

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

В. О. Капустян, Г. А. Мажара, Ж. Т. Черноусова

ТЕОРІЯ ІГОР ТА ЕКОНОМІЧНА ПОВЕДІНКА

Курс лекцій

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Економічна аналітика»
спеціальності 051 економіка

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2025

УДК 330.46
С00

Автори: *Капустян Володимир Омелянович*, д. ф.-м. н., проф.
Мажара Гліб Анатолійович, д. філос. з економіки, доц.
Черноусова Жанна Трохимівна, к. ф.-м. н., доц.

Рецензент *Пишинограєв, І.О.*, к. ф.-м. н., доц., директор ННЦ «Світовий центр даних з геоінформатики та сталого розвитку»

Відповідальний редактор *Рисцов І.К.*, д. ф.-м. н., проф.

*Гриф надано Методичною радою КПП ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 5 від 06.03.2025 р.)
за поданням вченої ради факультету/навчально-наукового інституту
(протокол № 6 від 27.12.2024 р.)*

Капустян В.О.

С00 Теорія ігор та економічна поведінка. [Електронний ресурс] : курс лекцій : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Економічна аналітика» спец. 051 Економіка / КПП ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В. О. Капустян, Г. А. Мажара, Ж. Т. Черноусова. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПП ім. Ігоря Сікорського, 2025. – 183 с.

Курс лекцій охоплює теоретичний матеріал щодо застосування теорії ігор в економічних моделях та аналізу економічної поведінки. Посібник містить неокласичні моделі, включаючи однокритеріальні та векторні моделі, безкоаліційні та кооперативні ігри. Розглядаються різні аспекти економічної поведінки, включаючи стратегічні взаємодії між економічними агентами, формування та аналіз рівноваг, прийняття рішень в умовах невизначеності та оптимальність стратегій. Також висвітлюються оптимальні керування динамічними системами та синтез оптимальних керувань, що дозволяє краще розуміти та моделювати економічну поведінку в динамічних середовищах.

Курс лекцій з дисципліни «Теорія ігор та економічна поведінка» призначений для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Економічна аналітика» спеціальності 051 Економіка. Навчальний посібник також буде корисним для всіх, хто цікавиться теорією ігор та економічною поведінкою, надаючи їм інструменти для аналізу та прогнозування економічної взаємодії та поведінки агентів.

УДК 330.46

Реєстр. № НП 24/25-228. Обсяг 8,0 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© В. О. Капустян, Г. А. Мажара, Ж. Т. Черноусова, 2025
© КПП ім. Ігоря Сікорського, 2025

ЗМІСТ

Вступ.

ЧАСТИНА 1. Неокласичні економічні моделі в R^n .

Розділ 1. Неокласичні скінченновимірні однокритеріальні моделі економічних задач.

- § 1. Основні визначення однокритеріальної оптимізації.
- § 2. Теорія необхідних і достатніх умов оптимальності в задачі математичного програмування.

Задачі до розділу 1.

Розділ 2. Неокласичні скінченновимірні векторні моделі економічних задач.

- § 1. Постановка задач векторної оптимізації та відношення переваги.
- § 2. Ефективні та слабо ефективні оцінки та розв'язки задач векторної оптимізації.
- § 3. Умови оптимальності.

Задачі до розділу 2.

Розділ 3. Конфліктні задачі оптимізації – безкоаліційні ігри.

- § 1. Визначення безкоаліційної гри та оптимальність.
- § 2. Допустимі ситуації та ситуації рівноваги.
- § 3. Гарантуючі ситуації та стратегії.
- § 4. Рівновага за Нешем.
- § 5. Рівновага за Бержу.
- § 6. Моделі поведінки виробників на олігопольному ринку.
- § 7. Вибір нешівських рівноваг. Часткова інформованість гравців.
- § 8. Змішані стратегії. Знаходження рівноваг у змішаних стратегіях.
- § 9. Базова модель рівноваги за Штакельбергом: рівноваги за Нешем та Штакельбергом.
- § 10. Рівновага за Штакельбергом в моделі з мультиплікативною функцією доходу колективу і лінійною функцією індивідуальних витрат його членів.
- § 11. Статичні ігри з неповною інформацією: байєсові ігри.
- § 12. Альтернативний погляд на змішані стратегії. Приклади байєсових ігор.
- § 13. Динамічні ігри з повною інформацією. Позиційна форма гри.
- § 14. Довершена під - ігрова рівновага за Нешем. Приклади.

Задачі до розділу 3.

Розділ 4. Конфліктні задачі оптимізації – кооперативні (коаліційні) ігри.

- § 1. Кооперативна поведінка гравців: сильна рівновага Неша, рівновага у спільних змішаних стратегіях
- § 2. Стабільність на основі погроз.
- § 3. Ігри у характеристичній формі. С - ядро гри.
- § 4. Вектор Шеплі. N - ядро гри.

Задачі до розділу 4.

ЧАСТИНА 2. Неокласичні нескінченновимірні моделі економічних задач.

Розділ 1. Програмні оптимальні керування динамічними системами.

- § 1. Формалізація задач оптимального керування. Принципи керування.
- § 2. Умови оптимальності для динамічних задач оптимального керування.
- § 3. Особливі оптимальні керування.
- § 4. Задачі з рухомими границями.
- § 5. Зв'язок між теорією оптимального керування та варіаційним численням.
- § 6. Застосування принципу максимуму до моделі оптимального економічного зростання.

Задачі до розділу 1.

Розділ 2. Синтез оптимальних керувань.

- § 1. Динамічне програмування: принцип оптимальності та рівняння Беллмана
- § 2. Керування системою із закріпленим кінцем траєкторії і вільним часом.
- § 3. Оптимальні регулятори на обмеженому часовому періоді.
- § 4. Задача оптимальної стабілізації без обмежень на керування.
- § 5. Оптимальна стабілізація обмеженим керуванням.
- § 6. Достатні умови оптимальності.

Задачі до розділу 2.

Розділ 3. Конфліктні динамічні економічні моделі: лінійно - квадратичні диференціальні ігри.

- § 1. Формалізація лінійно - квадратичної диференціальної гри.
- § 2. Гарантована рівновага.
- § 3. Рівновага за Нешем.
- § 4. Рівновага за Бержу.

Задачі до розділу 3.

Література.

ВСТУП

В умовах світової глобалізації на перший план висувається проблема раціонального (найкращого) використання обмежених ресурсів як між державами, так і в економіці кожної із них. При прийнятті рішень в економічній діяльності актуальною проблемою є вибір оптимального із них, що характерно людській природі. В основі такого вибору лежить певна математична модель економічного явища чи процесу, тому що метод проб і помилок тут є неприпустимим. Тому більшість математичних моделей в економіці є оптимізаційними (неокласичні моделі). Але тут зразу потрібно відзначити, що зміст терміну "оптимальність" суттєво залежить від розмірності вектору показників, відносно яких здійснюється "удосконалення" об'єкту дослідження і припущень щодо поведінки економічних агентів, які є елементом економічної моделі. В навчальному посібнику з єдиних позицій викладено основні ідеї і алгоритми, які лежать в основі неокласичних економічних моделей.

В структурному плані навчальний посібник складається із двох частин та семи розділів. Перша частина присвячена методам дослідження статичних неокласичних моделей економіки. Це пов'язано з тим, що ідеї оптимізації для скінченновимірних моделей мають відповідний аналог і у випадку нескінченновимірних (динамічних) моделей, але їх викладення та аналіз у першому випадку простіше.

Перший розділ першої частини починається із аналізу статичних однокритеріальних задач оптимізації. Доведено теорему Лагранжа про необхідні умови оптимальності для загальної задачі математичного програмування у формі варіаційної нерівності та умов додаткової нежорсткості. Випадки локального представлення умов оптимальності у вигляді систем рівнянь і нерівностей дають можливість визначати їх розв'язки (стаціонарні точки), серед яких містяться і розв'язки вихідної екстремальної задачі, якщо вони існують, тобто модель продуктивна. Теорема Лагранжа є єдиним аналітичним апаратом дослідження однокритеріальних екстремальних задач. Наведено застосування теореми Лагранжа до аналізу стандартних задач мікроекономіки: теорії споживання та теорії виробництва.

Ігровим стаціонарним моделям передую розгляд векторних (багатокритеріальних) моделей оптимізації з рівнозначними критеріями. Векторна оптимізація вимагає означення бінарного відношення нестрогої переваги, яке б дозволило увести упорядкування векторів аналогічно тому, як таке упорядкування було уведено на дійсних числах за допомогою бінарного відношення більше або дорівнює. Це бінарне відношення давало повний порядок на дійсних числах, тобто любі два числа по ньому були порівняні. Узагальнення цього бінарного відношення на вектори з дійснозначними компонентами дозволило визначити тільки часткове їх упорядкування – не всі вектори можна було порівняти по таким відношенням нестрогої переваги. Для векторної оптимізації цього виявилось достатньо: за допомогою згортки критеріїв задачі векторної оптимізації вдалось звести (достатні умови) до оптимізації однокритеріальних задач. Розв'язки векторних моделей оптимізації являють собою певну множину, яка характеризується тим, що кожен із таких розв'язків не може бути покращеним. Якщо мова йде про моделювання спільної діяльності декількох підприємств, то потрібен центр (дирекція концерну), який би обирав єдиний оптимальний розв'язок із багатьох і примушував усіх його дотримуватись. Крім того, для векторних моделей характерно те, що вони мають єдине ресурсне джерело.

Якщо ж підприємства на ринку працюють самостійно, то їх діяльність характеризується своїми показниками і кожне із них має своє ресурсне забезпечення. Вони вимушені планувати свою діяльність на ринку, використовуючи засоби некоаліційної теорії ігор. Тоді кожен гравець (підприємство) має свій виграш (значення показника діяльності) і лише свій ресурс (стратегію).

Що стосується оптимальності поведінки кожного гравця в теорії безкоаліційних ігор, то під нею ми будемо розуміти різні варіанти формалізованого представлення про вигідність, стійкість і справедливість. В силу того, що неможливо дати таке визначення оптимальності, яке б охоплювало одночасно вказані вище три філософські категорії, тому замість оптимальності далі будемо використовувати в якості розв'язку безкоаліційної гри поняття рівноваги (вигідності кожного гравця). Припускається, що всі гравці діють раціонально. Якщо всі гравці діють спільно, то ми маємо задачу векторної оптимізації і можемо визначити максимальний їх виграш. Якщо ж кожен гравець буде діяти окремо, вважаючи дії інших гравців недружніми, то в якості розв'язку такої гри обираємо правило максиміну. Такий розв'язок дасть найменші виграші гравців (гарантовані виграші). Як правило, гравці не ставляться вороже один до одного. Тому виникла рівновага за Нешем як розв'язок безкоаліційної гри, коли всі гравці, крім виділеного, діють за Нешем. Така рівновага, яка виявилась не гірше гарантованої рівноваги, набула великої популярності при дослідженні конфліктних ситуацій не зважаючи на багато її недоліків. Навіть у випадку єдиності рівноважної ситуації (вектор стратегій всіх гравців) у гравців можуть виникнути бажання обрати інші стратегії (між грацями діє необов'язкова домовленість). Ще гірша проблема виникає, коли така рівновага неєдина. Дослідники доклали не мало зусиль, щоб знайти додаткові умови для гравців, які б дозволили всім дотримуватись виділеної рівноваги, зокрема рівноваги по втратах. Удосконаленням рівноваги за Нешем є: рівновага за Штакельбергом – наявність лідера дає можливість отримати більші виграші для інших гравців; рівновага Неша в умовах невизначеності – Байєсові ігри; рівновага за Бержу; рівновага у змішаних стратегіях, коли відсутня рівновага у чистих стратегіях.

Основною проблемою безкоаліційних ігор є створення умов для дотримання гравцями виділених рівноваг при відсутності обміну інформацією між гравцями. У випадку можливості обміну інформацією можна сподіватись на кооперацію в процесі вибору стратегій. Умови кооперації визначаються гравцями під час переговорів, у яких з'ясовуються узгоджені аспекти поведінки гравців. Унаслідок цього гравці приходять до кооперативної домовленості, яка може бути обов'язковою (існує орган, якому підкоряються всі гравці і який контролює виконання умов підписаного сторонами контракту) або необов'язковою (коли такого органу не існує і домовленість схожа з міжнародними договорами, які діють до того часу, поки не вигідно їх порушувати).

Необов'язкові домовленості відносно деякої ситуації слід розглядати з погляду їхньої стабільності, тобто як не вигідність відхилення від неї гравців. Стабільність полягає в наступному. Відхилення деяких гравців від домовленості може примусити інших гравців змінити свої стратегії, які вони спочатку не збиралися змінювати. Ці зміни важко передбачити незалежно від того, чи ми передбачаємо чи ні, що порушення домовленості знищить дух кооперації та призведе до некооперативної поведінки гравців. Тому необов'язкові домовленості будуть складатися із домовленостей про ситуацію, а також із сценарію реагування кожного гравця $i \in I$ на відхилення будь-якої коаліції, що не містить цього гравця. Цей сценарій оголошується наперед і є "сценарієм погроз".

Кооперативна гра характеризується парю: кількістю гравців та набором виграшів (витрат) усіх можливих коаліцій, які можуть бути утвореними гравцями. Розв'язком такої гри є вектор, який задовольняє умовам індивідуальної гарантії – він не менший виграшу відповідної коаліції і умові колективної гарантії – сумарний виграш співпадає з виграшем відповідної коаліції. Ці розв'язки утворюють певну множину. Визначаються умови вибору певних точок із цієї множини: різні ядра та вектор Шеплі. Всі ігрові положення проілюстровано економічними прикладами.

У другій частині викладено методологію дослідження нескінченновимірних (динамічних)

моделей, в яких ефективність діяльності економічної системи виражається у вигляді функціоналів, визначених на траєкторіях її основних ендогенних показників. Останні діляться на керування, зміна яких здійснюється дослідником, та на фазові змінні, які залежать від керування та задовольняють деякій системі диференціальних рівнянь. Для моделей з одним показником основним математичним апаратом виступає теорія оптимального керування. Тут слід відзначити два принципи керування: програмне, коли керування залежать лише від часу та екзогенних параметрів моделі; за оберненим зв'язком, коли керування залежать від часу та фазових змінних. У випадку програмного керування умови оптимальності отримуються у вигляді принципу максимуму. Детально проаналізовано методологію його застосування для різних класів задач оптимального керування. Виокремлено випадок особливих керувань, коли застосування принципу максимуму недостатньо для виділення керувань, "підозрілих" на оптимальні. За допомогою принципу максимуму роз'язано задачу економічного зростання з максимальним добробутом (макроекономічна) модель. Відзначимо, що оптимальні програмні керування слід застосовувати для побудови планових (прогнозних) значень траєкторій ендогенних показників економічної системи. Виділено клас динамічних моделей, в яких можливе представлення оптимального керування у вигляді оберненого зв'язку. В цьому випадку в якості умови оптимальності виступає рівняння Беллмана, якому задовольняє оптимальне значення критерію оптимальності. Якщо динаміка показників задовольняє лінійній системі диференціальних рівнянь, а якість роботи системи характеризується квадратичним функціоналом, то знайдені оптимальні керування у вигляді оберненого зв'язку (регулятори), параметри яких задовольняють деяким рівнянням. Якщо динамічна економічна модель розглядається на великому відрізку часу (модель з необмеженим горизонтом), то викладена методологія побудови оптимальних регуляторів, які забезпечують досяжність як оптимальних значень виділеного критерію, так і рівноважних значень фазових змінних (оптимальна стабілізація). Розглянуто випадки як відсутності обмежень на керування, так і їх наявності. Регулятори слід використовувати для побудови "фінансово - економічних радників" при реалізації оптимальних траєкторій ендогенних показників економічної системи.

В умовах конфлікту інтересів економічних агентів (гравців) для раціональної їх поведінки використовується теорія некоаліційних диференціальних ігор у найпростішому варіанті: динаміка зміни показників у часі описується системою лінійних диференціальних рівнянь, функції виграшів - квадратичні функціонали від керувань та фазових змінних. Керування (стратегії) задаються лінійними функціями від фазових змінних. Побудовано алгоритми, які реалізують відомі рівноважні ситуації в таких іграх.

До всіх розділів наведено задачі як методичного, так і змістовного економічного характеру. Це дозволить студентам глибше зрозуміти теорію екстремальних задач та її застосування для побудови та дослідження неокласичних економічних моделей. Навчальний посібник розраховано на студентів освітньої програми "Економічна аналітика" та інших освітніх програм спеціальності "Економіка". Крім того, він може використовуватись і студентами, які навчаються за освітніми програмами спеціальностей : "Прикладна математика" та "Системний аналіз". Для оволодіння матеріалом посібника потрібна фундаментальна підготовка з математики та моделювання економіки.

ЧАСТИНА 1. Неокласичні економічні моделі в R^n .

В цій частині викладено методологію дослідження статичних детермінованих екстремальних задач та наведено її застосування для побудови та аналізу неокласичних моделей економіки. Її слід розглядати як вступ до методології дослідження неокласичних динамічних моделей економіки тому, що в ній викладено основні ідеї оптимізаційних моделей та методи визначення їх основних характеристик.

Розділ 1. Неокласичні скінченновимірні однокритеріальні моделі економічних задач.

В цьому розділі наведено основні визначення елементів однокритеріальної екстремальної задачі, дано їх узагальнення на випадок непродуктивності задачі (відсутність розв'язків). Викладено теорію необхідних (достатніх) умов оптимальності, які дозволяють відшукувати оптимальні розв'язки в моделях з різними типами обмежень.

§ 1. Основні визначення однокритеріальної оптимізації.

1. Основні означення. Нехай $\Omega \in R^n$ – множина n - вимірних векторів; $f: \Omega \rightarrow R^1$ – функція, що визначена на Ω , та приймає на цій множині кінечні значення.

Означення 1.1. Точку $x_* \in \Omega$ будемо називати точкою глобального мінімуму функції $f(x)$ на множині Ω , якщо виконується нерівність

$$f(x) \geq f(x_*) \quad \forall x \in \Omega \quad (1.1)$$

Визначимо на R^n метрику ρ . Тоді (R^n, ρ) – метричний простір. Позначимо через $O(\epsilon, \bar{x}) = \{x \in R^n: \rho(x, \bar{x}) \leq \epsilon\}$ – ϵ - окіл точки $\bar{x}$.

Означення 1.2. Точку $x_* \in \Omega$ будемо називати точкою локального мінімуму функції $f(x)$ на множині Ω , якщо існує таке число $\epsilon > 0$, що виконується нерівність

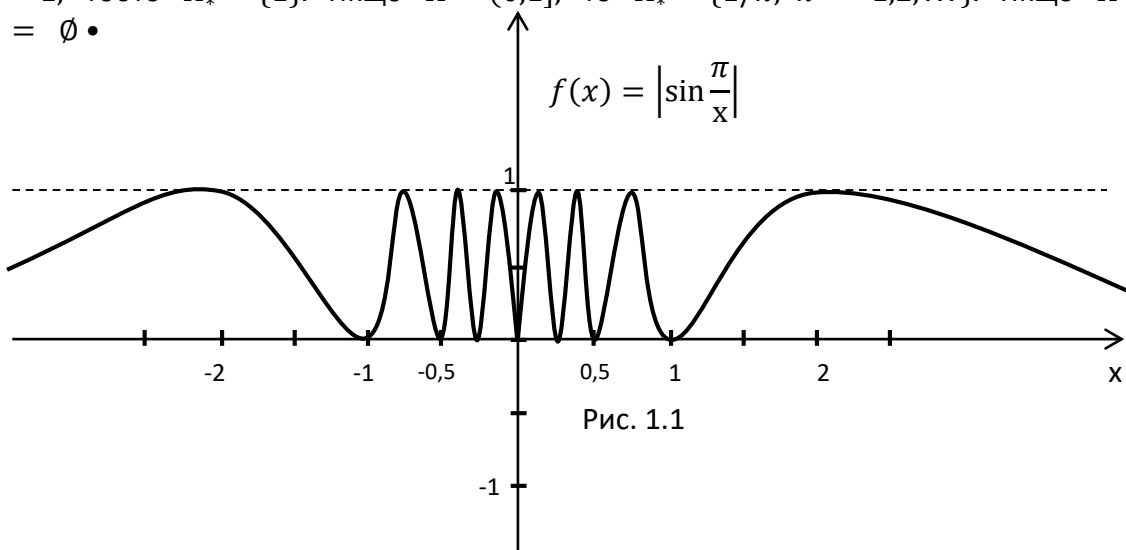
$$f(x) \geq f(x_*) \quad \forall x \in O(\epsilon, x_*) \cap \Omega \quad (1.2)$$

Позначимо $\min_{x \in \Omega} f(x) = f(x_*)$, а через Ω_* – множину точок глобальних мінімумів функції $f(x)$.

В залежності від множини Ω і функції $f(x)$ множина Ω_* може мати різну структуру, зокрема, може бути й порожньою. Розглянемо це на прикладах.

Приклад 1.1. Нехай на числовій осі задана функція $f(x) = |\sin \frac{\pi}{x}|$, $x \neq 0$; $f(0) = 0$ (рис 1.1).

Якщо $\Omega = [1, 2]$, то функція приймає найменше значення, яке дорівнює нулю, в одній точці $x_* = 1$, тобто $\Omega_* = \{1\}$. Якщо $\Omega = (0, 1]$, то $\Omega_* = \{1/k, k = 1, 2, \dots\}$. Якщо $\Omega = [2, \infty)$, то $\Omega_* = \emptyset$.



Приклад 1.2. Нехай на числовій осі задана функція $f(x) = |x| + |x - 1| - 1$ (рис 1.2). Функція приймає найменше значення, яке дорівнює нулю, на відрізку $[0,1]$, тобто $\Omega_* = [0,1]$. Якщо $\Omega = [1, \infty)$, то $\Omega_* = \{1\}$. Якщо $\Omega = (1, \infty)$, то $\Omega_* = \emptyset$.

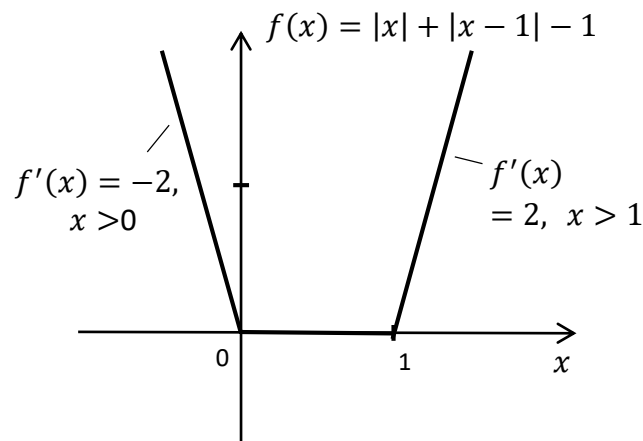


Рис. 1.2

Приклад 1.3. Нехай $f(x) = \ln x, \Omega = (0,1]$ (рис 1.3). В цьому випадку $\Omega_* = \emptyset$, тому що у всіх точках області функція приймає кінечні значення, а для послідовності $x_k = 1/k, k = 1, 2, \dots$ будемо мати $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = -\infty$.

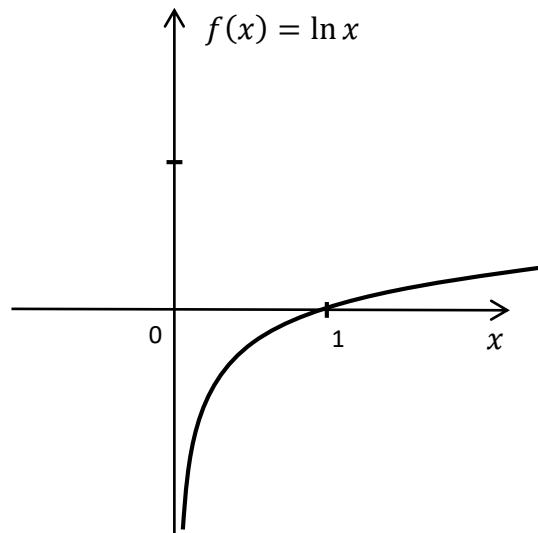


Рис. 1.3

В прикладах 1.1 – 1.2 функції обмежені знизу на множинах визначення, а в прикладі 1.3 функція не являється обмеженою знизу. Тому наведемо

Означення 1.3. Функція $f(x)$ називається обмеженою знизу на множині Ω , якщо існує таке дійсне число M , що $f(x) \geq M \forall x \in \Omega$. Функція буде необмеженою знизу, якщо існує послідовність $\{x_k\} \in \Omega$, для якої $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = -\infty$.

У тих випадках, коли $\Omega_* = \emptyset$ природнім узагальненням поняття найменшого значення функції є поняття нижньої грані функції.

Означення 1.4. Нехай функція $f(x)$ – обмежена знизу на множині Ω . Тоді число f_* будемо

називати нижньою гранню функції $f(x)$ на Ω , якщо 1) $f(x) \geq f_* \forall x \in \Omega$; 2) для любого скільки завгодно малого числа $\epsilon > 0$ знайдеться точка $x_\epsilon \in \Omega$, для якої $f(x_\epsilon) < f_* + \epsilon$. Якщо функція необмежена знизу на Ω , то в якості нижньої грані приймається $f_* = -\infty$.

Нижню грань функції $f(x)$ на Ω позначають через $\inf_{x \in \Omega} f(x) = f_*$.

Приклад 1.4. Нехай $f(x) = x^2, \Omega = (0,1]$. В цьому випадку $f_* = 0$, тому що 1) $f(x) > 0 \forall x \in \Omega$; 2) покладемо, наприклад, $x_\epsilon = \epsilon$; тоді $\epsilon^2 < \epsilon$.

В прикладах 1.1 – 1.2 – $f_* = 0$, а в прикладі 1.3. – $f_* = -\infty$.

Якщо $\Omega_* \neq \emptyset$, то $f_* = \inf_{x \in \Omega} f(x) = \min_{x \in \Omega} f(x) = f(x_*)$. Зауважимо (див. приклади 1.1 – 1.3), що $\inf_{x \in \Omega} f(x)$ існує завжди, а $\min_{x \in \Omega} f(x)$ може не існувати.

Означення 1.5. Послідовність $\{x_k\} \in \Omega$ називається мінімізуючою, якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \inf_{x \in \Omega} f(x) = f_*$.

Із означення 1.5 та існування нижньої грані витікає, що мінімізуюча послідовність існує завжди.

Означення 1.6. Будемо говорити, що послідовність $\{x_k\}$ збігається до непорожньої множини Ω , якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\rho}(x_k, \Omega) = 0$, де $\hat{\rho}(x, \Omega) = \inf_{z \in \Omega} \rho(x, z)$.

Якщо $\Omega_* \neq \emptyset$, то завжди існує мінімізуюча послідовність, яка збігається до Ω_* . Наприклад, в якості такої послідовності можна взяти стаціонарну послідовність $x_k = x_*, k = 1, 2, \dots$, де x_* – будь-яка точка із Ω_* . Але при $\Omega_* \neq \emptyset$ не всяка мінімізуюча послідовність буде збігатись до Ω_* .

Приклад 1.5. Нехай $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}, \Omega = R^1$. В цьому випадку $f_* = 0, \Omega_* = \{0\}$. Послідовність $x_k = k, k = 1, 2, \dots$ є мінімізуючою, тому що $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = 0$, але $\hat{\rho}(x_k, \Omega_*) = k$. Послідовність же $x_k = 1/k, k = 1, 2, \dots$ являється мінімізуючою і збіжною до Ω_* .

Перейдемо до формулювання постановки задачі мінімізації функції $f(x), x \in \Omega$. Будемо відрізняти задачі двох типів. До першого типу віднесемо задачі, в яких потрібно визначити величину $f_* = \inf_{x \in \Omega} f(x)$. В задачах цього типу не важливо чи буде множина Ω_* не порожньою, чи порожньою. До другого типу віднесемо ті задачі, в яких $\Omega_* \neq \emptyset$ і потрібно, крім f_* , знайти яку-небудь точку $x_* \in \Omega_*$.

Зауважимо, що отримати точні розв'язки задач обох типів вдається у рідких випадках. Тому на практиці для задач першого типу обмежуються побудовою якої-небудь мінімізуючої послідовності x_k , а в якості наближення до величини f_* беруть величину $f(x_k)$ при досить великому k . Для наближеного розв'язку задач другого типу достатньо побудувати мінімізуючу послідовність $\{x_k\}$, яка збігається до множини Ω_* в сенсі означення 1.6, і в якості наближення для f_* і точки $x_* \in \Omega_*$ взяти відповідно величину $f(x_k)$ і точку x_k при досить великому k . Як показує приклад 1.5, на відміну від задач першого типу не всяка мінімізуюча послідовність може бути використана для отримання наближеного розв'язку задач другого типу. Побудова мінімізуючих послідовностей, які збігаються до множини Ω_* , в загальному випадку вимагають застосування спеціальних методів. Зауважимо, що існує клас задач другого типу, в яких кожна мінімізуюча послідовність збігається до множини Ω_* .

Теорема 1.1. (Вейерштрас). Нехай неперервна функція $f(x)$ задана на компактній (обмеженій і замкнутій) множині Ω , або на замкненій множині Ω такій, що $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \infty$, де послідовність $\{x_k\} \in \Omega, \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty, \|\cdot\|$ – норма в R^n . Тоді функція $f(x)$ буде обмеженою знизу, $\Omega_* \neq \emptyset$ і є компактною множиною, будь-яка мінімізуюча послідовність

збігається до Ω_* •

Можлива і більш широка постановка задач мінімізації другого типу, коли розшукуються не тільки точки глобального мінімуму в сенсі означення 1.1, але і точки локального мінімуму в сенсі означення 1.2.

Зупинимось коротко на задачах максимізації функції $f(x)$, $x \in \Omega$.

Означення 1.7. Точку $x^* \in \Omega$ будемо називати точкою глобального максимуму функції $f(x)$ на множині Ω , якщо виконується нерівність

$$f(x) \leq f(x^*) \quad \forall x \in \Omega \quad \bullet \quad (1.3)$$

Означення 1.8. Точку $x^* \in \Omega$ будемо називати точкою локального максимуму функції $f(x)$ на множині Ω , якщо виконується нерівність

$$f(x) \leq f(x^*) \quad \forall x \in O(\epsilon, x^*) \cap \Omega \quad \bullet \quad (1.4)$$

Позначимо $\max_{x \in \Omega} f(x) = f(x^*)$, а через Ω^* – множину точок глобальних максимумів функції $f(x)$.

Означення 1.9. Функція $f(x)$ називається обмеженою зверху на множині Ω , якщо існує таке дійсне число M , що $f(x) \leq M \quad \forall x \in \Omega$. Функція буде необмеженою зверху, якщо існує послідовність $\{x_k\} \in \Omega$, для якої $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \infty$ •

У тих випадках, коли $\Omega^* = \emptyset$ природнім узагальненням поняття найбільшого значення функції є поняття верхньої грані функції.

Означення 1.10. Нехай функція $f(x)$ – обмежена зверху на множині Ω . Тоді число f^* будемо називати верхньою гранню функції $f(x)$ на Ω , якщо 1) $f(x) \leq f^* \quad \forall x \in \Omega$; 2) для любого скільки завгодно малого числа $\epsilon > 0$ знайдеться точка $x_\epsilon \in \Omega$, для якої $f(x_\epsilon) > f^* - \epsilon$. Якщо функція необмежена зверху на Ω , то в якості верхньої грані приймається $f^* = \infty$ •

Верхню грань функції $f(x)$ на Ω позначають через $\sup_{x \in \Omega} f(x) = f^*$.

Якщо $\Omega^* \neq \emptyset$, то $f^* = \sup_{x \in \Omega} f(x) = \min_{x \in \Omega} f(x) = f(x^*)$. Зауважимо, що $\sup_{x \in \Omega} f(x)$ існує завжди, а $\max_{x \in \Omega} f(x)$ може не існувати.

Означення 1.11. Послідовність $\{x_k\} \in \Omega$ називається максимізуючою, якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \sup_{x \in \Omega} f(x) = f^*$ •

Якщо виконуються умови теореми 1.1, то $f^* < \infty, \Omega^* \neq \emptyset$ і будь-яка максимізуюча послідовність x_k збігається до Ω^* .

В задачах максимізації також можна відрізнити задачі двох типів: в задачах першого типу розшукується величина f^* , а в задачах другого типу розшукуються як f^* , так і деяка точка $x^* \in \Omega^*$. Неважко бачити, що

$$\sup_{x \in \Omega} f(x) = - \inf_{x \in \Omega} (-f(x)). \quad (1.5)$$

Тому далі будемо вивчати лише задачі мінімізації. Якщо потрібно знайти як точки мінімуму функції $f(x)$, так і точки її максимуму, то будемо говорити про розв'язання задачі на екстремум.

2. Класичний метод пошуку точок екстремуму функції багатьох змінних. Розглянемо класичний метод пошуку точок екстремуму функції багатьох змінних. Нехай для функції $f(x)$, $x \in R^n$ існує матриця других похідних $f''(x) = \left\{ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{i,j=1}^n$. Нехай $\hat{x}$ – точка локального екстремуму функції $f(x)$. В околі цієї точки за допомогою формули Тейлора функцію можна записати у вигляді

$$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + (f'(\hat{x}), h) + 0.5(f''(\hat{x})h, h) + \alpha(\hat{x}, h), \quad (1.6)$$

де $h = x - \hat{x}$, $f'(\hat{x})$ – градієнт функції $f(x)$ в точці $\hat{x}$ (вектор перших частинних похідних), $(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток двох векторів в R^n , $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(\hat{x}, h)/\|h\|^2 = 0$ при $\|h\| = (h, h)^{1/2} \rightarrow 0$.

Тут зауважимо, що норма, яка породжена евклідовою метрикою, називається евклідовою.

Із (6) витікають необхідні умови оптимальності, які характеризують точку $\hat{x}$, і будуть мати вигляд

$$\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.7)$$

Не всяка стаціонарна точка $\hat{x}$, як розв'язок системи (1.7), буде точкою локального мінімуму або максимуму. Для того щоб стаціонарна точка $\hat{x}$ була точкою локального мінімуму, згідно (6) достатньо, щоб матриця $f''(\hat{x})$ була додатньо визначеною (квадратична форма $(f''(\hat{x})h, h) > 0 \quad \forall h \neq 0$). Для того щоб стаціонарна точка $\hat{x}$ була точкою локального максимуму достатньо, щоб матриця $f''(\hat{x})$ була від'ємно визначеною (квадратична форма $(f''(\hat{x})h, h) < 0 \quad \forall h \neq 0$).

Знакосталість квадратичної форми для числової матриці A визначається критерієм Сільвестра.

Теорема 1.2. Для того щоб квадратична форма, яка визначається числовою матрицею A , була додатньо визначеною, необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності

$$\Delta_i > 0, \quad i = \overline{1, n},$$

де Δ_i – головні мінори матриці A .

Теорема 1.3. Для того щоб квадратична форма, яка визначається числовою матрицею A , була від'ємно визначеною, необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності

$$(-1)^i \Delta_i > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

В тому випадку, коли в стаціонарній точці квадратична форма $(f''(\hat{x})h, h)$ не змінює знаку $\forall h \in R^n$, але може дорівнювати нулю при деяких $h \neq 0$, то для з'ясування поведінки функції в околі точки $\hat{x}$ можна використовувати старші похідні і пов'язані з ними форми більш високого порядку.

Коли вказаним вище шляхом вдається виявити всі точки локальних мінімумів (максимумів), то із них обираємо точки, в яких функція приймає найменше (найбільше) значення, якщо останні існують.

Приклад 1.6. Нехай в R^n задано m точок $y^i, i = \overline{1, m}$. Потрібно знайти точку x_* , яка б мінімізувала функцію $f(x) = \sum_{i=1}^m \|x - y^i\|^2$, де $\|\cdot\|$ – евклідова норма.

Функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми 1. 1: вона неперервна, множина $\Omega = R^n$ замкнута і $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty$. Таким чином, $\Omega_* \neq \emptyset$. Система (1.7) в цьому випадку має вигляд $m x - \sum_{i=1}^m y^i = 0$. Звідси $x = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y^i$. Матриця других похідних $f''(x) = 2 m E^n$, де E^n – одинична матриця в R^n , – додатньо визначена, згідно критерію Сільвестра. Тому найдена точка x є точкою локального мінімуму, а в силу її єдиності – і точкою глобального мінімуму, тобто $x = x_*$.

§ 2. Теорія необхідних і достатніх умов оптимальності в задачі математичного програмування.

Розглянемо задачу мінімізації в загальній постановці:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \Omega \subseteq R^n. \quad (2.1)$$

1. Необхідні умови оптимальності в термінах напрямків.

Означення 2.1. Вектор $h \in R^n$ будемо називати напрямком зменшення функції $f(x)$ в точці $\hat{x} \in R^n$, якщо для досить малих додатніх чисел $\alpha \in R^1$ виконується нерівність $f(\hat{x} + \alpha h) < f(\hat{x})$ •

Множину таких векторів позначимо через $U(\hat{x}, f)$.

Означення 2.2. Вектор $h \in R^n$ будемо називати допустимим напрямком для функції $f(x)$ в точці $\hat{x} \in \Omega$, якщо для досить малих додатніх чисел $\alpha \in R^1$ виконується включення $\hat{x} + \alpha h \in \Omega$ •

Множину таких векторів позначимо через $V(\hat{x}, \Omega)$.

Теорема 2.1. Якщо $\hat{x}_*$ – локальний розв'язок задачі (2.1), то

$$U(\hat{x}_*, f) \cap V(\hat{x}_*, \Omega) = \emptyset \quad (2.2)$$

Доведення. Припустимо, що (2.2) не відповідає дійсності, тобто існує такий напрямок $h \in R^n$, для якого $f(\hat{x}_* + \alpha h) < f(\hat{x}_*)$ і $\hat{x}_* + \alpha h \in \Omega$ при всіх достатньо малих $\alpha > 0$. Це суперечить тому, що точка $\hat{x}_*$ – локальний мінімум функції $f(x)$, $x \in \Omega$ •

Ця теорема тривіальна і свідчить лише про те, що із точки $\hat{x}_*$, яка є локальним розв'язком задачі (2.1), не можна здійснити стільки завгодно малий зсув вздовж будь-якого напрямку так, щоб зменшити значення функції, залишаючись при цьому в межах допустимої множини. Але дана теорема є ідейною основою для отримання більш змістовних умов оптимальності при додаткових припущеннях щодо $f(x)$ та Ω .

2. Деякі результати опуклого аналізу.

Означення 2.3. Непорожня множина $\Omega \in R^n$ називається опуклою, якщо $\alpha x^{(1)} + (1 - \alpha) x^{(2)} \in \Omega \forall x^{(1)}, x^{(2)} \in \Omega, \alpha \in [0, 1]$ •

Означення 2.4. Множина $\Omega \in R^n$ називається афінною, якщо $\alpha x^{(1)} + (1 - \alpha) x^{(2)} \in \Omega \forall x^{(1)}, x^{(2)} \in \Omega, \forall \alpha \in R^1$, тобто якщо Ω разом з будь-якими двома точками $x^{(1)}, x^{(2)}$ містить і пряму, яка проходить через них •

Перетин всіх афінних множин, які містять дану множину Ω , називають її афінною оболонкою та позначають через $\text{aff } \Omega$.

Внутрішність $\text{int } \Omega$ опуклої множини теж буде опуклою, але часто буває порожньою, зокрема, відрізок на площині не має внутрішніх точок. Тим не менше зрозуміло, що в якомусь сенсі всі точки відрізка являються внутрішніми крім його кінців.

Означення 2.5. Точка x множини $\Omega \in R^n$ називається його відносно внутрішньою точкою, якщо $O(\epsilon, x) \cap \text{aff } \Omega \subset \Omega$ при деякому ϵ •

Сукупність всіх відносно внутрішніх точок множини Ω називається його відносною внутрішністю і позначається через $\text{ri } \Omega$.

Теорема 2.2. Нехай множина Ω – опукла. Тоді $\text{ri } \Omega$ – опукла, $\bar{\Omega} = \overline{\text{ri } \Omega}$, $\text{ri } \Omega = \text{ri } \bar{\Omega}$; зокрема, якщо $\text{int } \Omega \neq \emptyset$, то $\bar{\Omega} = \overline{\text{int } \Omega}$, $\text{int } \Omega = \text{int } \bar{\Omega}$ •

В теоремі 2.2 через $\bar{\Omega}$ позначено операцію замикання множини Ω .

Означення 2.6. Функція називається опуклою, якщо вона визначена на опуклій множині і для неї виконується нерівність

$$f(\alpha x^{(1)} + (1 - \alpha)x^{(2)}) \leq \alpha f(x^{(1)}) + (1 - \alpha) f(x^{(2)})$$

$$\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in \Omega, \forall \alpha \in [0, 1] \quad (2.3)$$

Якщо $\alpha \in (0, 1)$ і знак рівності в (2.3) досягається лише при $x^{(1)} = x^{(2)}$, то функція $f(x)$ – строго опукла.

Вкажемо деякі прості операції над опуклими функціями, результатом яких будуть знову

опуклі функції.

Якщо $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ – опуклі функції на опуклій множині $\Omega \in R^n$, то функції вигляду

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x), \alpha_i \in R^1, \alpha_i \geq 0,$$

$$f(x) = \max_{i=\overline{1, m}} f_i(x)$$

будуть опуклими на Ω .

Теорема 2.3. (Диференціальний критерій опуклості функції.) Нехай функція $f(x)$ є двічі диференційовною на опуклій множині Ω , $\text{int } \Omega \neq \emptyset$. Вона буде строго опуклою (опуклою) на цій множині тоді і тільки тоді, коли матриця других похідних $f''(x)$ буде додатньо визначеною (невід'ємно визначеною) $\forall x \in \Omega$.

Якщо в задачі (2.1) функція $f(x)$ опукла, то задача на пошук мінімуму називається опуклою.

Теорема 2.4. Нехай задача (2.1) опукла. Тоді будь-який її локальний розв'язок є також і глобальним.

Доведення. Нехай $\hat{x}_*$ – локальний розв'язок задачі (2.1), тобто при деякому $\epsilon > 0$ виконується нерівність (1.2). Для будь-якої точки $x \in \Omega$, $x \neq \hat{x}_*$, покладемо $\alpha = \min\{\epsilon/||x - \hat{x}_*||, 1\}$. Тоді $\alpha x + (1 - \alpha)\hat{x}_* \in \Omega \cap O(\epsilon, \hat{x}_*)$. Дійсно, при $\alpha = 1$ це включення очевидне. Якщо $\alpha < 1$, то точка $y = \alpha x + (1 - \alpha)\hat{x}_* = \hat{x}_* + \epsilon (x - \hat{x}_*)/||x - \hat{x}_*||$ також буде належати околу точки $\hat{x}_*$. Звідси витікає, що

$$f(\hat{x}_*) \leq f(\alpha x + (1 - \alpha)\hat{x}_*) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(\hat{x}_*),$$

тобто $f(\hat{x}_*) \leq f(x) \forall x \in \Omega$. Таким чином, $\hat{x}_* = x_*$.

Теорема 2.5. Нехай задача (2.1) опукла та має розв'язок. Тоді множина Ω_* – опукла. Якщо ж функція $f(x)$ – строго опукла, то множина Ω_* містить лише одну точку.

Крім наведених вище фактів опуклого, далі нам будуть потрібні поняття опуклого конусу та спряженого конусу.

Означення 2.7. Множина $K \subset R^n$ називається конусом, якщо із того, що $x \in K$ випливає, що для $\lambda > 0$ точка $\lambda x \in K$.

Конус K буде опуклим, якщо із того, що $x^1, x^2 \in K$ випливає, що для $\alpha, \beta > 0$ точка $\alpha x^1 + \beta x^2 \in K$.

Означення 2.8. Множина $K^* \subset R^n$ називається спряженим конусом, якщо $(e, x) \geq 0 \forall x \in K, e \in K^*$.

Теорема 2.6. Нехай $K_0, K_1, \dots, K_m$ – непорожні опуклі конуси із R^n (з вершиною в нулі), нехай ці конуси, крім, може одного, є відкритими. Тоді для того щоб

$$K_0 \cap K_1 \cap \dots \cap K_m = \emptyset,$$

необхідно і достатньо, щоб існували вектори $c_0, c_1, \dots, c_m$, не всі рівні нулю, $c_i \in K_i^*$, $i = \overline{0, m}$ і такі, що

$$c_0 + c_1 + \dots + c_m = 0.$$

3. Диференціальні умови оптимальності у випадку опуклості множини визначення функції.

Теорема 2.7. Якщо в задачі (2.1) множина Ω опукла, функція $f(x)$ диференційовна в точці $\hat{x}_*$, тоді

1) якщо точка $\hat{x}_*$ – локальний розв'язок задачі (8), то

$$(f'(\hat{x}_*), x - \hat{x}_*) \geq 0 \forall x \in \Omega; \quad (2.4)$$

2) якщо функція $f(x)$ опукла на Ω і виконується умова (2.4), то $\hat{x}_*$ – глобальний розв'язок задачі (8).

Доведення. 1) Припустимо, що умова (2.4) не виконується, тобто $(f'(\hat{x}_*), \bar{x} - \hat{x}_*) < 0$ при

деякому $\bar{x} \in \Omega$. Покладемо $h = \bar{x} - \hat{x}_*$. Тоді, згідно з (1.6), отримаємо включення $h \in U(\hat{x}_*, f)$. З іншого боку, в силу опуклості Ω для довільного $\alpha \in [0, 1]$ будемо мати $\hat{x}_* + \alpha h = \alpha \bar{x} + (1 - \alpha)\hat{x}_* \in \Omega$, тобто $h \in V(\hat{x}_*, \Omega)$. Це суперечить теоремі 2.1.

2) Покладемо в нерівності (10) $x^{(1)} = x, x^{(2)} = \hat{x}_*$. Перепишемо її у вигляді

$$f(x) - f(\hat{x}_*) \geq \frac{f(\hat{x}_* + \alpha(x - \hat{x}_*)) - f(\hat{x}_*)}{\alpha}.$$

Якщо в отриманій нерівності здійснити граничний перехід $\alpha \rightarrow 0$ і врахувати нерівність (2.4), то переконуємось, що $\hat{x}_*$ – глобальний розв'язок задачі (8), тобто $\hat{x}_* = x_*$.

Геометрично умова (11) означає (рис.2.1), що градієнт $f'(\hat{x}_*)$ (якщо він не дорівнює нулеві) утворює нетупий кут з вектором, направленим із точки $\hat{x}_*$ в любую точку $x \in \Omega$.

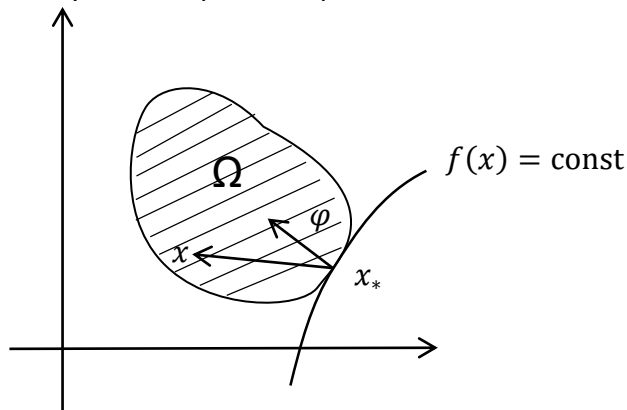


Рис. 2.1

Конкретизуємо умову (2.4) в деяких частинних випадках.

Лема 2.1. Якщо $\hat{x}_* \in \text{int } \Omega$, то умова (2.4) еквівалентна умові

$$f'(\hat{x}_*) = 0, \quad (2.5)$$

де через int позначено внутрішність множини Ω .

Доведення. При досить малих $\alpha > 0$ точка $x = x_* - \alpha f'(\hat{x}_*) \in \Omega$. Підставляючи x в (2.4), отримаємо (2.5). Зворотня імплікація очевидна.

Таким чином, для задачі безумовної оптимізації ($\Omega = R^n$) теорема 2.2 не дає нічого нового порівняно з результатами лекції 1.

Лема 2.2. Нехай Ω – поліедр, тобто

$$\Omega = \{x \in R^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1, n}\}, \quad (2.6)$$

де $-\infty \leq a_i < b_i \leq \infty, i = \overline{1, n}$ (якщо $a_i = -\infty$ або $b_i = \infty$, то відповідний знак нерівності в (2.6) слід розуміти як строгий). Тоді умова (2.4) буде еквівалентною умові

$$\frac{\partial f(\hat{x}_*)}{\partial x_i} \begin{cases} = 0, & a_i < \hat{x}_{*,i} < b_i, \\ \geq 0, & \hat{x}_{*,i} = a_i \neq -\infty, \\ \leq 0, & \hat{x}_{*,i} = b_i \neq \infty. \end{cases} \quad (2.7)$$

Доведення. Нехай в нерівності (2.4) $x_i = \hat{x}_{*,i}$ для всіх i , крім $i = k$. Тоді остання приймає вигляд

$$(f'(\hat{x}_*), x - \hat{x}_*) = \frac{\partial f(\hat{x}_*)}{\partial x_k} (x_k - \hat{x}_{*,k}) \geq 0, \forall x_k \in [a_k, b_k],$$

а це еквівалентно (2.7).

Лема 2.3. Нехай

$$\Omega = \{x \in R^n : x_i \geq 0, i = \overline{1, s}\},$$

де $0 \leq s \leq n$ ($s = 0$ відповідає випадку $\Omega = R^n$). Тоді умова (2.4) буде еквівалентною

сукупності умов

$$\frac{\partial f(\hat{x}_*)}{\partial x_i} \geq 0, \hat{x}_* \frac{\partial f(\hat{x}_*)}{\partial x_i} = 0, i = \overline{1, s}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial f(\hat{x}_*)}{\partial x_i} = 0, i = \overline{s+1, n} \bullet \quad (2.9)$$

Приклад 2.1. Знайти всі точки $\hat{x}_*$ для задачі:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \rightarrow \min,$$

$$\Omega = \{x \in R^2: -1 \leq x_1 \leq 1, x_2 \geq 2\}. \quad (2.10)$$

Згідно леми 2.2, будь-який розв'язок задачі (2.10) повинен задовольняти умовам

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2 \begin{cases} = 0, & -1 < x_1 < 1, \\ \geq 0, & x_1 = -1, \\ \leq 0, & x_1 = 1; \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 \begin{cases} = 0, & x_2 > 2, \\ \geq 0, & x_2 = 2. \end{cases} \quad (2.12)$$

Далі потрібно скласти шість систем шляхом попарного комбінування співвідношень із (18), (19).

Наприклад, перші дві системи мають вигляд

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 0, & -1 < x_1 < 1, \\ x_1 + 2x_2 = 0, & x_2 > 2; \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 0, & -1 < x_1 < 1, \\ x_1 + 2x_2 \geq 0, & x_2 = 2. \end{cases} \quad (2.14)$$

Потім потрібно знайти розв'язок кожної із систем і дослідити їх на оптимальність. Але перед цим варто провести якісний аналіз задачі.

По-перше, в цій задачі множина Ω – опукла, функція $f(x)$ – квадратична і, згідно з критерієм Сільвестра, матриця других похідних для неї є додатньо визначеною, тобто ця функція – строго опукла; по-друге, в силу теореми 2.5 – множина Ω_* містить лише одну точку; по-третє, лише в цій точці виконуються умови (2.11) – (2.12). Таким чином, із можливих шести систем лише одна буде мати розв'язок і то буде глобальний розв'язок нашої задачі.

Розглянемо системи (2.13), (2.14). Перша із них – несумісна. Друга має єдиний розв'язок $x_* = (-0.5; 2)$, який і буде розв'язком задачі (2.10) •

4. Диференціальні умови оптимальності в задачі математичного програмування. Розглянемо задачу вигляду

$$f(x) \rightarrow \min,$$

$$g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, k},$$

$$g_i(x) = 0, i = \overline{k+1, m}, x \in U_0 \subset R^n. \quad (2.15)$$

Порівнюючи задачу (2.15) із задачею (2.1), допустиму множину для першої ми повинні задати у вигляді

$$\Omega = \{x \in U_0 \subset R^n: g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, k}; g_i(x) = 0, i = \overline{k+1, m}\}. \quad (2.16)$$

Зв'яжемо із задачею (2.15) множину векторів

$$\Lambda = \{\lambda \in R^m: \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, k}\}. \quad (2.17)$$

Для задачі (2.15) уведемо функцію Лагранжа

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x). \quad (2.18)$$

Гradient функції Лагранжа по x будемо позначати через $L'_x(x, \lambda_0, \lambda)$.

Теорема 2.8. (Принцип Лагранжа). Нехай в задачі (2.15) множина U_0 – опукла, функції $f(x), g_i(x), i = \overline{1, k}$ – диференційовні в точці $\hat{x}_* \in U_0$, функції $g_i(x), i = \overline{k+1, m}$ – диференційовні в околі точки $\hat{x}_*$. Якщо $\hat{x}_*$ – локальний розв'язок задачі (2.15), то існують число $\lambda_{0,*} \geq 0$ і вектор $\lambda_* \in \Lambda$, не рівні одночасно нулеві і такі, що

$$(L'_x(\hat{x}_*, \lambda_{0,*}, \lambda_*), x - \hat{x}_*) \geq 0 \quad \forall x \in U_0, \quad (2.19)$$

$$\lambda_{i,*} g_i(\hat{x}_*) = 0, \quad i = \overline{1, k}. \quad (2.20)$$

Доведення цієї теореми в спрощеному варіанті буде наведено нижче. Поки ж зробимо декілька зауважень з приводу її формулювання.

Довільна точка $\hat{x}_* \in \Omega$, що задовольняє умовам (2.19) – (2.20) при деяких $\lambda_{0,*} \geq 0, \lambda_* \in \Lambda, (\lambda_{0,*}, \lambda_*) \neq 0$, називається стаціонарною точкою задачі (2.15). Принцип Лагранжа стверджує, що при вказаних припущеннях будь-який локальний розв'язок задачі (2.15) являється стаціонарною точкою. Зворотнє гарантується лише при додаткових припущеннях щодо задачі (2.15).

Числа $\lambda_{i,*}, i = \overline{0, m}$ називаються множниками Лагранжа. Вони визначені з точністю до додатної постійної. Це дозволяє розглядати в теоремі 2.8 лише два випадки: $\lambda_{0,*} = 0$ або $\lambda_{0,*} = 1$. Любе додаткове припущення, яке забезпечує в рамках даної теореми випадок $\lambda_{0,*} = 1$, називають умовою регулярності. Саму задачу (2.15) при цьому називають регулярною. Для регулярної задачі функція Лагранжа має вигляд

$$L(x, \lambda) = L(x, 1, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x). \quad (2.21)$$

Для регулярної задачі опуклого програмування умови (2.19) – (2.20) є не тільки необхідними, але й достатніми.

Теорема 2.9. Нехай в задачі (2.15) множина U_0 – опукла, функції $f(x), g_i(x), i = \overline{1, k}$ – опуклі на U_0 та диференційовні в точці $\hat{x}_* \in \Omega$, функції $g_i(x), i = \overline{k+1, m}$ – лінійні. Якщо при $\lambda_{0,*} = 1$ і деякому $\lambda_* \in \Lambda$ виконуються умови (2.19) - (2.20), то $\hat{x}_* = x_*$.

Доведення. В даному випадку функція $L(x, \lambda_*)$ опукла на множині Ω . Тоді, згідно другої частини теореми 2.7, точка $\hat{x}_*$ є точкою глобального мінімуму для функції $L(x, \lambda_*)$, тобто

$$L(\hat{x}_*, \lambda_*) \leq L(x, \lambda_*) \quad \forall x \in U_0,$$

і для любого $x \in \Omega$ будемо мати

$$f(\hat{x}_*) = f(\hat{x}_*) + \sum_{i=1}^m g_i(\hat{x}_*) \lambda_{i,*} = L(\hat{x}_*, \lambda_*) \leq L(x, \lambda_*) =$$

$$= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) \lambda_{i,*} \leq f(x),$$

тобто $\hat{x}_* = x_*$.

Наведемо деякі випадки реалізації умови (2.19) при конкретизації множини U_0 . З цією метою застосуємо лемми 2.1 - 2.3 до функції Лагранжа $L(x_*, \lambda_{0,*}, \lambda_*)$. Тоді має місце

Лема 2.4. 1) Якщо $U_0 = R^n$, то умова (2.19) еквівалентна умові

$$L'_x(\hat{x}_*, \lambda_{0,*}, \lambda_*) = 0;$$

2) якщо

$$U_0 = \{x \in R^n: a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1, n}\},$$

де $-\infty \leq a_i < b_i \leq \infty, i = \overline{1, n}$ (коли $a_i = -\infty$ або $b_i = \infty$, то відповідний знак нерівності слід розуміти як строгий).

Тоді умова (2.19) буде еквівалентною умові

$$\frac{\partial L(\hat{x}_*, \lambda_{0,*}, \lambda_*)}{\partial x_i} \begin{cases} = 0, & a_i < \hat{x}_{*,i} < b_i, \\ \geq 0, & \hat{x}_{*,i} = a_i \neq -\infty, \\ \leq 0, & \hat{x}_{*,i} = b_i \neq \infty, i = \overline{1, n}; \end{cases}$$

3) якщо

$$U_0 = \{x \in R^n: x_i \geq 0, i = \overline{1, s}\},$$

де $0 \leq s \leq n$ ($s = 0$ відповідає випадку $P = R^n$). Тоді умова (2.19) буде еквівалентною сукупності умов

$$\frac{\partial L(\hat{x}_*, \lambda_{0,*}, \lambda_*)}{\partial x_i} \geq 0, \hat{x}_* \frac{\partial L(\hat{x}_*, \lambda_{0,*}, \lambda_*)}{\partial x_i} = 0, i = \overline{1, s},$$

$$\frac{\partial L(\hat{x}_*, \lambda_{0,*}, \lambda_*)}{\partial x_i} = 0, i = \overline{s+1, n} \bullet$$

Для довільної точки $x \in U_0$ введемо множини

$$I(x) = \{i: g_i(x) = 0, 1 \leq i \leq k\},$$

$$S(x) = I(x) \cup \{k+1, \dots, m\} = \{i: g_i(x) = 0, 1 \leq i \leq m\}.$$

Обмеження – нерівності з індексами $j \in I(x)$ називаються активними в точці x , а інші – пасивними. Умову (2.20) називають умовою доповнюючої нежорсткості і вона означає, що множники Лагранжа, які відповідають пасивним обмеженням – нерівностям, повинні дорівнювати нулю при всіх $i \in \{1, \dots, k\} \setminus I(\hat{x}_*)$. Тоді із умов (2.19) - (2.20) отримаємо

$$(\lambda_{0,*} f'(\hat{x}_*) + \sum_{i \in S(\hat{x}_*)} \lambda_{i,*} g'_i(\hat{x}_*), x - \hat{x}_*) \geq 0 \quad \forall x \in U_0. \quad (2.22)$$

З'ясуємо геометричний зміст принципу Лагранжа у випадку, коли $k = m, U_0 = R^n$ (рис. 2.2). Умова (2.22) при цьому набуває вигляду

$$\lambda_{0,*} f'(\hat{x}_*) + \sum_{i \in I(\hat{x}_*)} \lambda_{i,*} g'_i(\hat{x}_*) = 0. \quad (2.23)$$

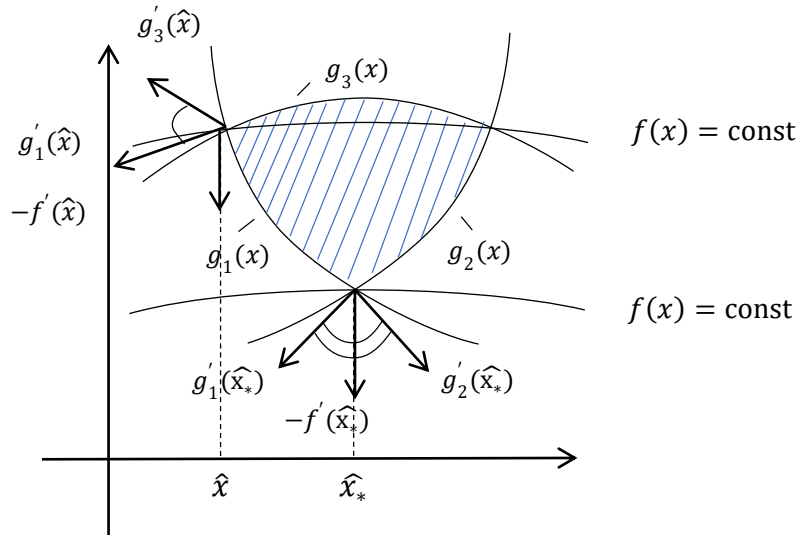


Рис. 2.2

При $\lambda_{0,*} = 1$ умова (2.23) означає, що антиградієнт цільової функції є невід'ємною лінійною комбінацією градієнтів функцій, що утворюють активні обмеження в точці $\hat{x}_*$. Іншими словами можна сказати так: антиградієнт цільової функції належить конусу, натягнутому на градієнти активних обмежень в точці $\hat{x}_*$. Якщо в деякій точці $\hat{x}$ ця умова не виконується, то ця точка не може бути точкою локального мінімуму для функції $f(x)$ на множині Ω : із неї можна зміститись, лишаючись в межах Ω і зменшуючи при цьому значення f .

Геометричний зміст умови (2.23) при $\lambda_{0,*} = 0$ розглянемо на прикладі (рис. 2.3.):

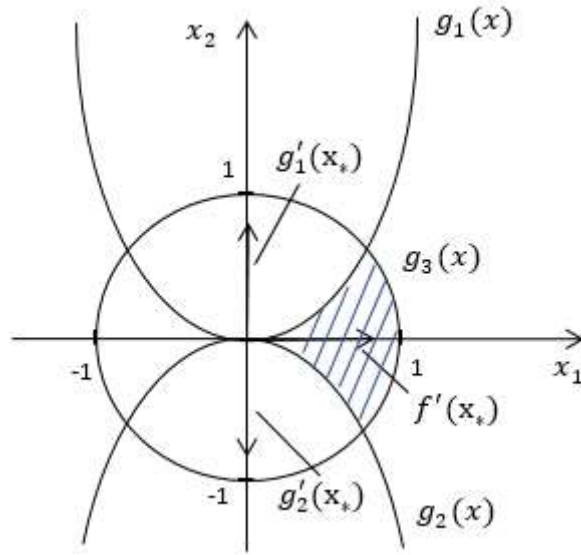


Рис. 2.3

$$f(x) = x_1 \rightarrow \min,$$

$$g_1(x) = -x_1^3 + x_2 \leq 0, g_2(x) = -x_1^3 - x_2 \leq 0,$$

$$g_3(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, x \in R^2.$$

Метод ліній рівня для цільової функції дає такий результат: $\hat{x}_* = x_* = (0,0)$. Активними в точці x_* являються перше та друге обмеження. При цьому

$$f'(x_*) = (1,0), g_1'(x_*) = (0,1), g_2'(x_*) = (0,-1).$$

Зрозуміло, що вектор $f'(x_*)$ неможливо представити у вигляді лінійної комбінації векторів $g_1'(x_*)$, $g_2'(x_*)$: рівність (2.23) тут виконується, якщо $\lambda_{0,*} = 0, \lambda_{1,*} = \lambda, \lambda_{2,*} = -\lambda, \lambda > 0$. В цьому випадку вектори $g_1'(x_*), g_2'(x_*)$ — лінійно залежні.

Доведення принципу Лагранжа. Проведемо відповідні міркування для випадку, коли $\text{int } P \neq \emptyset$.

Спочатку уточнемо означення множини $U(\hat{x}_*, f)$ напрямків зменшення функції $f(x)$ в деякій точці $\hat{x}_* \in \Omega$ та допустимої множини напрямків $V(\hat{x}_*, \Omega)$ із пункту 1.

Означення 2.9. Вектор $h \in R^n$ будемо називати напрямком зменшення функції $f(x)$ в точці $\hat{x} \in R^n$, якщо існують числа $\varepsilon > 0, \delta > 0$ такі, що при всіх $\bar{h} \in O(\delta, h) = \{\bar{h} \in R^n: \|\bar{h} - h\| < \delta\}$ і всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ виконується нерівність $f_0(\hat{x} + \varepsilon \bar{h}) < f_0(\hat{x})$.

Множину таких векторів позначимо через $K(\hat{x}, f)$.

Лема 2.5. Якщо $K(\hat{x}, f) \neq \emptyset$, то $K(\hat{x}, f)$ є відкритим конусом •

Означення 2.10. Вектор $h \in R^n, h \neq 0$ будемо називати внутрішнім напрямком деякої множини U в точці $\hat{x} \in U$, якщо існують числа $\varepsilon_0 > 0, \delta > 0$ такі, що при всіх $\bar{h} \in O(\delta, h) = \{\bar{h} \in R^n: \|\bar{h} - h\| < \delta\}$ і всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ має місце включення $\hat{x} + \varepsilon \bar{h} \in U$.

Множину всіх внутрішніх напрямків множини U в точці $\hat{x}$ позначимо через $K(\hat{x}, U)$.

Лема 2.6. Якщо $K(\hat{x}, U) \neq \emptyset$, то з необхідністю $\text{int } U \neq \emptyset$ і $K(\hat{x}, U)$ є відкритим конусом. Якщо $\hat{x} \in \text{int } U$, то $K(\hat{x}, U) = R^n$ •

Означення 2.11. Вектор $h \in R^n$ будемо називати дотичним напрямком до деякої множини U в точці $\hat{x} \in U$, якщо існують число $\varepsilon_0 > 0$ і функція $r'(\varepsilon) = (r_1(\varepsilon), \dots, r_n(\varepsilon)), \varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ такі,

що $r(0) = 0, \frac{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ і має місце включення $\hat{x} + \varepsilon h + r(\varepsilon) \in U \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Множину всіх дотичних напрямків до множини U в точці $\hat{x}$ позначимо через $K_d(\hat{x}, U)$.

Лема 2.7. Множина $K_d(\hat{x}, U)$ – замкнутий конус •

У зв'язку з означеними вище множинами у вигляді конусів, сформулюємо допоміжну необхідну умову оптимальності для вихідної задачі, яка буде аналогічною умові оптимальності в термінах напрямків (теорема 2.1.) З цією метою переформулюємо вихідну задачу в іншому вигляді. Уведемо множини

$$U_i = \{x \in R^n: g_i(x) \leq 0\}, i = \overline{1, k},$$

$$U_{k+1} = \{x \in R^n: g_i(x) = 0, i = \overline{k+1, m}\}.$$

Тоді множину (2.16) можна представити у вигляді

$$\Omega = \bigcap_{i=0}^{k+1} U_i,$$

а для вихідної задачі буде мати місце наступна лема.

Лема 2.8. Нехай $\hat{x}_* \in U_0$ – локальний розв'язок задачі (2.15), нехай $K(\hat{x}_*, f)$ – конус зменшення функції $f(x)$ в точці $\hat{x}_*$, $K(\hat{x}_*, U_i)$ – конус внутрішніх напрямків множини U_i , $i = \overline{0, k}$ в точці $\hat{x}_*$, $K_d(\hat{x}_*, U_{k+1})$ – конус дотичних напрямків множини U_{k+1} , в точці $\hat{x}_*$. Тоді з необхідністю має місце умова

$$K(\hat{x}_*, f) \cap K(\hat{x}_*, U_0) \cap K(\hat{x}_*, U_1) \cap \dots \cap K(\hat{x}_*, U_k) \cap K_d(\hat{x}_*, U_{k+1}) \neq \emptyset \bullet$$

Сформульована лема є узагальненням теореми 2.1 на екстремальні задачі більш складної структури.

Розглянемо далі структуру конусів $K(\hat{x}_*, f), K(\hat{x}_*, U_0), \dots, K(\hat{x}_*, U_k), K_d(\hat{x}_*, U_{k+1})$ та двоїстих до них конусів $K^*(\hat{x}_*, f), K^*(\hat{x}_*, U_0), \dots, K_d^*(\hat{x}_*, U_{k+1})$, якщо виконуються умови теореми 2.8. Зауважимо, що теорема 2.8 вимагає окремого доведення лише для випадку, коли $f'(\hat{x}_*) \neq 0, g'_i(\hat{x}_*) \neq 0, i = \overline{1, k}$, і вектори $g'_{k+1}(\hat{x}_*), \dots, g'_m(\hat{x}_*)$ – лінійно незалежні. Дійсно, якщо $f'(\hat{x}_*) = 0$, то в якості множників Лагранжа в теоремі 2.8 можна взяти $\lambda_{0,*} = 1, \lambda_{1,*} = \dots = \lambda_{m,*} = 0$. Якщо $g'_i(\hat{x}_*) = 0$ при деякому $i, i = \overline{1, k}$, то можемо прийняти $\lambda_{i,*} = 1, \lambda_{j,*} = 0, j = \overline{0, m}, j \neq i$. Якщо вектори $g'_{k+1}(\hat{x}_*), \dots, g'_m(\hat{x}_*)$ – лінійно залежні, то існують числа $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m$ не рівні нулю одночасно і такі, що виконується рівність

$$\alpha_{k+1} g'_{k+1}(\hat{x}_*) + \dots + \alpha_m g'_m(\hat{x}_*) = 0.$$

Тоді в теоремі 2.8 можна прийняти $\lambda_{0,*} = \dots = \lambda_{k,*} = 0, \lambda_{i,*} = \alpha_i, i = \overline{k+1, m}$.

Лема 2.9. Нехай $f(x) \in C^1(R^n), f'(\hat{x}_*) \neq 0$. Тоді конус $K(\hat{x}_*, f)$ є відкритим, опуклим і має вигляд

$$K(\hat{x}_*, f) = \{h \in R^n: (f'(\hat{x}_*), h) < 0\},$$

а двоїстим до нього є конус

$$K^*(\hat{x}_*, f) = \{c \in R^n: c = -\lambda f'(\hat{x}_*), \lambda \geq 0\} \bullet$$

Лема 2.10. Нехай $g_i(x) \in C^1(R^n), g'_i(\hat{x}_*) \neq 0, i = \overline{1, k}$. Тоді конус $K(\hat{x}_*, U_i)$ є відкритим і опуклим, причому конус $K(\hat{x}_*, U_i)$ і двоїстий до нього конус $K^*(\hat{x}_*, U_i)$ описуються наступним чином:

а) якщо $g_i(\hat{x}_*) < 0$, то

$$K(\hat{x}_*, U_i) = R^n, K^*(\hat{x}_*, U_i) = \{0\};$$

б) якщо $g_i(\hat{x}_*) = 0$, то

$$K(\hat{x}_*, U_i) = \{h \in R^n: (g'_i(\hat{x}_*), h) < 0\},$$

$$K^*(\hat{x}_*, U_i) = \{c \in R^n: c = -\lambda g'_i(\hat{x}_*), \lambda \geq 0\} \bullet$$

Лема 2.11. Нехай опукла множина $U_0 \subset R^n, \text{int } U_0 \neq \emptyset$. Тоді конус $K(\hat{x}_*, U_0)$ є відкритим і опуклим, причому конус $K(\hat{x}_*, U_0)$ і двоїстий до нього конус $K^*(\hat{x}_*, U_0)$ описуються наступним чином:

а) якщо $\hat{x}_* \in \text{int } U_0$, то

$$K(\hat{x}_*, U_0) = R^n, K^*(\hat{x}_*, U_0) = \{0\};$$

б) якщо $\hat{x}_*$ – гранична точка множини U_0 , то

$$K(\hat{x}_*, U_0) = \{h \in R^n: h = \lambda(x - \hat{x}_*), \lambda > 0, x \in \text{int } U_0\},$$

$$K^*(\hat{x}_*, U_0) = \{c \in R^n: (c, x - \hat{x}_*) \geq 0 \ \forall x \in U_0\} \bullet$$

Лема 2.12. Нехай $g_i(x) \in C^1(R^n)$, $g'_i(\hat{x}_*) \neq 0$, $i = \overline{k+1, m}$, а вектори $g'_i(\hat{x}_*)$, $i = \overline{k+1, m}$ – лінійно незалежні. Тоді конус $K_d(\hat{x}_*, U_{k+1})$ є замкнутим і опуклим, причому конус $K_d(\hat{x}_*, U_{k+1})$ і двоїстий до нього конус $K_d^*(\hat{x}_*, U_{k+1})$ описуються наступним чином:

$$K_d(\hat{x}_*, U_{k+1}) = \{h \in R^n: (g'_i(\hat{x}_*), h) = 0, i = \overline{k+1, m}\},$$

$$K_d^*(\hat{x}_*, U_{k+1}) = \{c \in R^n: c = - \sum_{j=k+1}^m \lambda_j g'_j(\hat{x}_*), \lambda_i \in R^n, i = \overline{k+1, m}\} \bullet$$

Важливо зауважити, що конуси $K(\hat{x}_*, f), K(\hat{x}_*, U_0), K(\hat{x}_*, U_1), \dots, K(\hat{x}_*, U_k)$ – опуклі і відкриті, а конус $K_d(\hat{x}_*, U_{k+1})$ – опуклий і замкнутий і всі вони є непорожніми.

Оскільки точка $\hat{x}_* \in U_0$ є точкою локального мінімуму функції $f(x)$ на множині $\Omega = \bigcap_{i=0}^{k+1} U_i$, то, згідно леми 2.8, конуси $K(\hat{x}_*, f), K(\hat{x}_*, U_0), K(\hat{x}_*, U_1), \dots, K(\hat{x}_*, U_k), K_d(\hat{x}_*, U_{k+1})$ мають порожній перетин. Тоді по теоремі 2.6 існують вектори $c_f, c_0, \dots, c_{k+1}$, не всі рівні нулю і такі, що

$$c_f \in K^*(\hat{x}_*, f), c_i \in K^*(\hat{x}_*, U_i), i = \overline{0, k}, c_{k+1} \in K_d^*(\hat{x}_*, U_{k+1}),$$

$$c_f + c_0 + \dots + c_{k+1} = 0.$$

Враховуючи опис двоїстих конусів, який зафіксовано у лемах 2.9 – 2.12, можемо сказати, що

$$c_f = - \lambda_0^* f'(\hat{x}_*), c_i = - \lambda_i^* g'_i(\hat{x}_*), i = \overline{1, k}, c_{k+1} = - \sum_{i=k+1}^m \lambda_i^* g'_i(\hat{x}_*),$$

де $\lambda_i^* \geq 0$, $i = \overline{0, k}$.

Із наведеної вище рівності нулю суми елементів двоїстих конусів отримаємо

$$c_0 = - c_f - \dots - c_{k+1} = \lambda_0^* f'(\hat{x}_*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g'_i(\hat{x}_*).$$

Тоді, згідно леми 2.12, отримаємо

$$(c_0, x - \hat{x}_*) = (\lambda_0^* f'(\hat{x}_*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g'_i(\hat{x}_*), x - \hat{x}_*) \geq 0 \ \forall x \in U_0,$$

тобто нерівність (2.19).

Нехай для деякого i , $i = \overline{1, k}$ виконується нерівність $g_i(\hat{x}_*) < 0$. Тоді $K^*(\hat{x}_*, U_i) = \{0\}$ і $c_i = \lambda_i^* g'_i(\hat{x}_*) = 0$. В силу того, що $g'_i(\hat{x}_*) \neq 0$, отримаємо $\lambda_i^* = 0$, тобто $\lambda_i^* g'_i(\hat{x}_*) = 0$. Якщо ж для деякого i , $i = \overline{1, k}$ виконується рівність $g_i(\hat{x}_*) = 0$, то тим більше $\lambda_i^* g'_i(\hat{x}_*) = 0$, що і доводить рівності (2.20) •

5. Умови регулярності.

Теорема 2.10. Нехай виконуються умови теореми 2.8 і додатково виконується хоч би одна із наступних умов:

1) обмеження - рівності відсутні, тобто $k = m$, і існує точка $\bar{x} \in U_0$ така, що $g_i(\bar{x}) < 0 \ \forall i = \overline{1, k}$;

2) множина U_0 – поліедр, функції $g_1(x), \dots, g_k(x)$ – лінійні;

3) множина U_0 – поліедр, функції $g_{l+1}(x), \dots, g_k(x) (0 < l \leq k)$ – лінійні і

існує точка $\bar{x} \in U_0$ така, що $g_i(\bar{x}) < 0 \forall i = \overline{1, l}$;

4) функції $g_{l+1}(x), \dots, g_k(x) (0 \leq l \leq k)$ – лінійні і існує точка $\bar{x} \in ri U_0 \cap \Omega$ така, що $g_i(\bar{x}) < 0 \forall i = \overline{1, l}$.

Якщо $\hat{x}_*$ – локальний розв'язок задачі (2.15), то існує такий вектор $\lambda_* \in \Lambda$, що при $\lambda_{0,*} = 1$ виконуються умови (2.19) – (2.20) •

Приклад 2.2. Знайти всі точки $\hat{x}_*$ для задачі:

$$f(x_1, x_2) = x_2 \rightarrow \min,$$

$$\Omega = \{x \in R^2: g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, g_2(x) = -x_1 + x_2^2 \leq 0,$$

$$g_3(x) = -x_1 - x_2 \leq 0\}. \quad (2.24)$$

Використовуючи метод ліній рівня, переконуємось в тому, що точка $x_* = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ є розв'язком задачі (2.24) (рис. 2.4.)

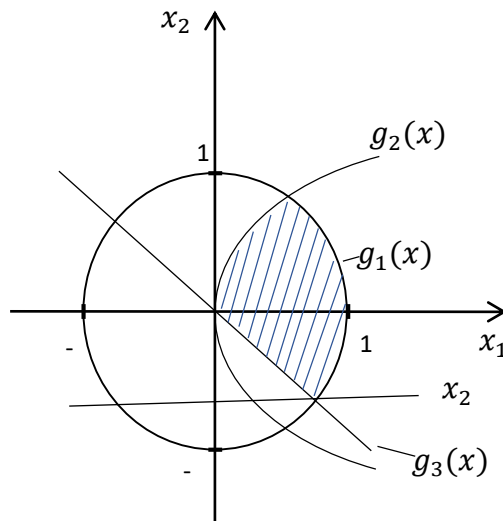


Рис. 2.4

Покажемо тепер це строго. Згідно теорем 1.1, 2.5, множина Ω_* – не порожня та опукла. Залача (2.24) задовольняє умові 1) теореми 2.10, тобто є регулярною. Функція Лагранжа для неї має вигляд

$$L(x, \lambda) = x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(-x_1 + x_2^2) - \lambda_3(x_1 + x_2).$$

Умови оптимальності (2.19) - (2.20) при цьому запишуться таким чином

$$2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0, 1 + 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_2 x_2 - \lambda_3 = 0,$$

$$\lambda_1 \geq 0, x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0,$$

$$\lambda_2 \geq 0, -x_1 + x_2^2 \leq 0, \lambda_2(-x_1 + x_2^2) = 0,$$

$$\lambda_3 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 0, \lambda_3(x_1 + x_2) = 0.$$

В знайдений із геометричних міркувань точці перше і третє обмеження будуть активними, а друге – пасивним. Тому при підстановці цієї точки в систему оптимальності будемо мати $\lambda_2 = 0$,

$$\sqrt{2}\lambda_1 - \lambda_3 = 0, 1 - \sqrt{2}\lambda_1 - \lambda_3 = 0, \lambda_1, \lambda_3 \geq 0.$$

Звідси знаходимо, що $\lambda_1 = \sqrt{2}/4, \lambda_2 = 1/2$. Тому, згідно теореми 2.5, точка x_* є шуканою. В інших випадках системи, отримані з умов оптимальності, будуть несумісними •

6. Неокласичні статичні моделі мікроекономіки.

Приклад 2.3. (Неокласична модель споживчого вибору [2, 29].) Нехай $R_+^n = \{x \in R^n: x_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}$ – товарний простір. $U(x)$ – функція корисності споживача, яка характеризує відношення переваги на R_+^n . Задамо на просторі товарів споживчий симплекс

$$S_n = \{x \in R_+^n: x' p = \sum_{k=1}^n x_i p_i \leq I\},$$

де $p \in R_+^n$ – фіксований вектор цін, I – заданий бюджет споживача.

Задача споживчого вибору визначається такою екстремальною моделлю:

$$- U(x) \rightarrow \min, x \in S_n.$$

Припустимо, що функція корисності є монотонно зростаючою, двічі диференційованою і строго угнутою.

В цій моделі S_n – компактна та опукла множина в R^n . Згідно теорем 1.1, 2.5, сформульована задача має єдиний глобальний розв'язок. Крім того, ця задача є регулярною згідно з теоремою 2.10. Дійсно, точка x з координатами

$$x_i = \frac{I}{2 \sum_{j=1}^n p_j}$$

належить R_+^n і в цій точці обмеження задачі виконуються строго.

Функція Лагранжа для цієї задачі буде мати вигляд

$$L(x, \lambda) = - U(x) + \lambda(x' p - I).$$

Згідно леми 2.4, необхідні і достатні умови оптимальності для нашої задачі набувають вигляду

$$a) \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} \leq \lambda p_i, x_i \left(\frac{\partial U(x)}{\partial x_i} - \lambda p_i \right) = 0, i = \overline{1, n};$$

$$b) \lambda(x' p - I) = 0, \lambda \geq 0.$$

Припустимо, що всі товари купуються, тобто $x_i > 0, i = \overline{1, n}$. Тоді умови оптимальності а) набувають вигляду

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_i} = \lambda p_i, i = \overline{1, n}.$$

З них витікає, що $\lambda > 0$ і умова б) приймає вигляд

$$x' p - I = 0.$$

Задамо функцію корисності у вигляді мультиплікативної функції

$$U(x) = A x_1^a x_2^b,$$

де $a, b \in R_+^1, a + b \neq 0, A > 0$.

Очевидно, що $U(x)$ – монотонно зростаюча і строго угнута функція. Тоді екстремальна задача має єдиний розв'язок, який визначається з умов оптимальності і має вигляд

З умов оптимальності отримаємо

$$x_{*1} = \frac{a I}{(a + b)p_1}, x_{*2} = \frac{b I}{(a + b)p_2} \bullet$$

Приклад 2.4. (Неокласична модель планування діяльності однопродуктового підприємства). Нехай $R_+^m = \{x \in R^m: x_i \geq 0, i = \overline{1, m}\}$ – простір витрат (ресурсів). $F(x): R_+^m \rightarrow R_+^1$ – виробнича функція, яка при заданій технології описує кількість продукції

q , виробленої підприємством за базовий період із наявного вектора ресурсів $(x_1, \dots, x_m)$.

Припустимо, що виробнича функція є монотонно зростаючою, двічі диференційованою і строго угнутою, а вектор ресурсів буде належати полієдру

$$U_0 = \{x \in R_+^m: 0 \leq a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1, m}\}$$

Діяльність підприємства будемо характеризувати величиною його прибутку

$$\pi(x) = p F(x) - \sum_{i=1}^m \omega_i x_i,$$

де $0 < p$ – ціна одиниці продукції, $0 < \omega_i$ – ціна одиниці i -го типу ресурсу.

Задача планування діяльності однопродуктового підприємства визначається такою екстремальною моделлю:

$$-\pi(x) \rightarrow \min, x \in U_0.$$

В цій моделі U_0 – опукла не обов'язково компактна множина в R_+^m (може бути $b_i = \infty$). Згідно теорем 1.1, 2.5, сформульована задача має єдиний глобальний розв'язок.

Згідно леми 2.2, необхідні і достатні умови оптимальності для нашої задачі набувають вигляду

$$\frac{\partial \pi(x)}{\partial x_i} = p \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} - \omega_i \begin{cases} = 0, & a_i < x_i < b_i, \\ \geq 0, & x_i = a_i, \\ \leq 0, & \hat{x}_i = b_i \neq \infty, i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Задамо виробничу функцію у вигляді мультиплікативної функції для випадку $m = 2$

$$F(x) = A x_1^\alpha x_2^\beta,$$

де $\alpha, \beta \in R_+^1, \alpha + \beta \neq 0, A > 0$.

Нехай $a_i < x_i < b_i, i = \overline{1, 2}$. Тоді із умов оптимальності визначаємо

$$x_1 = p \alpha \frac{F(x)}{\omega_1}, x_2 = p \beta \frac{F(x)}{\omega_2}$$

Наведена система допускає розв'язок у явному вигляді при умові $\alpha + \beta < 1$ (функція $F(x)$ при цьому лишається строго угнутою). Дійсно,

$$F(x) = A (p \alpha \frac{F(x)}{\omega_1})^\alpha (p \beta \frac{F(x)}{\omega_2})^\beta = A p^{\alpha+\beta} F^{\alpha+\beta}(x) (\frac{\alpha}{\omega_1})^\alpha (\frac{\beta}{\omega_2})^\beta.$$

Тоді

$$F(x) = (A p^{\alpha+\beta} (\frac{\alpha}{\omega_1})^\alpha (\frac{\beta}{\omega_2})^\beta)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}$$

і оптимальний план використання ресурсів має вигляд

$$x_{*1} = \frac{p \alpha}{\omega_1} (A p^{\alpha+\beta} (\frac{\alpha}{\omega_1})^\alpha (\frac{\beta}{\omega_2})^\beta)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \in (a_1, b_1),$$

$$x_{*2} = \frac{p \beta}{\omega_2} (A p^{\alpha+\beta} (\frac{\alpha}{\omega_1})^\alpha (\frac{\beta}{\omega_2})^\beta)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \in (a_2, b_2).$$

Якщо при фіксованому значенні параметрів хоч одне із виписаних включень суперечливе, то потрібно розглянути інші варіанти реалізації умов оптимальності, серед яких тільки один буде продуктивним •

Задачі до розділу 1.

1. Знайти Ω_* для функції $f(x) = ||x^2 - 1| - 1| - 1|, x \in R^1$.
2. Знайти Ω_* для функції $f(x) = \max_{t \in [0,1]} |t^2 - t x|, x \in R^1$.
3. Нехай $f(x) = \frac{1}{1 + \exp x^{-1}}$, якщо $x \neq 0; f(0) = 0$. Знайти точки екстремуму цієї функції на відрізках $[0,1], [-1,0], [-1,1]$ та на R^1 .
4. Нехай функція $f(x)$ аналітична на відрізку $[a, b]$, тобто ряд Тейлора для цієї функції збігається до $f(x), x \in [a, b]$. Чи може ця функція мати на $[a, b]$ нескінченне число точок локального екстремуму?

5. Нехай функція $f(x)$ диференційовна на відрізку $[a, b]$ і в точці $x_* \in [a, b]$ досягає своєї нижньої грані. Довести, що тоді необхідно, щоб $f'(x_*)(x - x_*) \geq 0 \forall x \in [a, b]$. Чи буде виконання цієї умови достатнім для того, щоб в точці $x_* \in [a, b]$ досягалась нижня грань функції $f(x)$ на $[a, b]$?

6. Знайти всі розв'язки наступних задач безумовної (без обмежень) оптимізації:

6.1. $f(x) = 2x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_2^2 \rightarrow \min_{x \in R^2};$

6.2. $f(x) = x_1 + x_2 + 4\sin x_1 \sin x_2 \rightarrow \min_{x \in R^2};$

6.3. $f(x) = x_1 x_2^2 x_3^3 (7 - x_1 - 2x_2 - 3x_3) \rightarrow \max_{x \in R^3}.$

7. Переконайтесь у тому, що функція $f(x) = x_1 \exp x_1 - (1 + \exp x_1) \cos x_2$ має нескінченно багато точок локального мінімуму і жодної точки локального максимуму на R^2 .

8. Переконайтесь у тому, що функція $f(x) = (x_1 - x_2^2)(2x_1 - x_2^2)$ досягає мінімуму в точці $\bar{x} = (0, 0)$ вздовж кожної прямої, яка проходить через $\bar{x}$, але $\bar{x}$ не являється точкою локального мінімуму цієї функції.

9. Чи може точка $\bar{x} = (0, 0)$ бути точкою глобального мінімуму для функції 9.1.
 $f(x) = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^4 + x_2^4}, x \neq 0; f(0) = 0?$

9.2. $f(x) = \frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1^2 + x_2^2}, x \neq 0; f(0) = 0?$

10. Знайти напіввісі a і b еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ найменшої площі, який містить в середині себе коло $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

11. Використовуючи геометричні міркування (метод ліній рівня), знайти розв'язки наступних задач математичного програмування:

11.1. $2x_1 - x_2 \rightarrow \max, x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 - x_3 \leq 0, x_1 + x_3 \leq -1;$

11.2. $(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \rightarrow \min, x_1^2 + x_2^2 \geq 9, x_1 \geq 2, x_2 \geq 0;$

11.3. $\ln x_1 - x_2 \rightarrow \max, x_1 - x_2 \leq 2, x_1 + x_2^2 \leq 4, x_1 > 0;$ 11.4. $x_1 + \sqrt{x_2} \rightarrow \min, x_1 + x_2 \geq 1, x_1^2 + x_2^2 = 1.$

12. Знайти розв'язки наступних екстремальних задач на умовний екстремум:

12.1. $x_1 x_2 x_3 \rightarrow \min, \sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1, \sum_{i=1}^3 x_i = 1;$

12.2. $x_1 x_2 + x_2 x_3 \rightarrow \max, \sum_{i=1}^2 x_i^2 = 2, \sum_{i=1}^2 x_i = 2;$

12.3. $\sum_{i=1}^3 x_i^2 \rightarrow \min, \sum_{i=1}^3 i x_i = 1.$

13. Перевірити, що функція $f(x) = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}$ опукла на R^2 .

14. Перевірити, що функція $f(x) = \ln(\sum_{i=1}^n \exp(x_i))$ опукла на R^2 .

15. Розв'язати задачі:

15.1. $4x_1^2 - x_1 x_2 + 2x_2^2 \rightarrow \min, 4 \leq x_1 \leq 8, -1 \leq x_2 \leq 2;$

15.2. $a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2 \rightarrow \min, -1 \leq x_1 \leq 1, x_2 \leq 1,$

де a, b, c — такі дійсні числа, для яких виконуються нерівності $a > 0, 4a < b^2$.

16. При яких значеннях параметра a точка $(0, 0)$ є розв'язком задачі
 $\exp(a^2 x_1) + \exp(a^2 x_2) + 2a x_1 - x_2 \rightarrow \min, 0 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 0?$

17. Використовуючи геометричні міркування та принцип Лагранжа, розв'язати задачі:

17.1. $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \rightarrow \min,$

$x_1^2 + 4x_2^2 \leq 4, 2x_1^2 + x_2 \geq 2, x_1 \geq 2x_2;$

17.2. $x_1 \rightarrow \max,$

$x_1^2 + x_2^2 \leq 1, (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \geq 1, x_1 + x_2 \leq 1.$

18. Розв'язати задачу

$\sum_{i=1}^n \alpha_i \sqrt{x_i} \rightarrow \max, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1, x_i \geq 0, \alpha_i \geq 0, i = \overline{1, n}.$

19. Чи є точка $(-1, -1)$ розв'язком задачі

$$\frac{1}{3}x_1^3 + x_2 \rightarrow \min, x_1^2 + x_2^2 \leq 2?$$

20. Розв'язати задачу

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \rightarrow \min, \sum_{i=1}^n x_i \leq b, b \in R^1.$$

Розділ 2. Неокласичні скінченновимірні векторні моделі економічних задач.

В цьому розділі розглядається ситуація, коли ефективність діяльності економічного агента (споживача або підприємства) характеризується не одним показником, як у попередньому розділі, а декількома. Така ж ситуація може виникнути і тоді, коли кінечна кількість економічних агентів (споживачів чи виробників) планують свою діяльність, кожен із них має свій показник ефективності і при цьому вони використовують спільні ресурси і мають єдиний організаційний центр (рада директорів), який відповідає за дотриманням обраного плану кожним агентом. Тоді в якості моделі такого явища або системи слід розглядати векторну екстремальну задачу. Наведено основні визначення елементів багатокритеріальної (векторної) екстремальної задачі. Для випадку рівнозначних критеріїв викладено теорію необхідних (достатніх) умов оптимальності, які дозволяють відшукувати оптимальні розв'язки в таких моделях.

§ 1. Постановка задач векторної оптимізації та відношення переваги.

1. Постановка задачі векторної оптимізації. Розглянемо таку задачу: $x \in X \subset R^n$,

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \rightarrow (\max), \quad (1.1)$$

де $f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ - однозначні функції на Ω .

В задачі (1.1) операцією $(\max)$ ми фіксуємо наш намір знайти такі вектори (*альтернативи*) $x \in X$, які б одночасно максимізували (при $(\min)$ - мінімізували) компоненти вектора f . Якщо такий вектор існує, то його варто вважати розв'язком задачі. Але такі випадки унікальні. Для того щоб розширити коло розв'язних оптимізаційних векторних моделей, потрібно ввести відношення переваги для векторів, що дасть можливість визначити операцію $(\max)$ в задачі (1.1).

2. Відношення переваги та функції цінності. Досить загальним і добре розробленим являється спосіб опису переваг на "мові" бінарних відношень.

Нехай A довільна множина. Бінарним відношенням ρ на множині A називається підмножина множини $A^2 = A \times A$, тобто сукупність впорядкованих пар (a, b) , де $a, b \in A$. Якщо $(a, b) \in \rho$, то кажуть, що a та b знаходяться у відношенні ρ і цей факт записують таким чином: $a\rho b$. В залежності від властивостей бінарних відношень здійснюють їх типізацію. Наведемо визначення найбільш розповсюджених типів бінарних відношень.

Відношення ρ називається *рефлексивним*, якщо $(a, a) \in \rho$ для любого $a \in A$, *іррефлексивним*, якщо $(a, a) \notin \rho$, тобто $a\rho a$ несправедливо для жодного $a \in A$.

Відношення ρ називається *симетричним*, якщо із $(a, b) \in \rho$ витікає $(b, a) \in \rho$, *асиметричним*, якщо $(a, b) \in \rho$ тягне за собою $(b, a) \notin \rho$, і *антисиметричним*, якщо із $(a, b) \in \rho$ і $(b, a) \in \rho$ випливає $a = b$.

Відношення ρ називається *транзитивним*, якщо із $(a, b) \in \rho$ і $(b, c) \in \rho$ витікає

$(a, c) \in \rho$.

Елементи a і b із A називаються порівнювальними по ρ , якщо справедливо або $a\rho b$, або $b\rho a$, і непорівнювальними по ρ в зворотньому випадку. Відношення ρ називається повним (або зв'язним), якщо довільні $a, b \in \rho$ порівнювальні (в тому числі при $a = b$). Відношення, яке не являється повним, називається частковим (або незв'язним).

Наприклад, відношення $\geq$ ("не менше") на множині R дійсних чисел рефлексивне, антисиметричне, транзитивне і повне, а відношення $>$ ("більше") іррефлексивне, асиметричне, транзитивне, але не являється повним (так як $a > a$ несправедливо.)

Рефлексивне, симетричне і транзитивне відношення називається еквівалентністю.

Іррефлексивне транзитивне відношення називається строгим (частковим) порядком, а рефлексивне і транзитивне відношення – (частковим) квазіпорядком. Антисиметричний квазіпорядок називається (частковим) порядком.

Розглянемо відношення $\geq, \geq, >, \geq$, які визначаються на R^m наступним чином:

$$1) \quad a \geq b \leftrightarrow a_i \geq b_i, \quad i = \overline{1, m};$$

2) $a \geq b \leftrightarrow a \geq b$ і $a \neq b$ (тобто виконуються m нерівностей $a_i \geq b_i$, причому хоч би одне із них - строге);

$$3) \quad a > b \leftrightarrow a_i > b_i, \quad i = \overline{1, m};$$

$$4) \quad a \geq b \leftrightarrow a = b \text{ або } a_i > b_i \text{ хоч би для одного } i.$$

Очевидно, що відношення 1) є частковим порядком, відношення 2) і 3) – строгі часткові порядки, а відношення 4) - лише рефлексивним.

Для опису переваг широко використовуються наступні бінарні відношення, які вводяться на множині A порівнювальних об'єктів.

Відношення (строкої) переваги P : aPb означає, що об'єкт a є більш переважним, ніж b .

Відношення байдужості I : aIb означає, що об'єкти a і b являються однаковими по перевазі.

Відношення нестрокої переваги R : aRb означає, що об'єкт a є не менше переважним, ніж b , тобто має місце aPb або ж aIb ($R = P \cup I$.)

Відношення переваги завжди повинні мати такі властивості: P – асиметрично, I – рефлексивно і симетрично, R – рефлексивно; P і I – не перетинаються. Якщо ж відношення R виявляється транзитивним, то такими ж будуть і відношення P і I . Тоді R – квазіпорядок, P строгий порядок, I – еквівалентність.

Нехай на множині A задано відношення нестрокої переваги R і нехай B – підмножина A . Елемент $a^* \in B$ називається найкращим (оптимальним) по R в B , якщо він не являється менш переважним ніж будь-який інший на B , тобто якщо a^*Ra справедливо для любого $a \in B$. Найкращий елемент – єдиний з точністю до еквівалентності I , тобто якщо b^* – також найкращий елемент із B , то a^*Ib^* . Якщо R – повний порядок, то найкращий елемент єдиний. Позначимо множину максимальних по P елементів із B через $Max_P B$. Аналогічно визначається множина мінімальних по P елементів із B – $Min_P B$.

Множина $Max_P B$ (відповідно $Min_P B$) називається внутрішньо стійкою, якщо із того, що $a, b \in Max_P B$ ($Min_P B$), витікає неможливість відношень aPb , bPa .

Множина $Max_P B$ (відповідно $Min_P B$) називається зовнішньо стійкою, якщо для любого елемента $a \in B$, який не являється максимальним (мінімальним), знайдеться більш переважний максимальний (менш переважний мінімальний) елемент.

Якщо в B не існує максимального елемента, то введене вище означення найкращого

елемента може бути узагальнено.

Елемент $a^0 \in A$ називається *максимальним по R відносно B* , якщо в B не існує елемента a , строго більш переважного, ніж a^0 .

Числова функція ψ , яка визначена на A , називається *зростаючою (неспадаючою) по R* , якщо із aRb слідує $\psi(a) > \psi(b)$ (відповідно $\psi(a) \geq \psi(b)$) для любых $a, b \in A$. Має місце наступна лема.

Лема 1.1. Нехай $B \subseteq A$ і $a^0 \in B$ доставляє неспадуючій по R функції ψ найбільше на B значення. Для того щоб елемент a^0 був максимальним по R , достатньо виконання однієї із наступних умов:

- 1) ψ зростає по R на B ;
- 2) a^0 – єдина точка максимуму функції ψ на B .

Будемо говорити, що повний квазіпорядок R на A представляє числова функція ψ , якщо aRb має місце тоді і тільки тоді, коли $\psi(a) \geq \psi(b)$. Цю функцію будемо називати *функцією цінності*. Зрозуміло, що функція цінності являється якісним критерієм: вона визначена з точністю до довільного зростаючого перетворення. Умови існування функції цінності тут повністю не дамо. Тут лише зауважимо, що функція цінності існує для повного квазіпорядку, коли множина A або кінечна, або зліченна.

Якщо на множині A визначена функція цінності ψ , яка описує відношення нестрогої переваги R , то для любого $B \subseteq A$ будемо мати

$$\text{Max}_R = \{b \in B: \psi(b) = \max_{a \in B} \psi(a)\}.$$

§ 2. Ефективні та слабо ефективні оцінки та розв'язки задач векторної оптимізації.

Будемо вважати, що всі компоненти вектора f являються рівнозначними. Значення $f_i(x)$ при фіксованому $x \in X$ будемо називати i -ою оцінкою в фіксованій точці. Нехай $Y_i = f_i(X)$. Тоді $Y = Y_1 \times \dots \times Y_m \subseteq R^m$ – множина оцінок векторної задачі максимізації (32). Із попереднього пункту витікає, що на Y можна ввести відношення нестрогої переваги $\succeq$, два відношення строгої переваги $\succ, >$ та відношення байдужості $=$, яке являється відношенням еквівалентності: рефлексивне, симетричне, транзитивне. Згідно з загальним означенням максимального елементу попереднього пункту, оцінка $y^* \in Y$ називається найкращою по $\succeq$ в Y , якщо $y^* \succeq y \forall y \in Y$. В силу того, що відношення $\succeq$ є частковим порядковим, то може існувати лише одна така оцінка.

Якщо в практичній задачі векторної оптимізації існує найбільша по $\succeq$ оцінка y^* , то її і слід вважати оптимальною. Але такий випадок реалізується дуже рідко в силу неповноти відношення. Тому в залежності від сутності задачі ми вимушені використовувати вказані вище два відношення строгої переваги.

Оцінка $y^0 \in Y$ називається *максимальною по $\succ (>)$ відносно Y* , якщо не існує оцінки $y \in Y$ такої, що $y \succ y^0$ ($y > y^0$). Оцінка, максимальна по $\succeq$, називається *ефективною або Парето - оптимальною*. Множину ефективних оцінок позначимо через $P(Y)$.

Оцінка, максимальна по $>$, називається *слабо ефективною або оптимальною по Слейтеру*. Множину таких оцінок позначимо через $S(Y)$.

Оскільки із $y > y^0$ витікає $y \succeq y^0$, то всяка ефективна відносно Y оцінка являється і слабо ефективною, так що $P(Y) \subseteq S(Y)$. Дійсно, якщо y^0 не являється слабо ефективною, то для деякої оцінки $y \in Y$ буде виконуватись $y > y^0$, а тому і $y \succeq y^0$, так що y^0 не може бути ефективною.

З геометричної точки зору (див. Рис.2.1), наприклад при $m = 2, P(Y) = BC$ представляє собою північно - східну границю множини Y (без тих її частин, які паралельні одній із координатних осей або лежать в достатньо крутих і глибоких провалах), а $S(Y) = AB \cup BC \cup DE$ може додатково включати в себе вертикальні і горизонтальні ділянки границі, що прилягають до $P(Y)$.

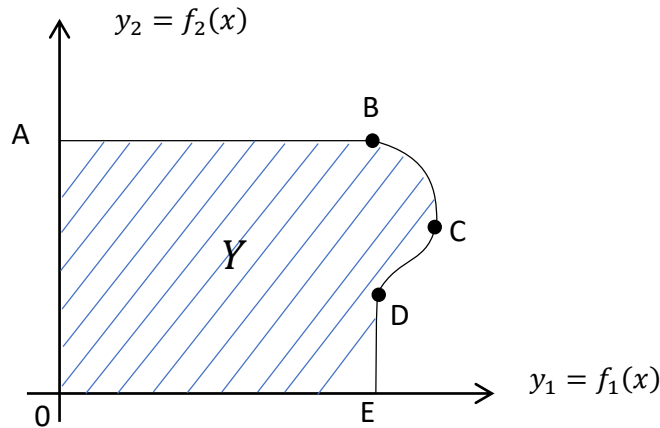


Рис. 2.1

Відношення $\geq, >, <$, визначені на множині оцінок, породжують в аналогічному сенсі відповідні відношення в множині розв'язків.

§ 3. Умови оптимальності.

В цьому параграфі формулюються різного роду необхідні і достатні умови того, щоб даний розв'язок або оцінка були в тому чи іншому сенсі оптимальними (ефективними). Як і в однокритеріальних екстремальних задачах, знання умов оптимальності дозволяє розробляти методи знаходження ефективних розв'язків та перевірки ефективності виділеного розв'язку. Крім того, враховуючи взаємозв'язок різних визначень ефективності, слід мати на увазі, що умови, достатні для ефективності в деякому сенсі, будуть достатніми і в більш широкому сенсі. І навпаки, умови, необхідні для ефективності в деякому сенсі, будуть необхідними і в більш вузькому сенсі.

Для ефективних по Слейтеру оцінок має місце

Теорема 3.1. Нехай $y^0 \in Y$ і всі $y_i^0 > 0$. Оцінка y^0 слабо ефективна тоді і тільки тоді, коли існує вектор $\mu \in M$ такий, що

$$\min_{i \in [0, m]} \mu_i y_i^0 = \max_{y \in Y} \min_{i \in [0, m]} \mu_i y_i. \quad (3.1)$$

Для слабо ефективної оцінки $y^0 \in Y$ можемо покласти $\mu = \mu^0$, де $\mu^0 \in M$ – вектор з компонентами

$$\mu_i^0 = \frac{\lambda^0}{y_i^0}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \lambda^0 = \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{y_k^0} \right)^{-1}, \quad (3.2)$$

і тоді

$$\max_{y \in Y} \min_{i \in [0, m]} \mu_i y_i^0 = \lambda^0,$$

причому, M – множина векторів із R^m з додатними компонентами, що в сумі дорівнюють одиниці •

Із леми 1.1 витікає наступна теорема.

Теорема 3.2. Якщо функція $\varphi(y)$ зростає по $>$ на Y , то довільна її точка максимуму на Y

буде слабо ефективною •

Із тієї ж леми 1.1 отримуємо достатні умови оптимальності для ефективних оцінок

Теорема 3.3. Нехай функція $\varphi(y)$ не спадає по $\geq$ на Y , а y^0 – її точка максимуму на Y . Для ефективності y^0 достатньо виконання однієї із умов:

- 1) φ зростає по $\geq$ на Y ,
- 2) y^0 – єдина точка максимуму φ на Y •

Для практичного використання результатів наведених вище двох теорем (перевірки умови зростання функції $\varphi(y)$ по $>$ на Y чи умови не спадання по $\geq$ на Y) корисною є така

Лема 3.1. Якщо функція $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_m)$ визначена на $Z = Z_1 \times \dots \times Z_m$, $Z_i \in R$ і не спадає по кожній змінній y_i (зростає по кожній змінній y_i ; не спадає по кожній і зростає хоч би по одній змінній y_i) при любых фіксованих значеннях інших змінних $y_j \in Z_j$, то така функція не спадає по $\geq$ та $>$ (зростає по $\geq$; зростає по $>$) •

Розглянемо на прикладах деякі типи функцій, максимізація (мінімізація) яких приводить до отримання ефективних оцінок.

Приклад 3.1. Функція

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^m \mu_i y_i, \mu_i > 0$$

є зростаючою по кожній змінній y_i на числовій прямій, а тому, згідно леми 3.1, зростаючою по $\geq$ на R^m . Тому довільна її точка максимуму на Y ефективна •

Приклад 3.2. Функція

$$\varphi(y) = \prod_{i=1}^m y_i^{\mu_i}, \mu_i > 0$$

зростає по кожній змінній $y_i \in (0, \infty)$, і тому є зростаючою по $\geq$ на $R^m_+ = \{y \in R^m : y_i > 0, i = \overline{1, m}\}$. Тому, якщо y^0 – точка максимуму $\varphi(y)$ на $Y \subset R^m_+$, то $y^0 \in P(Y)$ •

Приклад 3.3. Розглянемо багатокритеріальну задачу з векторним критерієм $F' = (f_1, \dots, f_m)$, в якій всі критерії f_i – додатні на X , причому $f_1, \dots, f_l$ бажано максимізувати, а $f_{l+1}, \dots, f_m$ – мінімізувати. Цю задачу можна представити у вигляді задачі максимізації з векторним критерієм $(f_1, \dots, f_l, -f_{l+1}, \dots, -f_m)$. Так як функція $-t^{-1}$ зростає на $(-\infty, 0)$, то цей векторний критерій еквівалентний векторному критерію $(f_1, \dots, f_l, f_{l+1}^{-1}, \dots, -f_m^{-1})$. Тому, згідно прикладу 3.2, можна стверджувати, що при $\mu_i > 0, i = \overline{1, m}$ довільний розв'язок $x^0 \in X$, який максимізує на X значення функції

$$\frac{f_1^{\mu_1} \times \dots \times f_l^{\mu_l}}{f_{l+1}^{\mu_{l+1}} \times \dots \times f_m^{\mu_m}}$$

являється ефективним •

Умова єдиності точки максимуму функція $\varphi(y)$ на множині Y забезпечується, зокрема, єдиністю точки максимуму $\varphi(f_1, \dots, f_m)$ на X .

Якщо в задачі векторної оптимізації нас цікавить не вся множина оцінок $S(Y)$ чи $P(Y)$, а лише деякі з них, наприклад, ті оцінки, координати яких будуть найбільшими, то тоді згортку критеріїв робити не варто. В цьому випадку на множинах $S(Y)$ ($P(Y)$) можна ввести додатковий критерій, або використати для "скалярізації" векторної задачі метод *ідеальної точки*. Для цього:

- 1) визначаємо ідеальну точку $a \in R^m, a_i = \max_{x \in X} f_i(x)$,

2) знаходимо вектори (альтернативи), на яких оцінка буде найближчою до ідеальної точки в деякій метриці $\rho_v(y, a) = \sum_{i=1}^m |y_i - a_i|^{1/v}, v \geq 1, y_i = f_i(x)$.

Приклад 3.4. Нехай в задачі (32): $X = \{x \in R^2 : x_i \in [0, 1], i = \overline{1, 2}\}; f_1 = x_1 + x_2, f_2 = |x_1 - x_2|$.

Знайдемо множину $Y = f(X)$. З цією метою відобразимо границі множини X :

- 1) $x_1 \in [0,1], x_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2, y_1 \in [0,1];$
- 2) $x_1 = 1, x_2 \in [0,1] \Rightarrow y_1 + y_2 = 2, y_1 \in [0,1];$
- 3) $x_1 \in [0,1], x_2 = 1 \Rightarrow y_1 + y_2 = 2, y_1 \in [0,1];$
- 4) $x_1 = 0, x_2 \in [0,1] \Rightarrow y_1 = y_2, y_1 \in [0,1].$

Таким чином, $P(Y) = S(Y) = \{y \in R^2: y_1 + y_2 = 2, y_1 \in [0,1]\}$. Той же результат дає і згортка із прикладу 3.1 •

На завершення розділу зауважимо, що векторні задачі оптимізації можуть бути моделями поведінки економічних агентів при умові, що ці агенти об'єднані в структуру зі спільним керівництвом, яка буде слідкувати щоб агенти дотримувались єдиних стратегій – елементів множини $P(Y)$ чи $S(Y)$.

Задачі до розділу 2.

1. Знайти за визначенням множину ефективних оцінок (оптимальних за Парето) та відповідних їм альтернатив у таких двокритеріальних задачах:

- 1.1. $f_1(x) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, f_2(x) = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$
 $X = \{x_1 + x_2 \leq 4, x_1 + 2x_2 \leq 6, x \in R_+^2\};$
- 1.2. $f_1(x) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, f_2(x) = -x_1 + x_2 \rightarrow \max,$
 $X = \{x_1 + x_2 \leq 4, x_2 \leq 2, x \in R_+^2\};$
- 1.3. $f_1(x) = x_1 - x_2 \rightarrow \max, f_2(x) = -x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$
 $X = \{-x_1 + 2x_2 \geq 2, 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 4\};$
- 1.4. $f_1(x) = x_1 \rightarrow \max, f_2(x) = x_2 \rightarrow \max,$
 $X = \{x_1 + x_2 \geq 5, -4x_1 + x_2 \leq 0, x_1 - 4x_2 \leq 0, x \in R_+^2\}.$

2. Знайти за визначенням множину слабо ефективних оцінок (оптимальних за Слейтером) та відповідних їм альтернатив у таких двокритеріальних задачах:

- 2.1. $f_1(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max, f_2(x) = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$
 $X = \{3x_1 + x_2 \geq 9, x_1 + 3x_2 \leq 9, x_1 + x_2 \leq 4, x \in R_+^2\};$
- 2.2. $f_1(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max, f_2(x) = x_2 \rightarrow \max,$
 $X = \{x_1 + x_2 \geq 5, -2x_1 + x_2 \leq -1, x_1 - x_2 \leq 3, x \in R_+^2\};$
- 2.3. $f_1(x) = x_1 \rightarrow \max, f_2(x) = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$
 $X = \{-x_1 + 2x_2 \geq 2, 3x_1 - 2x_2 \leq 6, x_1 - x_2 \leq 3, x \in R_+^2\};$

3. Знайти, використовуючи метод згортки, множину ефективних оцінок та виділити із них оцінку з найбільшими значеннями координат у таких двокритеріальних задачах:

- 3.1. $f_1(x) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, f_2(x) = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$
 $X = \{x_1 + x_2 \leq 4, x_1 + 2x_2 \leq 6, x \in R_+^2\};$
- 3.2. $f_1(x) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, f_2(x) = -x_1 + x_2 \rightarrow \max,$
 $X = \{x_1 + x_2 \leq 4, x_2 \leq 2, x \in R_+^2\};$
- 3.3. $f_1(x) = x_1 - x_2 \rightarrow \max, f_2(x) = -x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$
 $X = \{-x_1 + 2x_2 \geq 2, 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 4\};$
- 3.4. $f_1(x) = x_1 \rightarrow \max, f_2(x) = x_2 \rightarrow \max,$
 $X = \{x_1 + x_2 \leq 5, -4x_1 + x_2 \leq 0, x_1 - 4x_2 \leq 0, x \in R_+^2\}.$

Розділ 3. Конфліктні задачі оптимізації – безкоаліційні ігри.

У випадку, коли в економічній системі не існує організаційного центру, відповідального за дотриманням обраного варіанту оптимального рішення економічними агентами, ми повинні розглядати ігрові моделі їх поведінки. Якщо кожен економічний агент діє самостійно, то в якості ігрових моделей слід розглядати безкоаліційні ігри. Наводяться основні елементи таких моделей, визначається рівновага (оптимальність) в них та методи її пошуку.

§ 1. Визначення безкоаліційної гри та оптимальність.

Означення 1.1. Безкоаліційною грою називається система

$$\Gamma = \{I, \{X_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I}\}, \quad (1.1)$$

в якій I і $X_i \in R^n$, $i \in I$ – множини, а H_i – дійсні функції на множині $X = \prod_{i \in I} X_i$ •

Елементи множини $I = \{1, \dots, m\}$ називаються гравцями, елементи кожної із множин $x^{(i)} \in X_i$ – стратегіями гравця i , елементи декартового добутку $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) \in X$ – ситуаціями, $H_i(x)$ – виграш гравця i в ситуації x .

Змістовно процес гри Γ полягає у виборі кожним із гравців однієї своєї стратегії $x^{(i)} \in X_i$, яка б по можливості збільшувала його індивідуальний виграш $H_i(x)$.

Визначимо декілька частинних класів безкоаліційних ігор.

Означення 1.2. Безкоаліційна гра Γ із (1.1) називається грою з постійною сумою, якщо існує постійна c така, що

$$\sum_{i \in I} H_i(x) = c \quad (1.2)$$

для всіх ситуацій $x \in X$ •

У випадку двох гравців з нульовою сумою будемо мати антоганістичну гру двох осіб.

Означення 1.3. Якщо в безкоаліційній грі Γ із (1.1) множина стратегій $x^{(i)}$ кожного із гравців $i \in I$ кінечна, то гра Γ називається кінечною •

Кінечна гра двох осіб називається біматричною в силу можливостей росташування виграшів гравців у вигляді матриці.

Під оптимальністю будемо розуміти різні варіанти формалізованого опису змістовних представлень про вигідність, стійкість і справедливність.

§ 2. Допустимі ситуації та ситуації рівноваги.

Нехай $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(i-1)}, x^{(i)}, x^{(i+1)}, \dots, x^{(m)})$ – довільна ситуація у грі Γ , $\hat{x}^{(i)}$ – деяка стратегія i -го гравця. Тоді $x || \hat{x}^{(i)} = (x^{(1)}, \dots, x^{(i-1)}, \hat{x}^{(i)}, x^{(i+1)}, \dots, x^{(m)})$ – нова ситуація у грі Γ .

Означення 2.1. Ситуація x в грі (1.1) називається допустимою для гравця i , якщо для будь-якої його стратегії $\hat{x}^{(i)}$

$$H_i(x || \hat{x}^{(i)}) \leq H_i(x) \quad (2.1)$$

Множину всіх ситуацій, допустимих в грі Γ для гравця i , позначимо через $\mathfrak{S}_i(\Gamma)$.

Означення 2.2. Ситуація в грі Γ , яка допустима для всіх гравців, називається ситуацією рівноваги •

Множину всіх ситуацій рівноваги в грі Γ позначимо через $\mathfrak{Z}(\Gamma)$. Очевидно, що

$$\mathfrak{Z}(\Gamma) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{S}_i(\Gamma).$$

Стратегія буде рівноважною в бескоаліційній грі, коли вона входить хоч би в одну із рівноважних ситуацій гри.

Розглянемо ситуації, оптимальні за Парето. Для цього нам потрібно буде порівнювати ситуації по виграшам, які отримують в них окремі гравці. З цією метою позначимо

$$H_I(x) = (H_1(x), \dots, H_m(x))$$

і будемо вважати, що

$$H_I(x) < H_I(y),$$

якщо $H_i(x) < H_i(y)$ при всіх $i \in I$;

$$H_I(x) \bar{<} H_I(y),$$

якщо $H_i(x) \leq H_i(y)$ при всіх $i \in I$, але $H_I(x) \neq H_I(y)$;

$$H_I(x) \leq H_I(y),$$

якщо $H_i(x) \leq H_i(y)$ при всіх $i \in I$.

Означення 2.3. Ситуація x^0 в грі Γ називається оптимальною по Парето, якщо не існує ситуації $x \in X$, для якої має місце векторна нерівність $H_I(x^0) \bar{<} H_I(x)$ •

Множину всіх ситуацій в грі Γ , оптимальних по Парето, позначимо через $\mathfrak{Z}^P(\Gamma)$.

Підкреслимо формальну різницю між ситуацією рівноваги та ситуацією, оптимальною по Парето: в першій жоден гравець, діючи самостійно, не може збільшити свого власного виграшу; в другій - всі гравці, діючи спільно, не можуть збільшити виграш кожного.

Відмітимо одну властивість ситуацій, оптимальних по Парето.

Теорема 2.1. Якби не були оптимальні по Парето ситуації x та y у грі Γ , не може бути $H_I(x) \bar{<} H_I(y)$ (внутрішня стійкість).

Якщо множина $B(\Gamma) = \{H_I(x) : x \in X\}$ компактна, а функції виграшу H_i неперервні, то яка б не була ситуація $x \notin \mathfrak{Z}^P(\Gamma)$, знайдеться ситуація $y \in \mathfrak{Z}^P(\Gamma)$, для якої $H_I(x) \bar{<} H_I(y)$ (зовнішня стійкість) •

§ 3. Гарантуючі ситуації та стратегії.

Визначимо умови, при яких i -й гравець може вибирати таку свою стратегію, яка, з одного боку, не залежить від поведінки інших гравців, а, з другого боку, забезпечує найбільший можливий його виграш. З цією метою визначимо величину виграшу i -го гравця, яку назвемо його гарантією і позначимо через $H_i[x^{(g,i)}]$. Гарантія повинна задовольняти умовам:

- 1) виграш гравця повинен бути не менше його гарантії

$$H_i[x^{(g,i)}] \leq H_i(x|x^{(g,i)}) \quad \forall x/x^{(g,i)} \in X/X_i; \quad (3.1)$$

- 2) гарантії повинні бути найбільшими із всіх можливих гарантій

$$H_i^g = H_i[x^{(g,i)}] = \max_{X_i} H_i[x^{(i)}], \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.2)$$

де

$$H_i[x^{(i)}] = \min_{X/X_i} H_i(x|x^{(i)}).$$

Означення 3.1. Стратегія $\hat{x}^{(g,i)} \in X_i$ називається максимінною для i -го гравця в грі Γ , якщо

$$\hat{H}_i^g = H_i[\hat{x}^{(g,i)}] = \max_{X_i} \min_{X/X_i} H_i(x|x^{(i)}) \quad \bullet \quad (3.3)$$

Число $\hat{H}_i^g$ називається максиміном i -го гравця в грі Γ .

Лема 3.1. Максимінна стратегія $\hat{x}^{(g,i)} \in X_i$ для i -го гравця в грі Γ є для нього гарантуючою, тобто $\hat{x}^{(g,i)} = x^{(g,i)}$, а його максимін співпадає з його найбільшою

гарантією, тобто $\hat{H}_i^g = H_i^g$ •

Теорема 3.1. Якщо множини X_i – компактні в R^n , а функції $H_i(x)$, $x \in X$ – неперервні, то множина гарантованих ситуацій у грі Γ буде непорожньою •

Пошук максимінів та максимінних стратегій є непростю математичною задачею. Більш дослідженою являється проблема побудови сідлових точок антагоністичних ігор та їх зв'язок з максимінними стратегіями. З цією метою розглянемо антагоністичну гру

$$\Gamma_i = \{I, \{X_j\}_{j \in I}, H_i\}. \quad (3.4)$$

В грі (3.4) i - ий гравець (за рахунок вибору своєї стратегії $x_i^{(i)} \in X_i$) намагається максимізувати, а інші гравці – мінімізувати (шляхом вибору $x_i/x_i^{(i)} \in X/X_i$) ціну гри $H_i(x_i)$, де x_i – ситуація в антагоністичній грі Γ_i .

Означення 3.2. Ситуація $x_i^s \in X$ називається сідловою точкою для гри Γ_i , якщо

$$H_i(x_i^s | x^{(i)}) \leq H_i(x_i^s) \leq H_i(x | x_i^{(s,i)}) \quad \forall x \in X \quad (3.5)$$

Лема 3.2. Якщо ситуація $x_i^s \in X$ – сідлова точка в грі Γ_i , то стратегія $x_i^{(s,i)}$ для i - го гравця являється максимінною, тобто $x_i^{(s,i)} = \hat{x}^{(g,i)}$, а ціна гри $H_i(x_i^s)$ співпадає з максиміном i - го гравця $\hat{H}_i^g$ •

Лема 3.2 дає спосіб побудови гарантованих стратегій. Для цього потрібно знайти сідлові точки x_i^s (якщо вони існують) для n антагоністичних ігор Γ_i . Тоді гарантована ситуація і гарантовані виграші гравців мають вигляд: $x^g = (x_1^{s,1}, \dots, x_n^{s,n}), H_i^g = H_i(x_i^s), i = \overline{1, n}$.

Приклад 3.1. Знайти максимальні гарантовані виграші та множини гарантованих стратегій в наступній грі двох осіб: $X_1 = [0, 10], X_2 = [0, 5]; H_1(x) = 10x_1x_2 + x_2^2 - 30x_2, H_2(x) = x_2 + (x_1 + 2)(1 - x_2)$.

Для знаходження максимального гарантованого виграшу та гарантованих стратегій першого гравця розв'яжемо таку задачу:

$$\alpha_1 = \max_{x_1 \in [0, 10]} \min_{x_2 \in [0, 5]} (10x_1x_2 + x_2^2 - 30x_2).$$

З цією метою побудуємо функцію $f_1(x_1) = \min_{x_2 \in [0, 5]} (10x_1x_2 + x_2^2 - 30x_2)$ – гарантований виграш першого гравця при виборі ним стратегії $x_1 \in [0, 10]$. Відомо, що функція $f_1(x_1)$ повинна бути неперервною. Спочатку знайдемо похідну функції $H_1(x)$ відносно змінної x_2 :

$$\frac{\partial H_1(x)}{\partial x_2} = 10x_1 + 2x_2 - 30.$$

Звідси витікає, що в області $X_1 \times X_2$ допустимих ситуацій похідна міняє знак, тобто функція $H_1(x)$ не є монотонною і її мінімум по x_2 при фіксованому x_1 може досягатись у внутрішніх точках відрізка X_2 . Тоді стаціонарні точки задовольняють рівнянню $5x_1 + x_2 - 15 = 0$. В силу того, що в цих точках

$$\frac{\partial^2 H_1(x)}{\partial x_2^2} = 2 > 0,$$

то вони утворюють множину глобальних мінімумів функції $H_1(x)$ по x_2 , коли $x_2 = -5x_1 + 15$, $x_2 \in (0, 5), x_1 \in (2, 3)$, і при цьому $f_1(x_1) = -25(x_1 - 3)^2$. При інших значеннях змінної x_1 мінімум функції $H_1(x)$ досягається на границях відрізка X_2 : при $x_2 = 0$ будемо мати $f_1(x_1) = 0$; при $x_2 = 5$ будемо мати $f_1(x_1) = 50x_1 - 125$. В області $x_1 \in [0, 2], x_2 \in [0, 5]$ похідна $\frac{\partial H_1(x)}{\partial x_2} \leq 0$, тобто функція $H_1(x)$ буде спадною по x_2 . В області $x_1 \in [3, 10], x_2 \in [0, 5]$ похідна $\frac{\partial H_1(x)}{\partial x_2} \geq 0$, тобто функція $H_1(x)$ буде зростаючою по x_2 .

Тоді

$$f_1(x_1) = \begin{cases} 50x_1 - 125, & x_1 \in [0,2], \\ -25(x_1 - 3)^2, & x_1 \in (2,3), \\ 0, & x_1 \in [3,10]. \end{cases}$$

Таким чином, максимальний гарантований виграш першого гравця $\alpha_1 = \max_{x_1 \in [0,10]} f_1(x_1) = 0$, а множиною гарантованих стратегій буде відрізок $O_1 = [3,10]$.

Для знаходження максимального гарантованого виграшу та гарантованих стратегій другого гравця розв'яжемо таку задачу:

$$\alpha_2 = \max_{x_2 \in [0,5]} \min_{x_1 \in [0,10]} (x_2 + (x_1 + 2)(1 - x_2)).$$

З цією метою побудуємо функцію $f_2(x_2) = \min_{x_1 \in [0,10]} (x_2 + (x_1 + 2)(1 - x_2))$ – гарантований виграш другого гравця при виборі ним стратегії $x_2 \in [0,5]$. З цією метою знайдемо похідну функції $H_2(x)$ відносно змінної x_1 :

$$\frac{\partial H_2(x)}{\partial x_1} = 1 - x_2,$$

тобто по змінній x_1 лінійна по цій змінній функція $H_2(x)$ зростає до точки $x_2 = 1$, а потім спадає. Тоді

$$f_2(x_2) = \begin{cases} 2 - x_2, & x_2 \in [0,1], \\ 12 - 11x_2, & x_2 \in [1,5]. \end{cases}$$

Таким чином, максимальний гарантований виграш друго гравця $\alpha_2 = \max_{x_2 \in [0,5]} f_2(x_2) = 2$, а множиною гарантованих стратегій буде $O_2 = \{0\}$. Гарантовану ситуацію утворює пара $(x^g)' = ([3,10], 0)$, на якій $0 = \alpha_1 = H_1(x^g), 2 = \alpha_2 < H_2(x^g) = x_1 + 2, x_1 \in [3,10]$ •

§ 4. Рівновага за Нешем.

Якщо гравців не влаштовують результати гарантованих виграшів або гарантій, то можна перейти до пошуку інших рівноваг, які були б певному сенсі кращими від гарантованої рівноваги.

Означення 4.1. Ситуація $x^N \in X$ називається рівноважною за Нешем для гри Γ , якщо

$$H_i(x^N || x^{(i)}) \leq H_i(x^N), i = \overline{1, n}, \forall x \in X. \quad (4.1)$$

Позитивні властивості рівноваги за Нешем (випадок двох гравців).

Властивість 1. Для антоганістичної гри з функцією виграшу $H(x^{(1)}, x^{(2)})$ сідлова точка співпадає з рівноважною по Нешу ситуацією у відповідній безкоаліційній грі двох осіб з функцією виграшу $H(x^{(1)}, x^{(2)})$ першого гравця і функцією виграшу $-H(x^{(1)}, x^{(2)})$ для другого гравця.

Дійсно, нехай x^s - сідлова точка для антоганістичної гри з функцією виграшу $H(x^{(1)}, x^{(2)})$:

$$H(x^{(1)}, x^{(s,2)}) \leq H(x^s) \leq H(x^{(s,1)}, x^{(2)}) \forall x \in X.$$

Ці нерівності еквівалентні таким нерівностям:

$$H(x^{(1)}, x^{(s,2)}) \leq H(x^s) \forall x^{(1)} \in X_1,$$

$$-H(x^{(s,1)}, x^{(2)}) \leq -H(x^s) \forall x^{(2)} \in X_2,$$

тобто ситуація x^s - є ситуація рівноваги за Нешем у грі двох осіб з протилежними по значенням функціями виграшів.

Властивість 2. В деяких іграх двох осіб один із гравців, діючи самостійно і використовуючи "свою" стратегію із рівноважної по Нешу ситуації, може примусити іншого діяти найкращим для себе чином. Дійсно, запишемо умови рівноваги за Нешем для двох гравців

$$\begin{aligned} H_1(x^{(1)}, x^{(N,2)}) &\leq H_1(x^N) \forall x^{(1)} \in X_1, \\ H_2(x^{(N,1)}, x^{(2)}) &\leq H_2(x^N) \forall x^{(2)} \in X_2. \end{aligned}$$

Нехай, наприклад, перший гравець використовує стратегію $x^{(N,1)}$ із рівноважної по Нешу ситуації x^N , а інший гравець узнає про таку поведінку першого гравця. Якщо $\max_{x_2} H_2(x^{(N,1)}, x^{(2)})$ реалізується в єдиній точці $x^{(N,2)}$, то, щоб досягнути максимального виграшу в таких умовах, цьому гравцю залишається лише застосувати стратегію $x^{(N,2)}$. При цьому і перший гравець отримує максимально можливий виграш.

Властивість 3. Виграш гравців в рівноважній по Нешу ситуації x^N не менше їх гарантованих виграшів при умові існування обох рівноваг. Дійсно,

$$\begin{aligned} H_1(x^N) &\geq H_1(x^{(g,1)}, x^{(N,2)}) \geq \min_{x_2} H_1(x^{(g,1)}, x^{(2)}) = \\ &= \max_{x_1} \min_{x_2} H_1(x^{(1)}, x^{(2)}). \end{aligned}$$

Аналогічні нерівності будуть мати місце і для функції виграшу другого гравця.

Негативні особливості рівноваги за Нешем.

Ці властивості, з одного боку, обмежують використання рівноваги за Нешем в якості розв'язку безкоаліційної гри, а з другого боку, вимагають визначення інших рівноваг, яким не притаманні недоліки рівноваги за Нешем.

Особливість 1. Якщо множина ситуацій рівноваги за Нешем складається більше ніж із одного елемента, то гравці повинні домовлятися між собою якої іменної ситуації притримуватись. Цей факт "переводить" безкоаліційну гру в кооперативну гру.

Особливість 2. При реалізації вибраної ситуації рівноваги за Нешем кожен із гравців повинен бути переконаним в тому, що інші гравці неодмінно будуть дотримуватись "своїх" стратегій із обраної ситуації.

Особливість 3. Множина ситуацій рівноваги по Нешу не являється внутрішньо стійкою, тобто можуть існувати дві ситуації рівноваги по Нешу і при цьому виграші всіх гравців в одній із них буде строго більшим ніж відповідні виграші в іншій.

Особливість 4. Ситуації рівноваги по Нешу, взагалі кажучи, можуть бути покращеними, тобто для ситуації рівноваги по Нешу x^N може існувати ситуація $x^* \in X$ така, що

$$H_i(x^*) > H_i(x^N), \quad i = \overline{1,2}.$$

Теорема 4.1. Нехай множини стратегій гравців X_i — опуклі та компактні в R^n . Нехай для кожного гравця $i \in I$ його функція виграшу $H_i(x)$ є неперервною на множині ситуацій X і вігнutoю (опуклою вгору) за його стратегіями $x_i \in X_i$ для кожного набору стратегій всіх інших гравців $x_I \in X_I$. Тоді множина рівноваг за Нешем є непорожньою та компактною •

Приклад 4.1. Знайти рівновагу за Нешем у наступній грі двох осіб: $X_1 = [0,5], X_2 = [0,10], H_1(x) = 3x_2^2 - x_1^2 + 10x_1x_2 - 10x_1 + 4x_2, H_2(x) = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 6x_1x_2 + 10x_1$.

Оскільки множини $X_i, i = \overline{1,2}$ є компактними, а функції $H_i(x), i = \overline{1,2}$ — вігнутими по своїм стратегіям, то, згідно теореми 4.1, множина рівноваг за Нешем є непорожньою та компактною.

Розв'яжемо систему оптимізаційних задач:

$$H_1(\hat{x}) = \max_{x_1 \in X_1} H_1(x_1, \hat{x}_2) = \max_{x_1 \in X_1} (3\hat{x}_2^2 - x_1^2 + 10x_1\hat{x}_2 - 10x_1 + 4\hat{x}_2),$$

$$H_2(\hat{x}) = \max_{x_2 \in X_2} H_2(\hat{x}_1, x_2) = \max_{x_2 \in X_2} (2\hat{x}_1^2 - 5x_2^2 + 6\hat{x}_1x_2 + 10\hat{x}_1).$$

Для цього потрібно побудувати :

- множину N_1 розв'язків першої задачі, вважаючи $\hat{x}_2$ параметром;
- множину N_2 розв'язків другої задачі, вважаючи $\hat{x}_1$ параметром.

Тоді множина рівноважних ситуацій за Нешем буде мати вигляд $N = N_1 \cap N_2$.

Побудуємо множину N_1 , використовуючи умови оптимальності. З цією метою знайдемо похідну

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1} = -2x_1 + 10\hat{x}_2 - 10.$$

Звідси витікає, що в області $X_1 \times X_2$ допустимих ситуацій похідна міняє знак, тобто функція $H_1(x)$ не є монотонною і її максимум по x_1 при фіксованому $\hat{x}_2$ може досягатись у внутрішніх точках відрізка X_1 . Тоді стаціонарні точки задовольняють рівнянню: $-x_1 + 5\hat{x}_2 - 5 = 0$. В силу того, що в цих точках

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial x_1^2} = -2 < 0,$$

то вони утворюють множину глобальних максимумів функції $H_1(x)$ по x_1 , коли $\hat{x}_1 = 5(\hat{x}_2 - 1)$, $\hat{x}_1 \in (0,5)$, $\hat{x}_2 \in (1,2)$, і при цьому $H_1(\hat{x}) = 28\hat{x}_2^2 - 46\hat{x}_2 + 25$. При інших значеннях змінної x_2 максимум функції $H_1(x)$ досягається на границях відрізка X_1 : при $x_1 = 0$ будемо мати $H_1(\hat{x}) = 3\hat{x}_2^2 + 4\hat{x}_2$; при $x_1 = 5$ будемо мати $H_1(\hat{x}) = 3\hat{x}_2^2 + 54\hat{x}_2 - 75$. В області $x_1 \in [0,5]$, $x_2 \in [0,1]$ похідна $\frac{\partial H_1(x)}{\partial x_1} \leq 0$, тобто функція $H_1(x)$ буде спадною по x_1 . В області $x_2 \in [2,10]$, $x_1 \in [0,5]$ похідна $\frac{\partial H_1(x)}{\partial x_1} \geq 0$, тобто функція $H_1(x)$ буде зростаючою по x_1 . Тоді

$$H_1(\hat{x}) = \begin{cases} 3\hat{x}_2^2 + 4\hat{x}_2, & \hat{x}_2 \in [0,1], \hat{x}_1 = 0, \\ 28\hat{x}_2^2 - 46\hat{x}_2 + 25, & \hat{x}_2 \in (1,2), \hat{x}_1 = 5(\hat{x}_2 - 1), \\ 3\hat{x}_2^2 + 54\hat{x}_2 - 75, & \hat{x}_2 \in [2,10], \hat{x}_1 = 5. \end{cases}$$

Таким чином, $N_1 = \{\hat{x} \in X_1 \times X_2: \hat{x}_1 = 0, \hat{x}_2 \in [0,1]; \hat{x}_1 = 5(\hat{x}_2 - 1), \hat{x}_2 \in (1,2); \hat{x}_1 = 5, \hat{x}_2 \in [2,10]\}$ (на рис. 4.1 це ламана OABC).

Побудуємо N_2 , використовуючи умови оптимальності. З цією метою знайдемо похідну

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_2} = -10x_2 + 6\hat{x}_1.$$

Звідси витікає, що в області $X_1 \times X_2$ допустимих ситуацій похідна міняє знак, тобто функція $H_2(x)$ не є монотонною і її максимум по x_2 при фіксованому $\hat{x}_1$ може досягатись у внутрішніх точках відрізка X_2 . Тоді стаціонарні точки задовольняють рівнянню: $-5x_2 + 3\hat{x}_1 = 0$. В силу того, що в цих точках

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial x_2^2} = -10 < 0,$$

то вони утворюють множину глобальних максимумів функції $H_2(x)$ по x_2 , коли $\hat{x}_2 = \frac{3}{5}\hat{x}_1$, $\hat{x}_1 \in (0,5)$, $\hat{x}_2 \in (0,3)$, і при цьому $H_2(\hat{x}) = 19/5\hat{x}_1^2 + 10\hat{x}_1$. Таким чином, $\hat{x}_2$ завжди попадає в проміжок $[0,10]$, коли $\hat{x}_1 \in [0,5]$. Тому $N_2 = \{\hat{x} \in X_1 \times X_2: \hat{x}_2 = 3/5\hat{x}_1, \hat{x}_1 \in [0,5]\}$ (на рис.4.1 це відрізок OD).

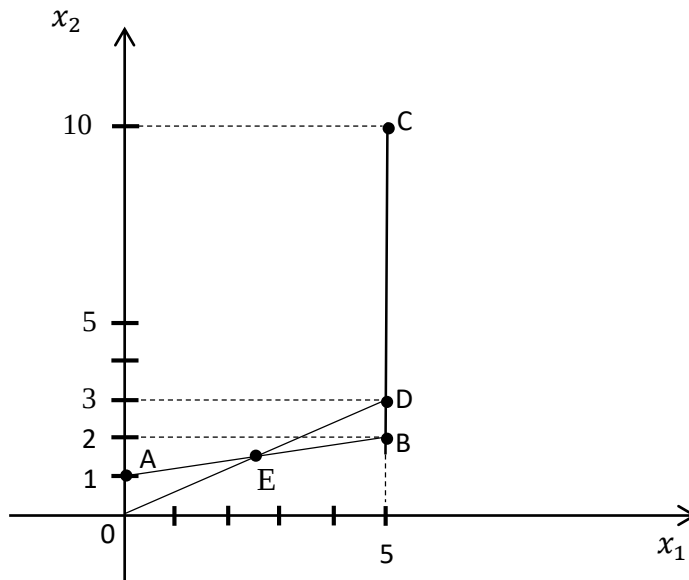


Рис. 4.1

Тоді $N = \{O = (0,0), E = (5/2, 3/2), D = (5,3)\}$. Значення функцій вигравів на множині N набуде вигляду $(0,0)$, $(19, 195/4)$, $(114, 145)$. Зрозуміло, що гравці, не змовляючись, обирають рівноважну за Нешем ситуацію $x^N = (5,3)$.

§ 5. Рівновага за Бержу.

В цьому пункті визначимо ситуацію рівноваги, яка позбавлена негативних особливостей 1 і 2, характерних для рівноваги за Нешем.

Означення 5.1. Ситуація $x^B \in X$ називається рівноважною за Бержу для гри Γ , якщо одночасно виконуються нерівності

$$H_i(x || x^{(B,i)}) \leq H_i(x^B), \quad (5.1)$$

$$\max_{x_i} \min_{x/X_i} H_i(x) \leq H_i(x^B), \quad i = \overline{1, n}, \quad \forall x \in X. \quad (5.2)$$

Тут слід відзначити, що умова (5.2) не являється обов'язковою: у разі її невиконання хоч би по одному індексу за основу приймається виконання умови (5.1).

Порівняння рівноваги за Бержу з рівновагою по Нешу.

1. Для антоганістичної гри з функцією виграшу $H(x^{(1)}, x^{(2)})$ сідлова точка співпадає як з рівноважною по Нешу ситуацією у відповідній безкоаліційній грі двох осіб з функцією виграшу $H(x^{(1)}, x^{(2)})$ першого гравця і функцією виграшу $-H(x^{(1)}, x^{(2)})$ для другого гравця, так і з ситуацією рівноваги за Бержу в тій же грі двох осіб.

2. Ситуація рівноваги як по Нешу, так і по Бержу стійка по відношенню до відхилення від них.

3. Ситуаціям рівноваги як по Нешу, так і по Бержу притаманна властивість індивідуальної раціональності: виграти гравців в обох ситуаціях рівноваги не менше гарантованих.

4. Рівноваги за Бержу мають "менш коаліційний характер" ніж рівноваги по Нешу: у випадку єдиної точки рівноваги за Бержу інші гравці завжди будуть дотримуватись відповідних стратегій з обраної ситуації в силу нерівності (5.1).

Приклад 5.1. Знайти рівновагу за Бержу у наступній грі двох осіб, яка була розглянута в попередньому прикладі: $X_1 = [0,5], X_2 = [0,10], H_1(x) = 3x_2^2 - x_1^2 + 10x_1x_2 - 10x_1 + 4x_2, H_2(x) = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 6x_1x_2 + 10x_1$.

Розв'яжемо систему оптимізаційних задач:

$$H_1(\hat{x}) = \max_{x_2 \in X_2} H_1(\hat{x}_1, x_2) = \max_{x_2 \in X_2} (3x_2^2 - \hat{x}_1^2 + 10\hat{x}_1x_2 - 10\hat{x}_1 + 4x_2),$$

$$H_2(\hat{x}) = \max_{x_1 \in X_1} H_2(x_1, \hat{x}_2) = \max_{x_1 \in X_1} (2x_1^2 - 5\hat{x}_2^2 + 6x_1\hat{x}_2 + 10x_1).$$

Для цього потрібно побудувати :

- множини B_1 розв'язків першої задачі, вважаючи $\hat{x}_1$ параметром;
- множини B_2 розв'язків другої задачі, вважаючи $\hat{x}_2$ параметром.

Тоді будемо мати $B = B_1 \cap B_2$, якщо для ситуації $x^B \in B$ виконується нерівність (5.2).

Спочатку знайдемо величини гарантій для обох гравців. Для знаходження максимального гарантованого виграшу та гарантованих стратегій першого гравця розв'яжемо таку задачу:

$$\alpha_1 = \max_{x_1 \in [0,5]} \min_{x_2 \in [0,10]} (3x_2^2 - x_1^2 + 10x_1x_2 - 10x_1 + 4x_2).$$

З цією метою побудуємо функцію $f_1(x_1) = \min_{x_2 \in [0,10]} H_1(x)$ - гарантований виграш першого гравця при виборі ним стратегії $x_1 \in [0,5]$. Спочатку знайдемо похідну функції $H_1(x)$ відносно змінної x_2 :

$$\frac{\partial H_1(x)}{\partial x_2} = 6x_2 + 10x_1 + 4.$$

Звідси витікає, що в області $X_1 \times X_2$ допустимих ситуацій похідна додатна, тобто функція $H_1(x)$ є монотонно зростаючою і її мінімум по x_2 при фіксованому x_1 досягається в точці $x_2 = 0$ і при цьому будемо мати $f_1(x_1) = -x_1^2 - 10x_1$. Таким чином, максимальний гарантований виграш першого гравця $\alpha_1 = \max_{x_1 \in [0,5]} f_1(x_1) = 0$, а множиною гарантованих стратегій буде точка $O_1 = \{0\}$.

Для знаходження максимального гарантованого виграшу та гарантованих стратегій другого гравця розв'яжемо таку задачу:

$$\alpha_2 = \max_{x_2 \in [0,5]} \min_{x_1 \in [0,10]} (2x_1^2 - 5x_2^2 + 6x_1x_2 + 10x_1).$$

З цією метою побудуємо функцію $f_2(x_2) = \min_{x_1 \in [0,5]} H_2(x)$ - гарантований виграш другого гравця при виборі ним стратегії $x_2 \in [0,10]$. З цією метою знайдемо похідну функції $H_2(x)$ відносно змінної x_1 :

$$\frac{\partial H_2(x)}{\partial x_1} = 4x_1 + 6x_2 + 10,$$

тобто функція $H_2(x)$ є монотонно зростаючою і її мінімум по x_1 при фіксованому x_2 досягається в точці $x_1 = 0$ і при цьому будемо мати $f_2(x_2) = -5x_2^2$. Таким чином, максимальний гарантований виграш другого гравця $\alpha_2 = \max_{x_2 \in [0,10]} f_2(x_2) = 0$, а множиною гарантованих стратегій буде точка $O_2 = \{0\}$.

Побудуємо множину B_1 , використовуючи умови оптимальності. В силу того, що в області $X_1 \times X_2$ похідна $\frac{\partial H_1}{\partial x_2} > 0$ її максимум по x_2 при фіксованому $\hat{x}_1$ досягається при $x_2 = 10$.

При цьому будемо мати $H_1(\hat{x}) = 300 - \hat{x}_1^2 + 100\hat{x}_1 - 10\hat{x}_1 + 40$.

Таким чином, $B_1 = \{\hat{x} \in X_1 \times X_2 : \hat{x}_1 \in [0,5], \hat{x}_2 = 10\}$.

Побудуємо B_2 , використовуючи умови оптимальності. В силу того, що в області $X_1 \times X_2$ похідна $\frac{\partial H_2}{\partial x_1} > 0$ її максимум по x_1 змінній досягається при $x_1 = 5$, коли $\hat{x}_2 \in [0,10]$.

При цьому будемо мати $H_2(\hat{x}) = 50 - 5\hat{x}_2^2 + 30\hat{x}_2 + 50$. Таким чином, $B_2 = \{\hat{x} \in X_1 \times X_2 : \hat{x}_1 = 5, \hat{x}_2 \in [0,10]\}$. Тоді $B = \{(5,10)\}$, а виграші гравців складуть (765, - 100), що суперечить величині гарантії для другого гравця. Таким чином, в даному прикладі:

- 1) не виконується умова (5.2) означення 5.1;

2) виграш другого гравця набагато менший від його виграшу при рівновазі за Нешем.
Тому гравці, скоріше за все, не погодяться з рівновагою за Бержу, а лишаться в межах рівноваги за Нешем •

§ 6. Моделі поведінки виробників на олігопольному ринку.

Розглянемо олігопольний ринок виробників (конкуренція серед небагатьох), на якому незалежно дві фірми випускають однотипний продукт. Нехай $q_i, i = \overline{1,2}$ – обсяги випуску продукції i -ї фірми. Фірми можуть впливати на ціну одиниці продукції. Зафіксуємо механізм такого впливу у вигляді

$$p(q_1, q_2) = a - b(q_1 + q_2), \quad (6.1)$$

де $a, b > 0$ – фіксовані дійсні числа.

Припустимо, що витрати кожної фірми виражаються лінійно через її обсяги

$$C_i(q_i) = c q_i + d, \quad (6.2)$$

де $c, d > 0$ – фіксовані дійсні числа.

Діяльність фірми будемо оцінювати її прибутком

$$\pi_i = p(q_1, q_2)q_i - C_i(q_i) = (a - b(q_1 + q_2))q_i - c q_i - d. \quad (6.3)$$

Тут слід відзначити, що з економічного змісту задачі витікає невід'ємність ціни, тобто має місце додаткове обмеження на обсяги випуску продукції кожної фірми

$$\Pi = \{q_i \geq 0, i = \overline{1,2}; 0 < q_1 + q_2 \leq \frac{a}{b}\}. \quad (6.4)$$

Фірма намагається діяти так, щоб її прибуток був якомога більшим. Таким чином, ми маємо модель безкоаліційної гри, в якій $q_i, i = \overline{1,2}$ – стратегії відповідних гравців (фірм), а $q' = (q_1, q_2)$ – ситуація гри. Зауважимо, що описана гра не вкладається в схему, описану в § 1. Дійсно, допустима ситуація гри $q \in \Pi$, але множину Π (на рис. 6.1 це прямокутний трикутник OAB) неможливо представити у вигляді векторного добутку двох незалежних множин зміни стратегій гравців. Тому гравці повинні погодитись на існування "незалежного посередника" (автомата), який би узгоджував незалежний вибір ними стратегій $q_i \in [0, a/b], i = \overline{1,2}$ з множиною Π . Зокрема, це може бути операція проектування точки $q \notin \Pi$ на множину Π . Наприклад (див. рис. 6.1), якщо гравці обрали ситуацію $D = (\bar{q}_1, \bar{q}_2)$ або ситуацію $C = (a/b, a/b)$, то автомат їм узгоджує ситуацію $E = (\hat{q}_1, \hat{q}_2)$ або ситуацію $G = (\hat{\hat{q}}_1, \hat{\hat{q}}_2)$ відповідно.

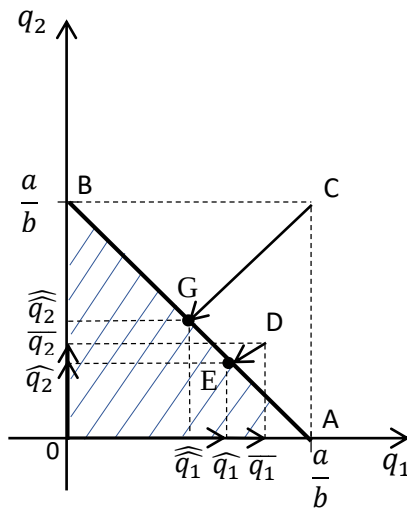


Рис. 6.1

Знайдемо гарантовану рівновагу поведінки фірм на олігопольному ринку, приймаючи для спрощення обчислень $a = 1, b = c = d = 1$. Для знаходження максимального гарантованого виграшу та гарантованих стратегій першого гравця розв'яжемо таку задачу:

$$\alpha_1 = \max_{q_1 \in [0,2]} \min_{q_2 \in [q \in \Pi]} [(2 - q_1 - q_2)q_1 - q_1 - 1].$$

З цією метою побудуємо функцію $f_1(q_1) = \min_{q_2 \in [0,2-q_1]} ((2 - q_1 - q_2)q_1 - q_1 - 1)$ – гарантований виграш першого гравця при виборі ним стратегії $q_1 \in [0,2]$.

Спочатку знайдемо похідну функції $\pi_1(q)$ відносно змінної q_2 :

$$\frac{\partial \pi_1(q)}{\partial q_2} = -q_1.$$

Звідси витікає, що в середині області Π допустимих ситуацій похідна не міняє знак, тобто функція $\pi_1(q)$ є монотонною спадною по q_2 при фіксованому значенні q_1 , тобто її мінімум досягається при $q_2 = 2 - q_1$ і дорівнює $f_1(q_1) = -q_1 - 1$.

Таким чином, максимальний гарантований виграш першого гравця $\alpha_1 = \max_{q_1 \in [0,a/b]} f_1(q_1) = -1$, а гарантованою стратегією першого гравця буде $q_1 = 0$.

В силу симетрії прибутків гравців гарантовану ситуацію утворює пара $(0,0)$, яка являється суперечливою з економічної точки зору: ніхто нічого не виробляє.

Розглянемо тепер рівновагу за Нешем в цій грі. Для цього, як і у прикладі 4.1, розв'яжемо систему оптимізаційних задач

$$\pi_1(\hat{q}_2) = \max_{q_1 \in [0,2-\hat{q}_2]} [(2 - q_1 - \hat{q}_2)q_1 - q_1 - 1],$$

$$\pi_2(\hat{q}_1) = \max_{q_2 \in [0,2-q_1]} [(2 - q_1 - q_2)q_2 - q_2 - 1]. \quad (6.5)$$

Для першої задачі знаходимо похідну

$$\frac{\partial \pi_1(q)}{\partial q_1} = -2q_1 - q_2 + 1.$$

Тоді із виразу для похідної витікає, що в області Π функція $\pi(q)$ не є монотонною і її максимум по q_1 при фіксованому $\hat{q}_2$ може досягатись у внутрішніх точках відрізка $[0, 2 - \hat{q}_2]$. Стаціонарні точки задовольняють рівнянню: $-2q_1 - q_2 + 1 = 0$. В силу того, що в цих точках

$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial q_1^2} = -2 < 0,$$

то вони утворюють множину глобальних максимумів функції $\pi_1(q)$ по q_1 , коли $\hat{q}_1 = 0.5(1 - \hat{q}_2) \in [0, 0.5], \hat{q}_2 \in [0, 1)$ (на рис. 3.3 це відрізок АВ) і при цьому $\pi_1(\hat{q}) = 0.25(1 - \hat{q}_2)^2 - 1$. Якщо $1 < \hat{q}_2 \leq 2, 0 \leq \hat{q}_1 \leq 2 - \hat{q}_2$, то функція $\pi_1(q)$ буде спадною вздовж q_1 і її максимум буде досягатись при $q_1 = 0: \pi_1(\hat{q}) = -1$.

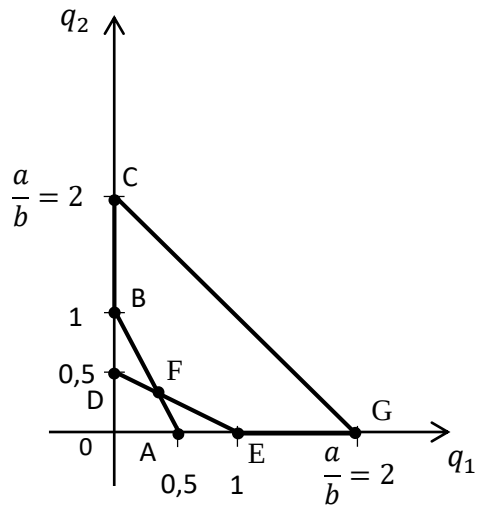


Рис. 6.2

Таким чином, множина розв'язків першої задачі $N_1 = \{\hat{q} \in [0,2] \times [0,2]: \hat{q}_1 = 0.5(1 - \hat{q}_2) \in [0,0.5), \hat{q}_2 \in [0,1); \hat{q}_1 = 0, \hat{q}_2 \in [1,2]\}$ (на рис.6.2 це ламана ABC).

В силу симетрії функцій виграшів гравців множина розв'язків другої задачі $N_2 = \{\hat{q} \in [0,2] \times [0,2]: \hat{q}_2 = 0.5(1 - \hat{q}_1) \in [0,0.5), \hat{q}_1 \in [0,1); \hat{q}_2 = 0, \hat{q}_1 \in [1,2]\}$ (на рис. 6.2 це ламана DEG).

Тоді рівновага за Нешем в цій задачі досягається в точці $F = (1/3, 1/3)$ з виграшами гравців $\pi_1(\hat{q}) = \pi_2(\hat{q}) = -8/9$.

§ 7. Вибір нешівських рівноваг. Часткова інформованість гравців.

1.Вибір нешівських рівноваг. Гра може мати декілька ситуацій рівноваги за Нешем (див. § 5), і при цьому, у різних ситуаціях гравці можуть отримувати різні виграші. Таким чином, одні ситуації будуть вигідні одним гравцям, а інші – іншим. Після введення Нешем поняття рівноваги, багато фахівців намагалися сформулювати додаткові умови вибору єдиної рівноваги. Одна із таких концепцій була запропонована лауреатами Нобелівської премії з економіки за 1994 р. Дж. Харшаньї та Р. Зельтенем. Розглянемо наступний приклад.

Приклад 7.1.(див. табл. 7.1.)

Таблиця 7.1.

X_2		
X_1	a_2	b_2
a_1	(9,9)	(1,8)
b_1	(8,1)	(7,7)

В цій грі маємо дві ситуації рівноваги: (a_1, a_2) та (b_1, b_2) . Яку з них оберуть гравці? Здається, що ситуація (a_1, a_2) краще для обох гравців: вона строго домінує ситуацію (b_1, b_2) . Але вибір (a_1, a_2) обома гравцями зовсім неочевидний. Дійсно, якщо перший гравець відхилиться від своєї стратегії a_1 (обере b_1), а другий гравець при цьому буде дотримуватись стратегії a_2 , то він утратить лише одну одиницю виграшу (≈ 10 відсотків), зате інший втратить 8 одиниць (≈ 90 відсотків). Водночас, першому гравцю абсолютно не вигідно відхилитись від ситуації (b_1, b_2) , оскільки він втрачає 6 одиниць (≈ 85 відсотків), а другий отримує навіть більше. Оскільки гра симетрична, то для другого гравця висновки аналогічні. Отже, ризик відхилення кожного гравця від ситуації рівноваги (a_1, a_2) – великий, а від та (b_1, b_2) – малий. Цей висновок стає ще більш переконливим, якщо перейти від гри з виграшами (табл. 7.1) до гри з "втратами"

Таблиця 7.2.

X_1	X_2	
	a_2	b_2
a_1	(1,1)	(0,0)
b_1	(0,0)	(6,6)

Зауважимо, що якщо H – виграші гравців, а h – їх втрати, то зв'язок між таблицями 7.1 і 7.2 буде наступним:

$$h_1(a_1, a_2) = H_1(a_1, a_2) - H_1(b_1, a_2) = 9 - 8 = 1, \quad h_2(a_1, a_2) = H_2(a_1, a_2) - H_2(a_1, b_2) = 9 - 8 = 1;$$

$$h_1(b_1, b_2) = H_1(b_1, b_2) - H_1(a_1, b_2) = 7 - 1 = 6, \quad h_2(b_1, b_2) = H_2(b_1, b_2) - H_2(b_1, a_2) = 7 - 1 = 6;$$

$$h_1(b_1, a_2) = H_1(b_1, a_2) - H_1(b_1, a_2) = 8 - 8 = 0, \quad h_2(b_1, b_2) = H_2(b_1, a_2) - H_2(b_1, a_2) = 1 - 1 = 0;$$

$$h_1(a_1, b_2) = H_1(a_1, b_2) - H_1(a_1, b_2) = 1 - 1 = 0, \quad h_2(a_1, b_2) = H_2(a_1, b_2) - H_2(a_1, b_2) = 8 - 8 = 0.$$

Означення 7.1. Нехай r та s дані рівноваги у грі G . Ситуація r домінує за виграшем ситуацію s , якщо $H_i(r) \geq H_i(s) \forall i \in I; \exists j_0 \in I: H_{j_0}(r) > H_{j_0}(s)$.

Означення 7.2. Ситуація рівноваги r називається ефективною за виграшем у грі G , якщо не існує інших ситуацій рівноваги, які домінують за виграшем r .

Отже, ситуація рівноваги (a_1, a_2) у прикладі 7.1 є ефективною за виграшем. Оцінімо тепер ризики гравців у тому ж прикладі. Ризик для першого гравця визначається відношенням

$$\frac{H_1(b_1, a_2)}{H_1(a_1, a_2)} = \frac{8}{9} > \frac{H_1(a_1, b_2)}{H_1(b_1, b_2)} = \frac{1}{7}.$$

Для другого гравця ситуація буде аналогічною. Таким чином, для обох гравців рівновага (a_1, a_2) є більш ризиковою ніж рівновага (b_1, b_2) .

Розглянемо "несиметричну" гру двох осіб.

Приклад 7.2. (див. табл. 7.3. – гра з виграшами, табл. 7.4. – гра з втратами)

Таблиця 7.3.

X_2	a_2	b_2
X_1		
a_1	(9,5)	(1,1)
b_1	(1,1)	(2,6)

Таблиця 7.4.

X_2	a_2	b_2
X_1		
a_1	(8, 4)	(0, 0)
b_1	(0, 0)	(1, 5)

В табл. 7.3 ситуації рівноваги $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ не знаходяться у відношенні домінування за виграшем: перший гравець має більш високий виграш в ситуації a , другий гравець – в ситуації b . Стан ризику для першого гравця, пов'язаний із відношенням $h_1(a)/h_2(b) = 8$, а для другого гравця – з відношенням $h_2(b)/h_2(a) = \frac{5}{4}$. Отже перший гравець має більш сильну мотивацію щодо вибору a , ніж другий гравець – для вибору b . Якщо другий гравець мислить раціонально, то він теж зупиниться на ситуації a (тоді він матиме (табл. 7.3) $H_2(a_1, a_2) = 5$, звмість $H_2(a_1, a_2) = 1$ •

У загальному випадку "несиметричної" гри двох осіб з двома стратегіями також можна провести дослідження на "ризиковість" рівноважних ситуацій. Для цього розглянемо гру з наступною таблицею виграшів.

Таблиця 7.5.

X_2	a_2	b_2
X_1		
a_1	$(H_1(a_1, a_2), H_2(a_1, a_2))$	$(H_1(a_1, b_2), H_2(a_1, b_2))$
b_1	$(H_1(b_1, a_2), H_2(b_1, a_2))$	$(H_1(b_1, b_2), H_2(b_1, b_2))$

Нехай ситуації a і b рівноважні за Нешем. Тоді таблиця з втратами для такої гри набуде вигляду

Таблиця 7.6.

X_1	X_2	
		a_2 b_2
a_1		$(h_1(a_1, a_2), h_2(a_1, a_2))$ $(h_1(a_1, b_2), h_2(a_1, b_2))$
b_1		$(h_1(b_1, a_2), h_2(b_1, a_2))$ $(h_1(b_1, b_2), h_2(b_1, b_2))$

Елементи табл. 7.6 обчислюються за формулами

$$h_1(a_1, a_2) = H_1(a_1, a_2) - H_1(b_1, a_2), \quad h_2(a_1, a_2) = H_2(a_1, a_2) - H_2(a_1, b_2);$$

$$h_1(b_1, b_2) = H_1(b_1, b_2) - H_1(a_1, b_2), \quad h_2(b_1, b_2) = H_2(b_1, b_2) - H_2(b_1, a_2);$$

$$h_1(a_1, b_2) = h_2(a_1, b_2) = h_1(b_1, a_2) = h_2(b_1, a_2) = 0.$$

Будемо вважати, що ненульові елементи табл. 7.6 – додатні числа.

Означення 7.3. Ситуація a домінує за ризиком ситуацію b , якщо $h_1(a) / h_1(b) > h_2(b) / h_2(a)$.

Означення 7.4. Ситуація рівноваги a називається ефективною за ризиком у грі G , якщо не існує інших ситуацій рівноваги, які домінують за ризиком a .

Отже, ситуація рівноваги (b_1, b_2) у прикладі 7.1 є ефективною за ризиком.

Таким чином, гравці повинні обирати не доміновану за виграшем ситуацію серед рівноважних за Нешем (так ми визначили розв'язок гри!) Бажано, щоб при цьому вона була задовільна по ризику. У прикладі 7.1 ситуація a – ефективна за виграшем, ситуація b – ефективна за ризиком: обираємо в якості єдиного розв'язку ситуацію a . У прикладі 7.2 відсутні ситуації, які були б ефективними за виграшем. Тому в якості єдиного розв'язку обираємо ситуацію a – ефективну за ризиком. В інших випадках проблема вибору єдиної NE - рівноваги із багатьох лишається відкритою і кожен раз потребує додаткового дослідження. Тут варто ще раз повторити зауваження із попередньої лекції, що під оптимальністю ми розуміємо різні варіанти формалізованого опису змістовних представлень про вигідність, стійкість і справедливість. В означенні рівноваги по Нешу врахована лише вигідність, а дві інші категорії лишились поза означенням.

2. Часткова інформованість гравців. У багатьох економічних, політичних і соціальних ситуаціях природньо відбувається несиметричний розподіл інформації. Розглянемо найпростішу модель такого виду: поведінка пари "лідер - підлеглий." Першим подібну модель розглянув економіст Г. Штакельберг на початку XX століття при описанні стратегій фірм, що конкурують на одному ринку. У таких ситуаціях нерідко одна із фірм виявляється сильнішою за інші і нав'язує їм свою стратегію, наприклад, при формуванні ціни.

Нехай для гри двох осіб $G = \{I = \{1, 2\}, X_i, H_i, i \in I\}$, R_j – множина кращих відповідей j -го гравця на задані стратегії i -го гравця, $j \neq i$, тобто

$$R_j = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2: H_j(x_1, x_2) = \sup_{y_j \in X_j} H_j(x_i, y_j), j \neq i\}.$$

Означення 7.5. Ситуація (x_1, x_2) називається i - рівновагою Штакельберга, якщо $H_i(x_1, x_2) = \sup_{(y_1, y_2) \in R_j} H_i(y_1, y_2)$, $i, j = \{1, 2\}, j \neq i$.

Множину i - рівноваг Штакельберга позначимо через SHE_i . Можна інтерпретувати 1 - рівновагу Штакельберга на основі такого сценарію: гравець 1 (лідер) знає обидві функції виграшів H_k , $k = \{1, 2\}$ і використовує дану інформацію для передбачення поведінки гравця 2. Гравець 2 (підлеглий) сприймає стратегію гравця 1 як задану екзогенно (із зовні) і максимізує власний виграш (обираючи свою максимізуючу стратегію.) Таким чином, гравець 1, маючи перший хід і предбачаючи "розумність" реакції на нього гравця 2, сам поступаючи "розумно," буде розв'язувати задачу із означення 7.5. Розглянемо наступний приклад.

Приклад 7. 3. (див. табл. 7.7.)

Таблиця 7.7.

X_2	a_2	b_2	c_2
X_1			
a_1	(1, 3)	(5, 1)	(1, 5)
b_1	(4, 1)	(2, 2)	(3, 2)
c_1	(1, 1)	(2, 4)	(3, 3)

В цій грі NE - рівновага (3,2). Знайдемо 1 - рівновагу Штакельберга (1 - лідер, 2 - підлеглий; 1 - знає H_1 і H_2 , 2 - лише H_2). На фіксовану стратегію першого гравця a_1 другий обере свою максимізуючу стратегію c_2 ; $b_1 \rightarrow b_2, c_2$; $c_1 \rightarrow b_2$. Таким чином, для вибору своєї найкращої стратегії гравець 1 повинен розглядати лише ситуації $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (b_1, c_2), (c_1, b_2)$ (це і буде множина R_1). Він обере $(b_1, c_2) = (3, 2)$ – в цій точці функція H_1 досягає максимуму на R_1 . Аналогічно, знаходимо, що $R_2 = \{ \text{ситуації } (b_1, a_2), (a_1, b_2), (b_1, c_2), (c_1, c_2) \}$, $SHE_2 = (3, 3)$. Таким чином, гравець 2 в якості лідера буде ефективнішим – він забезпечує більший виграш •

Кажуть, що гра відбувається в умовах { мінімальної інформованості }, якщо гравці знають лише свої функції виграшу, але на відміну від умов повної неінформованості, гра може відбуватися необмежену кількість разів і гравці можуть разом спостерігати її наслідки. Проаналізуємо мотивацію гравців щодо концепції рівноваги Неша. Тут можливі два "крайніх" випадки.

1. *Стратегічний сценарій.* Згідно цього сценарію, гравці спільно обговорюють вибір ситуації, яка буде основою "необов'язкової" домовленості. Після чого вони розходяться і обмін інформацією припиняється. Кожен гравець таємно обирає свою стратегію, не знаючи дійсних стратегічних виборів інших гравців. Кожен гравець може бути вірним досягнутій домовленості, а може і відступити від неї. Тоді і лише тоді, коли узгоджена ситуація є рівноважною за Нешем, отримаємо стабільну домовленість. Цей сценарій передбачає повну

інформованість гравців: кожен знає всі цільові функції і має можливість знаходження нешівських рівноваг.

2. **Тактичний сценарій.** Згідно цього сценарію, кожен гравець притримується певної оптимальної стратегії ("намацування за Курно") за умови, що інші гравці не змінюють своїх стратегій. Коли ця процедура "намацування за Курно" збігається, отримуємо рівновагу Неша. Цей сценарій реалізується в умовах мінімальної інформованості гравців: кожен знає лише свою цільову функцію і гравці мають можливість спостерігати реалізовані стратегії. Він не завжди приводить до нешівської рівноваги. Розглянемо більш детально другий сценарій.

Приклад 7.4. (Процедура Курно). Два підприємства поставляють на ринок один і той же товар в об'ємах x_i , $i = \{1, 2\}$ за ціною $p(x_1, x_2) = 1 - (x_1 + x_2)$. Максимальні виробничі можливості кожного гравця дорівнюють 0.5. Щодо витрат розглянемо два варіанти:

- а) постійні витрати на випуск одиниці продукції при збільшенні масштабів виробництва (оцінюються величиною $0.5 \times$ на виробництво x одиниць продукції);
- б) спадаючі витрати (оцінюються величиною $0.5 \times - 0.75 x^2$).

В якості функцій виграшу оберемо прибутки підприємств. Тоді для випадку а) будемо мати гру у нормальній формі

$$G = \{I = \{1, 2\}, X_i = [0, 0.5], H_i = (0.5 - (x_1 + x_2)) x_i, i \in I\}.$$

Потрібно знайти NE - рівноважні ситуації для підприємств. Оскільки множини стратегій компактні, функції виграшів диференційовані і угнуті, отримуємо оптимальні відповіді i -го гравця на фіксовані стратегії j -го гравця із розв'язку системи

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1} = 0.5 - 2x_1 - x_2 = 0, \quad \frac{\partial H_2}{\partial x_2} = 0.5 - x_1 - 2x_2 = 0.$$

В термінах множин найкращих відповідей (див. рівновагу Штакельберга) будемо мати

$$R_i = \{(x_i, x_j): x_i = 0.25 - 0.5 x_j, x_j \in [0, 0.5], i, j \in I, i \neq j\}.$$

Єдина NE - ситуація знаходиться як перетин множин R_i , тобто $NE = R_1 \cap R_2 = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ (див.

Рис.7.1.)

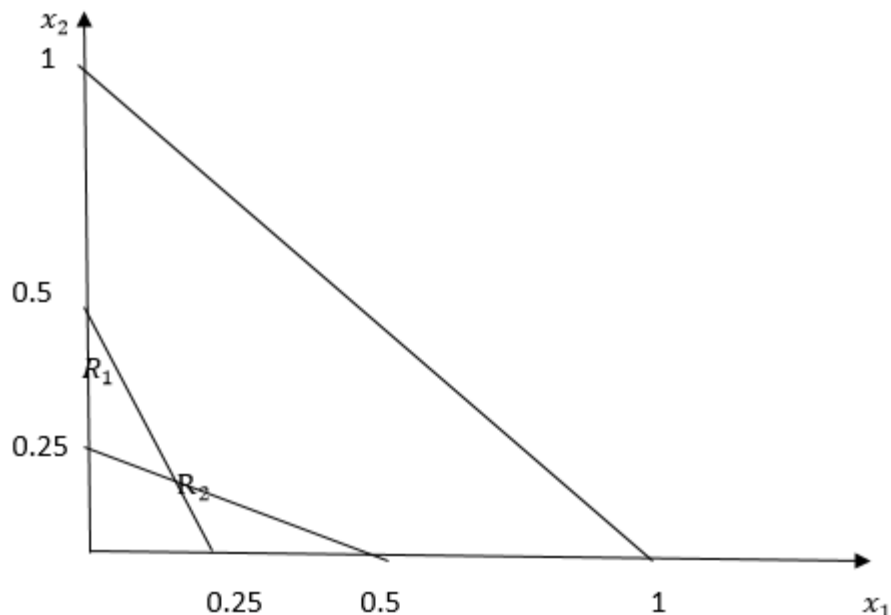


Рис. 7.1.

Процес намацування Курно починається з деякої точки (x_1^0, x_2^0) , $x_i^0 \in [0, 0.5]$. Далі кожен гравець використовує свою оптимальну відповідь на поточну стратегію партнера (нехай точка x^0 лежить поза лінією R_1)

$(x_1^0, x_2^0) \rightarrow (x_1^1, x_2^0) \in R_1 \rightarrow (x_1^1, x_2^1) \in R_2 \rightarrow \dots \rightarrow (x_1^t, x_2^{t-1}) \in R_1 \rightarrow \dots$, де

$$x_1^t = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} x_2^{t-1}, \quad x_2^t = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} x_1^{t-1}.$$

Якщо точка x^0 лежить на лінії R_1 , то збіжна послідовність буде мати вигляд

$$(x_1^0, x_2^0) \in R_1 \rightarrow (x_1^0, x_2^1) \in R_2 \rightarrow (x_1^1, x_2^1) \in R_1 \rightarrow \dots \rightarrow (x_1^{t-1}, x_2^t) \in R_2 \rightarrow \dots$$

Для випадку b будемо мати гру у нормальній формі

$$G = \{I = \{1, 2\}, X_i = [0, 0.5], H_i = (1 - (x_1 + x_2)) x_i - (0.5 x_i - 0.75 x_i^2), i \in I\}.$$

При знаходженні оптимальних відповідей гравців на фіксовані стратегії супротивника, враховуючи крайові оптимуми, отримуємо (див. Рис.7.2.)

$$R_i = \{(x_i, x_j): x_i = \gamma(x_j), \gamma(x) = \begin{cases} 0.5, & x \in [0, 0.25], \\ 1 - 2x, & x \in [0.25, 0.5] \end{cases}, i, j \in I, i \neq j\}.$$

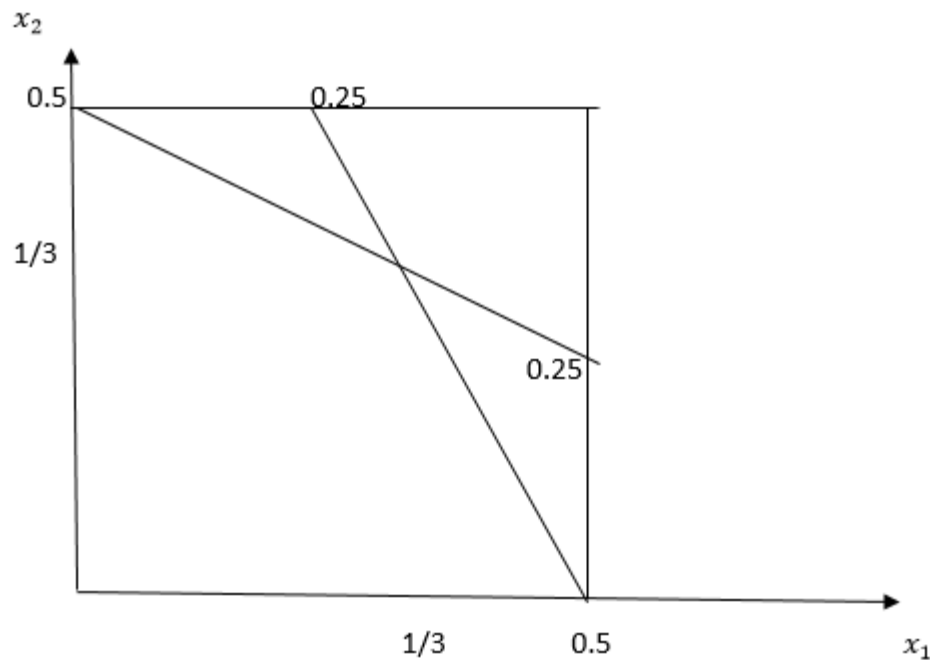


Рис. 7.2.

Одержимо три рівноважні по Нешу ситуації: $NE = \{(1/3, 1/3), (1/2, 0), (0, 1/2)\}$. Тут лише зауважимо, що процедура Курно за кінечну кількість кроків збігається то крайніх рівноважних точок і не бігається до точки $\{(1/3, 1/3)\}$.

§ 8. Змішані стратегії. Знаходження рівноваг у змішаних стратегіях.

1.Змішані стратегії. Розглянемо наступний приклад.

Приклад 8.1. (*Гра де Монмора*). В кінці XVIII століття французький математик Рене де Монмор розглянув таку ситуацію. Для того, щоб зробити подарунок сину, батько пропонує: "Я візьму золоту монету у праву (П) або в ліву (Л) руку, а ти назвеш одну із них. Якщо монета в мене у правій руці і твій здогад правильний, то ти отримаєш одну золоту монету. Якщо ж монета в мене лівій руці і твій здогад правильний, то ти отримаєш дві монети; інакше не отримаєш нічого."

Матрицю виграшів сина у цій грі наведено у табл. 8.1.

Таблиця 8.1.

X_2		
X_1	Л	П
Л	2	0
П	0	1

Де Монмор запитує, як можна оцінити для сина цей подарунок. Ця гра не має ціни $\max_{x_1} \min_{x_2} H(x_1, x_2) = 0 \neq \min_{x_2} \max_{x_1} H(x_1, x_2) = 1$, тобто у жодного гравця відсутня оптимальна стратегія. Але знання стратегії супротивника дозволяє досягти хорошого результату. Отже, виникає боротьба за другий хід, у якому кожен гравець хоче приховати свій кінцевий стратегічний вибір і у той же час розвідати наміри супротивника. Єдиний спосіб зробити свій вибір непередбачуваним полягає у тому, щоб зробити його випадковим: замість вибору чистої стратегії x_i із множини {Л, П} син може використати рандомізовану (випадкову) стратегію

$$\mu_1 = \min \{2p_1, 1 - p_1\} = \begin{cases} 2p_1, & 2p_1 \leq 1 - p_1 \rightarrow p_1 \leq \frac{1}{3}, \\ 1 - p_1, & 1 - p_1 \leq 2p_1 \rightarrow p_1 \geq \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Отже, гарантований виграш сина буде дорівнювати $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ при $p_1 = \frac{1}{3}$, а гарантований програш батька $\alpha_2 = \frac{2}{3}$. Таким чином, внесення тактичної невизначеності у стратегічний вибір приводить до ціни $\alpha = \frac{2}{3}$, тобто якщо гра буде повторюватись багато разів (теоретично - нескінченно) і батько й син будуть обирати стратегії з ймовірністю $\frac{1}{3}$, то у кождих трьох випадках її реалізації син буде отримувати 2 монети •

Означення 8.1. Нехай $G = \{X_i, H_i, i \in I\}$, X_i – скінченна множина стратегій i -го гравця (містить n елементів). Змішаною стратегією гравця i називається ймовірнісний розподіл $\mu_i = \mu_i(x_i)$, $x_i \in X_i$, $0 \leq \mu_i(x_i) \leq 1$, $\sum_{x_i \in X_i} \mu_i(x_i) = 1$ ($\mu_i(x_i)$ – ймовірність вибору i -м гравцем його "чистої" стратегії) •

Отже, множина M_i змішаних стратегій i -го гравця є одиничним симплексом у просторі його стратегій $R^{|X_i|}$.

Змішаним розширенням гри G називається гра $\bar{G} = \{M_i, \bar{H}_i, i \in I\}$, де

$$\bar{H}(\mu) = \sum_{x \in X_i} H_i(x) \mu_1(x_1) \dots \mu_n(x_n) \quad \forall \mu \in M_I = \prod_{j=1}^n M_j. \quad (8.1)$$

Тут мається на увазі наступне: "лотерея" i -го гравця не залежить від "лотереї" j -го гравця для всіх $j \neq i$ і лише цей гравець знає стратегію x_i , яка дійсно випала у лотереї. Оскільки випадкові змінні незалежні у сукупності, то $\bar{H}_i(\mu)$ є очікуваним виграшем (математичним сподіванням) гравця i .

Означення 8.2. Чиста стратегія $x_i \in X_i$ гравця i у початковій грі G ототожнюється зі змішаною стратегією $\delta_{x_i} \in M_i$ у грі $\bar{G}$, у якій стратегія x_i обирається із імовірністю одиниця, тобто $\delta_{x_i}(x_i) = 1$; $\delta_{x_i}(y_i) = 0 \quad \forall y_i \neq x_i$.

У цьому випадку із формули (8.1) будемо мати

$$\bar{H}_i(\delta_x) = H_i \quad \forall x \in X_I, \quad \delta_x = (\delta_{x_i}, i \in I).$$

Тому будемо розглядати множину X_i як підмножину M_i , а $\bar{H}_i$ – як розширення області визначення H_i з X_i на M_i .

Із теорії антагоністичних ігор двох осіб відомо, що у змішаному розширенні гри завжди існує її ціна та сідлова точка. Аналогічна ситуація має місце і для безкоаліційних ігор з кінцевою множиною стратегій у гравців. Сформулюємо ряд тверджень, які допомагають будувати рівноважні ситуації у змішаному розширенні некооперативних ігор.

Теорема 8.1. Якщо X_i – скінченні множини стратегій для всіх $i \in I$. Тоді множина рівноваг Неша у грі $\bar{G}$ є непорожнім компактом в M_i і містить множину рівноваг Неша у вихідній грі G , тобто $NE(G) \subseteq NE(\bar{G})$.

Теорема 8.2. Гарантований виграш гравця у початковій грі не перевищує його гарантований виграш у змішаному її розширенні, тобто $\forall i \in I: \sup_{x_i \in X_i} \inf_{x_{I \setminus i} \in X_{I \setminus i}} H_i(x_i, x_{I \setminus i}) \leq$

$$\sup_{\mu_i \in M_i} \inf_{\mu_{I \setminus i} \in M_{I \setminus i}} \bar{H}_i(\mu_i, \mu_{I \setminus i}).$$

Теорема 8.3. (фон Нейман, Моргенштерн). Змішане розширення $\bar{G} = \{M_1, M_2, \bar{H}_1\}$ скінченної гри двох осіб з нульовою сумою $G = \{X_1, X_2, H_1\}$ має хоч би одну сідлову точку і ціну $\bar{v}$, для якої виконується нерівність

$$\bar{v} = \sup_{x_1 \in X_1} \inf_{x_2 \in X_2} H_1(x_1, x_2) \leq \bar{v} \leq \inf_{x_2 \in X_2} \sup_{x_1 \in X_1} H_1(x_1, x_2) = \tilde{v}.$$

Таким чином, якщо початкова гра G має ціну і у кожного гравця є оптимальна стратегія, то змішане розширення гри $\bar{G}$ має ту ж ціну і довільні опуклі комбінації оптимальних стратегій у грі G є оптимальними стратегіями у грі $\bar{G}$. Якщо ж гра G не має ціни, а отже, у гравців немає оптимальних стратегій, то у грі $\bar{G}$ кожен гравець має хоча б одну оптимальну змішану стратегію, а ціна гри належить відрізку $[\bar{v}, \tilde{v}]$. Прикладом тут є гра Монмора зі змішаною ціною $\frac{2}{3}$ та гарантованими стратегіями обох гравців $\frac{1}{3} \text{ Л} + \frac{2}{3} \text{ П}$.

2. Знаходження рівноваг у змішаних стратегіях. Нехай X_i скінченна множина стратегій гравця $i \in I$. Для довільної змішаної стратегії $\mu_i \in M_i$ позначимо через $[\mu_i] = \{x_i \in X_i: \mu_i(x_i) > 0\}$ – "носій" μ_i , тобто множину чистих стратегій гравця i , які входять у μ_i з додатною ймовірністю.

Означення 8.3. Змішана стратегія μ_i називається цілком змішаною, якщо $[\mu_i] = X_i$, тобто носієм μ_i є вся множина чистих стратегій.

Означення 8.4. Ситуація μ у грі $\bar{G}$ називається цілком змішаною, якщо μ_i – цілком змішана стратегія при всіх $i \in I$.

Теорема 8.5. Нехай початкова гра $G = \{X_i, H_i, i \in I\}$ має скінченні множини стратегій. Нехай $\mu^* \in NE(\bar{G})$ – рівновага Неша у змішаних стратегіях. Тоді справедлива така система рівностей

$$\forall i \in I, \forall x_i \in [\mu_i^*]: \overline{H}_i(\delta_{x_i}, \mu_{I \setminus i}^*) = \overline{H}_i(\mu^*) \quad (8.2)$$

Теорема 8.5 є основним інструментом, що дозволяє обчислювати рівноваги Неша у змішаних стратегіях. Дійсно, нехай ми шукаємо ситуацію $\mu \in NE(\overline{G})$, вважаючи носії всіх стратегій μ_i , заданими

$$[\mu_i] = Y_i \subseteq X_i, i \in I. \quad (8.3)$$

Тоді система (8.2) набуде вигляду

$$\forall i \in I, \forall x_i, y_i \in Y_i: \overline{H}_i(\delta_{x_i}, \mu_{I \setminus i}^*) = \overline{H}_i(\delta_{y_i}, \mu_{I \setminus i}^*). \quad (8.4)$$

Система (8.4) складається із $|Y_i| - 1$ одновимірних рівнянь. Згідно з (8.3), кожна стратегія μ_i складається із $|Y_i| - 1$ незалежних змінних, враховуючи $\sum_{x_i \in Y_i} \mu_i(x_i) = 1$.

Коли кількість стратегій в множині $X_i, i \in I$, невелика, то наступний алгоритм дозволяє повністю визначити $NE(\overline{G})$. Для цього фіксуємо підмножину $Y_i \subseteq X_i$.

Розв'язуємо систему (8.3) – (8.4) відносно змінних $\mu_i \in M_i$ для всіх $i \in I$. Для кожного розв'язку μ тепер потрібно перевірити нерівності

$$\forall i \in I, \forall x_i \in Y_i: \overline{H}_i(\delta_{x_i}, \mu_{I \setminus i}) \leq \overline{H}_i(\mu_i, \mu_{I \setminus i}).$$

Для біматричних ігор двох гравців змішані рівноваги Неша можна подати у аналітичній формі.

Нехай виграші гравців задаються матрицями

$$U_i = (H_i(x_1, x_2)), x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, i = \{1, 2\},$$

де X_1 – множина рядків, X_2 – множина стовпців.

Змішана стратегія μ_1 є вектор - рядком $\mu_1 = [\mu_1(x_1)], x_1 \in X_1$, а змішана стратегія μ_2 є вектор - стовпчиком $\mu_2 = [\mu_2(x_2)], x_2 \in X_2$. Тоді виграш гравця i задається формулою

$$\overline{H}_i(\mu_1, \mu_2) = \mu_1 U_i \mu_2, i = \{1, 2\}.$$

Нехай (μ_1^*, μ_2^*) – цілком змішана ситуація із $NE(\overline{G})$. Тоді система (8.4) набуде вигляду

$$U_1 \mu_2^* = \vartheta_1 J_{X_1}, \quad \mu_1^* U_2 = \vartheta_2 J_{X_2}, \quad (8.5)$$

де $\vartheta_i = \overline{H}_i(\mu_1^*, \mu_2^*)$ – NE - виграш гравця i ; J_{X_1}, J_{X_2} – відповідно вектор - стовпчик і вектор - рядок, всі компоненти яких дорівнюють 1.

Нехай матриці U_i – не вироджені. Тоді із першого рівняння системи (8.5) знаходимо

$$\mu_2^* = \vartheta_1 U_1^{-1} J_{X_1}.$$

Перемножуючи зліва на J_{X_2} цю рівність, одержимо

$$1 = \vartheta_1 J_{X_2} U_1^{-1} J_{X_1}$$

Звідси

$$\vartheta_1 = \frac{1}{J_{X_2} U_1^{-1} J_{X_1}}.$$

Тому

$$\mu_2^* = \frac{U_1^{-1} J_{X_1}}{J_{X_2} U_1^{-1} J_{X_1}}. \quad (8.6)$$

Аналогічно,

$$\mu_1^* = \frac{J_{X_1} U_2^{-1}}{J_{X_1} U_2^{-1} J_{X_2}}. \quad (8.7)$$

Таким чином, якщо U_i – не вироджені матриці і гра $G = \{X_i, H_i, i = \{1, 2\}\}$ має цілком змішану NE - ситуацію (μ_1^*, μ_2^*) , то вона єдина і визначається формулами (8.7), (8.6). Навпаки, якщо компоненти векторів, що визначаються формулами (8.7), (8.6), – додатні, то пара (μ_1^*, μ_2^*) – змішана NE- ситуація у грі G .

Приклад 8.2. Розглянемо гру «Сімейна суперечка.» Вона полягає в тому, що сімейна пара планує відвідати разом деякі масові заходи : футбол (Ф) чи балет (Б). Якщо вони разом відвідують футбол, то чоловік отримає більше задоволення, якщо ж балет, то більше задоволення отримає дружина. В інших випадках (заходи відвідують порізно), вони задоволення не отримають взагалі. Гра є біматричною. $I = \{1,2\}$, $X_1 = X_2 = \{1 - \text{Ф}, 2 - \text{Б}\}$. Задамо її таблицею 8.2.

Таблиця 8.2.

$X_2 \backslash X_1$	Ф(ВОНА)	Б (ВОНА)
Ф(ВІН)	(2, 1)	(0, 0)
Б(ВІН)	(0, 0)	(1, 2)

Ця гра має дві рівноваги в чистих стратегіях: (Ф,Ф), (Б, Б). Але в цій грі є і змішана рівновага. Знайдемо її трьома способами.

1 - спосіб (за означенням). Для знаходження рівноваг за Нешем у змішаних стратегіях побудуємо змішане розширення гри. Змішаною стратегією першого гравця (чоловіка) буде розподіл ймовірностей $\mu_1 = (\mu_1(1), \mu_1(2))$: $0 \leq \mu_1(1), \mu_1(2) \leq 1$, $\mu_1(1) + \mu_1(2) = 1$, на множині його стратегій $X_1 = \{1 - \text{Ф}, 2 - \text{Б}\}$. Аналогічно, змішаною стратегією другого гравця (дружини) буде розподіл ймовірностей $\mu_2 = (\mu_2(1), \mu_2(2))$: $0 \leq \mu_2(1), \mu_2(2) \leq 1$, $\mu_2(1) + \mu_2(2) = 1$, на множині її стратегій $X_2 = \{1 - \text{Ф}, 2 - \text{Б}\}$. Множинами змішаних стратегій гравців є одиничні симплекси

$$M_i = \{ \mu_i = (\mu_i(1), \mu_i(2)): 0 \leq \mu_i(1), \mu_i(2) \leq 1, \mu_i(1) + \mu_i(2) = 1, i = \{1,2\} \}.$$

Для спрощення обчислень позначимо: $p = \mu_1(1)$, $q = \mu_2(1)$. Тоді $\mu_1(2) = 1 - p$, $\mu_2(2) = 1 - q$ і ми отримаємо розширену гру $\bar{G}$ зі стратегіями гравців відповідно $p \in [0,1]$, $q \in [0,1]$ та математичними сподіваннями виграшів гравців

$$\bar{H}_1(p, q) = 2pq + (1-p)(1-q), \quad \bar{H}_2(p, q) = pq + 2(1-p)(1-q).$$

Знайдемо рівновагу за Нешем. Згідно означення, для цього потрібно розв'язати систему оптимізаційних задач

$$\begin{aligned} \bar{H}_1(\hat{p}, \hat{q}) &= \max_{p \in [0,1]} \bar{H}_1(p, \hat{q}) = \max_{p \in [0,1]} (2p\hat{q} + (1-p)(1-\hat{q})), \\ \bar{H}_2(\hat{p}, \hat{q}) &= \max_{q \in [0,1]} \bar{H}_1(\hat{p}, q) = \max_{q \in [0,1]} (\hat{p}q + 2(1-\hat{p})(1-q)). \end{aligned}$$

Нехай BR_1 – множина розв'язків першої задачі, вважаючи q параметром; BR_2 – множина розв'язків другої задачі, вважаючи $\hat{p}$ параметром. Тоді $NE(\bar{G}) = BR_1 \cap BR_2$.

Побудуємо BR_1 . В силу того, що функція $\bar{H}_1(p, q)$ – лінійна по p при фіксованому $q = \hat{q}$, то її максимум буде досягатись або при $p = 0$, або при $p = 1$ в залежності від коефіцієнта при p . Оскільки $\bar{H}_1(p, q) = 2pq + (1-p)(1-q) = p(2q-1) + 1-q$, то

$$\hat{p} = \begin{cases} 1, & q \in [\frac{1}{2}, 1], \\ 0, & q \in [0, \frac{1}{2}], \\ [0,1], & q = 1/2 \end{cases}.$$

Таким чином, множина BR_1 точок максимуму функції $\overline{H}_1(p, q)$ по p при всіх значеннях $q \in [0, 1]$ зображена на Рис. 8.1.

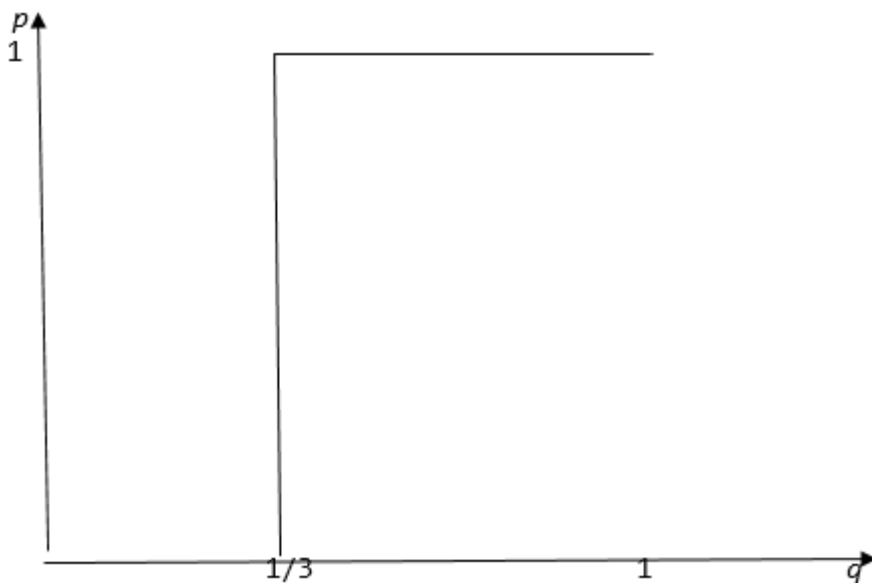


Рис.8.1.

Побудуємо BR_2 . В силу того, функція $\overline{H}_2(p, q)$ – лінійна по q при фіксованому $p = \hat{p}$, то її максимум буде досягатись або при $q = 0$, або при $q = 1$ в залежності від коефіцієнта при q . Оскільки, $\overline{H}_2(p, q) = p q + 2(1 - p)(1 - q) = q(3p - 2) + 2(1 - p)$, то

$$\hat{q} = \begin{cases} 1, & p \in [\frac{2}{3}, 1], \\ 0, & p \in [0, \frac{2}{3}), \\ [0, 1], & p = 2/3 \end{cases}$$

Таким чином, множина BR_2 точок максимуму функції $\overline{H}_2(p, q)$ по q при всіх значеннях $p \in [0, 1]$ зображена на Рис. 8.2.

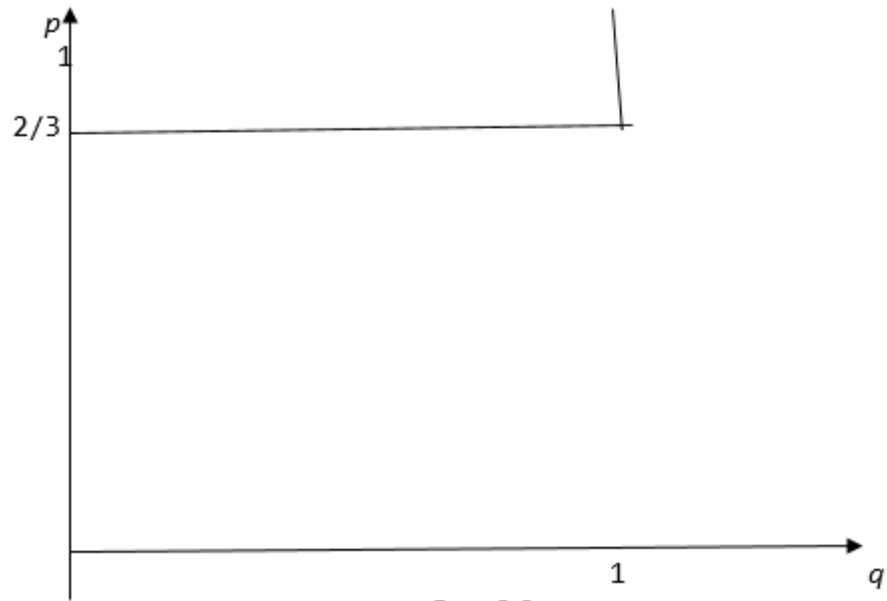


Рис. 8.2.

Із Рис.8.3 видно, що множини BR_1 та BR_2 перетинаються в трьох точках $(0,0)$, $(1/3, 2/3)$, $(1,1)$ координатної площини (q, p) . Оскільки змішані стратегії вихідної гри:

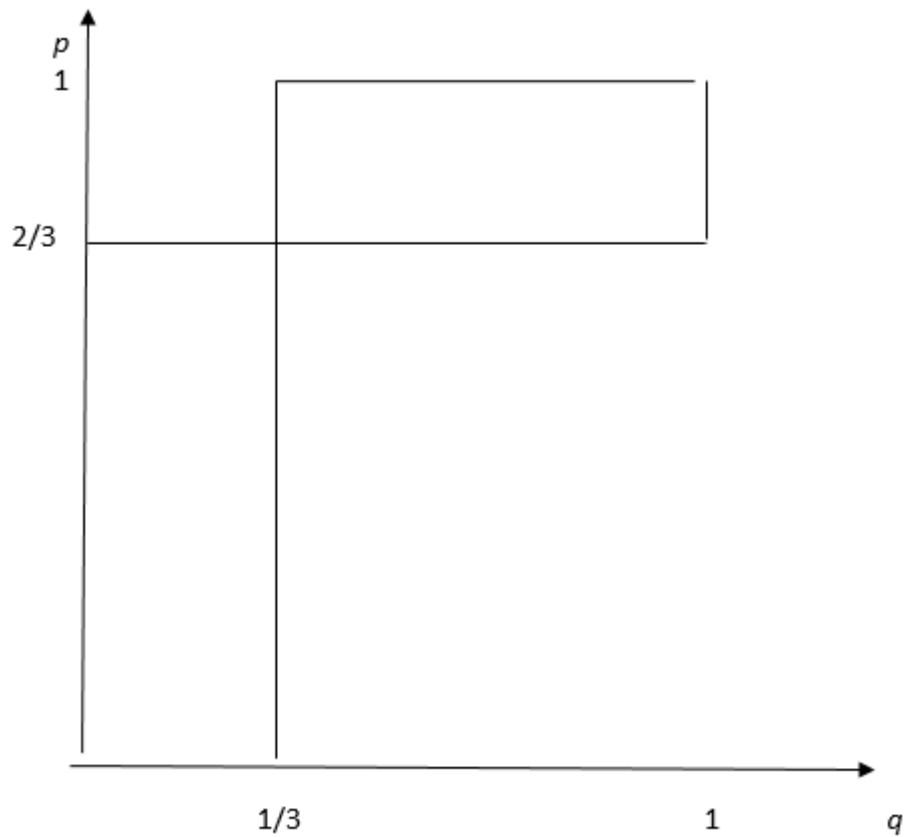


Рис. 8.3.

$\mu_1(1) = p$, $\mu_2(1) = q$, $\mu_1(2) = 1 - p$, $\mu_2(2) = 1 - q$, то рівноваги за Нешем у змішаних стратегіях будуть мати вигляд $((p, 1 - p); (q, 1 - q))$. Таким чином, будемо мати

$$NE(\bar{G}) = \{((0,1);(0,1)), ((2/3,1/3); (1/3, 2/3)), (1,0);(1,0))\}.$$

Цим рівноважним ситуаціям відповідають виграші $((1,2); (3/2, 3/2), (2,1))$.

Зазначимо, що дві із них: $((1,0);(1,0))$ та $((0,1);(0,1))$ є рівновагами у чистих стратегіях, які відповідають ситуаціям $(2,1)$ та $(1,2)$.

2 - спосіб (за теоремою 8.5). ВОНА, граючи Φ , отримає $1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p)$, а, граючи $\bar{\Phi}$: $0 \cdot p + 2 \cdot (1 - p)$.

Тоді $2 \cdot (1 - p) = p$ і $p = 2/3$. Аналогічно, ВІН, граючи Φ , отримає $2 \cdot q + 0 \cdot (1 - q)$,

а, граючи $\bar{\Phi}$: $0 \cdot q + (1 - q)$. Тоді $2 \cdot q = 1 - q$ і $q = 1/3$. Таким чином, у змішаній рівновазі ВІН грає Φ з ймовірністю $2/3$, а ВОНА грає Φ з ймовірністю $1/3$.

3 - спосіб (використання формул (8.6) – (8.7)). Для цього обчислюємо обернені матриці для обох гравців

$$U_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\mu_1^* = \frac{J_{X_1} U_2^{-1}}{J_{X_1} U_2^{-1} J_{X_2}} = (p, 1 - p) = (2/3, 1/3), \quad \mu_2^* = \frac{U_1^{-1} J_{X_1}}{J_{X_2} U_1^{-1} J_{X_1}} = (q, 1 - q) = (1/3, 2/3).$$

Зауважимо, що другий і третій способи дозволяють знайти лише змішану за Нешем рівновагу, а перший спосіб – всі рівноваги •

На завершення параграфа відмітимо, що

- 1) виграш на змішаних (рандомізованих) стратегіях не може бути кращим ніж виграш на чистих стратегіях у ситуаціях, рівноважних за Нешем;
- 2) змішані рівноваги за Нешем використовуються у випадку, коли відсутні рівноваги в чистих стратегіях;
- 3) якщо рівноваги за Нешем існують в чистих стратегіях, то змішані рівноваги можна використовувати для «блефу» суперника.

§ 9. Базова модель рівноваги за Штакельбергом: рівноваги за Нешем та Штакельбергом.

Як зазначалось вище, теорія ігор далека від остаточного формування. В якості ілюстрації розглянемо матеріали, які стосуються покращення рівноваги Неша в безкоаліційній статичній грі при додатковій умові: гравці погоджуються на існування лідера, який забезпечить їм додатковий дохід. Це і буде рівновагою за Штакельбергом.

Нехай n – чисельність колективу, в якому створюється сукупний дохід $D(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, де σ_i – індивідуальні зусилля i -го члена колективу щодо формування сукупного доходу. Далі будемо вважати, що при всіх $\sigma_i \in (0, \infty)$, $i = \{1, 2, \dots, n\}$ виконуються умови:

1. Величина доходу зростає із ростом затрачених зусиль

$$\frac{\partial D}{\partial \sigma_i} > 0 \quad \forall i, \quad (9.1)$$

тобто функція D є монотонно зростаючою.

2. Для існування єдиного максимуму функції сукупного доходу будемо вимагати, щоб вона була строго угнутою. Тоді буде виконуватись закон спадної віддачі

$$\frac{\partial^2 D}{\partial \sigma_i^2} < 0 \quad \forall i. \quad (9.2)$$

3. Для того, щоб розв'язок не прямував до нуля або до нескінченності, будемо вимагати виконання умов

$$\lim_{\sigma_i \rightarrow 0} \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = \infty, \quad \lim_{\sigma_i \rightarrow \infty} \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = 0. \quad (9.3)$$

4. Зусилля всіх агентів комплементарні, тобто зусилля кожного агента позитивно впливає на величину граничного доходу, який залежить від зусиль любого другого члену колективу

$$\frac{\partial^2 D}{\partial \sigma_i \partial \sigma_k} > 0 \quad \forall i, k, \quad i \neq k. \quad (9.4)$$

Будемо вважати, що функція доходу відома всім членам колективу, а величини прикладених зусиль являються спостережуваними для них після їх здійснення. Але дана інформація неперевірена, що спричиняє виключно внутрішній характер управління колективними діями та залагодження конфліктів. На етапі *ex ante* в колективі устанавлюється правило розподілу майбутнього очікуваного доходу D , згідно якого агенту i належить відносна доля

$$\alpha_i > 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

Тоді виграш кожного члена колективу i (i - го гравця) буде дорівнювати різниці між отриманою ним часткою сукупного доходу та величиною його витрат $l_i(\sigma_i)$. Функція витрат визначається працеспроможністю агента i , а також величиною його альтернативної корисності (чим вона вище, тим більшими будуть витрати.) Припускається, що функції витрат всіх членів колективу є загальним знанням, як і функція сукупного доходу. Вираз виграшу i - го агента матиме вигляд

$$U_i = \alpha_i D(\sigma_i, \sigma_{-i}) - l_i(\sigma_i), \quad i = \{1, 2, \dots, n\}, \quad (9.5)$$

де σ_{-i} - зусилля всіх членів колективу, крім i - го.

Будемо вважати, що функції витрат агентів мають такі властивості:

$$l_j > 0, \quad l'_j > 0, \quad l''_j \geq 0, \quad j = \{1, 2, \dots, n\}. \quad (9.6)$$

Спочатку припустимо, що кожний агент самостійно обирає рівень своїх зусиль, намагаючись максимізувати свій індивідуальний виграш (9.5). Згідно того, що всі функції U_i строго вігнуті і, відповідно, досягають максимуму в точці, яка задовольняє необхідним умовам оптимальності першого порядку

$$\alpha_i \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = \frac{dl_i}{d\sigma_i}, \quad i = \{1, 2, \dots, n\}. \quad (9.7)$$

Із умов (9.1), (9.2), (9.6) витікає, що система (9.7) має один розв'язок для любого набору чисел α_i . Рівняння із (9.7) допускають просту інтерпретацію: максимальне значення виграшу агента i досягається в точці, в якій величина його граничного індивідуального доходу дорівнює величині його граничних витрат. В силу того, що кожному агенту не вигідно в односторонньому порядку здійснювати зусилля у розмірі, який не відповідає розв'язку системи (9.7), то розв'язок цієї системи визначає єдину рівноважну за Нешем ситуацію NE. Далі для рівноважної за Нешем ситуації приймемо такі позначення: D^{NE} - сукупний дохід, U^{NE} - сумарний виграш всього колективу, σ^{NE} - розв'язок системи (9.7), U_k^{NE} - індивідуальний виграш агента k , $k = \{1, \dots, n\}$.

Ситуація рівноваги по Нешу NE не буде ефективною за Парето. Дійсно, для рівноважної за Нешем ситуації будемо мати нерівність

$$\frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{dl_i}{d\sigma_i} > \frac{dl_i}{d\sigma_i}, \quad i = \{1, 2, \dots, n\},$$

тобто граничний сукупний дохід буде більшим граничних витрат. Це значить, що сукупний дохід в рівноважній за Нешем ситуації збільшується з ростом зусиль кожного члена колективу швидше, ніж витрати. Тому колективу в цілому вигідно здійснення зусиль в об'ємах, більших рівноважних. Але колектив складається із індивідумів, які переслідують егоїстичні цілі. У зв'язку з тим, що складова долі агента i сукупного доходу $\alpha_i D$ зростає повільніше його витрат, якщо він один прикладає зусилля у розмірі σ_i^{NE} , то йому це збільшення буде вигідним тільки у випадку, якщо крім нього таким чином буде себе вести ще хоч би один член колективу.

На цю ситуацію можна поглянути інакше. Зусилля, затрачені кожним агентом, приводять до зростання сукупного доходу, із якого агенту дістається лише частина, яка дорівнює $\alpha_i D$, в той

час як інша частина буде належати іншим членам колективу, тобто буде утворювати додатні екстерналиї (вплив ринкової транзакції на третіх осіб, не опосередкованих ринком). Тому в даному випадку ми спостерігаємо проявлення загального правила, згідно якого люба діяльність, яка супроводжується додатною екстерналією, здійснюється в об'ємі, нижчого суспільно - оптимального. Відповідно, для досягнення ситуації, домінуючої по Парето рівновагу за Нешем, необхідна координація зусиль, яка здійснюється кількома агентами. Тільки в цьому випадку здійснені агентом і зусилля у розмірі, що перевищує рівноважний рівень σ_i^{NE} , можуть окупитись за рахунок додатних екстерналей, які здійснюються іншими агентами також у розмірах, що перевищують рівноважні. Важливо враховувати, що при цьому кожен агент стоїть перед спокусою здійснити власні зусилля в об'ємі, найбільше близькому до того, в якому досягається максимуму його індивідуального виграшу, тобто виконуються умови (9.7). Іншими словами, кожному агенту вигідно бути "халявщиком," тобто збільшити свій індивідуальний виграш за рахунок додатної екстерналиї, не приймаючи участі в її створенні для других членів колективу. Іменно тому, кожен член колективу, побоючись обману з боку своїх партнерів, не буде поспішати зі здійсненням власних зусиль у розмірі, який перевищує рівноважний. В результаті цього колектив ризикує назавжди лишитись в неефективній рівновазі за Нешем.

Використання стратегії, рівноважної по Штакельбергу, дозволяє здійснити таку координацію колективних дій, при якій досягається переважна по Парето ситуація відносно рівноваги за Нешем. Для успішного здійснення такої стратегії необхідно, щоб, з одного боку, всі послідовники при виборі об'єму своїх зусиль враховували інформацію як достовірну відносно стратегії, обраної лідером (кандидатом в лідери), а з іншого боку – щоб лідер володів цією інформацією і довіряв їй. Для досягнення достовірності інформації про стратегію лідера (кандидата в лідери) припустимо таку можливість. Члени колективу попередньо домовляються про тривалість двох часових періодів. Кожен агент добровільно обирає період, в якому він буде здійснювати свої зусилля. Члени колективу, які обирають активність в другому періоді, використовують знання про розмір зусиль вже здійснених агентами, які проявили активність в першому періоді. Лідер здійснює свої зусилля в першому періоді. У зв'язку з цим далі будемо використовувати механізм *timing decisions* із заявленими діями. Згідно цьому механізму деякий агент, причому тільки один, вибравши роль лідера по Штакельбергу, наприклад агент з номером $i = 1$, зобов'язується в першому періоді прикласти зусилля у розмірі σ_1 . Тоді інші агенти обирають стратегію очікування, тобто збираються діяти в другому періоді, оптимізуючи свої індивідуальні виграші на основі інформації про здійснених лідером зусиллях. Лідер при виборі об'єму зусиль враховує бажання кожного члена колективу до максимізації власного виграшу. Він вводить у свою функцію виграшу залежність об'єму зусиль кожного послідовника від об'єму зусиль лідера. В результаті його функція виграшу буде залежати лише від його зусиль. Лідеру лишається лише обчислити величину зусиль σ_1 , при якому досягає максимуму його функція виграшу. Такі зусилля він обіцяє своїм послідовникам витратити в першому періоді. Нижче буде показано, що в результаті такого сценарію буде досягнуто рівноваги Штакельберга, в якій виграш кожного члена колективу буде більшим, чим при рівновазі Неша. Тому в рамках механізму *timing decisions* із заявленими діями лідеру не вигідно порушувати свою обіцянку.

Звернемось до задачі, яку повинен розв'язати лідер. Спочатку потрібно знайти залежності максимальних виграшів послідовників від об'єму зусиль лідера. Припустимо, що він здійснив зусилля в об'ємі σ_1 . Ця величина відома всім членам колективу, і кожен обирає об'єм своїх зусиль із умови максимуму власного виграшу

$$\alpha_i \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = \frac{d l_i}{d \sigma_i}, \quad i = \{2, \dots, n\}. \quad (9.8)$$

Система (9.8) має єдиний розв'язок

$$\sigma_j = R_j(\sigma_1), \quad j = \{2, \dots, n\}. \quad (9.9)$$

де $R_j(\sigma_1)$ – функція реагування j -го послідовника на дії лідера.

Підставляючи (9.9) у функцію виграшу лідера, отримаємо

$$U_1(\sigma_1) = \alpha_1 D(\sigma_1, R_2(\sigma_1), \dots, R_n(\sigma_1)) - l_1(\sigma_1). \quad (9.10)$$

Максимального значення функція (9.10) досягає в точці, яка задовольняє умовам оптимальності

$$\frac{dU_1}{d\sigma_1} = 0 \rightarrow \alpha_1 \left(\frac{\partial D}{\partial \sigma_1} + \sum_{j=2}^n \frac{\partial D}{\partial R_j} \frac{dR_j}{d\sigma_1} \right) = \frac{dl_1}{d\sigma_1}.$$

Враховуючи (9.8), умови оптимальності запишемо у вигляді

$$\alpha_1 \frac{\partial D}{\partial \sigma_1} + \sum_{j=2}^n \frac{\alpha_j}{\alpha_j} \frac{d l_j}{d \sigma_j} = \frac{dl_1}{d \sigma_1}. \quad (9.11)$$

Для того щоб рівняння (9.11) мало єдиний розв'язок, припустимо що функція сукупного доходу $D(\sigma_1, R_2(\sigma_1), \dots, R_n(\sigma_1))$ як функція однієї змінної є строго вігнутою при $\sigma_1 \in (0, \infty)$ і

$$\lim_{\sigma_1 \rightarrow \infty} \frac{dD}{d\sigma_1} = 0.$$

Так як в силу комплементарності зусиль (9.4) і умов (9.6) всі похідні

$$\frac{dl_i}{d\sigma_i} > 0, \quad \frac{dR_j}{d\sigma_1} > 0,$$

то із (9.11) витікає нерівність

$$\alpha_1 \frac{\partial D}{\partial \sigma_1} < \frac{dl_1}{d\sigma_1}. \quad (9.12)$$

Нерівність (9.12), згідно умовам (9.2) і (9.6) означає, що розв'язок рівняння (9.11) $\sigma_1 > \sigma_1^{NE}$.

Іншими словами, лідер повинен здійснювати свої зусилля в об'ємі $\sigma_1 = \sigma_1^{SCH}$, який перевищує об'єм його зусиль в рівноважній за Нешем ситуації, де через SCH позначено значення величин в рівноважній по Штакельбергу ситуації. Це підвищення рівня зусиль лідера, згідно умови (9.2), приведе до того, що при $\sigma_j = \sigma_j^{NE}$, $j = \{2, \dots, n\}$, граничний дохід кожного послідовника перевищує величину його граничних витрат. Відповідно, кожному послідовнику вигідно здійснювати свої зусилля в об'ємі $\sigma_j = \sigma_j^{SCH}$, $j = \{2, \dots, n\}$, які перевищують його зусилля в рівновазі по Нешу. При цьому максимум індивідуального виграшу кожного члена колективу буде більшим за виграш, отриманий ним у випадку рівноваги за Нешем. Таким чином, у випадку рівноваги за Штакельбергом і об'єми зусиль, і величина сукупного доходу, і розміри індивідуальних виграшів будуть більшими ніж за рівноваги Неша

$$D^{SCH} > D^{NE}; \quad \sigma_j^{SCH} > \sigma_j^{NE}, \quad U_j^{SCH} > U_j^{NE}, \quad j = \{1, \dots, n\}. \quad (9.13)$$

Для отримання конкретних результатів розглянемо функції сукупного доходу та витрат часткового вигляду.

§ 10. Рівновага за Штакельбергом в моделі з мультиплікативною функцією доходу колективу і лінійною функцією індивідуальних витрат його членів.

Нехай члени колективу мають лінійні функції витрат

$$l_j(\sigma_j) = q_j \sigma_j, \quad j = \{1, \dots, n\}, \quad (10.1)$$

де коефіцієнт q_j – індивідуальна оцінка агентом j величини граничних витрат здійснюваних ним зусиль і залежить вона від ряду факторів, зокрема особистих та об'єктивних.

Тоді система (9.7), яка визначає рівновагу Неша, буде мати вигляд

$$\alpha_i \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = q_i, \quad i = \{1, 2, \dots, n\}. \quad (10.2)$$

З'ясуємо яким чином зміниться розв'язок системи (10.2), якщо в одному із рівнянь права частина зменшиться. Зменшення правої частини хоч би в одному із рівнянь системи (10.2) зсуває точку рівноваги за Нешем в напрямку зростання зусиль, які докладає кожен член колективу. Інакше кажучи, зниження оцінки величини власних граничних витрат хоч би з боку одного із агентів тягне за собою зростання зусиль з боку всіх агентів. В результаті зростання рівноважних значень зусиль всіх агентів збільшаться значення їх індивідуальних вигравів. Справедливо і зворотне: з ростом величини граничних витрат одного із агентів зменшаться рівноважні значення їх вигравів. Із цього витікає, що ні одному із членів колективу не вигідно штучно завищувати функцію своїх індивідуальних витрат.

В якості сукупного доходу будемо використовувати несепабельну мультиплікативну функцію

$$D(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \lambda \prod_{i=1}^n \sigma_i^{a_i}, \quad (10.3)$$

де $\lambda, a_i > 0, E = \sum_{i=1}^n a_i < 1$.

Функції (10.3) задовольняють умовам 1) – 4) попереднього параграфа.

Кожен член колективу намагається максимізувати свій індивідуальний виграш

$$U_j(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \alpha_j \lambda \prod_{i=1}^n \sigma_i^{a_i} - q_j \sigma_j, \quad i = \{1, 2, \dots, n\}. \quad (10.4)$$

В силу того, що функція сукупного доходу (10.3) задовольняє умовам постійної еластичності

$$\frac{\sigma_i}{D} \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = a_i, \quad (10.5)$$

то умови максимуму (10.2) індивідуального виграву (10.4) можна записати у вигляді

$$\sigma_i = \frac{D a_i a_i}{q_i}. \quad (10.6)$$

Підставляючи (10.6) в (10.3), отримаємо

$$D^{NE} = \lambda^{\frac{1}{1-E}} \prod_{i=1}^n \left(\frac{a_i a_i}{q_i} \right)^{\frac{a_i}{1-E}}. \quad (10.7)$$

З урахуванням (10.7) із (10.6) отримаємо, що розмір зусиль кожного члена колективу в рівновазі Неша буде дорівнювати

$$\sigma_k^{NE} = \lambda^{\frac{1}{1-E}} \frac{a_k a_k}{q_k} \prod_{i=1}^n \left(\frac{a_i a_i}{q_i} \right)^{\frac{a_i}{1-E}}, \quad i = \{1, 2, \dots, n\}. \quad (10.8)$$

Формула відношення об'ємів зусиль, які здійснюють два агенти, має вигляд

$$\frac{\sigma_i^{NE}}{\sigma_j^{NE}} = \frac{q_j a_i a_i}{\alpha_j a_j q_i}. \quad (10.9)$$

Об'єм зусиль i -го агента тим більше, чим вище його доля в сукупному доході – α_i та показник еластичності – a_i і чим нижча його оцінка власних витрат – q_i . Для агентів з рівними долями в сукупному доході та однаковими значеннями показників еластичності відношення (10.9) набуде вигляду

$$\frac{\sigma_i^{NE}}{\sigma_j^{NE}} = \frac{q_j}{q_i}. \quad (10.10)$$

Із (10.10) витікає, що в такій групі агентів відношення об'ємів затрачених ними зусиль визначається лише їх оцінками власних витрат. Формула виграву i -го агента (10.4) з урахуванням формул (10.6) – (10.7) буде мати вигляд

$$U_i^{NE} = \alpha_i D^{NE} (1 - a_i). \quad (10.11)$$

Із (10.7) витікає, що величина сукупного доходу залежить від оцінок граничних витрат. Наприклад, чим нижче значення q_i тим вище величина сукупного доходу і тим більшим буде індивідуальний виграш.

Перейдемо до рівноваги за Штекельбергом. Нехай роль лідера належить агенту з номером $i = 1$. З урахуванням цього, сукупний дохід (10.3) запишемо у вигляді

$$D(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \lambda \sigma_1^{a_1} \prod_{i=2}^n \sigma_i^{a_i}. \quad (10.12)$$

Підставивши в (10.12) вирази для зусиль послідовників (10.6), які будуть справедливими для нашого випадку, отримаємо вираз для доходу

$$D = (\lambda \sigma_1^{a_1})^{\frac{1}{1-E+a_1}} \prod_{i=2}^n \left(\frac{a_i \alpha_i}{q_i} \right)^{\frac{a_i}{1-E+a_1}}. \quad (10.13)$$

Лідер визначає точку максимуму свого виграшу із умови

$$\frac{d U_1}{d \sigma_1} = 0 \rightarrow \alpha_1 \frac{d D}{d \sigma_1} = q_1 \rightarrow \frac{\alpha_1 a_1}{1-E+a_1} (\lambda \sigma_1^{E-1} \prod_{j=2}^n \left(\frac{a_j \alpha_j}{q_j} \right)^{a_j})^{\frac{1}{1-E+a_1}} = q_1. \quad (10.14)$$

З ростом σ_1 від нуля до нескінченності ліва частина цього рівняння монотонно прямує до нуля. Тому рівняння (10.14) має єдиний розв'язок, який визначає виграш лідера при рівновазі за Штакельбергом

$$\sigma_1^{SCH} = \lambda^{\frac{1}{1-E}} \left(\frac{a_1 \alpha_1}{q_1 (1-E+a_1)} \right)^{1+\frac{a_1}{1-E}} \prod_{j=2}^n \left(\frac{a_j \alpha_j}{q_j} \right)^{\frac{a_j}{1-E}}. \quad (10.15)$$

Використовуючи формулу (10.11), формулу (10.15) можна подати у вигляді

$$\sigma_1^{SCH} = \frac{a_1 \alpha_1 D^{NE}}{q_1} \left(\frac{1}{1-E+a_1} \right)^{1+\frac{a_1}{1-E+a_1}}. \quad (10.16)$$

Максимальні зусилля послідовників, враховуючи (10.6), будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_k^{SCH} = R_k(\sigma_1^{SCH}) &= \frac{D \alpha_k a_k}{q_k} = \frac{\alpha_k a_k}{q_k} (\lambda (\sigma_1^{SCH})^{a_1})^{\frac{1}{1-E+a_1}} \prod_{i=2}^n \left(\frac{a_i \alpha_i}{q_i} \right)^{\frac{a_i}{1-E+a_1}} = \\ &= \frac{\alpha_k a_k D^{NE}}{q_k} \left(\frac{1}{1-E+a_1} \right)^{\frac{a_1}{1-E}}, \quad k = \{2, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Використовуючи значення зусиль лідера (10.16) та послідовників (10.17), знайдемо сукупний дохід для рівноваги Штакельберга

$$D^{SCH} = D^{NE} \left(\frac{1}{1-E+a_1} \right)^{\frac{a_1}{1-E}}. \quad (10.18)$$

Тоді вирази для значень зусиль лідера (10.16) та послідовників (10.17) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_1^{SCH} &= \frac{a_1 \alpha_1 D^{SCH}}{q_1} \frac{1}{1-E+a_1}, \\ \sigma_k^{SCH} &= \frac{\alpha_k a_k D^{SCH}}{q_k}, \quad k = \{2, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Тоді виграші лідера та послідовників задаються формулами

$$\begin{aligned} U_1^{SCH} &= \alpha_1 D^{SCH} \left(1 - \frac{a_1}{1-E+a_1} \right), \\ U_k^{SCH} &= \alpha_k D^{SCH} (1 - a_k), \quad k = \{2, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Звернемо увагу на вираз для виграшу послідовника U_k^{SCH} . Він відрізняється від виразу (10.11) для виграшу любого члену колективу при рівновазі за Нешем тільки множником у вигляді величини доходу: у (10.11) – це величина доходу D^{NE} , а в (10.20) – величина доходу D^{SCH} . Зауважимо, що в обидві формули величина граничних витрат q_i у явному вигляді не ввійшла. Тому всі члени колективу з однаковими долями в сукупному доході α_k та рівними коефіцієнтами еластичності a_k , але різними q_k як при рівновазі Неша, так і при рівновазі

Штакельберга, отримають рівні виграші, тобто отримають однакові виграші незалежно від об'єму затрачених ними зусиль.

Припустимо, що у одного із послідовників, а іменно у агента j , такі ж показники долі доходу та еластичності, як і у лідера, тобто $\alpha_j = \alpha_1$, $a_j = a_1$. Тоді із (10.18) витікає, що агент j в ролі лідера такий же ефективний, як і агент 1. Але при цьому, згідно (10.20), його виграш в ролі лідера буде меншим, чим в ролі послідовника, коли лідером виступає агент 1. Причина полягає у тому, що в ролі лідера, згідно з (10.19), він витрачає більше зусиль, ніж в ролі послідовника. Тому добровільне прийняття на себе ролі лідера колективу по Штакельбергу, в якому агент має собі подібного, тобто агента з такими ж характеристиками, слід розцінювати як прояв обережності та альтруїзму,

Припустимо, що в колективі є агенти з різними показниками еластичності. Який агент в цій ситуації буде найбільш ефективним в ролі лідера? Будемо вважати величину E фіксованою для даного колективу. Як видно із формул (10.11), (10.20) і при рівновазі Неша, і при рівновазі Штакельберга величини індивідуальних виграшів прямо пропорційні величині сукупного доходу. При цьому величина D^{SCH} прямо пропорційна величині D^{NE} з коефіцієнтом пропорційності, який виражається функцією

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-E+x} \right)^{\frac{x}{1-E}}, \quad (10.21)$$

в точках $x = a_i$ $i = \{1, \dots, n\}$, де індекс i вказує на те, що агент з цим номером претендує на лідерство.

Дослідимо цю функцію на відрізку $[0, E]$. На його кінцях функція $f(x)$ приймає однакові значення $f(0) = f(E) = 1$. Похідна має вигляд

$$f'(x) = -f(x) \left(\frac{\ln(1-E+x)}{1-E} + \frac{x}{(1-E)(1-E+x)} \right). \quad (10.22)$$

Тоді

$$f'(0) = -\frac{\ln(1-E)}{1-E} > 0, \quad f'(E) = -\frac{E}{1-E} < 0.$$

Очевидно, що $f'(x) > 0$, $x \in [0, x^*)$; $f'(x) < 0$, $x \in (x^*, E]$. Тоді функція $f(x) > 1$, $x \in (0, E)$ і досягає максимуму в деякій точці x^* . Нехай в точці $x_k = a_k$ функція приймає найбільше значення. Тоді агент з номером k і буде тим лідером по Штакельбергу, який забезпечить максимальне значення сукупного доходу колективу. Назвемо такого агента ефективним в ролі лідера. Достатньою умовою ефективності агента буде виконання нерівностей

$$(1 - E + a_k)^{a_k} \leq (1 - E + a_j)^{a_j}, \quad j = \{1, \dots, n\}, \quad (10.23)$$

тобто в будь-якому колективі обов'язково існує не менше одного агента, ефективного в ролі лідера. Такий агент в ролі лідера вигідний всім іншим членам колективу.

Виникає питання, чи завжди йому вигідно бути лідером? Вище було показано, що при певних умовах агенту вигідніше бути послідовником, ніж лідером. Тому, якщо агенту вигідно бути лідером, то будемо називати такого агента *особливим*. Виграш особливого агента, коли він виступає в ролі лідера по Штакельбергу, не може бути меншим його ж виграшу, коли він виступає в ролі послідовника. Іншими словами, агент k буде особливим при виконанні нерівностей

$$\alpha_k D^{NE} (1 - E + a_k)^{-\frac{a_k}{1-E}} \left(1 - \frac{a_k}{1-E+a_k} \right) \geq \alpha_k D^{NE} (1 - E + a_j)^{-\frac{a_j}{1-E}} (1 - a_k), \quad j \neq k. \quad (10.24)$$

Зліва в нерівностях (10.24) стоїть вираз для виграшу агента k , який виступає в ролі лідера, а праворуч – вираз для його ж виграшу в ролі послідовника, коли лідером є агент з номером j . Перепишемо нерівність (10.24) у вигляді

$$(1 - E + a_k)^{\frac{a_k}{1-E}} \leq \frac{1-E}{(1-a_k)(1-E+a_k)} (1 - E + a_j)^{\frac{a_j}{1-E}}, \quad j \neq k. \quad (10.25)$$

Умова (10.25) є достатньою для особливості агента. В силу того, що

$$\frac{1-E}{(1-a_k)(1-E+a_k)} = 1 - \frac{a_k}{1-E+a_k} < 1,$$

із (10.25) отримаємо систему нерівностей

$$(1-E+a_k)^{a_k} > (1-E+a_j)^{a_j}, \quad j \neq k, \quad (10.26)$$

яка є необхідною умовою особливості агента.

Властивості функції $f(x)$ та умови (10.25) свідчать про те, що у особливого агента коефіцієнт еластичності повинен суттєво відрізнятись від коефіцієнтів еластичності інших членів колективу. Наприклад, якщо у всіх членів колективу показники еластичності однакові, то в такому колективі особливого агента бути не може, але при цьому кожен його член буде ефективним в ролі лідера. Із нерівностей (10.23) – (10.26) витікають наступні висновки:

1. В колективі завжди існують один або декілька ефективних лідерів.
2. Особливий агент завжди буде ефективним в ролі лідера. Зворотнє невірне. Дійсно, якщо для ефективного в ролі лідера агента k не виконується хоч би одна нерівність із (10.25)}, наприклад, не виконується нерівність $j \setminus = \setminus i$, то агенту k вигідно, щоб лідером був не він, а агент i , тобто агент k в цьому випадку не є особливим.
3. Наявність в колективі особливого агента виключає можливість існування в ньому ще хоч би одного ефективного в ролі лідера агента.

Із наведених вище міркувань можна зробити такі загальні висновки:

- 1) Модель колективних дій, в якій функції сукупного доходу та індивідуальних витрат задовольняють тільки самим загальним стандартним (за виключенням умови комплементарності зусиль) вимогам, притаманним неокласичній економічній теорії, показує, що реалізація стратегії по Штакельбергу приводить до рівноваги, яка домінує по Парето рівновагу Неша.
- 2) Якщо функція сукупного доходу зберігає постійною еластичність по зусиллям кожного члена колективу, індивідуальний виграш кожного агента як при рівновазі Неша, так і при рівновазі Штакельберга буде прямо пропорційним його долі в сукупному доході, і величині самого доходу

$$\begin{aligned} U_j^{NE} &= \alpha_j D^{NE} (1 - a_j), \quad j = \{1, \dots, n\}, j \neq \text{— виграші по Нешу;} \\ U_1^{SCH} &= \alpha_1 D^{SCH} \left(1 - \frac{a_1}{1-E+a_1}\right), \\ U_k^{SCH} &= \alpha_k D^{SCH} (1 - a_k), \quad k = \{2, \dots, n\} \text{— виграші по Штакельбергу,} \end{aligned}$$

де

$$D^{NE} = \lambda^{\frac{1}{1-E}} \prod_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i}{q_i}\right)^{\frac{\alpha_i}{1-E}}, \quad D^{SCH} = D^{NE} \left(\frac{1}{1-E+a_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-E}}.$$

Крім того, виграш кожного члена колективу тим більше, чим нижче еластичність доходу по його зусиллям. Чим менше еластичність, тим менше зусиль при інших рівних умовах прикладає агент. Тому, зокрема, серед агентів, які мають рівні долі в сукупному доході, проявляється така закономірність: чим менше зусиль прикладає агент, тим вищим буде його виграш відносно виграшів інших агентів. Цю закономірність в розподілі доходу, яка негативно впливає на схильність членів колективу до співробітництва, в принципі можна усунути, встановивши долі агентів в доході пропорційними розмірам їх зусиль. Важливо відмітити і іншу особливість: в той час як величина індивідуальних граничних витрат негативно впливає на рівноважне значення зусиль агента, вона ніяк не відображається на відношення його виграшу до величини сукупного доходу. Цю особливість також бажано усунути, встановивши долі агентів в доході пропорційними рівноважним значенням їх зусиль. Величина додаткового виграшу, який отримують члени

колективу, завдячуючи переходу із рівноваги Неша до рівноваги Штакельберга, залежить від лідера. Коефіцієнт пропорційності, який показує, у скільки разів і сукупний дохід, і вигреш кожного агента в рівновазі по Штакельбергу вище, ніж при рівновазі по Нешу, визначається значеннями двох параметрів - показником еластичності сукупного доходу по зусиллям лідера і сумарною еластичністю по зусиллям всіх членів колективу (див. формулу (10.21)). Причому, якщо зі зростанням сумарної еластичності E його величина росте монотонно, то залежність від індивідуальної еластичності доходу від зусиль лідера a_i носить більш складний характер. У всякому разі, член колективу з самим більшим значенням еластичності може виявитись неефективним лідером.

3) Проблема лідерства по Штакельбергу в самокерованому колективі породжується не надлишком членів, які прагнуть статусу лідера, а їх дефіцитом. Виключення із цього правила обумовлено можливістю існування в колективі особливого агента, тобто агента, лідерство якого найбільше вигідно всім членам колективу, в том числі і йому самому. Особливий агент може бути тільки один, і лідером він стає в силу загального для всіх членів колективу прагнення до максимізації власних індивідуальних вииграшів. Якщо особливого агента не має, то членам колективу, які претендують на роль послідовників, вигідно, щоб лідером став агент, який забезпечить в рівновазі за Штакельбергом найбільше значення сукупного доходу. Такий ефективний в ролі лідера агент, на відміну від особливого агента, є в будь-якому колективі, причому він може бути не єдиним, однак кожному із них роль лідера не гарантує найбільшого виграшу. Для кожного члена колективу, крім особливого агента, завжди знайдеться інший агент, послідовником якого йому бути вигідніше, ніж лідером. Тому в таких випадках роль лідера може взяти на себе тільки той член колективу, який схильний до альтруїстичної поведінки або не схильний до ризику. Таким агентом може бути як ефективний, так і не ефективний в ролі лідера член колективу. Якщо такого агента не знайдеться, то колектив ризикує залишитись в рівновазі за Нешем.

4) Якщо керівництво колективом здійснює центральний агент або принципал, він може впливати на формування лідерської структури, віддаючи перевагу структурі з найбільш ефективним лідером. В якості стимулів принципал може використовувати різні варіанти заохочення лідера або меню контрактів, стимулюючих ефективного агента вибрати роль лідера по Штакельбергу. В цьому випадку якості лідера по Штакельбергу можуть виявитись зовсім іншими.

§ 11. Статичні ігри з неповною інформацією: байєсові ігри.

Вище при розгляді рівноваги в некооперативних іграх вважалось, що гравці мали всю інформацію один про одного, включаючи виграші. В реальних ситуаціях все виглядає інакше: фірми можуть не знати витрат інших фірм. Тому тут виникає ситуація, в якій учасники повинні мати деякі представлення відносно переваг інших учасників, повинні мати представлення про їх представлення відносно переваг інших і т.д. Ми приходимо до поняття Байєсовських ігор.

Розглянемо приклад дуополії Курно (див. §6), але з деякими інформаційними обмеженнями. Два гравці випускають однотипну продукцію. Ціна одиниці товару виражається формулою (обернена функція попиту) $P(Q) = a - Q$, $Q = q_1 + q_2$, $P(Q) > 0$. Розглянемо наступну модифікацію цієї задачі. Нехай фірма 1 має функцію витрат $C_1(q_1) = c \cdot q_1$. Фірма 2 має витрати $C_2(q_2) = C_H \cdot q_2$ із ймовірністю θ і витрати $C_2(q_2) = C_L \cdot q_2$ із ймовірністю $1 - \theta$, причому $C_L < C_H$. Крім того, будемо припускати, що фірма 2 знає свою функцію витрат і

функцію витрат фірми 1, а фірма 1 знає тільки свою функцію витрат та ймовірності θ і $1 - \theta$ того, що граничні витрати другої фірми є C_L та C_H відповідно. При цьому все це є загальновідомим: фірма 1 знає, що фірма 2 має "більше" інформації, фірма 2 знає, що 1 знає про це і т.д. Природньо було б чекати, що фірма 2 буде приймати різні рішення в залежності від свого типу, тобто від рівня своїх граничних витрат. Тобто в даному випадку під стратегією слід розуміти відображення, яке ставить у відповідність кожному із двох можливих рівнів граничних витрат C_L та C_H деякий об'єм випуску, який визначався би фірмою 2 у випадку, коли б її граничні витрати були високими – C_H або низькими – C_L . Це пов'язано з припущенням, що гра "протікає" як би таким чином: спочатку Природа "обирає" із ймовірністю θ і $1 - \theta$ відповідний рівень граничних витрат і "повідомляє" обраний рівень тільки фірмі 2, а вже потім фірми приймають свої рішення щодо випусків.

Нехай $q_2^*(C_H)$ та $q_2^*(C_L)$ відповідно вибір фірми 2, а q_1^* – вибір фірми 1. Якщо граничні витрати високі, то $q_2^*(C_H)$ (в рівновазі Неша) розв'язує задачу

$$\max_{q_2} ((a - q_1^* - q_2 - C_H) q_2)$$

Аналогічно, якщо граничні витрати низькі, то $q_2^*(C_L)$ (в рівновазі Неша) розв'язує задачу

$$\max_{q_2} ((a - q_1^* - q_2 - C_L) q_2)$$

Для фірми 1 q_1^* розв'язує задачу

$$\begin{aligned} & \max_{q_1} (\theta (a - q_1 - q_2^*(C_H) - c) q_1 + \\ & + (1 - \theta)(a - q_1 - q_2^*(C_L) - c) q_1). \end{aligned}$$

Для наведених вище оптимізаційних задач умови оптимальності першого порядку дають

$$\begin{aligned} q_2^*(C_H) &= \frac{a - q_1^* - C_H}{2}, \\ q_2^*(C_L) &= \frac{a - q_1^* - C_L}{2}, \\ q_1^* &= \frac{\theta (a - q_2^*(C_H) - c) + (1 - \theta)(a - q_2^*(C_L) - c)}{2}. \end{aligned}$$

Розв'язуючи виписану систему відносно об'ємів випусків, будемо мати

$$\begin{aligned} q_2^*(C_H) &= \frac{a - 2C_H + c}{3} + \frac{\theta}{6} (C_H - C_L), \\ q_2^*(C_L) &= \frac{a - 2C_L + c}{3} - \frac{\theta}{6} (C_H - C_L), \\ q_1^* &= \frac{a - 2c + \theta C_H + (1 - \theta)C_L}{3}. \end{aligned}$$

Якби у нас була повна інформація із граничними витратами c_1 і c_2 відповідно, то ми б мали (рівновага Неша)

$$q_i^* = \frac{a - 2c_i + c_j}{3}$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} q_2^*(C_H) &> \frac{a - 2C_H + c}{3}, \\ q_2^*(C_L) &< \frac{a - 2C_L + c}{3}. \end{aligned}$$

Це відбувається тому, що при високих витратах фірми 2 конкурент (фірма 1) "недовиробляє," а при низьких витратах - "переробляє." Пов'язано це з тим, що фірма 1 не знає точно структуру витрат фірми 2, а знає, що вони можуть бути (з відповідними ймовірностями) або високими, або низькими. Тому, приймаючи рішення про об'єм випуску своєї продукції, фірма повинна враховувати потенційно обидві можливості. При цьому, якщо б випуск фірми 2 при високих затратах виражався обсягом

$$q_2(H) = \frac{a - 2C_H + c}{3},$$

то такому обсягу відповідав би обсяг фірми 1

$$q_1(H) = \frac{a-2c+C_H}{3}.$$

Але фірма 1 повинна враховувати можливість низьких витрат у конкурента, тобто що він випускає обсяг товарів $q_2^*(C_H) > q_2(H)$. Тому фірма 1 повинна зменшити свій об'єм випуску до величини $q_1^* < q_1(H)$. Іменно в цьому сенсі фірма 1 "недовиробляє" продукцію при високих затратах конкурента. Аналогічно при низьких витратах конкурента фірма випускає "зайву" продукцію.

Нагадаємо, що для ігор з повною інформацією нормальна форма гри -

$$G = \{I = (1, \dots, m); X_i; H_i(x_1, \dots, x_m), x_i \in X_i, i \in I\}.$$

Якщо ми розглядаємо гру з одночасними ходами, то $X_i = A_i$ – множина ходів.

Ігри з повною інформацією проходять так:

- (1) гравці одночасно обирають ходи;
- (2) гравці отримують свої виграші $H_i(a_1, \dots, a_m)$, $i \in I$.

Опишемо тепер ситуацію ігор з неповною інформацією. Ми повинні спочатку врахувати той факт, що гравець знає свою функцію виграшу, але може не знати функцій виграшів інших гравців. Нехай можлива функція виграшу гравця i має вигляд

$$H_i(a_1, \dots, a_m; t_i),$$

де t_i – тип гравця, $t_i \in T_i$ – множина (простір) можливих типів гравця i .

У наведеному вище прикладі з дуополією Курно: $T_1 = \{c\}$, $T_2 = \{C_H, C_L\}$. Сказати, що гравець i знає свою функцію виграшу, означає, що він знає свій тип. Аналогічно, якщо гравець не знає функцій виграшів інших гравців, то він не знає їх типу, тобто

$$t_{-i} = \{t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_m\} \in T_{-i},$$

де T_{-i} – множина можливих значень t_{-i} .

Тепер уведемо поняття про предствлення гравця. Представлення гравця i про типи інших гравців – це ймовірність $p_i(t_{-i} | t_i)$ того, що типи інших гравців описуються вектором

$t_{-i} = \{t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_m\}$ при умові, що i -й гравець має (і знає) свій тип t_i .

Означення 11.1. Байєсова гра m осіб у нормальній формі визначається:

- набором множин (просторів) ходів $A_1, \dots, A_m$;
- набором множин (просторів) типів $T_1, \dots, T_m$;
- представленнями $p_1, \dots, p_m$ гравців;
- функціями виграшів $H_1, \dots, H_m$ гравців.

Тип $t_i \in T_i$ гравця i йому відомий та визначає його функцію виграшів $H_i(a_1, \dots, a_m; t_i)$.

Представлення $p_i(t_{-i} | t_i)$ гравця i описують невизначеність відносно типів t_{-i} інших

$m-1$ гравців, при даному типі t_i гравця i . Цю гру будемо позначати $G = \{A, T, p, H\}$,

де $A = A_1 \times \dots \times A_m$, $T = T_1 \times \dots \times T_m$, $p = (p_1, \dots, p_m)$, $H = (H_1, \dots, H_m)$.

Згідно [28], гра буде протікати таким чином:

- (1) природа обирає вектор типів $t = (t_1, \dots, t_m) \in T = T_1 \times \dots \times T_m$;
- (2) природа повідомляє кожному гравцю i його тип t_i ;
- (3) гравці одночасно обирають свої ходи;
- (4) гравці отримують виграші $H_i(a_1, \dots, a_m; t_i)$, $i \in I$.

Уведення етапів 1) - 2) зводять нашу гру до гри з неповною інформацією.

Коли Природа "об'являє" гравцю i його тип t_i , то він може обчислити представлення $p_i(t_{-i} | t_i)$, використовуючи формулу Байєса

$$p_i(t_{-i} | t_i) = \frac{p(t_{-i}, t_i)}{p(t_i)} = \frac{p(t_{-i}, t_i)}{\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p(t_{-i}, t_i)}.$$

Далі, інші гравці можуть також обчислити різні представлення, які гравець i може мати в залежності від типу t_i .

Означення 11.2. В статичній Байєсовій грі

$$G = \{A_1, \dots, A_m; T_1, \dots, T_m; p_1, \dots, p_m; H_1, \dots, H_m\}$$

стратегія гравця i – це функція $s_i: T_i \rightarrow A_i$, яка для кожного типу $t_i \in T_i$ визначає хід із A_i , котрий би був обраний гравцем i , якби Природою був обраний його тип t_i . Символічно пишуть: $S_i = A_i^{T_i}$.

Прийнято виділяти стратегії розділяючі, коли різні типи t_i обирають різні ходи, і об'єднуючі, коли всі типи обирають одну і ту ж дію.

Зауважимо наступне: на перший погляд здається, що після того як Природа обрала тип i повідомила його гравцеві, йому вже не потрібно думати про ті ходи, які він обрав би, якби був обраний інший його тип. Але гравець i повинен розглядати дії інших гравців, які залежать від того, що буде робити гравець i , маючи любий із можливих типів $t_i \in T_i$:

оскільки інші гравці не знають обраний Природою тип гравця i , вони зобов'язані орієнтуватись на всі можливі типи гравця i (згадаємо "перевиробництво" і "недовиробництво" в дуополії Курно, яку було розглянуто на початку цього пункту.) Тому гравець i повинен думати і про те, щоб він робив, якби були вибрані інші його можливі типи. В моделі дуополії Курно стратегія гравця 2 – це пара $(q_2^*(C_H), q_2^*(C_L))$.

Сформулюємо тепер означення рівноваги Байєса, або рівноваги Байєса - Неша (БН - рівноваги.) При цьому центральна ідея лишається тією ж самою: стратегія кожного гравця повинна бути кращою відповіддю на стратегії інших гравців, тобто БН - рівновага – це рівновага Неша в Байєсовській грі.

Означення 11.3. В статичній Байєсовій грі $G = \{A_1, \dots, A_m; T_1, \dots, T_m; p_1, \dots, p_m; H_1, \dots, H_m\}$ ситуація (тобто набір "чистих" стратегій) $s^* \in BН$ - рівновагою, якщо для любого i і любого типу $t_i \in T_i$ стратегія $s_i^*(t_i)$ розв'язує задачу

$$\max_{a_i \in A_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} H_i(s_1^*(t_1), \dots, s_{i-1}^*(t_{i-1}), a_i, s_{i+1}^*(t_{i+1}), \dots, s_m^*(t_m); t_i) p_i(t_{-i}/t_i) \bullet$$

Часто буває зручно БН - рівновагу визначати наступним чином:

Означення 11.4. БН - рівновага у грі з неповною інформацією і кінечною множиною типів T_i у кожного гравця $i \in I$, апіорним розподілом p і простором чистих стратегій i -го гравця $S_i(A_i) \in BН$ по Нешу у "розширеній грі," у якій простір стратегій гравця - це $S_i^{T_i}$, тобто множина всіх відображень із T_i в S_i .

Таким чином, якщо задані ситуація $s(\cdot)$ і довільна стратегія $\hat{s}_i(\cdot) \in S_i^{T_i}$, то позначимо через $(\hat{s}_i(\cdot), s_{-i}(\cdot))$ ситуацію, в якій гравець i грає $\hat{s}_i(\cdot)$, а інші слідуєть ситуації $s(\cdot)$. Нехай

$$(\hat{s}_i(t_i), s_{-i}(t_{-i})) = (s_1(t_1), \dots, s_{i-1}(t_{i-1}), \hat{s}_i(t_i), s_{i+1}(t_{i+1}), \dots, s_m(t_m))$$

означає "реалізацію" цієї ситуації при $t = (t_i, t_{-i})$. Тоді ситуація $s(\cdot) \in BН$ - рівновага, якщо для любого гравця i

$$s_i(\cdot) \in \text{Arg} \max_{\hat{s}_i(\cdot) \in S_i^{T_i}} \sum_{t_i} \sum_{t_{-i}} p(t_i, t_{-i}) H_i(\hat{s}_i(t_i), s_{-i}(t_{-i}); (t_i, t_{-i})),$$

де $\text{Arg} \max$ означає множину стратегій, які доставляють максимум вказаній подвійній сумі.

Існування БН - рівноваги витікає із теореми існування рівноваги за Нешем.

§ 12. Альтернативний погляд на змішані стратегії. Приклади байєсових ігор.

Ми зараз обговоримо проблему виправдання змішаних стратегій: рівновага за Нешем в змішаних стратегіях у грі з повною інформацією (майже завжди) може бути інтерпретована як БН - рівновага в чистих стратегіях в деякій "близькій" грі з "трошки" неповною інформацією.

("Майже завжди" слід розуміти в тому сенсі, що можна ігнорувати ті рідкі випадки, коли така інтерпретація недоречна.)

Основна риса рівноваги за Нешем у змішаних стратегіях – це навідь не те, що гравець j обирає стратегію випадково, а те, що гравець i зіштовхується з деякою невизначеністю відносно вибору гравця j , причому ця невизначеність може виникнути або в силу наявності рандомізації, або в силу "деякої неповноти" інформації, як в наступному прикладі.

Приклад 12.1. Розглянемо гру "Сімейна суперечка" (див. § 8), в якій чоловік і жінка вирішують, куди їм сходити разом: на футбол - "Ф," чи на балет - "Б." Їх виграші наведені в Табл. 12.1.

Таблиця 12.1.

$X_1 \backslash X_2$	Ф(ВОНА)	Б(ВОНА)
Ф(ВІН)	(2, 1)	(0, 0)
Б(ВІН)	(0, 0)	(1, 2)

У цій грі є дві рівноваги Неша в чистих стратегіях: (Ф,Ф) та (Б,Б) і одна рівновага в змішаних стратегіях, тобто

$$NE(\bar{G}) = \{((0,1);(0,1)), ((2/3,1/3); (1/3, 2/3)), (1,0);(1,0))\}.$$

Цим рівноважним ситуаціям відповідають виграші

$$((1,2); (3/2, 3/2), (2,1)).$$

Тут змішаній ситуації $((2/3,1/3); (1/3, 2/3))$ відповідають такі виграші гравців: $(3/2, 3/2)$.

Тепер давайте уявимо собі, що, хоч вони знають один одного достатній час, вони не цілком впевнені відносно точного значення виграшів один одного. Зокрема, припустимо, що Його (йому далі буде відповідати індекс c) виграш, коли обидва йдуть на футбол, є $2 + t_c$, причому t_c відомо лише йому. Її (їй далі буде відповідати індекс p) виграш, коли обидва йдуть на балет, є $2 + t_p$, причому t_p відомо лише їй. Будемо вважати, що величини t_c і t_p рівномірно розподілені на відрізку $[0, x]$. В термінах абстрактної Байєсовської статичної гри в нормальній формі маємо:

$$G = \{A_c, A_p; T_c, T_p; p_c, p_p; H_c, H_p\},$$

де $A_c = A_p = \{\Phi, Б\}$; $T_c = T_p = [0, x]$;

представлення є $p_c = p_p = \frac{1}{x}$, $x > 1$

для довільних t_c і t_p , а виграші задані в таблиці 12.2.

Таблиця 12.2.

$X_2 \backslash X_1$	Ф(ВОНА)	Б(ВОНА)
Ф(ВІН)	$(2 + t_c, 1)$	$(0, 0)$
Б(ВІН)	$(0, 0)$	$(1, 2 + t_p)$

Наша мета полягає в наступному: побудувати $БН$ - рівновагу в чистих стратегіях цієї гри з неповною інформацією, в якій Він грає "Ф," якщо t_c перевищує деяке критичне значення c і грає "Б" в зворотньому випадку, а Вона грає "Б," якщо t_p перевищує деяке критичне значення p і грає "Ф" в зворотньому випадку. В такій рівновазі Він грає "Ф" із ймовірністю $\frac{x-c}{x}$, а Вона грає "Б" із ймовірністю $\frac{x-p}{x}$. Зауважимо, що $\frac{x-c}{x}$ – ймовірність того, що $t_c > c$. (Це ті самі ймовірності, які стоять в $p(t_{-i} | t_i)$ у відповідному визначенні $БН$ - рівноваги із § 11). Покажемо, що по мірі того, як неповнота інформації пропадає, тобто $x \rightarrow 0$, поведінка гравців в цій $БН$ - рівновазі в чистих стратегіях "наближається" до їх поведінки у вихідній грі з повною інформацією у змішаних стратегіях, тобто $\frac{x-c}{x} \rightarrow \frac{2}{3}$, $\frac{x-p}{x} \rightarrow \frac{2}{3}$, якщо $x \rightarrow 0$.

Уявимо собі, що обидва гравця грають описані вище стратегії. Для даного x ми визначимо такі значення c та p , що описані стратегії будуть утворювати $БН$ - рівновагу. Якщо Вона грає таку стратегію, то Її очікуваний виграш від гри "Ф" буде складати

$$\frac{p}{x} (2 + t_c) + (1 - \frac{p}{x}) 0 = \frac{p}{x} (2 + t_c),$$

а Її очікуваний виграш від гри "Б" буде складати

$$\frac{p}{x} 0 + (1 - \frac{p}{x}) 1 = 1 - \frac{p}{x}.$$

Зрозуміло, що t_c визначається із нерівності

$$\frac{p}{x} (2 + t_c) \geq 1 - \frac{p}{x},$$

тобто Він грає "Ф" оптимально тоді і тільки тоді, коли $t_c \geq \frac{x}{p} - 3$. Звідси $c = \frac{x}{p} - 3$.

Аналогічно, якщо Він грає вказану стратегію, то Її очікуваний виграш від гри "Б" та гри "Ф" – це відповідно

$$(1 - \frac{c}{x}) 0 + \frac{c}{x} (2 + t_p) = \frac{c}{x} (2 + t_p),$$

та

$$(1 - \frac{c}{x}) 1 + \frac{c}{x} 0 = 1 - \frac{c}{x}.$$

Таким чином, Вона грає "Б" оптимально тоді і тільки тоді, коли $t_p \geq \frac{x}{c} - 3$. Звідси $p = \frac{x}{c} - 3$.

Тоді для визначення рівнів c і p маємо систему двох рівнянь

$$\begin{aligned} c &= \frac{x}{p} - 3, \\ p &= \frac{x}{c} - 3. \end{aligned}$$

Звідси отримаємо: $p = c$, $p^2 + 3p - x = 0$. Розв'язок останнього квадратного рівняння має вигляд

$$p = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2}.$$

Тоді ймовірність того, що Він грає "Ф", а Вона грає "Б" будуть дорівнювати

$$\frac{x-c}{x} = \frac{x-p}{x} = 1 - \frac{-3 + \sqrt{9+4x}}{2x} = 1 - \frac{2}{3 + \sqrt{9+4x}}.$$

Ясно, що

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{2}{3 + \sqrt{9+4x}}\right) = \frac{2}{3}.$$

Таким чином, по мірі "скорочення" неповноти інформації, поведінка гравців в цій БН = рівновазі в чистих стратегіях "пряме" до поведінки цих гравців в рівновазі Неша в змішаних стратегіях у вихідній грі з повною інформацією •

Приклад 12.2 ("Аукціон"). Уявимо собі, що є два покупці $i = \{1, 2\}$. Кожен із них оцінює деякий неподільний товар у v_i грошових одиниць, тобто якщо він отримує товар, заплативши b_i грошових одиниць, то його виграш буде складати $v_i - b_i$. Будемо вважати, що оцінки покупців розподілені незалежно і рівномірно на відрізку $[0, 1]$. Покупці одночасно представляють свої заявки. Той хто дає більшу ціну, платить цю ціну і отримує товар. Інший не отримає (і не платить) нічого. Якщо обидва називають одну і ту ж ціну, то переможець визначається шляхом підкидання монети і отримує товар і половину виграшу. Покупці нейтральні до ризику і все це загальновідомо.

Сформулюємо це як Байєсову гру, тобто визначимо ходи, простори типів, представлення і функції виграшів. Дія гравця i – заявити ціну b_i , а його тип є v_i . Оскільки оцінки незалежні, то гравець i вважає, що v_i розподілено рівномірно на $[0, 1]$ незалежно від v_j .

Виграш i -го гравця має вигляд

$$H_i(b_1, b_2; v_1, v_2) = \begin{cases} v_i - b_i, & b_i > b_j, \\ \frac{v_i - b_i}{2}, & b_i = b_j, \\ 0, & b_i < b_j \end{cases}.$$

Визначимо простір стратегій. По означенню, стратегія гравця i – це функція $b_i(\cdot)$, яка ставить у відповідність кожній оцінці v_i ціну b_i , котру готовий сплатити гравець i , якщо він оцінює товар у v_i . В БН - рівновазі стратегія $b_1(\cdot)$ – це краща відповідь покупця 1 на стратегію $b_2(\cdot)$ гравця 2 і навпаки. Формально пара $(b_1(\cdot), b_2(\cdot))$ – БН - рівновага, якщо для любого $v_i \in [0, 1]$ $b_i(v_i)$ є розв'язком задачі

$$\max_{b_i} \{ (v_i - b_i) P\{b_i > b_j(v_j)\} + \frac{v_i - b_i}{2} P\{b_i = b_j(v_j)\} \}.$$

Ми будемо шукати лінійну рівновагу (хоч можлива будь-яка рівновага), тобто яка утворюється лінійними стратегіями

$$b_1(v_1) = a_1 + c_1 v_1, \quad b_2(v_2) = a_2 + c_2 v_2.$$

В силу рівномірності розподілу оцінок виявиться, що БН - рівновага не тільки існує, але вона єдина. Покажемо, що $b_i(v_i) = \frac{v_i}{2}$.

Припустимо, що гравець j використовує стратегію $b_j(v_j) = a_j + c_j v_j$. Для даного значення v_i кращою відповіддю гравця i буде розв'язок задачі

$$\max_{b_i} \{ (v_i - b_i) P\{b_i > a_j + c_j v_j\} \},$$

оскільки $P\{b_i = b_j(v_j)\} = 0$ тому, що $b_j(v_j) = \{b_i > a_j + c_j v_j\}$ і v_j розподілено рівномірно, а це означає, що і b_j розподілено рівномірно. Оскільки для гравця i безглуздо призначати ціну нижче мінімального призначення j і вище максимального, то $a_j \leq b_i \leq a_j + c_j$, і

$$P\{b_i > a_j + c_j v_j\} = P\{v_j < \frac{b_i - a_j}{c_j}\} = \int_0^{\frac{b_i - a_j}{c_j}} 1 dx = \frac{b_i - a_j}{c_j}.$$

Тоді краща відповідь гравця i є

$$b_i(v_i) = \begin{cases} \frac{v_i + a_j}{2}, & v_i \geq a_j, \\ a_j, & v_i < a_j \end{cases}.$$

Якщо $0 < a_j < 1$, то існують деякі $v_i < a_j$, а тоді $b_i(v_i) < a_j$, що неможливо в силу нерівності $a_j \leq b_i \leq a_j + c_j$. Тоді лишається два варіанта: або $a_j \geq 1$, або $a_j \leq 0$. Але перша нерівність в рівновазі неможлива: оскільки $v_j \geq b_j$, то в нашому варіанті потрібно, щоб $c_j \geq 0$, що веде до неможливої нерівності в оптимальному випадку $b_j(v_j) \geq v_j$. Отже, якщо ми хочемо, щоб величина $b_i(\cdot)$ була лінійною, то повинно бути $a_j \leq 0$. Тоді

$$b_i(v_i) = \frac{v_i + a_j}{2} = \frac{a_j}{2} + \frac{v_i}{2},$$

тобто

$$a_i = \frac{a_j}{2}, \quad c_i = \frac{1}{2}.$$

Повторюючи те ж саме для j , припускаючи, що i -й гравець використовує стратегію стратегію $b_i(v_i) = a_i + c_i v_i$, будемо мати: $a_i \leq 0$, $a_j = \frac{a_i}{2}$, $c_j = \frac{1}{2}$. Об'єднуючи обидва випадки, будемо мати: $a_i = a_j = 0$, $c_i = c_j = \frac{1}{2}$. Таким чином, $b_i(v_i) = 0.5 v_i$.

Отже, для даного Знайдемо тепер симетричну рівновагу, тобто рівновагу, в якій обидва гравця використовують однакові стратегії. Припустимо тепер, що обидва гравці j використовують стратегію $b(\cdot)$, причому $b(\cdot)$ – строго зростаюча і диференційована функція.

Отже для даного v_i оптимальна заявка гравця i є розв'язком задачі

$$\max_{b_i} \{ (v_i - b_i) P\{b_i > b(v_j)\} \}.$$

Нехай $b^{-1}(b_j)$ означає оцінку, яку повинен мати j -й гравець, щоб заявити b_j . Тобто $b^{-1}(b_j) = v_j$, якщо $b(v_j) = b_j$. В силу того, що v_j рівномірно розподілено на відрізку $[0, 1]$, справедлива рівність

$$P\{b_i > b(v_j)\} = P\{b^{-1}(b_i) > v_j\} = b^{-1}(b_i).$$

Тоді умови оптимальності першого порядку для i -го гравця набудуть вигляду

$$-b^{-1}(b_i) + (v_i - b_i) \frac{d}{db_i} b^{-1}(b_i) = 0.$$

Виписане диференціальне рівняння першого порядку еквівалентно рівнянню

$$-b^{-1}(b(v_i)) + (v_i - b(v_i)) \frac{d}{db_i} b^{-1}(b(v_i)) = 0.$$

Звідси, в силу $b^{-1}(b_i) = v_i$, отримаємо рівняння

$$-v_i + (v_i - b(v_i)) \frac{1}{b'(v_i)} = 0,$$

або

$$b'(v_i) v_i + b(v_i) = v_i.$$

Враховуючи, що $b'(v_i) v_i + b(v_i) = (b(v_i) v_i)'$, отримаємо остаточне рівняння

$$(b(v_i) v_i)' = v_i.$$

Інтегруючи останнє, будемо мати

$$b(v_i) v_i = \frac{v_i^2}{2} + C.$$

Для визначення постійної C потрібні граничні умови. В силу того, що $b(v_i) \leq v_i$ для любых v_i , будемо мати $b(0) \leq 0$. Звідси, в силу невід'ємності b , будемо мати $b(0) = 0$. Тоді $C = 0$, $b(v_i) = 0.5 v_i$.

Приклад 12.3. (Виробництво публічного продукту в умовах неповної інформації.) Два гравці $I = \{1, 2\}$ одночасно вирішують питання про те, вкладати чи не вкладати у виробництво публічного продукту кошти, причому це рішення бінарне: вкладати - 1, не вкладати - 0. Вигода кожного

гравця є 1, якщо хоч би один гравець вирішив вкладати кошти, і 0, якщо ніхто не вкладає. Затрати i -го гравця на вкладання коштів є c_i . Виграші гравців наведені в таблиці 12.3.

Таблиця 12.3.

$X_1 \backslash X_2$	вкладати	ні
Вкладати	$(1 - c_1, 1 - c_2)$	$(1 - c_1, 1)$
ні	$(1, 1 - c_2)$	$(0, 0)$

Вигода від наявності публічного продукту – 1 кожному загальновідома, але витрати кожного гравця відомі тільки йому. В той же час обидва гравці вважають загальновідомим, що c_i обираються незалежно у відповідності з неперервною, строго зростаючою кумулятивною функцією розподілу $P(\cdot)$ на відрізку $[\underline{c}, \bar{c}]$, де $\underline{c} < 1 < \bar{c}$ (тому $P(\underline{c}) = 0$, $P(\bar{c}) = 1$). Витрати c_i – це тип гравця i . Чиста стратегія в цій грі – це функція $s_i(c_i)$, яка ставить у відповідність кожному можливому типу $c_i \in [\underline{c}, \bar{c}]$ рішення вкладати – (1) чи ні – (0). Виграш i -го гравця є

$$H_i(s_i, s_j, c_i) = \max\{s_i, s_j\} - c_i s_i.$$

Байєсова рівновага – це така пара стратегій (s_1^*, s_2^*) , що для кожного гравця i і кожного можливого типу c_i стратегія $s_i^*(c_i)$ максимізує очікуваний виграш

$$E(c_j | H_i(s_i, s_j^*(c_j), c_i)),$$

де $E(a)$ – математичне сподівання величини a .

Нехай $z_j = \text{Prob}(s_j^*(c_j) = 1)$ – рівноважна ймовірність того, що гравець j вкладає кошти. Для максимізації своєї очікуваної корисності гравець i буде вкладати кошти, якщо його витрати будуть меншими за величину $1 - (1 - z_j)$, яка є вигодою від наявності публічного продукту, помножену на ймовірність того, що гравець j не буде вкладати. Тоді

$$s_i^*(c_i) = 1, \text{ якщо } c_i < 1 - z_j, \text{ і, навпаки, } s_i^*(c_i) = 0, \text{ якщо } c_i > 1 - z_j.$$

(Зауважимо, що тип $c_i = 1 - z_j$ буде неістотним до того вкладати кошти чи ні, але оскільки $P(\cdot)$ неперервна, то ймовірність того, що тип буде таким, дорівнює нулю.)

Це значить, що тип гравця i , який буде вкладати кошти, лежать на відрізку $[\underline{c}, c_i^*]$. Аналогічно, гравець j буде вкладати кошти тоді і тільки тоді, коли $c_j \in [\underline{c}, c_j^*]$. Оскільки $z_j = \text{Prob}(\underline{c} \leq c_j \leq c_j^*) = P(c_j^*)$, то $c_i^* = 1 - P(c_j^*)$. Таким чином, числа c_1^* і c_2^* повинні задовольняти рівнянню

$$c^* = 1 - P(1 - P(c^*)).$$

Якщо існує єдиний розв'язок цього рівняння c^* , то з необхідністю будемо мати $c^* = 1 - P(c^*)$.

Наприклад, якщо P рівномірно на відрізку $[0, 2]$ ($P(c) = 0.5 c$), то c^* єдине і дорівнює $\frac{2}{3}$.

Гравець не буде вкладати кошти, якщо його витрати лежать в проміжку $[\frac{2}{3}, 1]$ •

§ 13. Динамічні ігри з повною інформацією. Позиційна форма гри.

Надалі визначимось із термінологією, пов'язаною з повнотою інформації. Інформаційну структуру гри можна охарактеризувати декількома способами. Перший ділить ігри на ігри з довершеною та ігри з недовершеною інформацією.

У грі з (*довершеною інформацією*) кожна інформаційна множина є одноточковою. В іншому випадку гра є грою з недовершеною інформацією. У грі з довершеною інформацією кожен гравець завжди точно знає, в якому місці дерева гри він знаходиться, відсутні одночасні ходи і всі гравці спостерігають ходи Природи (якщо такі є).

У грі з (*неповною інформацією*) Природа робить хід першою і він не спостерігається хоча б одним гравцем. В іншому випадку гра є грою з повною інформацією.

Гра з неповною інформацією є грою з недовершеною інформацією в силу того, що інформаційні множини деяких гравців містять більше однієї вершини дерева гри. Розглянемо більш ретельно позиційну форму гри. Для цього розглянемо простий приклад гри "хрестики - нолики" на полі 3×3 . Перенумеруємо відповідні клітини (див. таблицю 13.1).

Таблиця 13.1.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Позначимо гравців відповідно через X та O. Тоді дерево цієї гри (інформаційні множини тут є одноточковими) буде мати вигляд, зображений на Рис. 13.1. Цифри біля ребер позначають номери клітин, в яких ставиться відповідний X або O, а у вершині N рівноймовірний хід робить Природа – шляхом "підкидання" монети – для вибору ходу гравців. При цьому потрібно мати на увазі, що дерево відображає всі можливі ходи незалежно від їх розумності.

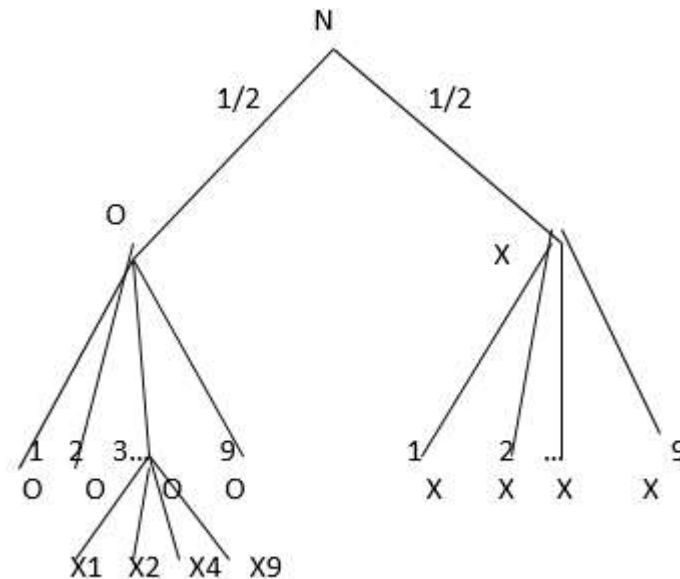


Рис. 13.1.

Ми не будемо дерево повністю. Зрозуміло, якщо вибудовується ряд із трьох хрестиків або ноликів, то гра закінчується і переможець отримує від переможеного, наприклад, одну у. о. У випадку нічиєї – (0, 0).

Формально позиційна форма гри описується за допомогою таких елементів:

- 1) списка гравців;
- 2) дерева гри;
- 3) вказівки для кожної вершини номера гравця (або Природи – гравця з номером 0,) який повинен ходити в цій вершині;
- 4) списка ходів, доступних гравцю в кожній вершині і відповідності між ходами і безпосередніми наступними вершинами;
- 5) інформаційних множин;
- 6) вказівок вигравів в кожній термінальній (остаточній) вершині;
- 7) ймовірного розподілу на множині ходів в кожній вершині, в якій хід робить Природа.

Таким чином, ми вважаємо, що задані такі елементи:

1. $I = \{1, \dots, m\}$ – кінечна множина гравців.
2. Ми маємо дерево гри з кінечною множиною вершин X і кінечною множиною ходів A . При цьому повинно бути визначено відображення $p: X \rightarrow (X \cup \{\emptyset\})$, яке кожній вершині $x \in X$ ставить у відповідність єдину безпосередньо попередню вершину $p(x)$, за виключенням початкової вершини x_0 , для якої $p(x_0) = \emptyset$. Далі, безпосередньо наступні за x вершини визначаються по $p: s(x) = p^{-1}(x)$. Щоб ми мали дійсно деревовидну структуру, необхідно, щоб множини всіх попередніх і множини всіх наступних вершин не перетинались для кожної вершини x . Множина термінальних вершин $T = \{x: s(x) = \emptyset\}$.
3. Далі ми повинні мати відображення $\alpha: X \setminus \{x_0\} \rightarrow A$, яке ставить у відповідність кожній вершині x , крім початкової, хід, котрий із безпосередньо попередньої вершини $p(x)$ приводить до x і такий, що якщо $x', x'' \in s(x)$ і $x' \neq x''$, $\alpha(x') \neq \alpha(x'')$. Множина можливих ходів, доступних у вершині x , є $c(x) = \{a \in A: a = \alpha(x') \text{ для деякого } x' \in s(x)\}$.

4. Набір інформаційних множин H і відображення $H: X \setminus T \rightarrow H$, яке ставить у відповідність кожній вершині (крім термінальної) інформаційну множину $H(x) \in H$.

Інформаційні множини утворюють розбиття множини $X \setminus T$. При цьому необхідна умова така: всі вершини, які лежать в одній інформаційній множині мають одні і ті ж допустимі ходи, тобто формально $c(x) = c(x')$, якщо $H(x) = H(x')$. Таким чином, ми можемо визначити вибір, який буде доступним гравцеві в інформаційній множині H :

$$c(H) = \{a \in A: a \in c(x) \text{ для } x \in H\}.$$

5. Відображення $\mu: H \rightarrow I \cup \{0\}$, яке ставить у відповідність кожній інформаційній множині $H \in H$ гравця (або Природу, тобто гравця під номером $i = 0$), який повинен ходити у вершині із цієї множини. Будемо позначати через $H_i = \{H \in H: \mu(H) = i\}$ ті інформаційні множини, в яких черга ходу буде належати гравцю i .

6. Функція $\rho: H_0 \times A \rightarrow [0, 1]$, яка ставить у відповідність ходам в інформаційних множинах Природи ймовірності, що задовольняють умові

$$\rho(H, a) = 0 \text{ для } a \notin c(H)$$

i

$$\sum_{a \in c(H)} \rho(H, a) = 1 \quad \forall H \in H_0.$$

7. Набір функцій виграшів $\hat{H} = \{\hat{H}_1(\cdot), \dots, \hat{H}_m(\cdot)\}: T \rightarrow R$.

Зауважимо, що наведені вище означення можна розповсюдити і на випадок нескінченних множин, але намалювати дерево тоді вже ми не зможемо. Далі будемо розглядати ігри з повною пам'яттю, в яких гравці не забувають всі свої ходи.

Означення 13.1. Гра в позиційній формі називається грою з довершеною інформацією, якщо кожна інформаційна множина містить одну вершину. В протилежному випадку гра називається грою з недовершеною інформацією •

Зупинимось на понятті стратегії для позиційних безкоаліційних ігор.

Стратегія — це повний можливий план, який описує те, як гравець буде діяти в кожних можливих обставинах, коли йому, можливо, прийдесться робити хід. З точки зору гравця, множини можливих обставин представлені набором його інформаційних множин, причому кожна інформаційна множина представляє собою різні розріднені обставини, в яких йому може знадобитись ходити. Тим самим стратегія зводиться до опису того, як він планує ходити в кожній із його інформаційних множин.

Означення 13.2. Нехай H_i — сім'я всіх інформаційних множин гравця i , $\hat{A}$ — множина всіх можливих ходів (дій) у грі, $C(H) \subseteq \hat{A}$ — множина ходів, можливих в інформаційній множині H . Стратегія гравця i — це відображення $s_i: H_i \rightarrow \hat{A}$, що $s_i(H) \in C(H) \quad \forall H \in H_i$ •

Для ілюстрації наведених понять розглянемо такий простий приклад (див. Рис.13.2.)

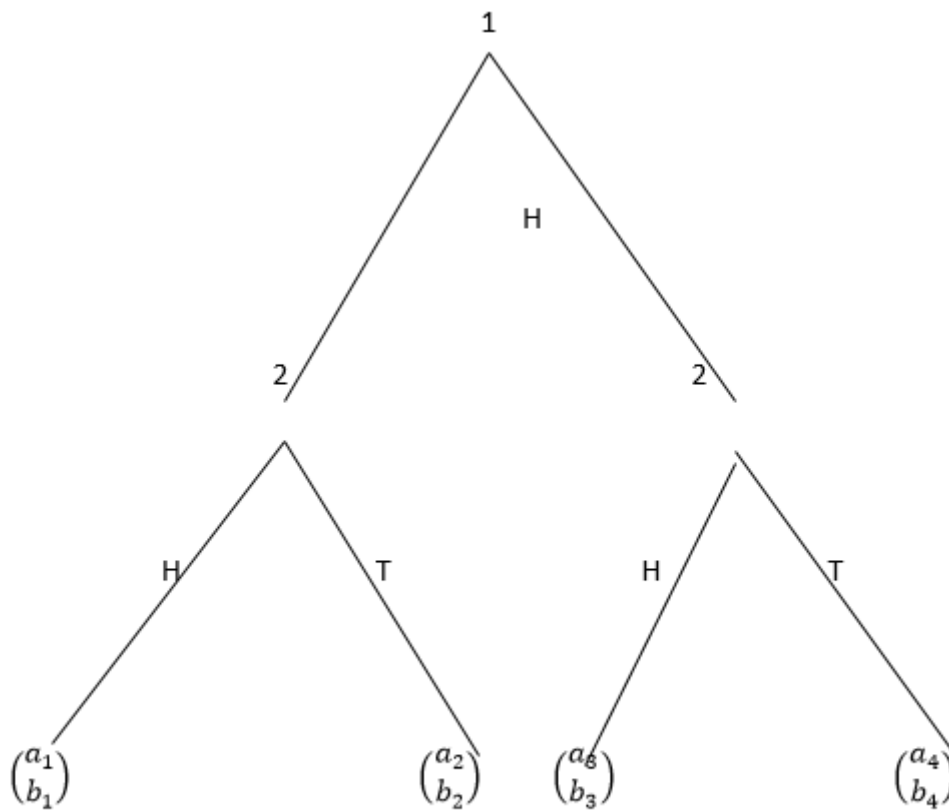


Рис. 13.2.

У першого гравця дві стратегії: H і T . А у другого гравця їх чотири; оскільки у нього 2 інформаційні множини, то кожна стратегія повинна визначати хід в кожній із цих інформаційних множин, тобто

- s_1 : H , якщо 1 - й зіграв H ; H , якщо 1 - й зіграв T ;
- s_2 : H , якщо 1 - й зіграв H ; T , якщо 1 - й зіграв T ;
- s_3 : T , якщо 1 - й зіграв H ; H , якщо 1 - й зіграв T ;
- s_4 : T , якщо 1 - й зіграв H ; T , якщо 1 - й зіграв T .

Зауважимо наступне: маючи набір стратегій кожного гравця, ми можемо побудувати нормальну форму даної гри. Вибір гравцями своїх стратегій визначає хід в кожній інформаційній множині і таким чином повністю визначає траєкторію, по якій буде розвиватись гра. Нормальна форма гри наведена в таблиці 13.2.

Таблиця 13.2.

X_2 X_1	s_1	s_2	s_3	s_4
Н	(a_1, b_1)	(a_1, b_1)	(a_2, b_2)	(a_2, b_2)
Т	(a_4, b_4)	(a_3, b_3)	(a_4, b_4)	(a_3, b_3)

Кожен набір стратегій визначає траєкторію "руху" по дереву і тим сам им визначає результат гри. Ясно, що ми маємо можливість говорити про рівновагу за Нешем. Але перед цим наведемо теорему існування.

Теорема 13.1. У кінечній грі з довершеною інформацією існує рівновага по Нешу в чистих стратегіях •

Розглянемо приклад, який показує, що рівновага за Нешем не завжди дає розумне передбачення.

Приклад 13.1. Нехай деяка фірма E (новичок) хоче вийти на ринок зі своєю продукцією, на якому в поточний момент діє одна фірма I (старожил). Якщо фірма E наважується на вхід, то фірма I на такі дії може відповісти двома способами: вона може надати вхід, віддавши частину своїх продаж, не міняючи ціну; вона може не сприяти діям фірми E , вступивши з нею у хижацьку війну, яка приведе до "драматичного" зниження цін. Дерево, яке відповідає даній ситуації представлено на Рис. 13.3.

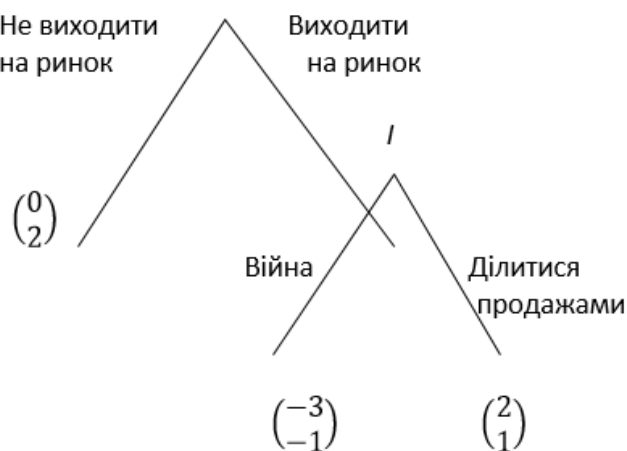


Рис. 13.3.

Нормальна форма гри задана таблицею 13.3.

Таблиця 13.3.

$X_2 \backslash X_1$	$I - \text{війна}$	$I - \text{надати продажі}$
$E - \text{ні}$	(0, 2)	(0, 2)
$E - \text{вхід}$	(-3, -1)	(2, 1)

Тут є дві ситуації рівноваги за Нешем в чистих стратегіях: (ні, війна) і (так, надати). Але перша із цих ситуацій - це не розумне передбачення: фірма E може передбачувати, що якщо вона обере "вхід", то фірма I в дійсності обере "надати продажі," тобто (ні, війна) – не заслуговує довіри

Для того щоб виключити ситуації типу (ні, війна), ми розглянемо "принцип послідовної раціональності": стратегія гри повинна приписувати оптимальний хід в кожній вершині дерева. Тобто, якщо гравець знаходиться в деякій вершині дерева, його стратегія повинна приписувати оптимальний вибір, починаючи з цієї точки, при даних стратегіях його опонентів. В цьому сенсі стратегія (ні, війна) такою не являється, бо після входу єдина оптимальна стратегія для I – "надати." В нашому прикладі все можна зробити просто: визначимо оптимальну поведінку для I в грі на етапі "після входу" – це, очевидно, "надати." Далі ми можемо визначити оптимальну поведінку фірми E до цього моменту, з урахуванням того, що відбудеться після входу. Це можливо зробити, розглянувши "редуковану" позиційну форму, де "пост - вхідне" прийняття рішення фірмою I замінено на відповідні виграші, які виникають при оптимальній "пост - вхідній" поведінці фірми I (див. Рис. 13.4).

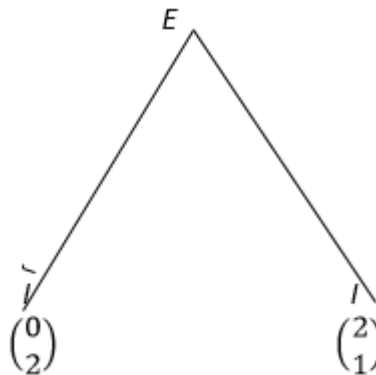


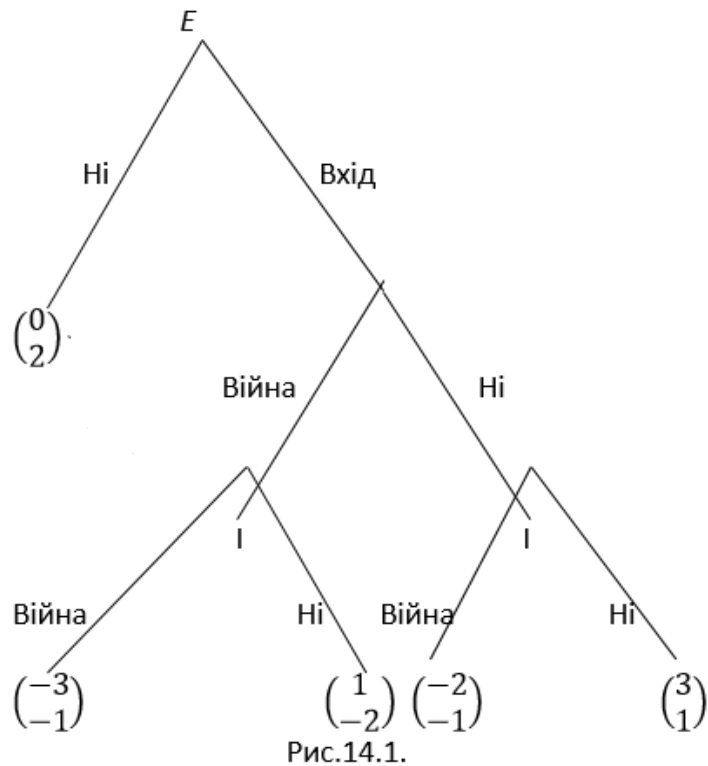
Рис. 13.4.

А це вже проста задача прийняття індивідуального рішення і це рішення – "вхід."

Цей тип процедури, яка починається з знаходження оптимальної поведінки "в кінці гри", а потім визначення оптимальної поведінки на більш ранніх кроках в передбаченні того, що буде відбуватись далі, називається *зворотньою індукцією*.

§ 14. Довершена під - ігрова рівновага за Нешем. Приклади.

Розглянемо продовження прикладу 13.1 зі входом деякої фірми Е на ринок, на якому до того "панівну" позицію займала фірма І. Але тепер модифікуємо його, вважаючи, що після входу на ринок обидві фірми можуть обирати, воювати їм чи ні (приймати) (див. Рис.14.1.)



Нормальна форма гри з одночасними ходами (після входу Е) задана таблицею 14.1.

Таблиця 14.1.

$X_2 \backslash X_1$	I – війна	I – ні
E – війна	(-3, -1)	(1, -2)
E – ні	(-2, -1)	(3, 1)

В ній рівновага за Нешем — це (ні, ні).

Неважко перевірити, що у вихідній грі є 3 рівноваги по Нешу в чистих стратегіях (σ_E, σ_I) :
((ні; прийняти, якщо вхід), (війна, якщо E входить));
((ні; війна, якщо вхід), (війна, якщо E входить));
((вхід; прийняти, якщо вхід), (прийняти, якщо E входить)).

Перші дві стратегії для E не здаються дуже розумними, але стратегії — це, за визначенням, повний план. Зауважимо, що (прийняти, прийняти) — єдина рівновага за Нешем у грі з одночасними ходами. Тому природньо очікувати, що обидві фірми зіграють "прийняти," дотримуючись входу E . Але якщо це так, то фірма E повинна входити. Тому логіка послідовної раціональності говорить, що тільки остання рівновага повинна бути розумним передбаченням.

Означення 14.1. Під - грою гри G_E в позиційній формі називається таке піддерево дерева вихідної гри, що

- (1) його початкова вершина — одноточкова інформаційна множина і воно (піддерево) містить всі наступні за нею вершини і тільки їх;
- (2) якщо вершина x лежить у під - грі, то всі вершини $x' \in H(x)$ також лежать в цій під - грі, де $H(x)$ — інформаційна множина, яка містить x •

Зауважимо, що у грі з довершеною інформацією кожна вершина (крім термінальної) ініціює під - гру.

Легко бачити, що у відповідності з означенням стратегій у позиційній грі люба стратегія гравця в позиційній грі індукує його стратегію у під - грі. Ця стратегія є звуженням вихідної стратегії на інформаційні множини гравця, які існують у під - грі.

Означення 14.2. Ситуація $\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ у грі в позиційній формі G_E називається довершеною рівновагою по Нешу, якщо вона індукує рівновагу по Нешу в кожній під - грі •

Не важко бачити, що у наведеному прикладі перші два набори стратегій не являються ДПРН (довершена під - ігрова рівновага за Нешем), тому що не індукує рівновагу за Нешем у пост - вхідній грі.

Має місце наступне твердження.

Твердження 14.1. В довільній кінчній грі з довершеною інформацією G_E існує ДПРН в чистих стратегіях. Якщо всі виграші всіх гравців різні в любых двох термінальних вершинах, то вона єдина •

Для визначення множини ДПРН в динамічній грі G_E процедура зворотної індукції може бути узагальнена наступним чином;

1. Починаємо з кінця дерева гри і визначаємо рівноваги за Нешем для кожної із "кінцевих" під - ігор, тобто із під - ігор, які не мають власних під - ігор.
2. Обираємо одну із рівноваг за Нешем в кожній із цих "кінцевих" під - ігор і розглядаємо редуковану гру, в якій ці "кінцеві" під - ігри замінюються виграшами, які отримують гравці, коли використовують ці рівноважні стратегії.
3. Повторюємо кроки 1 і 2 для редукованій ігор. Продовжуємо цю процедуру доти, поки не будуть визначені всі ходи у грі G_E . Набір ходів в кожній інформаційній множині гри G_E утворює СПРН.
4. Якщо ні на одному із кроків процесу не виникла множинність рівноваг по Нешу, то отримана СПРН — єдина. Якщо ж множинність рівноваг мала місце, то множина всіх СПРН може бути отримана за допомогою повтору цієї процедури для кожної можливої рівноваги, які виникають у під - іграх.

Приклад 14.1. (*Дуополія по Штакельбергу*). Цей приклад – модифікація дуополії Курно. Тепер ми вважаємо, що є лідер, який робить перший хід. Потім, знаючи цей вибір, другий гравець робить свій хід.

Таким чином, гра протікає таким чином:

- 1) фірма 1 обирає обсяг продукції, яку вона випускає в базовому періоді, - $q_1 \geq 0$;
- 2) фірмі 2 стає відомим цей обсяг $q_1 \geq 0$, і після цього вона обирає свій обсяг $q_2 \geq 0$;
- 3) виграш фірми і (прибуток) є

$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i (P(Q) - c),$$

де $P(Q) = a - Q \geq 0$, $Q = q_1 + q_2$, c – постійні граничні витрати.

Для визначення рівноваги скористаємось зворотною індукцією. Спочатку обрахуємо функцію реагування фірми 2, розв'язуючи задачу

$$\max_{q_2 \geq 0} \pi_2(q_2, q_1) = \max_{q_2 \geq 0} q_2 (a - q_1 - q_2 - c).$$

Із умов оптимальності будемо мати

$$q_2 = R_2(q_1) = \frac{a - q_1 - c}{2}.$$

Такий же результат був і в дуополії Курно. Різниця тут в тому, що це (*дійсна*), а не гіпотетична функція реагування фірми 2. Фірма 1, природньо, також може обчислити цю функцію реагування, і отже, задача фірми 1 на першому кроці полягає в наступному:

$$\max_{q_1 \geq 0} \pi_1(q_1, R_2(q_1)) = \max_{q_1 \geq 0} q_1 (a - q_1 - R_2(q_1) - c) = \max_{q_1 \geq 0} q_1 \frac{a - q_1 - c}{2},$$

що дає

$$q_1^* = \frac{a - c}{2}, \quad q_2^* = R_2(q_1^*) = \frac{a - c}{4}.$$

Прибутки фірм у випадку дуополії по Штакельбергу будуть мати вигляд

$$\pi_1 = \frac{(a-c)^2}{8}, \quad \pi_2 = \frac{(a-c)^2}{16}.$$

Зауважимо, що у випадку дуополії за Курно, коли фірми знаходяться в однакових інформаційних умовах і обсяги їх випуску визначаються із системи оптимальності

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0,$$

будемо мати

$$q_1 = q_2 = \frac{a - c}{3}, \quad \pi_1 = \pi_2 = \frac{(a-c)^2}{9}.$$

Цей приклад показує суттєву різницю між прийняттям одноосібного рішення (дуополія по Штакельбергу) і рішенням з декількома учасниками (дуополія за Курно). Тут "зайва" інформація для другого гравця і знання того, що інші мають більше інформації, приводить до погіршення його результату •

Приклад 14.2. (*Послідовний торг*). Розглянемо наступну гру. Гравці 1 та 2 торгуються відносно розділу 1 долара: 1 - й пропонує деякий спосіб такого поділу, 2 - й або приймає пропозицію першого, або ні; якщо ні, то він пропонує свій спосіб поділу, а 1 - й гравець або приймає пропозицію, або ні, і т.д. Кожна пропозиція займає один період, але при цьому є дисконтуючий множник $\delta > 0$. Таким чином, формально розглянемо наступну трьохперіодну гру.

(1 а) На початку 1 - го періоду гравець 1 пропонує "свою долю" s_1 долара, залишаючи 1 - s_1 гравцю 2.

(1 б) Гравець 2 приймає пропозицію 1 - го гравця, тоді гра закінчується, або відхиляє її. В цьому випадку гра переходить до 2 - го періоду.

(2 а) На початку 2 - го періоду гравець 2 пропонує "долю" s_2 долара гравцю 1, залишаючи собі 1 - s_2 долара.

(2 b) Гравець 1 приймає пропозицію 2 - го гравця, тоді гра закінчується, або відхиляє її. В цьому випадку гра переходить до 3 - го періоду.

(3) Гравці в цьому періоді отримують долі $(s, 1 - s)$, $s \in (0,1)$, причому s задано екзогенно.

Для розв'язання цієї задачі використаємо зворотню індукцію. Спочатку обчислимо, що відбувається, якщо справа доходить до 2 - го періоду. Гравець 1 може отримати s - ту долю долара, якщо відхилить пропозицію другого гравця s_2 , вартість цієї долі вже буде δs (в порівнянні з попереднім (другим) періодом). Отже, гравець 1 прийме s_2 тоді і тільки тоді, коли $s_2 \geq \delta s$ (вважаємо, що приймає, якщо рівність). Таким чином, задача гравця 2 полягає у виборі між отриманням $1 - \delta s$ (пропонуючи першому гравцю $s_2 = \delta s$ і отриманням

$1 - s$ в наступному періоді (пропонуючи першому гравцю $s_2 < \delta s$). Дискontована вартість останньої "дії" є $\delta(1 - s)$, що менше, чим $1 - \delta s$, а тому 2 - й гравець в другому турі пропонує $s_2^* = \delta s$.

Таким чином, якщо гра доходить до 2 - го періоду, то 2 - й гравець запропонує s_2^* і перший гравець прийме цю пропозицію. Однак 1 - й гравець може передбачити, що гравець 2 може отримати $1 - s_2^*$ в другому періоді, відхиляючи пропозицію s_1 , але "вартуватиме" це буде тільки $\delta(1 - s_2^*)$ в наступному періоді. Значить 2 - й гравець приймає $1 - s_1$ тоді і тільки тоді, коли

$$1 - s_1 \geq \delta(1 - s_2^*), \text{ або } s_1 \leq 1 - \delta(1 - s_2^*).$$

Тому задача 1 - го гравця в періоді 1 полягає у виборі між отриманням $1 - \delta(1 - s_2^*)$ в цьому періоді (пропонуючи $1 - s_1 = \delta(1 - s_2^*)$ гравцю 2) і отриманням s_2^* в наступному періоді (пропонуючи $1 - s_1 < \delta(1 - s_2^*)$ гравцю 2). Дискontована вартість останнього є $\delta s_2^* = \delta^2 s$, що менше, ніж $1 - \delta(1 - s_2^*) = 1 - \delta(1 - \delta s)$.

Таким чином, оптимальна пропозиція в першому періоді є $s_1^* = 1 - \delta(1 - \delta s)$. Отже, на першому ході 1 - й гравець пропонує s_1^* , другий гравець приймає цю пропозицію і отримує $1 - s_1^*$. Остаточно, виграші гравців є $1 - \delta + \delta^2 s$ і $\delta - \delta^2 s$ відповідно.

Зауважимо, що якби гра продовжувалась наскінченно (тут вже буде відсутнім екзогенно задане s), то гравець 1 на першому кроці запропонував би $s_1^* = \frac{1}{1+\delta}$, залишаючи другому $1 - s_1^* = \frac{\delta}{1+\delta}$, і другий гравець прийняв би цю пропозицію •

Приклад 14.3. (Інвестори і банк). Розглянемо таку ситуацію. Два інвестора вкладають по D доларів у банк. Банк інвестував ці депозити у довготерміновий проект. Якщо "форс - мажорні" обставини примушують банк ліквідувати свої інвестиції до того, як проект "визріє," то він може покрити суму $2 - r$, де $D > r > 0.5 D$. Якщо банк дозволяє проекту "дозріти," то останній принесе суму $2 - R$, де $R > D$.

Є дві дати, коли вкладники можуть забрати свій вклад: дата 1 — до "визрівання," дата 2 — після. Для спрощення будемо вважати, що дискontування відсутнє. Якщо обидва вкладники забирають свої вклади в момент 1, то обидва отримують по r і гра завершується. Якщо тільки один вкладник забирає в момент 1, то він отримує D , а другий — $2 - r - D$. Нарешті, якщо ні один вкладник не забере в момент 1, то проект "дозріває" і обидва вкладники забирають в момент 2 і отримують по R . Якщо тільки один вкладник забирає в момент 2, то він отримує $2 - R - D$, а інший — D . Якщо ж ні один не забирає в момент 2, то банк повертає кожному по R .

Неформально для моменту 1 гру можна зобразити наступним чином (таблиця 14.2).

Таблиця 14.2.

$X_2 \backslash X_1$	Забирати	ні
Забирати	(r, r)	$(D, 2r - D)$
ні	$(2r - D, D)$	Крок 2

Для моменту 2 гра зображена таблицею 14.3.

Таблиця 14.3.

$X_2 \backslash X_1$	Забирати	ні
Забирати	(R, R)	$(2R - D, D)$
ні	$(D, 2R - D)$	(R, R)

Знову використаємо зворотню індукцію для встановлення рівноваги Неша у цій грі.

Почнемо з моменту 2: в силу того, що $R > D$, $2R - D > R$ тут існує єдина рівновага по Нешу – (забрати, забрати), даючи виграші (R, R) . Оскільки дисконт відсутній, то можна просто підставити цей результат в "першу гру" (таблиця 14.4).

Таблиця 14.4.

$X_2 \backslash X_1$	Забирати	ні

Забирати	(r, r)	$(D, 2r - D)$
ні	$(2r - D, D)$	(R, R)

В силу того, що $r < D$, $2r - D < r$ тут ми маємо дві рівноваги по Нешу – (r, r) , (R, R) , тобто:

1) обидва вкладники "біжать" в банк в момент 1;

2) обидва вкладники забирають в момент 2.

Перше можна інтерпретувати як "бігти в банк:" якщо вкладник вірить в те, що інший побіжить, то йому теж потрібно бігти, хоча обом, звичайно, краще почекати •

Задачі до розділу 3.

1. Знайти максимальні гарантовані виграші та гарантовані стратегії у наступній грі двох осіб:

1.1. $X_1 = [0, 10], X_2 = [0, 5];$

$$H_1(x) = 20x_1x_2 + 4x_2^2 - 80x_2 - 25x_1,$$

$$H_2(x) = x_1^2 + (x_1 + 4)(1 - x_2).$$

1.2. $X_1 = [0, 10], X_2 = [0, 5];$

$$H_1(x) = 36x_1x_2 + 9x_2^2 - 180x_2 - 180x_1,$$

$$H_2(x) = x_1^2 + (x_1 + 6)(1 - x_2).$$

1.3. $X_1 = [0, 10], X_2 = [0, 5];$

$$H_1(x) = 40x_1x_2 + 16x_2^2 - 240x_2 - 200x_1,$$

$$H_2(x) = x_1^2 + (x_1 + 8)(1 - x_2).$$

1.4. $X_1 = [0, 10], X_2 = [0, 5];$

$$H_1(x) = 60x_1x_2 + 36x_2^2 - 600x_2 - 200x_1,$$

$$H_2(x) = x_1^2 - 6x_1 - x_2^2 + 12x_2.$$

1.5. $X_1 = [0, 1], X_2 = [0, 1];$

$$H_1(x) = x_1x_2 + 2(1 - x_1)(1 - x_2),$$

$$H_2(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2.$$

1.6. $X_1 = [0, 1], X_2 = [0, 1];$

$$H_1(x) = 4x_1x_2 + (1 - x_1)(1 - x_2),$$

$$H_2(x) = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2.$$

2. Знайти рівноважні за Нешем ситуації у наступній грі двох осіб:

$$2.1. \quad X_1 = [0,5], X_2 = [0,10];$$

$$H_1(x) = 6x_2^2 - 5x_1^2 - 10x_1x_2 + 40x_1 - x_2,$$

$$H_2(x) = 8x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_1x_2 - x_1 + 50x_2.$$

$$2.2. \quad X_1 = [0,5], X_2 = [0,10];$$

$$H_1(x) = -x_2^2 - 4x_1^2 - 10x_1x_2 + 50x_1 - 9x_2,$$

$$H_2(x) = 3x_1^2 - 5x_2^2 - 12x_1x_2 - 4x_1 + 60x_2.$$

$$2.3. \quad X_1 = [0,5], X_2 = [0,10];$$

$$H_1(x) = 6x_2^2 - 5x_1^2 - 10x_1x_2 + 60x_1 - 2x_2,$$

$$H_2(x) = 3x_1^2 - 5x_2^2 - 14x_1x_2 - 2x_1 + 70x_2.$$

$$2.4. \quad X_1 = [0,5], X_2 = [0,10];$$

$$H_1(x) = 7x_2^2 - 6x_1^2 - 10x_1x_2 + 70x_1 - 5x_2,$$

$$H_2(x) = x_1^2 - 5x_2^2 - 16x_1x_2 - 7x_1 + 80x_2.$$

$$2.5. \quad X_1 = [0,5], X_2 = [0,10];$$

$$H_1(x) = 8x_2^2 - 7x_1^2 - 10x_1x_2 + 80x_1 - 9x_2,$$

$$H_2(x) = 4x_1^2 - 5x_2^2 - 18x_1x_2 - 5x_1 + 90x_2.$$

$$2.6. \quad X_1 = [0,5], X_2 = [0,10];$$

$$H_1(x) = 9x_2^2 - 8x_1^2 - 10x_1x_2 + 90x_1 - 6x_2,$$

$$H_2(x) = -x_1^2 - 5x_2^2 - 20x_1x_2 - 5x_1 + 100x_2.$$

3. Дві фірми виробляють однаковий товар в об'ємах x_1 та x_2 відповідно. Витрати на виробництво складають c_1 та c_2 , $0 < c_1 \leq c_2$. Ціна залежить від сумарного об'єму і задається формулою $p(x_1, x_2) = k(x_1 + x_2)^\alpha$, $k > 0, \alpha \in (0,1]$. Знайти рівноважні за Нешем ситуації.

4. (Дуополія Бертрана). Дві фірми виробляють однаковий товар в об'ємах x_1 та x_2 відповідно, які визначаються відповідно до цін $p_i > 0$, $i = \overline{1,2}$ за формулами $x_1(p_1, p_2) = a - b p_1 + c p_2 > 0$, $x_2(p_1, p_2) = a - b p_2 + c p_1 > 0$, $a, b, c > 0$. Фірми хочуть максимувати свої доходи. Знайти рівноважні за Нешем ситуації.

5. Знайти рівноважні за Бержу ситуації у наступній грі двох осіб:

$$5.1. \quad X_1 = [0,5], X_2 = [0,10];$$

$$H_1(x) = 4x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_1x_2 + x_1,$$

$$H_2(x) = x_2^2 - 2x_1^2 + 10x_1x_2 - 10x_1 + 6x_2.$$

$$5.2. \quad X_1 = [0,5], X_2 = [0,10];$$

$$H_1(x) = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 10x_1x_2 + 4x_1,$$

$$H_2(x) = 5x_2^2 - 3x_1^2 + 10x_1x_2 - 10x_1 + 2x_2.$$

$$5.3. \quad X_1 = [0,5], X_2 = [0,10];$$

$$H_1(x) = x_1^2 - 5x_2^2 + 12x_1x_2 + 6x_1,$$

$$H_2(x) = 3x_2^2 - 4x_1^2 + 10x_1x_2 - 10x_1 + 3x_2.$$

$$5.4. \quad X_1 = [0,5], X_2 = [0,10];$$

$$H_1(x) = x_1^2 - 5x_2^2 - 16x_1x_2 - 7x_1 + 80x_2.$$

$$H_2(x) = 7x_2^2 - 6x_1^2 - 10x_1x_2 + 70x_1 - 5x_2.$$

$$5.5. \quad X_1 = [0,5], X_2 = [0,10];$$

$$H_1(x) = 4x_1^2 - 5x_2^2 - 18x_1x_2 - 5x_1 + 90x_2.$$

$$H_2(x) = 8x_2^2 - 7x_1^2 - 10x_1x_2 + 80x_1 - 9x_2.$$

$$5.6. \quad X_1 = [0,5], X_2 = [0,10];$$

$$H_1(x) = -x_1^2 - 5x_2^2 - 20x_1x_2 - 5x_1 + 100x_2.$$

$$H_2(x) = 9x_2^2 - 8x_1^2 - 10x_1x_2 + 90x_1 - 6x_2.$$

Розділ 4. Конфліктні задачі оптимізації – кооперативні (коаліційні) ігри.

§1. Кооперативна поведінка гравців: сильна рівновага Неша, рівновага у спільних змішаних стратегіях.

1. Сильна рівновага Неша. В попередньому розділі розглядалися некооперативні ігри, які характеризувалися відсутністю обміну інформацією між гравцями. Це, як правило, призводить до неефективності (домінованості) рівноважних ситуацій. У випадку можливості обміну інформацією можна сподіватись на кооперацію в процесі вибору стратегій. Умови кооперації визначаються гравцями під час переговорів, у яких з'ясовуються узгоджені аспекти поведінки гравців. Унаслідок цього гравці приходять до кооперативної домовленості, яка може бути обов'язковою (існує орган, якому підкоряються всі гравці і який контролює виконання умов підписаного сторонами контракту) або необов'язковою (коли такого органу не існує і домовленість схожа з міжнародними договорами, які діють до того часу, поки не вигідно їх порушувати).

Далі будемо розглядати необов'язкові домовленості з погляду їхньої стабільності, яка розуміється як не вигідність відхилення від неї гравців. Стабільність полягає в наступному. Відхилення деяких гравців від домовленості може примусити інших гравців змінити свої стратегії, які вони спочатку не збиралися змінювати. Ці зміни важко передбачити незалежно від того, чи ми передбачаємо чи ні, що порушення домовленості знищить дух кооперації та призведе до некооперативної поведінки гравців. Тому будемо вважати, що необов'язкові домовленості будуть складатися із домовленостей про ситуацію, а також із сценарію реагування кожного гравця $i \in I$ на відхилення будь-якої коаліції, що не містить цього гравця. Цей сценарій оголошується наперед і є "сценарієм погроз." Зокрема, реакція на порушення домовленості може полягати у відсутності будь-якої реакції ("сценарій ігнорування"). В якості домовленості може виступати довільна рівноважна ситуація, від якої не вигідно відхилятися ("стабільність").

Приклад 1.1. (див.табл.1.1.)

Таблиця 1.1.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
----------------------	-------	-------

a_1	(1, 0)	(0, 1)
b_1	(10, 10)	(99, 1)

У цій грі рівновагою Неша буде ситуація (b_1, a_2) і вона є ідеальною для переговорів: від неї не вигідно відхилятися обом. Але у першого гравця завжди буде спокуса запропонувати ситуацію (b_1, b_2) , в якій він має виграш в 10 разів більший •

Спочатку узагальнимо концепцію рівноваги Неша, потім розглянемо стабільність на основі погроз. Узагальнення концепції рівноваги Неша можливе у двох напрямках. Якщо гравці - порушники можуть утворювати коаліції, то виконання домовленості підпадає під небезпеку з боку потенційних відхилень будь-якої коаліції. Це приводить до концепції "сильної" рівноваги. Якщо гравці можуть використовувати випадковий механізм, який реалізує корельовано рандомізовані стратегії (отримані випадковим перемішуванням чистих стратегій) і посилає гравцям ізольовано сигнал про те, якої стратегії йому дотримуватись, то виникає поняття рівноваги у спільних змішаних стратегіях. Розглянемо

Приклад 1.2. (див.табл.1.2.)

Таблиця 1.2.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
a_1	(1,1)	(1,0)
b_1	(0,1)	(2,2)

В цій грі двох осіб маємо дві нешівські рівноваги – (a_1, a_2) , (b_1, b_2) . Якщо від ситуації (a_1, a_2) не вигідно відхилятися одному із гравців (стратегія іншого – фіксована), то від ситуації (b_1, b_2) не вигідно відхилятися обом гравцям одночасно (якщо від ситуації (a_1, a_2) одночасно відхиляються обидва гравці, то вони перейдуть в ситуацію (b_1, b_2) , яка вигідніше обом гравцям) •

Нехай задана безкоаліці

$$G = \{I, X_i, H_i, i \in I\}.$$

(1.1)

Означення 1.1. Для гри (1.1) ситуація x^* є сильною рівновагою Неша (SNE), якщо не існує коаліції гравців, для яких було б вигідно відхилятися від даної ситуації у випадку, коли доповнювальна коаліція $I \setminus T$ не реагує на відхилення, тобто $\forall T \subset I, \forall x_T \in X_T$ буде несумісною система нерівностей

$$\begin{aligned} H_i(x_T, x_{I \setminus T}^*) &\geq H_i(x^*) \quad \forall i \in T; \\ \exists j \in T: H_j(x_T, x_{I \setminus T}^*) &> H_j(x^*) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Множину сильних рівноваг у грі G позначимо через $SNE(G)$. Ця множина може бути порожньою.

Покладаючи у формулах (1.2) $T = \{i\}$, $i \in I$, отримаємо, що сильна рівновага Неша є просто рівновагою Неша (NE), тобто $SNE(G) \subseteq NE(G)$. Покладаючи у формулах (1.2) $T = I$ отримаємо, що сильна рівновага Неша є Парето - оптимальною (ефективною – PO) ситуацією. Отже, для $m = 2$ сильні рівноваги Неша – це ефективні рівноваги Неша (у прикладі 1.2. – (b_1, b_2)).

Інтерпретація властивості стабільності співвідношень (1.2) базується на двоетапному процесі вибору прийняття рішень. На першому етапі гравці приходять до домовленості про конкретну ситуацію x^* . Далі обмін інформацією припиняється і кожен гравець самостійно приймає рішення про свою остаточну стратегію. Будь-який гравець $i \in I$ може відмовитись від використання стратегії x_i^* , але не може інформувати інших гравців про своє відхилення. Може бути також сформована довільна коаліція T , яка відхиляється від x_T^* і обирає x_T , але гравці поза даною коаліцією не можуть бути проінформованими про цю зміну, тому очікується, що вони будуть притримуватись стратегій із домовленості x^* .

На прикладі некооперативних ігор двох осіб відомо [8], що непорушність будь-якої NE - ситуації руйнується, якщо виникає боротьба за лідерство. Аналогічна ситуація можлива і у грі m осіб.

Приклад 1.3. (Гра "Переговори"). Нехай m гравців ділять одну гривню. Гравці подають свої заявки арбітру, який задовольняє їх, якщо у сумі вони не перевищують 1 гривню. Інакше жоден гравець нічого не отримує: $X_i = [0, 1], i \in I$,

$$H_i(x) = \{x_i, \text{ якщо } \sum_{j=1}^m x_j \leq 1; 0, \text{ якщо } \sum_{j=1}^m x_j > 1\}.$$

Розв'язок $(x^0)' = (0, \dots, 0)$ не є сильною рівновагою, оскільки він домінується, наприклад, точкою $(\bar{x})' = (\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$. Аналогічно, розв'язок $(\tilde{x})' = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m), \sum_{j=1}^m \tilde{x}_j < 1$,

також є домінованим, наприклад, точкою $(\tilde{\tilde{x}})' = (\tilde{\tilde{x}}_1, \dots, \tilde{\tilde{x}}_{m-1}, 1 - \sum_{j=1}^{m-1} \tilde{\tilde{x}}_j)$.

Відхилення будь-якої коаліції від точки $(x^*)' = (x_1^*, \dots, x_m^*), \sum_{j=1}^m x_j^* = 1$, може лише погіршити результат хоча б одному члену коаліції. Таким чином, $SNE(G) \setminus = \{x \in R_+^m, \sum_{j=1}^m x_j = 1\}$.

Зауважимо, що коли коаліція T перебирає на себе роль лідера та обирає набір стратегій x_T^* так, що $\sum_{j \in T} x_j^* = 1 - \varepsilon, \varepsilon \in (0, 1)$, то коаліції $I \setminus T$ залишається вибрати такий набір стратегій $x_{I \setminus T}^*$, що $\sum_{j \in I \setminus T} x_j^* = \varepsilon$. Отже, будь-який учасник або коаліція, привласнивши собі право лідера, може забрати собі майже всю гривню. Виберемо тепер конкретну SNE - ситуацію для переговорів, наприклад, $(\bar{x})'$. Для того, щоб зробити таку домовленість стабільною, кожен гравець повинен вирішити не звертати уваги на заявки гравців, більші за $\frac{1}{m}$. Таким чином, необов'язкові домовленості вимагають деяких обов'язкових обмежень в обміні інформацією •

2. Рівновага у спільних змішаних стратегіях. Якщо у грі відсутня сильна рівновага Неша, або вона не влаштовує гравців як основа стабільної колективної домовленості, то слід розглянути рівновагу Неша у змішаних стратегіях як необов'язкову домовленість, яка забезпечується таємністю проведення лотерей, що організовують гравці для випадкового вибору остаточного рішення.

Розглянемо гру "Ввічливі водії".

Приклад 1.4. (див. табл. 1.3.)

Таблиця 1.3.

$X_1 \setminus X_2$	З	Р
З	(1, 1)	(1 + ε , 2)
Р	(2, 1 + ε)	(0, 0)

В таблиці 1.3 позначено: стратегії гравців "З" – зупинитись, "Р" – рухатись; величина $\varepsilon \in (0, 1)$ характеризує ступінь ввічливості водіїв.

Якщо один водій зупиняється, то для нього краще, щоб інший проїхав. Ця гра має дві НЕ-рівноваги: $(1 + \varepsilon, 2)$, $(2, 1 + \varepsilon)$. Крім того, ця гра має цілком змішану НЕ - рівновагу: (μ_1^*, μ_2^*) . Знайдемо її за алгоритмом із § 8 розділу 3. Для цього запишемо матрицю виграшів другого гравця

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 + \varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1+\varepsilon} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2(1+\varepsilon)} \end{pmatrix},$$

$$\mu_1^* = \frac{J_{X_2} H_2^{-1}}{J_{X_1} H_2^{-1} J_{X_2}} = \frac{1+\varepsilon}{2+\varepsilon} \delta_3 + \frac{1}{2+\varepsilon} \delta_P.$$

При цьому виграш першого водія буде дорівнювати $v_1 = 2 \frac{1+\varepsilon}{2+\varepsilon}$. В силу симетрії для другого водія результати будуть такими ж.

Побудована вище змішана НЕ - ситуація домінується обома чистими НЕ - ситуаціями, тому її можна рекомендувати як переговорну лише із її справедливістю щодо виграшів гравців $v_1 = v_2$. Тут слід зауважити, що в цій ситуації виграші гравців співпадають з їх гарантованими виграшами у змішаних стратегіях, але змішана НЕ - ситуація не гарантує цього виграшу •

Якщо гравців не влаштовує узагальнення гри у змішаних стратегіях (незалежна рандомізація стратегій), то гравці можуть домовитись про побудову такого випадкового механізму, який дозволяє зробити рівноважну ситуацію ще більш привабливою з точки зору забезпечення її стабільності для гравців (зокрема, і рівноважною за Парето (задовольнити властивість "справедливість" означення "оптимальність ситуації").)

Означення 1.2. Нехай у грі (1.1) гравці мають скінченну множину стратегій. Спільною лотереєю будемо називати імовірнісний розподіл $L = L(x)|_{x \in X_I}$ на X_I . Для всіх $i \in I$ і для всіх $x_i \in X_i$ позначимо через $L_{x_i}(x_{I \setminus \{i\}})$ умовну ймовірність реалізації $x_{I \setminus \{i\}} \in X_{I \setminus \{i\}}$ після того, коли стратегія x_i вже обрана

$$L_{x_i}(x_{I \setminus \{i\}}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{L(x_i, x_{I \setminus \{i\}})}{\sum_{y_{I \setminus \{i\}} \in X_{I \setminus \{i\}}} L(x_i, y_{I \setminus \{i\}})} \quad , \quad \sum_{y_{I \setminus \{i\}} \in X_{I \setminus \{i\}}} L(x_i, y_{I \setminus \{i\}}) \neq 0, \\ 0, \quad L(x_i, y_{I \setminus \{i\}}) = 0 \quad \forall y_{I \setminus \{i\}} \in X_{I \setminus \{i\}} \end{array} \right\} \cdot$$

Означення 1.3. Будемо говорити, що розподіл $L(x)$ є рівновагою у спільних змішаних стратегіях у грі G , якщо $\forall i \in I, \forall x_i, y_i \in X_i$ виконуються нерівності

$$\sum_{x_{I \setminus \{i\}} \in X_{I \setminus \{i\}}} H_i(x_i, x_{I \setminus \{i\}}) L_{x_i}(x_{I \setminus \{i\}}) \geq \sum_{x_{I \setminus \{i\}} \in X_{I \setminus \{i\}}} H_i(y_i, x_{I \setminus \{i\}}) L_{x_i}(x_{I \setminus \{i\}}) \cdot \quad (1.3)$$

Множину рівноваг у спільних змішаних стратегіях у грі G позначимо через $CNE(G)$.

Кооперативний сценарій, що є обґрунтуванням цього означення, полягає в наступному. Гравці спільно будують випадковий датчик, який може реалізувати вибір ситуації $x \in X_I$ із

ймовірністю $L(x)$. Якщо реалізувалась ситуація x , то гравець i отримує інформацію лише про стратегію x_i . Далі він вільно, незалежно і таємно обирає свою справжню стратегію. Сигнал x_i сприймається i -им гравцем як пропозиція зіграти x_i . Умови (1.3) означають, що виконання домовленості про вибір x_i гравцем i забезпечуються автоматично при тій самій обмеженій інформації, яка доступна кожному гравцеві. Дійсно, нехай гравцеві i запропоновано використати стратегію x_i . Він робить висновок із загального розподілу L , що із імовірністю $L_{x_i}(x_{I \setminus \{i\}})$ набір $x_{I \setminus \{i\}}$ буде вибрано. Отже,

$$M(y_i, L_{x_i}) = \sum_{x_{I \setminus \{i\}} \in X_{I \setminus \{i\}}} H_i(y_i, x_{I \setminus \{i\}}) L_{x_i}(x_{I \setminus \{i\}}) -$$

математичне сподівання його виграшу при використанні стратегії $y_i \in X_i$, якщо всі інші гравці згодні у виборі стратегії слідувати сигналу. Таким чином, умова (1.3) означає, що використання стратегії, яка пропонується датчиком, є оптимальною відповіддю гравця i при заданому рівні інформації у припущенні, що всі інші гравці підкоряються сигналу.

Нехай стратегія x_i така, що $L(x_i, x_{I \setminus \{i\}}) = 0 \forall x_{I \setminus \{i\}} \in X_{I \setminus \{i\}}$, тобто ймовірність того, що стратегія x_i буде запропонована датчиком, дорівнює нулю. Для такої стратегії x_i умова (1.3) виконується тривіально, а система (1.3) переписується в еквівалентному вигляді:

$$\forall i \in I, \forall x_i, y_i \in X_i$$

$$\sum_{x_{I \setminus i} \in X_{I \setminus i}} H_i(x_i, x_{I \setminus i}) L(x_{I \setminus i}) \geq \sum_{x_{I \setminus i} \in X_{I \setminus i}} H_i(y_i, x_{I \setminus i}) L(x_{I \setminus i}).$$

(1.4)

Звідси випливає, що лотерея L є рівновагою у спільних змішаних стратегіях лише тоді, коли ці стратегії задовольняють системі лінійних нерівностей (1.4). Ця система завжди має розв'язок в силу наступної теореми.

Теорема 1.1. Множина рівноваг $CNE(G)$ є непорожньою опуклою компактною підмножиною одиничного симплекса $E^{|X_I|}$. Якщо $\mu = (\mu_i)_{i \in I}$ – ситуація змішаного розширення гри $\bar{G}$, то лотерея L , що визначається по цій ситуації, є рівновагою у спільних змішаних стратегіях у G тоді і лише тоді, коли μ – ситуація рівноваги у грі $\bar{G}$ •

Отже, NE – ситуація як у початковій грі, так і у її змішаному розширенні, ототожнюється з рівновагою L у спільних змішаних стратегіях, де імовірнісний розподіл L є набором незалежних випадкових індивідуальних стратегій.

Приклад 1.5. ("Музичні стільці"). Маємо двох гравців і три стільці (a, b, c). Стратегія гравця полягає у виборі стільця. Обидва гравці несуть втрати при виборі одного і того ж стільця. Якщо ж їх вибори різні, то гравець, чий стілець безпосередньо слідує за стільцем супротивника (вважаємо, що слідування гравців наступне $a \rightarrow b \rightarrow c$) виграє вдвічі більше. Отже виникає біматрична гра (табл. 1.4.)

Таблиця 1.4.

$X_1 \setminus X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	(0, 0)	(1, 2)	(2, 1)
b_1	(2, 1)	(0, 0)	(1, 2)
c_1	(1, 2)	(2, 1)	(0, 0)

У початковій грі рівноваги Неша відсутні. Єдиною цілком змішаною рівновагою Неша є

$$\mu_1^* = \mu_2^* = \frac{1}{3} \delta_a + \frac{1}{3} \delta_b + \frac{1}{3} \delta_c.$$

Ця ситуація рівноваги приносить кожному гравцеві виграш 1 і є домінованою. Причина цього полягає в тому, що у змішаній ситуації (μ_1^*, μ_2^*) "погані" для обох гравців діагональні ситуації реалізуються з ймовірністю $\frac{1}{3}$. Розглянемо таку лотерею L на $X_1 \times X_2$

$$L(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x_1 \neq x_2 \\ 0, & x_1 = x_2 \end{cases}.$$

Дана лотерея є рівновагою у змішаних стратегіях у даній грі. Нехай, наприклад, реалізується (із ймовірністю $\frac{1}{6}$ ситуація (b_1, c_2)). При даному розподілі L гравець 1 може вивести, що гравцю 2 запропоновано використовувати одну зі стратегій: a_2 , або c_2 з ймовірністю $\frac{1}{2}$, тобто

$$\mu_2 = \frac{1}{2} \delta_a + \frac{1}{2} \delta_c.$$

Найкращою відповіддю на цю стратегію і є стратегія b_1 , оскільки

$$\overline{H}_1(\delta_b, \mu_2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} > \overline{H}_1(\delta_a, \mu_2) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 > \overline{H}_1(\delta_c, \mu_2) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

Аналогічно, гравець 2, якому поступає сигнал використати стратегію c_2 , виводить, що гравцю 1 пропонується вибрати змішану стратегію

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \delta_a + \frac{1}{2} \delta_c.$$

У цьому випадку стратегія c_2 і є найкращою відповіддю гравця 2 (аналогічно вище наведеному).

В силу симетрії гри отримуємо властивість стабільності лотереї L при будь-яких допустимих реалізаціях. Зауважимо, що лотерея L приводить до оптимальних за Парето і справедливих виграшів $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Цей факт спонукає гравців вступати в кооперацію на основі використання спільних змішаних стратегій •

Розглянемо ще один випадковий механізм, результат реалізації якого може бути використаний гравцями для формування компромісної договірної колективної рівноважної ситуації.

Приклад 1.6. ("Конкуренція зі спеціалізацією"). Два дуополіста постачають на ринок один товар, але різної якості: низької $H1_i$, середньої C_i і високої B_i , $i = \{1, 2\}$. Виграші гравців задані у табл. 1.5.

Таблиця 1.5.

$X_1 \backslash X_2$	$H1_2$	C_2	B_2
$H1_1$	(0, 0)	(0, 2)	(1, 3)
C_1	(2, 0)	(1, 1)	(2, 0)
B_1	(3, 1)	(0, 2)	(0, 0)

Для гравців, які дотримуються некооперативної поведінки, ситуація (C_1, C_2) є єдиною НЕ-рівновагою як самої гри, так і її змішаного розширення. Ця гра має також єдину рівновагу у спільних змішаних стратегіях, яка реалізується на лотереї, що вибирає (C_1, C_2) із ймовірністю 1. Але ця ситуація не буде оптимальною за Парето. Тим не менше, оптимальна за Парето ситуація з виграшем (2, 2) може бути досягнутою як результат наступної домовленості.

Побудуємо лотерею з ймовірнісним розподілом

$$L = \frac{1}{2} \delta_{(B_1 H1_2)} + \frac{1}{2} \delta_{(H1_1 B_2)}.$$

Кожен гравець незалежно і таємно вибирає та посилає нейтральному арбітру, що обирається обома гравцями, обов'язковий сигнал s_i , який приймає одне із чотирьох значень для кожного гравця: три чистих стратегії і сигнал A_i , $i = \{1, 2\}$ (згідно лотереї). Сигнал A_1 може приймати значення: $H1_1$ або B_1 , а сигнал A_2 відповідно: B_2 або $H1_2$. Отримавши пару повідомлень (s_1, s_2) , арбітр визначає випадкову ситуацію (x_1, x_2) , відповідно до лотереї L за таким правилом:

- 1) якщо $s_1 = A_1, s_2 = A_2$ і $(A_1, A_2) = (B_1, H1_2) \rightarrow (x_1, x_2) = (B_1, H1_2)$, якщо ж $(A_1, A_2) = (H1_1, B_2) \rightarrow (x_1, x_2) = (H1_1, B_2)$;
- 2) якщо $s_1 = A_1, s_2 = H1_2, C_2, B_2$ і $A_1 = B_1 \rightarrow (x_1, x_2) = (B_1, H1_2)$, якщо $A_1 = H1_1 \rightarrow (x_1, x_2) = (H1_1, B_2)$;
- 3) якщо $s_1 = H1_1, C_1, B_1, s_2 = A_2$ і $A_2 = B_1 \rightarrow (x_1, x_2) = (B_1, H1_2)$, якщо $A_2 = H1_2 \rightarrow (x_1, x_2) = (H1_1, B_2)$;
- 4) якщо $s_i = H1_i, C_i, B_i, i = \{1, 2\}, \rightarrow (x_1, x_2) = (B_1, H1_2)$ або $(x_1, x_2) = (H1_1, B_2)$.

Тоді для $\forall y_1, y_2 \in \{H1, C, B\}$

$$\bar{H}_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2} H_1(B_1, H1_2) + \frac{1}{2} H_1(H1_1, B_2) = 2 \geq \frac{1}{2} H_1(y_1, H1_2) + \frac{1}{2} H_1(H1_1, y_2),$$

$$\bar{H}_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2} H_2(B_1, H1_2) + \frac{1}{2} H_2(H1_1, B_2) = 2 \geq \frac{1}{2} H_2(B_1, y_2) + \frac{1}{2} H_2(y_1, B_2).$$

Отже, із ймовірністю будуть реалізовуватись ситуації $(B_1, H1_2)$ і $(H1_1, B_2)$, а математичне сподівання виграшу кожного гравця буде дорівнювати 2.

Означення 1.4. Для всіх $i \in I$ позначимо через $L_{I \setminus i}$ звуження розподілу $L(x)$ на $X_{I \setminus i}$:

$$L_{I \setminus i}(x_{I \setminus i}) = \sum_{x_i \in X_i} L_i(x_i, x_{I \setminus i}) \quad \forall \quad x_{I \setminus i}.$$

Будемо називати лотерею $L(x)$ слабкою рівновагою у спільних змішаних стратегіях у грі G , якщо $\forall i \in I, \forall y_i \in X_i$ виконуються нерівності

$$\sum_{x_i \in X_i} H_i(x) L(x) \geq \sum_{x_{I \setminus i} \in X_{I \setminus i}} H_i(y_i, x_{I \setminus i}) L_{I \setminus i}(x_{I \setminus i}) \quad (1.5)$$

Позначимо множину слабких рівноваг через $WCNE(G)$. Має місце

Теорема 1.2. Множина $WCNE(G)$ є непорожньою опуклою компактною підмножиною

одиначного симплекса у $E^{|X_I|}$, причому $CNE(G) \subset WCNE(G)$. Якщо $\mu = (\mu_i)_{i \in I}$ - ситуація

рівноваги розширеної гри $\bar{G}$, то відповідна лотерея L є слабкою рівновагою у спільних

змішаних стратегіях у грі G тоді і лише тоді, коли ситуація $\mu \notin$ є рівновагою Неша у грі $\bar{G}$.

Таким чином, ми отримали ланцюжок включень

$$NE(G) \subset NE(\bar{G}) \subset CNE(G) \subset WCNE(G).$$

Проходячи по цьому ланцюжку зліва направо, ми повинні накладати все більше інформаційних обмежень для того, щоб рівноважна ситуація стала стабільною домовленістю. Для NE - ситуації та змішаної NE - ситуації вимагається лише дотримуватись секретності у виборі індивідуальних стратегій. Для CNE - ситуації у доповненні до цього потрібно вимагати, щоб окремі гравці могли спостерігати лише свої результати реалізації спільної лотереї. Для $WCNE$ - ситуації необхідно мати нейтрального арбітра, який реалізує випадкову ситуацію лотереї, нічого не повідомляючи окремим гравцям. Далі цей арбітр опитує незалежно і тайно кожного гравця, чи згоден той "всліпу" використовувати ту стратегію, яка зреалізувалась при проведенні лотереї. Потім він повинен повідомити тим гравцям, які добровільно погодились із проведенням лотереї, ситуацію, що випала, і примусити цих гравців дійсно використовувати ці стратегії.

Загальною рисою цих сценаріїв є неможливість із досягненням домовленості про вибір деякої спільної стратегії вести прямий обмін інформацією між гравцями. У випадку багаторазового проведення лотереї кооперація стає неявною та важко розпізнати сам факт її

існування. Така форма мовчазного зговору описана в літературі під назвою "Зговор по електричному обладнанню 1950 - х рр.," в якому були замішані 29 компаній США.

§ 2. Стабільність на основі погроз.

1. Стабільні домовленості. Погроза може слугувати сильним механізмом кооперації. Для досягнення стабільності домовленості (наприклад, вибору рівноваги Неша) гравці оголошують деяку схему реагування на можливі відхилення інших. Оскільки гравцеві, який відхилиться, може стати "погано," якщо оголошена погроза здійсниться, то він остерігатиметься відхилень, і необов'язкова домовленість виявиться стабільною. Таким чином, попередження є "розумним використанням потенційної сили."

Стабільні домовленості, що розглядалися у попередньому пункті, вимагали повної секретності у прийнятті рішень. Погроза ж є ефективною лише тоді, коли відхилення неможливо приховати. Таким чином, для досягнення стабільності на основі застережень потрібно, щоб усі індивідуальні вибори стратегій відбувались відкрито. Тут слід зауважити, що використання застережень для досягнення стабільності домовленостей не гарантує її виконання. Якщо різниця у виграшах при відхиленні дуже велика ("життя – смерть," початок війни між державами), то порушення стабільності можливе.

Означення 2.1. *Сценарієм попередження у грі G називається набір $(x_i, \theta_{I \setminus i})$, в якому відображення $\theta_{I \setminus i}: X_i \rightarrow X_{I \setminus i}$ – погроза гравцю i , причому*

$$\theta_{I \setminus i}(x_i) = x_{I \setminus i}; \quad \forall y_i \in X_i \setminus \{x_i\}: H_i(y_i, x_{I \setminus i}) \leq H_i(x) \quad \bullet$$

(2.1)

Проілюструємо сценарій попередження, розглядаючи гру на нескінченному інтервалі часу. У кожен конкретний момент часу кожен гравець вибирає деяку стратегію, причому він може її змінити в будь-який момент часу. Гра відбувається у відкриті: тобто стратегії всіх гравців усім відомі. Це є головним інформаційним припущенням, що робить неможливим таємне порушення договору. Гравець, який виконує домовленість, спочатку вибирає узгоджену з іншими стратегію x_i , і потім спостерігає за стратегіями $y_{I \setminus i}$ інших гравців. Поки $y_{I \setminus i} = x_{I \setminus i}$, i -й гравець дотримується стратегії x_i . Якщо тільки будь-який гравець, наприклад, j -й, переключиться на стратегію $y_j \neq x_j$, то гравець i переключиться на деяку стратегію $\hat{x}_i \in \theta_{I \setminus j}(y_j)$. Умова стабільності (2.1) означає, що якщо гравці виконують договір, що базується на сценарії попередження, то в гравців не виникає приводу для одностороннього його порушення.

Далі з'ясуємо якими повинні бути ситуації, що забезпечують стабільність домовленості.

Лема 2.1. *Нехай $(x_i, \theta_{I \setminus i}); i \in I$ – сценарій попередження. Тоді ситуація x є гарантованою рівновагою*

$$\sup_{y_i} \inf_{y_{I \setminus i}} H_i(y_i, y_{I \setminus i}) \leq H_i(x) \quad \forall i \in I.$$

Доведення. Із (2.1) маємо

$$\inf_{y_{I \setminus i}} H_i(y_i, y_{I \setminus i}) \leq H_i(y_i, \theta_{I \setminus i}(y_i)) \leq H_i(x) \quad \forall y_i \in X_i,$$

зокрема і для того y_i , на якому досягається супремум •

Лема 2.2. *Нехай X_i – компакт, H_i – неперервні функції при всіх $i \in I$. Тоді у грі G існує хоч би одна гарантована рівноважна ситуація. Для кожної такої ситуації x при всіх $i \in I$ існує набір погроз $\theta_{I \setminus i}$ такий, що набір $(x_i, \theta_{I \setminus i}); i \in I$ є сценарієм попередження •*

Означення 2.2. Поділом у грі G називається оптимальна за Парето ситуація гарантованої рівноваги •

Позначимо через $I(G)$ множину поділів у грі G .

Лема 2.3. Нехай X_i – компакт, H_i – неперервні функції при всіх $i \in I$. Тоді у грі G існує хоч би один поділ.

Доведення. Позначимо через $IR(G)$ непорожню компактну підмножину гарантованих рівноваг у грі G . Виберемо елемент $x \in IR(G)$, який максимізує $\sum_{i \in I} H_i(x)$ на $IR(G)$. Тоді x є оптимальною за Парето ситуацією. Дійсно, покладемо від супротивного, що ситуація y домінує за Парето ситуацію x . Тоді $y \in IR(G)$ і

$$\sum_{i \in I} H_i(x) < \sum_{i \in I} H_i(y),$$

що суперечить оптимальності за Парето ситуації x •

Із леми 2.1 витікає, що поділ є необов'язковою домовленістю, стабільною відносно індивідуальних відхилень, а також відносно відхилень коаліції I усіх гравців (оптимальність за Парето). З іншого боку, двома мінімальними вимогами для кооперативних домовленостей як раз і є гарантована рівновага і оптимальність за Парето. Отже, множина $I(G)$ є максимальною областю переговорів про кооперацію. Якщо множина $I(G)$ одноеlementна, то колективний результат гри не викликає сумнівів. Але в більшості ігор множина $I(G)$ містить більше одного елемента і вибір між ними приводить до конфліктних ситуацій між гравцями.

2. α , β та γ – ядра. Основною концепцією кооперативної рівноваги на основі погроз є α – ядро.

Означення 2.3. Для гри у нормальній формі G α – ядром називається множина C_α таких ситуацій $\hat{x}$, що для будь-якої коаліції $T \subseteq I$ і для будь-якої коаліційної стратегії $x_T \in X_T$, знайдеться така стратегія $x_{I \setminus T} \in X_{I \setminus T}$ (погроза $\theta_{I \setminus T}(x_T) = x_{I \setminus T}$) доповнюючої коаліції $I \setminus T$, що не може бути сумісною система нерівностей

$$\begin{aligned} \forall i \in T \quad H_i(x_T, x_{I \setminus T}) &\geq H_i(\hat{x}), \\ \exists j \in T \quad H_j(x_T, x_{I \setminus T}) &> H_j(\hat{x}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Таким чином, $(x_T, \theta_{I \setminus T}(\cdot); T \in I)$ – коаліційний сценарій погроз. Згідно з означенням, ситуація $\hat{x}$ належить α – ядру, якщо будь-якому відхиленню x_T може бути протиставлений хід $x_{I \setminus T}$ доповнювальної коаліції $I \setminus T$, який застерігає хоча б одного члена коаліції T від прийняття рішення x_T , оскільки в цьому випадку цей гравець програє $H_i(x_T, x_{I \setminus T}) < H_i(\hat{x})$ або всі гравці коаліції отримають такий самий виграш, як і раніше $H_i(x_T, x_{I \setminus T}) = H_i(\hat{x}), i \in T$.

Застосовуючи цю властивість до коаліцій $T = I$ та $T = \{i\}, i \in I$, отримаємо, зокрема, що будь-яка ситуація із α – ядра є також поділом; $C_\alpha \subseteq I(G)$.

Якщо α – ядро є порожнім, то потрібні більш складні сценарії погроз, які включають контрпогрози для стабілізації хоча б деяких поділів. Навпаки, якщо α – ядро містить велику кількість ситуацій, то при накладанні додаткових умов у ньому можна виділити специфічну множину, якою є β – ядро.

Означення 2.4. Для гри у нормальній формі G β – ядром називається множина C_β таких ситуацій $\hat{\hat{x}}$, що для будь-якої коаліції $T \subseteq I$ існує спільна стратегія $x_{I \setminus T} \in X_{I \setminus T}$ доповнюючої коаліції $I \setminus T$, така, що $\forall x_T \in X_T$ не може бути сумісною система нерівностей

$$\begin{aligned} \forall i \in T \quad H_i(x_T, x_{I \setminus T}) &\geq H_i(\hat{\hat{x}}), \\ \exists j \in T \quad H_j(x_T, x_{I \setminus T}) &> H_j(\hat{\hat{x}}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ясно, що $C_\beta \subseteq C_\alpha$. Розглянемо результати для гри двох осіб.

Приклад 2.1. Гравці вибирають число із множини $A = \{1, 2, \dots, 10\}$. Нехай вибрані числа x_1, x_2 : $x_1 + x_2 = 10$, тоді $H_i = x_i$. В інших випадках виграш дорівнює $(4, 0)$, якщо $x_1 + x_2$ – парне, і $(0, 4)$ – в іншому випадку.

Гарантований виграш i -го гравця $\alpha_i = \max_{x_1} \min_{x_j} H_i(x_i, x_j) = 0$, $i = \{1, 2\}$. Тому поділами є всі Парето - оптимальні ситуації у грі. Очевидно такими будуть всі ситуації, для яких $x_1 + x_2 = 10$. Оскільки $\min_{x_j} \max_{x_i} H_i(x_i, x_j) = 4$, $i = \{1, 2\}$, то з леми 2.4 випливає, що β - ядро складається з трьох ситуацій $(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$.

Для того щоб стабілізувати з допомогою попереджувальних погроз, наприклад, поділ $(3, 7)$ необхідно, щоб обидва гравці погодились на вибір стратегій у відкриту. В протилежність до цього, реалізація поділу із β - ядра потребує більш слабкого інформаційного обмеження: потрібен лише сигнал, що інформує гравця про відхилення його партнера. З іншого боку, у багатьох іграх двох осіб α - ядра і β - ядра співпадають.

Для гри двох осіб можна визначити іншу підмножину α - ядра, а саме γ - ядро, яке може бути стабілізованим при поведінці, що заснована на найкращих відповідях гравців.

Означення 2.5. Для гри двох осіб у нормальній формі G γ - ядром називається множина C_γ , яка складається з таких поділів $\hat{x}$, для яких існує сценарій $(\hat{x}_1, \theta_2; \hat{x}_2, \theta_1)$, у якому погрози $\theta_i, i = \{1, 2\}$, є попередженнями, тобто $\forall x_j \neq \hat{x}_j$ мають місце нерівності

$$H_j(x_j, \theta_i(x_j)) \leq H_j(\hat{x}), H_i(x_j, \theta_i(x_j)) = \max_{x_i \in X_i} H_i(x_j, x_i), i, j = \{1, 2\}, i \neq j.$$

Теорема 2.1. Нехай функції виграшів $H_i, i = \{1, 2\}$ – взаємно однозначні, $\gamma_i = \max_{x_i \in X_i} H_i(x_i, r_j(x_i))$ – виграш за Штакельбергом, де $r_j(x_i) = \arg \max_{y_j \in X_j} H_j(x_i, y_j)$ – найкраща відповідь гравця $j \neq i$ на фіксовану стратегію $x_i \in X_i$ гравця i . Тоді γ - ядро задається умовами:

$$C_\gamma(G) = \{ \hat{x} \in PO: \gamma_i \leq H_i(\hat{x}), i = \{1, 2\} \}.$$

Теорема 2.1 встановлює зв'язок між здійсненням стабільності за допомогою попереджень та боротьбою за лідерство. Вона стверджує, що у грі G виникає боротьба за лідерство тоді і тільки тоді, коли її γ - ядро порожнє. Таким чином, у грі з порожнім γ - ядром стабільності будь-якого поділу загрожує можливість захоплення лідерства одним із гравців.

Приклад 2.2. Дві фірми поставляють на ринок товар в об'ємах $x_i, i = \{1, 2\}$. Ціна на товар визначається формулою $p = p_0 - (x_1 + x_2) \geq 0$. Витрати на випуск одиниці продукції при збільшенні масштабів виробництва однакові в обох фірм і є постійними. Розглядається така гра з параметрами $p_0, c, 0.5 p_0 < c < p_0$:

$$i = 2, X_1 = X_2 = [0, 0.5 p_0],$$

$$H_i(x_1, x_2) = (p_0 - (x_1 + x_2)) x_i - c x_i, i = \{1, 2\}.$$

Оскільки $H = H_1 + H_2 = -x^2 + (p_0 - c)x$, $x = x_1 + x_2$, то максимальний загальний дохід

$$H^0 = 0.25 (p_0 - c)^2 \text{ при } x^0 = 0.25 (p_0 - c) \text{ є Парето - оптимальним. Гарантований виграш}$$

$$\alpha_i = \sup_{x_i} \inf_{x_j} H_i = \sup_{x_i} H_i(x_i, 0.5 p_0) = 0.$$

Таким чином, поділи утворюють довільний розподіл максимального сумарного доходу. Найкраща відповідь першого гравця: $x_1 = r_1(x_2) = 0.5 (p_0 - c) - 0.5 x_2$. Тоді

$$\gamma_2 = \sup_{x_2 \in [0, 0.5 p_0]} H_2(r_1(x_2), x_2) = \frac{1}{2} \sup_{x_2 \in [0, 0.5 p_0]} [(p_0 - c) x_2 - x_2^2] = \frac{1}{8} (p_0 - c)^2.$$

В силу симетрії: $\gamma_1 = \gamma_2$. Таким чином, виграш (γ_1, γ_2) відповідає деякому поділу і за теоремою 2.1 γ - ядро складається із одного елемента $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\frac{1}{4} (p_0 - c), \frac{1}{4} (p_0 - c))$,

що порівню розподіляє максимальний сумарний дохід. У цій грі γ - ядро є справедливою кооперативною ситуацією, що реалізується за допомогою природних погроз $r_j(x_i)$ •

§ 3. Ігри у характеристичній формі. C - ядро гри.

1.Характеристична форма кооперативної гри. У кооперативних іграх доцільно розглядати виграші не лише окремих гравців, і не лише для всієї спільноти $I = \{1, \dots, m\}$, але і для кожної не порожньої підмножини S (коаліції) із I .

Нехай I – множина можливих споживачів об'єкта колективного користування. Кожен споживач може або обслуговуватись, або ні. Витрати на обслуговування коаліції гравців S , $S \subseteq I$, підсумовуються у загальну функцію витрат $c(S) > 0$, де $c(S)$ – мінімальні витрати на обслуговування коаліції гравців S найбільш ефективним способом. Необхідно обслужити всіх гравців і поділити витрати між ними, тобто визначити вектор $x \in R^I$ такий, що

$$\sum_{i \in I} x_i = c(I).$$

Розглянемо типовий приклад такої проблеми з області капіталовкладень: побудова трьома сусідніми містами спільної системи водопостачання. Опишемо витрати на будівництво. Місто А окремо може вкласти в будівництво 120 одиниць, тобто $c(A) = 120$. Відповідно, $c(B) = 140$, $c(C) = 120$. Якщо міста об'єднують свої зусилля, то відповідно - $c(A,B) = 170$, $c(B,C) = 190$, $c(A,C) = 160$. Якщо ж проект буде реалізовуватись спільно всіма, то $c(A,B,C) = 225$.

Нехай про співпрацю домовились міста А і В. Тоді тоді економія витрат для них $\Delta c(A,B) = c(A) + c(B) - c(A,B) = 120 + 140 - 170 = 90$. Якщо міста А і В домовилися поділити економію $\Delta c(A,B) = 90$ порівну (егалітарне рішення), то остаточні витрати для них складуть $c_{-}(A) = 120 - 45 = 75$, $c_{-}(B) = 140 - 45 = 95$. Оскільки загальні витрати будуть рівними $c_{-}(A,B) + c(C) = 75 + 120 = 195$, то при раціональній поведінці всіх гравців їм потрібно кооперуватись, щоб мати витрати у 225 одиниць.

Нехай усі гравці співпрацюють. Тоді економія складе

$$\Delta c(A,B,C) = c(A) + c(B) + c(C) - c(A,B,C) = 125$$

і при егалітарному поділі остаточні витрати міст складуть

$$c(A) = 120 - \frac{125}{3} = 78\frac{1}{3}, c_{-}(B) = 140 - \frac{125}{3} = 98\frac{1}{3}, c_{-}(C) = 120 - \frac{125}{3} = 78\frac{1}{3}.$$

Хоча загальні витрати в цьому випадку менші за попередній варіант – 255, але "раціонально мислячі" А і В на нього не пристануть: вони несуть витрати $c_{-}(A) + c_{-}(B) = 176\frac{1}{3}$ більші, ніж у попередньому випадку $c(A,B) = 170$. Отже егалітарний принцип поділу спільної економії тут не підходить.

Позначимо через 2^I – сукупність усіх підмножин із I .

Означення 3.1. Характеристичною функцією гри m осіб називається відображення $v: 2^I \rightarrow R^1$ таке, що

$$v(\emptyset) = 0, \quad v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \quad \forall S, T \subseteq I, S \cap T = \emptyset \quad \bullet$$

Означення 3.2. Кооперативною грою в характеристичній формі називається пара (I, v) , де v – характеристична функція (виграшів) •

Коаліція гравців S називається власною, якщо S не співпадає з I . Між грою в нормальній формі $G = \{I, X_i, H_i, i \in I\}$ та грою у характеристичній формі (I, v) можна встановити такий зв'язок

$$v(S) = \max_{x_S \in X_S} \min_{x_{I \setminus S} \in X_{I \setminus S}} \sum_{i \in S} H_i(x_S, x_{I \setminus S}), S \subseteq I.$$

Означення 3.3. Поділом у грі в характеристичній формі (I, v) називається такий вектор

$x' = \{x_1, \dots, x_m\}$, що

a) $x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i \in I$ – умова індивідуальної гарантії,

b) $\sum_{i \in I} x_i = v(I)$ – умова колективної гарантії •

В означенні 3.3 умова а) означає, що гравець в результаті поділу отримає не менший виграш, чим він міг би його отримати і так, не домовляючись з іншими гравцями. Умова б) означає, що ділиться увесь можливий сумарний виграш.

В якості відображення v часто виступають витрати c , тобто (I, c) – кооперативна гра в характеристичній формі. Зауважимо лише, що для кооперативної гри (I, c) нерівність а) потрібно поміняти на зворотню.

Означення 3.4. Кооперативна гра в характеристичній формі (I, v) називається опуклою, якщо вона задовольняє одній із двох еквівалентних умов ($v(\emptyset) = 0$)

1) $\forall i \in I, \forall S, T \subseteq I \setminus \{i\}: S \subseteq T \rightarrow v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T)$;

2) $\forall S, T \subseteq I: v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$ •

2. С – ядро.

Означення 3.5. Нехай x та y – два поділи у грі в характеристичній формі (I, v) , а $S \subseteq I$ – деяка коаліція гравців. Будемо говорити, що поділ x домінує поділ y і позначати це через $x \gg y$, якщо

$$x_i > y_i \quad \forall i \in S \text{ та } \sum_{i \in S} x_i \leq v(S) \quad \bullet$$

Означення 3.6. C - ядром гри у характеристичній формі (I, v) (її розв'язком) називається множина всіх її недомінованих поділів •

Теорема 3.1. C - ядро кооперативної гри в характеристичній формі (I, v) є множина таких поділів, що

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall S \subseteq I \quad \bullet$$

Повернемося до нашого прикладу побудови системи водопостачання трьох міст. Знайдемо розподіл витрат із C - ядра гри (при такому розподілі, якщо він існує, будь - якій коаліції не вигідно відділятися.) Ядро визначається такими співвідношеннями

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 225, \quad x_1 \geq 120, \quad x_2 \geq 140, \quad x_3 \geq 120, \\ x_1 + x_2 &\geq 170, \quad x_2 + x_3 \geq 190, \quad x_1 + x_3 \geq 160. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для зручності побудови розв'язку системи (3.1) виконаємо заміну змінних $y_i = c_i - x_i$ (y_i - економія витрат гравців). У нових змінних система набуде вигляду

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= 125, \quad y_i \geq 0, \quad i = \{1, 2, 3\}, \\ y_1 + y_2 &\geq 90, \quad y_2 + y_3 \geq 70, \quad y_1 + y_3 \geq 80. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для знаходження розв'язків системи (3.2) скористаємось барицентричними координатами.

Означення 3.7. (Барицентричні координати.) Нехай на площині задано трикутник $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$, і нехай $M(m_1, m_2)$ – довільна точка, яка лежить в площині трикутника. Тоді її декартові координати m_i можна подати у вигляді

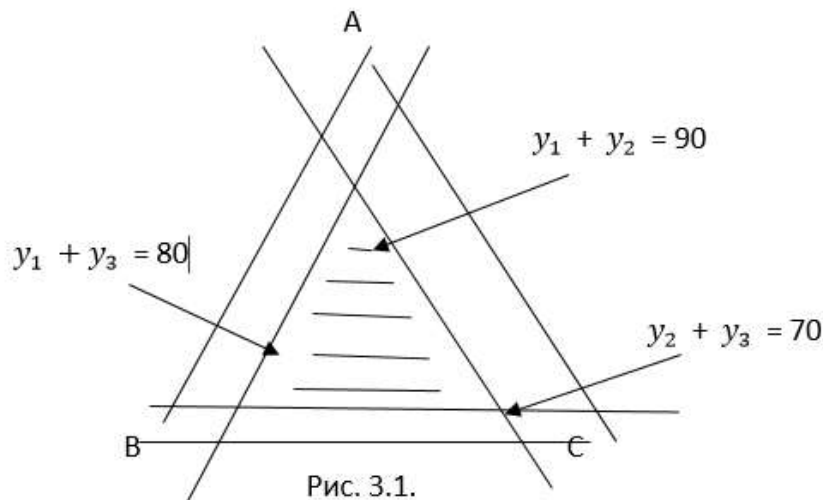
$$\begin{aligned} m_i &= x_1 a_i + x_2 b_i + x_3 c_i, \quad i = \{1, 2\}, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Вектор x при цьому називають барицентричними координатами точки M •

Згідно означення 3.7, виділимо на площині три точки, яким відповідають розв'язки системи (3.2)

$$(y_1, y_2, y_3) \in ((125, 0, 0), (0, 125, 0), (0, 0, 125)),$$

(відповідно до вершин трикутника ABC, (див. Рис. 3.1.))



Тоді рівнянню $y_1 + y_2 = 90$ буде відповідати пряма, паралельна стороні AB, $y_2 + y_3 = 70$ – паралельна стороні CB, $y_1 + y_3 = 80$ – паралельна стороні AC. Ядром гри будуть точки заштрихованого трикутника. В якості єдиного розв'язку гри варто взяти центр цього трикутника (центр описаного кола) – егалітарний розв'язок $(y^*)' = (51\frac{2}{3}, 41\frac{2}{3}, 31\frac{2}{3})$. В старих координатах будемо мати $(x^*)' = (68\frac{1}{3}, 98\frac{1}{3}, 88\frac{1}{3})$.

Зауважимо, що C - ядро кооперативної гри може бути порожнім. Зокрема, у випадку гри трьох осіб непорожнє C - ядро може бути відрізком або многокутником (не більше шести кутів).

Приклад 3.1. Розглянемо наступну ігрову ситуацію. Деякому торговцю картинами попало до рук рідке полотно, яке він оцінює не менше, ніж в a_1 у. о. Він хоче продати картину одному із своїх знайомих галеристів, які оцінюють картину в a_2 та a_3 у. о. відповідно, причому $a_1 < a_2 < a_3$. Якщо торговець ні з ким не домовиться, то він лишається при своїх, тобто $v(\{1\}) = a_1$. Галеристи ні окремо, ні разом картиною оволодіти не можуть, тобто $v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0$. Якщо торговець домовиться щодо продажу картини з другим галеристом, то картина буде продана не менше, ніж за a_3 у. о. Аналогічно, при угоді між торгівцем і першим галеристом, картина буде продана не менше, ніж за a_2 у. о. Потрібно знайти C - ядро цієї гри.

Запишемо характеристичну функцію цієї гри

$$v(\{1\}) = a_1, \quad v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0, \quad v(\{1,2\}) = a_2, \quad v(\{1,3\}) = a_3, \quad v(\{1,2,3\}) = a_3.$$

Поділом тут буде вектор $x' = (x_1, x_2, x_3)$, який задовольняє умовам

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a_3, \\ x_1 &\geq a_1, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Перша умова означає, що поділи лежать в одній площині (див. Рис. 3.2.) , а інші описують многокутник в цій площині (див. Рис. 3.3.)

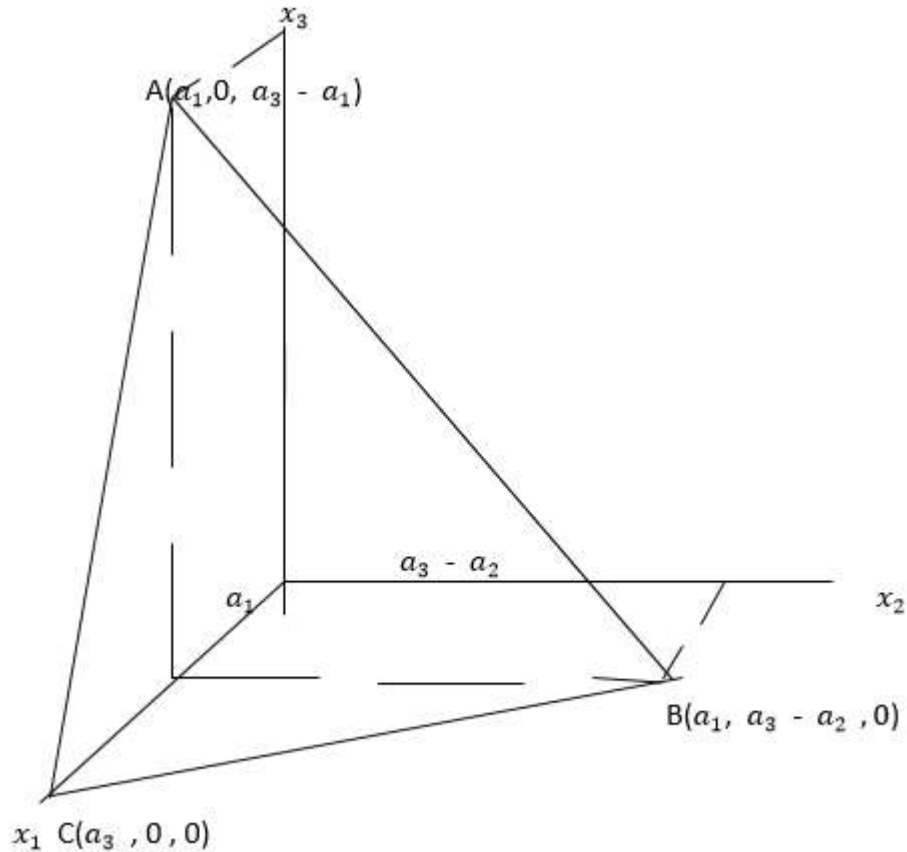


Рис.3. 2.

Застосовуючи критерій C - ядра, отримаємо систему нерівностей

$$\begin{aligned} S = \{1,2\}: x_1 + x_2 &\geq a_2 \rightarrow x_3 = a_3 - (x_1 + x_2) \leq a_3 - a_2, \\ S = \{1,3\}: x_1 + x_3 &\geq a_3 \rightarrow x_2 = a_3 - (x_1 + x_3) \leq a_3 - a_3 = 0, \\ S = \{2,3\}: x_2 + x_3 &\geq 0 \rightarrow x_1 = a_3 - x_2 - x_3 \leq a_3 - 0 = a_3. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо (див. Рис.3.3.), що

$$C = \{x: \rightarrow x_2 = 0, a_2 \leq x_1 \leq a_3, x_3 = a_3 - x_1\}.$$

Таким чином, продавець продав картину за довільну суму $\alpha \in [a_2, a_3]$. Другий галерист купив картину за суму, яка менша за початкову суму купівлі – a_3 . Перший галерист взагалі не приймає участі у поділі. Але якби його не було взагалі, то продавець би отримав суму – a_3 , яку б сплатив йому другий галерист. Наявність конкуренції привела до того, що продавець отримав менше, ніж міг би, а другий галерист сплатив меншу суму, ніж при відсутності конкуренції (поділ згідно C - ядра) •

Далі зупинимось на умовах непорожності C - ядра.

Означення 3.8. Збалансованим покриттям множини гравців I є таке відображення δ_S із $2^I \setminus I$ (множини власних коаліцій) у $[0,1]$, що $\sum_{S:i \in S} \delta_S = 1$, де сума береться по всіх власних коаліціях, яким належить гравець i •

Теорема 3.2. C - ядро гри не порожнє тоді і тільки тоді, коли для будь - якого збалансованого покриття δ

$$\begin{aligned} \sum_{S \in I} \delta_S v(S) &\leq v(I) \quad \text{— для вигравів (прибутків),} \\ &\text{або} \\ \sum_{S \in I} \delta_S c(S) &\geq c(I) \quad \text{— для витрат (збитків)} \quad \bullet \end{aligned} \quad (3.3)$$

Умови (3.3) називаються збалансованістю гри (I, v) $((I, c))$ та змістовно вони означають для першої гри, що кооперативні виграші $v(S)$ власних коаліцій не повинні бути занадто великими порівняно з $v(I)$. Зокрема, для трьох гравців із того, що поділ $x \in C$, отримаємо

$$\begin{aligned} x_i &\geq v(\{i\}), i = \{1, 2, 3\}, \\ x_1 + x_2 &\geq v(\{1, 2\}), x_2 + x_3 \geq v(\{2, 3\}), x_1 + x_3 \geq v(\{1, 3\}), \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq v(\{1, 2, 3\}). \end{aligned}$$

Зауважимо, коли $C = \emptyset$, можна використовувати інші поняття розв'язку кооперативної гри, зокрема, NM - розв'язок (за Нейманом - Моргенштерном). Ми тут його зачіпати не будемо.

§ 4. Вектор Шеплі. N - ядро гри.

1. Вектор Шеплі. Розглянемо вибір поділу, що відповідає принципу утилітаризму. У ньому доля прибутку кожного гравця в поділі $\sum_{i=1}^m x_i = v(I)$ залежить від його "внеску" у прибуток кожної коаліції, тобто від величини $v(S \cup i) - v(S)$, $i \notin S$ (прибуток коаліції S з гравцем i та без нього - "маргінальний прибуток").

Означення 4.1. Для гри (I, v) вектором Шеплі σ називається наступний поділ прибутку максимальної коаліції $v(I)$

$$\sigma_i = \sum_{0 \leq s \leq m-1} \frac{s!(m-s-1)!}{m!} \sum_{S \subset I, |S|=s} (v(S \cup i) - v(S)), i = \{1, \dots, m\}, v(\emptyset) = 0 \quad (4.1)$$

Формула (4.1) має таке змістовне пояснення. Нехай гравці із I упорядковані $(i_1, \dots, i_m)$ випадково з рівною ймовірністю для кожного упорядкування. Вага внеску i -го гравця в коаліцію S відповідає ймовірності того, що у черзі $(i_1, \dots, i_m)$ перед ним у точності стоять гравці із коаліції S . Ця ймовірність, очевидно, буде дорівнювати $\frac{s!(m-s-1)!}{m!}$, $s = |S|$.

Перевіримо рівність $\sum_{i=1}^m \sigma_i = v(I)$, використовуючи формулу (4.1). Зафіксуємо деяку власну коаліцію S , $s = |S|$. Тоді коефіцієнт при $v(S)$ буде дорівнювати

$$s \frac{(s-1)!(m-(s-1)-1)!}{m!} - (m-s) \frac{s!(m-s-1)!}{m!} = 0,$$

а коефіцієнт при $v(I)$

$$m \frac{(m-1)!(0)!}{m!} = 1.$$

Для гри (I, c) у формулах (4.1) потрібно замінити v на c . Для гри (I, v) із трьох осіб формули (4.1) дають

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{3} v(1) + \frac{1}{6}((v(1,2) - v(2)) + (v(1,3) - v(3)) + \frac{1}{3}(v(I) - v(2,3))) = \frac{1}{3} v(I) + \frac{1}{6}(v(1,2) + v(1,3) - \\ &\quad - 2 v(2,3)) + \frac{1}{6}(2 v(1) - v(2) - v(3)), \\ \sigma_2 &= \frac{1}{3} v(2) + \frac{1}{6}((v(1,2) - v(1)) + (v(2,3) - v(3)) + \frac{1}{3}(v(I) - v(1,3))) = \frac{1}{3} v(I) + \frac{1}{6}(v(1,2) + v(2,3) - \\ &\quad - 2 v(1,3)) + \frac{1}{6}(2 v(2) - v(1) - v(3)), \\ \sigma_3 &= \frac{1}{3} v(1) + \frac{1}{6}((v(1,2) - v(1)) + (v(2,3) - v(3)) + \frac{1}{3}(v(I) - v(1,3))) = \frac{1}{3} v(I) + \frac{1}{6}(v(1,3) + v(2,3) - \\ &\quad - 2 v(1,2)) + \frac{1}{6}(2 v(3) - v(1) - v(2)). \end{aligned}$$

Для прикладу 3.1 попереднього параграфа отримаємо компоненти вектора Шеплі:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{3} a_3 + \frac{1}{6}(a_2 + a_3) + \frac{1}{6} 2 a_1 = \frac{3a_3 + a_2 + 2 a_1}{6}, \\ \sigma_2 &= \frac{a_2 - a_1}{6}, \quad \sigma_3 = \frac{3a_3 - 2a_2 - a_1}{6}. \end{aligned}$$

Очевидно, що в цьому випадку вектор Шеплі не належить C - ядру. До речі і в прикладі про розподіл витрат щодо побудови системи водопостачання (див. початок попереднього параграфа)

будемо мати $\sigma' = (73\frac{1}{3}, 98\frac{1}{3}, 83\frac{1}{3})$. Цей розподіл витрат ядру не належить в силу того, що $\sigma_1 + \sigma_2 = 171\frac{2}{3} > 170$. В цьому випадку за єдиний розв'язок задачі можна взяти проекцію вектора Шаплі на C -ядро. Зокрема, в задачі про покупку картини, це буде такий розподіл

$$(a_2, 0, a_3 - a_2), \text{ якщо } Z(a_2) < Z(a_3), \text{ або } (a_3, 0, 0), \text{ якщо } Z(a_3) < Z(a_2),$$

де

$$Z^2(\alpha) = (a_3 \alpha - \frac{3a_3 + a_2 + 2a_1}{6})^2 + ((a_3 - a_2)(1 - \alpha) - \frac{3a_3 - 2a_2 - a_1}{6})^2.$$

Існує клас ігор, в яких вектор Шеплі завжди належить непорожньому C -ядру – це опуклі ігри.

Лема 4.1. Нехай (I, v) – опукла гра, $I = \{i_1, \dots, i_m\}$ – деяке розташування гравців. Тоді вектор маргінальних внесків $x_{i_k} = v(i_1, \dots, i_k) - v(i_1, \dots, i_{k-1})$ належить ядру гри •

Тоді і вектор Шеплі буде належати C -ядру гри. Справедливе і обернене твердження – якщо всі вектори маргінальних внесків належать ядру, то гра є опуклою.

В опуклих іграх вектор Шеплі займає "центральне положення", оскільки ядро опуклої гри є опуклою оболонкою векторів маргінальних внесків. Тоді вектор Шеплі може бути охарактеризованим наступним чином.

Означення 4.2. Оператор значення гри (I, v) є відображення $F: R^{2^m} \rightarrow R^m$, що ставить у відповідність кожній грі (I, v) розподіл $F(v)$ величини $v(I)$:

$$\sum_{i \in I} F_i(v) = v(I) \bullet$$

Означення 4.3. Оператор значення гри (I, v) задовольняє "аксіому анонімності," якщо він комутує з перестановкою гравців, тобто для довільної бієкції τ множини I у себе і $\forall v \in R^{2^m}$ має місце рівність

$$\tau(F(v)) = F(\tau(v)),$$

де

$$\tau(v)(S) = F(\tau(v)), S \subset I; \tau(x)_i = x_{\tau(i)} \forall x \in R^m \bullet$$

Означення 4.4. Оператор значення гри (I, v) задовольняє "аксіому адитивності," якщо

$$F(v + \omega) = F(v) + F(\omega) \forall v, \omega \in R^{2^m} \bullet$$

Означення 4.5. Оператор значення гри (I, v) задовольняє "аксіому бовдура," якщо $\forall i \in I, v \in R^{2^m}$:

$$\{v(S \cup i) = v(S) \forall S \subset I | i\} \rightarrow F_i(v) = 0 \bullet$$

Теорема 4.1. (Шеплі, 1953). Існує лише один оператор F , який задовольняє аксіомам анонімності, адитивності і бовдура. Це - вектор Шеплі •

Повернемось до принципу егалітаризму у виборі розподілу кооперативної гри. Перший крок – виділення ядра. Другий – знаходження "егалітарного" розподілу з ядра.

Означення 4.6. Лексимінний оптимум $\gamma = \{\gamma_i\}_{i \in I}$ на множині векторів

$$e(x) = (e(x, S) = \sum_{i \in S} x_i - v(S))_{S \subset I}$$

таких, що

$$\sum_{i=1}^m x_i = v(I),$$

називається N - ядром гри (I, v) •

Величина $e(x, S)$ називається ексцесом, це по суті "наддохід" коаліції S порівняно з її власними можливостями. Ексцеси різних коаліцій порівнюються егалітарно. У першу чергу, розглядається мінімальний прибуток, який максимізується. Вектор ексцесів $e(\gamma)$ максимізує на множині розподілів x ,

$$\sum_{i=1}^m x_i = v(I),$$

егалітарну функцію колективної корисності за умови, що корисність кожної коаліції вимірюється її ексцесом

$$\min_{S \subset I} (\sum_{i \in S} \gamma_i - v(S)) = \max_{x: \sum_{i \in I} x_i = v(I)} \min_{S \subset I} (\sum_{i \in S} x_i - v(S)). \quad (4.2)$$

Далі серед розв'язків (4.2) N - ядро вибирає такий розподіл, при якому максимального значення досягає другий за мінімальністю коаліційний прибуток. Насамперед цей процес приводить до єдиного розподілу, який і буде N - ядром.

Серйозним недоліком N - ядра є його немонотонність відносно до прибутку максимальної коаліції. Якщо деякі гравці "страждають" унаслідок покращення загальної ситуації, то вони можуть відмовитись від участі в максимальній коаліції (якщо при зростанні бюджету прибуток деяких членів суспільства падає, то вони будуть не зацікавленими в його зростанні, тобто покращенні добробуту всього суспільства в цілому.)

Таким чином, використання принципу "справедливості" в розподілі благ приводить у наслідок цього до "несправедливості" у їх утриманні. Точніше, має місце така лема.

Лема 4.2. Нехай I має не менше дев'яти гравців. Тоді існують дві такі гри (I, v) і (I, ω) : $v(I) < \omega(I)$, $v(S) < \omega(S) \quad \forall S \subset I$, що для деякого гравця і можлива нерівність $\gamma_i > \mu_i$, де γ_i, μ_i – компоненти N - ядер відповідно ігор (I, v) і (I, ω) .

Алгоритм пошуку N - ядра.

Крок 1. Нехай $\aleph^{(1)}$ – множина всіх власних коаліцій I . Знайдемо максимум функції

$$\min_{S \subset \aleph^{(1)}} e(x, S)$$

на множині векторів, що задовольняють рівності

$$\sum_{i \in I} x_i = v(I).$$

N - ядро належить розв'язку цієї задачі. За допомогою допоміжної змінної ω ця задача зводиться до такої задачі лінійного програмування

$$\omega \rightarrow \max,$$

$$e(x, S) = \sum_{i \in S} x_i - v(S) \geq \omega, \quad S \subset \aleph^{(1)}, \quad \sum_{i=1}^m x_i = v(I). \quad (4.3)$$

Розв'язку задачі (4.3) $(x^{(1)}, \omega^{(1)})$ відповідає сідлова точка $(x^{(1)}, \omega^{(1)}, \lambda^{(1)}, \mu^{(1)})$ функції Лагранжа

$$L = \omega + \sum_{S \in \aleph^{(1)}} \lambda_S (\sum_{i \in S} x_i - v(S) - \omega) + \mu (\sum_{i=1}^m x_i - v(I)) = (1 - \sum_{S \in \aleph^{(1)}} \lambda_S) \omega + \sum_{i \in I} (\sum_{S \in \aleph^{(1)}} \lambda_S + \mu) x_i - \sum_{S \in \aleph^{(1)}} \lambda_S v(S) - \mu v(I),$$

де множник Лагранжа $\lambda_S \geq 0, S \in \aleph^{(1)}$, а множник Лагранжа $\mu \in R^1$.

Знайдена сідлова точка задовольняє, з другого боку, принципу Лагранжа. Тоді

$$\sum_{S \in \aleph^{(1)}} \lambda_{S^{(1)}} = 1,$$

тобто множина $X^{(1)} = \{S \in \aleph^{(1)}: \lambda_{S^{(1)}} > 0\}$ – не порожня. Із умов додаткової нежорсткості принципу Лагранжа будемо мати

$$X^{(1)} = \{S \in \aleph^{(1)}: \sum_{i \in S} x_i^{(1)} - v(S) = \omega^{(1)}\}.$$

Покладемо

$$\aleph^{(2)} = \aleph^{(1)} \setminus X^{(1)} = \{S \in \aleph^{(1)}: \sum_{i \in S} x_i^{(1)} - v(S) > \omega^{(1)}\}$$

і розглянемо систему рівнянь

$$e(x, S) = \sum_{i \in S} x_i - v(S) = \omega^{(1)}, \quad S \subset X^{(1)}. \quad (4.4)$$

Якщо ранг системи (4.4) буде дорівнювати m , то її розв'язок $x^{(1)}$ і буде N - ядром і алгоритм припиняє роботу. Якщо ж він менший за m , тобто дорівнює $m_1 < m$, то система (4.4) має безліч розв'язків, які можна задати у вигляді

$$x_j^{(1)} = b_j^{(1)} + \sum_{k=m_1+1}^m a_{j,k}^{(1)} x_k, \quad j = \{1, \dots, m_1\}. \quad (4.5)$$

Крок 2. Розв'язуємо задачу лінійного програмування

$$\omega \rightarrow \max,$$

$$e(x, S) = \sum_{i \in S} x_i - v^{(1)}(S) \geq \omega, \quad S \subset \mathbb{N}^{(2)}, \quad \sum_{i=m_1+1}^m x_i = v^{(1)}(I). \quad (4.6)$$

Розв'язку задачі (4.6) $(x^{(2)}, \omega^{(2)})$ відповідає сідлова точка $(x^{(2)}, \omega^{(2)}, \lambda^{(2)}, \mu^{(2)})$ функції Лагранжа

$$L = \omega + \sum_{S \in \mathbb{N}^{(2)}} \lambda_S (\sum_{i \in S} x_i - v^{(1)}(S) - \omega) + \mu (\sum_{i \in I^{(1)}} x_i - v^{(1)}(I)) = (1 - \sum_{S \in \mathbb{N}^{(2)}} \lambda_S) \omega + \sum_{i \in I^{(1)}} (\sum_{S \in \mathbb{N}^{(2)}} \lambda_S + \mu) x_i - \sum_{S \in \mathbb{N}^{(2)}} \lambda_S v^{(1)}(S) - \mu v^{(1)}(I),$$

де множник Лагранжа $\lambda_S \geq 0, S \in \mathbb{N}^{(2)}$, а множник Лагранжа $\mu \in \mathbb{R}^1$.

Знайдена сідлова точка задовольняє принципу Лагранжа. Тоді

$$\sum_{S \in \mathbb{N}^{(2)}} \lambda_{S^{(2)}} = 1,$$

тобто множина $X^{(2)} = \{S \in \mathbb{N}^{(2)}: \lambda_{S^{(2)}} > 0\}$ – не порожня. Із умов додаткової нежорсткості принципу Лагранжа будемо мати

$$X^{(2)} = \{S \in \mathbb{N}^{(2)}: \sum_{i \in S} x_i^{(2)} - v^{(1)}(S) = \omega^{(1)}\}.$$

Покладемо

$$\mathbb{N}^{(3)} = \mathbb{N}^{(2)} \setminus X^{(2)} = \{S \in \mathbb{N}^{(1)}: \sum_{i \in S} x_i^{(2)} - v^{(1)}(S) > \omega^{(2)}\}$$

і розглянемо систему рівнянь

$$e(x, S) = \sum_{i \in S} x_i - v^{(1)}(S) = \omega^{(2)}, \quad S \subset X^{(2)}. \quad (4.7)$$

Якщо ранг системи (4.7) буде дорівнювати $m - m_1$, то її розв'язок $x^{(2)}$ разом із розв'язком (4.5) і буде N -ядром, і алгоритм припиняє роботу. Якщо ж він менший за $m - m_1$, тобто дорівнює $m_2 < m - m_1$, то система (4.7) має безліч розв'язків, які можна задати у вигляді

$$x_j^{(2)} = b_j^{(2)} + \sum_{k=m_2+1}^m a_{j,k}^{(2)} x_k, \quad j = \{m_1 + 1, \dots, m_2\}. \quad (4.8)$$

Далі алгоритм повторюється з очевидними змінами до вичерпання всіх x_i .

Приклад 4.1. Знайти N -ядро у грі трьох осіб з характеристичною функцією: $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0, v(\{1,2\}) = 0.6, v(\{1,3\}) = 0.7, v(\{2,3\}) = 0.8, v(\{1,2,3\}) = 1$.

Відповідно до наведеного вище алгоритму, розв'яжемо задачу лінійного програмування (4.3):

$$\omega \rightarrow \max,$$

$$e(x, \{1,2\}) = x_1 + x_2 - 0.6 \geq \omega, \quad (4.9)$$

$$e(x, \{1,3\}) = x_1 + x_3 - 0.7 \geq \omega, \quad (4.10)$$

$$e(x, \{2,3\}) = x_2 + x_3 - 0.8 \geq \omega, \quad (4.11)$$

$$e(x, \{1\}) = x_1 \geq \omega, \quad e(x, \{2\}) = x_2 \geq \omega, \quad e(x, \{3\}) = x_3 \geq \omega, \quad (4.12)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1. \quad (4.13)$$

Вектор $(x^{(1)}, \omega^{(1)}) = (\frac{7}{30}, \frac{1}{3}, \frac{13}{30}, -\frac{1}{30})$ буде розв'язком цієї задачі. Обмеження (4.9) - (4.11) будуть виконуватись як рівності. Тоді вектор $(\frac{7}{30}, \frac{1}{3}, \frac{13}{30}) - N$ - ядро гри •

Задачі до розділу 4.

1. Знайти α -ядро гри двох осіб.

$$1.1. X_1 = [0,1], \quad X_2 = [0,0.5],$$

$$H_1 = x_1 - 2x_1x_2 - 2x_1^2,$$

$$H_2 = 2x_2 - 2x_1x_2 - 3x_2^2.$$

$$1.2. X_1 = [0, \frac{3}{2}], \quad X_2 = [0, \frac{1}{2}],$$

$$H_1 = x_1 - 2x_1x_2 - 3x_1^2,$$

$$H_2 = 3x_2 - 2x_1x_2 - 3x_2^2.$$

2. Знайти β - ядро гри двох осіб.

$$2.1. X_1 = [0,4], \quad X_2 = [0,5],$$

$$H_1 = 5x_1 - 2x_1x_2 - 2x_1^2,$$

$$H_2 = 2x_2 - 2x_1x_2 - 3x_2^2.$$

$$2.2. X_1 = [0,2], \quad X_2 = [0,4],$$

$$H_1 = 4x_1 - 2x_1x_2 - 3x_1^2,$$

$$H_2 = 2x_2 - 2x_1x_2 - 3x_2^2.$$

3. Знайти N - ядро у грі трьох осіб з характеристичною функцією:

$$3.1. v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0, v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 4, v(\{2,3\}) = 5, v(\{1,2,3\}) = 6.$$

$$3.2. v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0, v(\{1,2\}) = 0.5, v(\{1,3\}) = 0.6, v(\{2,3\}) = 0.7, v(\{1,2,3\}) = 1.$$

$$3.3. v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0, v(\{1,2\}) = 0.7, v(\{1,3\}) = 0.9, v(\{2,3\}) = 0.7, v(\{1,2,3\}) = 1.$$

$$3.4. v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0, v(\{1,2\}) = 0.5, v(\{1,3\}) = 0.8, v(\{2,3\}) = 0.8, v(\{1,2,3\}) = 1.$$

4. Знайти вектор Шеплі кооперативної гри трьох осіб з характеристичною функцією:

$$4.1. v(\{1\}) = 2, v(\{2\}) = 3, v(\{3\}) = 3, v(\{1,2\}) = 6, v(\{1,3\}) = 6, v(\{2,3\}) = 7, v(\{1,2,3\}) = 10.$$

$$4.2. v(\{1\}) = 1, v(\{2\}) = 2, v(\{3\}) = 3, v(\{1,2\}) = 5, v(\{1,3\}) = 4, v(\{2,3\}) = 6, v(\{1,2,3\}) = 8.$$

$$4.3. v(\{1\}) = 3, v(\{2\}) = 2, v(\{3\}) = 1, v(\{1,2\}) = 5, v(\{1,3\}) = 7, v(\{2,3\}) = 5, v(\{1,2,3\}) = 10.$$

$$4.4. v(\{1\}) = 2, v(\{2\}) = 4, v(\{3\}) = 3, v(\{1,2\}) = 6, v(\{1,3\}) = 6, v(\{2,3\}) = 8, v(\{1,2,3\}) = 10.$$

ЧАСТИНА 2. Неокласичні нескінченновимірні моделі економічних задач.

В даній частині розглядається теорія оптимального керування як математичний апарат для побудови та дослідження оптимізаційних динамічних економічних моделей. Порівняно зі статичними моделями, які розглядалися в першій частині, в екстремальних динамічних моделях обмеження на ендогенні змінні можуть носити як локальний (поточковий по часу), так і глобальний (визначений для всього часового інтервалу) характер. Показники діяльності економічних агентів характеризуються функціоналами (критеріями якості), які визначені на траєкторіях ендогенних змінних. Розглядаються лише моделі з одним критерієм якості. Динамічний варіант векторних моделей (див. розділ 2 частини 1) не розглядається в силу того, що методом згортки він зводиться до однокритеріальної моделі.

Розділ 1. Програмні оптимальні керування динамічними системами.

В цьому розділі наводиться формалізація задач оптимального керування, формулюються принципи керування та побудовано модель оптимального економічного зростання замкнутої економіки при простих припущеннях. Для оптимізаційних економічних динамічних моделей наведено необхідні умови оптимальності у формі принципу максимуму як основного методу, який дозволяє отримати програмні керування "підозрілі на оптимальність". Принцип

максимуму був відкритий в середині 20 - го сторіччя групою московських математиків на чолі з академіком Л.С. Понтрягіним. Доведено варіант принципу максимуму для одного класу задач оптимального керування. Проведено застосування принципу максимуму для низки методичних прикладів. Розглянуто особливі керування для задач, в яких принцип максимуму не дозволяє отримати оптимальні керування. Для таких моделей отримано умови оптимальності в розширеному варіанті. Наведено зв'язок принципу максимуму з варіаційним численням. Розв'язано задачу оптимального економічного зростання замкнутої економіки.

§ 1. Формалізація задач оптимального керування. Принципи керування.

1. Рівняння еволюції системи. Нехай стан економічного процесу в момент часу $t \in [t_0, T]$ описується набором показників у вигляді вектора $x'(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in R^n$ і може змінюватись під впливом вектора керувань $u'(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t)) \in R^r$, тобто набору параметрів, на які впливає дослідник. Припустимо, що вектор $x(t)$ задовольняє системі звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) = f_i(t, x_1, \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)), \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.1)$$

В рівняннях (1.1) вектор керувань $u(t)$ при фіксованому $t \in [t_0, T]$ приймає значення із деякої відкритої чи замкнутої області $U \subseteq R^r$.

Часто систему (1.1) доповнюють початковими умовами

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.2)$$

Припустимо, що: 1) функції f_i в (1.1) та їх другі похідні по функціональним аргументам – неперервні по сукупності всіх аргументів: 2) допустимі керування – кусково неперервні функції з кінцевим числом розривів першого роду.

При цих припущеннях кожному допустимому керуванню $u(t)$ відповідає єдиний розв'язок задачі Коші (1.1) – (1.2), який поточно задовольняє рівнянням $\forall t \in (t_0, T]$ крім точок розриву керувань, і називається *траєкторією керованої системи*.

2. Обмеження на траєкторії та керування. Обмеження на вектори $x(t)$, $u(t)$ можуть бути як функціональними, так і точковими. До функціональних обмежень належать обмеження вигляду

$$J_j(x, u) = \int_{t_0}^T g_j(t, x(t), u(t)) dt + \varphi_j(x(t_0), x(T)) \leq 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1.3)$$

де функції $g_j(\cdot), \varphi_j(\cdot)$ по гладкості такі ж, як і функції $f_i(\cdot)$, що застосовуються для опису динаміки процесу.

При цьому кажуть, що функціонали, які знаходяться в лівих частинах нерівностей (53), визначені на парі $(x(t), u(t))$.

До точкових обмежень належать обмеження вигляду

$$\Phi(x(t), u(t)) \in \Omega(t), \quad t \in [t_1, t_2] \subset [t_0, T], \quad (1.4)$$

де $\Phi(\cdot)$ – деяка однозначна векторна функція розмірності l , $\Omega(t)$ – множина із R^l .

Зауважимо, що випадок $u(t) \in U$ охоплюється включенням (1.4).

3. Критерії оптимальності (ефективності). Нехай для пари $(x(t), u(t))$ виконуються умови (53) – (54). Тоді таку пару будемо називати *допустимим процесом*. Зрозуміло, що таких пар може бути багато. В якості критерія оптимальності оберемо наступний функціонал

$$J_0(x, u) = \int_{t_0}^T f_0(t, x(t), u(t)) dt + \varphi_0(x(t_0), x(T)), \quad (1.5)$$

де функції $f_0(\cdot), \varphi_0(\cdot)$ по гладкості такі ж, як і відповідні функції в (1.3).

Припустимо, що потрібно знайти таке керування, яке на траєкторіях системи (1.1) – (1.2) з обмеженнями (1.3) – (1.4) доставляє критерію (1.5) найменше або найбільше значення. Якщо

таке керування існує, то пару $(x_*(t), u_*(t))$ будемо називати оптимальною: $u_*(t)$ – *оптимальне керування*, $x_*(t)$ – *оптимальна траєкторія*. Такі задачі складають сутність теорії оптимального керування. Далі, в силу частини 1, будемо розглядати лише задачі на пошук таких керувань, при яких критерій ефективності буде приймати найменше значення.

4. Принципи керування. Для динамічних процесів (не обов'язково оптимальних) існує два принципа керування: *програмне керування*, *керування з оберненим зв'язком або синтез*.

Програмне керування (Рис. 1.1). Нехай якимсь чином вдалося побудувати керування в задачі (1.1) – (1.2), (1.3) – (1.5) у вигляді функції $u = u(t)$, яка залежить від параметрів вихідної задачі і початкових умов. Ця функція є "входом" для об'єкту керування (ОК), а "виходом" для нього буде траєкторія $x(t)$. В цій схемі всякі зміни в початкових умовах моделі (1.1) – (1.2), (1.3) – (1.5) приводять до необхідності перерахування вектора керування $u(t)$.

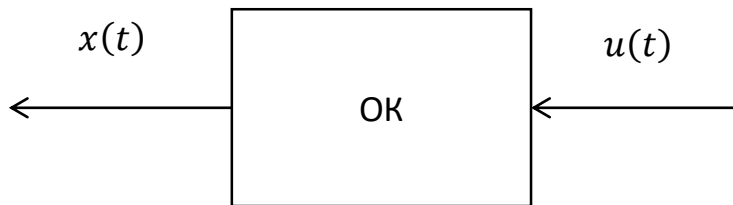


Рис. 1.1

Керування з оберненим зв'язком (Рис. 1.2). Нехай в задачі (1.1) – (1.2), (1.3) – (1.5) вдалось знайти керування у вигляді функції $u = u[t, x(t)]$, яка залежить від параметрів вихідної задачі і не залежить від початкових умов. В описаній схемі на відміну від схеми програмного керування присутній керуючий пристрій (КП), за допомогою якого формується функція керування: на "виході" ОК вимірюється в момент часу t вектор $x(t)$ і подається на "вхід" КП, який перетворює цей вектор у вектор керувань. При цьому керування не буде залежати від початкових умов, тобто їх зміна не приведе до необхідності перерахування вектора керувань.

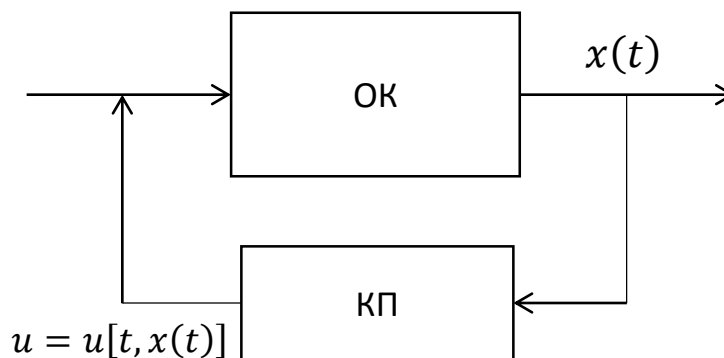


Рис. 1.2

Для практичних задач керування з оберненим зв'язком є більш привабливим, але задача пошуку функції, яка реалізує КП, являється набагато важчою від задачі пошуку програмного керування. Для оптимальних систем із керування з оберненим зв'язком при фіксованих початкових умовах однозначно визначається програмне керування, але із програмного керування визначити функцію, що реалізує КП, можна лише у виключних випадках.

5. Модель оптимального економічного зростання. Історія моделей економічного росту була започаткована в 30 - і роки ХХ - го століття англійським економістом Ф. Рамсеєм. Він досліджував

агреговану закриту економіку, тобто економіку, що виробляє єдиний однорідний продукт і в якій відсутні як імпорт, так і експорт. Ця модель послужила основою для багатьох узагальнень, які на сьогодні об'єднані в окремий клас моделей економічного та оптимального економічного росту.

Нехай економічна система в момент часу $t \in [t_0, T], t_0 \geq 0, T < \infty$, характеризується набором макропоказників $(K(t), L(t), Y(t), I(t), C(t))$, де $K(t)$ – капітал, $L(t)$ – трудові ресурси, $Y(t)$ – валовий випуск продукції, $I(t)$ – інвестиції, $C(t)$ – невиробниче споживання.

Крім того будемо вважати, що виконуються такі припущення:

1) у початковий момент часу відомі значення $K(t_0) = K^0, L(t_0) = L^0$, а трудові ресурси змінюються згідно з законом

$$L(t) = L^0 \exp(\eta(t - t_0)), \quad (1.6)$$

де η – заданий річний темп приросту кількості зайнятих;

2) в кінцевий момент часу задається економічно обґрунтований рівень капіталу

$$K(T) \geq K^1 > 0; \quad (1.7)$$

3) задається темп $\mu > 0$ амортизації капіталу (виробничих фондів), тобто амортизаційні витрати

$$A(t) = \mu K(t); \quad (1.8)$$

4) валовий випуск продукції Y залежить від капіталу K та трудових ресурсів L і описується невід'ємною двічі неперервно диференційованою виробничою функцією $Y = F(K, L)$, яка задовольняє умовам

$$F(0, L) = F(K, 0) = F(0, 0) = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial K} > 0, \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} > 0, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial L^2} < 0, \quad (1.11)$$

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L), \lambda > 0, \quad (1.12)$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} F(K, L) = \infty, \lim_{L \rightarrow \infty} F(K, L) = \infty, \quad (1.13)$$

$$\lim_{K \rightarrow 0} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = \infty, \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = \infty, \quad (1.14)$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = 0, \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = 0; \quad (1.15)$$

5) валовий випуск Y витрачається на невиробниче споживання C та інвестиції I , тобто

$$Y(t) = C(t) + I(t); \quad (1.16)$$

6) інвестиції I витрачаються на чисті інвестиції $\hat{I}$ та амортизаційні відрахування A , тобто

$$I(t) = \hat{I}(t) + A(t); \quad (1.17)$$

7) чисті інвестиції дорівнюють похідній по капіталу, тобто

$$\hat{I}(t) = \frac{dK(t)}{dt}; \quad (1.18)$$

8) параметром керування економічним ростом обирається норма накопичення капіталу

$$s(t) = \frac{I(t)}{Y(t)}, \quad (1.19)$$

де $s(t) \in [0, 1]$;

9) критерієм ефективного функціонування економіки на проміжку часу $[t_0, T]$ являється

максимізація "сумарного" питомого споживання

$$J\left(\frac{C}{L}\right) = \int_{t_0}^T \exp(-\sigma(t - t_0)) \frac{C(t)}{L(t)} dt, \quad (1.20)$$

де $\sigma > 0$ – задана норма дисконтування.

На основі введених припущень отримаємо модель економічного росту

$$I(t) = s(t) Y(t), \quad (1.21)$$

$$C(t) = (1 - s(t)) Y(t), \quad (1.22)$$

$$\dot{K}(t) = \dot{I}(t) = Y(t) - C(t) - A(t) = s(t) F(K(t), L(t)) - \mu K(t). \quad (1.23)$$

Тоді модель оптимального економічного росту буде мати вигляд

$$\max_{s(t) \in [0,1]} \int_{t_0}^T \exp(-\sigma(t - t_0)) \frac{C(t)}{L(t)} dt,$$

$$\dot{K}(t) = s(t) F(K(t), L(t)) - \mu K(t),$$

$$K(t_0) = K^0, K(T) \geq K^1. \quad (1.24)$$

У дослідженнях економічної динаміки зручнішою ніж модель (1.24), яка записана в абсолютних показниках, вважається еквівалентна їй модель, записана у відносних показниках:

$k(t) = K(t)/L(t)$ – фондоозброєність, $c(t) = C(t)/L(t)$ – питома невиробниче споживання, $y(t) = Y(t)/L(t)$ – продуктивність праці, $i(t) = I(t)/L(t)$ – питомі інвестиції.

В силу того, що виробнича функція є лінійно однорідною (див. (1.12)), отримаємо

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{1}{L(t)} L(t) F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) = \tilde{F}\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) = f(k(t)),$$

$$c(t) = (1 - s(t)) f(k(t)),$$

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{K(t)}{L(t)} \right) = \frac{\dot{K}(t)L(t) - K(t)\dot{L}(t)}{L^2(t)} = \\ &= \frac{(s(t) F(K(t), L(t)) - \mu K(t))L(t) - K(t)\eta L(t)}{L^2(t)} = \\ &= s(t) f(k(t)) - (\eta + \mu) k(t). \end{aligned}$$

При цьому неокласична однофакторна виробнича функція $f(k)$, згідно умов (1.9) – (1.15), має такі властивості

$$f(0) = 0, f'(k) > 0, f''(k) < 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \infty, \lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0.$$

Тоді модель оптимального економічного росту в питомих показниках буде мати вигляд

$$\max_{s(t) \in [0,1]} \int_{t_0}^T \exp(-\sigma(t - t_0)) (1 - s(t)) f(k(t)) dt,$$

$$\dot{k}(t) = s(t) f(k(t)) - (\eta + \mu) k(t),$$

$$k(t_0) = k^0, k(T) \geq k^1. \quad (1.25)$$

§ 2. Умови оптимальності для динамічних задач оптимального керування.

1. Необхідні умови оптимальності у формі принципу максимуму для задачі з фіксованими крайовими умовами і нефіксованим часом. Нехай керований процес описується рівняннями (1.1) – (1.2) і задані дійсні числа $x_i^1, i = \overline{1, n}$ та скалярна функція $f_0(t, x_1, \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t))$ з такими ж властивостями, що і функції f_i .

Задача оптимального керування полягає в наступному: знайти таке допустиме керування $u(t) \in U$, щоб відповідний розв'язок задачі (1.1) – (1.2) задовольняв умови

$$x_i(T) = x_i^1, i = \overline{1, n}, \quad (2.1)$$

а функціонал

$$J(u) = \int_{t_0}^T f_0(t, x_1, \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)) dt \quad (2.2)$$

приймає найменше можливе значення. При цьому момент часу $t = T > t_0$ вважається невизначеним.

Припускаємо, що задача оптимального керування (1.1) – (1.2), (2.1) – (2.2) має розв'язок $(u_*(t), x_*(t))$ – оптимальну пару. Для його характеристики введемо функцію Гамільтона

$$H(x, u, \psi_0, \psi, t) = \psi_0 f_0(t, x, u) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(t, x, u), \quad (2.3)$$

де ψ_0 – дійсне число, вектор спряжених змінних $\psi(t)$ задовольняє однорідній системі диференціальних рівнянь

$$\dot{\psi}_i = - \frac{\partial H(x, u, \psi_0, \psi, t)}{\partial x_i}, i = \overline{1, n}. \quad (2.4)$$

Якщо $\psi_0 \neq 0$, то задача (1.1) – (1.2), (2.1) – (2.2) називається регулярною.

Теорема 2.1 (Принцип максимуму). Нехай $(u_*(t), x_*(t))$ – оптимальна пара в задачі (1.1) – (1.2), (2.1) – (2.2). Тоді з необхідністю існують такі число $\psi_{0,*} \leq 0$ та вектор - функція $\psi_*(t)$, для яких виконуються умови:

- 1) $|\psi_{0,*}| + \sum_{i=1}^n |\psi_{i,*}(t)| \neq 0 \forall t \in [t_0, T]$;
- 2) вектор - функції $x_*(t), \psi_*(t), u_*(t)$ задовольняють умовам (1.1) – (1.2), (2.1), (2.4);
- 3) функція $H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t)$ як функція змінної v досягає максимального значення при $v = u_*(t)$ при всіх $t \in [t_0, T]$ крім точок розриву $u_*(t)$, тобто

$$H(x_*(t), u_*(t), \psi_{0,*}, \psi_*(t), t) (=) \max_{v \in U} H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t); \quad (2.5)$$

4)

$$H(x_*(T), u_*(T), \psi_{0,*}, \psi_*(T), T) = 0 \quad (2.6)$$

Зауваження 2.1. Якщо в задачі (1.1) – (1.2), (2.1) – (2.2) час T фіксований, то умова 4) теореми 2.1 є зайвою.

Доведення теореми 2.1 тут наводити не будемо, а дамо аналіз її умов з точки зору практичної побудови оптимального керування.

Функція Гамільтона є однорідною першого ступеня однорідності функцією відносно числа ψ_0 та спряженої вектор - функції $\psi(t)$: $H(x, u, \gamma\psi_0, \gamma\psi, t) = \gamma H(x, u, \psi_0, \psi, t) \forall \gamma \neq 0$. Тому

$$\max_{v \in U} H(x, v, \alpha\psi_0, \alpha\psi, t) = \alpha \max_{v \in U} H(x, v, \psi_0, \psi, t),$$

$$u(\alpha\psi_0, \alpha\psi, t) = u(\psi_0, \psi, t) \forall \alpha > 0,$$

де $u(\psi_0, \psi, t)$ – керування, на якому досягає максимуму функція H .

Звідси витікає, що теорема 2.1 визначає величини $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ з точністю до додатного множника і ми можемо обирати його на свій розсуд. На практиці з урахуванням умови 1) часто покладають

$$|\psi_0| + \sum_{i=1}^n |\psi_i(\bar{t})| = 1, \quad (2.7)$$

де $\bar{t} \in [t_0, T]$ – деякий фіксований момент часу.

Якщо задача регулярна, то замість (2.7) беруть $\psi_0 = -1$.

Із умови 3) теореми визначаємо керування

$$u = u(x, \psi_0, \psi, t) \in U. \quad (2.8)$$

У ряді випадків функція (1.33) може бути виписана у явному вигляді. Наприклад, якщо

$$f_l(t, x, u) = f_l^1(t, x) + \sum_{i=1}^r f_l^{2i}(t, x) u_i, \quad l = \overline{0, n},$$

$$U = \{u \in R^n: \alpha_i \leq u_i \beta_i, \quad i = \overline{1, r}\},$$

де α_i, β_i – задані числа, то

$$H(x, u, \psi_0, \psi, t) = \sum_{l=0}^n \psi_l f_l^1(t, x) + \sum_{i=1}^r (\sum_{l=0}^n \psi_l(t) f_l^{2i}(t, x)) u_i.$$

Тоді очевидно, що функція $H(x, u, \psi_0, \psi, t)$ досягає максимуму в точці $u = u(\psi_0, \psi, t)$ з координатами

$$u_i = \begin{cases} \beta_i, & \sum_{l=0}^n \psi_l(t) f_l^{2i}(t, x) > 0; \\ \alpha_i, & \sum_{l=0}^n \psi_l(t) f_l^{2i}(t, x) < 0, \quad i = \overline{1, r}. \end{cases}$$

Ця формула дає достатньо багато інформації щодо структури оптимального керування: i – а координата оптимального керування є кусково постійною функцією зі значеннями α_i чи β_i , а точки переключення визначаються умовою $\sum_{l=0}^n \psi_l(t) f_l^{2i}(t, x) = 0$.

Звернемо увагу на випадок, коли на деякому проміжку часу $[\alpha, \beta] \subset [t_0, T]$ виконується умова $\sum_{l=0}^n \psi_l(t) f_l^{2i}(t, x) \equiv 0$. Тоді функція H на цьому проміжку не залежить від u_i , а умова 3) теореми перестає бути інформативною. Такі керування називаються особливими. Аналіз особливих керувань буде наведено пізніше.

Припустимо, що функція (1.33) уже відома. Розглянемо систему диференціальних рівнянь порядку $2n$

$$\dot{x}_i = f_i(t, x(t), u(x(t), \psi_0, \psi(t), t)),$$

$$\dot{\psi}_i = -\partial H(x(t), u(\psi_0, \psi(t), t)) / \partial x_i, \quad i = \overline{1, r}. \quad (2.9)$$

Розв'язки цієї системи залежать від $2n$ постійних. Крім того, нам невідомо ще два числа: ψ_0 та T . Таким чином, для визначення $2(n+1)$ невідомих ми маємо $2n$ крайових умов (1.2), (2.1), умову нормування (2.7) та умову 4) теореми, тобто $2(n+1)$ рівнянь.

Припустимо, що із наведених вище умов нам вдалося знайти числа ψ_0, T та вектор - функції $x(t), \psi(t)$, $t \in [t_0, T]$. Тоді функція (2.8) набуває вигляду

$$u(t) = u(x(t), \psi_0, \psi(t), t) \in U. \quad (2.10)$$

Нехай ця функція виявилась кусково неперервною. По побудові вона задовольняє умову 3) теореми 2.1 і може претендувати на роль оптимального керування в задачі (1.1) – (1.2), (2.1) – (2.2), а функція $x(t)$, $t \in [t_0, T]$ – на роль оптимальної траєкторії в цій задачі. Чи буде знайдена пара $(u(t), x(t))$, $t \in [t_0, T]$ дійсно розв'язком задачі задачі (1.1) – (1.2), (2.1) – (2.2) теорема 2.1 не гарантує в силу того, що вона дає лише необхідні умови оптимальності. Більше того, нижче на прикладах ми переконаємось в тому, що пара $(u(t), x(t))$, $t \in [t_0, T]$ може задовольняти умовам теореми 2.1, але не бути розв'язком задачі задачі (1.1) – (1.2), (2.1) – (2.2). Якщо ж із деяких міркувань відомо, що задача вихідна задача оптимального керування має розв'язок, а із умов (1.2), (2.1), (2.7) та умови 4) теореми 2.1 однозначно визначаються числа ψ_0, T та вектор - функції $x(t), \psi(t)$, $t \in [t_0, T]$, то керування (2.10) буде оптимальним. Якщо ж інформація щодо існування розв'язку задачі (1.1) – (1.2), (2.1) – (2.2) відсутня, або умовам

теореми задовольняють декілька керувань, то для з'ясування їх оптимальності потрібно проводити додаткові дослідження.

Таким чином, ми описали схему застосування теореми 2.1 для отримання розв'язку задачі (1.1) – (1.2), (2.1) – (2.2), яка зводиться до спеціальної крайової задачі принципу максимуму. Ця задача включає: умову максимуму 3) теореми 2.1, крайову задачу (2.9), (1.2), (2.1), умову нормування (2.7) та умову 4) теореми 2.1.

Для ілюстрації наведеного вище розглянемо приклади.

2. Методичні приклади.

Приклад 2.1. Нехай

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = x(T) = 0, \quad U = R^1.$$

Потрібно знайти керування $u(t)$, яке мінімізує критерій якості

$$J(u) = \int_0^T (x^2(t) + u^2(t)) dt,$$

де $0 < T$ – фіксоване число.

Це частинний випадок задачі (1.1) – (1.2), (2.1) – (2.2), якщо прийняти $t_0 = 0$, $n = r = 1$, $x_1^0 = x_1^1 = 0$.

Очевидно, що $\inf_{v \in U} J(v) = 0$ і досягається ця нижня границя при $u_*(t) = x_*(t) = 0$ і ця оптимальна пара єдина: функціонал є строго опуклим.

Застосування теореми 2.1 з урахуванням зауваження 2.1 до виписаної вище задачі оптимального керування повинно привести до того ж результату.

Функція Гамільтона буде мати вигляд

$$H(x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)) = \psi_0(x^2(t) + u^2(t)) + \psi(t) u(t),$$

де спряжена функція визначається із рівняння

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial H}{\partial x} = - 2\psi_0 x(t).$$

Припустимо, що $\psi_0 = 0$. Тоді $\psi(t) = C = \text{const}$ і $\lim_{l \rightarrow \infty} \max_{v \in [-l, l]} H = \infty$, $C \neq 0$, тобто

умова 3) теореми виконується лише при $\psi(t) = 0$, що суперечить умові 1) теореми. Тому покладемо $\psi_0 = -0.5$. Із умови 3) отримаємо $u(t) = \psi(t)$. В цій точці функція H досягає свого максимального значення в силу нерівності

$$\frac{\partial^2 H(\cdot)}{\partial u^2} = -1 < 0.$$

Система (2.9) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \psi(t), \\ \dot{\psi}(t) = x(t). \end{cases}$$

Ця система еквівалентна рівнянню

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} - x(t) = 0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд $x(t) = C_1 \exp(t) + C_2 \exp(-t)$. Крайові умови для $x(t)$ приводять до однорідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 \exp(T) + C_2 \exp(-T) = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї системи $\Delta = -\text{sh}(T)/2 \neq 0$. Тому $x_*(t) = \psi_*(t) = u_*(t) = 0$ •

Приклад 2.2. В прикладі 2.1 змінимо лише критерій якості: потрібно знайти керування $u(t)$, яке мінімізує критерій якості

$$J(u) = \int_0^T (u^2(t) - x^2(t)) dt,$$

де $0 < T$ – фіксоване число.

Існування розв'язку в цій задачі ми гарантувати не можемо. Тому формально застосуємо до неї теорему 2.1.

Функція Гамільтона тепер буде мати вигляд

$$H(x(t), u(t), \psi_0, \psi(t)) = \psi_0(u^2(t)) - x^2(t) + \psi(t) u(t),$$

де спряжена функція визначається із рівняння

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial H}{\partial x} = 2\psi_0 x(t).$$

Припустимо, що $\psi_0 = 0$. Тоді $\psi(t) = C = \text{const}$ і $\lim_{l \rightarrow \infty} \max_{v \in [-l, l]} H = \infty$, $C \neq 0$, тобто умова 3) теореми виконується лише при $\psi(t) = 0$, що суперечить умові 1) теореми. Тому покладемо $\psi_0 = -0.5$. Із умови 3) отримаємо $u(t) = \psi(t)$. В цій точці функція H досягає свого максимального значення в силу нерівності

$$\frac{\partial^2 H(\cdot)}{\partial u^2} = -1 < 0.$$

Система (2.9) тепер має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \psi(t), \\ \dot{\psi}(t) = -x(t). \end{cases}$$

Ця система еквівалентна рівнянню

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + x(t) = 0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд $x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Крайові умови для $x(t)$ приводять до рівностей $C_2 = 0, C_1 \sin T = 0$. Якщо число T таке, що $\sin T \neq 0$, то $C_1 = 0$ і $x(t) = \psi(t) = u(t) = 0$, $t \in [0, T]$, тобто пара $(0, 0)$ задовольняє умовам теореми 2.1. Якщо $\sin T = 0$, тобто $T = k\pi$, де k – додатне ціле число, то однопараметрична пара $u(t) = C_1 \cos t$, $x(t) = C_1 \sin t$ теж задовольняє умовам теореми 2.1.

Чи будуть знайдені керування оптимальними? Виявляється, що відповідь на це питання залежить від значення числа T .

1) Нехай $T > \pi$. Покажемо, що $\inf_u J(u) = -\infty$. З цією метою розглянемо дві послідовності функцій: $u_m(t) = \frac{m\pi}{T} \cos \frac{\pi t}{T}$, $x_m(t) = m \sin \frac{\pi t}{T}$. Вони задовольняють рівнянню $\dot{x}(t) = u(t)$ та крайовим умовам $x(0) = x(1) = 0$. Обчислимо на елементах цих послідовностей значення критерію якості

$$\begin{aligned} J(u_m) &= \int_0^T (u_m^2(t) - x_m^2(t)) dt = m^2 \int_0^T \left(\frac{\pi^2}{T^2} \cos^2 \frac{\pi t}{T} - \sin^2 \frac{\pi t}{T} \right) dt = \\ &= \frac{m^2 T}{2} \left(\frac{\pi^2}{T^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Звідси отримаємо $\inf_u J(u) = -\infty$, тобто задача оптимального керування розв'язку не має, але умовам оптимальності задовольняє однопараметричне сімейство функцій $u(t) = C_1 \cos t$, $x(t) = C_1 \sin t$.

2) Нехай $T \leq \pi$. Для подальшого аналізу проведемо над критерієм якості деякі тотожні перетворення, звівши його до інтегралу від квадрату деякої функції:

$$J(u) = \int_0^T (u^2(t) - x^2(t)) dt = \int_0^T (u^2(t) + \text{ctg}^2 t x^2(t) - \frac{x^2(t)}{\sin^2 t}) dt =$$

$$= \int_0^T (u^2(t) + \text{ctg}^2 t x^2(t) - 2x(t)u(t)\text{ctg} t) dt = \int_0^T (u(t) - x(t)\text{ctg} t)^2 dt.$$

Зауважимо, що наведені вище перетворення справедливі: всі підінтегральні функції обмежені

при $t \in (0, T)$; $\lim_{t \rightarrow 0+} x^2(t) \operatorname{ctgt} = \lim_{T \rightarrow \pi-} x^2(t) \operatorname{ctgt} = 0$.

Таким чином, при $T < \pi$ пара $(0, 0)$ є єдиним оптимальним розв'язком вихідної задачі. При $T = \pi$ вихідна задача має безліч розв'язків $u_*(t) = C_1 \cos t$, $x_*(t) = C_1 \sin t$ і всі ці розв'язки одержані із умов оптимальності у вигляді принципу максимуму •

Приклад 2.3. (Оптимальна швидкодія). Нехай точка рухається вздовж осі Ox згідно закону Ньютона

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = u(t), \quad t \geq 0. \quad (2.11)$$

Потрібно знайти таке кусково неперервне керування $u(t)$: $|u(t)| \leq 1$, $t \in [0, T]$, щоб точка з координатами $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$ за найменший час досягла координат $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Покладемо $x_1(t) = x(t), x_2(t) = \dot{x}(t)$. Тоді рівняння (2.11) буде еквівалентним системі

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t). \end{cases}$$

Складемо функцію Гамільтона $H = \psi_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u$. Тоді спряжена система буде мати вигляд

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1.$$

Звідси отримаємо $\psi_1(t) = C$, $\psi_2(t) = -Ct + D$, де C, D – довільні постійні. Із умови 3) теореми 2.1 витікає, що $u(t) = \operatorname{sign} \psi_2(t) = \operatorname{sign}(-Ct + D)$, $t \geq 0$. Таким чином, оптимальне керування (якщо воно існує) є кусково постійною функцією, яка приймає значення ± 1 і має не більше однієї точки переключення $t_1 \in (0, T)$, при перетині якої функція $u(t)$ змінює знак. Можливі такі варіанти поведінки керування: 1) $u(t) = -1$, $t \in [0, T]$; 2) $u(t) = 1$, $t \in [0, T]$; 3) $u(t) = 1$, $t \in [0, t_1)$, $u(t) = -1$, $t \in [t_1, T]$; 4) $u(t) = -1$, $t \in [0, t_1)$, $u(t) = 1$, $t \in [t_1, T]$. Розглянемо ці випадки.

1)

$$x_1(t) = -\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2, \quad x_2(t) = -t + C_1.$$

Із краєвих умов будемо мати $C_2 = 1, C_1 = 0$, тобто $x_1(t) = -0.5t^2 + 1, x_2(t) = -t$. Ні при яких $T > 0$ неможливі рівності $-0.5T^2 + 1 = -T = 0$.

2)

$$x_1(t) = \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2, \quad x_2(t) = t + C_1.$$

Із краєвих умов будемо мати $C_2 = 1, C_1 = 0$, тобто $x_1(t) = 0.5t^2 + 1, x_2(t) = t$. Ні при яких $T > 0$ неможливі рівності $0.5T^2 + 1 = T = 0$.

3)

$$x_1(t) = \begin{cases} 0.5t^2 + C_1 t + C_2, & 0 \leq t < t_1, \\ -0.5t^2 + \hat{C}_1 t + \hat{C}_2, & t_1 \leq t < T; \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} t + C_1, & 0 \leq t < t_1, \\ -t + \hat{C}_1, & t_1 \leq t < T. \end{cases}$$

Із краєвих умов та неперервності траєкторій будемо мати $C_2 = 1, C_1 = 0$,

$$\begin{cases} -0.5T^2 + \hat{C}_1 T + \hat{C}_2 = 0, \\ -T + \hat{C}_1 = 0, \\ 1 + t_1^2 = \hat{C}_1 t_1 + \hat{C}_2, \\ 2t_1 = \hat{C}_1. \end{cases}$$

Виписана вище система еквівалентна рівності $1 + 0.25T^2 = 0$, яка неможлива для дійсних

чисел.

4)

$$x_1(t) = \begin{cases} -0.5t^2 + C_1 t + C_2, & 0 \leq t < t_1, \\ 0.5t^2 + \hat{C}_1 t + \hat{C}_2, & t_1 \leq t < T; \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} -t + C_1, & 0 \leq t < t_1, \\ t + \hat{C}_1, & t_1 \leq t < T. \end{cases}$$

Із краєвих умов та неперервності траєкторій будемо мати $C_2 = 1, C_1 = 0$,

$$\begin{cases} 0.5T^2 + \hat{C}_1 T + \hat{C}_2 = 0, \\ T + \hat{C}_1 = 0, \\ 1 - t_1^2 = \hat{C}_1 t_1 + \hat{C}_2, \\ -2t_1 = \hat{C}_1. \end{cases}$$

Із цієї системи знаходимо, що $T = 2, t_1 = 1$.

Для задач малої фазової розмірності можна уникнути розгляду всіх варіантів поведінки керувань, які отримані із принципу максимуму. Для цього використаємо *метод фазового портрету*.

Нехай $u(t) = 1, t \in [0, T]$. Тоді вихідна система буде мати вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 1, t \in [0, T]. \end{cases}$$

Виключаючи стандартно час із цієї системи, отримаємо рівняння

$$\frac{dx_1}{dx_2} = x_2.$$

Останнє має загальний розв'язок у вигляді сім'ї парабол

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2} + C.$$

Через кожну точку фазової площини (див. Рис. 2.1) проходить лише одна така парабола при певному значенні постійної C . Із другого рівняння системи витікає, що координата x_2 зростає, а координата x_1 , згідно першого рівняння тієї ж системи веде себе наступним чином: при $x_2 < 0$ вона зменшується, при $x_2 > 0$ — збільшується. Таким чином, фазова точка рухається вздовж параболи знизу вгору, що відображено стрілками на рис. 2.1.

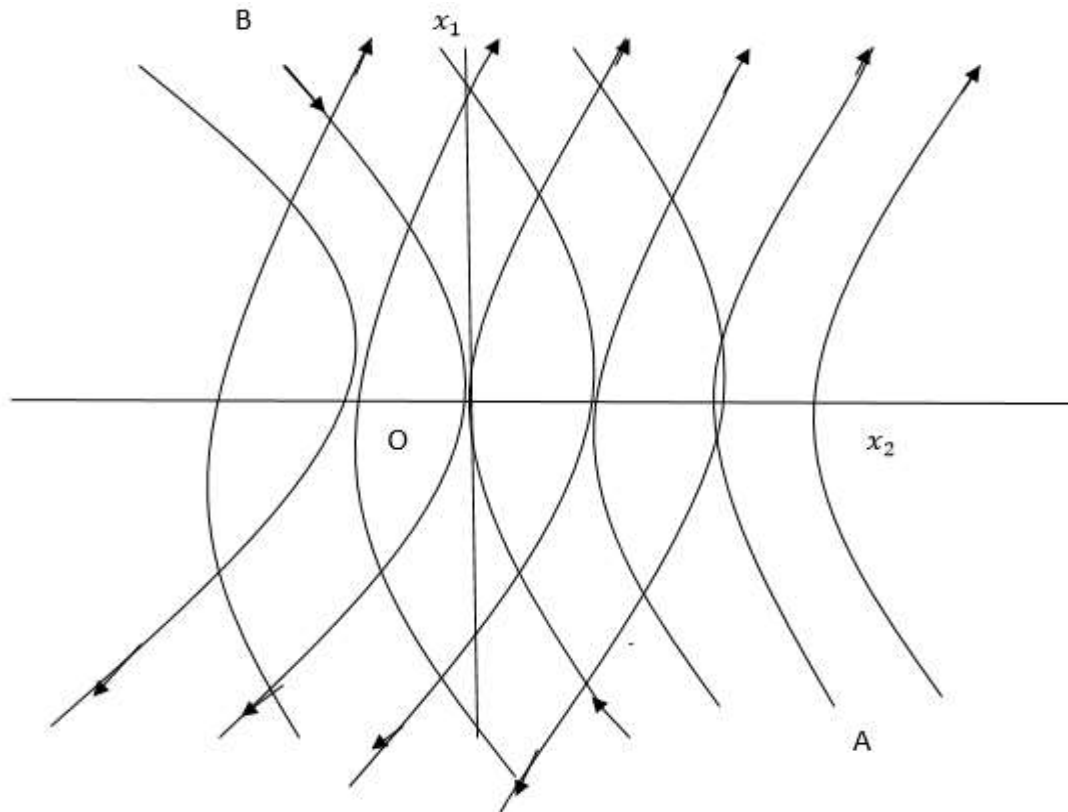


Рис. 2.1.

Нехай $u(t) = -1, t \in [0, T]$. Тоді вихідна система буде мати вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -1, t \in [0, T]. \end{cases}$$

Виключаючи час із цієї системи, отримаємо рівняння

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -x_2.$$

Останнє має загальний розв'язок у вигляді сім'ї парабол

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + D.$$

Міркуючи аналогічно попередньому випадку, приходимо до висновку, що фазова точка рухається вздовж відповідної параболи зверху до низу, що відображено стрілками на рис. 2.1.

Із рис. 2.1 витікає, що існує єдина крива AOB , вздовж якої фазова точка може потрапити в точку з координатами $(0,0)$. Повертаючись до умов прикладу, бачимо, що із точки з координатами $(1,0)$ можна потрапити в точку $(0,0)$, рухаючись спочатку вздовж параболи $x_1 = -x_2^2/2 + 1 (u = -1)$ до її перетину з параboloю $x_1 = x_2^2/2 (u = 1)$ і далі вздовж неї до моменту попадання в точку $(0,0)$.

Таким чином, ми зразу визначились із допустимим варіантом керування умов оптимальності - це буде варіант 4) із вище розглянутих варіантів.

Покажемо, що керування

$$u(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < 1, \\ 1, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

є оптимальним. Для цього припустимо, що існує кусково неперервне керування $|\hat{u}(t)| \leq 1$ і число $\theta < T = 2: \hat{x}_1(t) = \hat{x}_2(t), \hat{x}_2(t) = \hat{u}(t), \hat{x}_1(0) = 1, \hat{x}_2(0) = 0, \hat{x}_1(\theta) = \hat{x}_2(\theta) = 0$.

Розглянемо дві функції: $X(t) = -x_1(t) + x_2(t)(t - 1)$, $\hat{X}(t) = -\hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t)(t - 1)$. Тоді $\dot{X}(t) = u(t)(t - 1)$, $\dot{\hat{X}}(t) = \hat{u}(t)(t - 1)$, $X(0) = \hat{X}(0)$, $X(T) = \hat{X}(\theta) = 0$.

Очевидно, що $\dot{X}(t) = |t - 1|$. Враховуючи $|\hat{u}(t)| \leq 1$, отримаємо $\dot{X}(t) \geq |\dot{\hat{X}}(t)| \geq \dot{\hat{X}}(t)$. Інтегруючи отриману нерівність в межах від 0 до θ , отримаємо

$$\int_0^\theta \dot{X}(t) dt \geq \int_0^\theta \dot{\hat{X}}(t) dt$$

або

$$X(\theta) - X(0) \geq \hat{X}(\theta) - \hat{X}(0) \Rightarrow X(\theta) \geq 0.$$

З іншого боку,

$$-X(\theta) = X(T) - X(\theta) = \int_\theta^T \dot{X}(t) dt = \int_\theta^T |t - 1| dt > 0 \Rightarrow X(\theta) < 0,$$

що неможливо •

3. Принцип максимуму в задачах термінального керування. Доведення. Нехай в задачі оптимального керування (1.1) - (1.2), (2.1) - (2.2) час T фіксований, відсутнє обмеження (2.1), а замість критерію якості (2.2) розглядається функціонал

$$J(u) = \Phi(x(T)), \quad (2.12)$$

де функція Φ неперервна по всім аргументам разом із частинними похідними другого порядку.

Теорема 2.2. Для того щоб пара $(u_*(t), x_*(t))$ була оптимальною в задачі (1.1) - (1.2), (2.12), необхідно виконання умови максимуму

$$H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t) (=) \max_{v \in U} H(x_*(t), v, \psi_*(t), t), \quad (2.13)$$

де

$$H(x(t), u(t), \psi(t), t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(t, x(t), u(t)),$$

а функція $\psi'(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$ — не нульовий розв'язок задачі Коші

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{*,i}(t) &= - \frac{\partial H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t)}{\partial x_i}, \\ \psi_{*,i}(T) &= - \frac{\partial \Phi(x_*(T))}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Доведення. Керуванню $u_*(t)$ надамо таке мале прирощення $\delta u(t)$, що $u_*(t) + \delta u(t) \in U$. Позначимо через $\delta x(t)$ відповідний цьому прирощенню розв'язок задачі Коші (1.1) - (1.2), тобто

$$\delta \dot{x}(t) = f(t, x_*(t) + \delta x(t), u_*(t) + \delta u(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) = \delta f(t),$$

$$\delta x(t_0) = 0. \quad (2.15)$$

Очевидно, що

$$\delta J(u_*) = \Phi(x_*(T) + \delta x(T)) - \Phi(x_*(T)) \geq 0, \quad (2.16)$$

$$\int_{t_0}^T \psi'_*(t) (\delta \dot{x}(t) - \delta f(t)) dt = 0. \quad (2.17)$$

Використовуючи функцію Гамільтона, рівність (2.17) перепишемо у вигляді

$$\int_{t_0}^T (\psi'_*(t) \delta \dot{x}(t) - \delta H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t)) dt = 0, \quad (2.18)$$

де

$$\begin{aligned} \delta H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t) &= H(x_*(t) + \delta x(t), u_*(t) + \delta u(t), \psi_*(t), t) - \\ &- H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t). \end{aligned}$$

Враховуючи гладкість функцій $f_i, \Phi(x)$ та використовуючи формулу Тейлора, можемо записати

$$\delta H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t) = H(x_*(t), u_*(t) + \delta u(t), \psi_*(t), t) -$$

$$\begin{aligned}
& - H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t) + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial H(x_*(t), u_*(t) + \delta u(t), \psi_*(t), t)}{\partial x_i} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t)}{\partial x_i} \right] \delta x_i(t) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H(x_*(t) + \theta_1 \delta x(t), u_*(t), \psi_*(t), t)}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i(t) \delta x_j(t) + \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t)}{\partial x_i} \delta x_i(t), \theta_1 \in [0,1]; \tag{2.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta J(u_*) &= \Phi(x_*(T) + \delta x(T)) - \Phi(x_*(T)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(x_*(T))}{\partial x_i} \delta x_i(T) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \Phi(x_*(T) + \theta_2 \delta x(T))}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i(T) \delta x_j(T), \theta_2 \in [0,1]. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Інтегруючи частинами перший доданок в (2.18) та враховуючи систему із (2.4), будемо мати

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^T \psi'_*(t) \delta \dot{x}(t) dt &= \psi'_*(t) \delta x(t) \Big|_{t_0}^T - \int_{t_0}^T \dot{\psi}'_*(t) \delta x(t) dt = \\
&= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(x_*(T))}{\partial x_i} \delta x_i(T) + \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^n \frac{\partial H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t)}{\partial x_i} \delta x_i(t) dt. \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Із (2.16), враховуючи (2.17) – (2.21), отримаємо формулу

$$\begin{aligned}
\delta J(u_*) &= - \int_{t_0}^T [H(x_*(t), u_*(t) + \delta u(t), \psi_*(t), t) - \\
& - H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t)] dt + \eta, \tag{2.22}
\end{aligned}$$

де $\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$,

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= - \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial H(x_*(t), u_*(t) + \delta u(t), \psi_*(t), t)}{\partial x_i} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t)}{\partial x_i} \right] \delta x_i(t) dt, \\
\eta_2 &= - \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H(x_*(t) + \theta_1 \delta x(t), u_*(t), \psi_*(t), t)}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i(t) \delta x_j(t) dt. \\
\eta_3 &= - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \Phi(x_*(T) + \theta_2 \delta x(T))}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i(T) \delta x_j(T).
\end{aligned}$$

Припустимо, що теорема хибна. Тоді існує точка $\hat{u} \in U$ і момент часу $\hat{t} \in (t_0, T)$ такі, що для них умова (2.13) не виконується. В силу того, що керування $u_*(t)$ – кусково неперервна функція, а відповідна йому траєкторія $x_*(t)$ задачі (1.1) – (1.2) – неперервна функція, то можна вказати такі числа $\delta_i > 0$, $i = \overline{1,3}$, що виконується нерівність

$$H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t) - H(x_*(t), \hat{u}, \psi_*(t), t) < -\delta_3$$

для всіх $t \in I_\delta = (\hat{t} - \delta_1, \hat{t} + \delta_2) \subset [t_0, T]$. Зрозуміло, що числа δ_1, δ_2 можна брати довільно малими.

Збудуємо прирощення керування спеціального вигляду

$$\delta u_*(t) = \begin{cases} 0, & t \notin I_\delta, \\ \hat{u} - u_*(t), & t \in I_\delta, \end{cases}$$

яке будемо називати гольчатою варіацією оптимального керування.

Тоді будемо мати

$$\int_{t_0}^T [H(x_*(t), u_*(t) + \delta u_*(t), \psi_*(t), t) - H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t)] dt =$$

$$= \int_{I_\delta} [H(x_*(t), \hat{u}, \psi_*(t), t) - H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t)] dt > \delta_3(\delta_1 + \delta_2),$$

а із формули (2.20) отримаємо нерівність

$$\delta J(u_*) < -\delta_3(\delta_1 + \delta_2) + \hat{\eta}, \quad (2.23)$$

де $\hat{\eta} = \hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 + \hat{\eta}_3$ – залишковий член у формулі (2.23) при спеціальній варіації керування, тобто

$$\hat{\eta}_1 = - \int_{I_\delta} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial H(x_*(t), \hat{u}, \psi_*(t), t)}{\partial x_i} - \frac{\partial H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t)}{\partial x_i} \right] \delta \hat{x}_i(t) dt,$$

$$\hat{\eta}_2 = - \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H(x_*(t) + \theta_1 \delta \hat{x}(t), u_*(t), \psi_*(t), t)}{\partial x_i \partial x_j} \delta \hat{x}_i(t) \delta \hat{x}_j(t) dt,$$

$$\hat{\eta}_3 = - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \Phi(x_*(T) + \theta_2 \delta \hat{x}(T))}{\partial x_i \partial x_j} \delta \hat{x}_i(T) \delta \hat{x}_j(T).$$

У наведених вище формулах для залишків $\delta \hat{x}(t)$ – розв'язок задачі Коші (2.15), який відповідає спеціальній варіації керування.

В силу того, що функції f_i – двічі неперервно диференційовні по функціональним аргументам, існують такі постійні $N_j > 0$, $j = \overline{1,2}$, для яких

$$|f_i(t, x_*(t) + \delta \hat{x}(t), u_*(t) + \delta u_*(t)) - f_i(t, x_*(t), u_*(t))| \leq$$

$$\leq N_1 \sum_{k=1}^n |\delta \hat{x}_k(t)| + N_2 \sum_{l=1}^r |\delta u_{l,*}(t)|. \quad (2.24)$$

Тоді, інтегруючи задачу Коші (2.15) та використовуючи оцінки (2.24), отримаємо нерівність

$$\sum_{k=1}^n |\delta \hat{x}_k(t)| \leq n N_1 \int_{t_0}^t \sum_{k=1}^n |\delta \hat{x}_k(\tau)| d\tau + n N_2 \varepsilon \sum_{l=1}^r |\hat{u}_l|, \quad (2.25)$$

де $\varepsilon = \delta_1 + \delta_2$.

Далі використаємо лему Гронуолла - Беллмана, згідно якої, якщо невід'ємна неперервна функція $\varphi(t)$, $t \in [t_0, T]$ задовольняє нерівності

$$\varphi(t) \leq h \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau + M, \quad t \geq t_0,$$

де $h > 0$, $M > 0$,

то

$$\varphi(t) \leq M \exp(h(T - t)).$$

В силу того, що керування – кусково неперервні функції з розривами першого роду, в нерівності (2.25) можемо вважати

$$\sum_{l=1}^r |\hat{u}_l| \leq R < \infty.$$

Тоді, згідно леми Гронуолла - Беллмана, будемо мати

$$\sum_{k=1}^n |\delta \hat{x}_k(t)| \leq Q \varepsilon, \quad (2.26)$$

де $Q = n N_2 R \exp(n N_1(T - t_0))$.

Враховуючи, що функція Гамільтона – двічі неперервно диференційовна по аргументам x та u , отримаємо оцінки залишкових членів

$$|\hat{\eta}_1| \leq \int_{I_\delta} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial H(x_*(t), \hat{u}, \psi_*(t), t)}{\partial x_i} - \frac{\partial H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t)}{\partial x_i} \right| |\delta \hat{x}_i(t)| dt \leq$$

$$\leq Q_1 \varepsilon^2,$$

$$|\hat{\eta}_2| \leq \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial^2 H(x_*(t) + \theta_1 \delta \hat{x}(t), u_*(t), \psi_*(t), t)}{\partial x_i \partial x_j} \right| |\delta \hat{x}_i(t)| |\delta \hat{x}_j(t)| dt \leq$$

$$\leq Q_2 \varepsilon^2,$$

$$|\hat{\eta}_3| = \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial^2 \Phi(x_*(T) + \theta_2 \delta \hat{x}(T))}{\partial x_i \partial x_j} \right| |\delta \hat{x}_i(T)| |\delta \hat{x}_j(T)| \leq Q_3 \varepsilon^2,$$

де $Q_i, i = \overline{1,3}$ – визначені через наведені вище оцінки додатні постійні.

Тоді нерівність (2.22) набуде вигляду

$$\delta J(u_*) < -\delta_3 \varepsilon (1 - \omega \varepsilon), \quad (2.27)$$

де $\omega = (Q_1 + Q_2 + Q_3)/\delta_3$.

Оберемо тепер в нерівності (2.27) число ε настільки малим, щоб виконувалась нерівність $1 - \omega \varepsilon > 0$. Тоді $\delta J(u_*) < 0$, що неможливо в силу оптимальності керування $u_*(t)$.

Приклад 2.4. На розв'язках задачі Коші

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = x_0 \quad (2.28)$$

потрібно мінімізувати функціонал

$$J(u) = x^2(T), \quad |u(t)| \leq 1, \quad (2.29)$$

де x_0, T – фіксовані постійні, $T > 0$.

Сформульована задача завжди має розв'язок. Він задовольняє умовам оптимальності у формі теореми 2.2. Функція Гамільтона має вигляд

$$H = \psi(t) u(t), \quad (2.30)$$

а спряжена змінна є розв'язком задачі

$$\dot{\psi} = 0, \quad \psi(T) = -2x(T). \quad (2.31)$$

Розв'язок задачі (2.31) задається формулою

$$\psi(t) = -2x(T). \quad (2.32)$$

Із умови максимуму функції (2.30), враховуючи (2.29), отримаємо

$$u(t) = \begin{cases} 1, & x(T) < 0, \\ -1, & x(T) > 0. \end{cases} \quad (2.33)$$

При $u(t) = 1, t \in [0, T]$ розв'язок задачі (2.28) має вигляд

$$x(t) = t + x_0, \quad T + x_0 < 0. \quad (2.24)$$

При цьому критерій якості приймає вигляд

$$J(u) = (T + x_0)^2 \quad (2.25)$$

і $J(u) > 0$.

При $u(t) = -1, t \in [0, T]$ розв'язок задачі (2.28) має вигляд

$$x(t) = -t + x_0, \quad -T + x_0 > 0. \quad (2.26)$$

При цьому критерій якості приймає вигляд

$$J(u) = (-T + x_0)^2 \quad (2.27)$$

і $J(u) > 0$.

Розв'язок задачі Коші (2.28) при будь-якому допустимому керуванні задається формулою

$$x(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau + x_0.$$

Тоді критерій (2.29) набуде вигляду

$$J(u) = \left(\int_0^T u(\tau) d\tau + x_0 \right)^2.$$

Випадки допустимих керувань, при яких $J(u_*) > 0, u_*(t) = \pm 1, t \in [0, T]$, були розглянуті вище як наслідок застосування теореми 2.2.

У випадку відсутності обмежень на керування завжди існує таке кусково неперервне керування $\hat{u}(t)$, що

$$\inf_v J(v) = \left(\int_0^T \hat{u}(t) dt + x_0 \right)^2 = 0,$$

тобто $\hat{u}(t)$ є розв'язком рівняння

$$\int_0^T \hat{u}(t) dt + x_0 = 0. \quad (2.28)$$

Рівняння (2.28) має безліч розв'язків. Серед них будуть і розв'язки, які задовольняють умові

$|\hat{u}(t)| \leq 1$. Тоді $\hat{u}(t) = u_*(t)$. Дійсно, якщо $|x_0| < T$, то в класі постійних функцій $u_*(t) = -x_0/T$, в класі лінійних функцій $u_*(t) = a t + b, |b| \leq 1, a T + b \leq 1$. Зрозуміло, що такий перелік функцій можна продовжити.

Головне тут полягає в тому, що оптимальні розв'язки задачі (2.28) – (2.29), які є розв'язками системи (2.28), (2.31) не задовольняють теоремі 2.2 – $\psi(t) \equiv 0$. Вони відносяться до класу особливих розв'язків з точки зору принципу максимуму •

§ 3. Особливі оптимальні керування.

Для визначеності знову розглянемо задачу оптимального керування попереднього параграфу. Нехай $\hat{u}(t)$ – допустиме керування, яке задовольняє теоремі 2.2, де $\hat{\psi}(t)$ – довільний розв'язок задачі (2.14). Такі керування будемо називати екстремалами Понтрягіна.

Означення 3.1. Екстремаль Понтрягіна називається особливою, якщо існує така підмножина $\Omega(t), t \in [t_1, t_2] \subset [t_0, T]$ допустимих керувань, для яких виконується умова

$$H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{\psi}(t), t) (=) H(\hat{x}(t), v, \hat{\psi}(t), t) \quad \forall v \in \Omega(t) \quad \bullet$$

Для отримання умов оптимальності у випадку особливих керувань уведемо допоміжну функцію $F(x, t)$ наступним чином.

Нехай $u_*(t)$ – оптимальне керування, а $X(x, \tau, t)$ – відповідний розв'язок рівняння (1.1) – (1.2), який задовольняє умові

$$X(x, \tau, \tau) = x, \quad \tau \in [t_0, T]. \quad (3.1)$$

Тоді покладемо $F(x, t) = \Phi(X(x, t, T))$. Ця функція буде постійною вздовж оптимальної траєкторії задачі Коші (1.1) – (1.2). Тоді

$$\frac{dF}{dt} = \left(\frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \right)' f(t, x, u_*(t)) + \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} \equiv 0, \quad (3.2)$$

де

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \text{grad } F.$$

Далі позначимо

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{i,j=1}^n.$$

Тоді, диференціюючи тотожність (3.2) по x і покладаючи в отриманому результаті $x = x_*(t)$, будемо мати

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(x_*(t), t)}{\partial x^2} f(t, x_*(t), u_*(t)) + \frac{\partial^2 F(x_*, t)}{\partial t \partial x} + \\ \left(\frac{\partial f(t, x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right)' \frac{\partial F(x_*(t), t)}{\partial x} \equiv 0, \end{aligned}$$

або

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial F(x_*(t), t)}{\partial x} \right] = - \left(\frac{\partial f(t, x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right)' \frac{\partial F(x_*(t), t)}{\partial x}. \quad (3.3)$$

Уведемо функцію

$$\psi(t) = - \frac{\partial F(x_*(t), t)}{\partial x}.$$

Тоді, згідно з (3.3), ця функція задовольняє задачі Коші

$$\dot{\psi}_*(t) = - \frac{\partial H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t)}{\partial x}, \quad \psi_*(T) = - \frac{\partial \Phi(x_*(T))}{\partial x}. \quad (3.4)$$

Таким чином, ми отримали задачу для визначення спряженої змінної, яка співпадає з відповідною умовою теореми 2.2.

Разом з оптимальним керуванням $u_*(t)$ розглянемо допустиме керування вигляду

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u_*(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon] \\ v, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon], \end{cases} \quad (3.5)$$

де v — фіксований вектор із U , $\theta + \varepsilon \leq T$; ε досить мале додатне число.

Керування (3.5) визначає єдиний розв'язок задачі (1.1) – (1.2) $\tilde{x}(t)$ при $u = \tilde{u}(t)$. Очевидно, що $\tilde{x}(t) = x_*(t)$, $t \in [t_0, \theta]$.

Тоді прирощення критерію якості можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \delta J(u_*) &= F(\tilde{x}(\theta + \varepsilon), \theta + \varepsilon) - F(x_*(\theta + \varepsilon), \theta + \varepsilon) = \\ &= \left(\frac{\partial F(x_*(\theta + \varepsilon), \theta + \varepsilon)}{\partial x} \right)' \delta x(\theta + \varepsilon) + o_1(||\delta x(\theta + \varepsilon)||), \end{aligned} \quad (3.6)$$

де $\delta x = \tilde{x} - x_*$, $||\delta x||^2 = \sum_{i=1}^n (\delta x_i)^2$.

У (3.6) прирощення $\delta x(\theta + \varepsilon)$ можна представити у вигляді

$$\delta x(\theta + \varepsilon) = (\dot{\tilde{x}}(\theta) - \dot{x}_*(\theta))\varepsilon + o_2(\varepsilon) = \delta_v f(\theta, x_*(\theta), u_*(\theta))\varepsilon + o_2(\varepsilon),$$

де $\delta_v f(t, x_*(t), u_*(t)) = f(t, x_*(t), v) - f(t, x_*(t), u_*(t))$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = 0.$$

Тоді (3.6) буде мати вигляд

$$\delta J(u_*) = \left(\frac{\partial F(x_*(\theta), \theta)}{\partial x} \right)' \delta_v f(\theta, x_*(\theta), u_*(\theta))\varepsilon + o_3(\varepsilon) \geq 0, \quad (3.7)$$

де

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o_3(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = 0.$$

Із (3.7) силу довільності точок $\theta \in (t_0, T)$, $v \in U$ для оптимального керування необхідно виконання умови

$$\left(\frac{\partial F(x_*(t), t)}{\partial x} \right)' \delta_v f(t, x_*(t), u_*(t)) (\geq) 0, \quad (3.8)$$

або

$$\delta_v H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t) (\leq) 0, \quad (3.9)$$

що співпадає з умовою максимуму теореми 2.2. Зауважимо, що при цьому ми не вимагали щоб задача Коші (3.4) мала не нульові розв'язки.

Знайдемо необхідні умови оптимальності для особливих оптимальних керувань, використовуючи наведену вище техніку, засновану на тотожності (3.2). Для цього додатково припустимо, що функції $\Phi(x)$, $f(t, x, u)$ мають неперервні частинні похідні по x до третього порядку включно.

Диференціюючи тотожність (3.2) по x двічі і покладаючи в отриманому результаті $x = x_*(t)$, будемо мати

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^3 F(x_*(t), t)}{\partial x^3} f(t, x_*(t), u_*(t)) + \frac{\partial^3 F(x_*, t)}{\partial t \partial x^2} + \\ &+ \left(\frac{\partial f(t, x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right)' \frac{\partial^2 F(x_*(t), t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x_*(t), t)}{\partial x^2} \frac{\partial f(t, x_*(t), u_*(t))}{\partial x} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f(t, x_*(t), u_*(t))}{\partial x^2} \right)' \frac{\partial F(x_*(t), t)}{\partial x} \equiv 0, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial^2 F(x_*(t), t)}{\partial x^2} \right] &= - \left(\frac{\partial f(t, x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right)' \frac{\partial^2 F(x_*(t), t)}{\partial x^2} - \\ &- \frac{\partial^2 F(x_*(t), t)}{\partial x^2} \frac{\partial f(t, x_*(t), u_*(t))}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 f(t, x_*(t), u_*(t))}{\partial x^2} \right)' \frac{\partial F(x_*(t), t)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Уведемо матричну функцію

$$\bar{\Psi}_*(t) = - \frac{\partial^2 F(x_*(t), t)}{\partial x^2}.$$

Згідно (3.10), вона буде задовольняти задачі

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{\Psi}_*(t) = & - \left(\frac{\partial f(t, x_*(t), u_*(t))}{\partial x} \right)' \bar{\Psi}_*(t) - \\ & - \bar{\Psi}_*(t) \frac{\partial f(t, x_*(t), u_*(t))}{\partial x} - \frac{\partial^2 H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t)}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\bar{\Psi}_*(T) = - \frac{\partial^2 \Phi(x_*(T))}{\partial x^2}, \quad (3.12)$$

де $\psi_*(t)$ – розв’язок задачі (3.4).

В прирощенні критерію якості (3.6) виділимо доданки до другого порядку малості відносно величини ε .

$$\begin{aligned} \delta J(u_*) = & \left(\frac{\partial F(x_*(\theta + \varepsilon), \theta + \varepsilon)}{\partial x} \right)' \delta x(\theta + \varepsilon) + \\ & + \frac{1}{2} \delta x'(\theta + \varepsilon) \frac{\partial^2 F(x_*(\theta + \varepsilon), \theta + \varepsilon)}{\partial x^2} \delta x(\theta + \varepsilon) + o_1(\|\delta x(\theta + \varepsilon)\|^3) \geq 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

В (3.13) дамо представлення всіх доданків за формулою Тейлора

$$\begin{aligned} \delta x(\theta + \varepsilon) = & \delta_v f(\theta, x_*(\theta), u_*(\theta)) \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [f(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) - \\ & - f(t, x_*(t), u_*(t))] |_{t=\theta} \varepsilon^2 + o_2(\varepsilon), \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x_*(\theta + \varepsilon), \theta + \varepsilon)}{\partial x} = & \frac{\partial F(x_*(\theta), \theta)}{\partial x} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(x_*(t), t)}{\partial x} \right) |_{t=\theta} \varepsilon + \\ & + o_3(\varepsilon), \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o_3(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 F(x_*(\theta + \varepsilon), \theta + \varepsilon)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F(x_*(\theta), \theta)}{\partial x^2} + o_4(\varepsilon), \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} o_4(\varepsilon) = 0.$$

Тоді нерівність (3.13) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \delta J(u_*) = & \left(\frac{\partial F(x_*(\theta), \theta)}{\partial x} \right)' \delta_v f(\theta, x_*(\theta), u_*(\theta)) \varepsilon + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F(x_*(\theta), \theta)}{\partial x} \right)' \times \right. \\ & \times \frac{d}{dt} [f(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t))] |_{t=\theta} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(x_*(t), t)}{\partial x} \right)' |_{t=\theta} \times \\ & \times \delta_v f(\theta, x_*(\theta), u_*(\theta)) + \frac{1}{2} (\delta_v f(\theta, x_*(\theta), u_*(\theta)))' \frac{\partial^2 F(x_*(\theta), \theta)}{\partial x^2} \times \\ & \times \delta_v f(\theta, x_*(\theta), u_*(\theta))] \varepsilon^2 + o(\varepsilon) \geq 0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Оскільки оптимальне керування $u_*(t)$ є особливим, то, згідно з означенням 3.1, нерівність (3.8) буде виконуватись як тотожність, тобто

$$\left(\frac{\partial F(x_*(\theta), \theta)}{\partial x} \right)' \delta_v f(\theta, x_*(\theta), u_*(\theta)) \equiv 0 \quad (3.15)$$

для всіх $v \in \Omega(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Враховуючи тотожність (3.15) та рівняння із (3.11), нерівність (3.14) набуде вигляду

$$\begin{aligned}
\delta J(u_*) &= \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(x_*(t), t)}{\partial x} \right)' \right]_{t=\theta} \delta_v f(\theta, x_*(\theta), u_*(\theta)) + \\
&+ \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\partial F(x_*(t), t)}{\partial x} \right)' \delta_v f(\theta, x_*(\theta), u_*(\theta)) \right) \Big|_{t=\theta} + \\
&+ \left(\frac{\partial F(x_*(\theta), \theta)}{\partial x} \right)' \frac{d}{dt} [f(t, \tilde{x}(t), v) - f(t, x_*(t), v)] \Big|_{t=\theta} + \\
&+ (\delta_v f(\theta, x_*(\theta), u_*(\theta)))' \frac{\partial^2 F(x_*(\theta), \theta)}{\partial x^2} \delta_v f(\theta, x_*(\theta), u_*(\theta)) \Big] \varepsilon^2 + o(\varepsilon) = \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial F(x_*(\theta), \theta)}{\partial x} \right)' \frac{\partial \delta_v f(\theta, x_*(\theta), u_*(\theta))}{\partial x} \delta_v f(\theta, x_*(\theta), u_*(\theta)) + \right. \\
&+ (\delta_v f(\theta, x_*(\theta), u_*(\theta)))' \frac{\partial^2 F(x_*(\theta), \theta)}{\partial x^2} \times \\
&\times \delta_v f(\theta, x_*(\theta), u_*(\theta)) \Big] \varepsilon^2 + o(\varepsilon) \geq 0.
\end{aligned}$$

Таким чином, має місце

Теорема 3.1. Для того щоб $u_*(t)$ було особливим оптимальним керуванням в задачі (1.1) – (1.2), (2.12), а $x_*(t)$ – відповідний йому розв'язок задачі Коші (1.1) – (1.2), необхідно існування такої підмножини $\Omega(t) \subseteq U$, що:

1) виконана умова максимуму

$$H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t) (=) \max_{v \in U} H(x_*(t), v, \psi_*(t), t), \quad (3.16)$$

де функція $\psi(t)$ – розв'язок задачі Коші (3.4);

2) виконана нерівність

$$\begin{aligned}
&\psi'_*(t) \frac{\partial \delta_v f(\theta, x_*(\theta), u_*(\theta))}{\partial x} \delta_v f(\theta, x_*(\theta), u_*(\theta)) + \\
&+ (\delta_v f(\theta, x_*(\theta), u_*(\theta)))' \bar{\Psi}_*(t) \delta_v f(\theta, x_*(\theta), u_*(\theta)) (\leq) 0,
\end{aligned} \quad (3.17)$$

де $\bar{\Psi}_*(t)$ – розв'язок задачі Коші (3.11) – (3.12) •

Приклад 3.1. (Продовження прикладу 2.4). Перевіримо виконання умов теореми 3.1 для задачі (2.28) – (2.29). Множина $\Omega(t)$ складається із кусково - неперервних функцій $|u_*(t)| \leq 1$, які є розв'язками рівняння

$$\int_0^T u_*(t) dt + x_0 = 0$$

і відповідають умові $\psi_*(t) \equiv 0$.

Тоді

$$H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t) (=) \max_{v \in U} H(x_*(t), v, \psi_*(t), t) \equiv 0.$$

Розв'язок задачі Коші (3.11) - (3.12) має вигляд $\bar{\Psi}(t) = -2$. Тоді нерівність (3.17) завжди виконується. Таким чином, всі такі керування є оптимальними та особливими •

§ 4. Задачі з рухомими границями.

1. Постановка задачі та математичний апарат для визначення співвідношень трансверсальності. Розглянемо задачу оптимального керування, коли лівий та правий кінці траєкторії динамічної системи, яка описує поведінку об'єкту керування, належать деяким

підмножинам із R^n , а початковий і кінцевий моменти часу невідомі.

Потрібно мінімізувати критерій якості

$$J(t_0, T, u) = \int_{t_0}^T f_0(t, x(t), u(t)) dt + \Phi(T, x(T)) \quad (4.1)$$

при умовах

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, T], \quad (4.2)$$

$$x(t_0) \in S_0(t_0), \quad x(T) \in S_1(T), \quad (4.3)$$

$$u(t) \in U \in R^r, \quad (4.4)$$

де $S_0(t_0), S_1(T) \subset R^n$ – фіксовані множини, функції f, f_0, Φ – неперервно диференційовані по t, u та двічі неперервно диференційовані по x .

Зрозуміло, що задача (4.1) – (4.4) співпадає із задачею оптимального керування § 2, якщо множини $S_0(t_0), S_1(T)$ вироджуються в точки.

З іншого боку, принцип максимуму в розглянутих вище задачах дає лише необхідні умови оптимальності. Таким чином, якщо потрібно розв'язувати задачу оптимального керування з рухомими границями, то можливі такі міркування.

Нехай $u_*(t)$ – оптимальне керування в задачі з рухомими границями, а $x_*(t)$ – відповідна йому оптимальна траєкторія. Позначимо $x^0 = x_*(t_0), x^1 = x_*(T)$. Тоді очевидно, що $x^0 \in S_0(t_0), x^1 \in S_1(T)$.

Оптимальне керування $u_*(t)$ в задачі з рухомими границями являється оптимальним і в задачі з фіксованими границями

$$x_*(t_0) = x^0, x_*(T) = x^1.$$

Звідси витікає, що керування $u_*(t)$ і траєкторія $x_*(t)$ повинні задовольняти принципу максимуму як необхідним умовам оптимальності. При розв'язанні задачі з фіксованими кінцями траєкторії, яка розглядалась в § 2, ці умови дають повну систему співвідношень для визначення всіх невідомих величин. В задачі з рухомими границями для "повноти" умов принципу максимуму необхідна додаткова інформація щодо визначення точок $x_*(t_0), x_*(T)$. Ці точки, згідно з означенням, повинні належати множинам $S_0(t_0), S_1(T)$ відповідно.

Наведемо стисло математичний апарат для опису співвідношень, необхідних для визначення точок $x_*(t_0), x_*(T)$ в задачі з рухомими границями.

Множину M точок із R^n , які задовольняють рівнянню

$$F(x) = 0, \quad (4.5)$$

де F – скалярна функція, будемо називати *гіперповерхнею* в просторі R^n , а співвідношення (4.5) – рівнянням цієї гіперповерхні.

Точку x , в якій

$$(\text{grad } F(x))' = (F_x(x))' = \left(\frac{\partial F(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F(x)}{\partial x_n} \right) = 0,$$

будемо називати *особливою точкою* гіперповерхні (4.5), а у випадку $\text{grad } F(x) \neq 0$ – *неособливою*.

Гіперповерхня, що задається рівнянням (4.5), називається *гладкою*, якщо функція $F(x)$ неперервно диференційовна у всіх точках множини M і не має особливих точок. Зокрема, якщо функція $F(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n - b$, $a_i, b \in R^1$, тобто лінійна, то визначена нею множина M буде гладкою, якщо хоч би один із коефіцієнтів a_i буде відрізнятися від нуля. Така множина називається *гіперплощиною*.

Вектор $\text{grad } F(x)$ називається *нормаллю (нормальним вектором)* гіперповерхні M в точці $x \in M$. Гіперплощина, яка проходить через точку $x^0 \in M$ і ортогональна вектору

$\text{grad } F(x)$, називається *дотичною гіперплощиною*. Таким чином, рівняння цієї гіперплощини можемо записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F(x_0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) = 0.$$

Нехай $M_j, j = \overline{1, k}$ – гладкі гіперповерхні в R^n , що задаються рівняннями

$$F_j(x) = 0, \quad j = \overline{1, k}. \quad (4.6)$$

Позначимо через M перетин множин $M_j, j = \overline{1, k}$. Цей перетин називається *гладкою* $(n - k)$ - *мірною гіперповерхнею* в R^n , якщо вектори

$$\text{grad } F_j(x), j = \overline{1, k} \quad (4.7)$$

лінійно незалежні $\forall x \in M$. Зокрема, якщо рівняння (4.6) лінійні, тобто

[illegible]

і при цьому вектори $a'_1 = (a_{1,1}, \dots, a_{1,n}), \dots, a'_k = (a_{k,1}, \dots, a_{k,n})$ – ненульові і лінійно незалежні, то множина $\hat{M}$, яка визначається системою (4.8), називається *гладкою* ($n - k$) – *мірною гіперплощиною*.

Нехай M – $(n - k)$ - мірна гіперповерхня, яка визначається рівняннями (4.6), а L_j – дотична гіперплощина до поверхні $F_j(x)$, яка проходить через точку $x^0 \in M$. Перетин гіперплощин L_j , $j = \overline{1, k}$ називається *дотичним багатовидом до M в точці x^0* , тобто цей багатовид являє собою $(n - k)$ - мірну гіперплощину, що визначається рівняннями

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j(x_0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) = 0, \quad j = \overline{1, k}.$$

Таким чином, вектор, який виходить із точки x^0 , належить дотичному багатовиду тоді і тільки тоді, коли він ортогональний всім векторам (4.7).

Наведемо один результат, який буде корисним при формулюванні умов оптимальності для задач оптимального керування з рухомими границями.

Теорема 4.1. (Теорема Фаркаша). Нехай задана множина

$$K = \{e \in R^n: (c_i, e) \leq 0, i = \overline{1, m}; (c_i, e) < 0, i = \overline{m+1, p};$$

$$(c_i, e) = 0, \quad i = \overline{p+1, s},$$

де $c_i, i = \overline{1, s}$ – деякі фіксовані вектори із R^n .

Тоді для того, щоб деякий вектор $c \in R^n$ задовольняв нерівності

$$(c, e) \leq 0 \quad \forall e \in K,$$

необхідно і достатньо, щоб існували числа λ_i , $i = \overline{1, s}$, причому $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1, p}$, такі, що

$$C = - \sum_{i=1}^S \lambda_i C_i \quad \bullet$$

2. Умови оптимальності з фіксованим часом. Припустимо спочатку, що в задачі (4.1) – (4.4) моменти часу t_0 та T фіксовані, тобто $\Phi(T, x(T)) = \Phi(x(T))$, $S_0(t_0) = S_0$, $S_I(T) = S_I$. Крім того, будемо вважати, що правий кінець траєкторії може належати одній із множин:

$$S_I = R^n; \quad (4.9)$$

$$S_I = \{x \in R^n: g_i(x) = 0, i = \overline{1, s_I}\}; \quad (4.10)$$

$$S_I = \{x \in R^n: g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m_I}; g_i(x) = 0, i = \overline{m_I + 1, s_I}\}. \quad (4.11)$$

Зокрема, якщо $g_i(x) = x_i - x_{S_I}^1, S_I = n, i = \overline{1, n}$, то із (4.10) отримаємо випадок закріпленого правого кінця: $x(T) = x^1$.

Аналогічно, будемо припускати, що лівий кінець траєкторії може належати одній із множин:

$$S_0 = R^n; \quad (4.12)$$

$$S_0 = \{x \in R^n : h_i(x) = 0, i = \overline{1, s_0}\}; \quad (4.13)$$

$$S_0 = \{x \in R^n : h_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m_0}; h_i(x) = 0, i = \overline{m_0 + 1, s_0}\}. \quad (4.14)$$

Наведені вище реалізації множин S_0, S_I охоплюють достатньо широке коло задач з рухомими кінцями.

Додатково до припущень задачі (4.1) - (4.4) будемо вимагати, щоб введені вище функції були двічі неперервно диференційовними по x . Тоді має місце

Теорема 4.2. Нехай $(u_*(t), x_*(t))$ – оптимальна пара в задачі (4.1) – (4.4) з фіксованими значеннями величин t_0, T . Тоді з необхідністю існують такі число $\psi_{0,*} \leq 0$ та вектор - функція $\psi_*(t)$, для яких виконуються умови:

- 1) $|\psi_{0,*}| + \sum_{i=1}^n |\psi_{i,*}(t)| \neq 0 \quad \forall t \in [t_0, T];$
- 2) вектор - функції $x_*(t), \psi_*(t), u_*(t)$ задовольняють рівнянням (4.2), (2.4);
- 3) функція $H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t)$ як функція змінної v досягає максимального значення при $v = u_*(t)$ при всіх $t \in [t_0, T]$ крім точок розриву $u_*(t)$, тобто

$$H(x_*(t), u_*(t), \psi_{0,*}, \psi_*(t), t) (=) \max_{v \in U} H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t); \quad (4.15)$$

- 4) на лівому і правому кінцях траєкторії $x(\cdot)$ виконуються умови трансверсальності: вектор $\psi_*(T) - \psi_{0,*} \Phi_x(x_*(T))$ буде ортогональним до множини S_I в точці $x_*(T) \in S_I$; вектор $\psi_*(t_0)$ буде ортогональним до множини S_0 в точці $x_*(t_0) \in S_0$.

Умови 1) – 3) теорем 2.1 і 4.2 співпадають. Тому для регулярних задач застосування теореми 4.2 знову зводиться до двохточкової крайової задачі принципу максимуму з 2 n невідомими числовими параметрами. Для отримання співвідношень, з яких ці параметри можна визначити, розкриємо зміст умов трансверсальності при різних режимах на лівому та правому кінцях траєкторії.

Розглянемо спочатку правий кінець траєкторії.

Нехай множина S_I задана у вигляді (4.9), тобто кінець траєкторії вільний. Ортогональність вектора $\psi_*(T) - \psi_{0,*} \Phi_x(x_*(T))$ до множини S_I в точці $x_*(T)$ за означенням полягає в тому, що

$$(\psi_*(T) - \psi_{0,*} \Phi_x(x_*(T)), x - x(T)) = 0 \quad \forall x \in R^n,$$

тобто

$$\psi_*(T) - \psi_{0,*} \Phi_x(x_*(T)) = 0. \quad (4.16)$$

Співвідношення (4.16) породжує n граничних умов для крайової задачі принципу максимуму.

Нехай множина S_I задана у вигляді (4.10). Ортогональність вектора $\psi_*(T) - \psi_{0,*} \Phi_x(x_*(T))$ до множини S_I в точці $x_*(T)$ за означенням полягає в тому, що

$$(\psi_*(T) - \psi_{0,*} \Phi_x(x_*(T)), x - x(T)) = 0,$$

де x належить дотичному багатовиду, що визначається рівняннями

$$(g_{j,x}(x_*(T)), x - x_*(T)) = 0, g_{j,x}(x_*(T)) \neq 0, j = \overline{1, s_I}.$$

Тоді, згідно теореми 4.1, знайдуться такі дійсні числа $a_i, i = \overline{1, s_I}$, що

$$\psi_*(T) - \psi_{0,*} \Phi_x(x_*(T)) = \sum_{i=1}^{s_I} a_i g_{i,x}(x_*(T)). \quad (4.17)$$

До умови (4.17) потрібно ще додати умову належності точки $x_*(T)$ множині S_I , тобто

$$g_i(x_*(T)) = 0, i = \overline{1, s_I}. \quad (4.18)$$

Таким чином, рівності (4.17) – (4.18) дають $n + s_I$ умов, із яких s_I потрібно застосувати для визначення параметрів $a_i, i = \overline{1, s_I}$, а інші n приєднати до крайової задачі принципу максимуму в якості граничних умов.

Нехай множина S_I задана у вигляді (4.11) і $g_{j,x}(x_*(T)) \neq 0, j = \overline{1, s_I}$. Умова трансверсальності тоді означає, що існують такі дійсні числа $a_i, i = \overline{1, s_I}$, для яких має місце предствавлення (4.17), де

$$a_i g_i(x_*(T)) = 0, a_i \geq 0, i = \overline{1, m_I}; g_i(x_*(T)) = 0, i = \overline{m_I + 1, s_I}. \quad (4.19)$$

Таким чином, співвідношення (4.17), (4.19) знову дають $n + s_I$ умов, із яких s_I потрібно застосувати для визначення параметрів $a_i, i = \overline{1, s_I}$, а інші n приєднати до крайової задачі принципу максимуму в якості граничних умов.

Підсумовуючи, зауважимо, що умови трансверсальності на правому кінці траєкторії у всіх зазначених вище випадках дають n граничних умов для крайової задачі принципу максимуму. Для отримання ще n граничних умов для цієї системи звернемось до умов трансверсальності на лівому кінці траєкторії.

Нехай множина S_0 задана у вигляді (4.12), тобто кінець траєкторії вільний. Ортогональність вектора $\psi_*(t_0)$ до множини S_0 в точці $x_*(t_0)$ породжує умову

$$\psi_*(t_0) = 0, \quad (4.20)$$

яка дає n граничних умов для крайової задачі принципу максимуму.

Нехай множина S_0 задана у вигляді (4.13). Ортогональність вектора $\psi_*(t_0)$ до множини S_0 в точці $x_*(t_0)$ означає, що знайдуться такі дійсні числа $b_i, i = \overline{1, s_0}$, для яких виконується умова

$$\psi_*(t_0) = - \sum_{i=1}^{s_0} b_i h_{i,x}(x_*(t_0)), h_{i,x}(x_*(t_0)) \neq 0, i = \overline{1, s_0}. \quad (4.21)$$

До умови (4.21) потрібно ще додати умову належності точки $x_*(t_0)$ множині S_{t_0} , тобто

$$h_i(x_*(t_0)) = 0, i = \overline{1, s_0}. \quad (4.22)$$

Таким чином, рівності (4.21) – (4.22) дають $n + s_0$ умов, із яких s_0 потрібно застосувати для визначення параметрів $b_i, i = \overline{1, s_0}$, а інші n приєднати до крайової задачі принципу максимуму в якості граничних умов.

Нехай множина S_0 задана у вигляді (4.14). Умова трансверсальності тоді означає, що існують такі дійсні числа $b_i, i = \overline{1, s_0}$, для яких має місце предствавлення (4.21), де

$$b_i h_i(x_*(t_0)) = 0, b_i \geq 0, i = \overline{1, m_0}; h_i(x_*(t_0)) = 0, i = \overline{m_0 + 1, s_0}. \quad (4.23)$$

Таким чином, співвідношення (4.21), (4.23) знову дають $n + s_0$ умов, із яких s_0 потрібно застосувати для визначення параметрів $b_i, i = \overline{1, s_0}$, а інші n приєднати до крайової задачі принципу максимуму в якості граничних умов.

Таким чином, умови трансверсальності на правому і лівому кінцях траєкторії у всіх зазначених вище випадках дають $2n$ граничних умов для крайової задачі принципу максимуму.

3. Умови оптимальності з нефіксованим часом. Повернемось до задачі (4.1) – (4.4). Тоді має місце

Теорема 4.3. Нехай набір $(t_{0,*}, T_*, u_*(t), x_*(t))$ — розв'язок задачі (4.1) – (4.4). Тоді з необхідністю існують такі число $\psi_{0,*} \leq 0$ та вектор - функція $\psi_*(t)$, для яких виконуються умови:

- 1) $|\psi_{0,*}| + \sum_{i=1}^n |\psi_{i,*}(t)| \neq 0 \forall t \in [t_{0,*}, T_*];$
- 2) вектор - функції $x_*(t), \psi_*(t), u_*(t)$ задовольняють рівнянням (4.1), (2.4);
- 3) функція $H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t)$ як функція змінної v досягає максимального значення при $v = u_*(t)$ при всіх $t \in [t_{0,*}, T]$ крім точок розриву $u_*(t)$, тобто

$$H(x_*(t), u_*(t), \psi_{0,*}, \psi_*(t), t) (=) \max_{v \in U} H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t); \quad (4.24)$$

4) на лівому і правому кінцях траєкторії $x(\cdot)$ виконуються умови трансверсальності•

Розкриємо зміст умов трансверсальності, коли множини $S_0(t_0), S_I(T)$ задаються у вигляді

$$S_I(T) = R^n, \quad (4.25)$$

$$S_I(T) = \{x \in R^n: g_i(x, T) \leq 0, \quad i = \overline{1, m_I};$$

$$g_i(x, T) = 0, \quad i = \overline{m_I + 1, s_I}\}, \quad (4.26)$$

$$S_0(t_0) = R^n; \quad (4.27)$$

$$S_0(t_0) = \{x \in R^n: h_i(x, t_0) \leq 0, \quad i = \overline{1, m_0};$$

$$h_i(x, t_0) = 0, \quad i = \overline{m_0 + 1, s_0}\}. \quad (4.28)$$

Будемо вимагати, щоб введені вище функції були двічі неперервно диференційовними по x і неперервно диференційовними по часу.

Нехай множина $S_I(T)$ задана у вигляді (4.25), тобто кінець траєкторії вільний. Тоді умови трансверсальності мають вигляд

$$\psi_*(T_*) - \psi_{0,*} \Phi_x(x_*(T_*), T_*) = 0,$$

$$H(x_*(T_*), u_*(T_*), \psi_{0,*}, \psi_*(T_*), T_*) - \psi_{0,*} \Phi_t(x_*(T_*), T_*) = 0. \quad (4.29)$$

Нехай множина $S_I(T)$ задана у вигляді (4.26), причому $g_{i,x}(x_*(T_*), T_*) \neq 0, g_{i,t}(x_*(T_*), T_*) \neq 0, i = \overline{1, s_I}$. Тоді існують такі дійсні числа $a_{i,*}, i = \overline{1, s_I}$, що

$$\psi_*(T_*) - \psi_{0,*} \Phi_x(x_*(T_*), T_*) = \sum_{i=1}^{s_I} a_{i,*} g_{i,x}(x_*(T_*), T_*),$$

$$a_{i,*} g_{i,x}(x_*(T_*), T_*) = 0, a_{i,*} \geq 0, \quad i = \overline{1, m_I};$$

$$g_i(x_*(T_*), T_*) = 0, \quad i = \overline{m_I + 1, s_I},$$

$$H(x_*(T_*), u_*(T_*), \psi_{0,*}, \psi_*(T_*), T_*) - \psi_{0,*} \Phi_t(x_*(T_*), T_*) =$$

$$= - \sum_{i=1}^{s_I} a_{i,*} g_{i,t}(x_*(T_*), T_*). \quad (4.30)$$

Якщо правий кінець траєкторії закріплений, то

$$x(T_*) = x_I, \quad (4.31)$$

$$H(x_*(T_*), u_*(T_*), \psi_{0,*}, \psi_*(T_*), T_*) - \psi_{0,*} \Phi_t(x_*(T_*), T_*) = 0. \quad (4.32)$$

Аналогічної співвідношення отримаємо для лівого кінця траєкторії.

Нехай множина $S_0(t_0)$ задана у вигляді (4.27), тобто кінець траєкторії вільний. Тоді умови трансверсальності мають вигляд

$$\psi_*(t_{0,*}) = 0,$$

$$H(x_*(t_{0,*}), u_*(t_{0,*}), \psi_{0,*}, \psi_*(t_{0,*}), t_{0,*}) = 0. \quad (4.33)$$

Нехай множина $S_0(t_0)$ задана у вигляді (4.28), причому $g_{i,x}(x_*(t_{0,*}), t_{0,*}) \neq$

$0, g_{i,t}(x_*(t_{0,*}), t_{0,*}) \neq 0, i = \overline{1, s_0}$. Тоді існують такі дійсні числа $b_{i,*}, i = \overline{1, s_0}$, що

$$\psi_*(t_{0,*}) = - \sum_{i=1}^{s_0} b_{i,*} g_{i,t}(x_*(t_{0,*}), t_{0,*}),$$

$$b_{i,*} g_i(x_*(t_{0,*}), t_{0,*}) = 0, b_{i,*} \geq 0, i = \overline{1, m_0};$$

$$g_i(x_*(t_{0,*}), t_{0,*}) = 0, i = \overline{m_0 + 1, s_0},$$

$$H(x_*(t_{0,*}), u_*(t_{0,*}), \psi_{0,*}, \psi_*(t_{0,*}), t_{0,*}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{s_0} b_{i,*} g_{i,t}(x_*(t_{0,*}), t_{0,*}). \quad (4.34)$$

Якщо лівий кінець траєкторії закріплений, то

$$x(t_{0,*}) = x_0, \quad (4.35)$$

$$H(x_*(t_{0,*}), u_*(t_{0,*}), \psi_{0,*}, \psi_*(t_{0,*}), t_{0,*}) = 0. \quad (4.36)$$

Таким чином, умови трансверсальності на правому і лівому кінцях траєкторії у всіх зазначених вище випадках дають $2n + 2$ граничних умов для крайової задачі принципу максимуму, яка містить стільки ж невідомих постійних.

Приклад 4.1. Потрібно перевести точку $x' = (x_1, x_2)$ із стану $x^{0'} = (2, -2)$ на множину $S_l = \{x \in R^2: g_1(x) = x_1 = 0\}$ за найменший час, якщо точка рухається згідно рівнянь $\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t)$, де $|u(t)| \leq 1$ – кусково неперервна функція.

Функція Гамільтона має вигляд $H = \psi_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u$. Тоді спряжені змінні задовольняють системі $\dot{\psi}_1(t) = 0, \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1$. Звідси знаходимо $\psi_1(t) = C, \psi_2(t) = C t + D, C, D = \text{const}$. Із умов трансверсальності (4.30) отримаємо

$$\psi_2(T) = 0, x_1(T) = 0, H|_{t=T} = \psi_0 + \psi_1(T) x_2(T) + \psi_2(T) u(T) = 0.$$

Таким чином, $\psi_2(t) = C (T - t), t \in [0, T]$. Зауважимо, що $C \neq 0$, тому що в протилежному випадку $\psi_1(t) \equiv \psi_2(t) \equiv 0, t \in [0, T]$ і тоді із умови $H|_{t=T} = 0$ отримаємо $\psi_0 = 0$, що суперечить умові 1) теореми 4.3. Таким чином, $\psi_2(t) = C (T - t), t \in [0, T], C \neq 0$. Тоді із умови максимуму функції H по u , отримаємо

$$u(t) = \text{sign} \psi_2(t) = \text{sign} C, t \in [0, T].$$

Таким чином, на "оптимальність" можуть претендувати лише керування $u = \pm 1, t \in [0, T]$.

Якщо $u = 1, t \in [0, T]$, то із крайової задачі

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = 1, x_1(0) = 2, x_2(0) = -2, x_1(T) = 0$$

отримаємо

$$T = 2, x_1(t) = \frac{(t-2)^2}{2}, x_2(t) = t - 2.$$

Якщо $u = -1, t \in [0, T]$, то із крайової задачі

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = -1, x_1(0) = 2, x_2(0) = -2, x_1(T) = 0$$

отримаємо

$$T = \sqrt{8} - 2, x_1(t) = 4 - \frac{(t+2)^2}{2}, x_2(t) = -t - 2.$$

На оптимальність тут може претендувати лише керування $u = -1: 2 > \sqrt{8} - 2$.

В теоремах 4.2 і 4.3 точки $x(t_0), x(T)$ належали різним множинам із R^n . Часто ці точки можуть належати одним множинам (змішані обмеження), а допустимі пари $(x(t), u(t))$ можуть задовольняти деяким інтегральним обмеженням. Сформулюємо принцип максимуму для одного варіанту таких обмежень.

Потрібно мінімізувати критерій якості

$$J_0(t_0, T, u) = \int_{t_0}^T \tilde{f}_0(t, x(t), u(t)) dt + \Phi_0(t_0, T; x(t_0), x(T)) \quad (4.37)$$

при умовах

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), t \in [t_0, T], \quad (4.38)$$

$$J_i(t_0, T, u) = \int_{t_0}^T \tilde{f}_i(t, x(t), u(t)) dt + \Phi_i(t_0, T; x(t_0), x(T)) \leq 0, i = \overline{1, k}, \quad (4.39)$$

$$J_i(t_0, T, u) = \int_{t_0}^T \tilde{f}_i(t, x(t), u(t)) dt + \Phi_i(t_0, T; x(t_0), x(T)) = 0, i = \overline{k+1, m}, \quad (4.40)$$

$$u(t) \in U \in R^r, \quad (4.41)$$

де $t_0, T \in \Delta \subset R^1, \Delta$ – фіксований інтервал, функції $f, \tilde{f}_i, \Phi_i, i = \overline{0, m}$, – неперервно диференційовані по t, u та двічі неперервно диференційовані по x . Тоді має місце

Теорема 4.4. Нехай набір $(t_{0,*}, T_*, u_*(t), x_*(t))$ – розв'язок задачі (4.37) – (4.41). Тоді з необхідністю існують такі числа $\lambda_{j,*}, i = \overline{0, m}$, причому $\lambda_{j,*} \geq 0, j = \overline{0, k}$, та вектор-функція $\psi_*(t)$, для яких виконуються умови:

$$1) \sum_{j=0}^m |\lambda_{j,*}| + \sum_{i=1}^n |\psi_{i,*}(t)| \neq 0 \forall t \in [t_{0,*}, T_*];$$

2) вектор-функція $\psi_*(t)$ задовольняє рівнянню

$$\dot{\psi}(t) = - \frac{\partial H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t)}{\partial x},$$

де $H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t) = \sum_{i=1}^n f_i(t, x_*(t), u_*(t)) \psi_{*,i}(t) - \varphi_*(t), \varphi_*(t) = \sum_{j=0}^m \lambda_{j,*} \tilde{f}_j(t, x_*(t), u_*(t));$

3) функція $H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t)$ як функція змінної v досягає максимального значення при $v = u_*(t)$ при всіх $t \in [t_0, T]$ крім точок розриву $u_*(t)$, тобто

$$H(x_*(t), u_*(t), \psi_{0,*}, \psi_*(t), t) (=) \max_{v \in U} H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t); \quad (4.42)$$

4) трансверсальності по x

$$\psi_*(t_{0,*}) = \frac{\partial l_*(t_0, T; x(t_0), x(T))}{\partial x^0}, \psi_*(T_*) = - \frac{\partial l_*(t_0, T; x(t_0), x(T))}{\partial x^1},$$

де $x^0 = x(t_0), x^1 = x(T), l_*(t_0, T; x(t_0), x(T)) = \sum_{j=0}^m \lambda_{j,*} \Phi_j(t_{0,*}, T_*; x_*(t_{0,*}), x_*(T_*));$

5) умови доповнюючої нежорсткості

$$\lambda_{i,*} (\int_{t_{0,*}}^{T_*} \tilde{f}_i(t, x_*(t), u_*(t)) dt + \Phi_i(t_{0,*}, T_*; x_*(t_{0,*}), x_*(T_*))) = 0, i = \overline{1, k};$$

6) стаціонарності по t_0 та T (у випадку рухомих кінців) •

4. Неперервність функції Гамільтона на оптимальному керуванні. Нехай $u_*(t), x_*(t), t \in [t_{0,*}, T_*]$ – розв'язок задачі (4.1) – (4.4), $\psi_*(t), \psi_{0,*}$ – значення спряженої вектор-функції $\psi(t)$ та числа ψ_0 на оптимальному розв'язку. Покладемо

$$H_*(t) = H(x_*(t), u_*(t), \psi_{0,*}, \psi_*(t), t), t \in [t_{0,*}, T_*]. \quad (4.43)$$

Оскільки функції $x_*(t), \psi_*(t), H(x, u, \psi_0, \psi, t)$ неперервні по сукупності своїх аргументів, а $u_*(t)$ – кусково неперервна функція на відрізку $[t_{0,*}, T_*]$, то функція $H_*(t)$ буде

неперервною у всіх точках неперервності керування $u_*(t)$. Лишається розглянути точки розриву керування $u_*(\cdot)$. Нехай τ — одна із таких точок і нехай

$$H_*(\tau) = \max_{\xi \in U} H(x_*(\tau), \xi, \psi_{0,*}, \psi_*(\tau), \tau) = H(x_*(\tau), v, \psi_{0,*}, \psi_*(\tau), \tau), \quad v \in U.$$

Із означення (4.43) витікають нерівності

$$H_*(\tau) \geq H(x_*(\tau), u_*(t), \psi_{0,*}, \psi_*(\tau), \tau),$$

$$H_*(t) \geq H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t).$$

Тому

$$\begin{aligned} H(x_*(t), v, \psi_{0,*}, \psi_*(t), t) - H(x_*(\tau), v, \psi_{0,*}, \psi_*(\tau), \tau) &\leq H_*(t) - H_*(\tau) \leq \\ &\leq H(x_*(t), u_*(t), \psi_{0,*}, \psi_*(t), t) - H(x_*(\tau), u_*(t), \psi_{0,*}, \psi_*(\tau), \tau) \end{aligned}$$

для всіх значень t , в яких неперервне керування $u_*(\cdot)$. Звідси, переходячи до границі при $t \rightarrow \tau + 0$ та $t \rightarrow \tau - 0$, отримаємо

$$H_*(\tau) = H_*(\tau + 0) = H(x_*(\tau), u_*(\tau + 0), \psi_{0,*}, \psi_*(\tau), \tau) =$$

$$= H_*(\tau - 0) = H(x_*(\tau), u_*(\tau - 0), \psi_{0,*}, \psi_*(\tau), \tau),$$

тобто функція $H_*(t)$ є неперервною на відрізку $[t_0, T]$ і в сформульованих вище теоремах принципу максимуму в умові поточкового максимуму для функції Гамільтона замість значка рівності майже скрізь ($\approx$) можна обмежитись простою рівністю $=$.

§ 5. Зв'язок між теорією оптимального керування та варіаційним численням.

Основною задачею класичного варіаційного числення, як відомо [8, 15], є наступна задача: серед всіх функцій $x(t) \in C^1(t_0, T)$, що задовольняють умовам $x(t_0) \in S_0$, $x(T) \in S_I$, знайти таку, яка доставляє функціоналу

$$J = \int_{t_0}^T f_0(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \quad (5.1)$$

найменше значення. Тут $x(t) \in R^n$, S_0 і S_I — задані множини із R^n . Далі будемо припускати, що функція $f_0(t, x, u)$ — неперервна та має неперервні похідні $\partial f_0 / \partial t$, $\partial f_0 / \partial x$, $\partial f_0 / \partial u$, $\partial^2 f_0 / \partial u \partial t$, $\partial^2 f_0 / \partial u \partial x$, $\partial^2 f_0 / \partial u^2$ при $(t, x, u) \in [t_0, \infty) \times R^n \times R^n$. Для простоти міркувань ми обмежимося розглядом випадку закріпленого лівого кінця: $x(t_0) = x^0$, t_0 — фіксоване; при цьому правий кінець або закріплений: $x(T) = x^I$, T — фіксоване, або вільний: $S_I = R^n$, T — фіксоване, або являється рухомим і лежить на гладкій кривій

$$S_I = S_I(T) = \{x \in R^n: g(x, T) = x - \varphi(T) = 0\}, \quad 0 < T \in R^1.$$

Позначимо $\dot{x}(t) = u(t)$ і запишемо вихідну задачу як задачу оптимального керування

$$J(u) = \int_{t_0}^T f_0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \min_u,$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad t \in (t_0, T],$$

$$x(t_0) = x^0, \quad x(T) \in S_I(T). \quad (5.2)$$

Для дослідження задачі (5.2) скористуємося принципом максимуму (теорема 4.2). Функція Гамільтона буде мати вигляд

$$H(x, u, \psi_0, \psi, t) = \psi_0 f_0(t, x(t), u(t)) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) u_i(t), \quad (5.3)$$

де спряжені змінні задовольняють системі

$$\dot{\psi}_i = - \frac{\partial H(x,u,\psi_0,\psi,t)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1,n}, \quad \psi_0 = \text{const} \leq 0. \quad (5.4)$$

Для оптимального розв'язку $(u(t), x(t))$ задачі (5.2) повинна виконуватись необхідна умова

$$H(x(t), u(t), \psi_0, \psi(t), t) = \max_{u \in R^n} H(x(t), u, \psi_0, \psi(t), t), \quad t \in [t_0, T], \quad (5.5)$$

де $\psi(t)$ – розв'язок системи (5.4) при $u = u(t)$, $x(t) = x(t, u)$, $t \in [t_0, T]$.

Оскільки в даному випадку $U = R^n$, то умова (5.5) виконується лише в стаціонарній точці

$$H'_u = \psi_0(f_0(t, x(t), u(t)))'_u + \psi(t) = 0, \quad t \in [t_0, T]. \quad (5.6)$$

Звідси витікає, що $\psi_0 \neq 0$. Дійсно, якщо $\psi_0 = 0$, то, згідно з (5.6), отримаємо $\psi(t) = 0$, що суперечить умові 1) теореми 4.2. Тоді можемо покласти $\psi_0 = -1$ і наведені вище умови принципу максимуму приймуть вигляд

$$H(x, u, \psi, t) = -f_0(t, x(t), u(t)) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) u_i(t), \quad (5.7)$$

$$\dot{\psi} = (f_0(t, x(t), u(t)))'_x, \quad t \in [t_0, T], \quad (5.8)$$

$$\psi(t) = (f_0(t, x(t), u(t)))'_u, \quad t \in [t_0, T]. \quad (5.9)$$

Інтегруючи (5.8) та враховуючи (5.9), отримаємо рівняння Ейлера в інтегральній формі

$$(f_0(t, x(t), u(t)))'_u = \int_{t_0}^t (f_0(t, x(t), u(t)))'_x dt + \psi(t_0), \quad t \in [t_0, T]. \quad (5.10)$$

Беручи похідну по часу в (5.10), одержимо рівняння Ейлера класичного варіаційного числення

$$\frac{d}{dt} (f_0(t, x(t), u(t)))'_u - (f_0(t, x(t), u(t)))'_x = 0,$$

$$u(t) = \dot{x}(t), \quad t \in [t_0, T]. \quad (5.11)$$

Відомо, що необхідною умовою досягнення функцією $H(x(t), u, \psi_0, \psi(t), t)$ максимуму при $u = u(t)$ є недодатність квадратичної форми

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H(x(t), u(t), \psi_0, \psi(t), t)}{\partial u_i \partial u_j} \xi_i \xi_j \leq 0 \quad \forall \xi \in R^n, \quad t \in [t_0, T].$$

Звідси, враховуючи (5.7), будемо мати

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f_0(t, x(t), u(t))}{\partial u_i \partial u_j} \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \forall \xi \in R^n, \quad t \in [t_0, T]. \quad (5.12)$$

Умова (5.12) називається умовою Лежандра.

Далі отримаємо необхідну умову оптимальності Вейерштрасса. Для цього запишемо умову (5.5) з урахуванням (5.7), (5.9)

$$0 \leq H(x(t), u(t), \psi(t), t) - H(x(t), v, \psi(t), t) = f_0(t, x(t), v) -$$

$$- f_0(t, x(t), u(t)) - (v - u(t), (f_0(t, x(t), u(t)))'_u) \quad \forall v \in R^n, t \in [t_0, T]. \quad (5.13)$$

Далі розглянемо функцію Вейерштрасса

$$E(x, u, v, t) = f_0(t, x, v) - f_0(t, x, u) - (v - u, (f_0(t, x, u))'_u).$$

Відома в класичному варіаційному численні необхідна умова Вейерштрасса має вигляд

$$E(x(t), u(t), v, t) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, T], \quad v \in R^n$$

і є наслідком нерівності (5.13). Далі, із пункту 4 попереднього параграфа витікає неперервність функцій $\psi(t)$ та $H(t) = \max_{v \in U} H(x(t), v, \psi(t), t)$ на відрізку $[t_0, T]$. Тому, враховуючи співвідношення (5.7), (5.10), будемо мати

$$\left[\frac{\partial f_0(t, x(t), u(t))}{\partial u} \right]_t = 0,$$

$$\left[\sum_{i=1}^n \psi_i(t) u_i(t) - f_0(t, x(t), u(t)) \right]_t = 0, \quad t \in [t_0, T], \quad (5.14)$$

де позначено $[z(t)]_t = z(t + 0) - z(t - 0)$.

Оскільки рівності (5.14) виконуються при всіх $t \in [t_0, T]$, то вони зберігають силу і в ті моменти часу, коли похідна $\dot{x}(t)$ має розрив. Враховуючи зв'язок $u(t) \equiv \dot{x}(t)$, умови (5.14) перетворюються у відомі із класичного варіаційного числення умови Ердмана - Вейєрштрасса в точках злому кривої $x(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Перейдемо тепер до розгляду умов на правому кінці оптимальної кривої $x(t)$, $t \in [t_0, T]$. Якщо кінець $x(T)$ вільний, то в силу (4.16) отримаємо $\psi(T) = 0$. Звідси, враховуючи (5.9), будемо мати

$$\frac{\partial f_0(T, x(T), u(T))}{\partial u} = 0. \quad (5.15)$$

Якщо правий кінець $x(T)$ є рухомим, тобто $x(T) \in S_I(T) = \{x \in R^n: g_j(x, T) = x_j - \varphi_j(T) = 0, j = \overline{1, n}\}$, то згідно умов (4.30) існують такі числа $a_1, \dots, a_n$, що

$$\psi_i = \sum_{j=1}^n a_j g_{j,x}(x, T) = a_i,$$

$$H(x(T), u(T), \psi(T), T) = - \sum_{j=1}^n a_j g_{j,t}(x, T) = \sum_{j=1}^n \psi_j \dot{\varphi}_j(T).$$

Враховуючи формули (5.7), (5.9), останню рівність можна переписати у вигляді

$$f_0(T, x(T), u(T)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_0(T, x(T), u(T))}{\partial u_i} (\dot{\varphi}_i(T) - u_i(T)) = 0. \quad (5.16)$$

Умови (5.15) – (5.16) при $\dot{x}(t) = u(t)$ являють собою відомі в класичному варіаційному численні умови трансверсальності для вільного та відповідно рухомого правого кінця.

Таким чином, у випадку $U = R^n$ із принципу максимуму витікають всі основні необхідні умови, які відомі в класичному варіаційному численні. Якщо U - замкнута множина і $U \neq R^n$, то співвідношення (5.16), взагалі кажучи, не виконується. Крім того, не завжди виконується необхідна умова Вейєрштрасса.

§ 6. Застосування принципу максимуму до моделі оптимального економічного зростання.

Розглянемо задачу оптимального керування (1.25) та застосуємо для її аналізу теорему 4.4. Функція Гамільтона для цієї задачі та функція l будуть мати вигляд

$$H(k, s, \lambda, \psi) = \lambda_0 \exp(-\sigma(t - t_0))(1 - s) f(k) + \psi(t)(s(t) f(k) - (\mu + \eta) k),$$

$$l(k, \lambda) = \lambda_2(k(t_0) - k^0) + \lambda_1(k^1 - k(T)).$$

Тоді умови оптимальності можемо записати таким чином

$$\dot{k}_* = s_*(t) f(k_*(t)) - (\mu + \eta) k_*(t),$$

$$\dot{\psi}_* = \lambda_{0,*} \exp(-\sigma(t - t_0))(s_*(t) - 1) f'(k_*) + \psi_*(t)(\mu + \eta - s_*(t) f'(k_*(t))),$$

$$\psi_*(t_0) = \lambda_{2,*}, \psi_*(T) = \lambda_{1,*},$$

$$H(k_*, s_*, \lambda_*, \psi_*) = \max_{s \in [0,1]} H(k_*, s, \lambda_*, \psi_*),$$

$$\lambda_{1,*}(k^1 - k(T)) = 0, \lambda_{0,*}, \lambda_{1,*} \geq 0. \quad (6.1)$$

Перевіримо на виродженість вихідну задачу оптимального керування, тобто припустимо, що $\lambda_{0,*} = 0$. Тоді із умови максимуму функції Гамільтона отримаємо

$$H(k_*, s_*, \lambda_*, \psi_*) = \max_{s \in [0,1]} (\psi_*(t)(s(t) f(k_*) - (\mu + \eta) k_*)),$$

$$\dot{\psi}_* = \psi_*(t)(\mu + \eta - s_*(t)f'(k_*(t))),$$

$$\psi_*(t_0) = \lambda_{2,*}, \psi_*(T) = \lambda_{1,*} \geq 0.$$

В силу властивостей питомої виробничої функції $f(k)$ (див. § 1) розв'язок задачі $\max_{s \in [0,1]} H(k_*, s, \lambda_*, \psi_*)$ буде мати вигляд

$$s_*(t) = \begin{cases} 1, & \psi_*(t) > 0, \\ 0, & \psi_*(t) < 0, \\ \in [0,1], & \psi_*(t) = 0. \end{cases}$$

Якщо $\psi_*(t_0) < 0$, то в околі точки t_0 нерівність зберігається і будемо мати $s_*(t) \equiv 0, \dot{\psi}_* = \psi_*(t)(\mu + \eta) < 0$. Таким чином, $\psi_*(t) < 0, t \in [t_0, T]$, що суперечить умові $\psi_*(T) = \lambda_{1,*} \geq 0$. При $\psi_*(t) \equiv 0$ будемо мати $\lambda_{1,*} = 0$, що неможливо в силу умови 1) теореми 4.4 1. Якщо ж $\psi_*(t_0) > 0$, то $s_*(t) \equiv 1, t \in [t_0, T]$. Цей варіант слід відхилити з економічної точки зору: планове завдання k^1 занадто велике і всі ресурси йдуть на його виконання. Із наведеного аналізу витікає, що вихідна задача оптимального керування не вироджена і тому приймаємо $\lambda_{0,*} = 1$.

Далі значок * при ендегенних змінних у співвідношеннях (6.1) будемо опускати і перейдемо для зручності до змінної $q(t) = \psi(t)\exp(\sigma(t - t_0))$. Тоді умови оптимальності (6.1) набудуть вигляду

$$\dot{k} = s(t) f(k(t)) - (\mu + \eta) k(t),$$

$$\dot{q} = (\sigma + \mu + \eta) q - (1 + s(t)(q - 1))f'(k(t)),$$

$$k(t_0) = k^0, \quad k(T) - k^1 \geq 0,$$

$$q(T)(k^1 - k(T)) = 0, \tag{6.2}$$

де

$$s(t) = \begin{cases} 1, & q(t) > 1, \\ 0, & q(t) < 1, \\ \in [0,1], & q(t) = 1. \end{cases}$$

Для того щоб дослідити якісну поведінку системи (6.2) знайдемо проміжки знакосталості похідних $\dot{k}$ та $\dot{q}$.

1. Нехай $q(t) > 1$. Тоді $s(t) \equiv 1$ і рівняння для змінної q набуває вигляду $\dot{q} = (\sigma + \mu + \eta) q - q f'(k(t))$, а умова $\dot{q} = 0$ приводить до рівняння

$$f'(k) = \sigma + \mu + \eta.$$

В силу властивостей питомої виробничої функції $f(k)$ функція $f'(k)$ монотонно спадає ($f''(k) < 0$) і тому це рівняння має єдиний розв'язок $\hat{k} > 0$.

При тих же умовах перше рівняння системи (6.2) породжує рівняння

$$f(k) = (\mu + \eta) k,$$

яке також має єдиний розв'язок $\tilde{k} > 0$. Дійсно, розглянемо функцію

$$\alpha(k) = \frac{f(k)}{k}.$$

Для неї справедливі граничні співвідношення

$$\lim_{k \rightarrow +0} \alpha(k) = \lim_{k \rightarrow +0} \frac{f'(k)}{1} = \infty,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f'(k)}{1} = 0.$$

В силу того, що функція $f'(k)$ спадна, будемо мати

$$f(k) = \int_0^k f'(v) dv > \int_0^k f'(k) dv = f'(k) k,$$

тобто

$$\alpha'(k) = \frac{f'(k) k - f(k)}{k^2} < 0.$$

Таким чином, функція $\alpha(k)$ спадна при всіх $k > 0$ і рівняння $f(k) = (\mu + \eta) k$ має єдиний розв'язок.

Покажемо, що

$$\hat{k} < \tilde{k}.$$

Дійсно,

$$f(\hat{k}) = \int_0^{\hat{k}} f'(k) dk = (\sigma + \mu + \eta)\hat{k} > (\mu + \eta)\hat{k},$$

або

$$\alpha(\hat{k}) = \frac{f(\hat{k})}{\hat{k}} > \mu + \eta = \frac{f(\tilde{k})}{\tilde{k}} = \alpha(\tilde{k}) \Rightarrow \hat{k} < \tilde{k}.$$

Отже, при $q(t) > 1$ будемо мати

$$\begin{cases} \dot{q}(t) < 0, & k < \hat{k}, \\ \dot{q}(t) = 0, & k = \hat{k}, \\ \dot{q}(t) > 0, & k > \hat{k}, \end{cases} \quad (6.3)$$

$$\begin{cases} \dot{k}(t) > 0, & k < \tilde{k}, \\ \dot{k}(t) = 0, & k = \tilde{k}, \\ \dot{k}(t) < 0, & k > \tilde{k}, \end{cases} \quad (6.4)$$

2. Нехай $q(t) < 1$. Тоді $s(t) \equiv 0$ і два перших рівняння системи (6.2) будуть мати вигляд

$$\dot{k} = -(\mu + \eta) k(t) < 0,$$

$$\dot{q} = (\sigma + \mu + \eta) q - f'(k(t)).$$

Якщо $\dot{q} = 0$, то

$$q = \frac{f'(k(t))}{\sigma + \mu + \eta}. \quad (6.5)$$

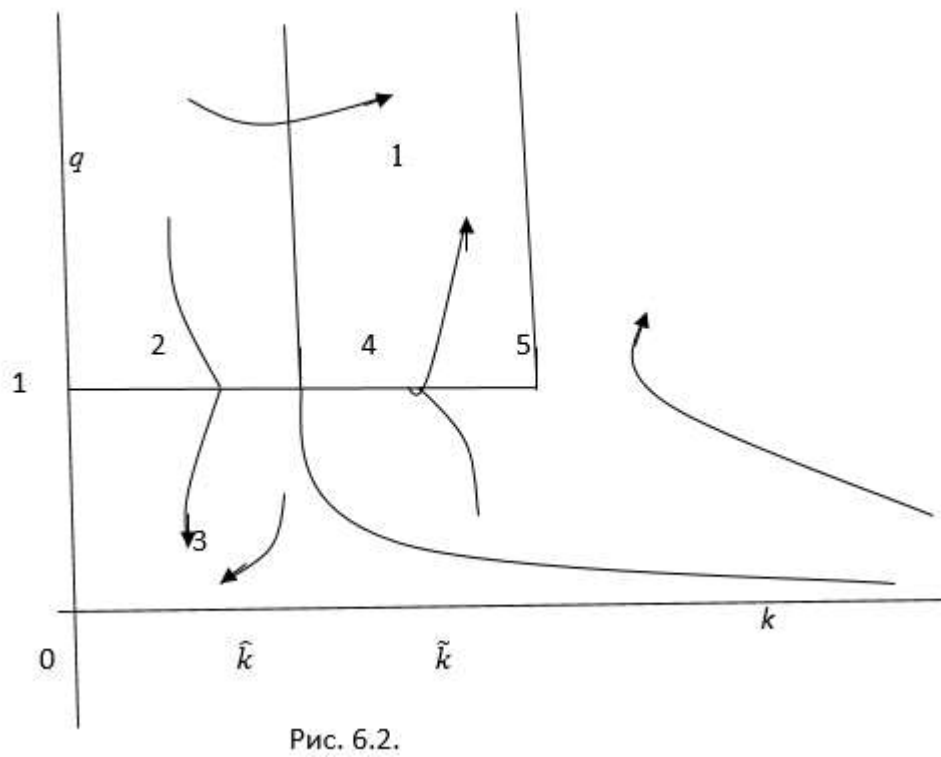
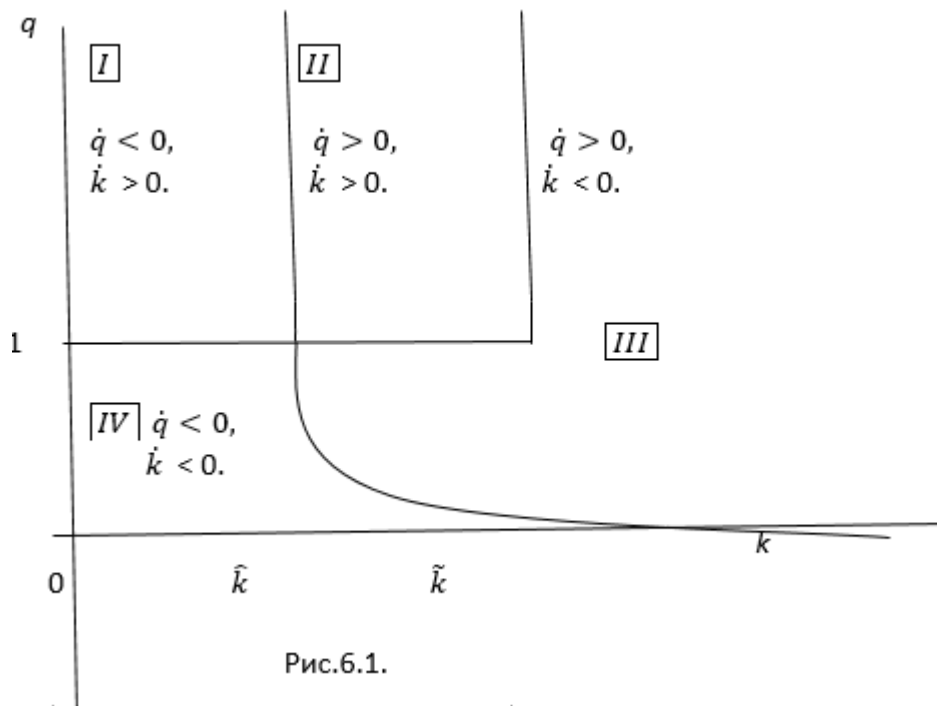
В цьому випадку завжди $\dot{k} < 0$, а $\dot{q} < 0$ при

$$q < \frac{f'(k(t))}{\sigma + \mu + \eta}$$

і $\dot{q} > 0$ при

$$q > \frac{f'(k(t))}{\sigma + \mu + \eta}.$$

Формули (6.3) – (6.5) дають можливість побудувати фазовий портрет системи диференціальних рівнянь умов оптимальності (6.2). На рис.6.1 показано розміщення областей знакосталості похідних $\dot{q}$ та $\dot{k}$ на площині (k, q) , а на рис. 6.2 зображені можливі траєкторії системи диференціальних рівнянь із (6.2).



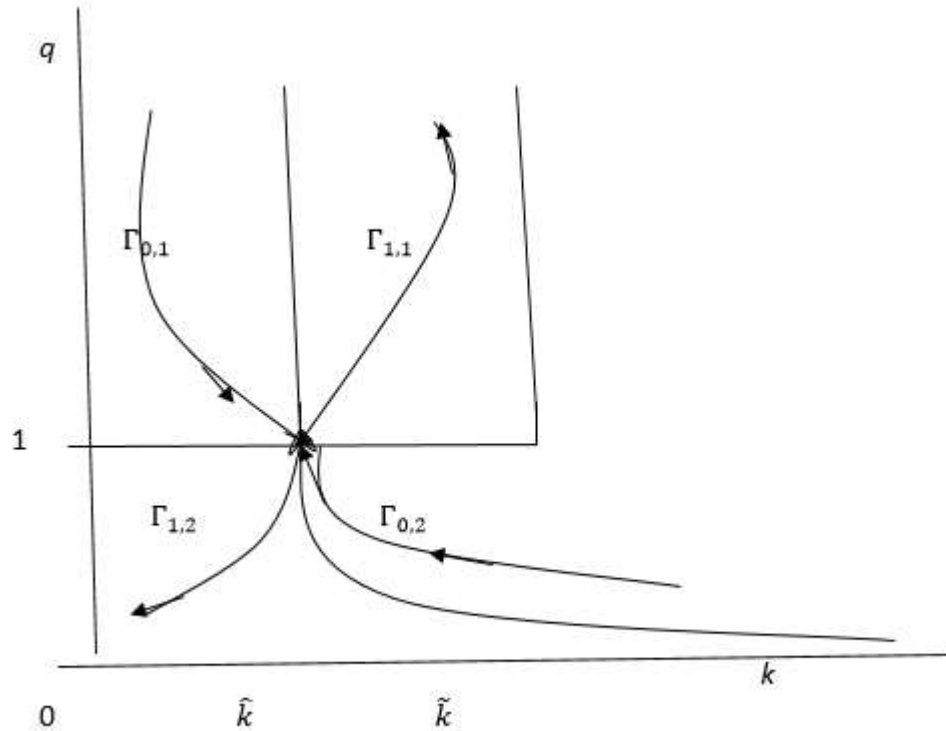


Рис.6.3.

Область I: $\dot{k} > 0, \dot{q} < 0; 0 < k < \hat{k}, q > 1 (s = 1)$. Вздовж фазової траєкторії проєкція на вісь k збільшується, а на вісь q зменшується.

Область II: $\dot{k} > 0, \dot{q} > 0; \hat{k} < k < \tilde{k}, q > 1 (s = 1)$. Вздовж фазової траєкторії проєкції на обидві осі збільшуються.

Область III: $\dot{k} < 0, \dot{q} > 0$; при $k > \tilde{k}, q > 1 (s = 1)$ та при $k > \hat{k}, \frac{f'(k(t))}{\sigma + \mu + \eta} < q < 1 (s = 0)$ вздовж фазової траєкторії проєкція на вісь k зменшується, а на вісь q збільшується.

Область IV: $\dot{k} < 0, \dot{q} < 0$; при $0 < k < \hat{k}, 0 < q < 1 (s = 0)$ та при $k > \hat{k}, 0 < q < \frac{f'(k(t))}{\sigma + \mu + \eta} (s = 0)$ вздовж фазової траєкторії проєкції на обидві осі зменшуються.

В кожній із цих областей траєкторія "повністю визначається" початковою точкою (k^0, q^0) , тобто мається на увазі не лише графік функції $q(k)$, але й "швидкість" його проходження траєкторією $(k(t), q(t))$. Із рис. 6.3 випливає, що існують лише дві траєкторії $(\Gamma_{0,1}, \Gamma_{0,2})$, які "входять" в точку $(\tilde{k}, 1)$ та дві траєкторії $(\Gamma_{1,1}, \Gamma_{1,2})$, які з неї "виходять." Ця точка є особливою для системи диференціальних рівнянь умов оптимальності - вузол.

Прийшовши в цю точку, можемо лишатись в ній як завгодно довго, оскільки вона є спільним коренем системи рівнянь

$$\dot{k} = s f(k) - (\mu + \eta) k = 0,$$

$$\dot{q} = (\sigma + \mu + \eta) q - (1 + s(q - 1))f'(k) = 0.$$

Звідси отримаємо, що

$$\hat{s} = \frac{(\mu + \eta) k}{f(k)}, k = \hat{k}.$$

Раніше було встановлено, що $f'(k) < f(k)/k, k > 0$. Тоді

$$0 < \hat{s} = \frac{(\mu + \eta)\hat{k}}{f(\hat{k})} < \frac{(\sigma + \mu + \eta)\hat{k}}{f(\hat{k})} = \frac{f'(\hat{k})\hat{k}}{f(\hat{k})} < \frac{f(\hat{k})\hat{k}}{\hat{k} f(\hat{k})} = 1.$$

Для перебування в точці $(\hat{k}, 1)$ потрібно вибрати керування $s(t) = \hat{s}$.

Траєкторії, що входять у точку $(\hat{k}, 1)$ повністю початковими умовами не визначаються, бо час перебування в ній залежить від суб'єкта керування.

Оцінімо час "руху" фазової точки $(k(t), q(t))$ (див. рис.6.2) по типовим траєкторіям, поклавши $t_0 = 0$.

• *Траєкторія типу 1)* ($0 < k^0 < k^1 < \tilde{k}$, $s = 1$, $q(0) > 1$.) Тоді час руху по цій траєкторії повністю визначається розв'язком задачі Коші $\dot{k} = f(k) - (\mu + \eta)k$, $k(0) = k^0$ і дорівнює

$$T_1 = \int_{k^0}^{k^1} \frac{dr}{f(r) - (\mu + \eta)r} < \infty,$$

в силу того, що $f(r) - (\mu + \eta)r > 0$, $\forall r \in [k^0, k^1]$.

• *Траєкторія типу 2)* ($0 < k^1 < k^0 < \tilde{k}$, $s = 0$, $q(0) < 1$ або $q(0) < f'(k^0)/((\sigma + \mu + \eta))$)). Тоді час руху по цій траєкторії повністю визначається розв'язком задачі Коші $\dot{k} = -(\mu + \eta)k$, $k(0) = k^0$ і дорівнює

$$T_3 = \int_{k^1}^{k^0} \frac{dr}{(\mu + \eta)r}.$$

• *Траєкторія типу 3)* ($0 < k^0 < k^1 < \hat{k}$, $s = 1$, $q(0) > 1$ для верхньої ланки траєкторії та $\hat{k} > k^1$, $s = 0$ — для нижньої ланки). Тоді час руху по цій траєкторії не буде перевищувати величини

$$T_2 = \int_{k^0}^{\hat{k}} \frac{dr}{f(r) - (\mu + \eta)r} + \int_{k^1}^{\hat{k}} \frac{dr}{(\mu + \eta)r}.$$

• *Траєкторія типу 4)* ($\hat{k} < k^0 < \tilde{k}$, $s = 0$, $f'(k^0)/((\sigma + \mu + \eta)) < q(0) < 1$ для нижньої ланки траєкторії та $\tilde{k} > k^1 > \hat{k}$, $s = 1$ — для верхньої ланки). Тоді час руху по цій траєкторії не буде перевищувати величини

$$T_4 = \int_{\hat{k}}^{k^0} \frac{dr}{(\mu + \eta)r} + \int_{\tilde{k}}^{k^1} \frac{dr}{f(r) - (\mu + \eta)r}.$$

• *Траєкторія типу 5)* ($k^0 > k^1 > \tilde{k}$, $s = 0$, $f'(k^0)/((\sigma + \mu + \eta)) < q(0) < 1$ у першому випадку та $k^0 > k^1 > \tilde{k}$, $s = 1$, $q(0) > 1$ у другому випадку). У першому випадку час руху по траєкторії

$$\int_{k^1}^{k^0} \frac{dr}{(\mu + \eta)r} \leq \int_{\tilde{k}}^{k^0} \frac{dr}{(\mu + \eta)r} = T'_5,$$

а в другому

$$\int_{k^1}^{k^0} \frac{dr}{(\mu + \eta)r - f(r)} \leq \int_{\tilde{k}}^{k^0} \frac{dr}{(\mu + \eta)r - f(r)} = T''_5.$$

Таким чином, $T_5 \leq \max\{T'_5, T''_5\}$.

Нехай заданий час (горизонт планування) $T > \hat{T} = \max\{T_1, \dots, T_5\}$. Тоді жодна із розглянутих траєкторій не може бути оптимальною. Якщо при таких умовах у вихідній задачі існують допустимі траєкторії, то існує і оптимальне керування $s_*(t)$, $t \in [0, T]$, яке задається формулою

$$s_*(t) = \begin{cases} 0 \text{ або } 1, & 0 \leq t < T_{1*}, \\ (\mu + \eta)\hat{k}f^{-1}(\hat{k}), & T_{1*} \leq t < T - T_{2*}, \\ 0 \text{ або } 1, & T - T_{2*} \leq t \leq T, \end{cases} \quad (6.6)$$

де величини T_{1*}, T_{2*} не залежать від T .

Дійсно, щоб переконатись у вище зазначеному, потрібно вказати явно оптимальну траєкторію.

Нехай $k^0 < k^1 \leq \hat{k}$. Спочатку розглянемо випадок $k^1 < \hat{k}$. Тоді потрібно вибрати $q(0)$ таким чином, щоб точка $(k^0, q(0))$ опинилася на траєкторії $\Gamma_{0,1}$. Для цього розглянемо

систему диференціальних рівнянь умов оптимальності

$$\dot{k} = f(k) - (\mu + \eta) k,$$

$$\dot{q} = (\sigma + \mu + \eta - f'(k))q.$$

Виключивши з останньої час, поділивши почленно друге рівняння на перше та проінтегрувавши результат, отримаємо таку залежність

$$\ln q(t) - \ln q(0) = \int_{k^0}^{k(t)} \frac{\sigma + \mu + \eta - f'(r)}{f(r) - (\mu + \eta) r} dr.$$

Шукане значення $q(0)$ буде мати вигляд

$$q(0) = \exp\left(- \int_{k^0}^{\hat{k}} \frac{\sigma + \mu + \eta - f'(r)}{f(r) - (\mu + \eta) r} dr\right),$$

а час попадання в точку $(\hat{k}, 1)$ буде дорівнювати

$$T_{1*} = \int_{k^0}^{\hat{k}} \frac{dr}{f(r) - (\mu + \eta) r}$$

і при цьому траєкторія $\Gamma_{0,1}$ має вигляд

$$q(t) = \exp\left(- \int_{k(t)}^{\hat{k}} \frac{\sigma + \mu + \eta - f'(r)}{f(r) - (\mu + \eta) r} dr\right).$$

Знайдемо час, за який фазова точка $(k(t), q(t))$ із стану $(\hat{k}, 1)$ перейде в стан $(k^1, q(T))$ вздовж траєкторії $\Gamma_{1,2}$

$$T_2^* = \frac{\ln \hat{k} - \ln k^1}{\mu + \eta}.$$

Знайдемо траєкторію $\Gamma_{1,2}$. Для цього розглянемо систему рівнянь

$$\dot{k} = -(\mu + \eta) k,$$

$$\dot{q} = (\sigma + \mu + \eta) q - f'(k),$$

яка зводиться, як і в попередньому випадку, до рівняння

$$\frac{dq}{dk} = - \frac{\sigma + \mu + \eta}{\mu + \eta} \frac{q}{k} + \frac{1}{\mu + \eta} \frac{f'(k)}{k}.$$

Інтегруючи останнє, знаходимо рівняння для шуканої траєкторії

$$q(t) = \left(\frac{\hat{k}}{k(t)}\right)^{\frac{\sigma + \mu + \eta}{\mu + \eta}} + \frac{1}{\mu + \eta} \int_{\hat{k}}^{k(t)} \left(\frac{r}{k(t)}\right)^{\frac{\sigma + \mu + \eta}{\mu + \eta}} \frac{f'(r)}{r} dr.$$

Оптимальне значення критерію має вигляд

$$J_* = (1 - \hat{s}) f(\hat{k}) \int_{T_{1*}}^{T-T_{2*}} \exp(-\sigma t) dt +$$

$$+ \int_{T-T_{2*}}^T \exp(-\sigma t) f(\hat{k} \exp(-(\mu + \eta)(t - T + T_{2*}))) dt.$$

При $k^1 = \hat{k}$ слід покласти $T_{2*} = 0$. Якщо $k^1 < k^0 \leq \hat{k}$, то фазова точка $(k(t), q(t))$ знову буде рухатись спочатку по траєкторії $\Gamma_{0,1}$, а потім по траєкторії $\Gamma_{1,2}$ після зупинки в точці $(\hat{k}, 1)$. Час руху по вказаним траєкторіям визначається наведеними вище формулами, а при $k^0 = \hat{k}$ слід покласти $T_{1*} = 0$.

Формули, які характеризують параметри оптимальних розв'язків задачі, для інших варіантів розташування точок $k^0, k^1 < \hat{k}$ неважко відтворити по описаній вище схемі.

Зауважимо лише, що при $k^0 < \tilde{k} < k^1$ не існує допустимих траєкторій. Крім того, може статися так, що траєкторія $\Gamma_{1,2}$, проходить через точку $(\bar{k}, 0)$, де $\bar{k} > 0$. Тоді, якщо $k^1 < \bar{k}$, то оптимальна траєкторія буде влаштована таким чином: потрібно знаходитись у стані рівноваги $(\hat{k}, 1)$ стільки часу, щоб, вийшовши з нього, опинитись у момент часу T у точці $(\bar{k}, 0)$. При цьому $k(T) > k^1$.

Задачі до розділу 1.

1. Розв'язати задачі оптимального керування, використовуючи принцип максимуму.

1.1. $\int_0^T (x(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \min_{u(t) \in U},$
 $\dot{x}(t) = u(t), x(0) = x(T) = 0, 0 < T$ – фіксоване число, $U = \{|u(t)| \leq 1, t \in [0, T]\}$ – кусково - неперервні функції.

1.2. $\int_0^1 x(t) dt \rightarrow \min_{u(t) \in U},$
 $\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t), x_1(0) = x_2(1) = 0, U = \{|u(t)| \leq 2, t \in [0, 1]\}$ – кусково - неперервні функції.

1.3. $\int_0^1 x(t) dt \rightarrow \min_{u(t) \in U},$
 $\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t), x_1(0) + x_1(1) = 0, x_2(0) + x_2(1) = 0, U = \{|u(t)| \leq 2, t \in [0, 1]\}$ – кусково - неперервні функції.

1.4. $\int_0^1 u^2(t) dt \rightarrow \min_{u(t) \in U},$
 $\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t), \int_0^1 x^2(t) dt = 1, x_1(0) = x_2(0) = x_1(1) = x_2(1) = 0, U = \{u(t) \in R^1, t \in [0, 1]\}$ – кусково - неперервні функції.

2. Розв'язати задачі оптимальної швидкодії.

2.1. $T \rightarrow \min_{u(t) \in U},$
 $\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t), x_1(-1) = -1, x_1(T) = 1, x_2(-1) = x_2(T) = 0, U = \{|u(t)| \leq 2, t \in [0, T]\}$ – кусково - неперервні функції.

2.2. $T \rightarrow \min_{u(t) \in U},$
 $\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t), \int_0^T u^2(t) dt = 4, x_1(0) = 0, x_1(T) = 1, x_2(T) = -1, U = \{u(t) \in R^1, t \in [0, T]\}$ – кусково - неперервні функції.

2.3. $T \rightarrow \min_{u(t) \in U},$
 $\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t), x(0) \in S_0 = \{x \in R^2: x_1^2 + x_2^2 = 1\}, x(T) \in S_1 = \{x \in R^2: x_1 = 0\}, U = \{|u(t)| \leq 1, t \in [0, T]\}$ – кусково - неперервні функції.

2.4. $T \rightarrow \min_{u(t) \in U},$
 $\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t), x(0) \in S_0 = \{x \in R^2: x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}, x(T) \in S_1 = \{x \in R^2: x_1^2 + x_2^2 = 4\}, U = \{|u(t)| \leq 1, t \in [0, T]\}$ – кусково - неперервні функції.

3. Показати, що в задачі

$$J(u) = \int_0^1 (x^2(t) - u^2(t)) dt \rightarrow \min, \dot{x}(t) = u(t), x(0) = 0,$$

де $U = \{|u(t)| \leq 1, t \in [0, 1]\}$ – кусково - неперервні функції, оптимальне керування не існує ($\inf J(u) = -1$). Що дає застосування принципу максимуму ?

4. Знайти найменше значення функціоналу

$$J(u) = \int_0^1 \sin u(t) dt$$

при умові

$\dot{x}(t) = u(t), x(0) = 0, x(1) = 1,$
 $U = \{|u(t)| \leq 1, t \in [0,1]\}$ – кусково - неперервні функції.

Показати, що $u(t) = 0, t \in [0,1]$ – оптимальне керування, і переконатися в тому, що в принципі максимуму тут слід взяти $\psi_0 = 0$.

5. Застосувати принцип максимуму до задачі:

$$J(u) = \int_0^T x^2(t) dt \rightarrow \min_{u(t) \in U},$$

$\dot{x}(t) = u(t), x(0) = 1, x(T) = 0,$
де $U = \{|u(t)| \leq 1, t \in [0,T]\}$ – кусково - неперервні функції, T – фіксоване число.

Показати, що при $T > 1$ оптимальне керування $u_*(t) = -1, t \in [0,1]; u_*(t) = 0, t \in [1,T]$ на ділянці $[1,T]$ є особливим, тобто його не можна визначити із принципу максимуму.

6. Застосувати принцип максимуму до задачі:

$$J(u) = \int_0^1 u(t) \cos(0.5\pi x(t)) dt \rightarrow \min_{u(t) \in U},$$

$\dot{x}(t) = u(t), x(0) = 0,$
де $U = \{|u(t)| \leq 1, t \in [0,T]\}$ – кусково - неперервні функції.

7. Показати, що задача:

$$J(u) = \int_0^T u^2(t)(u(t) - 1)^2 dt \rightarrow \min_{u(t) \in U},$$

$\dot{x}(t) = u(t), x(0) = 0, x(T) = 1,$
де $U = \{u(t) \in R^1: |u(t)| \leq 1, t \in [0,T]\}$ – кусково - неперервні функції,
при $T = 1$ має єдиний розв'язок, а при $T > 1$ – безліч розв'язків. Чи зміниться цей висновок, якщо $U = R^1$? Або $x(T) = -1$?

8. За допомогою принципу максимуму дослідити задачу:

$$J(u) = x_1^2(1) + x_2^2(1) \rightarrow \min_{u(t) \in U},$$

$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t), x(0) = \xi, \xi \in R^2,$
де $U = \{|u(t)| \leq 1, t \in [0,1]\}$ – кусково - неперервні функції.

Розділ 2. Синтез оптимальних керувань.

В даному розділі розглянемо метод побудови оптимальних керувань за принципом оберненого зв'язку – *синтез оптимальних керувань*. З практичної точки зору керування у формі оберненого зв'язку мають більшу перевагу в порівнянні з програмними керуваннями: не вимагають перерахунку задачі при зміні початкових умов. Він заснований на так званому *принципі оптимальності* і називається *методом динамічного програмування*. Цей метод розроблявся в середині 20 - го сторіччя у США (Р. Айзекс, Р. Беллман). Тут слід відзначити, що його застосування до різних класів задач оптимального керування вимагає коректного математичного обґрунтування. Отримано задачу Коші для рівняння Беллмана відносно оптимального значення критерію якості. У випадку лінійної динаміки системи, квадратичного критерію якості та відсутності обмежень на керування побудовано теорію оптимальних регуляторів (оптимальних керувань у формі оберненого зв'язку) як для кінечного, так для нескінченного горизонтів (оптимальна стабілізація). Розглянуто випадок задачі оптимальної стабілізації з обмеженням керуванням. Наведено достатні умови оптимальності.

§ 1. Динамічне програмування: принцип оптимальності та рівняння Беллмана

Нехай керований процес описується рівняннями

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u), t_0 < t < T, \quad (1.1)$$

та початковими умовами

$$x(t_0) = x^0. \quad (1.2)$$

В рівняннях (1.1) вектор керувань $u(t)$ при фіксованому $t \in [t_0, T]$ приймає значення із деякої відкритої чи замкнутої області $U \subseteq R^r$.

Припустимо, що: 1) вектор - функція f в (1.1) – неперервна по всім аргументам та має перші похідні по x ; 2) допустимі керування – кусково- неперервні функції з кінечним числом розривів першого роду.

При цих припущеннях кожному допустимому керуванню $u(t)$ відповідає єдиний розв'язок задачі Коші (1.1) – (1.2), який поточною задовольняє рівнянням $\forall t \in (t_0, T]$, крім точок розриву керувань.

Нехай задані скалярні функції $f_0(t, x, u), \Phi(x)$ з такими ж властивостями, що і вектор - функція f . Крім того, будемо вважати їх обмеженими знизу.

Пару $(x(t), u(t))$ будемо називати *процесом*. Якість процесу будемо характеризувати значенням функціоналу

$$J(t_0, u) = \int_{t_0}^T f_0(t, x(t), u(t)) dt + \Phi(x(T)). \quad (1.3)$$

Процес, на якому функціонал (1.3) приймає найменше значення, будемо називати *оптимальним процесом*.

Принцип оптимальності. *Оптимальний процес $(x_*(t), u_*(t))$, $t_0 < t < T$ в задачі (1.1) - (1.3) має таку властивість: для довільного моменту часу $t = \tau$, $\tau \in [t_0, T]$ процес $(x_*(t), u_*(t))$, $\tau < t < T$ лишається оптимальним по критерію*

$$J(\tau, u) = \int_{\tau}^T f_0(t, x(t), u(t)) dt + \Phi(x(T))$$

незалежно від того, яким чином система (195) була переведена в стан $x(\tau)$ і залежить лише від цього стану •

Перед тим як переходити до використання принципу оптимальності зауважимо, що він не вимагає доведення як теорема. Його потрібно розглядати як факт, отриманий зі спостереження

над реальними процесами. З математичної точки зору до нього слід ставитися як до постулату теорії керування.

Для практичного застосування принципу оптимальності для задачі (1.1) – (1.2) визначимо функцію Беллмана

$$S[t, x] = \min_{u(\tau) \in U, \tau \in [t, T]} \left\{ \int_t^T f_0(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + \Phi(x(T)) \right\}. \quad (1.4)$$

Із означення (1.4) витікає, що

$$S[T, x] = \Phi(x(T)). \quad (1.5)$$

З іншого боку, з того ж означення будемо мати

$$\begin{aligned} S[t, x] = & \min_{u(\tau) \in U, \tau \in [t, T]} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} f_0(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + \right. \\ & \left. + \int_{t+\Delta t}^T f_0(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + \Phi(x(T)) \right\} = \min_{u(\tau) \in U, \tau \in [t, T]} \{ f_0(t, x(t), u(t)) \Delta t + \\ & + \int_{t+\Delta t}^T f_0(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + \Phi(x(T)) + o(\Delta t) \}, \end{aligned}$$

де $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$.

У відповідності з принципом оптимальності отримане співвідношення можемо записати у вигляді

$$\begin{aligned} S[t, x] = & \min_{u(\tau) \in U, \tau \in [t, t+\Delta t]} \{ f_0(t, x(t), u(t)) \Delta t + o(\Delta t) + \\ & + \min_{u(\tau) \in U, \tau \in [t+\Delta t, T]} \{ \int_{t+\Delta t}^T f_0(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + \Phi(x(T)) \} \} = \\ & = \min_{u(\tau) \in U, \tau \in [t, t+\Delta t]} \{ f_0(t, x(t), u(t)) \Delta t + o(\Delta t) + \\ & + S[t+\Delta t, x(t+\Delta t)] \}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В силу системи (1.1) отримаємо

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta x(t) = x(t) + f(t, x, u) \Delta t + o_1(\Delta t), \quad (1.7)$$

де $\frac{o_1(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$.

Припустимо, що функція $S[t, x]$ - неперервно диференційовна по сукупності своїх аргументів. Тоді можемо записати

$$\begin{aligned} S[t+\Delta t, x(t+\Delta t)] = & S[t+\Delta t, x(t) + \Delta x(t)] = S[t, x(t)] + \frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial t} \Delta t + \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial x_i} \Delta x_i(t) + o_2(\Delta t, \Delta x), \end{aligned} \quad (1.8)$$

де $\frac{o_2(\Delta t)}{r} \rightarrow 0, r \rightarrow 0; r^2 = (\Delta t)^2 + \|\Delta x\|^2$.

Із (1.8), (1.7) отримаємо

$$\begin{aligned} S[t+\Delta t, x(t+\Delta t)] = & S[t, x(t)] + \frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial t} \Delta t + \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial x_i} f_i(t, x(t), u(t)) \Delta t + o_3(\Delta t, \Delta x), \end{aligned} \quad (1.9)$$

де величина $o_3(\dots)$ має той же порядок, що і величина $o_2(\dots)$.

Підставляючи (1.9) в (1.6) та враховуючи, що функція $S[t, x(t)]$ не залежить від операції $\min$, поділимо обидві частини отриманої рівності на Δt і спрямуємо останню величину до нуля. В результаті отримаємо рівняння Беллмана

$$- \frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial t} = \min_{u(t) \in U} \{f_0(t, x(t), u(t)) +$$

$$+ (\frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial x}, f(t, x(t), u(t)))\}, \quad (1.10)$$

де $\frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial x}$ – градієнт функції Беллмана, $(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток векторів в R^n .

Рівняння (1.10) слід доповнити початковими умовами (1.5).

При виводі рівняння Беллмана ми виходили з того, що процес $(x(t), u(t))$ являється оптимальним. Тому задача (1.10), (1.5) визначає необхідні умови оптимальності в наступній формі.

Нехай задача оптимального керування (1.1) – (1.3) має розв'язок $(x_*(t), u_*(t))$ – оптимальний процес. Розв'яжемо задачу (1.10), (1.5). З цією метою знайдемо керування u із умови мінімуму правої частини рівняння (1.10)

$$u = U(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}), \quad (1.11)$$

причому, функція U може бути неоднозначною.

При цьому керуванні рівняння (1.10) набуває вигляду

$$- \frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial t} = f_0(t, x(t), U(t, x, \frac{\partial S}{\partial x})) +$$

$$+ (\frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial x}, f(t, x(t), U(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}))). \quad (1.12)$$

Припустимо, що задача (1.12), (1.5) має розв'язок (можливо неєдиний)

$$S = S[t, x].$$

Підставляючи його у (1.11), отримаємо функцію (можливо неоднозначну)

$$u = U(t, x). \quad (1.13)$$

Якщо тепер підставити (1.13) в рівняння (1.1) і розв'язати його з початковими умовами (1.2), то отримаємо, взагалі кажучи, неоднозначну функцію $x = \hat{x}(t)$. Тоді разом з керуванням будемо мати ціле сімейство процесів $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$, $\hat{u}(t) = U(t, \hat{x}(t))$. В це сімейство буде входити і оптимальний процес $(x_*(t), u_*(t))$. Іменно в такому сенсі слід розуміти задачу (1.10), (1.5) як необхідну умову оптимальності.

Тут ми не будемо обговорювати проблему розв'язності задачі (1.10), (1.5) та методи її практичного розв'язання. В загальному випадку ці проблеми досить складні. Відмітимо лише одну особливість рівняння Беллмана. При його виводі припускалась неперервна диференційовність функції Беллмана на оптимальній траєкторії і по часу, але, як показує аналіз прикладів, ця функція може виявитись навіть розривною на оптимальній траєкторії. Тим не менше динамічне програмування залишається ефективним засобом розв'язання задач оптимального керування за принципом оберненого зв'язку.

Приклад 1.1. Нехай керований процес описується рівняннями

$$\dot{x}_1 = u_1 x_1 + x_2, \dot{x}_2 = u_2,$$

де допустимі керування $u'(t) = (u_1(t), u_2(t))$ задовольняють умовам $|u_i(t)| \leq 1, i = \overline{1, 2}$.

В якості критерія оптимальності візьмемо функціонал

$$J(t_0, u) = \int_{t_0}^T f_0(t, x_1, x_2) dt,$$

де функція $f_0(t, x_1, x_2)$ – обмежена знизу і неперервна по всім аргументам.

Тоді задача (1.10), (1.5) набуде вигляду

$$- \frac{\partial S}{\partial t} = \min_{|u_i| \leq 1, i = \overline{1, 2}} \{f_0(t, x_1, x_2) + \frac{\partial S}{\partial x_1}(u_1 x_1 + x_2) + \frac{\partial S}{\partial x_2} u_2\}, \quad (1.14)$$

$$S[T, x] = 0. \quad (1.15)$$

Виконуючи операцію мінімізації у правій частині рівняння (1.14), отримаємо

$$u_1 = - \operatorname{sign}(x_1 \frac{\partial S}{\partial x_1}), u_2 = - \operatorname{sign}(\frac{\partial S}{\partial x_2}). \quad (1.16)$$

Тоді рівняння (1.14) прийме вигляд

$$- \frac{\partial S}{\partial t} = f_0(t, x_1, x_2) - \left| \frac{\partial S}{\partial x_1} x_1 \right| + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 - \left| \frac{\partial S}{\partial x_2} \right|. \quad (1.17)$$

Таким чином, для визначення функції $S[t, x]$ потрібно розв'язати рівняння (1.17) з початковою умовою (1.15). Розв'язавши цю задачу, за формулами (1.16) ми знайдемо керування, які задовольняють умовам оптимальності. Питання обґрунтування як оптимальності знайдених керувань, так і властивостей функції $S[t, x]$ потрібно розглядати додатково •

§ 2. Керування системою із закріпленим кінцем траєкторії і вільним часом.

1. Рівняння Беллмана. Нехай керований процес описується рівняннями

$$\dot{x}(t) = f(x, u), t_0 < t < T, \quad (2.1)$$

та початковими умовами

$$x(t_0) = x^0. \quad (2.2)$$

В рівняннях (2.1) вектор керувань $u(t)$ при фіксованому $t \in [t_0, T]$ приймає значення із деякої відкритої чи замкнутої області $U \subseteq R^r$. Вимоги до функції $f(x, u)$ такі ж як і у попередньому параграфі. В якості допустимих керувань $u(t) \in U$ будемо розглядати кусково неперервні функції, які визначають єдиний розв'язок задачі Коші (2.1) – (2.2). В якості критерію оптимальності візьмемо функціонал

$$J(u) = \int_{t_0}^T f_0(x(t), u(t)) dt, \quad (2.3)$$

де $f_0(x, u)$ – обмежена знизу функція своїх аргументів.

Задача полягає в тому, щоб знайти допустиме керування і час $T < \infty$, для яких

$$x(T) = x^1, \quad (2.4)$$

а функціонал (2.3) при цьому приймав найменше можливе значення.

Визначимо функцію Беллмана

$$S[x^0, t_0] = \min_{u(t) \in U, t \in [t_0, T]} \{ \int_{t_0}^T f_0(x(t), u(t)) dt \}. \quad (2.5)$$

Покажемо, що для функції Беллмана має місце рівність $S[x^0, t_0] = S[x^0]$, тобто вона не залежить від часу. Дійсно,

$$\begin{aligned} S[x^0, t_0] &= \min_{u(t) \in U, t \in [t_0, T]} \{ \int_{t_0}^T f_0(x(t), u(t)) dt \} = \\ &= \min_{u(\xi+t_0) \in U, \xi \in [0, T-t_0]} \{ \int_0^{T-t_0} f_0(x(\xi+t_0), u(\xi+t_0)) d\xi \} = \\ &= \min_{\hat{u}(\xi) \in U, \xi \in [0, T']} \{ \int_0^{T'} f_0(\hat{x}(\xi), \hat{u}(\xi)) d\xi \} = S[x^0, 0], \end{aligned}$$

де $\hat{x} = f(\hat{x}, \hat{u}), \hat{x}(0) = x^0, \hat{x}(T') = x^1$.

Застосовуючи до функції $S[x^0]$ міркування попереднього параграфу і враховуючи довільність пари (t_0, x^0) , отримаємо рівняння Беллмана

$$\min_{u \in U} \{ f_0(x, u) + (\frac{\partial S[x]}{\partial x}, f(x, u)) \} = 0. \quad (2.6)$$

Рівняння (2.6) доповнюється умовою

$$S[x^1] = 0, \quad (2.7)$$

яка є наслідком означення функції $S[x^0]$.

При практичному використанні викладеного методу слід пам'ятати, що він отриманий для вільного часу T , а функції f, f_0 не залежать від часу t .

2. Задача оптимальної швидкодії. Для задачі оптимальної швидкодії, коли $f_0(x, u) = 1$, а $S[x]$ – оптимальний час переходу системи із точки x^0 в точку x^1 , рівняння (2.6) буде мати вигляд

$$\max_{u \in U} \left(\frac{\partial \omega(x)}{\partial x}, f(x, u) \right) = 1, \quad (2.8)$$

де $\omega(x) = -S[x]$.

Таким чином, в кожній точці x ($x \neq x^1$) виконується нерівність

$$\left(\frac{\partial \omega(x)}{\partial x}, f(x, u) \right) \leq 1, \quad (2.9)$$

а в точці $x = x^1$ – умова

$$\omega(x^1) = 0. \quad (2.10)$$

Позначимо

$$B(x, u) = \left(\frac{\partial \omega(x)}{\partial x}, f(x, u) \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} f_i(x, u). \quad (2.11)$$

Отриманий вище результат щодо задачі оптимальної швидкодії можемо переформулювати таким чином: якщо систему (2.1) можна перевести за найменший час із точки $x^0 \in R^n$ в задану точку $x^1 \in R^n$ і при цьому функція $\omega(x)$ – неперервно диференційовна, то

$$B(x, u) \leq 1, \quad x \neq x^1, \quad \forall u \in U, \quad (2.12)$$

$$B(x_*, u_*) \equiv 1. \quad (2.13)$$

Припустимо додатково, що функція $\omega(x)$ – двічі неперервно диференційовна. Тоді, в силу (2.13), для всіх $k = \overline{1, n}$ отримаємо

$$\frac{\partial B(x_*, u_*)}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \omega(x)}{\partial x_i \partial x_k} f_i(x_*, u_*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} \frac{\partial f_i(x_*, u_*)}{\partial x_k} = 0. \quad (2.14)$$

З іншого боку,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x_k} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \omega(x(t))}{\partial x_i \partial x_k} f_i(x(t), u(t))$$

для будь-якої допустимої пари $(x(t), u(t))$ в задачі (2.12) - (2.13).

Якщо позначити

$$\psi_i(t) = \frac{\partial \omega(x(t))}{\partial x_i},$$

то (2.14) можемо записати у вигляді

$$\dot{\psi}_k(t) = - \frac{\partial H(x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x_k}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2.15)$$

де

$$H(x, u, \psi) = \sum_{i=1}^n \psi_i f_i(x, u).$$

При цьому умова (2.13) приймає вигляд

$$H(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t)) = \max_{u \in U} H(x_*(t), u, \psi_*(t)) \equiv 1. \quad (2.16)$$

Таким чином, якщо $(x_*(t), u_*(t))$ – оптимальна пара в задачі швидкодії, то вона задовольняє як рівнянню Беллмана (2.6) з умовою (2.7), так і принципу максимуму (2.1) – (2.2), (2.15) – (2.16). Останній був отриманий на основі рівняння Беллмана на відміну від теорем розділу 1.

§ 3. Оптимальні регулятори на обмеженому часовому періоді.

1. Постановка задачі. Найбільш широке застосування метод динамічного програмування набув при розв'язанні лінійно - квадратичних задач оптимального керування.

Нехай керований процес описується функцією $x(t)$, яка задовольняє задачі Коші

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t) + B(t) u(t), t_0 < t \leq T, \quad (3.1)$$

$$x(t_0) = x^0, \quad (3.2)$$

а критерієм оптимальності виступає функціонал

$$J(u) = \int_{t_0}^T (x'(t)Q(t) x(t) + u'(t) H(t) u(t)) dt + x'(T) F x(T), \quad (3.3)$$

де $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$; $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $H(t)$ – квадратні матриці відповідних розмірностей з неперервними елементами; $Q(t)$, F – невід'ємно визначені симетричні матриці; $H(t)$ – додатньо визначена симетрична матриця.

При вказаних умовах задача (3.1) - (3.3) має єдине оптимальне програмне керування: система диференціальних рівнянь (3.1) лінійна, функціонал (3.3) строго опуклий по керуванню. Але в цьому параграфі нас буде цікавити інша форма представлення оптимального керування – оптимальний синтез (обернений зв'язок), тобто $u = u(t, x)$.

Якщо це керування підставити в рівняння (3.1), то отримаємо замкнуту систему рівнянь

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t) + B(t) u(t, x(t)). \quad (3.4)$$

При цьому будемо припускати, що задача Коші (3.4), (3.2) (лінійна чи нелінійна в залежності від вигляду оберненого зв'язку) має єдиний розв'язок $x(t)$ і $u(t) = u(t, x(t))$ – єдине програмне оптимальне керування в задачі (3.1) – (3.3).

Таким чином, задача полягає в тому, щоб знайти таке керування $u = u(t, x)$, що на функції $u(t, x(t))$ функціонал (3.3) досягає найменшого можливого значення при любых $x^0 \in R^n$ із умови (3.2).

Ця задача вперше була поставлена О. М. Летовим. Він назвав її *задачею про аналітичне конструювання регуляторів* і ним же були отримані найбільш суттєві результати щодо її розв'язання.

2. Застосування динамічного програмування. Для отримання розв'язку задачі (3.1) – (3.3) використаємо результати §1. Рівняння Беллмана (1.10) буде мати вигляд

$$-\frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial t} = \min_{u(t) \in R^m} \{x'(t) Q(t) x(t) + u'(t) H(t) u(t) + (\frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial x}, Ax(t) + B(t) u(t))\}. \quad (3.5)$$

Це рівняння слід доповнити початковою умовою (1.5), тобто

$$S[T, x(T)] = x'(T) F x(T). \quad (3.6)$$

Вираз, що стоїть під операцією мінімуму в правій частині рівняння (3.5), досягає найменшого значення по змінній u в тій же точці, що і додатньо визначена квадратична форма

$$\Phi(u) = u'(t) H(t) u(t) + (\frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial x}, B(t) u(t)).$$

Остання має єдину точку мінімуму, яка визначається умовою

$$\frac{\partial \Phi(u)}{\partial u_j} = 0, j = \overline{1, m}.$$

Звідси отримаємо

$$u = -\frac{1}{2} H^{-1}(t) B'(t) \frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial x}. \quad (3.7)$$

Підставляючи (3.7) в (3.5), отримаємо остаточний вигляд рівняння Беллмана для задачі (3.1) – (3.3)

$$-\frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial t} = x'(t) Q(t) x(t) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial x} \right)' B(t) H^{-1}(t) B'(t) \times \\ \times \frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial x} + \left(\frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial x}, Ax(t) \right). \quad (3.8)$$

О. М. Летов запропонував шукати розв'язок задачі (3.8), (3.6) у вигляді квадратичної форми

$$S[t, x(t)] = x'(t) K(t) x(t), \quad (3.9)$$

де матриця $K(t)$ – симетрична і додатньо визначена.

Тоді

$$\frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial x} = 2K(t) x(t). \quad (3.10)$$

Підставляючи (3.9) – (3.10) в (3.8) і (3.6), отримаємо відповідні квадратичні форми, які будуть рівними тоді і тільки тоді, коли матриця $K(t)$ задовольняє *матричному рівнянню Ріккати*

$$-\dot{K}(t) = K(t) A(t) + A'(t) K(t) - K(t) B(t) H^{-1}(t) \times \\ \times B'(t) K(t) + Q(t) \quad (3.11)$$

та початковим умовам

$$K(T) = F. \quad (3.12)$$

Відомо, що задача Коші (3.11) – (3.12) має єдиний розв'язок в околі точки T . Тому далі будемо припускати, що такий розв'язок може бути розповсюджений на весь інтервал $t \in [t_0, T]$. Розв'язавши цю задачу, із (3.7), (3.10) отримаємо керування у формі оберненого зв'язку

$$u(t, x) = -H^{-1}(t) B'(t) K(t) x. \quad (3.13)$$

Лишається переконатись у тому, що керування (3.13) дійсно являється оптимальним. З цією метою для єдиного оптимального програмного керування в задачі (3.1) – (3.3) випишемо необхідні і достатні умови оптимальності у формі принципу максимуму (див. розділ 2). Функція Гамільтона буде мати вигляд

$$H(x(t), u(t), \psi(t)) = -\frac{1}{2} (x'(t) Q(t) x(t) + u'(t) H(t) u(t)) + \\ + \psi'(t) (A(t) x(t) + B(t) u(t)),$$

де спряжена вектор - функція $\psi(t)$ задовольняє рівнянню

$$\dot{\psi}(t) = -A'(t) \psi(t) + Q(t) x(t) \quad (3.14)$$

та початковим умовам

$$\psi(T) = -F x(T). \quad (3.15)$$

Тоді єдине програмне оптимальне керування буде мати вигляд

$$u(t) = H^{-1}(t) B'(t) \psi(t). \quad (3.16)$$

Умова (3.15) "підказує", що між змінними ψ і x , які фігурують у принципі максимуму, може існувати лінійний зв'язок не лише при $t = T$, а і для довільного моменту часу $t \in [t_0, T]$. Дійсно, нехай

$$\psi(t) = -\hat{K}(t) x(t), \quad (3.17)$$

де $\hat{K}(t)$ – довільна симетрична матриця з неперервно диференційовними елементами.

Тоді має місце рівність

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{d\hat{K}(t)}{dt} x(t) - \hat{K}(t) \frac{dx(t)}{dt}. \quad (3.18)$$

Із (3.18), враховуючи (3.14), (3.1) і (3.16), отримаємо

$$(A'(t) \hat{K}(t) + Q(t)) x(t) = \left(-\frac{d\hat{K}(t)}{dt} - \hat{K}(t) A(t) + \right.$$

$$+ \hat{K}(t) B(t)H^{-1}(t)B'(t)\hat{K}(t))x(t).$$

Крім того, із (3.15), (3.17) будемо мати

$$(\hat{K}(T) - F) x(T) = 0.$$

Виписані вище співвідношення виконуються тотожно для любых x тоді і тільки тоді, коли $\hat{K}(t) = K(t)$, де $K(t)$ – розв’язок задачі (3.11) – (3.12). Тим самим ми довели оптимальність керування (3.13).

Покажемо правомірність вибору функції Беллмана у вигляді (3.9). З цією метою розглянемо рівність (див.(3.17))

$$x'(t)\psi(t) = -x'(t)K(t) x(t).$$

Зрозуміло, що вона виконується і для похідних, тобто

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}(x'(t)K(t) x(t)) &= \frac{dx'(t)}{dt}\psi(t) + x'(t)\frac{d\psi(t)}{dt} = -x'(t)(A'(t) - \\ &- K(t) B(t)H^{-1}(t)B'(t)) K(t) x(t) + x'(t)(A'(t) K(t) + Q(t)) x(t) = \\ &= x'(t)(Q(t) + K(t) B(t)H^{-1}(t)B'(t)) K(t) x(t). \end{aligned}$$

Інтегруючи останній вираз, отримаємо формулу

$$\begin{aligned} S[t, x(t)] &= x'(t)K(t) x(t) = \int_t^T x'(\tau)(Q(\tau) + \\ &+ K(\tau) B(\tau)H^{-1}(\tau)B'(\tau)) K(\tau) x(\tau) d\tau + x'(T)F x(T). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Формула (3.19), з одного боку, обґрунтовує припущення О. М. Лєтова щодо вигляду функції Беллмана (3.9), а, з іншого боку, вона встановлює симетричність, додатню визначеність матриці $K(t)$, $t \in [t_0, T)$ і її невід’ємну визначеність при $t = T$. Крім того, вона дає можливість обчислити оптимальне значення критерію

$$J(u_*) = (x^0)' K(t_0)x^0. \quad (3.20)$$

3. Представлення розв’язку задачі Коші для матричного рівняння Ріккати. Ідея попереднього пункту щодо лінійного зв’язку змінних двоточної крайової задачі принципу максимуму (3.1) – (3.2), (3.14) – (3.15) дозволяє побудувати розв’язок задачі (3.11) – (3.12).

З цією метою нагадаємо формулу Коші представлення розв’язку задачі (3.1) – (3.3) із [19]. При фіксованому керуванні із класу кусково неперервних вектор - функцій єдиний розв’язок задачі (3.1) – (3.3) має вигляд

$$x(t) = W(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t W(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau, \quad (3.21)$$

де $W(t, \tau)$ – матриця Коші однорідної системи із (3.1), яка обчислюється за формулою

$$W(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau),$$

де $X(t)$ – фундаментальна матриця однорідної системи із (3.1), яка задовольняє задачі $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$, $X(t_0) = E$.

Повернемось до системи диференціальних рівнянь двоточної крайової задачі принципу максимуму

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t) + B(t)H^{-1}(t)B'(t)\psi(t),$$

$$\dot{\psi}(t) = A'(t)\psi(t) + Q(t) x(t). \quad (3.22)$$

Задамо для неї початкові умови

$$x(t_0) = x^0, \psi(t_0) = \psi^0, \quad (3.23)$$

де ψ^0 – довільний вектор із R^n .

Тоді, згідно з формулою (3.21), розв'язок задачі (3.22) – (3.23) має вигляд

$$x(t) = \widehat{W}_{1,1}(t, t_0)x^0 + \widehat{W}_{1,2}(t, t_0)\psi^0,$$

$$\psi(t) = \widehat{W}_{2,1}(t, t_0)x^0 + \widehat{W}_{2,2}(t, t_0)\psi^0,$$

де $\widehat{W}_{i,k}$, $i, k = \overline{1,2}$ – блоки розмірності $n \times n$ матриці Коші $\widehat{W}$ системи (3.22).

Аналогічно можемо записати формулу

$$x(T) = \widehat{W}_{1,1}(T, t)x(t) + \widehat{W}_{1,2}(T, t)\psi(t),$$

$$\psi(T) = \widehat{W}_{2,1}(T, t)x(t) + \widehat{W}_{2,2}(T, t)\psi(t). \quad (3.24)$$

Із рівності (3.15), використовуючи (3.24) і (3.17), отримаємо рівність

$$(\widehat{W}_{2,1}(T, t) - \widehat{W}_{2,2}(T, t)K(t))x(t) = -F(\widehat{W}_{1,1}(T, t) - \widehat{W}_{1,2}(T, t)K(t))x(t),$$

яка повинна виконуватись для любого вектора $x(t) \in R^n$. Це можливо тоді і тільки тоді, коли

$$K(t) = (\widehat{W}_{2,2}(T, t) + F\widehat{W}_{1,2}(T, t))^{-1}(\widehat{W}_{2,1}(T, t) + F\widehat{W}_{1,1}(T, t)). \quad (3.25)$$

Зауважимо, що розмірність нелінійної системи рівнянь Ріккати (3.11) складає $0.5n(n+1)$, а лінійної системи (3.22) – $(2n)^2$. Тому формулу (3.25) варто використовувати лише для малих значень n і для стаціонарних матриць вихідної задачі.

Приклад 3.1. Розглянемо задачу побудови оптимального регулятора для системи

$$\dot{x} = x + u \quad (3.26)$$

з довільними початковими умовами $x(0) = x^0$ і критерієм якості

$$J(u) = \int_0^T (x^2(t) + u^2(t)) dt. \quad (3.27)$$

Використовуючи позначення задачі (3.1) – (3.3), в задачі (3.26) – (3.27) слід покласти $A = B = Q = H = 1$, $F = 0$.

Тоді фундаментальна матриця для системи (3.22) визначається за формулою $\widehat{W}(t, \tau) = \widehat{X}(t)\widehat{X}^{-1}(\tau)$, де матриця $\widehat{X}(t)$ – розв'язок задачі Коші

$$\dot{\widehat{X}} = \widehat{A}\widehat{X}, \widehat{X}(0) = E, \quad (3.28)$$

а матриця $\widehat{A}$ має вигляд

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок задачі (3.28) буде мати вигляд

$$\widehat{X}(t) = \begin{pmatrix} \text{ch}\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sh}\sqrt{2}t & \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sh}\sqrt{2}t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sh}\sqrt{2}t & \text{ch}\sqrt{2}t - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sh}\sqrt{2}t \end{pmatrix}.$$

Тоді фундаментальна матриця набуде вигляду

$$\widehat{W}(t, \tau) = \begin{pmatrix} \text{ch}\sqrt{2}(t - \tau) & \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sh}\sqrt{2}(t - \tau) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sh}\sqrt{2}(t - \tau) & \text{ch}\sqrt{2}(t - \tau) - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sh}\sqrt{2}(t - \tau) \end{pmatrix},$$

а функція $K(t)$ задається формулою

$$K(t) = \frac{\text{sh}\sqrt{2}(T - t)}{\sqrt{2}\text{ch}\sqrt{2}(T - t) - \text{sh}\sqrt{2}(T - t)}. \quad (3.29)$$

Задача Коші для рівняння Ріккати (3.11) - (3.12) для умов прикладу набуває вигляду

$$-\dot{K} = 2K - K^2 + 1, K(T) = 0. \quad (3.30)$$

Інтегруючи (3.30), отримаємо формулу (3.29) •

§ 4. Задача оптимальної стабілізації без обмежень на керування.

1. Стійкість за О. М. Ляпуновим для автономних систем. В цьому пункті наведемо основні означення та результати щодо стійкості розв'язків задачі Коші для системи автономних диференціальних рівнянь. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.1)$$

де функція $f(x)$ визначена на відкритій множині D_x із R^n .

Припустимо, що компоненти $f_j(x)$ вектор - функції $f(x)$ мають обмежені перші похідні. При цих умовах справедлива теорема Коші: кожній точці $x^0 \in R^n$ відповідає єдиний розв'язок

$$x = x(t, t_0, x^0), \quad (4.2)$$

який визначений в деякому інтервалі $(t_0, t_0 + a)$ і задовольняє початковій умові

$$x(t_0, t_0, x^0) = x^0. \quad (4.3)$$

В теорії стійкості кожен розв'язок рівняння (4.1) прийнято називати *рухом*, причому якщо деякий рух обрано раніше, то його називають *незбуреним рухом*, в той час як всі інші рухи по відношенню до нього називають *збуреними*.

Це означає, що якщо зафіксована точка x^0 і тим самим визначено розв'язок (4.2), який задовольняє умові (4.3), то він називається *незбуреним рухом*. Всі інші розв'язки $\hat{x}(t)$ того ж рівняння при умові $\hat{x}(t_0, t_0, \hat{x}^0) = \hat{x}^0, \hat{x}^0 \neq x^0$ називаються *збуреними рухами*.

Означення 4.1. Розв'язок (незбурений рух) $\eta(t)$, $t_0 \leq t < \infty$, рівняння (4.1) називається *стійким за Ляпуновим*, якщо для любого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що всі інші розв'язки (збурені рухи) $x(t)$ того ж рівняння, які задовольняють умові $\|x(t_0) - \eta(t_0)\|_{R^n} < \delta(\varepsilon)$:

1) визначені для всіх $t \in [t_0, \infty)$;

2) задовольняють нерівності $\|x(t) - \eta(t)\|_{R^n} < \varepsilon, t \in [t_0, \infty)$.

Якщо розв'язок $\eta(t)$ не є стійким за Ляпуновим, то це означає наступне: існує таке число $\varepsilon > 0$, що для любого $\delta > 0$ можна вказати хоч би один розв'язок (збурений рух) $x(t)$ і момент часу $t = t_1(\delta)$ такі, що $\|x(t_0) - \eta(t_0)\|_{R^n} < \delta, \|x(t_1) - \eta(t_1)\|_{R^n} \geq \varepsilon$.

Означення 4.2. Розв'язок $\eta(t)$ рівняння (4.1) називається *асимптотично стійким за Ляпуновим*, якщо він, по - перше, є стійким, а по - друге, для нього виконується умова: $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \eta(t)\|_{R^n} = 0$.

В тому випадку, коли для асимптотично стійкого розв'язку $\eta(t)$ число δ можна вибрати довільно великим, тобто $\delta = \infty$, то він називається *асимптотично стійким в цілому*.

Із наведених означень витікає, що в якості незбуреного руху завжди можна взяти тривіальний розв'язок деякої системи диференціальних рівнянь. Дійсно, нехай $\eta(t)$ – незбурений рух, який визначається системою (4.1), тобто $\dot{\eta}(t) = f(\eta(t))$. В рівнянні (4.1) виконаємо заміну

$$y(t) = x(t) - \eta(t). \quad (4.4)$$

Тоді

$$\dot{y}(t) = Y(y(t)), \quad (4.5)$$

де

$$Y(y(t)) = f(y(t) + \eta(t)) - f(\eta(t)). \quad (4.6)$$

Ясно, що $Y(0) = 0$. Тому рівняння (4.5) має тривіальний розв'язок, який, згідно з (4.4), відповідає незбуреному руху. Тому будемо вважати, що система (4.1) вже зведена до системи (4.5), яку

будемо називати *рівнянням збуреного руху*.

В зв'язку з наведеним, далі будемо розглядати рівняння вигляду

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad (4.7)$$

де вектор - функція $f(x)$ визначена в деякому околі D_x початку координат в R^n і має обмежені похідні в цьому околі.

Очевидно, що $x(t) = 0$ є розв'язком рівняння (4.7).

Питання щодо стійкості незбуреного руху рівняння (4.7) вирішується досить просто, коли вдається знайти розв'язок цього рівняння при довільних початкових умовах $x(t_0) = x^0 \in D_x$. Але такий розв'язок вдається знайти лише у виключних випадках. Тому для отримання умов стійкості залишається використовувати деякі опосередковані показники. О.М. Ляпунов запропонував метод щодо визначення стійкості незбуреного руху, заснований на аналізі допоміжних функцій. Цей метод отримав назву *другого методу Ляпунова*, а допоміжні функції називаються *функціями Ляпунова*.

Означення 4.3. Дійсна неперервна скалярна функція $V = V(x)$, яка визначена в області D_x , називається *знакопостійною* (знакододатньою або знаковід'ємною), якщо $V(x) \geq 0$ ($V(x) \leq 0$) при всіх $x \in D_x$, причому $V(0) = 0$ •

Означення 4.4. Знакопостійна функція $V = V(x)$ називається *додатньо визначеною* (від'ємно визначеною), якщо $V(x) > 0$ ($V(x) < 0$) $\forall x \in D_x$, крім точки $x = 0$, в якій $V(0) = 0$ •

Додатньо визначені (від'ємно визначені) функції будемо називати *знаковизначеними*.

Далі одночасно з функцією $V(x)$ буде розглядатися її повна похідна по часу $\dot{V}$, взята в припущенні, що компоненти $x_j(t)$ вектор - функції $x(t)$ задовольняють рівнянню (4.7). Тоді

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{dV(x(t))}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_j} f_j(x(t)) = \left(\frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, f(x(t)) \right). \quad (4.8)$$

Теорема 4.1. Якщо для диференціальних рівнянь збуреного руху можна знайти знаковизначену функцію V , похідна якої $\dot{V}$ в силу цих рівнянь була б знакопостійною функцією протилежного знаку з V , або тотожно рівна нулю, то незбурений рух буде стійким •

Теорема 4.2. Якщо для диференціальних рівнянь збуреного руху можна знайти додатньо визначену функцію V , похідна якої $\dot{V}$ в силу цих рівнянь була б від'ємно визначеною функцією, то незбурений рух буде асимптотично стійким •

В деяких випадках дослідження на стійкість незбуреного руху системи (4.7) може бути зведено до аналізу матриці першого наближення

$$\hat{A} = \left\{ \frac{\partial f_i(0)}{\partial x_j} \right\}_{i,j=1}^n. \quad (4.9)$$

Теорема 4.3. Якщо дійсні частини всіх власних чисел матриці $\hat{A}$ будуть від'ємними, то незбурений рух буде асимптотично стійким. Якщо ж хоч би одне власне число матриці $\hat{A}$ має додатню дійсну частину, то незбурений рух буде нестійким •

Якщо ж спектр матриці $\hat{A}$ має хоч би одне власне число, в якого дійсна частина дорівнює нулеві (всі інші власні числа мають від'ємну дійсну частину), то теоремою 4.2 ми скористатися не зможемо. В цьому випадку потрібно використовувати теореми 4.1 і 4.2. Для багатьох класів задач функції Ляпунова були знайдені, але в загальному випадку – це питання відкрите по сьогоднішній день.

2. Оптимальна стабілізація для лінійних стаціонарних систем. Нехай керований процес описується функцією $x(t)$, яка задовольняє задачі Коші

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad t_0 < t \leq T, \quad (4.10)$$

$$x(t_0) = x^0, \quad (4.11)$$

а критерієм оптимальності виступає функціонал

$$J(u) = \int_{t_0}^{\infty} (x'(t)Q x(t) + u'(t) H u(t)) dt, \quad (4.12)$$

де числові матриці A, B, H, Q мають ті ж властивості, що і відповідні матриці з неперервними елементами задачі (3.1) - (3.3).

Крім того, припустимо, що система (4.10) – цілком керована [19], тобто на відрізку $[t_0, T]$ існує таке керування $u(t) \in L_2^m(t_0, T) = \{u(t): \sum_{j=1}^n u_j^2(t) dt < \infty\}$, що для розв'язку задачі Коші (4.10) – (4.11) виконується умова $x(T) = x^1$, де x^1 – довільний вектор із R^n . Для того щоб стаціонарна система (4.10) була цілком керованою, необхідно і достатньо виконання критерію Калмана

$$\text{rang}\{B AB \dots A^{n-1}B\} = n. \quad (4.13)$$

Якщо $J(u) < \infty$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, де $x(t)$ – розв'язок задачі

$$\dot{x}(t) = (A - B H^{-1} B' K(t)) x(t),$$

$$x(t_0) = x^0. \quad (4.14)$$

Матриця $K(t)$ задовольняє рівнянню Ріккати

$$-\dot{K}(t) = K(t) A + A' K(t) - K(t) B H^{-1} B' K(t) + Q \quad (4.15)$$

без початкових умов. Рівняння (4.15) отримується аналогічно рівнянню (3.11).

Покажемо, що для задачі оптимальної стабілізації матриця K – числова. З цією метою розглянемо функцію Беллмана для задачі (4.10) – (4.12)

$$S[t_0, x^0] = \int_{t_0}^{\infty} (x'(t) Q x(t) + u'(t) H u(t)) dt. \quad (4.16)$$

Здійснимо в (4.16) заміну $t = t_0 + \xi, \xi \in [0, \infty)$. Тоді

$$S[t_0, x^0] = \int_0^{\infty} (x'(t_0 + \xi) Q x(t_0 + \xi) + u'(t_0 + \xi) H u(t_0 + \xi)) d\xi =$$

$$= \int_0^{\infty} (\tilde{x}'(\xi) Q \tilde{x}(\xi) + \tilde{u}'(\xi) H \tilde{u}(\xi)) d\xi = S[0, x^0],$$

де $\tilde{x}(\xi), \tilde{u}(\xi)$ задовольняють задачі Коші

$$\frac{d\tilde{x}}{d\xi} = A \tilde{x} + B \tilde{u}, \tilde{x}(0) = x^0.$$

Звідси витікає, що $S[t, x] = S[x]$, а рівняння (4.15) перетворюється в алгебраїчне, тобто

$$0 = K A + A' K - K B H^{-1} B' K + Q. \quad (4.17)$$

Відомо, що рівняння (4.17) має 2^n розв'язків, але лише один із них буде додатньо визначеною матрицею.

Припустимо, що ми знайшли цей розв'язок. Покажемо, що тривіальний розв'язок рівняння із (4.14) буде асимптотично стійким.

Дійсно, функція $S[x] = x' K x$ є функцією Ляпунова: вона додатньо визначена. Обчислимо її похідну в силу рівняння збуреного руху

$$\frac{dS}{dt} = \dot{x}' K x + x' K \dot{x} = x'(A' - K B H^{-1} B') K x + x' K \times$$

$$\times (A - B H^{-1} B' K) = x'(A' K + K A - 2 K B H^{-1} B' K) x =$$

$$= -x'(Q + K B H^{-1} B' K) x < 0.$$

Звідси, в силу теореми 4. 2, отримаємо потрібний результат.

Приклад 4.1. Розглянемо керовану систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u$$

з початковими умовами

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$$

і критерієм якості

$$J(u) = \int_0^\infty (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)) dt.$$

В позначеннях задачі (4.1) - (4.3) слід покласти

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, H = 1.$$

Критерій Калмана (4.13) виконується

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

тобто вихідна система - цілком керована. Рівняння (4.17) в скалярній формі має вигляд

$$K_{1,2}^2 = 1, K_{1,1} - K_{1,2}K_{2,2} = 0, 2K_{1,2} - K_{2,2}^2 + 1 = 0.$$

Її розв'язок очевидний: $K_{1,2} = \pm 1, K_{2,2} = \pm\sqrt{3}, K_{1,1} = \pm\sqrt{3}$. Серед наведених розв'язків, згідно критерію Сільвестра, лише один буде додатньо визначеним

$$K = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Тоді оптимальне керування задається формулою

$$u = -x_1 - \sqrt{3}x_2,$$

а оптимальне значення критерію $J = \sqrt{3}$.

Переконаємось у тому, що тривіальний розв'язок (незбурений рух) замкнутої системи

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 - \sqrt{3}x_2$$

буде асимптотично стійким.

Характеристичне рівняння для власних чисел замкнутої системи має вигляд

$$\lambda^2 + \sqrt{3}\lambda + 1 = 0.$$

Тоді $\lambda_{1,2} = 0.5(-\sqrt{3} + i)$, де i — уявна одиниця. Згідно з теоремою 4.3 отримаємо, що незбурений рух буде асимптотично стійким •

3. Наближений розв'язок матричного алгебраїчного рівняння Ріккати. Для цілком керованої системи (4.1) з початковими умовами (4.2) розглянемо два критерія

$$J_T(u) = \int_{t_0}^T (x'(t)Q x(t) + u'(t)H u(t)) dt, \quad (4.18)$$

$$J_\infty(u) = \int_{t_0}^\infty (x'(t)Q x(t) + u'(t)H u(t)) dt. \quad (4.19)$$

Не втрачаючи загальності, далі в цьому пункті будемо вважати, що $t_0 = 0$.

Із результатів § 3 витікає, що оптимальне керування в задачі (4.1) – (4.2), (4.18) має вигляд

$$u_T(t, x_T(t)) = -H^{-1}B'K_T(t)x_T(t), \quad (4.20)$$

де $K_T(t)$ — розв'язок задачі Коші

$$\begin{aligned} -\dot{K}_T(t) &= K_T(t)A + A'K_T(t) - K_T(t)B H^{-1} \times \\ &\times B'K_T(t) + Q, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$K_T(T) = 0; \quad (4.22)$$

$x_T(t)$ — розв'язок задачі Коші

$$\dot{x}_T(t) = (A - B H^{-1}B'K_T(t))x_T(t),$$

$$x_T(0) = x^0. \quad (4.23)$$

Крім того,

$$J_T(u_T) = \int_0^T (x'_T(t) Q x_T(t) + u'_T(t, x_T(t)) H u_T(t, x_T(t))) dt =$$

$$= (x^0)' K_T(0) x^0. \quad (4.24)$$

Із результатів попереднього пункту витікає, що оптимальне керування в задачі (4.1) – (4.2), (4.19) має вигляд

$$u_\infty(x_\infty(t)) = -H^{-1} B' K_\infty x_\infty(t), \quad (4.25)$$

де K_∞ – розв'язок рівняння

$$0 = K_\infty A + A' K_\infty - K_\infty B H^{-1} B' K_\infty + Q \quad (4.26)$$

$x_\infty(t)$ – розв'язок задачі Коші

$$\dot{x}_\infty(t) = (A - B H^{-1} B' K_\infty) x_\infty(t),$$

$$x_\infty(0) = x^0. \quad (4.27)$$

Крім того,

$$J_\infty(u_\infty) = \int_0^\infty (x'_\infty(t) Q x_\infty(t) + u'_\infty(t, x_\infty(t)) H u_\infty(t, x_\infty(t))) dt =$$

$$= (x^0)' K_\infty x^0. \quad (4.28)$$

В наведених вище розв'язках матриці $K_T(t), K_\infty$ – симетричні і додатньо визначені. Зв'язок між цими розв'язками при достатньо великих значеннях T було встановлено Ю. М. Репіним та В. Є. Третьяковим.

Теорема 4.4. Для того щоб керування (4.25) було оптимальним (матриця K_∞ – додатньо визначена), необхідно і достатньо, щоб існувала кінцева границя $K_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} K_T(0)$

Доведення. Необхідність. Нехай керування (4.20) є оптимальним в задачі (4.1) – (4.2), (4.18).

Розглянемо довільну мототонно зростаючу числову послідовність $T_i, i \geq 1, \lim_{i \rightarrow \infty} T_i = \infty$.

Кожному елементу T_i відповідає своя задача оптимального керування (4.1) – (4.2), (4.18). Утворимо послідовність таких задач. Їм відповідає послідовність додатньо визначених квадратичних форм (див. (4.24))

$$(x^0)' K_{T_j}(0) x^0 = \int_0^{T_j} (x'_{T_j}(t) Q x_{T_j}(t) + u'_{T_j}(t, x_{T_j}(t)) H u_{T_j}(t, x_{T_j}(t))) dt. \quad (4.29)$$

Ця послідовність буде монотонно зростаючою для довільних фіксованих x^0 . Дійсно, в силу того, що в задачі (4.1) – (4.2), (4.18) оптимальне керування на відрізку $[0, T_j]$ єдине, будемо мати нерівність

$$\int_0^{T_j} (x'_{T_j}(t) Q x_{T_j}(t) + u'_{T_j}(t, x_{T_j}(t)) H u_{T_j}(t, x_{T_j}(t))) dt <$$

$$< \int_0^{T_j} (x'_{T_{j+1}}(t) Q x_{T_{j+1}}(t) + u'_{T_{j+1}}(t, x_{T_{j+1}}(t)) H u_{T_{j+1}}(t, x_{T_{j+1}}(t))) dt,$$

яка лише підсилиться, коли в інтегралі правої частини верхню границю T_j замінити на T_{j+1} , тобто

$$\int_0^{T_j} (x'_{T_j}(t) Q x_{T_j}(t) + u'_{T_j}(t, x_{T_j}(t)) H u_{T_j}(t, x_{T_j}(t))) dt <$$

$$< \int_0^{T_{j+1}} (x'_{T_{j+1}}(t) Q x_{T_{j+1}}(t) + u'_{T_{j+1}}(t, x_{T_{j+1}}(t)) H u_{T_{j+1}}(t, x_{T_{j+1}}(t))) dt.$$

Більше того, ця послідовність має верхню границю вигляду

$$(x^0)' K_\infty x^0 = \int_0^\infty (x'_\infty(t) Q x_\infty(t) + u'_\infty(t, x_\infty(t)) H u_\infty(t, x_\infty(t))) dt,$$

що і доводить необхідність умови теореми.

Достатність умови $K_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} K_T(0)$ очевидна •

§ 5. Оптимальна стабілізація обмеженим керуванням.

Розглянемо задачу оптимального керування (4.1) – (4.3), поклавши для простоти міркувань $t_0 = 0$, $B = b$ – числовий вектор розмірності n ; $H = 1$. Тоді керування $u(t)$ буде скалярною кусково - неперервною функцією.

Припустимо, щоб матриця A і вектор b були такими, для яких система (4.1) була б цілком керованою, тобто для них виконувався критерій Калмана (4.13). Крім того, будемо вимагати, щоб виконувалась умова

$$u_0 \leq u(t) \leq u_1, \quad (5.1)$$

де u_i – дійсні числа.

Потрібно збудувати розв'язок наведеної задачі у формі синтезу.

1. Аналіз задачі обмеженого оптимального синтезу. Функція Беллмана $S[x]$ для цієї задачі, згідно § 4, задовольняє рівнянню

$$\min_{u_0 \leq u \leq u_1} \{x'Qx + u^2 + (\frac{\partial S}{\partial x})'(Ax + bu)\} = 0. \quad (5.2)$$

Тоді оптимальне керування буде мати вигляд

$$u(x) = \begin{cases} u_0, & \sigma \leq u_0, \\ \sigma, & u_0 < \sigma < u_1, \\ u_1, & \sigma \geq u_1, \end{cases} \quad (5.3)$$

де $\sigma = -0.5b' \frac{\partial S}{\partial x}$.

Спочатку з'ясуємо, що являє собою множина $L \subset R^n$, в якій функція $S[x]$ визначається додатньою квадратичною формою

$$S_z[x] = x'Kx. \quad (5.4)$$

Таке представлення функції $S[x]$ буде тоді, коли мінімум виразу, що стоїть у фігурних дужках рівняння (5.2), досягається у внутрішній точці відрізка $[u_0, u_1]$. Ця точка має вигляд

$$u = -0.5b' \frac{\partial S_z}{\partial x}, \quad (5.5)$$

а для визначення функції $S_z[x]$ із (5.2) і (5.5) отримаємо рівняння

$$x'Qx + (\frac{\partial S_z}{\partial x})'Ax - \frac{1}{4}(b' \frac{\partial S_z}{\partial x})^2 = 0. \quad (5.6)$$

Квадратична форма (5.4) буде розв'язком рівняння (5.6), коли симетрична додатньо визначена матриця K буде розв'язком рівняння (4.17). При цьому виконується нерівність

$$u_0 < -\sum_{i=1}^n m_i x_i < u_1, \quad (5.7)$$

де $m_i = \sum_{k=1}^n b_k K_{k,i}$.

Таким чином, область L фазового простору R^n , в якій функція $S[x]$ визначається у вигляді (5.4), росташована у шарі Z , який лежить між площинами l_0 та l_1 , які задаються рівняннями

$$-\sum_{i=1}^n m_i x_i = u_0, \quad -\sum_{i=1}^n m_i x_i = u_1.$$

На рис. 5.1 представлена відповідна картина для частинного випадку, коли $n = 2$. Але, як покаже подальший аналіз, область L не завжди буде співпадати з усім шаром Z . За межами цього шару мінімум в рівнянні (5.2) досягається на керуваннях u_0 та u_1 , а тому функція $S[x]$ буде визначатися із рівнянь

$$x'Qx + u_0^2 + (\frac{\partial S}{\partial x})'(Ax + bu_0) = 0, \quad x \in N_0, \quad (5.8)$$

вддовж якої відбувається гладке склеювання функції $S_1[x]$ з функцією $S_{1,1}[x]$, яка задовольняє рівнянню (5.6). Останнє розв'язується не у вигляді квадратичної форми. Рівняння цієї лінії має вигляд

$$-0.5b' \frac{\partial S_1}{\partial x} = u_1.$$

З іншого боку, рівняння

$$-0.5b' \frac{\partial S_0}{\partial x} = u_0$$

породжує лінію D_1P_1 , яка починається в точці D_1 і вздовж неї відбувається гладке склеювання функцій $S_{1,1}[x]$ та $S_0[x]$.

Крім того, вздовж траєкторії C_1D_1 у шарі Z відбувається гладке склеювання функцій $S_{1,1}[x]$ та $S_Z[x]$. Аналогічна ситуація буде і в точці C_2 , в якій деяка траєкторія дотикається до лінії l_0 (див. рис. 5.1.)

Таким чином, область L , в якій функція $S[x] = S_z[x]$, обмежена лініями C_1D_1, D_2C_2 . В області, яка обмежена лініями P_1C_1, D_2P_2 , функція $S[x] = S_1[x]$. В області, яка обмежена лініями C_1P_1, D_1 , функція $S[x] = S_{1,1}[x]$. В області, яка обмежена лініями P_1D_1, C_2, P_2 , функція $S[x] = S_0[x]$. В області, яка обмежена лініями C_2D_2, P_2 , функція $S[x] = S_{0,0}[x]$. Остання визначається із того ж рівняння (5.6), що і функція $S_{1,1}[x]$, але має інші лінії гладкого склеювання із сусідніми областями. Для отримання значень функції $S[x]$ в усіх областях площини крім області L , потрібно розв'язувати рівняння з частинними похідними першого порядку з додатковими умовами на границях цих областей.

2. Розв'язок рівняння з частинними похідними першого порядку. Спочатку розглянемо однорідне лінійне рівняння

$$X[f] = \sum_{i=1}^n X_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad (5.12)$$

в якому X_i вважаються заданими неперервно диференційованими функціями в околі деякої точки $x^0 \in R^n$. Разом з цим рівнянням розглядається система звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{X_1} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} \quad (5.13)$$

Нехай

[illegible]

система незалежних інтегралів системи рівнянь (5.13), яка визначена в деякій області $D \subset R^n$, що містить точку x^0 .

Тому вздовж будь-якої інтегральної кривої системи (5.13) виконуються умови

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} dx_j = 0, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (5.15)$$

З іншого боку, вздовж тієї ж інтегральної кривої диференціали dx_i пропорційні функціям X_i . Тому із (5.15) будемо мати

$$X[\psi_i] = \sum_{j=1}^n X_j(x) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} = 0, \quad i = \overline{1, n-1},$$

тобто кожна функція ψ_i в інтегралах (5.14) є розв'язком рівняння (5.13).

Нехай $\Phi(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})$ – довільна диференційована функція своїх аргументів. Тоді

$$X[\Phi] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} X_i \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n-1} X[\psi_j] \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_j} = 0. \quad (5.16)$$

Таким чином, функція

$$f = \Phi(\psi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n)) \quad (5.17)$$

буде загальним розв'язком рівняння (5.24), а загальний розв'язок рівняння (5.22) в неявній формі буде мати вигляд

$$\Phi(\psi_1, \dots, \psi_n) = 0. \quad (5.26)$$

Лишається визначити розв'язок задачі Коші для квазілінійного рівняння (5.22), яка формулюється таким чином. Нехай $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$ — задана функція, яка визначена в околі точки $(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$. Потрібно знайти розв'язок $z = z(x_1, \dots, x_n)$ рівняння (5.22), який визначений в околі точки $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ і задовольняє умові

$$z(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}). \quad (5.27)$$

Для розв'язання цієї задачі використаємо інтеграли (5.25). Поклавши в них $x_n = x_n^0$ і враховуючи, що $z = x_{n+1}$, уведемо нові координати

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0, z) = \hat{\psi}_1, \\ \dots, \\ \psi_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0, z) = \hat{\psi}_n. \end{cases}$$

Ця система однозначно визначає неперервно диференційовані функції

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_n), \\ \dots, \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_n), \\ z = \omega_n(\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_n), \end{cases}$$

а розв'язок задачі Коші задається тоді в неявному вигляді

$$\omega_n(\psi_1, \dots, \psi_n) - \varphi(\omega_1(\psi_1, \dots, \psi_n), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \dots, \psi_n)) = 0.$$

Замість точкової умови (5.27) розглянемо умову

$$z(x)|_\gamma = \varphi(x_1, \dots, x_n), \quad (5.28)$$

де γ — гіперповерхня розмірності $n - 1$.

Початкова умова $(\gamma, \varphi(x))$ називається *нехарактеристичною* для квазілінійного рівняння (5.22) в точці x^0 із γ , якщо вектор з компонентами $X_i(x^0, \varphi(x^0))$, $i = \overline{1, n}$ не дотикається до поверхні γ в цій точці.

Далі будемо вважати, що початкові умови (5.28) — нехарактеристичні. Всі розв'язки рівняння (5.22) задаються у вигляді (5.26).

Нехай поверхня γ задається рівнянням

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Тоді із рівнянь

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

$$\psi_i(x_1, \dots, x_n, z) = c_i, \quad i = \overline{1, n},$$

$$z = \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

потрібно виключити змінні $x_1, \dots, x_n, z$ і отримати співвідношення вигляду $F(c_1, \dots, c_n) = 0$. Розв'язок буде задаватись у неявному вигляді

$$F(\psi_1(x, z), \dots, \psi_n(x, z)) = 0.$$

Приклад 5.1. Потрібно знайти розв'язок $z = z(x, y)$ рівняння

$$(1 + \sqrt{z - x - y}) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2$$

при початкових умовах

$$z = 2x, \quad \text{якщо } y = 0.$$

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$f(x, y, z) = 0,$$

де функція f задовольняє рівнянню

$$(1 + \sqrt{z - x - y}) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + 2 \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Для отримання розв'язку цього рівняння потрібно знайти два незалежних інтеграла системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}.$$

Останні два рівняння цієї системи дають інтеграл

$$\psi_2 \equiv z - 2y = c_2.$$

Для отримання ще одного інтегралу складаємо інтегровану комбінацію із рівнянь тієї ж системи

$$\frac{dy}{1} = - \frac{dz - dx - dy}{\sqrt{z - x - y}}.$$

Тут і в прикладах наступного пункту ми скористались наступною властивістю рівних дробів: якщо

$$\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_m}{b_m} = t,$$

то і

$$\frac{k_1 a_1 + \dots + k_m a_m}{k_1 b_1 + \dots + k_m b_m} = t.$$

Тоді отримаємо інтеграл

$$\psi_1 \equiv y + 2\sqrt{z - x - y} = c_1.$$

Покладемо в отриманих інтегралах $y = 0$ і уведемо нові змінні $z = \hat{\psi}_2, 2\sqrt{z - x} = \hat{\psi}_1$. Старі координати виражаються через нові таким чином

$$x = \omega_1(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2) = -\frac{\hat{\psi}_1^2}{4} + \hat{\psi}_2, \quad z = \omega_2(\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2) = \hat{\psi}_2.$$

Тоді отримаємо розв'язок вихідної задачі у вигляді

$$\psi_1^2 - 2\psi_2 = 0,$$

або

$$(y + 2\sqrt{z - x - y})^2 - 2z + 4y = 0 \quad \bullet$$

3. Розв'язання задач оптимальної стабілізації з обмеженням керуванням. В цьому пункті розглянемо два приклади, які ілюструють методику розв'язування задач оптимальної стабілізації в принципово різних ситуаціях. В першому випадку функція Беллмана визначається у вигляді квадратичної форми у всьому шарі Z , який лежить між лініями l_0 та l_1 (див. Рис. 5.1.) Тому в середині шару оптимальне керування є лінійною функцією фазових координат, а поза шаром воно постійне. В другому випадку структура оптимального керування більш складна. Функція Беллмана визначається у вигляді квадратичної форми не в усьому шарі Z , а лише в околі початку координат. В цьому околі оптимальне керування є лінійною функцією фазових координат, а поза ним функція Беллмана має інше аналітичне представлення в різних областях, що ускладнює визначення оптимального керування в цих областях.

Приклад 5.2. Нехай керований процес описується рівняннями

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_2 + u, |u| \leq 1,$$

а критерій якості має вигляд

$$J(u) = \int_0^\infty (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt.$$

Формула (5.3), яка визначає оптимальне керування, тепер буде мати вигляд

$$u(x) = \begin{cases} -1, & \sigma \leq -1, \\ \sigma, & -1 < \sigma < 1, \\ 1, & \sigma \geq 1, \end{cases} \quad (5.29)$$

де $\sigma = -0.5 \frac{\partial S}{\partial x_2}$.

В області L , де $|u| < 1$, функція Беллмана $S[x]$ визначається із рівняння

$$x_1^2 + x_2^2 + x_2 \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} - \frac{\partial S}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 = 0.$$

Цьому рівнянню задовольняє додатньо визначена квадратична форма (5.4), яка визначається стандартно і має вигляд

$$S_z[x] = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2. \quad (5.30)$$

Таким чином, в області L оптимальне керування має вигляд

$$u(x) = -x_1 - x_2, \quad (5.31)$$

а рівняння замкнутої вихідної системи запишуться таким чином

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2.$$

Рівняння границь області L мають вигляд (див. рис. 5.2)

$$-x_1 - x_2 = \pm 1. \quad (5.32)$$

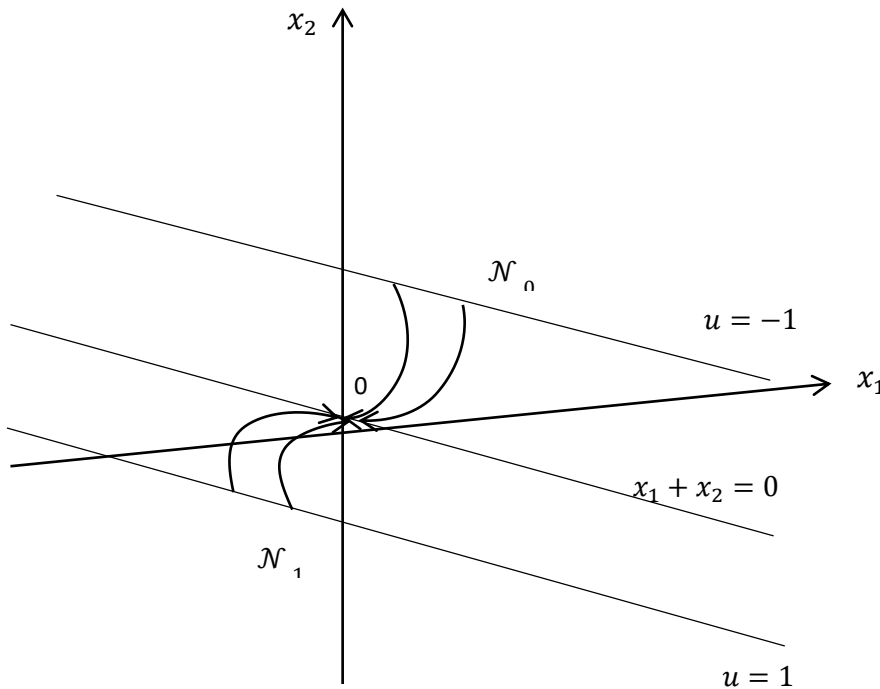


Рис. 5.2

В кожній точці прямих (5.32) виконується рівність

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -1$$

і в кожній точці траєкторії замкнутої системи виконується рівність

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1 + 2x_2}{x_2}.$$

Якщо точка траєкторії замкнутої системи лежить на одній із ліній (5.32), то повинна виконуватись рівність

$$\frac{dx_2}{dx_1} \Big|_{x_1 + x_2 = \mp 1} = -\frac{x_1 + 2x_2}{x_2} \Big|_{x_1 + x_2 = \mp 1},$$

але

$$-\frac{x_2 \mp 1}{x_2} \neq -1.$$

Тому траєкторія замкнутої системи не дотикається до ліній (5.32) і вся полоса, яку ці лінії обмежують, є областю, в якій функція Беллмана задається квадратичною формою (5.30), а

оптимальне керування в ній визначається формулою (5.31).

Лишається продовжити функцію $S_z[x]$ за межі області L . Для цього потрібно розв'язати рівняння (див. рівняння (5.8), (5.9))

$$x_1^2 + x_2^2 + 1 + x_2 \frac{\partial S}{\partial x_1} + (-x_2 \pm 1) \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0 \quad (5.33)$$

з додатковими умовами на границях полоси L

$$S[x] = x_1^2 + 1 \text{ при } x_1 + x_2 = \mp 1. \quad (5.34)$$

Спочатку розв'яжемо задачу Коші (5.33) - (5.34) в області N_0 з керуванням $u = -1$. Для цього потрібно знайти загальний інтеграл системи

$$-\frac{dS}{x_1^2 + x_2^2 + 1} = \frac{dx_1}{x_2} = -\frac{dx_2}{x_2 + 1}. \quad (5.35)$$

Звідси легко знаходимо один перший інтеграл

$$\psi_1 = x_1 + x_2 - \ln|x_2 + 1| = c_1.$$

Для отримання другого першого інтегралу складемо рівняння із лінійних комбінацій дробів, що входять в систему рівнянь

$$\frac{2x_1 dx_1 - dS}{1 + (x_1 + x_2)^2} = \frac{d(x_1 + x_2)}{-1}. \quad (5.36)$$

Із (5.36) знаходимо

$$\psi_2 = x_1^2 - S + x_1 + x_2 + \frac{(x_1 + x_2)^3}{3} = c_2.$$

Тоді, згідно з попереднім пунктом, розв'язки рівняння

$$x_1^2 + x_2^2 + 1 + x_2 \frac{\partial S}{\partial x_1} - (x_2 + 1) \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0$$

у неявному вигляді задаються рівнянням

$$\Phi(x_1 + x_2 - \ln|x_2 + 1|, x_1^2 - S + x_1 + x_2 + \frac{(x_1 + x_2)^3}{3}) = 0.$$

Розв'язуючи його відносно другого аргументу, отримаємо

$$S = x_1^2 + x_1 + x_2 + \frac{(x_1 + x_2)^3}{3} - \widehat{\Phi}(x_1 + x_2 - \ln|x_2 + 1|),$$

де $\widehat{\Phi}$ – довільна неперервно диференційована функція.

Підберемо цю функцію таким чином, щоб виконувалась умова (5.34). Тоді шукана функція Беллмана буде мати вигляд

$$S_0[x] = x_1^2 + x_1 + x_2 + \frac{(x_1 + x_2)^3}{3} - \frac{1}{3}.$$

Аналогічно визначаємо функцію Беллмана в області $N_1(u = 1)$

$$S_1[x] = x_1^2 - x_1 - x_2 - \frac{(x_1 + x_2)^3}{3} - \frac{1}{3}.$$

Таким чином, оптимальне керування має вигляд

$$u(x) = \begin{cases} -1, & x_1 + x_2 \geq 1, \\ -x_1 - x_2, & |x_1 + x_2| < 1, \\ 1, & x_1 + x_2 \leq -1, \end{cases}$$

а оптимальне значення критерію обчислюється таким чином

$$S[x^0] = \begin{cases} S_0[x^0], & x_1^0 + x_2^0 \geq 1, \\ S_z[x^0], & |x_1^0 + x_2^0| < 1, \\ S_1[x^0], & x_1^0 + x_2^0 \leq -1. \end{cases} \bullet$$

Приклад 5.3. Нехай керований процес описується рівняннями

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, |u| \leq 1,$$

а критерій якості має вигляд

$$J(u) = \int_0^\infty (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt.$$

Тоді оптимальне керування буде мати вигляд (5.29). В області L , де $|u| < 1$, функція Беллмана

$S_Z[x]$ має вигляд (див. приклад 5.2.)

$$S_Z[x] = \sqrt{3}x_1^2 + 2x_1x_2 + \sqrt{3}x_2^2,$$

а оптимальне керування задається формулою

$$u(x) = -x_1 - \sqrt{3}x_2. \quad (5.37)$$

Воно визначає рівняння замкнутої вихідної системи

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 - \sqrt{3}x_2. \quad (5.38)$$

Рівняння границь області L мають вигляд

$$-x_1 - \sqrt{3}x_2 = \pm 1. \quad (5.39)$$

Тут шар Z не співпадає з усією областю L . Він заповнює лише деякий окіл початку координат, обмежений з двох боків прямими (5.39), а з двох інших боків – криволінійними границями. Останні визначаються в процесі побудови функції Беллмана $S[x]$, яка задовольняє рівнянню

$$\min_{|u| \leq 1} \{x_1^2 + x_2^2 + u^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} u\} = 0. \quad (5.40)$$

Спочатку знайдемо точки дотику фазової траєкторії замкнутої системи (5.38) та прямих (5.39). Ці точки визначаються із рівності кутових коефіцієнтів прямих та фазової траєкторії. Будемо мати

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (для прямих (5.39))},$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1 + \sqrt{3}x_2}{x_2} \text{ (для системи (5.38))}.$$

Звідси отримаємо рівняння

$$\frac{x_1 + \sqrt{3}x_2}{x_2} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

яке потрібно розв'язувати спільно з рівняннями (5.39). В результаті отримаємо дві точки дотику: $C_1(-2, \sqrt{3}), C_2(2, -\sqrt{3})$ (див. рис. 5.3).

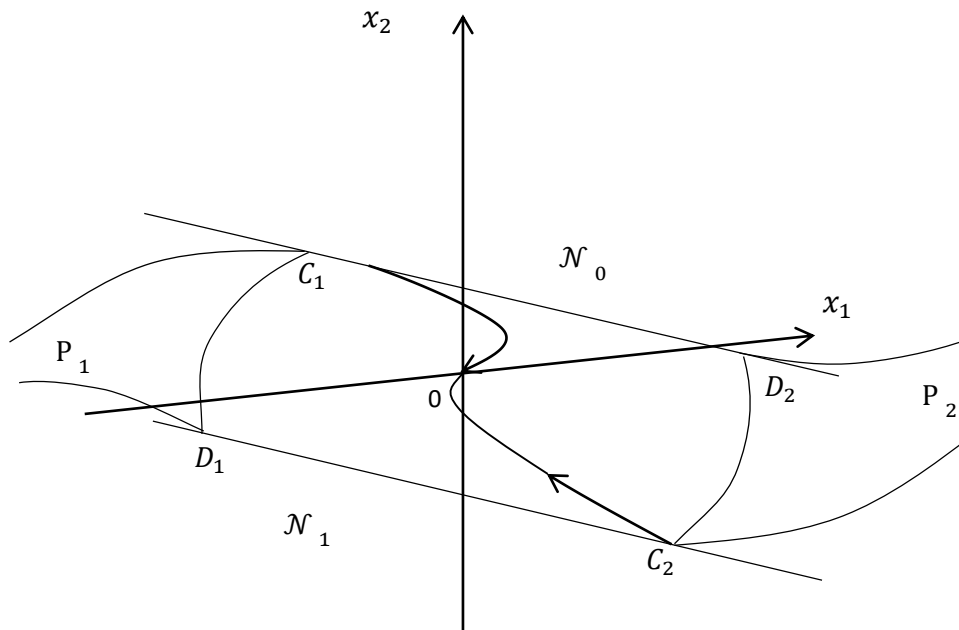


Рис. 5.3

Розглянемо область N_0 , яка обмежена знизу напівпрямною $x_1 + \sqrt{3}x_2 = 1$ і росташована праворуч від точки C_1 . В цій області оптимальним керуванням є $u = -1$, а рівняння (5.40) приймає вигляд

$$x_1^2 + x_2^2 + 1 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0. \quad (5.41)$$

Потрібно знайти функцію $S_0[x]$, яка задовольняє рівнянню (5.41) і умові

$$S_0[x] = S_z[x] \quad \text{при} \quad x_1 + \sqrt{3}x_2 = 1. \quad (5.42)$$

З цією метою знаходимо незалежні інтеграли системи рівнянь

$$\frac{dx_1}{x_2} = - \frac{dx_2}{1} = - \frac{dS_0}{x_1^2 + x_2^2 + 1}.$$

Перший інтеграл визначається досить просто

$$\psi_1 = 2x_1 + x_2^2 = c_1. \quad (5.43)$$

Другий інтеграл визначаємо із рівняння

$$\frac{dS_0}{dx_2} = x_1^2 + x_2^2 + 1 = x_1^2 + x_2^2 + 1 = x_2^2 + \frac{(c_1 - x_2^2)^2}{4} + 1.$$

Звідси визначаємо

$$\psi_2 = -15S_0 + 5x_2^3 + 2x_2^5 + 10x_1x_2^3 + 15x_1^2x_2 + 15x_2 = c_2. \quad (5.44)$$

На границі $x_1 + \sqrt{3}x_2 = 1$ уведемо нові змінні

$$2(1 - \sqrt{3}x_2) + x_2^2 = \hat{\psi}_1,$$

$$-15S_0 + 5x_2^3 + 2x_2^5 + 10(1 - \sqrt{3}x_2)x_2^3 + 15(1 - \sqrt{3}x_2)^2x_2 + 15x_2 = \hat{\psi}_2.$$

Розв'язуючи ці рівняння, будемо мати

$$x_2 = \sqrt{3} \pm z,$$

$$15S_0 = -\hat{\psi}_2 + 48\sqrt{3} \pm 120z + 30\sqrt{3}z^2 \pm 2z^5, \quad (5.45)$$

де $z = \sqrt{1 + \hat{\psi}_1}$.

На тій же границі будемо мати

$$\begin{aligned} S_0|_{x_1=1-\sqrt{3}x_2} &= \sqrt{3}x_1^2 + 2x_1x_2 + \sqrt{3}x_2^2|_{x_1=1-\sqrt{3}x_2} = \\ &= \sqrt{3} - 4x_2 + 2\sqrt{3}x_2^2. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Умова (5.46) в нових змінних набуде вигляду

$$-\hat{\psi}_2 + 3\sqrt{3} \pm 2z^5 = 0. \quad (5.47)$$

Замінюючи в (5.47) $\hat{\psi}_i$ на ψ_i , отримаємо остаточно

$$S_0[x] = \frac{1}{15} [5(2x_1 + 1)x_2^3 + 2x_2^5 + 15(1 + x_1^2)x_2 - 3\sqrt{3} + 2(1 + 2x_1 + x_2^2)^{\frac{5}{2}}],$$

де $x_1 + \sqrt{3}x_2 \geq 1$.

Границі P_1, C_1D_2, P_2 області N_0 визначаються із рівняння

$$\frac{\partial S_0}{\partial x_2} = 2. \quad (5.48)$$

В області N_1 функція Беллмана буде мати вигляд

$$S_1[x] = \frac{1}{15} [5(2x_1 - 1)x_2^3 - 2x_2^5 - 15(1 + x_1^2)x_2 - 3\sqrt{3} + 2(1 - 2x_1 + x_2^2)^{\frac{5}{2}}],$$

де $x_1 + \sqrt{3}x_2 \leq -1$.

Границі P_1, D_1, C_2P_2 області N_1 визначаються із рівняння

$$\frac{\partial S_1}{\partial x_2} = -2. \quad (5.49)$$

Границі D_1C_1 та C_2D_2 визначаються відповідно із рівнянь

$$\frac{\partial S_z}{\partial x_2} = \frac{\partial S_{0,0}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial S_z}{\partial x_2} = \frac{\partial S_{1,1}}{\partial x_2},$$

де $S_{0,0}[x], S_{1,1}[x]$ – розв'язки рівняння

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 = 0$$

відповідно в областях P_1, C_1, D_1 і P_2, C_2, D_2 з умовами спряження із суміжними областями.

Слід відзначити, що як правило області P_1, C_1, D_1 і P_2, C_2, D_2 розташовані далеко від початку координат і їх впливом на значення критерію можна знехтувати •

§ 6. Достатні умови оптимальності.

1. Достатні умови оптимальності в термінах функції Беллмана. В § 1 цього розділу для керованого процесу $(x(t), u(t))$, де фазовий вектор (стан системи) $x(t)$ задовольняє задачі Коші (1.1) – (1.2), критерій якості має вигляд (1.3), $u(t)$ – кусково неперервні функції на відрізку $[t_0, T]$ і $u(t) \in U \subseteq R^r$, було отримано такі необхідні умови оптимальності: оптимальний процес $(x_*(t), u_*(t))$ задовольняє задачі Коші для неперервно диференційовної функції Беллмана $S[t, x(t)]$

$$-\frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial t} = \min_{u(t) \in U} \{f_0(t, x(t), u(t)) + \left(\frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial x}, f(t, x(t), u(t)) \right)\}, \quad (6.1)$$

$$S[T, x(T)] = \Phi(x(T)). \quad (6.2)$$

Нехай мінімум правої частини в рівнянні (6.1) досягається в точці

$$u[t, x] = U(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}), \quad (6.3)$$

де функція U є кусково неперервною.

З'ясуємо наскільки необхідні умови оптимальності (6.1) – (6.3) близькі до достатніх умов оптимальності. Має місце наступна теорема.

Теорема 6.1. Нехай деяка неперервно диференційована функція $S[t, x]$ поточково задовольняє задачі (6.1) – (6.2), а мінімум правої частини в рівнянні (6.1) досягається на функції (6.3), причому

$$u(t) = U(t, x(t), \frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial x}) \in U,$$

де $x(t)$ – єдиний розв'язок задачі Коші

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), U(t, x(t), \frac{\partial S[t, x(t)]}{\partial x})), t_0 < t \leq T,$$

$$x(t_0) = x^0.$$

Тоді функція $u[t, x]$, що задається формулою (6.3), є оптимальним керуванням у формі синтезу в задачі (1.1) – (1.3).

Доведення. Зафіксуємо $t \in [t_0, T]$ і позначимо через $x_*(\tau), \tau \in [t, T]$ розв'язок задачі Коші

$$\dot{x}(\tau) = f(\tau, x(\tau), u[\tau, x(\tau)]), x(t) = x \in R^n.$$

Покладемо $u_*(\tau) = u[\tau, x_*(\tau)], \tau \in [t, T]$. Зрозуміло, що $u_*(\tau) \in U, \tau \in [t, T]$ і пара $(x_*(\tau), u_*(\tau))$ є допустимою. Для доведення теореми достатньо показати, що ця пара являється оптимальною.

Спочатку покажемо, що для будь-якої допустимої пари $(x(\tau), u(\tau))$ задачі (1.1) – (1.3) справедлива формула

$$J(t, x, u(.)) = \int_t^T R(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + S[t, x], \quad (6.4)$$

де

$$R(x, u, t) = (S_x[t, x], f(t, x, u)) + S_t[t, x] + f_0(t, x, u).$$

Дійсно, в силу того, що в якості другого аргумента у функції S виступає розв'язок задачі Коші (1.1) – (1.32), отримаємо

$$\frac{dS[\tau, x]}{d\tau} = R(x(\tau), u(\tau), \tau) - f_0(\tau, x(\tau), u(\tau)).$$

Інтегруючи цю тотожність по $\tau \in [t, T]$ з урахуванням умови (6.2), отримаємо

$$\Phi(x(T)) - S[t, x] = \int_t^T R(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau - \int_t^T f_0(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau,$$

що рівнозначно (6.4).

Рівняння (6.1) за допомогою функції $R(x, u, t)$ можна записати у вигляді

$$\min_{v \in U} R(x, v, \tau) = 0.$$

Звідси отримаємо

$$R(x, u[t, x], \tau) = 0 = \min_{v \in U} R(x, v, \tau) \leq$$

$$\leq R(x, \xi, \tau) \quad \forall \xi \in U, \forall x \in R^n, \tau \in [t, T]. \quad (6.5)$$

Якщо $(x(\tau), u(\tau))$ – допустима пара в задачі (1.1) – (1.3), то із (6.5) отримаємо

$$R(x_*(\tau), u[\tau, x_*(\tau)], \tau) = R(x_*(\tau), u_*(\tau), \tau) = 0 \leq$$

$$\leq R(x, u, \tau), \tau \in [t, T]. \quad (6.6)$$

Звідси і формули (6.4) при $x_* = x(t) = x$ будемо мати

$$J(t, x, u(\cdot)) - J(t, x, u_*(\cdot)) = \int_t^T R(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \leq 0 \quad (6.7)$$

для всіх допустимих пар $(x(\tau), u(\tau))$ задачі (1.1) – (1.3).

Із (6.7), (6.6), (6.4) витікає, що

$$J(t, x, u_*(\cdot)) = \min_{u(\tau), \tau \in [t, T]} J(t, x, u(\cdot)) = S[t, x].$$

Ця ж формула буде справедливою і у випадку, коли $t = t_0$, $x = x^0$. Тим самим доведено, що функція $S[t, x]$, яка є розв'язком задачі (6.1) – (6.2), являється функцією Беллмана для задачі (1.1) – (1.3), а функція $u[t, x]$, на якій досягається мінімум правої частини в рівнянні (6.1), являється оптимальним синтезом у вихідній задачі •

2. Достатні умови оптимальності в термінах функції Кротова. Нехай $K(t, x)$, $t \in [t_0, T]$, $x \in R^n$ – деяка неперервно диференційована функція і така, що $K(t, x(t))$ – неперервно диференційована функція відносно $t \in [t_0, T]$, де $x(t)$ – розв'язок задачі Коші (1.1) – (1.2) при допустимому керуванні $u(t)$. Таку функцію в теорії оптимального керування називають функцією Кротова. Збудуємо функції

$$\hat{R}(x, u, t) = (K_x(t, x), f(t, x, u)) + K_t(t, x) + f_0(t, x, u), \quad (6.8)$$

$$G(T, x) = \Phi(x) - K(T, x). \quad (6.9)$$

Якщо покласти $K(t, x) = S[t, x]$, то $\hat{R}(x, u, t) = R(x, u, t)$. Тому часто в якості функції $K(t, x)$ беруть деяке наближення функції Беллмана $S[t, x]$.

Повернемось до функції $K(t, x)$. В силу рівняння (6.8) отримаємо

$$\frac{dK(t, x(t))}{dt} = \frac{\partial K(t, x(t))}{\partial t} + (K_x(t, x(t)), f(t, x(t), u(t))) =$$

$$= \hat{R}(x(t), u(t), t) - f_0(t, x(t), u(t)) \quad \forall u(t) \in U, t \in [t_0, T].$$

Інтегруючи останній вираз по t на відрізку $[t_0, T]$, отримаємо

$$K(T, x(T)) - K(t_0, x^0) = \int_{t_0}^T \hat{R}(x(t), u(t), t) dt - \int_{t_0}^T f_0(t, x(t), u(t)) dt +$$

$$+ \Phi(x(T)) - \Phi(x(T)),$$

або

$$J(t_0, x^0, u(\cdot)) = \int_{t_0}^T \hat{R}(x(t), u(t), t) dt + G(T, x(T)) + K(t_0, x^0). \quad (6.10)$$

Позначимо

$$\hat{R}_{\min}(t) = \min_{(x,u) \in R^n \times U} \hat{R}(x, u, t),$$

$$G_{\min} = \min_{x \in R^n} G(T, x).$$

Тоді для будь-якої допустимої пари $(x(t), u(t))$, $t \in [t_0, T]$ буде мати місце нерівність

$$0 \leq J(t_0, x^0, u(\cdot)) - J(t_0, x^0, u_*(\cdot)) \leq \int_{t_0}^T (\hat{R}(x(t), u(t), t) - \hat{R}_{\min}(t)) dt + \\ + G(T, x(T)) - G_{\min}. \quad (6.11)$$

Очевидно, буде справедливою наступна теорема.

Теорема 6.2. Для того щоб допустима пара $(x_*(t), u_*(t))$, $t \in [t_0, T]$ була оптимальною для вихідної задачі, достатньо існування такої функції $K(t, x)$, відносно якої виконується співвідношення (6.10) і мають місце рівності

$$\hat{R}(x_*(t), u_*(t), t) = \hat{R}_{\min}(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (6.12)$$

$$G(T, x_*(T)) = G_{\min} \quad \bullet \quad (6.13)$$

Крім того, якщо $K(t, x)$ – функція Кротова, то і функція $\bar{K}(t, x) = K(t, x) + E(t)$, де $E(t)$ – довільна кусково неперервна функція на відрізку $[t_0, T]$, буде функцією Кротова. Зокрема, якщо

$$E(t) = \int_t^T \hat{R}_{\min}(\tau) d\tau + G_{\min},$$

то функції $\bar{R}(x, u, t)$, $\bar{G}(T, x)$, які отримуються із (6.8) – (6.9) заміною функції $K(t, x)$ на $\bar{K}(t, x)$, будуть мати вигляд

$$\bar{R}(x, u, t) = \hat{R}(x, u, t) - \hat{R}(t), \quad \bar{G}(T, x) = G(T, x) - G_{\min}.$$

Тоді

$$\min_{(x,u) \in R^n \times U} \bar{R}(x, u, t) = 0, \quad t \in [t_0, T],$$

$$\min_{x \in R^n} \bar{G}(T, x) = 0.$$

Тобто, в теоремі 6.2 без всяких обмежень можна прийняти $R_{\min}(t) = 0$, $G_{\min} = 0$. Звідси витікає, що функція Кротова задовольняє такій системі нерівностей

$$\hat{R}(x, u, t) = (K_x(t, x), f(t, x, u)) + K_t(t, x) + f_0(t, x, u) \geq \\ \geq 0, \quad (x, u) \in R^n \times U, \quad t \in [t_0, T], \quad (6.14)$$

$$G(T, x) = \Phi(x) - K(T, x) \geq 0, \quad x \in R^n. \quad (6.15)$$

Порівнюючи (6.14) – (6.15) з задачею Коші для функції Беллмана (6.1) – (6.2) переконуємося в тому, що функція Беллмана завжди є функцією Кротова, але не навпаки. Функція Кротова визначається із більш широких умов, тому вона може існувати навіть тоді, коли функція Беллмана не існує.

Зауважимо, що викладені вище достатні умови оптимальності можуть бути

розповсюджені на більш складні задачі оптимального керування, зокрема, на задачі з нефіксованим часом та на задачі зі змішаними (по керуванню та фазовим змінним) поточковими обмеженнями.

Приклад 6.1. Знайти розв'язок задачі оптимального керування

$$J = \int_0^1 (x^2(t) - u(t))dt + x(1) \rightarrow \min,$$

$$\dot{x}(t) = u(t), x(0) = 0,$$

де $u(t) \in [-1,1]$ – кусково неперервна функція.

Обиремо функцію Кротова у вигляді $K(t, x) = x$. Тоді $R(x, u, t) = x^2$, $G(T, x) = 0$ і, згідно теореми 6.2, пара $(x_*(t), u_*(t)) = (0, 0)$ буде оптимальною.

Отримаємо цю пару за допомогою принципу максимуму. Функція Гамільтона має вигляд

$$H(.) = \psi_0(x^2(t) - u(t)) + \psi(t) u(t).$$

Тоді, згідно §2 розділу 2, отримаємо

$$\dot{\psi}(t) = - \frac{\partial H(.)}{\partial x} = - 2\psi_0 x(t), \psi(1) = \psi_0,$$

$$u(t) = \text{sign}(\psi(t) - \psi_0).$$

Нехай $\psi_0 = 0$. Тоді $\psi(t) = 0$, $t \in [0,1]$, що суперечить умові нетривіальності $|\psi_0| + |\psi(t)|$ спряжених змінних.

Покладемо $\psi_0 = -0.5$, $\tilde{\psi}(t) = \psi(t) + 0.5$. Тоді двоточкова крайова задача принципу максимуму буде мати вигляд

$$\dot{\tilde{\psi}}(t) = x(t), \tilde{\psi}(1) = 0,$$

$$\dot{x}(t) = \text{sign}\tilde{\psi}(t), x(0) = 0. \quad (6.16)$$

Система (6.16) еквівалентна крайовій задачі

$$\frac{d^2 \tilde{\psi}(t)}{dt^2} - \text{sign}\tilde{\psi}(t) = 0, \dot{\tilde{\psi}}(0) = 0, \tilde{\psi}(1) = 0.$$

Нехай $\tilde{\psi}(t)$ – розв'язок цієї крайової задачі. Тоді для нього буде справедливою така інтегральна тотожність

$$\int_0^1 ((\dot{\tilde{\psi}})^2(t) + |\tilde{\psi}(t)|) dt = 0. \quad (6.17)$$

Із (6.17) витікає, що $\tilde{\psi}(t) = 0$, $t \in [0,1]$. Тоді, довізнаючи функцію знаку $\text{sign}(.)$ в нулі нулем, тобто $\text{sign}0 = 0$, із (6.16) отримаємо $x(t) = u(t) = 0$, $t \in [0,1]$. При цьому керування $u(t) = 0$, $t \in [0,1]$ буде особливим. Дійсно, для нього виконуються всі умови теореми 3.1 розділу 2 і $\bar{\Psi}_*(t) = t - 1 \leq 0$. Таким чином, із умов оптимальності ми отримали допустиму пару $(0,0)$, "підозрілу" на оптимальність. Її оптимальність гарантується достатніми умовами оптимальності, з яких вона була і знайдена достатньо просто. На завершення цього прикладу відзначимо, що вказана простота була досягнута для елементарної задачі оптимального керування. У випадку більш складних задач така простота стає недосяжною •

Задачі до розділу 2.

1. Розв'язати проблему синтезу для задачі мінімізації функціоналу

$$J(u) = \int_0^T (x^2(t) + u^2(t)) dt$$

при умовах $\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$, $x(0) = x^0$, $t \in [0, T]$, керування $u(t) \in R^1$ –

кусково - неперервна функція.

2. Розв'язати проблему синтезу для задачі мінімізації функціоналу

$$J(u) = x^2(1)$$

при умовах $\dot{x}(t) = u(t)$, $x(0) = x^0$, $t \in [0,1]$, керування $u(t) \in U = \{u \in R^1: 0 \leq u \leq 1\}$ – кусково - неперервна функція.

Показати, що в цій задачі існує безліч синтезуючих функцій керування, зокрема, ними можуть бути функції

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

або

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x > t - 1, \\ 1, & x \leq t - 1. \end{cases}$$

3. Розв'язати проблему синтезу для задачі мінімізації функціоналу

$$J(u) = \int_0^T x^2(t) dt$$

при умовах $\dot{x}(t) = u(t)$, $x(0) = x^0$, $t \in [0,1]$, керування $u(t) \in U = \{u \in R^1: -1 \leq u \leq 1\}$ – кусково - неперервна функція.

Чи буде в цій задачі синтезуюча функція єдиною ?

4. Розв'язати проблему синтезу для задачі мінімізації функціоналу

$$J(u) = \int_0^T (x_1^2(t) + u^2(t)) dt$$

при умовах $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $\dot{x}_2(t) = u(t)$, $x_1(0) = x_2(0) = 1$, $t \in [0,T]$, керування $u(t) \in R^1$ – кусково - неперервна функція.

5. Розв'язати проблему синтезу для задачі мінімізації функціоналу

$$J(u) = \int_0^T (x_2^2(t) + u^2(t)) dt$$

при умовах $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $\dot{x}_2(t) = u(t)$, $x_1(0) = x_2(0) = 1$, $t \in [0,T]$, керування $u(t) \in R^1$ – кусково - неперервна функція.

6. Розв'язати проблему оптимальної стабілізації для задачі мінімізації функціоналу

$$J(u) = \int_0^\infty (x_1^2(t) + u^2(t)) dt$$

при умовах $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $\dot{x}_2(t) = u(t)$, $x_1(0) = x_2(0) = 1$, керування $u(t) \in R^1$ – кусково - неперервна функція.

7. Розв'язати проблему оптимальної стабілізації для задачі мінімізації функціоналу

$$J(u) = \int_0^\infty (x_2^2(t) + u^2(t)) dt$$

при умовах $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $\dot{x}_2(t) = u(t)$, $x_1(0) = x_2(0) = 1$, керування $u(t) \in R^1$ – кусково - неперервна функція.

8. Розв'язати проблему оптимальної стабілізації для задачі мінімізації функціоналу

$$J(u) = \int_0^\infty (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)) dt$$

при умовах $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t)$, $x_1(0) = x_2(0) = 1$, керування $u(t) \in R^1$

R^1 – кусково - неперервна функція.

9. Розв'язати проблему оптимальної стабілізації для задачі мінімізації функціоналу

$$J(u) = \int_0^\infty (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)) dt$$

при умовах $\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t), x_1(0) = x_2(0) = 1$, керування $|u(t)| \leq 1$ – кусково - неперервна функція.

10. Розв'язати проблему оптимальної стабілізації для задачі мінімізації функціоналу

$$J(u) = \int_0^\infty (x_1^2(t) + u^2(t)) dt$$

при умовах $\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t), x_1(0) = x_2(0) = 1$, керування $|u(t)| \leq 1$ – кусково - неперервна функція.

11. Розглянемо задачу мінімізації функціоналу

$$J(u) = \int_0^T (u^2(t) - x^2(t)) dt$$

при умовах $\dot{x}(t) = u(t), x(0) = x(T) = 0, u(t)$ – кусково - неперервна функція. Показати, що пара $(u_*(t) = 0, x_*(t) = 0)$ є оптимальною при $0 < T < \pi$.

(Вказівка: функцію Кротова шукати у вигляді $K(t, x) = \psi(t) x^2$, де $\psi(t)$ – довільна функція).

12. За допомогою принципу максимуму знайти "підозрілі" на оптимальність керування і траєкторії, а потім довести їх оптимальність для наступних задач швидкодії: перевести точку $(x_1, x_2) \in R^2$ із заданого стану (x_1^0, x_2^0) в стан $(0, 0)$ за допомогою кусково - неперервного керування $u(t)$, якщо

а) $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, U = \{u \in R^1: |u(t)| \leq 1, t \in [0, T]\}$;

б) $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 + u, U = \{u \in R^1: |u(t)| \leq 1, t \in [0, T]\}$;

в) $\dot{x}_1 = x_2 + u_1, \dot{x}_2 = -x_1 + u_2, U = \{u \in R^2: |u_i(t)| \leq 1, t \in [0, T], i = \overline{1, 2}\}$.

(Вказівка: функцію Кротова шукати у вигляді $K(t, x) = \psi_1(t) x_1 + \psi_2(t) x_2$, де $\psi_i(t)$ – довільні функції).

13. Перевести точку $x \in R^3$ із початку координат $(0, 0, 0)$ в точку $(a, 0, 0)$ за найменший час за допомогою кусково - неперервного керування $u(t)$, якщо $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dot{x}_3 = u, U = \{u \in R^1: |u(t)| \leq 1, t \in [0, T]\}$. Показати, що оптимальний час $T_* = (32|a|)^{1/3}$.

(Вказівка: функцію Кротова шукати у вигляді $K(t, x) = \psi_1(t) x_1 + \psi_2(t) x_2 + \psi_3(t) x_3$, де $\psi_i(t)$ – довільні функції).

Розділ 3. Конфліктні динамічні економічні моделі: лінійно - квадратичні диференціальні ігри.

§ 1. Формалізація лінійно - квадратичної диференціальної гри.

В розділі 3 першої частини вже йшла мова про конфліктні задачі оптимізації у формі стаціонарної безкоаліційної гри. В даному розділі ми розглянемо конфліктні задачі керування системами, стан яких описується диференціальними рівняннями. Такі задачі відносяться до теорії диференціальних ігор. Ми розглянемо лише клас безкоаліційних лінійно - квадратичних диференціальних ігор. Це пов'язано з тим, що для цього класу задач вдається збудувати їх розв'язок у явному вигляді. За допомогою достатніх умов оптимальності отримано у вигляді лінійних функцій від фазових координат рівноважні ситуації: гарантовані, за Нешем та за Бержу.

Для з'ясування особливостей диференціальної гри розглянемо приклад, що описує можливу поведінку виробників на довершеному конкурентному ринку. Нехай m підприємств випускають один і той же продукт. Нехай $x_i(t)$ – кількість виробленого продукту на момент часу $t \in [0, T]$ i - ім підприємством; $\dot{x}_i(t)$ – приріст продукції i - го підприємства за одиницю часу; $u_j^i(t)$ – ресурси, які витрачає j - е підприємство для забезпечення цього приросту. Тоді функціонування i - го підприємства можна описати рівнянням

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^m u_j^i(t), x_i(0) = x_i^0, i = \overline{1, m},$$

де x^0 – вектор початкових запасів продукції.

Вводячи вектори $x' = (x_1, \dots, x_m)$, $u_j' = (u_j^1, \dots, u_j^m)$, наведену вище систему можна подати у векторному вигляді

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^m u_j(t), x(0) = x^0. \quad (1.1)$$

В рівнянні (1.1) $u_i(t)$ – керуюча дія, яка формується керівництвом i - го підприємства (i - м гравцем, згідно з термінологією теорії ігор). Стратегії U_i у i - го гравця будемо ототожнювати з функціями $u_i(t, x) = Q_i(t) x$, де $Q_i(t)$ – матриця розмірності $m \times m$ з неперервними елементами. Тоді множину його стратегій можна подати у вигляді

$$U_i = \{U_i: u_i(t, x) = Q_i(t) x, \forall Q_i(t) \in C_{m \times m}[0, T]\}. \quad (1.2)$$

З економічної точки зору стратегії показують яку частку продукції від вектора $x(t)$ (виробленої на момент часу t) i - й гравець витрачає на зростання (зменшення) випуску своєї продукції (відповідно продукції конкурентів).

Метою i - го підприємства є максимальне збільшення кількості його продукції на момент часу T , витративши при цьому якомога менше своїх ресурсів та "примусивши" своїх конкурентів витратити якомога більше їх ресурсів. Тому критерій діяльності i - го підприємства можна подати у вигляді функціоналу

$$J_i(U) = x_i^2(T) + \int_0^T (-k_{i,i} \|u_i\|^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^m k_{i,j} \|u_j\|^2) dt, \quad (1.3)$$

де $U' = (U_1, \dots, U_m)$ – набір стратегій всіх гравців, $k_{i,j}$ – задані додатні числа, $\|u_i\|$ – евклідова норма вектора u_i .

Далі дамо формальний опис безкоаліційної лінійно - квадратичної позиційної диференціальної гри $N \geq 2$ осіб. Таку гру будемо ототожнювати з системою

$$\langle \aleph, \Sigma, \{U_i\}_{i \in \aleph}, \{J_i(U)\}_{i \in \aleph} \rangle, \quad (1.4)$$

в якій $\aleph = \{1, \dots, m\}$ – множина номерів гравців, кожен з яких може обирати та використовувати "свої" стратегії.

Зміна стану керованої системи Σ описується задачею Коші для системи лінійних

звичайних диференціальних рівнянь, тобто

$$\dot{x} = A(t) x + \sum_{i \in \aleph} B_i(t) u_i, \quad x(t_0) = x^0, \quad (1.5)$$

де $x \in R^n, u_i \in R^{m_i}$ – керуючий вплив i -го гравця, $A(t) \in C_{n \times n}[0, T], B_i(t) \in C_{n \times m_i}[0, T]$, (тобто матриці з неперервними елементами.)

Пару (t, x) будемо називати *позицією гри* (1.4).

Стратегії U_i i -го гравця будемо ототожнювати з функціями виду $u_i = Q_i(t) x$, де $Q_i(t) \in C_{m_i \times n}[0, T]$, тобто вибір фіксованої стратегії i -м гравцем зводиться до вибору матриці $Q_i(t)$ з неперервними по часу елементами. Множина стратегій i -го гравця буде мати вигляд

$$U_i = \{U_i: u_i(t, x) = Q_i(t) x, \forall Q_i(t) \in C_{m_i \times n}[0, T]\}. \quad (1.6)$$

Набір стратегій $U' = (U_1, \dots, U_m) \in U_1 \times \dots \times U_m = U$ будемо називати *ситуацією гри* (1.4).

Гра відбувається таким чином. Кожен i -й гравець обирає і використовує свою стратегію U_i . Здійснивши такий вибір, гравці підставляють $u_i(t, x) = Q_i(t) x$, $i \in \aleph$ в рівняння (1.5) та знаходять єдиний розв'язок $x(t)$, $t \in [t_0, T]$ системи однорідних диференціальних рівнянь з неперервними коефіцієнтами

$$\dot{x} = A(t) x + \sum_{i \in \aleph} B_i(t) Q_i(t) x, \quad x(t_0) = x^0. \quad (1.7)$$

За допомогою цього розв'язку формується реалізація стратегії i -го гравця $u_i[t] = Q_i(t) x(t)$, $i \in \aleph$.

Мета i -го гравця: вибрати таку стратегію $U_i \in U_i$, яка дозволить досягти найбільшого значення *функції виграшу*, заданій квадратичним функціоналом, визначеним на розв'язках $x(t)$, $t \in [t_0, T]$ системи (1.5) та реалізаціях $u_i[t]$, $i \in \aleph$

$$J_i(U, t_0, x^0) = x'(T) C_i x(T) + \int_{t_0}^T (\sum_{j \in \aleph} u'_j[t] D_{i,j} u_j[t] + x'(t) G_i x(t)) dt, \quad (1.8)$$

де $C_i, D_{i,j}, G_i$ – постійні симетричні квадратні матриці відповідних розмірностей.

Під *розв'язком гри* (1.4) будемо розуміти таку ситуацію $U^* \in U$, яка реалізує той чи інший принцип рівноваги (оптимальності) (див. розділ 3 частини 1). Зауважимо, що динамічний характер диференціальної гри вимагає реалізації *динамічної стійкості* принципу оптимальності: він повинен виконуватись на протязі всієї гри.

Тут слід відзначити, що як і випадку стаціонарних безкоаліційних ігор в диференціальних безкоаліційних іграх не існує універсального принципу оптимальності.

Наведений вище варіант опису диференціальної гри має таку перевагу: позиційний характер стратегій у вигляді оберненого зв'язку забезпечує незалежність розв'язків гри від початкових умов.

§ 2. Гарантована рівновага.

Далі для спрощення обчислень будемо вважати, що $m = 2$. Припустимо, що гравці діють незалежно один від одного. Функції виграшів гравців мають вигляд

$$J_1(U, t_0, x^0) = x'(T) C_1 x(T) + \int_{t_0}^T (-u'_1[t] D_{1,1} u_1[t] + u'_2[t] D_{1,2} u_2[t]) dt, \quad (2.1)$$

$$J_2(U, t_0, x^0) = x'(T) C_2 x(T) + \int_{t_0}^T (u'_1[t] D_{2,1} u_1[t] - u'_2[t] D_{2,2} u_2[t]) dt, \quad (2.2)$$

де $C_i, i = \overline{1, 2}$ – симетричні числові невід'ємно визначені матриці розмірності $n \times n$, $D_{i,j}, i, j = \overline{1, 2}$ – симетричні числові додатньо визначені матриці розмірності $n \times n$, а в системі (1.4) матриці B_i будемо вважати одиничними.

Тоді, як і у стаціонарному випадку, ми повинні визначити величину його гарантії, тобто

величину виграшу, яку він гарантовано отримає незалежно від дій іншого гравця. Нехай $J_i[U_i^g, t_0, x^0]$, $i = \overline{1,2}$ – гарантії гравців при фіксованих значеннях (t_0, x^0) . Тоді ці гарантії задовольняють умовам

$$\begin{aligned} J_1[U_1^g, t_0, x^0] &\leq J_1(U_1^g, U_2, t_0, x^0) \quad \forall U_2 \in U_2, \\ J_2[U_2^g, t_0, x^0] &\leq J_2(U_1, U_2^g, t_0, x^0) \quad \forall U_1 \in U_1, \end{aligned} \quad (2.3)$$

тобто, кожен із гравців отримує не менше своєї гарантії;

гарантії повинні бути найбільшими

$$J_i[U_i^g, t_0, x^0] = \max_{U_i} J_i[U_i, t_0, x^0] \quad i = \overline{1,2}, \quad (2.4)$$

де

$$J_1[U_1, t_0, x^0] = \min_{U_2} J_1(U_1, U_2, t_0, x^0).$$

$$J_2[U_2, t_0, x^0] = \min_{U_1} J_2(U_1, U_2, t_0, x^0).$$

Для побудови гарантуючих стратегій та найбільших гарантій далі будемо використовувати деякі означення із теорії антагоністичних диференціальних ігор.

Означення 2.1. Стратегія $U_1^m \in U_1$ називається максимінною для першого гравця у грі (1.5) – (1.6), (2.1) – (2.2), якщо

$$\begin{aligned} J_1^*[t_0, x^0] &= \max_{U_1 \in U_1} \min_{U_2 \in U_2} J_1(U_1, U_2, t_0, x^0) = \\ &= \min_{U_2 \in U_2} J_1(U_1^m, U_2, t_0, x^0); \end{aligned} \quad (2.5)$$

стратегія $U_2^m \in U_2$ називається максимінною для другого гравця у грі (1.5) – (1.6), (2.1) – (2.2), якщо

$$\begin{aligned} J_2^*[t_0, x^0] &= \max_{U_2 \in U_2} \min_{U_1 \in U_1} J_2(U_1, U_2, t_0, x^0) = \\ &= \min_{U_1 \in U_1} J_2(U_1, U_2^m, t_0, x^0). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Число $J_i^*[t_0, x^0]$ називається максиміном i -го гравця у грі (1.5) – (1.6), (2.1) – (2.2).

Лема 2.1. Максимінна стратегія i -го гравця у грі (1.5) – (1.6), (2.1) – (2.2) є для нього гарантуючою, а його максимін співпадає з найбільшою гарантією, тобто

$$U_i^m = U_i^g, J_i^*[t_0, x^0] = J_i[U_i^g, t_0, x^0]. \quad \bullet$$

Знаходження максимінів та максимінних стратегій являється складною математичною задачею не тільки для диференціальних, але й для стаціонарних ігор. Більш досліджені шляхи побудови сідлових точок антагоністичних диференціальних ігор. Тому наведемо відомий результат, який зв'язує максимінні стратегії з сідловими точками.

Для цього розглянемо антагоністичну позиційну лінійно - квадратичну гру

$$\langle \{1,2\}, \Sigma, \{U_i\}_{i=1,2}, J_1(U_1, U_2, t_0, x^0) \rangle, \quad (2.7)$$

в якій перший гравець намагається максимізувати свій виграш шляхом вибору стратегії $U_1 \in U_1$, а другий гравець – мінімізувати виграш першого гравця шляхом вибору стратегії $U_2 \in U_2$.

Означення 2.2. Ситуація $(U_1^{(s,1)}, U_2^{(s,1)}) \in U_1 \times U_2$ називається сідловою точкою гри (2.7), якщо для будь-якої початкової позиції $(t_0, x^0) \in [0, T] \times R^n$

$$\begin{aligned} J_1(U_1, U_2^{(s,1)}, t_0, x^0) &\leq J_1(U_1^{(s,1)}, U_2^{(s,1)}, t_0, x^0) \leq \\ &\leq J_1(U_1^{(s,1)}, U_2, t_0, x^0) \quad \forall (U_1, U_2) \in U_1 \times U_2. \quad \bullet \end{aligned} \quad (2.8)$$

При цьому число $J_1(U_1^{(s,1)}, U_2, t_0, x^0)$ називається ціною гри гри (2.7).

Лема 2.2. Якщо ситуація $(U_1^{(s,1)}, U_2^{(s,1)})$ – сідлова точка гри (2.7), то стратегія $U_1^{(s,1)}$ являється максимінною для першого гравця у грі (2.7), а ціна гри $J_1(U_1^{(s,1)}, U_2^{(s,1)}, t_0, x^0)$ співпадає з його максиміном $J_1^*[t_0, x^0]$. •

Аналогічно, нехай знайдена сідлова точка $(U_1^{(s,2)}, U_2^{(s,2)})$ диференціальної гри

$$\langle \{1,2\}, \Sigma, \{U_i\}_{i=1,2}, J_2(U_1, U_2, t_0, x^0) \rangle, \quad (2.9)$$

в якій перший гравець мінімізує функцію виграшу другого гравця, а другий її максимізує, тобто

$$J_2(U_1^{(s,2)}, U_2^{(s,1)}, t_0, x^0) \leq J_2(U_1^{(s,2)}, U_2^{(s,2)}, t_0, x^0) \leq \\ \leq J_2(U_1, U_2^{(s,2)}, t_0, x^0) \forall (U_1, U_2) \in U_1 \times U_2. \quad (2.10)$$

Тоді стратегія $U_2^{(s,2)}$ являється максимінною для другого гравця у грі (2.9), а ціна гри (2.9) співпадає з його максиміном, тобто

$$J_2(U_1^{(s,2)}, U_2^{(s,2)}, t_0, x^0) = J_2^*[t_0, x^0].$$

Таким чином, для знаходження гарантованої ситуації та гарантій гравців у грі потрібно розв'язати антагоністичні ігри (2.7), (2.9) і покласти $(U_1^g, U_2^g) = (U_1^{(s,1)}, U_2^{(s,2)})$; $J_i[U_i^g, t_0, x^0] = J_i(U_1^{(s,i)}, U_2^{(s,i)}, t_0, x^0)$, $i = \overline{1,2}$.

Знайдемо достатні умови розв'язності антагоністичної гри (2.7) в термінах функції Беллмана (див. § 6 попереднього розділу). З цією метою розглянемо функцію

$$V_1(S_1, x, u_1, u_2, t) = \frac{\partial S_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)'(A(t)x + u_1 + u_2) - \\ - u_1' D_{1,1} u_1 + u_2' D_{1,2} u_2, \quad (2.11)$$

де $S_1[t, x]$ – функція Беллмана.

Теорема 2.1. Нехай існують неперервно диференційована функція $S_1[t, x]$ та вектор - функції $u_i^{(s,1)}(t, x) = Q_i^{(s,1)}(t)x$, $Q_i^{(s,1)}(t) \in C_{n \times n}[0, T]$, $i = \overline{1,2}$, такі, що

1) при любых $x \in R^n$

$$S_1[T, x] = x' C_1 x; \quad (2.12)$$

2) для всіх $(t, x) \in [0, T] \times R^n$

$$V_1(S_1[t, x], x, u_1^{(s,1)}(t, x), u_2^{(s,1)}(t, x), t) = 0,$$

$$V_1(S_1[t, x], x, u_1, u_2^{(s,1)}(t, x), t) \leq 0, \quad \forall u_1 \in R^n,$$

$$V_1(S_1[t, x], x, u_1^{(s,1)}(t, x), u_2, t) \geq 0, \quad \forall u_2 \in R^n. \quad (2.13)$$

Тоді, при будь-якій початковій позиції $(t_0, T) \in [0, T) \times R^n$, стратегія $U_1^{(s,1)}(u_1^{(s,1)})$ являється гарантуючою (максимінною) для першого гравця в диференціальній грі (2.7), а його найбільша гарантія (максимін) має вигляд

$$J_1[U_1^g, t_0, x^0] = J_1(U_1^{(s,1)}, U_2^{(s,1)}, t_0, x^0) = S_1[t_0, x^0]. \quad (2.14)$$

Доведення. Спочатку встановимо рівність (2.14). Нехай $x^{(s,1)}(t)$ – розв'язок системи (1.5) при $u_i = u_i^{(s,1)}(t, x) = Q_i^{(s,1)}(t)x$, $i = \overline{1,2}$. Такий розв'язок існує, єдиний і може бути продовжений на відрізок $[0, T]$ в силу лінійності системи. Покладемо в першому співвідношенні із (2.13)

$x = x^{(s,1)}(t)$, а в (2.12) $x = x^{(s,1)}(T)$. Тоді будемо мати

$$V_1^{(s,1)}[t] = V_1(S_1[t, x^{(s,1)}], x, u_1^{(s,1)}(t, x^{(s,1)}), u_2^{(s,1)}(t, x^{(s,1)}), t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, T], \quad (2.15)$$

$$S_1[T, x^{(s,1)}(T)] = (x^{(s,1)}(T))' C_1 x^{(s,1)}(T). \quad (2.16)$$

Інтегруючи (2.15) по t від t_0 до T з урахуванням (2.11), отримаємо

$$0 = \int_{t_0}^T V_1^{(s,1)}[t] dt = S_1[T, x^{(s,1)}(T)] - S_1[t_0, x^0] + \int_{t_0}^T (- (u_1^{(s,1)}[t])' D_{1,1} u_1^{(s,1)}[t] + \\ + (u_2^{(s,1)}[t])' D_{1,2} u_2^{(s,1)}[t]) dt = J_1(U_1^{(s,1)}, U_2^{(s,1)}, t_0, x^0) - S_1[t_0, x^0],$$

тобто має місце рівність (2.14).

Далі доведемо, що стратегія $U_1^{(s,1)}(u_1^{(s,1)})$ являється гарантуючою (максимінною) для першого гравця в диференціальній грі (2.7). З цією метою для першого гравця візьмемо довільну стратегію $u_1(t, x) = Q_1(t) x$ із U_1 , а для другого гравця покладемо $u_2(t, x) = Q_2^{(s,1)}(t) x$. Через $x(t)$ позначимо розв'язок системи (1.5) при таких керуваннях. Підставивши вказані функції в друге співвідношення із (2.13) та в (2.12), отримаємо

$$V_1[t] = V_1(S_1[t, x], x, u_1(t, x), u_2^{(s,1)}(t, x), t) \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, T], \quad (2.17)$$

$$S_1[T, x(T)] = x'(T) C_1 x(T). \quad (2.18)$$

Інтегруючи (2.17) по t від t_0 до T з урахуванням (2.11), отримаємо

$$0 \geq \int_{t_0}^T V_1[t] dt = S_1[T, x(T)] - S_1[t_0, x^0] + \int_{t_0}^T (- (u_1[t])' D_{1,1} u_1[t] + \\ + (u_2[t])' D_{1,2} u_2[t]) dt = J_1(U_1, U_2^{(s,1)}, t_0, x^0) - S_1[t_0, x^0].$$

Звідси, враховуючи (2.18), отримаємо

$$J_1(U_1, U_2^{(s,1)}, t_0, x^0) \leq S_1[t_0, x^0] = J_1(U_1^{(s,1)}, U_2^{(s,1)}, t_0, x^0) \quad \forall u_1 \in U_1. \quad (2.19)$$

Аналогічно, використовуючи останнє співвідношення із (2.13) та (2.12), отримаємо нерівність

$$J_1(U_1^{(s,1)}, U_2^{(s,1)}, t_0, x^0) \leq J_1(U_1^{(s,1)}, U_2, t_0, x^0) \quad \forall u_2 \in U_2. \quad (2.20)$$

Тобто ситуація $(U_1^{(s,1)}, U_2^{(s,1)})$ є сідловою точкою гри (2.7), а $J_1(U_1^{(s,1)}, U_2^{(s,1)}, t_0, x^0)$ – її ціна, що, в силу леми 2.2, і доводить теорему. •

Аналогічно, за допомогою функції

$$V_2(S_2, x, u_1, u_2, t) = \frac{\partial S_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial S_2}{\partial x} \right)' (A(t) x + u_1 + u_2) + \\ + u_1' D_{2,1} u_1 - u_2' D_{2,2} u_2 \quad (2.21)$$

доводиться наступна теорема.

Теорема 2.2. Нехай існують неперервно диференційована функція $S_2[t, x]$ та вектор - функції $u_i^{(s,2)}(t, x) = Q_i^{(s,2)}(t) x$, $Q_i^{(s,2)}(t) \in C_{n \times n}[0, T]$, $i = \overline{1, 2}$, такі, що

1) при любых $x \in R^n$

$$S_2[T, x] = x' C_2 x; \quad (2.22)$$

2) для всіх $(t, x) \in [0, T] \times R^n$

$$V_2(S_2[t, x], x, u_1^{(s,2)}(t, x), u_2^{(s,2)}(t, x), t) = 0,$$

$$V_2(S_2[t, x], x, u_1^{(s,1)}(t, x), u_2, t) \leq 0, \quad \forall u_2 \in R^n,$$

$$V_2(S_2[t, x], x, u_1, u_2^{(s,1)}(t, x), t) \geq 0, \quad \forall u_1 \in R^n. \quad (2.23)$$

Тоді, при будь-якій початковій позиції $(t_0, T) \in [0, T] \times R^n$, стратегія $U_2^{(s,2)}(u_2^{(s,2)})$ являється гарантуючою (максимінною) для другого гравця в диференціальній грі (2.9), а його найбільша гарантія (максимін) має вигляд

$$J_2[U_2^g, t_0, x^0] = J_2(U_1^{(s,2)}, U_2^{(s,2)}, t_0, x^0) = S_2[t_0, x^0]. \quad (2.24)$$

Побудуємо явний вигляд найбільших гарантій у грі (2.7).

Теорема 2.3. Нехай матриці C_i із (2.1), (2.2) – додатньо визначені. Якщо при всіх $t \in [0, T]$ матриці

$$M_i(t) = C_i^{-1} + (-1)^i \int_t^T W(T, \tau) (D_{i,1}^{-1} - D_{i,2}^{-1}) W'(T, \tau) d\tau, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (2.25)$$

де $W(t, \tau)$ – матриця Коші системи $\dot{x} = A(t)x$,

невироджені, то при довільній початковій позиції $(t_0, x^0) \in [0, T) \times R^n$ найбільша гарантія (максимін) для i – го гравця

$$J_i[U_i^g, t_0, x^0] = (x^0)' W'(T, t_0) M_i^{-1}(t_0) W(T, t_0) x^0, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Доведення проведемо для випадку $i = 1$, використовуючи теорему 2.1. Ліву частину першої умови із (2.13) можемо переписати у вигляді

$$\begin{aligned} \max_{u_1} V_1(S_1[t, x], x, u_1, u_2^{(s,1)}(t, x), t) &= V_1(S_1[t, x], x, u_1^{(s,1)}(t, x), u_2^{(s,1)}(t, x), t) = \\ &= \min_{u_2} V_1(S_1[t, x], x, u_1^{(s,1)}(t, x), u_2, t). \end{aligned}$$

Наведені співвідношень мають місце, якщо

$$\frac{\partial V_1}{\partial u_1} \big|_{u_1^{(s,1)}, u_2^{(s,1)}} = \frac{\partial S_1}{\partial x} - 2D_{1,1} u_1^{(s,1)} = 0,$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial u_2} \big|_{u_1^{(s,1)}, u_2^{(s,1)}} = \frac{\partial S_1}{\partial x} + 2D_{1,2} u_2^{(s,1)} = 0.$$

Звідси

$$u_1^{(s,1)} = \frac{1}{2} D_{1,1}^{-1} \frac{\partial S_1}{\partial x}, \quad u_2^{(s,1)} = -\frac{1}{2} D_{1,2}^{-1} \frac{\partial S_1}{\partial x}. \quad (2.26)$$

Підставляючи (2.26) в перше співвідношення із (2.13), отримаємо задачу Коші для визначення функції Беллмана $S_1[t, x]$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)' A(t) x - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)' (-D_{1,1}^{-1} + D_{1,2}^{-1}) \frac{\partial S_1}{\partial x} = 0, \quad (2.27)$$

$$S_1[T, x] = x' C_1 x. \quad (2.28)$$

Розв'язок задачі (2.27) – (2.28) будемо шукати у вигляді квадратичної форми (див. § 3 розділу 2)

$$S_1[t, x] = x' \Theta_1(t) x, \quad \Theta_1(t) = \Theta_1'(t) \in C_{n \times n}[0, T].$$

Тоді матрична функція $\Theta_1(t)$ буде задовольняти задачі Коші для рівняння Бернуллі вигляду

$$\dot{\Theta}_1 + \Theta_1 A(t) + A'(t) \Theta_1 - \Theta_1 (-D_{1,1}^{-1} + D_{1,2}^{-1}) \Theta_1 = 0, \quad (2.29)$$

$$\Theta_1(T) = C_1. \quad (2.30)$$

Розв'язок задачі (2.29) – (2.30) буде мати вигляд

$$\Theta_1(t) = W'(T, t) [C_1^{-1} + \int_t^T W(T, \tau) (D_{1,2}^{-1} - D_{1,1}^{-1}) W'(T, \tau) d\tau]^{-1} W(T, t). \quad (2.31)$$

Дійсно, припустимо, що матриця $\Theta_1(t)$ – додатньо визначена, тобто матриця $\Theta_1^{-1}(t)$ існує. Тоді ця матриця задовольняє задачі Коші для лінійного рівняння

$$-\dot{\Theta}_1^{-1} + A(t) \Theta_1^{-1} + \Theta_1^{-1} A'(t) + D_{1,1}^{-1} - D_{1,2}^{-1} = 0, \quad (2.32)$$

$$\Theta_1^{-1}(T) = C_1^{-1}. \quad (2.33)$$

Розв'язок задачі Коші (2.32) – (2.33) будемо шукати у вигляді

$$\Theta_1^{-1}(t) = W(t, T) Y_1(t) W'(t, T).$$

Тоді матриця $Y_1(t)$ визначається із задачі Коші

$$\begin{aligned}\dot{Y}_1(t) &= W^{-1}(t, T)(D_{1,1}^{-1} - D_{1,2}^{-1})(W'(t, T))^{-1} = \\ &= W(T, t)(D_{1,1}^{-1} - D_{1,2}^{-1})W'(T, t), Y_1(T) = C_1^{-1}\end{aligned}\quad (2.34)$$

і має вигляд

$$Y_1(t) = C_1^{-1} + \int_t^T W(T, \tau)(D_{1,2}^{-1} - D_{1,1}^{-1})W'(T, \tau) d\tau = M_1(t).$$

У наведених вище перетвореннях було використано очевидну властивість для квадратних невідроджених матриць A : $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

Тоді

$$\Theta_1(t) = (W(t, T) Y(t) W'(t, T))^{-1} = W'(T, t) Y^{-1}(t) W(T, t),$$

що співпадає з формулою (2.31). При цьому матриця $M_1(t)$, $t \in [t_0, T]$ буде симетричною і додатньо визначеною і ті ж властивості будуть і у матриці $\Theta_1(t)$ в силу того, що якщо квадратна матриця $A > 0$ (додатньо визначена), то для довільної невідродженої квадратної матриці $B: B' A B > 0$.

У випадку $i = 2$ міркування будуть аналогічними з використанням теореми 2.2. •

§ 3. Рівновага за Нешем.

Як і у стаціонарному випадку (див. § 3 розділу 3 частини 1) гарантована рівновага дає можливість гравцям використовувати "безризикові" стратегії, які забезпечують гарантовані виграші. Якщо гравці не погоджуються на такі гарантії, то вони можуть застосовувати інші рівноваги, які краще відображають основні риси оптимальної ситуації безкоаліційної гри: вигідність, стійкість, справедливість. Найпоширенішим серед них є рівновага за Нешем (для стаціонарних ігор див. §4 розділу 3 частини 1).

Розглянемо лінійно - квадратичну диференціальну безкоаліційну (356), в якій: зміна стану керованої системи Σ описується задачею Коші (1.5); стратегії гравців обираються у вигляді (1.6), а їх функції виграшів задаються функціоналами (1.8).

Означення 3.1. Ситуація $(U^N)' = (U_1^N, \dots, U_m^N) \in U$ називається рівноважною за Нешем у грі (1.5) – (1.8), якщо

$$J_i(U^N || U_i, t_0, x^0) \leq J_i(U^N, t_0, x^0), \forall U_i \in U_i, i = \overline{1, m}. \quad (3.1)$$

Як і у попередньому параграфі для формулювання конструктивних результатів покладемо: $m = 2$; в задачі Коші (357) матриці B_i – одиничні; функції виграшів гравців задаються функціоналами (2.1) – (2.2).

Знайдемо достатні умови існування рівноваги за Нешем у грі (1.5) – (1.6), (2.1) – (2.2).

Теорема 3.1. Нехай існують єдині неперервно диференційовані функції $S_i[t, x]$ та вектор - функції $u_i^N(t, x) = Q_i^N(t) x$, $Q_i^N(t) \in C_{n \times n}[0, T]$, $i = \overline{1, 2}$, такі, що

1) при любых $x \in R^n$

$$S_i[T, x] = x' C_i x; \quad (3.2)$$

2) для всіх $(t, x) \in [0, T] \times R^n$

$$V_i(S_i[t, x], x, u_1^N(t, x), u_2^N(t, x), t) = 0,$$

$$V_1(S_1[t, x], x, u_1, u_2^N(t, x), t) \leq 0, \quad \forall u_1 \in R^n,$$

$$V_2(S_2[t, x], x, u_1^N(t, x), u_2, t) \leq 0, \quad \forall u_2 \in R^n. \quad (3.3)$$

Тоді, при будь-якій початковій позиції $(t_0, T) \in [0, T) \times R^n$, ситуація U^N являється рівноважною за Нешем у диференціальній грі (356), а виграші гравців мають вигляд

$$J_i(U_1^N, U_2^N, t_0, x^0) = S_i[t_0, x^0], i = \overline{1, 2}. \quad \bullet$$

Доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 2.1.

Більше того, із теореми 2.3 і результатів § 3 розділу 2 витікає

Теорема 3.2. Для існування рівноважної за Нешем ситуації U^N у диференціальній грі (1.5) – (1.6), (2.1) – (2.2) необхідно і достатньо, щоб матриці $Q_i^N(t)$, $i = \overline{1,2}$ задовольняли системі матричних рівнянь Бернуллі

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1^N + \theta_1^N(A(t) + D_{2,2}^{-1}\theta_2^N) + (A'(t) + \theta_2^N D_{2,2}^{-1})\theta_1^N + \\ + \theta_1^N D_{1,1}^{-1}\theta_1^N + \theta_2^N D_{2,2}^{-1}D_{1,2}D_{2,2}^{-1}\theta_2^N = 0, \\ \dot{\theta}_2^N + \theta_2^N(A(t) + D_{1,1}^{-1}\theta_1^N) + (A'(t) + \theta_1^N D_{1,1}^{-1})\theta_2^N + \\ + \theta_2^N D_{2,2}^{-1}\theta_2^N + \theta_1^N D_{1,1}^{-1}D_{2,1}D_{1,1}^{-1}\theta_1^N = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

з граничними умовами

$$\theta_i^N(T) = C_i. \quad (3.5)$$

При цьому стратегій гравців мають вигляд

$$u_i^N = D_{i,i}^{-1}\theta_i^N(t)x, \quad (3.6)$$

а їх виграші задаються формулами

$$J_i(U^N, t_0, x^0) = x_0' \theta_i^N(t_0) x_0. \bullet$$

Не для всякої лінійно - квадратичної гри існують рівноважні за Нешем ситуації: якщо матриця $D_{i,i}$ від'ємно визначена хоч би для одного номера i , то у відповідній грі не буде існувати рівноваги за Нешем. Якщо у грі (1.5) – (1.6), (2.1) – (2.2) існує рівновага за Нешем, то для рівноважних ситуацій мають місце ті ж позитивні і негативні властивості, що і для стаціонарних ігор (див. § 4 розділу 3 частини 1). Крім того, для них виконується принцип динамічної стійкості.

Для ілюстрації негативних особливостей рівноваги за Нешем розглянемо

Приклад 3.1. Нехай у грі (1.5) – (1.6), (1.8) система (1.5) має вигляд

$$\dot{x}_i = u_i, \quad t \in (0,1]; \quad x_i(0) = 1, \quad i = \overline{1,3}. \quad (3.7)$$

Стратегії гравців обираються у вигляді (1.6), а їх функції виграшів задаються термінальними функціоналами

$$\begin{aligned} J_1(U) &= -x_1^2(1) + 2x_1(1)x_2(1) + 2x_1(1)x_3(1), \\ J_2(U) &= -x_2^2(1) + 2x_1(1)x_2(1) - 2x_2(1)x_3(1), \\ J_3(U) &= -x_3^2(1) + 2x_1(1)x_3(1) - 2x_2(1)x_3(1). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Функція $J_i(U)$ – строго угнута по змінній $x_i(1)$. Тому

$$\frac{\partial J_i(U)}{\partial x_i(1)} = -x_1(1) + x_2(1) + x_3(1) = 0, \quad (3.9)$$

$$\max_{x_1(i)} J_i(U) = x_i^2(1). \quad (3.10)$$

Тоді стратегії $u_i^N = Q_i^N(t)x_i$, $i = \overline{1,3}$ будуть складати рівноважну за Нешем ситуацію при фіксованій початковій позиції, якщо функції $Q_i^N(t)$ задовольняють умові

$$\exp(\int_0^1 Q_1^N(t) dt) = \exp(\int_0^1 Q_2^N(t) dt) + \exp(\int_0^1 Q_3^N(t) dt),$$

яка є наслідком умови (3.9). Якщо прийняти $Q_i^N(t) = \beta_i \in (0, \infty)$, то числа β_i задаються формулами

$$\beta_2 = \ln \alpha + \beta_1, \quad \beta_3 = \ln(1 - \alpha) + \beta_1,$$

де $\alpha \in (0,1)$.

При цьому функції виграшів будуть мати вигляд

$$J_1(U^N) = \exp(2\beta_1), J_2(U^N) = \alpha^2 \exp(2\beta_1), J_3(U^N) = (1 - \alpha)^2 \exp(2\beta_1). \bullet$$

В наведеному прикладі існує безліч (континуум) ситуацій рівноваги за Нешем при різних значеннях параметрів: $\alpha \in (0,1)$. При цьому різним значенням параметрів відповідають різні виграші.

Відмітимо наставні негативні властивості рівноваги за Нешем.

Особливість 1. До початку гри її учасники повинні попередньо домовитись яку конкретну рівновагу за Нешем із множини можливих рівноважних ситуацій вони будуть використовувати. Дійсно, в прикладі 3.1 розглянемо три рівноважні за Нешем ситуації $(\beta_1 x_1, \beta_2 x_2, \beta_3 x_3)$, в яких числа β_i приймають значення:

$$1) \beta_1 = 1, \beta_2 = \beta_3 = 1 - \ln 2; 2) \beta_1 = 1, \beta_2 = 1 - \ln 4/3, \beta_3 = 1 - 2 \ln 2; 3) \beta_1 = 1, \beta_2 = 1 - 2 \ln 2, \beta_3 = 1 - \ln 4/3.$$

Якщо гравці не домовляться якої ситуації вони будуть дотримуватись, а будуть діяти на свій розсуд, то "скоріше" за все вони обирають таку ситуацію $(x_1, (1 - \ln 4/3)x_2, (1 - \ln 4/3)x_3)$, яка не буде рівноважною за Нешем. Таким чином, кожен гравець не може самостійно приймати рішення, тобто гра із безкоаліційної переходить в кооперативну. Тому виникає потреба в нових поняттях рівноваги в безкоаліційних іграх, яким не притаманний цей недолік.

Особливість 2. При реалізації обраної ситуації рівноваги за Нешем кожен гравець повинен бути впевненим, що інші гравці будуть дотримуватись своїх стратегій із тієї ж рівноважної ситуації. В реальних економічних задачах така впевненість в діях гравців відсутня.

Особливість 3. Множина рівноважних за Нешем ситуацій є внутрішньо нестійкою, тобто можуть існувати такі дві рівноважних за Нешем ситуації, що виграші гравців в одній ситуації будуть строго більшими від їх виграшів в другій ситуації. Так буде в прикладі 3.1, коли при фіксованих α більшим значенням параметра β_1 будуть відповідати більші значення виграшів. Щоб позбутись цього недоліку потрібно запропонувати таку рівновагу, щоб для будь-якої допустимої пари ситуацій $U^{(1)}, U^{(2)}$ була несумісною система нерівностей

$$J_i(U^{(1)}) > J_i(U^{(2)}), i = \overline{1,3}.$$

Особливість 4. Рівноважні за Нешем ситуації можуть бути покращеними.

§ 4. Рівновага за Бержу.

Наведемо означення розв'язку диференціальної гри (1.5) – (1.6), (1.8), яке "знімає" негативні особливості 1 та 2, притаманні рівновазі за Нешем.

Означення 4.1. Ситуація $(U^B)' = (U_1^B, \dots, U_m^B) \in U$ називається рівноважною за Бержу у грі (1.5) – (1.6), (1.8), якщо

$$J_i(U || U_i^B, t_0, x^0) \leq J_i(U^B, t_0, x^0), \forall U_j \in U_j, i, j = \overline{1, N}, j \neq i; \quad (4.1)$$

$$\max_{U_i \in U_i} \min_{U/U_i} J_i(U, t_0, x^0) \leq J_i(U^B, t_0, x^0), i = \overline{1, N}. \quad (4.2)$$

Зауважимо, що як і у випадку статичних ігор, вимога (4.2) не являється обов'язковою.

Якщо у грі (1.5) – (1.6), (1.8) існує рівновага за Бержу, то для рівноважних ситуацій мають місце ті ж позитивні властивості, що і для стаціонарних ігор (див. § 5 розділу 3 частини 1). Крім того, для них виконується принцип динамічної стійкості.

Як і у попередньому параграфі для формулювання конструктивних результатів покладемо: $m = 2$; в задачі Коші (1.5) матриці B_i – одиничні; функції виграшів гравців задаються функціоналами (2.1) – (2.2).

Знайдемо достатні умови існування рівноваги за Бержу у грі (1.5) – (1.6), (2.1) – (2.2).

Теорема 4.1. Нехай $D_{i,j} < 0$, $i, j = \overline{1,2}$, $i \neq j$ та існують єдині неперервно диференційовані функції $S_i[t, x]$ та матриці $Q_i^B(t) \in C_{n \times n}[0, T]$, $i = \overline{1,2}$, такі, що
1) при любых $x \in R^n$

$$S_i[T, x] = x' C_i x; \quad (4.3)$$

2) для всіх $(t, x) \in [0, T) \times R^n$

$$V_i(S_i[t, x], x, u_1^B(t, x), u_2^B(t, x), t) = 0,$$

$$V_1(S_1[t, x], x, u_1^B(t, x), u_2, t) \leq 0, \forall u_2 \in R^n,$$

$$V_2(S_2[t, x], x, u_1(t, x), u_2^B(x, t), t) \leq 0, \forall u_1 \in R^n. \quad (4.4)$$

Тоді, при будь-якій початковій позиції $(t_0, T) \in [0, T) \times R^n$, ситуація U^B являється рівноважною за Бержу (умова (4.1)) у диференціальній грі (1.5) – (1.6), (2.1) – (2.2), а виграти гравців мають вигляд

$$J_i(U_1^B, U_2^B, t_0, x^0) = S_i[t_0, x^0], \quad i = \overline{1,2}. \bullet$$

Доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 3.1.

Більше того, за допомогою теорем 4.1 та 3.2 визначимо умови існування рівноваги за Бержу (умова (4.1)).

Теорема 4.2. Нехай у диференціальній грі (1.5) – (1.6), (2.1) – (2.2) постійні матриці

$$D_{i,i} = D_0 > 0, D_{i,j} = -D_1 < 0,$$

$$C_i = C < 0, \quad i, j = \overline{1,2}, \quad i \neq j.$$

Тоді в цій грі при будь-якій початковій позиції $(t_0, x_0) \in [0, T) \times R^n$, $x_0 \neq 0$ не існує рівноважної за Нешем ситуації, а ситуація рівноваги за Бержу існує і має вигляд $(U_1^B, U_2^B) = (D_1^{-1}\theta(t) x, D_1^{-1}\theta(t) x)$, де

$$\begin{aligned} \theta(t) = & W'(T, t) [C^{-1} - \int_t^T W(T, \tau) (4D_1^{-1} + \\ & + D_1^{-1}D_0D_1^{-1}) W'(T, \tau) d\tau]^{-1} W(T, t). \bullet \end{aligned}$$

Задачі до розділу 3.

1. Знайти гарантовану рівноважну ситуацію та значення вигравів у наступній диференціальній грі двох осіб:

1.1. Динаміка системи описується рівняннями

$$\dot{x}_1(t) = u_1^1(t) + u_2^1(t), \dot{x}_2(t) = u_1^2(t) + u_2^2(t), x_1(0) = x_2(0) = 1;$$

функції вигравів мають вигляд

$$J_1 = x_1^2(1) + \int_0^1 [-(u_1^1(t))^2 - (u_1^2(t))^2 + (u_2^1(t))^2 + (u_2^2(t))^2] dt,$$

$$J_2 = x_2^2(1) + \int_0^1 [(u_1^1(t))^2 + (u_1^2(t))^2 - (u_2^1(t))^2 - (u_2^2(t))^2] dt.$$

1.2. Динаміка системи описується рівняннями

$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + u_1^1(t) + u_2^1(t), \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t), x_1(0) = x_2(0) = 1;$
функції виграшів мають вигляд

$$J_1 = x_1^2(1) + \int_0^1 [-(u_1^1(t))^2 - (u_1^2(t))^2 + (u_2^1(t))^2 + (u_2^2(t))^2] dt,$$

$$J_2 = x_2^2(1) + \int_0^1 [(u_1^1(t))^2 + (u_1^2(t))^2 - (u_2^1(t))^2 - (u_2^2(t))^2] dt.$$

1.3. Динаміка системи описується рівняннями

$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_1^1(t) + u_2^1(t), \dot{x}_2(t) = x_1(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t), x_1(0) = x_2(0) = 1;$
функції виграшів мають вигляд

$$J_1 = x_1^2(1) + \int_0^1 [-(u_1^1(t))^2 - (u_1^2(t))^2 + (u_2^1(t))^2 + (u_2^2(t))^2] dt,$$

$$J_2 = x_2^2(1) + \int_0^1 [(u_1^1(t))^2 + (u_1^2(t))^2 - (u_2^1(t))^2 - (u_2^2(t))^2] dt.$$

2. Виписати співвідношення, які реалізують рівноважну за Нешем ситуацію у наступній диференціальній грі двох осіб:

2.1. Динаміка системи описується рівняннями

$\dot{x}_1(t) = u_1^1(t) + u_2^1(t), \dot{x}_2(t) = u_1^2(t) + u_2^2(t), x_1(0) = x_2(0) = 1;$
функції виграшів мають вигляд

$$J_1 = x_1^2(1) + \int_0^1 [-(u_1^1(t))^2 - (u_1^2(t))^2 + (u_2^1(t))^2 + (u_2^2(t))^2] dt,$$

$$J_2 = x_2^2(1) + \int_0^1 [(u_1^1(t))^2 + (u_1^2(t))^2 - (u_2^1(t))^2 - (u_2^2(t))^2] dt.$$

2.2. Динаміка системи описується рівняннями

$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + u_1^1(t) + u_2^1(t), \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t), x_1(0) = x_2(0) = 1;$
функції виграшів мають вигляд

$$J_1 = x_1^2(1) + \int_0^1 [-(u_1^1(t))^2 - (u_1^2(t))^2 + (u_2^1(t))^2 + (u_2^2(t))^2] dt,$$

$$J_2 = x_2^2(1) + \int_0^1 [(u_1^1(t))^2 + (u_1^2(t))^2 - (u_2^1(t))^2 - (u_2^2(t))^2] dt.$$

2.3. Динаміка системи описується рівняннями

$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_1^1(t) + u_2^1(t), \dot{x}_2(t) = x_1(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t), x_1(0) = x_2(0) = 1;$
функції виграшів мають вигляд

$$J_1 = x_1^2(1) + \int_0^1 [-(u_1^1(t))^2 - (u_1^2(t))^2 + (u_2^1(t))^2 + (u_2^2(t))^2] dt,$$

$$J_2 = x_2^2(1) + \int_0^1 [(u_1^1(t))^2 + (u_1^2(t))^2 - (u_2^1(t))^2 - (u_2^2(t))^2] dt.$$

3. Знайти рівноважну за Бержу ситуацію та значення виграшів у наступній диференціальній грі двох осіб:

3.1. Динаміка системи описується рівняннями

$$\dot{x}_1(t) = u_1^1(t) + u_2^1(t), \dot{x}_2(t) = u_1^2(t) + u_2^2(t), x_1(0) = x_2(0) = 1;$$

функції виграшів мають вигляд

$$J_1 = -x_1^2(1) - x_2^2(1) + \int_0^1 [(u_1^1(t))^2 + (u_1^2(t))^2 - (u_2^1(t))^2 - (u_2^2(t))^2] dt,$$

$$J_2 = -x_1^2(1) - x_2^2(1) + \int_0^1 [-(u_1^1(t))^2 - (u_1^2(t))^2 + (u_2^1(t))^2 + (u_2^2(t))^2] dt.$$

3.2. Динаміка системи описується рівняннями

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + u_1^1(t) + u_2^1(t), \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t), x_1(0) = x_2(0) = 1;$$

функції виграшів мають вигляд

$$J_1 = -x_1^2(1) - x_2^2(1) + \int_0^1 [(u_1^1(t))^2 + (u_1^2(t))^2 - (u_2^1(t))^2 - (u_2^2(t))^2] dt,$$

$$J_2 = -x_1^2(1) - x_2^2(1) + \int_0^1 [-(u_1^1(t))^2 - (u_1^2(t))^2 + (u_2^1(t))^2 + (u_2^2(t))^2] dt.$$

3.3. Динаміка системи описується рівняннями

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_1^1(t) + u_2^1(t), \dot{x}_2(t) = x_1(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t), x_1(0) = x_2(0) = 1;$$

функції виграшів мають вигляд

$$J_1 = -x_1^2(1) - x_2^2(1) + \int_0^1 [(u_1^1(t))^2 + (u_1^2(t))^2 - (u_2^1(t))^2 - (u_2^2(t))^2] dt,$$

$$J_2 = -x_1^2(1) - x_2^2(1) + \int_0^1 [-(u_1^1(t))^2 - (u_1^2(t))^2 + (u_2^1(t))^2 + (u_2^2(t))^2] dt.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Капустян В.О. Оптимальне керування та теорія ігор в економіці. Курс лекцій [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Економічна аналітика» спеціальності 051 Економіка / В. О. Капустян, Г. А. Мажара ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ: КПІ ім. Ігоря, 2023. 120 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/62311>
- [2] Капустян В.О., Мажара Г.А., Фартушний І.Д. Моделювання економіки: підручник для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 051 Економіка. Електронне мережеве видання. Київ: КПІ, 2022. 207 с.
- [3] Капустян В.О., Жуковська О.А. Економетрика: підручник для здобувачів ступеня бакалаврів спеціальності "Маркетинг". Київ: Освіта України, 2021. 220 с.
- [4] Волошин О.Ф., Машенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень. Навч. посіб. Київ: ВПЦ "Київський університет", 2010. 336 с.
- [5] Григорків В.С. Оптимальне керування в економіці. Чернівці: ЧНУ, 2011. 200 с.
- [6] Капустян О.В., Сукретна А.В. Методи нелінійного аналізу в математичній економіці. Київ: КНУ, 2011. 213 с.
- [7] Машенко С.О. Збірник задач з теорії ігор. Київ: НУБіП України, 2014. 105 с.
- [8] Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М. Сучасний економічний аналіз: У 2 ч. Ч. 1. Мікроекономіка: Навч. посіб. Київ: Вища школа, 2004. 262 с.
- [9] Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М. Сучасний економічний аналіз: У 2 ч. Ч. 2. Макроекономіка: Навч. посіб. Київ: Вища школа, 2004. 207 с.
- [10] Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах. Навч. посіб. Київ: Либідь, 2003. 504 с.