УДК 518.9

С.Н. Аміргалієва, В.В. Остапенко,
О.В. Остапенко

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ІГРИ З ВИПАДКОВОЮ МАРКІВСЬКОЮ ПЕРЕШКОДОЮ

Вступ

Диференціальні ігри моделюють ситуації керування динамічною системою за допомогою двох параметрів u і v. Першим параметром розпоряджається гравець P (що доганяє), другим — гравець E (що тікає). У класичній диференціальній грі гравці не знають дії супротивника в майбутньому [1]. У ряді моделей допускається дискримінація одного з гравців, наприклад, гравець P у даний момент часу t вибирає своє керування $u(t)$, використовуючи знання керування гравця $E - v(t)$ [2, 3]. Нерідко в прикладних задачах ми ототожнюємо себе з гравцем P, а параметр v є деякою перешкодою, про яку є певна інформація. Розглянемо задачу, пов'язану з розбігом літака перед зльотом [4]. Найбільш важливою не відомою заздалегідь перешкодою є бічна складова вітру. Існують різні імовірнісні (статистичні) характеристики бічного вітру, наприклад роза вітрів. Однак ці характеристики не можна використовувати для вибору поточного керування літаком, тому що кожен літак повинен обов'язково злетіти. Не можна поставити завдання мінімізації математичного сподівання аварій. Відзначимо, що роза вітрів використовується при виборі злітно-посадочних смуг. Аналогічні проблеми виникають й при посадці літака [5]. У ряді задач, що виникають на практиці, існує необхідність враховувати імовірнісні характеристики перешкоди. Однією з таких задач є побудова оптимального керування транспортом води в каналах зрошувальних систем [6]. При цьому як гравець-супротивник виступають водокористувачі. Це пов'язано з тим, що зроблені заздалегідь замовлення, як правило, змінюються, але за допомогою статистичних спостережень можна визначити функції розподілу можливих відхилень від зроблених замовлень. Іншою задачею є керування вологістю ґрунту за допомогою регулювання інтенсивності поливу. При цьому на вологість ґрунту впливають температура повітря, опади й випари. У даний момент можна виміряти вологість ґрунту, температуру, інтенсивність опадів і випару. При цьому для останніх трьох величин існують сезонні функції розподілу, і так само є статистичні дані, що визначають зв'язок між поточними й наступними реалізаціями зазначених випадкових величин.

Постановка задачі

У статті досліджуються питання, які близькі до розглянутих у праці [7]. Новизна наших результатів полягає, по-перше, у нових постановках задач, що відрізняються від наведених у [7], а по-друге — в методах розв'язку, які опираються на операторні конструкції в теорії диференціальних ігор [2, 3, 9].

Мета статті — дослідження та побудова основних підходів до розв'язування нових класів диференціальних ігор з випадковою перешкодою.

Припущення щодо функції $f(z,u,v)$

Розглянемо динамічну систему, що описується рівнянням

$$\dot{z} = f(z,u,v), \tag{1}$$

де $z \in E^n$; $u \in U$; $v \in V$; U — компакт в евклідовому просторі; V — вимірна підмножина в евклідовому просторі. Параметрами u і v розпоряджаються гравці P і E. Під припустимим керуванням гравця P будемо розуміти вимірне керування $u(t)$ із значенням в U. Сукупність припустимих керувань $u(t)$ на відрізку $[a,b]$ або в інтервалі $[a,b)$ позначатимемо $U[a,b]$ або $U[a,b)$. Надалі зробимо такі припущення.

***Припущення* 1.** Функція $f(z,u,v)$ неперервна за сукупністю змінних і задовольняє локальну умову Ліпшиця по z.

***Припущення* 2.** Для кожного $v \in V$ існує константа $C(v) > 0$, така, що для всіх $z \in E^n$, $u \in U$ виконується нерівність

$$|\langle z; f(z,u,v)\rangle| \le c(v)(1 + \| z \|^2),$$

де $\langle \cdot,\cdot \rangle$ — звичайний скалярний добуток в евклідовому просторі.

***Припущення* 3.** Множина $f(z,U,v)$ є опуклою для всіх $z \in E^n$ і $v \in V$.

Припущення 1 і 2 гарантують існування, єдиність і продовжуваність розв'язку $z(t)$ рівняння (1) при довільній початковій умові $z(0) = z_0$ та при підстановці в (1) замість параметрів u і v довільного припустимого керування $u(t)$ гравця P і функції $v(t)$. Припущення 3 гарантує в топології рівномірної збіжності на $[a,b]$ компактність множини розв'язків, що відповідають різним припустимим керуванням $u(\cdot)$ гравця P та фіксованій кусково-сталій функції $v(\cdot)$ і початковій позиції z_0.

Позначимо розв'язок $z(t)$ рівняння (1), що відповідає $u(t)$, $v(t)$ і початковій позиції z_0, $z(t \mid u(\cdot), v(\cdot), z_0)$. У статті вивчаються ігри з термінальною функцією плати $\Phi(z)$, в яких мета гравця P полягає в мінімізації $\Phi(z(\theta))$ в припущенні, що гра закінчується у фіксований момент θ.

***Припущення* 4.** Функціонал $\Phi : E^n \to E^1$ на кожному компакті $K \subset E^n$ задовольняє умову Ліпшиця з константою L_k, що залежить від K.

***Припущення* 5.** Функціонал $\Phi(z)$ невід'ємний.

Параметр v є випадковою величиною з функцією розподілу $\mu(\cdot)$, її реалізації вимірюються гравцем P у скінченних моментах часу. Залежність v від часу описана в наступному пункті. Таким чином, величина $\Phi(z(\theta))$ є випадковою. Мета гравця P — мінімізувати її математичне сподівання.

Оскільки заздалегідь не відомі моменти вимірювання реалізацій випадкової величини, то вибір цих моментів надається гравцеві E.

Більш строга математична формалізація дається в наступному пункті.

Ігри з незалежними випадковими перешкодами

У класичних диференціальних іграх користуються різними стратегіями: позиційними [8], ε-стратегіями [2, 9], стратегіями на основі вольтерівських операторів [10, 11]. У нашій статті застосовуються ε-стратегії Б.М. Пшеничного, які були введені в [9] та розвинені в [2]. Структура гри описується за допомогою напівгрупи деяких операторів. Дана напівгрупа покладена в основу побудови оптимальних стратегій.

Опишемо хід гри на фіксованому відрізку $[0,\theta]$. Вважаємо, що гравець E вибирає в момент $\tau_0 = 0$ розбиття відрізка $[0,\theta]$

$$\omega = \{\tau_0 = 0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k = \theta\},$$

$$\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

де k — довільне натуральне число; τ_i — довільні точки з $[0,\theta]$. Гравець P у момент τ_{i-1} знає позицію $z(\tau_{i-1})$, величину δ_i, значення перешкоди v_i на інтервалі $[\tau_{i-1}, \tau_i)$ і вибирає своє припустиме керування $u_i(t)$, $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i)$. Крім того, вважаємо, що гравець P знає функцію розподілу перешкоди $\mu(\cdot)$. Описана стратегія гравця P є ε-стратегією. Відзначимо, що гравець P не знає заздалегідь розбиття ω і лише по ходу гри дізнається про значення довжини інтервалів δ_i. Тому природно ввести другого гравця E і залишити за ним право вибору розбиття ω.

Розглянемо гру, в якій при фіксованому розбитті ω значення перешкоди v_i на $[\tau_{i-1}, \tau_i)$ є незалежними випадковими величинами. Припустимо, що гравець P вибрав певну ε-стратегію Γ_P. Це означає, що його керування $u_i(\cdot)$ на інтервалі $[\tau_{i-1}, \tau_i)$ залежить від реалізації випадкової перешкоди і від значення $z(\tau_{i-1})$. Позначимо $z(\theta \mid v_1, \ldots, v_k, x)$ розв'язок (1), що відповідає стратегії Γ_P і реалізаціям $v_1, \ldots, v_k$ при початковій умові $z(0) = x$.

Покладемо

$$M_\omega \Phi(z(\theta \mid \Gamma_P, x)) =$$

$$= \int_V \ldots \int_V \Phi(z(\theta \mid \Gamma_P, v_1, \ldots, v_k, x) \mu(dv_1) \ldots \mu(dv_2). \quad (2)$$

Величина (2) є математичним сподіванням функціонала Φ на кінці траєкторії $z(\theta)$, що відповідає ε-стратегії Γ_P гравця P і розбиттю ω. Мета гравця P — мінімізувати математичне сподівання (2).

Опишемо структуру диференціальної гри за допомогою операторів над функціями. Нехай $\varphi(x)$ — невід'ємна функція, що задовольняє умову Ліпшиця з константою L_k на кожному компакті K, v — випадкова величина в V з функцією розподілу $\mu(\cdot)$.

Введемо оператор S_ε, який ставить у відповідність кожній функції $\varphi(x)$ функцію

$$\psi(x) = \int_V \min_{u(\cdot)\in U[0,\varepsilon)} \varphi(z(\varepsilon \mid u(\cdot),\ v, x))\mu(dv). \qquad (3)$$

Згідно з припущенням 3 мінімум в (3) досягається.

Нехай $t \in [0,\theta]$, $\omega = \{\tau_0 = 0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k = t\}$, $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ — деяке розбиття. Покладемо

$$S^\omega\varphi = S_{\delta_1}\ldots S_{\delta_k}\varphi, \quad \tilde{S}_t\varphi = \sup_\omega S^\omega\varphi.$$

У книзі [3] було описано властивості операторів S^ω і $\tilde{S}_t$. Вони наведені в теоремах 1 і 2. Коректність цих та результатів наступного пункту випливає з припущень 1—5.

Теорема 1. Функції $\tilde{S}_t\Phi$ мають такі властивості:

1) функція $\{S^\omega\Phi\}$ рівномірно збігається на компактах до функції $\tilde{S}_t\Phi$;

2) функція $\tilde{S}_t\Phi$ є локально ліпшицевою;

3) $\tilde{S}_{t_1+t_2}\Phi = \tilde{S}_{t_1}\tilde{S}_{t_2}\Phi$;

4) $\tilde{S}_t\Phi = \sup_{mh=t} S_h^m\Phi$, де $S_h^m = \underbrace{S_h\ldots S_h}_{m}$;

5) послідовність $\{S_h^m\Phi,\ \ mh = t\}$ рівномірно збігається на кожному компакті до функції $\tilde{S}_t\Phi$.

Теорема 2. Функція $\tilde{S}_\theta\Phi$ має такі властивості:

1) існує ε-стратегія Γ_P^* гравця P, така, що для будь-якого розбиття ω виконується нерівність

$$M_\omega\Phi(z(\theta \mid \Gamma_P^*, x)) \le \tilde{S}_\theta\Phi(x);$$

2) для кожного $\delta > 0$ існує розбиття ω_δ, таке, що для будь-якої стратегії Γ_P маємо

$$M_{\omega_\delta}\Phi(z(\theta \mid \Gamma_P, x)) \ge \tilde{S}_\theta\Phi(x) - \delta.$$

З цих властивостей випливає, що $\tilde{S}_\theta\Phi(x)$ є ціною гри.

Для гри з динамікою “простий рух” оператор $\tilde{S}_\theta$ описується в явному вигляді, тоді як у теоремі 1 він є границею спрямованості або послідовності. Нехай

$$\dot{z} = B(u, v),$$

де B — неперервна за сукупністю змінних функція. Функція $\Phi(x)$ є опуклою.

Покладемо

$$\tilde{S}_\theta\Phi(x) = \int_V \min_{u\in U} \Phi(x + \theta B(u, v))\,\mu(dv).$$

В [3] доведено таку теорему.

Теорема 3. Для функції $\tilde{S}_\theta\Phi(x)$ має місце рівність $\tilde{S}_\theta\Phi(x) = S_\theta^*\Phi(x)$.

У даному випадку гравець P може грати в контрстратегіях $u_x(v)$. При цьому $u_x(v)$ вибирається з умови

$$\Phi(x + \theta B(u_x(v), v)) = \min_{u\in U} \Phi(x + \theta B(u, v)).$$

Ігри, що враховують марківську залежність між перешкодами

Розглянемо довільне розбиття ω. Опишемо залежність між v_i і v_{i-1} у такий спосіб:

$$v_i = v_{i-1} + \delta_i w_i,\ v_0 = 0,\ i = 1, \ldots, k. \qquad (4)$$

Припускаємо, що величини w_i мають однакову функцію розподілу $\nu(\cdot)$. Будемо вважати, що в момент τ_{i-1} гравець P не тільки одержує інформацію про реалізації v_i, але й пам’ятає попередню реалізацію v_{i-1}. Тоді він легко знаходить реалізацію

$$w_i = \delta_i^{-1}(v_i - v_{i-1}),\ v_0 = 0.$$

У даній ситуації формула (2) має вигляд

$$M_\omega\Phi(z(\theta \mid \Gamma_P, x)) =$$

$$= \int_W \ldots \int_W \Phi(z(\theta \mid \Gamma_P(\delta_1 w_1, \delta_1 w_1 + \delta_2 w_2, \ldots, \delta_1 w_1 +$$

$$+ \delta_2 w_2 + \ldots + \delta_k w_k, x)\,\nu(dw_k)\ldots\nu(dw_1).$$

Зведемо таку гру до гри, яка розглянута в попередньому пункті. Розширимо систему диференціальних рівнянь (1)

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z,u,v), \\ \dot{v} = w. \end{cases} \tag{5}$$

У рівнянні (5) фазовими координаторами є вектор $y=(z,v)$, а початкова умова має вигляд $y(0)=y_0=(z_0,v_0)$. Згідно з (4) маємо $v_0=0$. Однак при побудові операторних конструкцій цю умову спочатку опускаємо. Позначимо $y(t\mid u(\cdot),w,y_0)$ розв'язок (5) з початковою позицією y_0. Відзначимо, що гравець P повинен мінімізувати деякий функціонал від кінця траєкторії $z(\theta)$, що є розв'язком (1). Тому будемо розглядати функції $\varphi(y)=\varphi((z,v))=\varphi(z)$. Відповідно до підходу, який описаний у попередньому пункті, слід розглянути оператор, який ставить у відповідність функції $\varphi(\bar{y})$, $\bar{y}=(x,\bar{v})$, функцію

$$\Psi(\bar{y}) = \int\limits_W \min_{u(\cdot)\in U[0,\varepsilon)} \varphi(y(\varepsilon\mid u(\cdot),w,\bar{y}))\,\nu(dw).$$

Маємо $\varphi(y(\varepsilon\mid u(\cdot),w,\bar{y})) = \varphi(z(\varepsilon\mid u(\cdot),\bar{v}+\varepsilon w,x))$. Тому введемо оператор Q_ε, що ставить у відповідність функції $\varphi(\bar{y})$, $\bar{y}=(x,\bar{v})$, функцію

$$\Psi(\bar{z},\bar{v}) = \int\limits_W \min_{u(\cdot)\in U[0,\varepsilon)} \varphi(z(\varepsilon\mid u(\cdot),\bar{v}+\varepsilon w,x))\nu(dw).$$

Покладемо

$$Q^\omega\varphi = Q_{\delta_1}\ldots Q_{\delta k}\varphi,\ \tilde{Q}_t\varphi = \sup_\omega Q^\omega\varphi.$$

Функція $\Phi(x)$ залежить тільки від першої компоненти вектора $y=(x,v)$. Однак слід враховувати, що функція $\tilde{Q}_t\Phi(x)$ залежить уже від двох змінних (x,v). З теорем 1 і 2 одержуємо такі результати.

Теорема 4. Функція $\tilde{Q}_t\Phi$ має такі властивості:

1) функція $\{Q^\omega\Phi\}$ рівномірно збігається на компактах до функції $\tilde{Q}_t\Phi$, де ω – розбиття відрізка $[0,t]$;

2) функція $\tilde{Q}_t\Phi$ є локально ліпшицевою;

3) $\tilde{Q}_{t_1+t_2}\Phi = \tilde{Q}_{t_1}\tilde{Q}_{t_2}\Phi$;

4) $\tilde{Q}_t\Phi = \sup\limits_{mh=t} Q_h^m\Phi$, де $Q_h^m = \underbrace{Q_h\ldots Q_h}_{m}$;

5) послідовність $\{Q_h^m\Phi, mh=t\}$ рівномірно збігається на компактах до функції $\tilde{Q}_t\Phi$.

Розглянемо тепер випадок $t=\theta$ і покладемо $v=0$.

Теорема 5. Функція $\tilde{Q}_\theta\Phi$ має такі властивості:

1) існує ε-стратегія Γ_P^* гравця P, така, що для будь-якого розбиття ω виконується нерівність

$$\mathrm{M}_\omega\Phi(z(\theta\mid\Gamma_P^*,x)) \le \tilde{Q}_\theta\Phi(x),$$

де M_ω визначено за формулою (2);

2) для кожного $\delta>0$ існує розбиття ω_δ, таке, що для будь-якої стратегії Γ_P маємо

$$\mathrm{M}_{\omega_\delta}\Phi(z(\theta\mid\Gamma_P,x)) \ge \tilde{Q}_\theta\Phi(x)-\delta.$$

Зупинимося на грі "простий рух" з динамікою

$$\dot{z} = u+v$$

та опуклою функцією $\Phi(x)$.

Розглянемо для простоти випадок $\theta=1$. Відзначимо, що в силу опуклості множини U для довільного відрізка $[a,b]$ та будь-якого керування $u(\cdot)\in U[a,b]$ існує $\bar{u}\in U$, таке, що

$$\int\limits_a^b u(t)dt = \bar{u}(b-a).$$

Виберемо довільне натуральне m і нехай $mh=1$. Тоді для кожного $u_i(\cdot)\in U[\tau_{i-1},\tau_i]$ існує таке $u_i\in U$, що

$$\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} u_i(t)dt = hu_i,$$

де $\tau_i = ih,\ i=1,\ldots,m.$ Тому маємо

$$Q_h^m\Phi(x) = \int\limits_W \min_{u_1\in U}\int\limits_W \min_{u_2\in U}\ldots\int\limits_W \min_{u_m\in U}\Phi(x+$$

$$+h\sum_{i=1}^m u_i + (hw_1 + h(w_1+w_2)+\ldots+$$

$$+h(w_1+\ldots+w_m))h)\nu(dw_m)\ldots\nu(dw_1) =$$

$$= \min_{\substack{u_i(w_1,\ldots,w_i) \\ i=1,\ldots,m}} \int_W \ldots \int_W \Phi(x + h\sum_{i-1}^{m} u_i(w_1,\ldots,w_i) +$$

$$+ h\sum_{i=1}^{m}(m-i+1)hw_i)\nu(dw_m)\ldots\nu(dw_1) \le$$

$$\le \min_{\substack{u_i(w_i) \\ i=1,\ldots,m}} \int_W \ldots \int_W \Phi(x + h\sum_{i-1}^{m}(u_i(w_i) +$$

$$+ (m-i+1)hw_i)\nu(dw_m)\ldots\nu(dw_1).$$

Згідно з опуклістю Φ остання величина не перевищує рівність

$$h\sum_{i=1}^{m}\min_{u_i(w_i)}\int_W \Phi(x + u_i(w_i) + (m-i+1)hw_i)\nu(dw_i) =$$

$$= h\sum_{i=1}^{m}\int_W \min_{u\in U}\Phi(x + u + (m-i+1)hw)\nu(dw).$$

Тут мінімуми беруться по всіх можливих відображеннях $u_i(w_i,\ldots,w_i)$, $u_i(w_i)$ із значенням в U. Легко бачити, що

$$h\sum_{i=1}^{m}\int_W \min_{u\in U}\Phi(x + u + (m-i+1)hw)\nu(dw)$$

збігається при $m \to \infty$ до рівності

$$Q_1^+\Phi(x) = \int_0^1\int_W \min_{u\in U}\Phi(x + u + (1-t)w)\nu(dw)dt.$$

Згідно з теоремою 4 при переході до границі при $m \to \infty$ маємо

$$Q_h^m\Phi(x) \to \tilde{Q}_1\Phi(x).$$

Тому матиме місце нерівність

$$\tilde{Q}_1\Phi(x) \le$$

$$\le \int_0^1\int_W \min_{u\in U}\Phi(x + u + (1-t)w)\nu(dw)dt = Q_1^+\Phi(x).$$

Таким чином, величина $Q_1^+\Phi(x)$ є верхньою оцінкою для ціни гри $\tilde{Q}_1\Phi(x)$. Знайдемо нижню оцінку для $\tilde{Q}_1\Phi(x)$. З теореми 4 і невід’ємності $\Phi(x)$ дістаємо

$$\tilde{Q}_1\Phi(x) \ge Q_h^m\Phi(x) \ge \int_W \ldots \int_W \min_{u_i\in U}\Phi(x +$$

$$+ h\sum_{i=1}^{m}(u_i + (m-i+1)hw_i))\nu(dw_m)\ldots\nu(dw_1) \ge$$

$$\ge \int_W \min_{u_i\in U}\Phi(x + h\sum_{i=1}^{m}(u_i + (m-i+1)hw))\nu(dw) =$$

$$= \int_W \min_{u\in U}\Phi(x + u + h\sum_{i=1}^{m}(m-i+1)hw\nu(dw).$$

Остання рівність випливає з опуклості множини U. Очевидно, що

$$h\sum_{i=1}^{m}(m-i+1)h \to 1 - \int_0^1 t\,dt = 1/2,\ \ m \to \infty.$$

Тому нижня оцінка $Q_1^-\Phi(x)$ для $Q_1\Phi(x)$ має вигляд

$$Q_1^-\Phi(x) = \int_W \min_{u\in U}\Phi(x + u + \frac{1}{2}w)\nu(dw).$$

Висновки

Нами побудовані оптимальні стратегії переслідувача та отримані оцінки для ціни гри в диференціальних іграх, в яких роль другого гравця грає випадкова перешкода. Гравець, що доганяє, знає реалізації цієї перешкоди в задані моменти часу. Ці моменти заздалегідь не відомі. Тому вважається, що ними розпоряджається гравець, що тікає. У статті розглянуто випадки, коли виміряються реалізації незалежних випадкових величин, та випадок, в якому послідовність випадкових величин утворює марківський ланцюг.

Для гри “простий рух” отримано оцінки для ціни гри. Дана теорія може одержати розвиток для більш складних лінійних диференціальних ігор.

С.Н. Амиргалиева, В.В. Остапенко,
Е.В. Остапенко

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ СО СЛУЧАЙНОЙ МАРКОВСКОЙ ПОМЕХОЙ

Рассмотрены новые задачи теории дифференциальных игр, в которых роль второго игрока (противника) играет случайная помеха. Первый игрок (союзник) пользуется ε-стратегиями Б.Н. Пшеничного или, в конкретных случаях, – контрстратегиями. В определенные моменты времени первый игрок получает информацию о реализации помехи. Его задача – минимизировать математическое ожидание целевого функционала. С помощью операторных конструкций описана структура игры и приведен общий подход к построению оптимальных стратегий первого игрока. Для игры “простое движение” получены оценки цены игры и описаны оптимальные контрстратегии.

S.N. Amirgalieva, V.V. Ostapenko, O.V. Ostapenko

DIFFERENTIAL GAMES WITH A CASUAL MARKOV HINDRANCE

The paper considers new challenges to the theory of differential games in which the second player (opponent) is a random hindrance, and the first player (ally) uses Pshenichniy’s ε-strategies, or counterstrategies in specific cases. At certain moments the first player is informed about implementing the hindrance. Therefore, the first player aims to minimize mathematical expectation of the objective functional. By employing statement constructions, we describe the structure of the game and outline a general approach to the construction of the first player’s optimal ε-strategies. Crucially, we estimate the cost of the simple-motion game and describe some optimal counterstrategies.

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. – М.: Мир, 1967. – 479 с.
2. *Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В.* Дифференциальные игры. – К.: Наук. думка, 1992. – 260 с.
3. *Остапенко В.В., Амиргалиева С.Н., Остапенко Е.В.* Выпуклый анализ и дифференциальные игры. – Алматы: Гылым, 2005. – 392 с.
4. *Боткин Н.Д., Красов А.И.* Позиционное управление в модельной задаче о разбеге самолета // Позиционное управление с гарантированным результатом: Сб. науч. трудов. – Свердловск: УрОАН СССР, 1988. – С. 22–32.
5. *Боткин Н.Д., Кейн В.М., Пацко В.С.* Применение методов теории дифференциальных игр к задаче управления самолетом на посадке // Там же. – С. 33–44.
6. *Остапенко В.В., Скопецкий В.В., Фінін Г.С.* Розподіл ресурсів у просторі та часі. – К.: Наук. думка, 2003. – 324 с.
7. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Управляемые случайные процессы. – К.: Наук. думка, 1977. – 252 с.
8. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
9. *Пшеничный Б.Н.* Структура дифференциальной игры // ДАН СССР. – 1969. – **184**, № 2. – С. 285–287.
10. *Гусятников П.Б.* К вопросу об информированности игроков в дифференциальной игре // Прик. математика и механика. – 1973. – **37**, № 2. – С. 205–216.
11. *Остапенко В.В.* Операторные конструкции и вольтеровские операторы // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – № 5. – С. 95–99.

Рекомендована Радою
Фізико-технічного інституту
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
17 березня 2010 року