за відсутності залежності між спостережуваними даними автоматично виходить такий же прогноз, як і за звичайним методом ланцюгових сходів.

Введемо позначення:

C_{ij} – рівень сплачених збитків,

A_{ij} – рівень заявлених збитків,

f_j і h_j – відповідні фактори розвитку (коефіцієнти зростання).

Будемо позначати C/Z – відношення $\frac{C_{ij}}{A_{ij}}$ сплаченого збитку до заявлено-го.

Теорема 9.2. При прогнозуванні методом ланцюгових сходів на основі сплачених збитків і заявлених збитків, відношення між $\frac{\hat{C}_{ij}}{\hat{A}_{ij}}$, $j \geq n - i + 1$ та відповідним даному року розвитку середнім по всім рокам настання збитків $\frac{\sum_{k=1}^n \hat{C}_{kj}}{\sum_{k=1}^n \hat{A}_{kj}}$ є сталим для $\forall i$, тобто має місце рівність:

$$\frac{\hat{C}_{ij}/\hat{A}_{ij}}{\sum_{k=1}^n \hat{C}_{kj}/\sum_{k=1}^n \hat{A}_{kj}} = \frac{C_{i,n-i}/A_{i,n-i}}{\sum_{k=1}^n \hat{C}_{k,n-i}/\sum_{k=1}^n \hat{A}_{k,n-i}} \quad (9.1)$$

для всіх $j \geq n - i + 1$.

Доведення.

Позначимо $\hat{C}_{ij} := C_{ij}$ при $i + j \leq n + 1$. Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \hat{C}_{ij} &= \sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij} + \sum_{i=n-j+2}^n \hat{C}_{ij} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j-1} \right) \hat{f}_j + \sum_{i=n-j+2}^n (\hat{C}_{i,j-1} \hat{f}_j) = \left(\sum_{i=1}^n \hat{C}_{i,j-1} \right) \hat{f}_j. \end{aligned}$$

Таким чином отримали, що

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j-1}} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{C}_{ij}}{\sum_{i=1}^n \hat{C}_{i,j-1}}.$$

Аналогічну формулу можна вивести і для оцінки $\hat{h}_j$, тобто маємо

$$\hat{h}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} A_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} A_{i,j-1}} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{A}_{ij}}{\sum_{i=1}^n \hat{A}_{i,j-1}}.$$

Розглянемо тепер відношення C/Z для деякого року $j > n - i + 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{C}_{ij}}{A_{ij}} &= \frac{C_{i,n-i+1} \cdot \hat{f}_{n-i+2} \cdot \dots \cdot \hat{f}_j}{A_{i,n-i+1} \cdot \hat{h}_{n-i+2} \cdot \dots \cdot \hat{h}_j} = \frac{C_{i,n-i+1} \cdot \sum_{i=1}^n \hat{C}_{ij} / \sum_{i=1}^n \hat{C}_{i,j-1}}{A_{i,n-i+1} \cdot \sum_{i=1}^n \hat{A}_{ij} / \sum_{i=1}^n \hat{A}_{i,j-1}} = \\ &= \frac{C_{i,n-i+1} \cdot \sum_{i=1}^n \hat{C}_{ij} / \sum_{i=1}^n \hat{A}_{ij}}{A_{i,n-i+1} \cdot \sum_{i=1}^n \hat{C}_{i,j-1} / \sum_{i=1}^n \hat{A}_{i,j-1}}. \end{aligned}$$

Звідки і випливає твердження теореми.

Теорема, наведена вище, дає зрозуміти, як уникнути розбіжності відношення C/Z . Якщо значення $\frac{C_{i,n-i+1}}{A_{i,n-i+1}}$ нижче середнього по всім рокам настання збитків, то для його досягнення відношення C/Z має рости швидше, ніж в середньому, тобто чисельник має зростати швидше або (і) знаменник повільніше, ніж у середньому. І навпаки для відношень C/Z , які перевищують середнє.

Як і метод ланцюгових сходів, мюнхенський ланцюговий метод базується на деяких припущеннях. Перше з них:

- (1) Роки настання збитків $\{C_{i1}, \dots, C_{in}, A_{i1}, \dots, A_{in}\}$ незалежні.

З роздумів, наведених раніше, випливає, що модель методу ланцюгових сходів має бути модифікована так, щоб множники F_{ij} і H_{ij} лінійно залежали від $\frac{A_{i,j-1}}{C_{i,j-1}}$ або, відповідно, від $\frac{C_{i,j-1}}{A_{i,j-1}}$.

- (2) $E\left(\frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} \middle| G_{i,j-1}\right) = a_j^C + b_j^C \cdot \frac{A_{i,j-1}}{C_{i,j-1}}$
або

$$E(C_{ij} | G_{i,j-1}) = C_{i,j-1} a_j^C + A_{i,j-1} b_j^C.$$

$$E\left(\frac{A_{ij}}{A_{i,j-1}} \middle| G_{i,j-1}\right) = a_j^A + b_j^A \cdot \frac{C_{i,j-1}}{A_{i,j-1}},$$

або

$$E(A_{ij} | G_{i,j-1}) = A_{i,j-1} a_j^C + C_{i,j-1} b_j^C.$$

де

$$G_{ij} = \{C_{i1}, \dots, C_{ij}\} \cup \{A_{i1}, \dots, A_{ij}\}.$$

- (3) $D\left(\frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} \middle| G_{i,k-1}\right) = \frac{(\sigma_j^C)^2}{C_{i,j-1}}$
і

$$D\left(\frac{A_{ij}}{A_{i,j-1}} \middle| G_{i,j-1}\right) = \frac{(\sigma_j^A)^2}{A_{i,j-1}}.$$

Оцінки для невідомих параметрів за методом найменших квадратів мають вигляд:

$$\hat{a}_{j+1}^C = \hat{f}_{j+1}^C - \hat{b}_{j+1}^C \cdot Q_j^C, \quad \hat{b}_{j+1}^C = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1} \left(\frac{A_{ij}}{C_{ij}} - Q_j^C\right)}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{ij} \left(\frac{A_{ij}}{C_{ij}} - Q_k^C\right)^2},$$

$$(\hat{\sigma}_{j+1}^C)^2 = \frac{1}{n-j-2} \sum_{k=1}^{n-j} C_{kj} \left(\frac{C_{k,j+1}}{C_{kj}} - \hat{f}_{j+1}^C - b_{j+1}^C \left(\frac{D_{kj}}{C_{kj}} - Q_j^C \right) \right)^2,$$

де $Q_j^C = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \frac{A_{ij}}{\hat{C}_{ij}}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{ij}}$, а $\hat{f}_{j+1}^C = \hat{f}_{j+1}$.

Аналогічний вигляд мають і оцінки для невідомих параметрів $\hat{a}_{j+1}^A$, $\hat{b}_{j+1}^A$, $\hat{\sigma}_{j+1}^A$.

На основі другого припущення отримаємо, що прогноз майбутніх збитків обчислюється за допомогою наступних рекурентних співвідношень:

$$\begin{aligned} \hat{C}_{i,j+1} &= \hat{C}_{ij} \hat{a}_{j+1}^C + \hat{A}_{ij} \hat{b}_{j+1}^C = \\ &= \hat{C}_{ij} \left(\hat{a}_{j+1}^C + \frac{\hat{A}_{ij}}{\hat{C}_{ij}} \hat{b}_{j+1}^C \right) = \hat{C}_{ij} \left(\hat{f}_{j+1}^C - \hat{b}_{j+1}^C Q_j^C + \frac{\hat{A}_{ij}}{\hat{C}_{ij}} \hat{b}_{j+1}^C \right) = \\ &= C_{ij} \left(\hat{f}_{j+1}^C - \hat{b}_{j+1}^C Q_j^C + \frac{\hat{A}_{ij}}{\hat{C}_{ij}} \hat{b}_{j+1}^C \right) = \hat{C}_{ij} \left(\hat{f}_{j+1}^C + \hat{b}_{j+1}^C \left(\frac{\hat{A}_{ij}}{\hat{C}_{ij}} - Q_j^C \right) \right). \\ \hat{A}_{i,j+1} &= \hat{A}_{ij} \hat{a}_{j+1}^A + \hat{C}_{ij} \hat{b}_{j+1}^A = \\ &= \hat{A}_{ij} \left(\hat{a}_{j+1}^A + \frac{\hat{C}_{ij}}{\hat{A}_{ij}} \hat{b}_{j+1}^A \right) = \hat{A}_{ij} \left(\hat{h}_{j+1}^A - \hat{b}_{j+1}^A Q_j^A + \frac{\hat{C}_{ij}}{\hat{A}_{ij}} \hat{b}_{j+1}^A \right) = \\ &= \hat{A}_{ij} \left(\hat{h}_{j+1}^A - \hat{b}_{j+1}^A Q_j^A + \frac{\hat{C}_{ij}}{\hat{A}_{ij}} \hat{b}_{j+1}^A \right) = \hat{A}_{ij} \left(\hat{h}_{j+1}^A + \hat{b}_{j+1}^A \left(\frac{\hat{C}_{ij}}{\hat{A}_{ij}} - Q_j^A \right) \right). \end{aligned}$$

Список рекомендованої літератури

- [1] Закон України про страхування. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/>
- [2] В.П. Зубченко, Р.Є. Ямненко. Статистичні методи у ризиковому страхуванні. Навчальний посібник. - КНУ імені Тараса Шевченка. – 2023.
- [3] Карташов М.В. Імовірність, процеси, статистика. – К.: ВПЦ “Київський університет”, 2008. – 494 с.
- [4] Пономаренко О.І. Моделі страхування та теорія ризику. - ВПЦ “Київський університет”, 2008
- [5] Boland, P.J. Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science. - Chapman and Hall/CRC, 2007.
- [6] Hans Buhlmann. Mathematical Methods in Risk Theory. Springer Science & Business Media, Oct 6, 2005 - Mathematics - 210 pages.
- [7] Dickson, D.C.M. Insurance Risk and Ruin. - Cambridge University Press, 2005
- [8] Daykin C.D. Practical Risk Theory for Actuaries. Chapman and Hall, London (1996)
- [9] Mikosch, T. Non-Life Insurance Mathematics. - Springer, 2006.
- [10] Schmidli, H. Risk Theory. - 2018 - Springer International Publishing
- [11] Wuthrich, Mario V., Non-Life Insurance: Mathematics & Statistics. 2020.