

И.С. Каширский

Рекуррентное дифференциальное исчисление

Теория и практические приложения

**Киев
«Освита Украины»
2013**

УДК 517.28
ББК 22.161.1
К31

Рекомендовано Ученым Советом
Национального Технического Университета Украины
протокол № 9 от 9 сентября 2013 г.

К31 Каширский И.С. Рекуррентное дифференциальное исчисление.

Теория и практические приложения. – К.: Освита Украины, 2013. – 456 с.

Предлагается новое рекуррентное дифференциальное исчисление, в основу которого положены рекуррентные уравнения. Как новое представление функций, рекуррентные уравнения потенциально содержат производные всех порядков. Извлечение необходимых производных осуществляется по строгому алгоритму, удобному для компьютерной реализации. Рекуррентные уравнения одинаково эффективно выполняют аналитическое и численное дифференцирование. При дифференцировании сложных выражений уточняется порядок вызова различных рекуррентных уравнений (маршрут). Монография написана, как учебник, и большую часть содержания составляют практические примеры аналитического и численного дифференцирования. Рекуррентное исчисление решает все задачи классического исчисления – явное дифференцирование функций, неявное дифференцирование систем нелинейных уравнений, матричное дифференцирование линейных систем, многомерное дифференцирование. Численное рекуррентное дифференцирование, как мощный вычислительный инструмент, намного превосходящий существующие методы, решает новые практические задачи – матричные кубические модели сложных функций, приближение составными степенными рядами, рекуррентные критерии сходимости степенных рядов, рекуррентные методы высших порядков для решения систем нелинейных уравнений. Рекуррентное исчисление имеет глубокие связи с классическими задачами алгебры и соединяют разделенные области научных исследований. Книга рассчитана на студентов старших курсов университетов, аспирантов и научных сотрудников.

УДК 517.28
ББК 22.161.1

ISBN 978-966-188-239-9

I.S.Kashirsky
RECURRENT DIFFERENTIAL CALCULUS .
THEORY and APPLICATION

A new recurrent differential calculus is suggested based on application of recurrent equations. As a new representation of functions, these equations implicitly incorporate derivatives of all orders. Extraction of required derivatives can be performed by a strict algorithm suitable for computer-aided realization. The recurrent equations are equally effective both in analytical and numerical differentiation. When differentiating some intricate expression, we define the sequence of calls for particular recurrent equations (the route). The monograph is written in the form of textbook whose main part represents practical examples of analytical and numerical differentiation. The recurrent calculus can solve all tasks of the classical calculus, such as explicit differentiation of functions, implicit differentiation of nonlinear equation systems, matrix differentiation of linear systems, and many-variable differentiation. The numerical recurrent differentiation as a computational tool is superior to present-day numerical differentiation methods in treatment of new practical tasks in a number of areas of application: approximations by composite power series, matrix cubic models of complex functions, recurrent criteria of convergence of power series, recurrent higher-order methods for treatment of nonlinear equation systems etc. The recurrent calculus is strongly linked to classical problems of algebra and helps unite formerly isolated fields of scientific research. The book is designed to students and post-graduates of universities.

СОДЕРЖАНИЕ

П р е д и с л о в и е	5
Глава 1. Рекуррентное дифференциальное исчисление (<i>p</i> -дифференцирование)	11
1.1. Аналитическое рекуррентное дифференцирование (аналитическое <i>p</i> -дифференцирование)	11
1.2. Численное рекуррентное дифференцирование (численное <i>p</i> -дифференцирование)	44
1.3. Задачи численного рекуррентного дифференцирования	64
1.3.1. Задача замены переменной дифференцирования	76
1.3.2. Задача чувствительности численных производных к начальным условиям	85
1.3.3. Задача численного расчета корней уравнений	90
1.3.4. Численные методы высокого порядка для расчета корней уравнений и экстремумов функций	93
Глава 2. Обратное рекуррентное дифференциальное исчисление (обратное <i>p</i> -дифференцирование)	100
2.1. Аналитическое обратное рекуррентное дифференцирование (аналитическое обратное <i>p</i> -дифференцирование)	100
2.2. Численное обратное рекуррентное дифференцирование (численное обратное <i>p</i> -дифференцирование)	132
2.3. Численное рекуррентное преобразование степенных рядов	177
2.4. Численные рекуррентные методы решения систем нелинейных уравнений	202
Глава 3. Многомерное рекуррентное исчисление (многомерное <i>p</i> -дифференцирование)	260
3.1. Двумерное прямое рекуррентное дифференцирование (двумерное прямое <i>p</i> -дифференцирование)	260
3.2. Двумерное численное обратное рекуррентное дифференцирование (двумерное обратное <i>p</i> -дифференцирование)	284
3.3. Трехмерное численное прямое рекуррентное дифференцирование (трехмерное прямое <i>p</i> -дифференцирование)	317
Глава 4. Матричное рекуррентное дифференциальное исчисление (матричное <i>p</i> -дифференцирование)	349
4.1. Матричные модели многомерных функций	349
4.2. Матричное обратное рекуррентное дифференцирование (обратное матричное <i>p</i> -дифференцирование)	370
4.3. Рекуррентная алгебра	386
Приложение. Таблицы рекуррентных уравнений и формул	422
Список литературы	454

ПРЕДИСЛОВИЕ

Классическое дифференциальное исчисление как великое достижение математической мысли определило многие пути развития математики. Наука постоянно совершенствует свои достижения, и дифференциальное исчисление не должно быть исключением. Рекуррентное исчисление является новым этапом в развитии дифференциального исчисления. С его появлением стало видно, что дифференциальное исчисление было неполным, и включало только одно направление. В действительности, изначально существовали два направления развития исчисления – классическое интеллектуальное и рекуррентное алгоритмическое. Классическое исчисление, которое по своей природе было творческим, ориентированным на интеллект, казалось единственным и бесспорным, пока не наступила компьютерная эпоха. Сохраняя свои достоинства при решении интеллектуальных задач, классическое исчисление оказалось совершенно беспомощным при решении вычислительных задач. Частично с этим связано доминирование в настоящее время дискретных численных методов, которые сейчас кажутся бесспорными. Рекуррентное исчисление является настолько мощным вычислительным инструментом, что может изменить приоритеты. Характерное для него извлечение информации о функции в одной точке объективнее и надежнее, чем сбор информации в дискретной области с неизвестными особыми свойствами функции. Рекуррентное дифференцирование дает новую жизнь дифференциальному исчислению, которое, оставаясь по-прежнему мощным интеллектуально, теперь обретает вычислительную силу.

В *главе 1* дан общий анализ свойств классического дифференциального анализа. В классическом процессе для многократного дифференцирования надо многократно опознавать структуру аналитического выражения дифференцируемой функции или функции полученной производной. До выполнения дифференцирования невозможно предсказать вид функции производной после дифференцирования. В этом распознавании нет никаких трудностей для интеллектуальной работы, в которой вид функции перед дифференцированием распознается визуально. Классическое дифференцирование создавалось именно для интеллектуальной работы и, естественно, в нем не учтены особенности компьютерной работы. Распознавание структуры аналитического выражения функции производной – это не вычислительная, а кибернетическая задача.

Основное требование к новому рекуррентному исчислению –обеспечить алгоритмичность, необходимую для программирования. Процесс, который не имеет алгоритма и шаги которого нельзя предсказать, сложно и зачастую не нужно программировать.

Основой нового рекуррентного исчисления являются *порождающие уравнения*, которые заменяют дифференцируемые функции. Сама замена функций их порождающими уравнениями как новое представление открывает новые свойства функций. Прежде всего, порождающее уравнение является

уникальной характеристикой каждой функции и не может совпадать для разных функций. Из порождающих уравнений следует, что многие функции, которые традиционно считаются разными, имеют одно порождающее уравнение и, другими словами, с позиции рекуррентного исчисления разными не являются.

Новизна подхода с порождающими уравнениями заключается в том, что порождающие уравнения имеют совершенно новое свойство *рекуррентности* как высшей формы порядка. Классическое многократное дифференцирование функции, построенное на четких правилах каждого шага, не имеет четкого алгоритма процесса в целом, тогда как рекуррентное дифференциальное исчисление, сохраняя алгоритмичность, создает упорядоченный, компактный и эффективный вычислительный процесс дифференцирования функций, пригодный для интеллектуальной и компьютерной работы.

В главе установлена грань, разделяющая классическое и рекуррентное исчисления. Она заключается в отказе от теории бесконечно малых величин, положенной в основу классического дифференциального исчисления, и определение производных как аналитических функций, удовлетворяющих некоторым «*макро-уравнениям*». В качестве таких уравнений приняты дифференциальные уравнения, включающие дифференцируемую функцию и неизвестные функции ее производных (порождающие уравнения). Для различных функций выполнен вывод порождающих уравнений как уникальной характеристики каждой функции. Показано, что решениями порождающих уравнений относительно функций производных являются *рекуррентные уравнения*. Из уникальности порождающего уравнения для каждой функции следует уникальность ее рекуррентного уравнения. Принципиальное отличие двух дифференциальных исчислений состоит в том, что классическое многократное дифференцирование строит неупорядоченную цепь производных функции, а рекуррентное исчисление имеет для каждой функции общую формулу дифференцирования. Классическое исчисление строит здание дифференцирования функции снизу без планирования, а рекуррентное исчисление имеет макет здания, по которому строит этажи. В рекуррентном уравнении потенциально заложены все производные функции, и процесс выбора требуемых производных имеет строгий алгоритм, определенный структурой рекуррентного уравнения. В главе доказаны необходимые теоремы и приведены примеры аналитического дифференцирования функций, подтверждающие эффективность рекуррентного дифференциального исчисления.

Рекуррентное исчисление выдает аналитические выражения производных в компактной форме, благодаря которой можно определить больше аналитических производных функции. Однако возможности аналитического дифференцирования функций ограничиваются несколькими производными. В классическом исчислении аналитическое и численное дифференцирование неразрывно связаны, и численное значение производной получается при подстановке значения переменной в ее найденное аналитическое выражение. В отличие от классического, численное

рекуррентное дифференцирование является мощным вычислительным инструментом, позволяющим находить десятки численных производных. Рекуррентные уравнения универсальны: в них можно подставлять аналитические выражения и выполнять аналитическое дифференцирование, а можно сразу подставлять численные значения, выполняя численное дифференцирование. В области численных расчетов классическое и рекуррентное исчисления несопоставимы, и потому выполнено сравнение рекуррентного численного дифференцирования с интерполяционными методами. В главе приведены десятки примеров численного дифференцирования сложных функций, при решении которых интерполяционные методы оказались малоэффективными и ненадежными. Действительно, не имеет смысла сравнивать интерполяционное численное дифференцирование, неточно вычисляющее 5 — 6 производных функции, с численным рекуррентным дифференцированием, точно вычисляющим десятки производных. Однако отсутствие методов для сравнения означает отсутствие средств оценки правильности расчетов. Учитывая это обстоятельство, в главе разработаны надежные средства самопроверки, определяющие верхнюю границу точного расчета численных производных.

В главе 2 рассмотрена задача неявного дифференцирования, решение которой приведено в классическом дифференциальном исчислении. Поставленная задача имеет широкую область практического применения и должна решать важную проблему чувствительности систем нелинейных уравнений к изменению внешних и внутренних параметров. Процедура классического неявного дифференцирования во многом подобна явному дифференцированию функций и также нарушает алгоритмичность в процессе многократного дифференцирования. Вследствие ограничений, указанных в главе 1, классическое неявное исчисление оказывается беспомощным при решении сложных вычислительных задач. В главе указана линия раздела, за которой расходятся пути классического и рекуррентного неявного исчисления. Классическое исчисление для расчета производных приняло концепцию дифференцирования сложных функций, а рекуррентное исчисление отказывается от этой концепции и находит производные функций с помощью рекуррентного явного дифференцирования (глава 1). Как доказано в работе, с позиций рекуррентного исчисления задача неявного дифференцирования является обратной задачей в отличие от прямой задачи главы 1. Реализация процесса обратного дифференцирования основана на использовании обратных рекуррентных уравнений, которые получаются из прямых уравнений выделением некоторых компонент. В сравнении с прямым анализом в обратном рекуррентном дифференцировании сохраняется необходимое свойство алгоритмичности, но подходы, формулы, способы, алгоритмы не имеют аналогов в прямом рекуррентном исчислении. В частности, для задач большой сложности разработан подход с разделением сложной задачи на части, производные которых можно вычислять независимо и объединять в общем результате. В главе доказаны необходимые теоремы и приведены

примеры аналитического и численного дифференцирования отдельных уравнений и систем нелинейных уравнений, подтверждающих эффективность обратного рекуррентного исчисления.

В *главе 3* рассмотрена задача дифференцирования многомерных функций, решение которой приведено в классическом исчислении, но оказалось бесполезным в вычислительных задачах. В настоящей главе, как в предыдущих главах, многомерное дифференцирование выполняется на основе многомерных рекуррентных уравнений. Для построения таких уравнений разработан оригинальный способ преобразования одномерных рекуррентных уравнений в многомерные — многомерные рекуррентные уравнения получаются при явном рекуррентном дифференцировании самих рекуррентных уравнений. Рекуррентное дифференцирование одномерного уравнения преобразует его в двумерное рекуррентное уравнение, двумерное преобразуется в трехмерное и т. д. Полученные таким способом многомерные уравнения сохраняются и в дальнейшем используются для многомерного рекуррентного дифференцирования заданных функций. С увеличением размерности растет сложность рекуррентных уравнений, но предел размерности устанавливают сами дифференцируемые функции, у которых быстро растет количество вычисляемых производных и возникает проблема хранения и обработки полученной информации о функции. Приведены примеры аналитического и численного рекуррентного дифференцирования двумерных и трехмерных функций. Более важной для практических приложений представляется задача обратного многомерного рекуррентного дифференцирования, определяющая чувствительность нелинейных систем уравнений к влиянию нескольких параметров. Многомерные обратные рекуррентные уравнения получаются из прямых многомерных уравнений разбиением на отдельные многомерные компоненты. В главе доказаны необходимые теоремы и приведены численные примеры двумерного обратного рекуррентного дифференцирования.

В *главе 4* построено матричное многомерное обратное рекуррентное дифференцирование для систем линейных уравнений. Такие системы описываются матричными уравнениями, содержащими изменяющиеся параметры. В отличие от предыдущих глав, в их рекуррентных уравнениях скалярные величины заменяются на численные матрицы, что превращает скалярные рекуррентные уравнения в матричные. В случае одного параметра результатом матричного дифференцирования является совокупность векторов производных (векторы первых производных, вторых производных и т. д.). В многомерных задачах появляются двумерные, трехмерные матрицы производных. В случае слабо заполненных матриц рекуррентные уравнения и формулы существенно упрощаются и в ряде практических случаев принимают простой вид, удобный для расчетов.

В главе установлена глубокая связь рекуррентного исчисления с некоторыми проблемами алгебры. В частности доказано, что классическая алгебраическая задача возведения многочлена в степень получает полное

решение на основе рекуррентных формул. Для случая возведения в степень многочлена с произвольным количеством переменных выведена многомерная рекуррентная общая формула, и бином Ньютона является частным случаем этой многомерной формулы. Численные расчеты по многомерной формуле развивают область исследования – *геометрию* алгебры. Оказывается, что возведение в степень многочленов различной размерности создает в многомерном пространстве геометрические фигуры, которые имеют строгие правила построения. Доказана закономерность, по которой численное смещение переменных в многомерном многочлене изменяет геометрию фигур. Установлено, что в многомерном пространстве некоторые грани фигур сохраняют геометрию известного треугольника Паскаля.

Новый рекуррентный подход к многомерным матрицам развивает основы многомерной матричной алгебры. В качестве очередного шага предлагается многомерная матричная операция, названная *реверсированием* пространственных матриц, которая внешне похожа на операцию обращения двумерных матриц (инвертирования), но имеет другие свойства. Доказаны необходимые теоремы и приведены численные примеры реверсирования многомерных матриц. Для иллюстрации выполнено реверсирование пространственных матриц известной геометрической структуры (диагональных, треугольных, ленточных и т.п.) и показано их реверсивное преобразование в пространственные матрицы с другими геометрическими свойствами. Отмечено, что некоторые из реверсированных матриц как бы сжимают информацию, преобразуя заполненные матрицы в разреженные.

Рекуррентное исчисление, как любая новая теория, дает новый взгляд на известные проблемы и показывает другие, более эффективные решения.

1. Матричные кубические модели функций.

Матричные кубические модели не использовались в практике численных расчетов ввиду сложности вычисления производных третьего порядка. С появлением рекуррентного дифференциального исчисления точный расчет высших производных становится простым и доступным. В работе предложена матричная кубическая модель и показано практическое использование таких сложных моделей для многомерных функций.

2. Составные степенные ряды для приближения сложных функций.

Предложенный составной степенной ряд включают несколько простых функций, связывающих приближаемую функцию со степенным рядом Тейлора. Составной степенной ряд, подобно степенному ряду Тейлора, приближает функцию в одной точке, но имеет более точное приближение. В качестве связующих функций в работе опробованы функция логарифма и степенная функция с предварительным оптимальным выбором степени.

3. Рекуррентные критерии оценки радиуса сходимости степенных рядов.

В работе доказано, что радиус сходимости степенного ряда равен расстоянию до ближайшей особой точки функции, в которой она обращается в бесконечность. На основе рекуррентного дифференциального исчисления разработаны 3 рекуррентных критерия определения радиуса сходимости степенного ряда – линейный, квадратичный, кубический. На конкретных примерах выполнено сравнение с известными критериями Даламбера и Коши-Адамара и показана высокая эффективность рекуррентных критериев.

4. Семейство численных рекуррентных методов решения систем нелинейных уравнений.

Построено новое семейство численных методов различных порядков, в котором методом низшего порядка является известный метод Ньютона. С помощью обратного рекуррентного дифференцирования на каждой итерации рекуррентного метода вычисляются численные производные переменных системы уравнений по некоторому параметру. Для рекуррентных методов высших порядков применение одномерного поиска минимума целевой функции, взятого из процедур оптимизации, приводит к нелинейной траектории текущей точки поиска. Высокая скорость сходимости методов, показанная на практических примерах, связана, как предполагается, именно с нелинейным одномерным поиском, который эффективно отслеживает сложную конфигурацию минимизируемой функции. Кроме того, применение рекуррентных критериев оценки сходимости степенных рядов после каждой итерации метода позволяет по результатам критериев прогнозировать успешность (или неудачи) будущих итераций методов.

5. Численные методы высших порядков для определения корней функций и их экстремумов.

Для численного решения задачи поиска корней или экстремумов функции методы высших порядков не использовались в практике численных расчетов ввиду неточного вычисления производных высокого порядка в исходной точке поиска. С появлением рекуррентного дифференцирования расчет высших производных с высокой точностью (10–12 значащих цифр) становится практически возможным. Приведенные примеры со сложными функциями показывают эффективность применения методов высших порядков с использованием точных численных производных. Кроме того, разработка рекуррентных критериев определения координат особых точек функций подсказала оригинальный метод определения корней заданной функции как полюсов инверсной функции.

Рекуррентное дифференциальное исчисление даст импульс для работы в смежных областях науки и принесет новые теоретические и практические решения важных задач.

И. Каширский

ГЛАВА 1. РЕКУРРЕНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Раздел 1.1. Аналитическое рекуррентное дифференцирование (аналитическое p -дифференцирование)

Классическое дифференциальное исчисление [1 – 7] имеет характерные особенности, для выяснения которых рассмотрим конкретный пример.

Выполним дифференцирование сложной функции

$$F(x) = \arcsin(\ln(D(x))) .$$

1) Дифференцируем внешнюю функцию

$$\frac{d}{dx}(\arcsin(u)) = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}} ;$$

2) дифференцируем первую внутреннюю функцию

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln(y)) = \frac{\frac{dy}{dx}}{y} ;$$

3) дифференцируем вторую внутреннюю функцию

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dD}{dx} .$$

Аналитическое выражение первой производной имеет вид:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{D(x) \cdot \sqrt{1 - (\ln D(x))^2}} \cdot \frac{dD(x)}{dx}$$

Анализ такой простой процедуры уже показывает, что каждый из этапов дифференцирования приводит к появлению новой аналитической функции, требующей для дальнейшего дифференцирования использование других приемов из арсенала классического дифференцирования. Недостаток всей процедуры не в том, что таких приемов много.

Для выбора следующих приемов надо предварительно опознать новую аналитическую функцию и понять ее структуру.

Для расчета второй производной структура дифференцируемой функции изменяется и соответственно меняются приемы ее дифференцирования. Следовательно, для расчета второй производной надо опознать найденную в примере аналитическую функцию первой производной, выявить все ее особенности и выбрать новые приемы обработки.

До выполнения первого дифференцирования трудно (или невозможно) предсказать вид функции для второго дифференцирования.

После второго дифференцирования получаем новое выражение:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F(x)}{dx^2} = & \left(D(x) \cdot \frac{d^2 D(x)}{dx^2} \cdot \sqrt{1 - \ln^2 D(x)} - \left(\frac{dD(x)}{dx} \right)^2 \cdot \sqrt{1 - \ln^2 D(x)} + \right. \\ & \left. + \frac{\ln D(x)}{\sqrt{1 - \ln^2 D(x)}} \cdot \left(\frac{dD(x)}{dx} \right)^2 \right) / (D^2(x) \cdot (1 - \ln^2 D(x))) \end{aligned}$$

Для третьего дифференцирования надо опознать структуру аналитического выражения второй производной.

До выполнения второго дифференцирования невозможно предсказать вид функции для 3 – го дифференцирования и т.д.

В этом распознавании нет никаких трудностей для интеллектуальной работы, в которой вид функции перед дифференцированием распознается визуально. Классическое дифференцирование создавалось именно для интеллектуальной работы и, естественно, в нем не учтены компьютерные особенности. Распознавание структуры аналитического выражения – это не вычислительная, а кибернетическая задача.

В классическом дифференциальном исчислении нет порядка и нет алгоритмичности. Программирование многократного дифференцирования есть «программирование беспорядка».

Основное требование к новому дифференциальному исчислению –обеспечить алгоритмичность, необходимую для программирования.

Определение. Назовем дифференцируемую функцию $F((D(x)))$ полиномиальной функцией, если аргументом функции является полином

$$D(x) = d_1 + d_2x + d_3x^2 + \dots + d_{n+1}x^n = \sum_{k=0}^n d_{k+1}x^k.$$

В частном случае $D(x) = x$ полиномиальная функция превращается в обычную функцию. Аналитические производные полинома определяются непосредственным дифференцированием:

$$\frac{dD(x)}{dx} = \sum_{k=1}^n k d_{k+1} x^{k-1}; \quad \frac{d^2 D(x)}{dx^2} = \sum_{k=1}^n k(k+1) d_{k+2} x^{k-1};$$
$$\frac{d^3 D(x)}{dx^3} = \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) d_{k+3} x^{k-1}; \dots$$

и в дальнейшем изложении считаются известными производными.

Определение. Назовем *порождающим* дифференциальное уравнение, в котором все функции являются простыми, и его многократное дифференцирование не приводит к нарушению алгоритмичности.

Лемма 1.1. Полиномиальная функция $F(x)=f(D(x))$, которая является сложной (по понятию классического дифференциального исчисления [1,2]), может быть преобразована в простую функцию исключением промежуточных связей F и переменной x и с сохранением только их непосредственной связи.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируем сложную функцию $F(x)=f(D(x))$ по правилам классического исчисления [1 – 7] и получаем аналитическое выражение

$$\frac{dF}{dx} = \frac{df}{dD} \cdot \frac{dD(x)}{dx},$$

которое можно рассматривать как дифференциальное уравнение

$$\frac{dF}{dx} - \frac{df}{dD} \cdot \frac{dD(x)}{dx} = 0. \quad (1.1)$$

Как следует из уравнения (1.1), связь функции F с переменной x осуществляется через функцию $\frac{df(D)}{dD}$. Тогда для исключения этой связи необходимо выразить функцию $\frac{df(D)}{dD}$ через функцию F и найти аналитическое выражение

$$\frac{df(D)}{dD} = \varphi(F).$$

Найденное выражение $\varphi(F)$ можно подставить в уравнение (1.1)

$$\frac{dF}{dx} - \varphi(F) \cdot \frac{dD(x)}{dx} = 0$$

и получить порождающее уравнение

$$\Phi\left(\frac{dF(x)}{dx}, F(x), D(x), \frac{dD(x)}{dx}\right) = 0, \quad (1.2)$$

которое после исключения связи содержит простые функции $F(x)$ и $D(x)$, что требовалось доказать.

С л е д с т в и е. Для расчета аналитических производных $\frac{d^2 F}{dx^2}, \frac{d^3 F}{dx^3}, \dots$

можно дифференцировать простые функции преобразованного уравнения (1.2):

$$\Phi\left(\frac{d^2 F(x)}{dx^2}, \frac{dF(x)}{dx}, F(x), D(x), \frac{dD(x)}{dx}, \frac{d^2 D(x)}{dx^2}\right) = 0;$$

$$\Phi\left(\frac{d^3 F(x)}{dx^3}, \frac{d^2 F(x)}{dx^2}, \frac{dF(x)}{dx}, F(x), D(x), \frac{dD(x)}{dx}, \frac{d^2 D(x)}{dx^2}, \frac{d^3 D(x)}{dx^3}\right) = 0$$

⋮

и решать эти уравнения относительно искомой производной. Тогда задача дифференцирования функции $F(D(x))$ эквивалентна задаче расчета

производных функции $\frac{dF}{dx}, \frac{d^2 F}{dx^2}, \frac{d^3 F}{dx^3}, \dots$, удовлетворяющих

порождающему уравнению (1.2), при многократном дифференцировании

которого все функции $F(x), \frac{dF(x)}{dx}, \frac{d^2 F(x)}{dx^2}, \dots, \frac{dD(x)}{dx}, \frac{d^2 D(x)}{dx^2}, \dots$

остаются простыми функциями.

Пример 1.1.

Рассмотрим функцию $F(D(x)) = \sin(D(x))$ и найдем ее порождающее уравнение и аналитические производные. Определяем порождающее уравнение, дифференцируя сложную функцию

$$\frac{dF(x)}{dx} = \cos(D) \cdot \frac{dD(x)}{dx}$$

и преобразуем его согласно лемме 1.1 к виду (1.2):

$$\frac{dF(x)}{dx} = \sqrt{1 - \sin^2(D)} \cdot \frac{dD(x)}{dx} = \sqrt{1 - F^2} \cdot \frac{dD(x)}{dx}.$$

Таким образом, получаем преобразованное уравнение, содержащее только простые функции $F(x)$ и $D(x)$, не связанные между собой

$$\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)^2 + ((F(x))^2 - 1) \cdot \left(\frac{dD(x)}{dx}\right)^2 = 0. \quad (1.3)$$

Простые функции этого уравнения можно многократно дифференцировать:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{dx^2} &= \frac{-1}{dF} \cdot \left(F(x) \cdot \frac{dF(x)}{dx} \cdot \left(\frac{dD(x)}{dx}\right)^2 + (F^2(x) - 1) \cdot \frac{dD(x)}{dx} \cdot \frac{d^2 D(x)}{dx^2} \right); \\ \frac{d^3 F}{dx^3} &= \frac{-1}{dF} \cdot \left(4F(x) \cdot \frac{dF(x)}{dx} \cdot \frac{dD(x)}{dx} \cdot \frac{d^2 D(x)}{dx^2} + \left(\frac{d^2 F}{dx^2}\right)^2 + \right. \\ &+ (F^2(x) - 1) \cdot \left(\left(\frac{d^2 D}{dx^2}\right)^2 + \frac{dD(x)}{dx} \cdot \frac{d^3 D(x)}{dx^3} \right) + \left(\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)^2 + F(x) \cdot \frac{d^2 F}{dx^2} \right) \cdot \left(\frac{dD(x)}{dx}\right)^2 \Big) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Преобразованные порождающие уравнения для некоторых функций приведены в табл.1.1. Как видно из табл.1.1, порождающее уравнение является уникальной характеристикой каждой функции и не может совпадать для разных функций.

Лемма 1.2. Функции $F(D(x)) = \sin(D(x))$ и $F(D(x)) = \cos(D(x))$, а также $F(D(x)) = \sin^2(D(x))$ и $F(D(x)) = \cos^2(D(x))$ не различимы в порождающем уравнении.

Доказательство. Повторяя рассуждения примера 1.1, для функции $F(D(x)) = \cos(D(x))$ находим

$$\frac{dF(x)}{dx} = -\sqrt{1 - \cos^2(D(x))} \cdot \frac{dD(x)}{dx} = -\sqrt{1 - (F(x))^2} \cdot \frac{dD(x)}{dx}.$$

При возведении в степень 2 знак пропадает, и порождающее уравнение совпадает с уравнением (1.3).

Найдем порождающее уравнение для функции $F(D(x)) = \sin^2(D(x))$. Дифференцируем сложную функцию [1,2,3] и после преобразования, согласно лемме 1.1, получаем

$$\frac{dF(x)}{dx} = 2\sin(D(x)) \cdot \cos(D(x)) \cdot \frac{dD(x)}{dx} = 2F(x) \cdot \sqrt{\frac{1}{F(x)} - 1} \cdot \frac{dD(x)}{dx}.$$

Возводя в степень 2, находим уравнение

Таблица 1.1

Функ- ция	Порождающее уравнение	Функция	Порождающее уравнение
D^m	$F' \cdot D - mF \cdot D' = 0$	$\frac{C}{\ln D}$	$F' \cdot D \cdot C - F \cdot D \cdot C' +$ $+ F^2 \cdot D' = 0$
$e^{\pm D}$	$F' \mp F \cdot D' = 0$		
$e^{\sqrt{D}}$	$4(F')^2 D - F^2 \cdot (D')^2 = 0$	$\operatorname{arctg} D$	$F' \cdot (D^2 + 1) - D' = 0$
e^{D^2}	$F' - 2F \cdot D \cdot D' = 0$	$\operatorname{arcctg} D$	$F' \cdot (D^2 + 1) + D' = 0$
e^{D^3}	$F' - 3F \cdot D^2 \cdot D' = 0$	$(\operatorname{arctg} D)^2$	$(F')^2 \cdot (1 - D^2)^2 -$ $- 4F \cdot (D')^2 = 0$
e^{D^4}	$F' - 4F \cdot D^3 \cdot D' = 0$	$(\operatorname{arcctg} D)^2$	
$e^{D^{-1}}$	$F' \cdot D^2 + F \cdot D' = 0$	$e^{\operatorname{arctg} D}$	$F' \cdot (D^2 + 1) -$ $- F \cdot D' = 0$
$e^{D^{-2}}$	$F' \cdot D^3 + 2F \cdot D' = 0$	$e^{\operatorname{arcctg} D}$	$F' \cdot (D^2 + 1) +$ $+ F \cdot D' = 0$
$e^{D^{-3}}$	$F' \cdot D^4 + 3F \cdot D' = 0$	$e^{\arcsin D}$	$(F')^2 \cdot (1 - D^2) -$ $- (F \cdot D')^2 = 0$
$e^{\frac{1}{\sqrt{D}}}$	$4(F')^2 \cdot D^3 -$ $- F^2 \cdot (D')^2 = 0$	$e^{\arccos D}$	
$\ln D$	$F' \cdot D - D' = 0$	$\sin \ln D$ $\cos \ln D$	$(F')^2 \cdot D^2 +$ $+ (F^2 - 1) \cdot (D')^2 = 0$
$(\ln D)^2$	$(F')^2 \cdot D^2 - 4F \cdot (D')^2 = 0$		
$\sqrt{\ln D}$	$2F' \cdot F \cdot D - D' = 0$	$\sin D$ $\cos D$	$(F')^2 + (F^2 - 1) \times$ $\times (D')^2 = 0$
$\frac{1}{\ln D}$	$F' \cdot D + F^2 \cdot D' = 0$		
$\frac{1}{\sqrt{\ln D}}$	$2F' \cdot D + F^3 \cdot D' = 0$	$(\sin D)^2$	$(F')^2 + 4(F^2 - F) \times$ $\times (D')^2 = 0$
$C^m e^D$	$F' C - F \cdot (mC' + D' C) = 0$	$(\cos D)^2$	
$\frac{C}{e^D \pm H}$	$F' \cdot C - F \cdot (C' - D' C) -$ $- F^2 \cdot (H' \mp D' \cdot H) = 0$	$\arcsin D$ $\arccos D$	$(F')^2 \cdot (1 - D^2) -$ $- (D')^2 = 0$
$C \cdot \ln D$	$F' \cdot D \cdot C - F \cdot D \cdot C' -$ $- C^2 \cdot D' = 0$	$(\arcsin D)^2$ $(\arccos D)^2$	$(F')^2 \cdot (1 - D^2) -$ $- 4F \cdot (D')^2 = 0$

$$\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)^2 + 4((F(x))^2 - F(x)) \cdot \left(\frac{dD(x)}{dx}\right)^2 = 0.$$

Найдем порождающее уравнение для функции $F(D(x)) = \cos^2(D(x))$

$$\frac{dF(x)}{dx} = 2\cos(D(x)) \cdot (-\sin(D(x))) \cdot \frac{dD(x)}{dx} = -2F(x) \cdot \sqrt{\frac{1}{F(x)} - 1} \cdot \frac{dD(x)}{dx},$$

откуда после возведения в степень 2 получаем то же порождающее уравнение, что требовалось доказать.

Лемма 1.3. Функции $F(D(x)) = \arcsin(D(x))$ и $F(D(x)) = \arccos(D(x))$, а также $F(D(x)) = (\arcsin(D(x)))^2$ и $F(D(x)) = (\arccos(D(x)))^2$ не различимы в порождающем уравнении.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя сложную функцию $F(D(x)) = \arcsin(D(x))$ [1,2,3] и выполняя преобразование согласно лемме 1.1,

находим $\frac{dF}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-D^2(x)}} \cdot \frac{dD(x)}{dx}$, откуда получаем порождающее уравнение

$$\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)^2 \cdot (1-D^2(x)) - \left(\frac{dD(x)}{dx}\right)^2 = 0.$$

Производная функции $F(D(x)) = \arccos(D(x))$ отличается только знаком

$$\frac{dF}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-D^2(x)}} \cdot \frac{dD(x)}{dx},$$

который пропадает при возведении в степень 2 и не изменяет вид порождающего уравнения.

Дифференцируем сложную функцию $F(D(x)) = (\arcsin(D(x)))^2$ [1, 2, 3] и преобразуем полученное выражение по лемме 1.1

$$\frac{dF}{dx} = 2\arcsin(D(x)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-D^2(x)}} \cdot \frac{dD(x)}{dx} = 2\sqrt{F(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-D^2(x)}} \cdot \frac{dD(x)}{dx},$$

откуда находим порождающее уравнение

$$\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)^2 \cdot (1-D^2(x)) - 4F(x) \cdot \left(\frac{dD(x)}{dx}\right)^2 = 0.$$

Производная функции $F(D(x)) = (\arccos(D(x)))^2$ отличается только знаком

$$\frac{dF}{dx} = 2\arccos(D(x)) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-D^2(x)}} \cdot \frac{dD(x)}{dx} = -2\sqrt{F(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-D^2(x)}} \cdot \frac{dD(x)}{dx},$$

который пропадает при возведении в степень 2, не изменяя вид порождающего уравнения, что требовалось доказать.

Из порождающих уравнений следует, что многие функции, которые традиционно считаются разными ($\sin D(x) \leftrightarrow \cos D(x)$, $\arcsin D(x) \leftrightarrow \arccos D(x)$ и т. п.), имеют одно порождающее уравнение или, другими словами, с позиции порождающего уравнения разными не являются.

Лемма 1.4. Функции $F(D(x)) = \arctg(D(x))$ и $F(D(x)) = \operatorname{arcctg}(D(x))$ имеют порождающие уравнения, отличающиеся одним знаком

$$\left(\frac{dF(x)}{dx}\right) \cdot (D^2(x) + 1) \mp \left(\frac{dD(x)}{dx}\right) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируем сложную функцию $F(D(x)) = \arctg(D(x))$ [1, 2, 3] и находим $\frac{dF}{dx} = \frac{1}{D^2(x) + 1} \cdot \frac{dD(x)}{dx}$, откуда получаем порождающее уравнение. Производная функции $F(D(x)) = \operatorname{arcctg}(D(x))$ отличается только знаком $\frac{dF}{dx} = \frac{-1}{D^2(x) + 1} \cdot \frac{dD(x)}{dx}$, который вносится в порождающее уравнение, что требовалось доказать.

С л е д с т в и е. Функции $F(D(x)) = \arctg(D(x))$ и $F(D(x)) = -\operatorname{arcctg}(D(x))$ не различимы в порождающем уравнении.

Для упрощения всех выражений введем *численное нормирование* аналитических производных

$$F_k = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{d^{k-1}F}{dx^{k-1}}, \quad (1.4)$$

при котором

$$F_1 = F; \quad F_2 = \frac{dF}{dx}; \quad F_3 = \frac{1}{2} \frac{d^2F}{dx^2}; \quad F_4 = \frac{1}{6} \frac{d^3F}{dx^3}; \quad F_5 = \frac{1}{24} \frac{d^4F}{dx^4}; \quad \dots$$

Рассмотрим функцию первой производной $\Phi = \frac{dF}{dx}$ и запишем ее нормированные производные:

$$\Phi_1 = \frac{dF}{dx}; \quad \Phi_2 = \frac{d^2F}{dx^2}; \quad \Phi_3 = \frac{1}{2} \frac{d^3F}{dx^3}; \quad \dots$$

Аналогично можно ввести функцию второй производной $\Psi = \frac{d^2F}{dx^2}$ и записать ее нормированные производные:

$$\Psi_1 = \frac{d^2F}{dx^2}; \quad \Psi_2 = \frac{d^3F}{dx^3}; \quad \Psi_3 = \frac{1}{2} \frac{d^4F}{dx^4}; \quad \dots$$

Следовательно, нормированные производные функции F связаны с нормированными производными функций производных Φ , Ψ , ... рекуррентными формулами:

$$\Phi_k = k \cdot F_{k+1}; \quad \Psi_k = k(k+1) \cdot F_{k+2}; \quad \dots \quad (1.5)$$

Теорема 1.1. Задана функция произведения двух сомножителей

$$F(x) = U(x) \cdot V(x),$$

где $U(x)$, $V(x)$ - дифференцируемые функции, аналитические производные которой можно определить по формуле Лейбница [1, 12]

$$\frac{d^{k-1}F(x)}{dx^{k-1}} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k-1)!}{i!(k-1-i)!} \cdot \frac{d^{k-1-i}U(x)}{dx^{k-1-i}} \cdot \frac{d^iV(x)}{dx^i}. \quad (1.6)$$

Тогда формула Лейбница для аналитических производных, нормированных согласно формуле (1.4), имеет вид:

$$F_k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} U_{i+1}(x) \cdot V_{k-i}(x), \quad (1.7)$$

идентичный формуле Коши для умножения численных степенных рядов

$$F(x) = U(x) \cdot V(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} U_k \cdot x^{k-1} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} V_k \cdot x^{k-1} \right)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следуя классическому исчислению [1,2], многократно дифференцируем функцию произведения аналитических сомножителей $F(x) = U(x) \cdot V(x)$:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{dU(x)}{dx} \cdot V(x) + U(x) \cdot \frac{dV(x)}{dx};$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{d^2U}{dx^2} \cdot V(x) + \frac{dU(x)}{dx} \cdot \frac{dV(x)}{dx} + \frac{dU(x)}{dx} \cdot \frac{dV(x)}{dx} + U(x) \cdot \frac{d^2V}{dx^2};$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3F}{dx^3} &= \frac{d^3U}{dx^3} \cdot V(x) + \frac{d^2U}{dx^2} \cdot \frac{dV(x)}{dx} + 2 \frac{d^2U}{dx^2} \cdot \frac{dV(x)}{dx} + 2 \frac{dU(x)}{dx} \cdot \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{dU(x)}{dx} \cdot \frac{d^2V}{dx^2} + \\ &+ U(x) \cdot \frac{d^3V}{dx^3} = \frac{d^3U}{dx^3} \cdot V(x) + 3 \frac{d^2U}{dx^2} \cdot \frac{dV(x)}{dx} + 3 \frac{dU(x)}{dx} \cdot \frac{d^2V}{dx^2} + U(x) \cdot \frac{d^3V}{dx^3}; \end{aligned}$$

⋮

и запишем аналитические производные в нормированном виде (1.4):

$$F_1 = U_1 \cdot V_1;$$

$$F_2 = U_1 \cdot V_2 + U_2 \cdot V_1;$$

$$2F_3 = 2U_1 \cdot V_3 + 2U_2 \cdot V_2 + 2U_3 \cdot V_1;$$

$$6F_4 = 6U_1 \cdot V_4 + 6U_2 \cdot V_3 + 6U_3 \cdot V_2 + 6U_4 \cdot V_1;$$

⋮

откуда следует рекуррентная формула (1.7).

Степенные численные ряды

$$U(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cdot x^{k-1}; \quad V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cdot x^{k-1}$$

являются численными аппроксимациями функций $U(x)$, $V(x)$ в точке $x=0$ и имеют свойства:

$$U_1 = U(0); \quad U_2 = \left. \frac{dU}{dx} \right|_0; \quad U_3 = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2} \right|_0; \dots V_1 = V(0); \quad V_2 = \left. \frac{dV}{dx} \right|_0; \quad V_3 = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dx^2} \right|_0; \dots$$

Следовательно, коэффициенты степенных рядов являются численными нормированными производными функций. Тогда численное умножение

степенных рядов сводится к операциям над производными сомножителей, и формула Коши является численным аналогом формулы Лейбница, что требовалось доказать.

В виду установленной идентичности формулу (1.7) в дальнейшем изложении будем называть формулой *Лейбница-Коши*.

Найдем формулу аналитических производных функции для произвольного количества сомножителей.

Теорема 1.2. Формула для расчета *нормированных* производных функции

$$F(x) = U(x) \cdot V(x) \cdot W(x) \cdot P(x) \cdots S(x) \cdot T(x), \quad (1.8)$$

содержащей аналитические сомножители, имеет следующий вид:

$$F_k(x) = \sum_{q=0}^{k-1} \left(\sum_{l=0}^q \left(\cdots \left(\sum_{i=0}^j \left(\sum_{r=0}^i U_{r+1}(x) \cdot V_{i+1-r}(x) \right) \cdot W_{j+1-i}(x) \right) \cdots \right) \cdot S_{q+1-l}(x) \right) \cdot T_{k-q}(x) \quad (1.9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим аналитическую функцию двух сомножителей $\Upsilon(x) = U(x) \cdot V(x)$ и найдем нормированные производные по формуле Лейбница-Коши (1.7)

$$\Upsilon_k = \sum_{r=0}^{k-1} U_{r+1} \cdot V_{k-r}.$$

Функцию с тремя сомножителями преобразуем

$$\Psi(x) = U(x) \cdot V(x) \cdot W(x) = (U(x) \cdot V(x)) \cdot W(x) = \Upsilon(x) \cdot W(x)$$

и находим нормированные производные

$$\Psi_k = \sum_{i=0}^{k-1} \Upsilon_{i+1} \cdot W_{k-i} = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r} \right) \cdot W_{k-i}.$$

Для функции с четырьмя сомножителями

$$H(x) = U(x) \cdot V(x) \cdot W(x) \cdot P(x) = (U(x) \cdot V(x) \cdot W(x)) \cdot P(x) = \Psi(x) \cdot P(x)$$

нормированные производные находим аналогично

$$H_k = \sum_{j=0}^{k-1} \Psi_{j+1} \cdot P_{k-j} = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{i=0}^j \left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r} \right) \cdot W_{j+1-i} \right) \cdot P_{k-j}.$$

Предположим, что теорема доказана для функции

$$\Phi(x) = U(x) \cdot V(x) \cdot W(x) \cdots S(x)$$

и получена рекуррентная формула

$$\Phi_k = \sum_{l=0}^{k-1} \left(\cdots \left(\sum_{i=0}^j \left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r} \right) \cdot W_{j+1-i} \right) \cdots \right) \cdot S_{k-l}. \quad (1.10)$$

Добавим в функцию $\Phi(x)$ еще один сомножитель

$$F(x) = U(x) \cdot V(x) \cdot W(x) \cdots S(x) \cdot T(x) = \Phi(x) \cdot T(x)$$

и применим формулу Лейбница-Коши (1.7)

$$F_k = \sum_{q=0}^{k-1} \Phi_{q+1} \cdot T_{k-q}. \quad (1.11)$$

Из формулы (1.10) находим

$$\Phi_{q+1} = \sum_{l=0}^q (\cdots (\sum_{i=0}^j (\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r}) \cdot W_{j+1-i}) \cdots) \cdot S_{q+1-l}$$

и, подставляя в формулу (1.11), получаем формулу (1.9), что требовалось доказать.

Рассмотрим частные свойства формулы (1.9).

1. Функция (1.8) не зависит от порядка сомножителей, вследствие чего порядок сомножителей в рекуррентной формуле также произвольный. Например, для функции $F(x) = U(x) \cdot V(x) \cdot W(x)$ справедливы рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} F_k &= \sum_{i=0}^{k-1} W_{k-i} \cdot (\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r}) = \sum_{i=0}^{k-1} V_{k-i} \cdot (\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot W_{i+1-r}) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} U_{k-i} \cdot (\sum_{r=0}^i V_{r+1} \cdot W_{i+1-r}). \end{aligned}$$

Эти рекуррентные формулы удобны для функций $F(x) = (U(x))^3$ и $F(x) = (U(x))^2 \cdot V(x)$

$$F_k = \sum_{i=0}^{k-1} V_{k-i} \cdot (\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot U_{i+1-r}). \quad (1.12)$$

2. Формула (1.9) не является единственной, и существует множество равноценных рекуррентных формул. Вид полученной формулы зависит от группировки сомножителей при ее выводе. Так, для функции $F(x) = U(x) \cdot V(x) \cdot W(x) \cdot P(x)$, изменив группировку сомножителей

$$F(x) = U(x) \cdot V(x) \cdot W(x) \cdot P(x) = (U(x) \cdot V(x)) \cdot (W(x) \cdot P(x)) = \Psi(x) \cdot \Phi(x),$$

получаем другую рекуррентную формулу

$$F_k = \sum_{i=0}^{k-1} \Psi_{i+1} \cdot \Phi_{k-i} = \sum_{i=0}^{k-1} ((\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r}) \cdot (\sum_{r=0}^{k-1-i} W_{r+1} \cdot P_{k-i-r})) \quad (1.13)$$

Эта формула удобна для функций $F(x) = (U(x))^4$ и $F(x) = (U(x))^2 \cdot (V(x))^2$

$$F_k = \sum_{i=0}^{k-1} ((\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot U_{i+1-r}) \cdot (\sum_{r=0}^{k-1-i} V_{r+1} \cdot V_{k-i-r})) \quad (1.14)$$

Для функции $F(x) = U(x) \cdot V(x) \cdot W(x) \cdot P(x) \cdot T(x)$ группировка

$$F(x) = (U(x) \cdot V(x)) \cdot (W(x) \cdot P(x) \cdot T(x)) = \Psi(x) \cdot \Phi(x)$$

приводит к рекуррентной формуле

$$F_k = \sum_{j=0}^{k-1} \Psi_{j+1} \cdot \Phi_{k-j} = \sum_{j=0}^{k-1} ((\sum_{r=0}^j U_{r+1} \cdot V_{j+1-r}) \cdot (\sum_{i=0}^{k-1-j} W_{k-j-i} \cdot (\sum_{r=0}^i P_{r+1} \cdot T_{i+1-r})))$$

Эта формула удобна для функций $F(x) = (U(x))^2 \cdot (V(x))^3$

$$F_k = \sum_{j=0}^{k-1} ((\sum_{r=0}^j U_{r+1} \cdot U_{j+1-r}) \cdot (\sum_{i=0}^{k-1-j} V_{k-j-i} \cdot (\sum_{r=0}^i V_{r+1} \cdot V_{i+1-r}))) \quad (1.15)$$

Лемма 1.5. Нормированные производные дифференцируемой аналитической функции $F(x) = \frac{dU(x)}{dx} \cdot \frac{dV(x)}{dx}$ вычисляются по рекуррентной формуле

$$F_k(x) = \sum_{r=0}^{k-1} (k-r)(r+1) \cdot U_{r+2}(x) \cdot V_{k+1-r}(x) . \quad (1.16)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим заданную функцию в виде $F(x) = \Psi(x) \cdot \Phi(x)$ и запишем для нее формулу Лейбница-Коши (1.7)

$$F_k = \sum_{r=0}^{k-1} \Psi_{r+1} \cdot \Phi_{k-r} .$$

Функции формулы $\Psi(x)$, $\Phi(x)$ связаны с заданными производными по рекуррентным соотношениям (1.5)

$$\Psi_{r+1} = (r+1) \cdot U_{r+2} ; \Phi_{k-r} = (k-r) \cdot V_{k+1-r} .$$

Подставляя эти соотношения в выражение F_k , получаем рекуррентную формулу (1.16), что требовалось доказать.

Лемма 1.6. Нормированные производные дифференцируемой аналитической функции $F(x) = \frac{dU(x)}{dx} \cdot \frac{dV(x)}{dx} \cdot \frac{dW(x)}{dx} \cdot \frac{dP(x)}{dx}$ вычисляются по рекуррентной формуле

$$F_k = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\left(\sum_{r=0}^i (r+1)(i+1-r) U_{r+2} \cdot V_{i+2-r} \right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{k-1-i} (r+1)(k-i-r) W_{r+2} \cdot P_{k+1-i-r} \right) \right) \quad (1.17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим заданную функцию в виде

$$F(x) = \frac{dU(x)}{dx} \cdot \frac{dV(x)}{dx} \cdot \frac{dW(x)}{dx} \cdot \frac{dP(x)}{dx} = (H(x) \cdot K(x)) \cdot (N(x) \cdot P(x))$$

и группируем сомножители, как показано в выражении функции $F(x) = \Psi(x) \cdot \Phi(x)$. Тогда применима рекуррентная формула (1.13)

$$F_k = \sum_{i=0}^{k-1} \Psi_{i+1} \cdot \Phi_{k-i} = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\left(\sum_{r=0}^i H_{r+1} \cdot K_{i+1-r} \right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{k-1-i} N_{r+1} \cdot P_{k-i-r} \right) \right) .$$

Переходим к заданным нормированным производным по рекуррентным соотношениям (1.5):

$$H_{r+1} = (r+1) \cdot U_{r+2} ; K_{i+1-r} = (i+1-r) \cdot V_{i+2-r} ;$$

$$N_{r+1} = (r+1) \cdot W_{r+2} ; P_{k-i-r} = (k-i-r) \cdot P_{k+1-i-r} .$$

Подставляя эти соотношения в формулу F_k , получаем рекуррентную формулу (1.17), что требовалось доказать.

$$\text{Для частного случая функции } F(x) = \left(\frac{dU(x)}{dx} \right)^2 \cdot \left(\frac{dV(x)}{dx} \right)^2$$

рекуррентная формула (1.17) принимает вид:

$$F_k = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\left(\sum_{r=0}^i (r+1)(i+1-r) U_{r+2} \cdot U_{i+2-r} \right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{k-1-i} (r+1)(k-i-r) V_{r+2} \cdot V_{k+1-i-r} \right) \right) \quad (1.18)$$

Лемма 1.7. Нормированные производные дифференцируемой аналитической функции $F(x) = U(x) \cdot V(x) \cdot W(x) \cdot \frac{dP(x)}{dx} \cdot \frac{dT(x)}{dx}$ вычисляются по рекуррентной формуле

$$F_k = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\left(\sum_{i=0}^j W_{j+1-i} \cdot \left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r} \right) \right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{k-1-j} (r+1)(k-j-r) \cdot P_{r+2} \cdot T_{k+1-j-r} \right) \right) \quad (1.19)$$

Доказательство. Представим заданную функцию в виде

$$F(x) = U(x) \cdot V(x) \cdot W(x) \cdot \frac{dP(x)}{dx} \cdot \frac{dT(x)}{dx} = (U(x) \cdot V(x) \cdot W(x)) \cdot (H(x) \cdot K(x))$$

и группируем сомножители, как показано в выражении функции $F(x) = \Psi(x) \cdot \Phi(x)$. Тогда применима формула (1.15) для другой группировки сомножителей

$$F_k = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\left(\sum_{i=0}^j W_{j+1-i} \cdot \left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r} \right) \right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{k-1-j} H_{r+1} \cdot K_{k-j-r} \right) \right).$$

Переходим к заданным нормированным производным по рекуррентным соотношениям (1.5):

$$H_{r+1} = (r+1) \cdot P_{r+2} ; K_{k-j-r} = (k-j-r) \cdot T_{k+1-j-r}$$

Подставляя эти соотношения в формулу F_k , получаем рекуррентную формулу (1.19), что требовалось доказать.

Для частного случая функции $F(x) = (U(x))^3 \cdot \left(\frac{dV(x)}{dx} \right)^2$ рекуррентная формула (1.19) принимает вид:

$$F_k = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\left(\sum_{i=0}^j U_{j+1-i} \cdot \left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot U_{i+1-r} \right) \right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{k-1-j} (r+1)(k-j-r) \cdot V_{r+2} \cdot V_{k+1-j-r} \right) \right) \quad (1.20)$$

Другие частные случаи рекуррентных формул сведены в табл.1.2.

В примере 1.1 производные были определены в результате непосредственного дифференцирования порождающего уравнения. Этот пример показывает способ расчета производных, отличный от классического дифференцирования, и позволяет получить аналитические производные функций быстрее и в более простой форме. Предложенный способ дифференцирования порождающего уравнения внешне похож на классический, но отличается от него особым свойством порождающего уравнения – отсутствием в выражении сложных функций (по определению классического исчисления [1,2,3]).

Таблица 1.2

Функция F	Рекуррентные формулы F_k
$\frac{dU}{dx} \cdot V$	$\sum_{r=0}^{k-1} (r+1) \cdot U_{r+2} \cdot V_{k-r}$
$\frac{dU}{dx} \cdot \frac{dV}{dx}$	$\sum_{r=0}^{k-1} (k-r)(r+1) \cdot U_{r+2} \cdot V_{k+1-r}$
$\frac{dU}{dx} \cdot V \cdot W$	$\sum_{i=0}^{k-1} W_{k-i} \cdot \left(\sum_{r=0}^i (r+1) \cdot U_{r+2} \cdot V_{i+1-r} \right)$
$\frac{dU}{dx} \cdot \frac{dV}{dx} \cdot W$	$\sum_{i=0}^{k-1} W_{k-i} \cdot \left(\sum_{r=0}^i (r+1)(i+1-r) \cdot U_{r+2} \cdot V_{i+2-r} \right)$
$\frac{dU}{dx} \cdot V \cdot W \cdot P$	$\sum_{i=0}^{k-1} \left(\left(\sum_{r=0}^i (r+1) \cdot U_{r+2} \cdot V_{i+1-r} \right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{k-1-i} W_{r+1} \cdot P_{k-i-r} \right) \right)$
$\frac{dU}{dx} \cdot \frac{dV}{dx} \cdot W \cdot P$	$\sum_{i=0}^{k-1} \left(\left(\sum_{r=0}^i (r+1)(i+1-r) \cdot U_{r+2} \cdot V_{i+2-r} \right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{k-1-i} W_{r+1} \cdot P_{k-i-r} \right) \right)$
$\frac{dU}{dx} \cdot V \cdot W \times$ $\times P \cdot S$	$\sum_{j=0}^{k-1} \left(\left(\sum_{r=0}^j (r+1) U_{r+2} \cdot V_{j+1-r} \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-1-j} W_{k-j-i} \cdot \left(\sum_{r=0}^i P_{r+1} \cdot S_{i+1-r} \right) \right) \right)$ $\sum_{j=0}^{k-1} (j+1) U_{j+2} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-1-j} \left(\sum_{q=0}^i V_{q+1} \cdot W_{i+1-q} \right) \times \right.$ $\left. \times \left(\sum_{q=0}^{k-1-j-i} P_{q+1} \cdot S_{k-j-i-q} \right) \right)$
$\frac{dU}{dx} \cdot \frac{dV}{dx} \cdot W \times$ $\times P \cdot S$	$\sum_{j=0}^{k-1} \left(\left(\sum_{r=0}^j (r+1)(j+1-r) \cdot U_{r+2} \cdot V_{j+2-r} \right) \times \right.$ $\left. \times \left(\sum_{i=0}^{k-1-j} W_{k-j-i} \cdot \left(\sum_{r=0}^i P_{r+1} \cdot S_{i+1-r} \right) \right) \right)$

Как будет показано в дальнейшем изложении, в действительности нет никакой необходимости дифференцировать порождающие уравнения.

Новизна рекуррентного дифференциального исчисления заключается в том, что простые, на первый взгляд, порождающие уравнения имеют совершенно особое новое свойство, которого нет в классическом дифференциальном исчислении, а именно – свойство рекуррентности как высшей формы порядка.

Основной недостаток классического исчисления состоит именно в том, что каждый шаг дифференцирования непредвиденно изменяет формулу расчета очередной производной. Как известно, что нельзя предусмотреть в алгоритме, то сложно программировать.

Каждому порождающему уравнению (табл.1.1) соответствует уникальная рекуррентная формула, из которой следуют все производные. Заменяем

выражения в порождающих уравнениях соответствующими рекуррентными формулами (1.7) – (1.20) и выражениями из табл.1.2 и, таким образом, превращаем их в рекуррентные уравнения. Рекуррентные уравнения для некоторых полиномиальных функций приведены в табл. П.1 – П.4. Решение рекуррентного уравнения относительно искомым производных функции связано с предварительным выделением соответствующих слагаемых из сумм, и потому решение, как правило, сложнее самого уравнения. Решения некоторых рекуррентных уравнений приведены в табл. П.5 – П.9. Если аналитическое решение рекуррентного уравнения намного сложнее самого уравнения, то решать аналитически такие рекуррентные уравнения нецелесообразно. В таких случаях необходимо непосредственно разворачивать все суммы рекуррентного уравнения и визуальнo группировать требуемые слагаемые, что в аналитическом расчете сделать несложно. В разделе расчета численных производных будут описаны приемы работы с численными рекуррентными уравнениями, пригодные для алгоритмизации процесса численного рекуррентного исчисления.

Определение. Многократное дифференцирование полиномиальной функции с использованием рекуррентных формул (уравнений) назовем, в отличие от классического дифференцирования, *рекуррентным дифференцированием* или сокращенно *p-дифференцированием*.

Пример 1.2.

Рассмотрим полиномиальную функцию $F(D(x)) = \sin(D(x))$ (пример 1.1) и найдем нормированные аналитические производные с помощью *p*-дифференцирования, используя рекуррентную формулу. Найдем аналитические выражения производных полинома $D(x)$:

$$D(x) = \sum_{k=0}^n d_{k+1} x^k; \quad \frac{dD(x)}{dx} = \sum_{k=1}^n k d_{k+1} x^{k-1}; \quad \frac{d^2 D(x)}{dx^2} = \sum_{k=1}^n k(k+1) d_{k+2} x^{k-1}; \dots$$

и запишем его нормированные производные:

$$D_1(x) = D(x); \quad D_2(x) = \frac{dD(x)}{dx}; \quad D_3(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 D(x)}{dx^2}; \dots$$

По рекуррентной формуле функции (табл.П.8)

$$\begin{aligned} F_k = & \frac{1}{2(k-1) \cdot F_2} \left(2(k-1) \cdot (1 - F_1^2) \cdot D_2 \cdot D_k - 2D_2^2 \cdot F_1 \cdot F_{k-1} + \right. \\ & + \sum_{i=1}^{k-3} \left((i+1)(k-1-i) \cdot (-F_{i+2} \cdot F_{k-i} + D_{i+2} \cdot D_{k-i} \cdot (1 - F_1^2)) - D_2^2 \cdot F_{i+1} \cdot F_{k-1-i} - \right. \\ & \left. \left. - \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} F_{q+1} \cdot F_{k-1-i-q} \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot D_{q+2} \cdot D_{i+2-q} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

находим нормированные аналитические производные:

$$F_1(x) = \sin(D_1(x));$$

$$\boxed{k=2} \quad F_2(x) = D_2(x) \cdot \sqrt{1 - (F_1(x))^2};$$

$$\boxed{k=3} \quad F_3(x) = \frac{1}{2F_2(x)} (2(1 - (F_1(x))^2) \cdot D_2(x) \cdot D_3(x) - F_1(x) \cdot F_2(x) \cdot (D_2(x))^2);$$

$$\boxed{k=4} \quad F_4(x) = \frac{1}{6F_2(x)} (6(1 - (F_1(x))^2) \cdot D_2(x) \cdot D_4(x) - 2F_1(x) \cdot F_3(x) \cdot (D_2(x))^2 - \\ - 4(F_3(x))^2 + 4(1 - (F_1(x))^2) \cdot D_3^2(x) - (F_2(x)D_2(x))^2 - 8F_1(x) \cdot F_2(x) \cdot D_2(x) \cdot D_3(x))$$

В результате получаем аналитические выражения производных:

$$\frac{dF(x)}{dx} = F_2(x); \quad \frac{d^2 F(x)}{dx^2} = 2F_3(x); \quad \frac{d^3 F(x)}{dx^3} = 6F_4(x); \dots$$

Определение. Назовем *составной* функцию, которая имеет структуру

$$F = \eta(v(\dots \psi(\varphi(D(x)))\dots)) \quad (1.21)$$

и в которой $\eta, v, \dots, \psi, \varphi$ - внутренние аналитические дифференцируемые функции.

Термин *составной* функции в рекуррентном дифференцировании тождественен термину сложной функции в классическом дифференциальном исчислении. Но поскольку под понятием сложной функции обычно подразумевают не структуру функции (сложность или простоту ее структуры), а правило ее дифференцирования в классическом исчислении [1,2,3], то в рекуррентном дифференциальном исчислении для обозначения функций вида (1.21) введен другой термин. Термин сложной функции в рекуррентном исчислении употребляется в обычном смысле.

Лемма 1.8. Составные функции $F(D(x)) = \sin(\ln(D(x)))$ и $F(D(x)) = \cos(\ln(D(x)))$ не различимы в порождающем уравнении.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя сложную функцию $F(D(x)) = \sin(\ln(D(x)))$ [1, 2, 3] и выполняя преобразование согласно лемме 1.1, находим

$$\frac{dF}{dx} = \cos(\ln(D(x))) \cdot \frac{1}{D(x)} \cdot \frac{dD(x)}{dx} = \sqrt{1 - (F(x))^2} \cdot \frac{1}{D(x)} \cdot \frac{dD(x)}{dx},$$

откуда получаем порождающее уравнение

$$\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)^2 \cdot (D(x))^2 - (1 - (F(x))^2) \cdot \left(\frac{dD(x)}{dx}\right)^2 = 0$$

Дифференцируем сложную функцию $F(D(x)) = \cos(\ln(D(x)))$ и, после преобразования, находим

$$\frac{dF}{dx} = -\sin(\ln(D(x))) \cdot \frac{1}{D(x)} \cdot \frac{dD(x)}{dx} = -\sqrt{1 - (F(x))^2} \cdot \frac{1}{D(x)} \cdot \frac{dD(x)}{dx},$$

При возведении в степень 2 знак пропадает и вид порождающего уравнения не изменяется, что требовалось доказать.

Лемма 1.9. Составные функции $F(D(x)) = e^{\arctg D(x)}$ и $F(D(x)) = e^{-\arctg D(x)}$ в порождающем уравнении отличаются одним знаком

$$\frac{dF(x)}{dx} \cdot (1 + (D(x))^2) \mp F(x) \cdot \frac{dD(x)}{dx} = 0$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя сложную функцию $F(D(x)) = e^{\text{arctg}D(x)}$ и выполняя преобразование согласно лемме 1.1, находим

$$\frac{dF}{dx} = e^{\text{arctg}D(x)} \cdot \frac{1}{1 + (D(x))^2} \cdot \frac{dD(x)}{dx} = F(x) \cdot \frac{1}{1 + (D(x))^2} \cdot \frac{dD(x)}{dx},$$

откуда получаем порождающее уравнение. Дифференцируя сложную функцию $F(D(x)) = e^{\text{arctg}D(x)}$ [1, 2, 3] и преобразуя выражение, находим

$$\frac{dF}{dx} = e^{\text{arctg}D(x)} \cdot \frac{-1}{1 + (D(x))^2} \cdot \frac{dD(x)}{dx} = -F(x) \cdot \frac{1}{1 + (D(x))^2} \cdot \frac{dD(x)}{dx},$$

что требовалось доказать.

С л е д с т в и е. Составные функции $F(D(x)) = e^{\text{arctg}D(x)}$ и $F(D(x)) = e^{-\text{arctg}D(x)}$ не различимы в порождающем уравнении.

При большом количестве внутренних функций в составной функции процесс аналитического расчета производных можно упростить, используя разделения составной функции на части, каждая из которых, в свою очередь, может быть составной функцией, но меньшей сложности. Рассмотрим составную функцию

$$F = v(\dots \eta(\mid \psi(\dots v(\mid \rho(\dots \varphi(D(x))))))\dots)$$

и разделим ее на части, как показано в выражении. Тогда получим несколько более простых *частичных* составных функций

$$F = v(\dots \eta(H(x))); H = \psi(\dots v(P(x))); P = \rho(\dots \varphi(D(x))) .$$

Теорема 1.3. Задана составная функция

$$F = \psi(\varphi(D(x))) ,$$

для которой известны нормированные аналитические производные:

$$D_1 = D(x) ; D_2 = \frac{dD(x)}{dx} ; D_3 = \frac{1}{2} \frac{d^2 D(x)}{dx^2} ; D_4 = \frac{1}{6} \frac{d^3 D(x)}{dx^3} ; \dots$$

Тогда заданную функцию можно разделить на части $F = \psi(H) ; H = \varphi(D(x))$ и выполнять расчет аналитических производных каждой части независимо.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отдельно частичную функцию $H = \varphi(D(x))$, для внутренней функции которой φ есть рекуррентная формула

$$H_k = \Xi_{\varphi}(D_1, D_2, D_3, D_4, \dots, D_k, H_1, H_2, H_3, H_4, \dots, H_{k-1}) .$$

Выполним расчет нормированных производных:

$$\begin{aligned}
H_1 &= \varphi(D_1); \\
H_2 &= \Xi_{\varphi}(D_1, D_2, H_1); \\
H_3 &= \Xi_{\varphi}(D_1, D_2, D_3, H_1, H_2); \\
H_4 &= \Xi_{\varphi}(D_1, D_2, D_3, D_4, H_1, H_2, H_3); \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Рассмотрим частичную функцию $F = \psi(H)$, для которой уже определены нормированные производные:

$$H_1 = \varphi(D(x)); \quad H_2 = \frac{dH(x)}{dx}; \quad H_3 = \frac{1}{2} \frac{d^2 H(x)}{dx^2}; \quad H_4 = \frac{1}{6} \frac{d^3 H(x)}{dx^3}; \dots$$

Предположим, что для внутренней функции ψ есть рекуррентная формула

$$F_k = \Xi_{\psi}(H_1, H_2, H_3, H_4, \dots, H_k, F_1, F_2, F_3, F_4, \dots, F_{k-1}).$$

Тогда расчет производных этой части отличается от расчета предыдущей части только обозначениями. Определим нормированные производные второй части:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \psi(H_1) = \psi(\varphi(D_1)); \\
F_2 &= \Xi_{\psi}(H_1, H_2, F_1); \\
F_3 &= \Xi_{\psi}(H_1, H_2, H_3, F_1, F_2); \\
F_4 &= \Xi_{\psi}(H_1, H_2, H_3, H_4, F_1, F_2, F_3); \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Расчет можно выполнять в обратном порядке и рассматривать сначала вторую часть функции. Неизвестные производные $H_1, H_2, H_3, H_4, \dots$ будут обозначаться символами, пока не будет выполнен расчет первой части, что требовалось доказать.

Пример 1.3.

Рассмотрим полиномиальную функцию, которая дифференцировалась в начале раздела

$$F(x) = \arcsin(\ln(D(x)))$$

и выполним ее p -дифференцирование.

Этап 1.

Определяем нормированные производные полинома:

$$\begin{aligned}
D_1(x) &= D(x) = \sum_{k=0}^n d_{k+1} x^k; \quad D_2(x) = \sum_{k=1}^n k d_{k+1} x^{k-1}; \\
D_3(x) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k(k+1) d_{k+2} x^{k-1}; \quad D_4(x) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) d_{k+3} x^{k-1}
\end{aligned}$$

Этап 2.

Для внутренней функции $L(x) = \ln D(x)$ из ее рекуррентной формулы (табл. П.7)

$$L_k(x) = \frac{1}{(k-1) \cdot D_1(x)} \left((k-1) \cdot D_k(x) - \sum_{q=0}^{k-3} (q+1) \cdot L_{q+2}(x) \cdot D_{k-1-q}(x) \right)$$

определяем аналитические выражения нормированных производных:

$$L_1(x) = \ln(D_1(x)) ; L_2(x) = \frac{1}{D_1(x)} D_2(x) ; L_3(x) = \frac{1}{2D_1(x)} (2D_3(x) - L_2(x) \cdot D_2(x));$$

$$L_4(x) = \frac{1}{3D_1(x)} (3D_4(x) - L_2(x) \cdot D_3(x) - 2L_3(x) \cdot D_2(x));$$

Этап 3.

Для заданной функции $F(x) = \arcsin L(x)$ из ее рекуррентной формулы (табл.П.8) с другими обозначениями

$$\begin{aligned} F_k(x) = & \frac{1}{2(k-1) \cdot (L_1^2(x) - 1) \cdot F_2(x)} \left(-2F_2^2(x) \cdot L_1(x) \cdot L_{k-1}(x) - \right. \\ & - 2(k-1)L_2(x) \cdot L_k(x) - \sum_{i=1}^{k-3} (F_2^2(x) \cdot L_{i+1}(x) \cdot L_{k-1-i}(x) + \\ & + (i+1) \cdot (k-1-i) \cdot ((L_1^2(x) - 1) \cdot F_{i+2}(x) \cdot F_{k-i}(x) + L_{i+2}(x) \cdot L_{k-i}(x)) + \\ & \left. + \left(\sum_{q=0}^i (q+1) \cdot (i+1-q) \cdot F_{q+2}(x) \cdot F_{i+2-q}(x) \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} L_{q+1}(x) \cdot L_{k-1-i-q}(x) \right) \right) \end{aligned}$$

определяем аналитические нормированные производные:

$$F_1(x) = \arcsin(L_1(x)); F_2(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{L_2(x)}{\sqrt{1 - (L_1(x))^2}};$$

$$F_3(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{-2L_2(x) \cdot (L_1(x) \cdot F_2^2(x) + 2L_3(x))}{4 \cdot (L_1^2(x) - 1) \cdot F_2(x)};$$

$$\begin{aligned} F_4(x) = \frac{1}{6} \frac{d^3 F}{dx^3} = & (-4(L_1^2(x) - 1)F_3^2(x) - 2L_1(x) \cdot F_2(x)(4L_2(x)F_3(x) + F_2(x)L_3(x)) - \\ & - (L_2(x) \cdot F_2(x))^2 - 6L_2(x) \cdot L_4(x) - 4L_3^2(x)) / (6 \cdot (L_1^2(x) - 1) \cdot F_2(x)) \end{aligned}$$

Аналитические выражения нормированных производных получаем в компактной форме и при необходимости их можно развернуть. Для контроля развернем выражения и найдем аналитические производные:

$$\frac{dF}{dx} = F_2 = \frac{D_2(x)}{D_1(x) \cdot \sqrt{1 - (\ln D_1(x))^2}};$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{dx^2} = & \frac{L_2 \cdot (L_1 \cdot F_2^2 + 2L_3)}{(1 - L_1^2) \cdot F_2} = \frac{L_2 \cdot L_1 \cdot F_2^2}{(1 - L_1^2) \cdot F_2} + \frac{2L_2 \cdot L_3}{(1 - L_1^2) \cdot F_2} = \frac{D_2 \cdot L_1}{D_1 \cdot (1 - L_1^2)} \cdot \frac{D_2}{D_1 \cdot \sqrt{1 - L_1^2}} + \\ & + \frac{D_2 \cdot (2D_1 \cdot D_3 - D_2^2)}{D_1^3 \cdot (1 - L_1^2)} \cdot \frac{D_1 \cdot \sqrt{1 - L_1^2}}{D_2}; \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{1}{D_1^2(x) \cdot (1 - L_1^2(x))} \cdot \left(\frac{D_2^2(x) \cdot L_1(x)}{\sqrt{1 - L_1^2(x)}} + \sqrt{1 - L_1^2(x)} \cdot (D_1(x) \cdot 2D_3(x) - D_2^2(x)) \right) .$$

Подставляя $L_1 = \ln D(x)$; $D_2 = \frac{dD(x)}{dx}$; $2D_3 = \frac{d^2 D}{dx^2}$, получаем аналитические производные, совпадающие с выражениями, которые получены для этого примера в начале раздела.

Усложним составную полиномиальную функцию

$$F(x) = \sqrt[5]{\arcsin(\ln(D(x)))}$$

и выполним ее p -дифференцирование.

Этапы 1 и 2, согласно теореме 1.3, остаются без изменения.

Этап 3.

Для внутренней функции $A(x) = \arcsin L(x)$ сохраним формулы этапа 3 предыдущего расчета и подставим в них формулы этапа 2:

$$A_1(x) = \arcsin(\ln(D_1(x))) ; A_2(x) = \frac{D_2(x)}{D_1(x) \cdot \sqrt{1 - (\ln D_1(x))^2}} ;$$

$$A_3(x) = \frac{D_2(x)}{2D_1(x) \cdot \sqrt{1 - (\ln D_1(x))^2}} \cdot \left(\frac{D_2(x)}{D_1(x)} \cdot \left(\frac{\ln D_1(x)}{1 - (\ln D_1(x))^2} - 1 \right) + \frac{D_3(x)}{2D_2(x)} \right)$$

Этап 4.

Для заданной функции $F(x) = \sqrt[5]{A(x)}$ из ее рекуррентного уравнения (табл.П.2) с другими обозначениями

$$F_k(x) = \frac{1}{m(k-1) \cdot A_1(x)} \left((k-1) \cdot F_1(x) \cdot A_k(x) + \sum_{q=1}^{k-2} ((m+1)q - m(k-1)) \cdot A_{q+1}(x) \cdot F_{k-q}(x) \right)$$

определяем для $m = 5$ аналитические нормированные производные:

$$F_1(x) = \sqrt[5]{A_1(x)} ;$$

$$F_2(x) = \frac{F_1(x) \cdot A_2(x)}{5A_1(x)} ; F_3(x) = \frac{1}{5A_1(x)} (F_1(x) \cdot A_3(x) - 2F_2(x) \cdot A_2(x))$$

Аналитические выражения нормированных производных для операций p -дифференцирования получаем в компактной форме, но при желании выражения аналитических производных можно развернуть, подставляя результаты всех этапов в конечные формулы:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{(\arcsin(\ln(D_1(x))))^4}} \cdot \frac{D_2(x)}{D_1(x) \cdot \sqrt{1 - (\ln D_1(x))^2}} ;$$

$$\frac{d^2 F(x)}{dx^2} = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{(\arcsin(\ln(D_1(x))))^4}} \left(\frac{-4}{5 \cdot \arcsin(\ln(D_1(x)))} \cdot \frac{D_2^2(x)}{D_1^2(x) \cdot (1 - (\ln D_1(x))^2)} + \right)$$

$$+ \frac{D_2(x)}{D_1(x) \cdot \sqrt{1 - (\ln D_1(x))^2}} \left(\frac{D_2(x)}{D_1(x)} \cdot \left(\frac{\ln D_1(x)}{1 - (\ln D_1(x))^2} - 1 \right) + \frac{D_3(x)}{2D_2(x)} \right)$$

Определение. Порождающее уравнение полиномиальной функции назовем *маршрутным*, если оно включает другие полиномиальные функции, имеющие свои порождающие уравнения. Соответствующее рекуррентное уравнение (формулу) назовем *маршрутным уравнением (формулой)*, если для их реализации необходимо предварительное обращение к другим рекуррентным уравнениям или формулам.

Маршрутные порождающие уравнения некоторых полиномиальных функций приведены в табл.1.3. Маршрутные рекуррентные уравнения для некоторых функций приведены в табл. П.10, П.11, а их аналитические решения – в табл. П.12, П.13.

Лемма 1.10. Функции $F(D(x)) = \ln(\sin(D(x)))$ и $F(D(x)) = \ln(\cos(D(x)))$ не различимы в маршрутных порождающих уравнениях.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируем сложную функцию $F(D(x)) = \ln(\sin(D(x)))$ в классическом исчислении [1, 2, 3] и преобразуем полученное уравнение согласно лемме 1.1

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{\sin D(x)} \cdot \sqrt{1 - (\sin D(x))^2} \cdot \frac{dD}{dx}.$$

Отсюда получаем маршрутное порождающее уравнение

$$\left(\left(\frac{dF(x)}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dD(x)}{dx} \right)^2 \right) \cdot (\sin D(x))^2 - \left(\frac{dD(x)}{dx} \right)^2 = 0.$$

Дифференцируем сложную функцию $F(D(x)) = \ln(\cos(D(x)))$ в классическом исчислении [1,2,3] и преобразуем полученное уравнение

$$\frac{dF}{dx} = \frac{-1}{\cos D(x)} \cdot \sqrt{1 - (\cos D(x))^2} \cdot \frac{dD}{dx}.$$

Отсюда получаем порождающее уравнение

$$\left(\left(\frac{dF(x)}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dD(x)}{dx} \right)^2 \right) \cdot (\cos D(x))^2 - \left(\frac{dD(x)}{dx} \right)^2 = 0,$$

которое отличается от предыдущего маршрутного порождающего уравнения только функцией $(\cos(D(x)))^2$. Согласно лемме 1.2, порождающие уравнения функций $(\sin(D(x)))^2$ и $(\cos(D(x)))^2$ не различимы, и потому не различимы два найденных маршрутных порождающих уравнения, что требовалось доказать.

Таблица 1.3

Функция	Маршрутное порождающее уравнение
$\ln(\ln D)$	$F' \cdot D \cdot \ln D - D' = 0$
$C \cdot \ln D$	$F' \cdot C \cdot D - F \cdot D \cdot C' - C^2 \cdot D' = 0$
$C^m \cdot \ln D$	$F' \cdot C \cdot D - mF \cdot D \cdot C' - C^{m+1} \cdot D' = 0$
$e^C \cdot \ln D$	$(F' - F \cdot C') \cdot D \cdot \ln D - F \cdot D' = 0$
$D(x)^{C(x)}$	$F' \cdot D - F \cdot (D' \cdot C + C' \cdot D \cdot \ln D) = 0$
e^{D^m}	$F' \cdot D - mF \cdot D^m \cdot D' = 0$
$\operatorname{tg} D$	$F' \cdot \sin(2D) - 2F \cdot D' = 0$
$\operatorname{ctg} D$	$F' \cdot \sin(2D) + 2F \cdot D' = 0$
$\ln(\operatorname{tg} D)$	$F' \cdot \sin(2D) - 2D' = 0$
$\ln(\operatorname{ctg} D)$	$F' \cdot \sin(2D) + 2D' = 0$
$e^{\operatorname{tg} D}$	$F' \cdot \cos^2 D - F \cdot D' = 0$
$e^{\operatorname{ctg} D}$	$F' \cdot \sin^2 D + F \cdot D' = 0$
$\ln(\sin D)$	$((F')^2 + (D')^2) \cdot \sin^2 D - (D')^2 = 0$
$\ln(\cos D)$	$((F')^2 + (D')^2) \cdot \cos^2 D - (D')^2 = 0$
$(\ln D)^m$	$F' \cdot D \cdot \ln D - mF \cdot D' = 0$
$e^C \cdot (\ln D)^m$	$(F' - F \cdot C') \cdot D \cdot \ln D - mF \cdot D' = 0$
$(\sin D)^m$	$((F')^2 + (mF \cdot D')^2) \cdot \sin^2 D - (mF \cdot D')^2 = 0$
$(\cos D)^m$	$((F')^2 + (mF \cdot D')^2) \cdot \cos^2 D - (mF \cdot D')^2 = 0$
$(\arcsin D)^m$	$(F')^2 \cdot (1 - D^2) \cdot (\arcsin D)^2 - (mF \cdot D')^2 = 0$
$(\arccos D)^m$	$(F')^2 \cdot (1 - D^2) \cdot (\arccos D)^2 - (mF \cdot D')^2 = 0$
$(\operatorname{tg} D)^m$	$F' \cdot \sin(2D) - 2mF \cdot D' = 0$
$(\operatorname{ctg} D)^m$	$F' \cdot \sin(2D) + 2mF \cdot D' = 0$
$(\operatorname{arctg} D)^m$	$F' \cdot (D^2 + 1) \cdot \operatorname{arctg} D - mF \cdot D' = 0$
$(\operatorname{arcctg} D)^m$	$F' \cdot (D^2 + 1) \cdot \operatorname{arcctg} D + mF \cdot D' = 0$
$\frac{C}{\sin D}$	$F' \cdot C - F \cdot (C' - F \cdot D' \cdot \cos D) = 0$
$\frac{C}{\cos D}$	$F' \cdot C - F \cdot (C' + F \cdot D' \cdot \sin D) = 0$

Лемма 1.11. Функции $F(D(x)) = (\sin(D(x)))^m$ и $F(D(x)) = (\cos(D(x)))^m$ не различимы в маршрутных порождающих уравнениях.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируем сложную функцию $F(D(x)) = (\sin(D(x)))^m$ в классическом исчислении [1,2,3]

$$\frac{dF}{dx} = m \cdot (\sin(D(x)))^{m-1} \cdot \cos(D(x)) \cdot \frac{dD}{dx}$$

и преобразуем полученное уравнение согласно лемме 1.1

$$\frac{dF}{dx} = m \cdot (\sin(D(x)))^{m-1} \cdot \frac{\cos(D(x)) \cdot \sin(D(x))}{\sin(D(x))} \cdot \frac{dD}{dx} = mF \cdot \sqrt{\frac{1}{(\sin(D(x)))^2} - 1} \cdot \frac{dD}{dx}$$

Отсюда получаем маршрутное порождающее уравнение

$$\left(\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(mF \cdot \frac{dD}{dx}\right)^2\right) \cdot (\sin(D(x)))^2 - \left(mF \cdot \frac{dD}{dx}\right)^2 = 0$$

Дифференцируем сложную функцию $F(D(x)) = (\cos(D(x)))^m$ в классическом исчислении [1, 2, 3]

$$\frac{dF}{dx} = -m \cdot (\cos(D(x)))^{m-1} \cdot \sin(D(x)) \cdot \frac{dD}{dx}$$

и преобразуем полученное уравнение согласно лемме 1.1

$$\frac{dF}{dx} = -m \cdot (\cos(D(x)))^{m-1} \cdot \frac{\sin(D(x)) \cdot \cos(D(x))}{\cos(D(x))} \cdot \frac{dD}{dx} = -mF \cdot \sqrt{\frac{1}{(\cos(D(x)))^2} - 1} \cdot \frac{dD}{dx}$$

После возведения в степень 2 знак пропадает, и получаем маршрутное порождающее уравнение

$$\left(\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(mF \cdot \frac{dD}{dx}\right)^2\right) \cdot (\cos(D(x)))^2 - \left(mF \cdot \frac{dD}{dx}\right)^2 = 0 ,$$

которое отличается от предыдущего уравнения только функцией $(\cos(D(x)))^2$.

Согласно лемме 1.2, порождающие уравнения функций $(\sin(D(x)))^2$ и $(\cos(D(x)))^2$ не различимы, и потому не различимы два найденных маршрутных порождающих уравнения, что требовалось доказать.

Лемма 1.12. Функции $F(D(x)) = (\arcsin(D(x)))^m$ и $F(D(x)) = (\arccos(D(x)))^m$ не различимы в маршрутном порождающем уравнении.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируем сложную функцию $F(D(x)) = (\arcsin(D(x)))^m$ в классическом исчислении

$$\frac{dF}{dx} = m \cdot (\arcsin(D(x)))^{m-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(D(x))^2}} \cdot \frac{dD}{dx}$$

и преобразуем полученное уравнение по лемме 1.1

$$\frac{dF}{dx} = \frac{m \cdot (\arcsin(D(x)))^m}{\arcsin(D(x))} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(D(x))^2}} \cdot \frac{dD}{dx} = \frac{mF}{\arcsin(D(x))} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(D(x))^2}} \cdot \frac{dD}{dx}$$

Отсюда получаем маршрутное порождающее уравнение

$$\left(\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 \cdot (1-(D(x))^2) \cdot (\arcsin(D(x)))^2 - \left(mF \cdot \frac{dD}{dx}\right)^2\right) = 0 .$$

Дифференцируем сложную функцию $F(D(x)) = (\arccos(D(x)))^m$ в классическом исчислении [1, 2, 3]

$$\frac{dF}{dx} = m \cdot (\arccos(D(x)))^{m-1} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-(D(x))^2}} \cdot \frac{dD}{dx}$$

и преобразуем полученное уравнение согласно лемме 1.1

$$\frac{dF}{dx} = \frac{-m \cdot (\arccos(D(x)))^m}{\arccos(D(x)) \cdot \sqrt{1-(D(x))^2}} \cdot \frac{dD}{dx} = \frac{-m \cdot F}{\arccos(D(x)) \cdot \sqrt{1-(D(x))^2}} \cdot \frac{dD}{dx}.$$

После возведения в степень 2 знак пропадает, и получаем маршрутное порождающее уравнение

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 \cdot (1-(D(x))^2) \cdot (\arccos(D(x)))^2 - \left(mF \cdot \frac{dD}{dx}\right)^2 = 0,$$

которое отличается от предыдущего уравнения только функцией $(\arccos(D(x)))^2$. Согласно лемме 1.3, порождающие уравнения функций $(\arcsin(D(x)))^2$ и $(\arccos(D(x)))^2$ не различимы, и потому не различимы два найденных маршрутных порождающих уравнения, что требовалось доказать.

Лемма 1.13. Функции $F(D(x)) = (\arctg(D(x)))^m$ и $F(D(x)) = (\operatorname{arcctg}(D(x)))^m$ не различимы в маршрутном порождающем уравнении.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируем сложную функцию $F(D(x)) = (\arctg(D(x)))^m$ в классическом исчислении [1, 2, 3]

$$\frac{dF}{dx} = m \cdot (\arctg(D(x)))^{m-1} \cdot \frac{\arctg(D(x))}{\arctg(D(x)) \cdot (1+(D(x))^2)} \cdot \frac{dD}{dx}.$$

Преобразуем полученное выражение согласно лемме 1.1 и получаем маршрутное порождающее уравнение

$$\frac{dF}{dx} \cdot (1+(D(x))^2) \cdot \arctg(D(x)) - m \cdot F(x) \cdot \frac{dD}{dx} = 0.$$

Дифференцируем сложную функцию $F(D(x)) = (\operatorname{arcctg}(D(x)))^m$ в классическом исчислении [1,2,3]

$$\frac{dF}{dx} = m \cdot (\operatorname{arcctg}(D(x)))^{m-1} \cdot \frac{\operatorname{arcctg}(D(x))}{(-\operatorname{arcctg}(D(x))) \cdot (1+(D(x))^2)} \cdot \frac{dD}{dx}.$$

Преобразуем полученное выражение согласно лемме 1.1 и получаем маршрутное порождающее уравнение

$$\frac{dF}{dx} \cdot (1+(D(x))^2) \cdot (-\operatorname{arcctg}(D(x))) - mF(x) \cdot \frac{dD}{dx} = 0.$$

Согласно следствию леммы 1.4, функции $F(D(x)) = \arctg(D(x))$ и $F(D(x)) = -\operatorname{arcctg}(D(x))$ неразличимы в своем порождающем уравнении (табл.1.3), и потому не различимы найденные маршрутные порождающие уравнения, что требовалось доказать.

Лемма 1.14. Функции $F(D(x)) = \operatorname{tg}(D(x))$ и $F(D(x)) = \operatorname{ctg}(D(x))$ имеют маршрутные порождающие уравнения, отличающиеся знаком.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируем сложную функцию $F(D(x)) = \operatorname{tg}(D(x))$ в классическом исчислении [1, 2, 3]

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{(\cos(D(x)))^2} \cdot \frac{dD}{dx} = \frac{\sin(D(x))}{(\cos(D(x)))^2 \cdot \sin(D(x))} \cdot \frac{dD}{dx} = \frac{2F(x)}{\sin(2D(x))} \cdot \frac{dD}{dx}.$$

Преобразуем полученное выражение согласно лемме 1.1 и получаем маршрутное порождающее уравнение

$$\frac{dF}{dx} \cdot \sin(2D(x)) - 2F(x) \cdot \frac{dD}{dx} = 0.$$

Дифференцируем сложную функцию $F(D(x)) = \operatorname{ctg}(D(x))$ в классическом исчислении [1,2,3]

$$\frac{dF}{dx} = \frac{-1}{(\sin(D(x)))^2} \cdot \frac{dD}{dx} = \frac{-\cos(D(x))}{(\sin(D(x)))^2 \cdot \cos(D(x))} \cdot \frac{dD}{dx} = \frac{-2F(x)}{\sin(2D(x))} \cdot \frac{dD}{dx}.$$

Преобразуем полученное выражение согласно лемме 1.1 и получаем маршрутное порождающее уравнение

$$\frac{dF}{dx} \cdot \sin(2D(x)) + 2F(x) \cdot \frac{dD}{dx} = 0,$$

что требовалось доказать.

Пример 1.4.

Рассмотрим составную полиномиальную функцию

$$F(D(x)) = (\operatorname{arctg}(D(x)))^m$$

и выполним ее p -дифференцирование.

Этап 1.

Определяем нормированные производные полинома:

$$D_1(x) = D(x) = \sum_{k=0}^n d_{k+1} x^k; \quad D_2(x) = \sum_{k=1}^n k d_{k+1} x^{k-1};$$

$$D_3(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k(k+1) d_{k+2} x^{k-1}; \quad D_4(x) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) d_{k+3} x^{k-1}$$

Этап 2.

Из порождающего уравнения заданной составной функции (табл. П.12) следует, что оно является маршрутным и требует предварительного расчета производных другой функции $T(D(x)) = \operatorname{arctg}(D(x))$. Рекуррентная формула этой функции (табл. П.12) имеет вид

$$T_k(x) = \frac{1}{(k-1) \cdot (D_1^2(x) + 1)} \left((k-1) \cdot D_k(x) - \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \cdot T_{i+2}(x) \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-2-i} D_{q+1}(x) \cdot D_{k-1-i-q}(x) \right) \right).$$

Определяем ее нормированные производные:

$$T_1(x) = \arctg(D_1(x)) ; \quad T_2(x) = \frac{D_2(x)}{1 + D_1^2(x)} ;$$

$$T_3(x) = \frac{1}{1 + D_1^2(x)} \cdot (D_3(x) - T_2(x) \cdot D_1(x) \cdot D_2(x)) ;$$

$$T_4(x) = (3D_4(x) - 2T_2(x) \cdot D_1(x) \cdot D_3(x) - T_2(x) \cdot D_2^2(x) - \\ - 4 \cdot T_3(x) \cdot D_1(x) \cdot D_2(x)) / (3(1 + D_1^2(x)))$$

Этап 3.

Для заданной составной функции маршрутная рекуррентная формула имеет вид (табл. П.12)

$$F_k = \frac{1}{(k-1) \cdot (D_1^2 + 1) \cdot T_1} \left(-(D_1^2 + 1) \cdot F_2 \cdot T_{k-1} - 2D_1 \cdot F_2 \cdot T_1 \cdot D_{k-1} + \right. \\ \left. + m \cdot (D_2 \cdot F_{k-1} + (k-1)F_1 \cdot D_k) - \sum_{j=1}^{k-3} (T_1 \cdot F_2 \cdot D_{j+1} \cdot D_{k-1-j} - m \cdot (j+1)D_{j+2} \cdot F_{k-1-j} + \right. \\ \left. + (j+1) \cdot F_{j+2} \cdot (T_{k-1-j} + T_1 \cdot \sum_{q=0}^{k-2-j} D_{q+1} \cdot D_{k-1-j-q}) + \right. \\ \left. + T_{k-1-j} \cdot (\sum_{i=0}^j (i+1) \cdot F_{i+2} \cdot (\sum_{q=0}^{j-i} D_{q+1} \cdot D_{j+1-i-q})) \right)$$

и в ней используются найденные нормированные производные $T_1(x)$, $T_2(x)$,...

Определяем нормированные производные заданной функции:

$$F_1(x) = (\arctg(D_1(x)))^m ; \quad F_2(x) = \frac{mF_1(x) \cdot D_2(x)}{(1 + D_1^2(x)) \cdot T_1(x)} ;$$

$$F_3(x) = \frac{1}{2(1 + D_1^2(x)) \cdot T_1(x)} \cdot \left(-(1 + D_1^2(x)) \cdot T_2(x) \cdot F_2(x) - \right. \\ \left. - 2T_1(x) \cdot F_2(x) \cdot D_1(x) \cdot D_2(x) + m \cdot (F_2(x) \cdot D_2(x) + 2F_1(x) \cdot D_3(x)) \right);$$

$$F_4(x) = \frac{1}{3(1 + D_1^2(x)) \cdot T_1(x)} \cdot \left(-(1 + D_1^2(x)) \cdot (2T_2(x) \cdot F_3(x) + T_3(x) \cdot F_2(x)) - \right. \\ \left. - 2T_2(x) \cdot F_2(x) \cdot D_1(x) \cdot D_2(x) - T_1(x) \cdot (2F_2(x) \cdot D_1(x) \cdot D_3(x) + 4F_3(x) \cdot D_1(x) \cdot D_2(x) + \right. \\ \left. + F_2(x) \cdot D_2^2(x)) + m \cdot (F_3(x) \cdot D_2(x) + 3F_1(x) \cdot D_4(x) + 2F_2(x) \cdot D_3(x)) \right)$$

Теорема 1.4. Задана полиномиальная дифференцируемая функция $F(D(x))$, для которой порождающее уравнение оказалось маршрутным

$$\Upsilon(F(x), \frac{dF(x)}{dx}, D(x), \frac{dD(x)}{dx}, P(D(x)), S(D(x)), \dots) = 0,$$

где функции $P(D(x))$, $S(D(x))$, ... имеют свои рекуррентные формулы. Тогда непосредственное дифференцирование маршрутного порождающего уравнения нарушает алгоритмичность процесса дифференцирования.

Доказательство. Классическое дифференцирование заданной функции $F = f(D(x))$ [1, 2, 3] дает результат:

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx} &= \frac{df(D)}{dD} \cdot \frac{dD(x)}{dx} = g(D(x)) \cdot \frac{dD(x)}{dx}; \\ \frac{d^2 F}{dx^2} &= \frac{dg(D)}{dD} \cdot \frac{dD(x)}{dx} + g(D(x)) \cdot \frac{d^2 D(x)}{dx^2} = h(D(x)) \cdot \frac{dD(x)}{dx} + g(D(x)) \cdot \frac{d^2 D(x)}{dx^2}; \\ &\vdots\end{aligned}$$

Как было показано в начале раздела, непредсказуемость появления новых функций $g(D(x))$, $h(D(x))$, ... в классическом дифференцировании нарушает алгоритмичность процесса. Как альтернативный способ, было предложено дифференцировать немаршрутные порождающие уравнения функций.

Выполним классическое дифференцирование маршрутного порождающего уравнения и найдем $\frac{dY}{dx} = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dx} = \Xi\left(F(x), \frac{dF(x)}{dx}, \frac{d^2 F(x)}{dx^2}, D(x), \frac{dD(x)}{dx}, \frac{d^2 D(x)}{dx^2}, \right. \\ \left. \frac{dP(D(x))}{dx}, \frac{dS(D(x))}{dx}, \dots\right) = 0\end{aligned}$$

Согласно лемме 1.1, функции порождающего уравнения $F(x)$, $D(x)$ для классического дифференцирования являются простыми, но функции $P = p(D(x))$, $S = s(D(x))$, ... являются сложными. Тогда их дифференцирование

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dx} &= \frac{dp(D)}{dD} \cdot \frac{dD(x)}{dx} = q(D(x)) \cdot \frac{dD(x)}{dx}; \quad \frac{dS}{dx} = \frac{ds(D)}{dD} \cdot \frac{dD(x)}{dx} = r(D(x)) \cdot \frac{dD(x)}{dx}; \\ &\vdots\end{aligned}$$

вновь приводит к появлению непредсказуемых новых функций $q(D(x))$, $r(D(x))$, ..., нарушающих алгоритмичность, что требовалось доказать.

Единственным алгоритмичным дифференциальным исчислением является рекуррентное исчисление, и единственный алгоритмичный способ дифференцирования полиномиальных функций есть p -дифференцирование.

Как следует из определения маршрутного порождающего уравнения, оно включает функции, производные которых можно определить по их рекуррентным формулам (уравнениям). Рекуррентную маршрутную формулу заданной функции можно реализовать только после предварительного обращения к другим необходимым рекуррентным формулам (уравнениям). Список требуемых вспомогательных рекуррентных формул и порядок их вызова (маршрут) определяет реализуемая маршрутная рекуррентная формула.

Пример 1.5.

Зададим полиномиальную функцию $F = \text{tg}(D(x))$, порождающее уравнение

которой оказывается маршрутным (табл.1.3) и включает другую функцию $S = \sin(2D(x))$, имеющую свое порождающее уравнение (табл.1.1). Выполним расчет аналитических производных тремя возможными способами: классическое дифференцирование заданной сложной функции, дифференцирование порождающего уравнения заданной функции (с учетом его свойств) и p -дифференцирование заданной функции.

Способ 1.

Выполняем классическое дифференцирование сложной функции:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{\cos^2 D(x)} \cdot \frac{dD(x)}{dx};$$

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\cos^2 D(x)} \cdot \frac{dD(x)}{dx} \right) = \frac{\frac{d^2 D(x)}{dx^2} \cos^2 D(x) - \left(\frac{dD(x)}{dx} \right)^2 \cdot 2 \cos D(x) (-\sin D(x))}{\cos^4 D(x)}$$

После преобразования окончательно получаем

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2 D(x)} \cdot \frac{d^2 D(x)}{dx^2} + \frac{2 \sin D(x)}{\cos^3 D(x)} \cdot \left(\frac{dD(x)}{dx} \right)^2.$$

Способ 2.

Выполняем дифференцирование маршрутного порождающего уравнения заданной функции

$$\frac{dF}{dx} \cdot \sin(2D(x)) - 2F(x) \cdot \frac{dD(x)}{dx} = 0,$$

учитывая, что согласно лемме 1.1 функции $F(x)$, $D(x)$ являются простыми, а функция $S = \sin(2D(x))$ остается сложной (по определениям классического исчисления), что приводит к усложнению расчета

$$F = \frac{\sin(D(x))}{\cos(D(x))}; \quad \frac{dF}{dx} = \frac{1}{\cos^2 D(x)} \cdot \frac{dD(x)}{dx}.$$

Для расчета второй производной дифференцируем порождающее уравнение:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dx} \cdot \sin(2D(x)) - 2F(x) \cdot \frac{dD(x)}{dx} \right) = 0;$$

$$\frac{d^2 F}{dx^2} \cdot \sin(2D(x)) + \frac{dF}{dx} \cdot \cos(2D(x)) \cdot 2 \frac{dD(x)}{dx} - 2 \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dD(x)}{dx} - 2F(x) \cdot \frac{d^2 D(x)}{dx^2} = 0$$

откуда получаем

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{2F(x)}{\sin(2D(x))} \cdot \frac{d^2 D(x)}{dx^2} + \frac{2(1 - \cos(2D(x)))}{\sin(2D(x))} \cdot \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dD(x)}{dx}.$$

Подставляя найденные выражения первой производной функции, определяем

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{2 \frac{\sin(D)}{\cos(D)}}{2 \sin(D) \cdot \cos(D)} \cdot \frac{d^2 D}{dx^2} + \frac{2(1 - (\cos^2(D) - \sin^2(D)))}{2 \sin(D) \cdot \cos(D)} \cdot \frac{1}{\cos^2(D)} \cdot \left(\frac{dD}{dx} \right)^2$$

После преобразований получаем аналитическое выражение, совпадающее с выражением, которое найдено способом 1.

Способ 3.

Выполняем p -дифференцирование заданной функции. Ее маршрутное порождающее уравнение (табл.1.3) содержит функцию $S = \sin(2D(x))$, которая имеет свою рекуррентную формулу (табл. П.11). Подставляем в нее выражение полинома и находим ее нормированные производные:

$$S_1 = \sin(2D(x)) = \sin(2D_1(x));$$

$$\boxed{k=2} \quad S_2 = 2D_2(x) \cdot \sqrt{1 - S_1^2} = 2D_2(x) \cdot \cos(2D_1(x)).$$

Изменим обозначения в маршрутном порождающем уравнении заданной функции

$$\frac{dF}{dx} \cdot S(D(x)) - 2F(x) \cdot \frac{dD(x)}{dx} = 0$$

и запишем маршрутную рекуррентную формулу заданной функции (табл. П.13)

$$F_k(x) = \frac{1}{(k-1) \cdot S_1} \left(2(k-1)F_1 \cdot D_k + \sum_{q=0}^{k-3} (q+1) \cdot (2D_{q+2} \cdot F_{k-1-q} - F_{q+2} \cdot S_{k-1-q}) \right).$$

По этой формуле находим нормированные производные функции:

$$F_1 = \frac{\sin(D_1(x))}{\cos(D_1(x))};$$

$$\boxed{k=2} \quad F_2 = \frac{1}{S_1(x)} \cdot 2F_1(x) \cdot D_2(x);$$

$$\begin{aligned} \boxed{k=3} \quad F_3 &= \frac{1}{2S_1(x)} \cdot (4F_1(x) \cdot D_3(x) + 2D_2(x) \cdot F_2(x) - F_2(x) \cdot S_2(x)) = \\ &= \frac{2F_1(x) \cdot D_3(x)}{S_1(x)} + \frac{2D_2(x) - S_2(x)}{2S_1(x)} \cdot F_2(x). \end{aligned}$$

Аналитические результаты получаем в компактной форме, но при необходимости можно их развернуть, подставляя ранее найденные выражения:

$$F_2 = \frac{1}{S_1(x)} \cdot 2F_1(x) \cdot D_2(x) = \frac{2D_2(x)}{2\sin(D_1(x)) \cdot \cos(D_1(x))} \cdot \frac{\sin(D_1(x))}{\cos(D_1(x))} = \frac{D_2(x)}{\cos^2(D_1(x))};$$

$$F_3 = \frac{2F_1 \cdot D_3}{S_1} + \frac{2D_2 - S_2}{2S_1} \cdot F_2 = \frac{2D_3}{2\sin D_1 \cdot \cos D_1} \cdot \frac{\sin D_1}{\cos D_1} + \frac{D_2(1 - \cos(2D_1))}{2\sin D_1 \cdot \cos D_1} \cdot \frac{D_2}{\cos^2 D_1}$$

Повторяя алгебраические преобразования выражений в способе 2, находим

$$2F_3(x) = \frac{2D_3(x)}{\cos^2(D_1(x))} + \frac{2D_2^2(x) \cdot \sin(D_1(x))}{\cos^3(D_1(x))}.$$

Заменяя нормированные аналитические производные на ненормированные:

$$D_1(x) = D(x); \quad D_2(x) = \frac{dD(x)}{dx}; \quad 2D_3(x) = \frac{d^2 D(x)}{dx^2}; \quad F_2(x) = \frac{dF(x)}{dx}; \quad 2F_3(x) = \frac{d^2 F(x)}{dx^2}$$

окончательно получаем аналитическое выражение 2-й производной, аналогичное предыдущим.

Пример показывает, что из трех способов наихудшим по алгоритмичности является классическое дифференцирование, которое для любых полиномиальных функций создает неалгоритмический процесс. Процесс, который не имеет строгого алгоритма, вызывает большие трудности для практической реализации и мало пригоден как вычислительный инструмент. Второй способ дифференцирования порождающих уравнений более эффективен, но имеет ограниченную область применения и пригоден для функций с немаршрутными порождающими уравнениями. Рекуррентное исчисление является единственным алгоритмичным инструментом дифференцирования широкого класса составных полиномиальных функций.

Теорема 1.5. Задана функция аналитического деления

$$F(x) = \frac{U(x)}{V(x)}, \quad (1.22)$$

в которой $U(x)$, $V(x)$ - дифференцируемые аналитические функции. Тогда *нормированные* аналитические производные функции $F(x)$ определяются по рекуррентной формуле

$$F_k(x) = \frac{1}{V_1(x)} \cdot \left(U_k(x) - \sum_{i=0}^{k-2} F_{i+1}(x) \cdot V_{k-i}(x) \right), \quad (1.23)$$

которая совпадает с формула Коши для деления численных степенных рядов

$$F(x) = \frac{U(x)}{V(x)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} U_k \cdot x^{k-1}}{\sum_{k=1}^{\infty} V_k \cdot x^{k-1}}.$$

Доказательство. Преобразуем заданную функцию деления (1.22) в функцию умножения аналитических сомножителей $U(x) = F(x) \cdot V(x)$. Тогда для расчета ее аналитических нормированных производных можно применить формулу Лейбница-Коши (1.7)

$$U_k = \sum_{i=0}^{k-1} F_{i+1} \cdot V_{k-i}.$$

Выделим из суммы слагаемое для $i = k - 1$

$$U_k = F_k \cdot V_1 + \sum_{i=0}^{k-2} F_{i+1} \cdot V_{k-i},$$

откуда получаем формулу (1.23).

Степенные численные ряды

$$U(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cdot x^{k-1}; \quad V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cdot x^{k-1}$$

являются численными аппроксимациями функций $U(x)$, $V(x)$ в точке $x = 0$ и имеют свойства:

$$U_1 = U(0); \quad U_2 = \left. \frac{dU}{dx} \right|_0; \quad U_3 = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_0; \dots V_1 = V(0); \quad V_2 = \left. \frac{dV}{dx} \right|_0; \quad V_3 = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dx^2} \right|_0; \dots$$

Следовательно, коэффициенты степенных рядов являются численными нормированными производными функций $U(x)$, $V(x)$. Тогда численное деление степенных рядов сводится к операциям над численными производными числителя и знаменателя заданной функции (1.22), и формула Коши является численным аналогом формулы (1.23) для аналитических производных, что требовалось доказать.

Пример 1.6.

Рассмотрим аналитическую функцию

$$F(x) = \frac{\arcsin(\ln(D(x)))}{(\ln(D(x)))^2},$$

которая включает внутренние полиномиальные функции, и полином равен $D(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Выполним p -дифференцирование заданной функции.

Этап 1.

Определяем нормированные производные полинома:

$$D_1(x) = D(x) = x^3 + x^2 + x + 1; \quad D_2(x) = \frac{dD(x)}{dx} = 3x^2 + 2x + 1;$$

$$D_3(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 D(x)}{dx^2} = 3x + 1.$$

Этап 2.

Для внутренней полиномиальной функции $L(x) = \ln(D(x))$ из ее рекуррентной формулы (табл. П.7) определяем аналитические выражения нормированных производных:

$$L_1(x) = \ln(D_1(x)) = \ln(x^3 + x^2 + x + 1); \quad L_2(x) = \frac{D_2(x)}{D_1(x)} = \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1};$$

$$L_3(x) = \frac{2D_3(x) - L_2(x) \cdot D_2(x)}{2D_1(x)} = \frac{2(3x + 1) \cdot (x^3 + x^2 + x + 1) - (3x^2 + 2x + 1)^2}{2(x^3 + x^2 + x + 1)^2}$$

Этап 3.

Для полиномиальной функции $A(x) = \arcsin(L(x))$ из ее рекуррентной формулы (табл. П.8) определяем аналитические нормированные производные с другими обозначениями:

$$A_1(x) = \arcsin(\ln(x^3 + x^2 + x + 1));$$

$$A_2(x) = \frac{dA(x)}{dx} = \frac{L_2(x)}{\sqrt{1 - (L_1(x))^2}} = \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x^3 + x^2 + x + 1) \cdot \sqrt{1 - (\ln(x^3 + x^2 + x + 1))^2}};$$

$$\begin{aligned} A_3(x) &= \frac{1}{2} \frac{d^2 A(x)}{dx^2} = \frac{2L_2(x) \cdot (L_1(x) \cdot A_2^2(x) + 2L_3(x))}{4 \cdot (1 - L_1^2(x)) \cdot A_2(x)} = \\ &= \frac{2(3x^2 + 2x + 1) \cdot (\ln(x^3 + x^2 + x + 1) \cdot A_2^2(x) + 2L_3(x))}{4(x^3 + x^2 + x + 1) \cdot (1 - (\ln(x^3 + x^2 + x + 1))^2) \cdot A_2(x)} \end{aligned}$$

Этап 4.

Для полиномиальной функции $H(x) = (\ln(L(x)))^2$ по рекуррентной маршрутной формуле функции $H(x) = (\ln(L(x)))^m$ для $m = 2$ (табл. П.12)

$$H_k(x) = \frac{1}{(k-1) \cdot D_1(x) \cdot L_1(x)} \left(2(k-1) \cdot H_1(x) \cdot D_k(x) + \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \times \right. \\ \left. \times (2D_{i+2}(x) \cdot H_{k-1-i}(x) - H_{i+2}(x) \cdot \sum_{q=0}^{k-2-i} L_{q+1}(x) \cdot D_{k-1-i-q}(x)) \right)$$

где $L_i(x)$ – найденные производные (этап 2), определяем аналитические нормированные производные:

$$H_1(x) = (\ln(x^3 + x^2 + x + 1))^2;$$

$$H_2(x) = \frac{2D_2(x) \cdot H_1(x)}{D_1(x) \cdot L_1(x)} = \frac{2(3x^2 + 2x + 1) \cdot \ln(x^3 + x^2 + x + 1)}{x^3 + x^2 + x + 1};$$

$$H_3(x) = \frac{1}{2D_1(x) \cdot L_1(x)} \cdot (4D_3(x) \cdot H_1(x) + 2D_2(x) \cdot H_2(x) - H_2(x) \cdot (D_2(x) \cdot L_1(x) + \\ + D_1(x) \cdot L_2(x))) = \\ = \frac{(3x^2 + 2x + 1)^2 + \ln(x^3 + x^2 + x + 1) \cdot ((3x + 1) \cdot (x^3 + x^2 + x + 1) - (3x^2 + 2x + 1)^2)}{(x^3 + x^2 + x + 1)^2}$$

Этап 5.

Для заданной функции $F(x) = \frac{A(x)}{H(x)}$ по рекуррентной формуле (1.23) определяем нормированные производные:

$$F_1(x) = \frac{\arcsin(\ln(x^3 + x^2 + x + 1))}{(\ln(x^3 + x^2 + x + 1))^2};$$

$$F_2(x) = \frac{A_2(x) - F_1(x) \cdot H_2(x)}{H_1(x)} = \frac{\frac{3x^2 + 2x + 1}{(x^3 + x^2 + x + 1) \cdot \sqrt{1 - (\ln(x^3 + x^2 + x + 1))^2}}}{(\ln(x^3 + x^2 + x + 1))^2} - \\ - \frac{\frac{\arcsin(\ln(x^3 + x^2 + x + 1))}{\ln(x^3 + x^2 + x + 1)} \cdot \frac{2(3x^2 + 2x + 1)}{x^3 + x^2 + x + 1}}{(\ln(x^3 + x^2 + x + 1))^2};$$

$$F_3(x) = \frac{A_3(x) - F_1(x) \cdot H_3(x) - F_2(x) \cdot H_2(x)}{H_1(x)}$$

Рекуррентное исчисление представляет аналитические производные в компактной форме и в последовательности, удобной для компьютерных расчетов в символьных средах. Каждая производная представлена в виде аналитической функции, в которую включены другие ранее определенные функции. При необходимости их можно подставить в аналитическую формулу

производной и получить развернутое аналитическое выражение. В случае численных расчетов аналитические выражения не раскрываются, а в компактные формулы сразу подставляется численное значение переменной.

Сопоставление классического и рекуррентного дифференцирования

Формальное сходство:

1) Дифференцируемая функция задается в виде аналитического выражения или аналитической аппроксимации численных значений.

2) Частные приемы дифференцирования собраны в виде формул (классических или рекуррентных).

3) Дифференцирование сложной по структуре функции выполняется по предварительному плану (маршруту), определяющему последовательность применения различных формул дифференцирования (классических или рекуррентных).

4) Трудоемкость процесса дифференцирования зависит от вида заданной функции, конкретных формул расчета и количества требуемых производных.

5) Промежуточные результаты получаются в виде аналитических выражений.

Принципиальные отличия:

1) Многократное применение формул классического исчисления создает неупорядоченную, неалгоритмическую процедуру, тогда как в рекуррентном исчислении применяются рекуррентные формулы, построенные по четкому алгоритму.

2) В классическом исчислении вид следующей для дифференцирования аналитической производной определяется только после дифференцирования предыдущей производной, тогда как в рекуррентном исчислении все требуемые аналитические производные функции определяются по одной заранее известной рекуррентной формуле.

3) Любая функция в составе сложной функции в классическом исчислении увеличивает сложность процесса дифференцирования, тогда как в рекуррентном исчислении дифференцирование следующей функции сменяет ее рекуррентную формулу расчета, которая может оказаться проще предыдущей.

4) Многократное дифференцирование функции вида $(F(D(x)))^m$ в классическом исчислении с каждым шагом непредсказуемо увеличивает сложность дифференцируемой функции, тогда как в рекуррентном исчислении многократное p -дифференцирование таких функций выполняется по одной маршрутной рекуррентной формуле, и потому увеличение количество аналитических слагаемых и сложности расчета предсказуемо.

5) Различные формулы дифференцирования в классическом исчислении применяются последовательно и не могут быть объединены, тогда

как в рекуррентном исчислении одна рекуррентная формула может выполнять несколько различных операций p -дифференцирования.

6) Классическое исчисление имеет понятие общего маршрута, как последовательности применения различных формул дифференцирования, тогда как в рекуррентном исчислении, кроме понятия общего маршрута, как последовательности применения различных рекуррентных формул, есть понятие маршрутной рекуррентной формулы, как частного маршрута внутри общего.

7) Операции умножения и деления функций в классическом исчислении подобно другим функциям усложняют процесс дифференцирования, тогда как в рекуррентном исчислении эти операции упрощают процесс и как бы «разрезают» общую функцию на отдельные части, которые можно рекуррентно дифференцировать независимо и в произвольном порядке.

8) Порядок применения различных формул (маршрут) в классическом исчислении однонаправленный – от внешней функции к самой внутренней функции, тогда как в рекуррентном исчислении маршрут может быть двунаправленным, но более логичным, как правило, является направление от самой внутренней функции к внешней, т.е. противоположное классическому направлению.

9) Классическое исчисление допускает только аналитическое дифференцирование и последующую подстановку численных значений в аналитические выражения, тогда как рекуррентное исчисление допускает аналитическое дифференцирование и численное дифференцирование, минуя аналитические выражения.

10) В аналитическом рекуррентном исчислении принятая последовательность обращения к рекуррентным формулам (общий маршрут) указывает только на порядок согласования результатов отдельных рекуррентных формул и допускает расчет по рекуррентным формулам с отложенным результатом.

11) Предсказуемость результатов p -дифференцирования позволяет эффективно планировать процесс, применяя разбиение дифференцируемой функции на части и выполняя дифференцирование отдельных частичных функций в произвольном порядке.

12) Рекуррентное исчисление имеет понятие рекуррентных формул и рекуррентных уравнений, которые одинаково пригодны для рекуррентного дифференцирования.

Раздел 1.2. Численное рекуррентное дифференцирование (численное p -дифференцирование)

Для практических приложений важна задача численного расчета производных полиномиальных функций. В разделе 1.1 приведены примеры аналитического рекуррентного исчисления, которые показали новые возможности аналитического дифференцирования. Строгий алгоритм расчета и компактная аналитическая форма производных позволяют расширить границы аналитического дифференцирования и находить аналитические выражения производных более высокого порядка. Сложность этих выражений растет не так быстро, как в классическом дифференциальном исчислении, но все же сложность растет с увеличением порядка производных. Теперь, когда в расчете отброшены все ненужные допущения, принятые в классическом исчислении, в рекуррентном дифференцировании остался естественный процесс, отражающий сложность решаемой задачи. Примеры раздела 1.1 показали, что предел аналитического рекуррентного дифференцирования полиномиальных функций ограничен производными третьего–четвертого порядка. Для вычислительной математики количество найденных численных производных ограничивает сложность решаемых численных задач.

В классическом дифференциальном исчислении численный расчет производных так же сложен, как расчет аналитических производных. Если найдены аналитические выражения производных, то в них можно просто подставить численные значения переменных и найти численные производные. Проблема классического дифференцирования состоит в неупорядоченной процедуре расчета как аналитических, так и численных производных. Поиск нового вычислительного инструмента привел к созданию альтернативных методов вычисления производных, в частности, интерполяционных методов (в их ряду выделим формулу Ньютона [15,16] как одного из создателей классического дифференциального исчисления).

Определение. Назовем *численным рекуррентным исчислением* численный расчет производных по рекуррентным уравнениям (формулам) полиномиальных функций.

Рекуррентные формулы задают строгие алгоритмы необходимых численных операций, которые остаются неизменными для аналитических и численных производных. В табл. П.5–П.9 приведены рекуррентные формулы, которые будут использованы в примерах раздела для численных расчетов.

Определение. Назовем *начальными условиями* численной рекуррентной формулы предварительные расчеты, необходимые для реализации формулы.

Теорема 1.7. Задана полиномиальная функция $F(D(x))$ с известным полиномом

$$D(x) = d_1 + d_2x + d_3x^2 + d_4x^3 + \dots + d_nx^{n-1},$$

в котором коэффициенты $d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_n$ вычислены для смещения переменной $x_0 = 0$. Тогда для численной реализации рекуррентной формулы, построенной на основе порождающего уравнения, которое содержит первую производную функции $\frac{dF}{dx}$ в степени 1 (формула типа I), достаточно начального значения функции $f_1 = F(d_1)$. В случае реализации рекуррентной формулы, построенной на основе порождающего уравнения, которое содержит первую производную $\frac{dF}{dx}$ в степени 2 (формула типа II), достаточно вычислить начальное значение функции $f_1 = F(d_1)$ и начальное значение ее первой производной $f_2 = \frac{dF(d_1)}{dD} \cdot d_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Порождающее уравнение, которое содержит первую производную функции в степени 1, имеет вид

$$\frac{dF}{dx} \cdot H(x) + F(x) \cdot S(x) + \dots = 0.$$

Применяя формулу для расчета нормированных производных произведения сомножителей (табл.1.2), получаем численное рекуррентное уравнение типа I

$$\sum_{r=0}^{k-1} (r+1) \cdot f_{r+2} \cdot h_{k-r} + \sum_{r=0}^{k-1} f_{r+1} \cdot s_{k-r} + \dots = 0.$$

Понижая значение индекса производной $k \rightarrow k-1$ и выделяя слагаемые из суммы, преобразуем рекуррентное уравнение

$$(k-1)f_k \cdot h_1 + \sum_{r=0}^{k-3} (r+1) \cdot f_{r+2} \cdot h_{k-1-r} + \sum_{r=0}^{k-2} f_{r+1} \cdot s_{k-1-r} + \dots = 0$$

Тогда рекуррентная формула заданной функции для расчета численных производных принимает вид

$$f_k = \Xi(h_1, h_2, h_3, h_4, \dots, h_{k-1}, s_1, s_2, s_3, s_4, \dots, s_{k-1}, f_1, f_2, f_3, f_4, \dots, f_{k-1})$$

Применим ее для $k = 2, 3, \dots$:

$$\boxed{k=2} \quad f_2 = \Xi(h_1, s_1, f_1);$$

$$\boxed{k=3} \quad f_3 = \Xi(h_1, h_2, s_1, s_2, f_1, f_2);$$

$$\boxed{k=4} \quad f_4 = \Xi(h_1, h_2, h_3, s_1, s_2, s_3, f_1, f_2, f_3);$$

$\vdots$

В приведенных расчетах неизвестно только значение f_1 .

Порождающее уравнение, которое содержит первую производную функции в степени 2, имеет вид

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 \cdot H(x) + F(x) \cdot S(x) + \dots = 0.$$

Применяя формулу для расчета нормированных производных произведения сомножителей (табл.1.2), получаем численное рекуррентное уравнение типа II

$$\sum_{i=0}^{k-1} h_{k-i} \cdot \left(\sum_{r=0}^i (r+1)(i+1-r) \cdot f_{r+2} \cdot f_{i+2-r} \right) + \sum_{r=0}^{k-1} f_{r+1} \cdot s_{k-r} + \dots = 0.$$

Понижая значение индекса производной $k \rightarrow k-1$ и выделяя слагаемые из суммы, преобразуем рекуррентное уравнение

$$(k-1)h_1 \cdot f_2 \cdot f_k + \sum_{i=0}^{k-3} h_{k-1-i} \cdot \left(\sum_{r=0}^i (r+1)(i+1-r) \cdot f_{r+2} \cdot f_{i+2-r} \right) +$$

$$+ h_1 \cdot \left(\sum_{r=0}^{k-3} (r+1)(k-1-r) \cdot f_{r+2} \cdot f_{k-r} \right) + \sum_{r=0}^{k-2} f_{r+1} \cdot s_{k-1-r} + \dots = 0$$

Тогда рекуррентная формула заданной функции для численных производных принимает вид

$$f_k = \Xi(h_1, h_2, h_3, h_4, \dots, h_{k-1}, s_1, s_2, s_3, s_4, \dots, s_{k-1}, f_1, f_2, f_3, f_4, \dots, f_{k-1}),$$

Ввиду того, что в формулу входит значение f_2 , применить ее можно только для $k = 3, 4, \dots$:

$$\boxed{k=3} \quad f_3 = \Xi(h_1, h_2, s_1, s_2, f_1, f_2);$$

$$\boxed{k=4} \quad f_4 = \Xi(h_1, h_2, h_3, s_1, s_2, s_3, f_1, f_2, f_3);$$

$\vdots$

В приведенных расчетах неизвестны начальные значения f_1 и f_2 . Для полиномиальной функции $F(D(x))$ при $x = 0$ находим

$$f_1 = (F(D(x)))_0 = F(d_1); \quad f_2 = \left(\frac{dF}{dD} \cdot \frac{dD(x)}{dx} \right)_0 = \frac{dF(d_1)}{dD} \cdot d_2,$$

что требовалось доказать.

Лемма 1.16. Задана полиномиальная функция $F(D(x))$ с известным полиномом

$$D(x) = d_1 + d_2 x + d_3 x^2 + d_4 x^3 + \dots + d_n x^{n-1},$$

в котором коэффициенты $d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_n$ вычислены для смещения переменной $x_0 = 0$. Тогда конечность полинома $D(x)$ не ограничивает количество вычисляемых производных заданной функции по рекуррентным формулам.

Доказательство. Рассмотрим численную рекуррентную формулу типа I

$$f_k = \Xi(d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_k, f_1, f_2, f_3, f_4, \dots, f_{k-1})$$

и применим ее для $k = 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$:

$$\begin{aligned}
\boxed{k=2} \quad f_2 &= \Xi(d_1, d_2, f_1); \\
\boxed{k=3} \quad f_3 &= \Xi(d_1, d_2, d_3, f_1, f_2); \\
\boxed{k=4} \quad f_4 &= \Xi(d_1, d_2, d_3, d_4, f_1, f_2, f_3); \\
&\vdots \\
\boxed{k=n} \quad f_n &= \Xi(d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_n, f_1, f_2, f_3, f_4, \dots, f_{n-1}); \\
\boxed{k=n+1} \quad f_{n+1} &= \Xi(d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_n, f_1, f_2, f_3, f_4, \dots, f_{n-1}, f_n); \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что по рекуррентной формуле расчет численных производных можно продолжить для $k > n$, ограничивая в расчете индексы используемых коэффициентов полинома $D(x)$. Расчет по рекуррентной формуле типа II отличается только пределами изменения $k = 3, \dots, n, n+1, \dots$, что требовалось доказать.

Пример 1.8.

Рассмотрим полиномиальную функцию

$$F(D(x)) = \frac{1}{(\ln D(x))^2},$$

с известным полиномом

$$D(x) = d_1 + d_2 x + d_3 x^2 + d_4 x^3 + d_5 x^4 = 2 - x + x^2 - x^3 + x^4,$$

в котором коэффициенты d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 вычислены для смещения переменной $x_0 = 0$. Выполним численное p -дифференцирование функции.

Найдем ее начальное численное значение функции $f_1 = \frac{1}{(\ln d_1)^2} = 2,0814$ и

начальное значение производной $f_2 = \frac{-2d_2}{d_1(\ln d_1)^3} = 3,0028$

Применим численную рекуррентную формулу (табл. П.7)

$$\begin{aligned}
f_k &= \frac{1}{2(k-1)d_1^2 \cdot f_2} \cdot \left(-d_1^2 \cdot \sum_{i=1}^{k-3} (i+1)(k-1-i) \cdot f_{i+2} \cdot f_{k-i} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=0}^{k-3} \left(\sum_{q=0}^{k-2-i} d_{q+1} \cdot d_{k-1-i-q} \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot f_{q+2} \cdot f_{i+2-q} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 4 \sum_{l=0}^{k-2} (k-1-l) \cdot d_{k-l} \cdot \left(\sum_{j=0}^l (j+1)d_{j+2} \cdot \left(\sum_{i=0}^{l-j} f_{l+1-j-i} \cdot \left(\sum_{q=0}^i f_{q+1} \cdot f_{i+1-q} \right) \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

Учитывая конечную степень полинома, при реализации рекуррентной формулы, согласно лемме 1.16, необходимо контролировать индексы коэффициентов d_k :

$$1 \leq q+1, j+2, k-l, k-1-i-q \leq 5$$

Численные значения нормированных производных приведены в табл. 1.5.

Таблица 1.5

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
2,0814	3,0028	0,99699	2,9605e-3	-2,7806e-3	-3,000
f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}
-4,9991	-2,008	3,4031e-4	7,3419e-5	3,9994	7,0003
f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}
3,0001	-2,7924e-4	2,6918e-5	-4,9999	-9,002	-3,9994
f_{19}	f_{20}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}
5,7296e-5	-1,6653e-4	6,0000	11,000	4,9999	2,6484e-5

В разделе 1.1 приведены полиномиальные функции $F(D(x))$, которые не различимы в порождающих уравнениях:

$$\sin(\alpha D(x)) \leftrightarrow \cos(\alpha D(x)) ; \sin^2(\alpha D(x)) \leftrightarrow \cos^2(\alpha D(x)) ;$$

$$\arcsin(\alpha D(x)) \leftrightarrow \arccos(\alpha D(x)) ; \arcsin^2(\alpha D(x)) \leftrightarrow \arccos^2(\alpha D(x))$$

Свойство неразличимости указывает, что в перечисленных парах функций в рекуррентном исчислении нет двух функций, а есть только одна функция, которая проявляет двойственность и которую называют разными именами.

Неразличимость в порождающих уравнениях продолжается в рекуррентных уравнениях (формулах). Введение маршрутных функций увеличивает список неразличимых функций:

$$\sin(\ln D(x)) \leftrightarrow \cos(\ln D(x)) ;$$

$$(\sin(D(x)))^m \leftrightarrow (\cos(D(x)))^m ; (\arcsin(D(x)))^m \leftrightarrow (\arccos(D(x)))^m ;$$

$$(\arctg(D(x)))^m \leftrightarrow (\operatorname{arcctg}(D(x)))^m$$

Двойственность функций проявляется в численной реализации рекуррентной формулы, в которую для функций $(\sin(\alpha D(x)) \leftrightarrow \cos(\alpha D(x))$ и т.п. подставляются разные начальные численные значения f_1 и f_2 .

Пример 1.9.

Рассмотрим полиномиальные функции

$$F(D(x)) = (\arcsin D(x))^2 ; F(D(x)) = (\arccos D(x))^2 ,$$

в которых задан полином для смещения переменной $x_0 = 0$

$$D(x) = d_1 + d_2 x + d_3 x^2 + d_4 x^3 + d_5 x^4 + d_6 x^5 + d_7 x^6 + d_8 x^7 + d_9 x^8 + d_{10} x^9 + d_{11} x^{10} =$$

$$= 0,5 + 2x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 - x^{10},$$

и выполним численное p -дифференцирование функции.

Применим рекуррентную формулу заданной функции (табл. П.9)

$$f_k = \frac{1}{2(k-1) \cdot (d_1^2 - 1) \cdot f_2} \left(-2f_2^2 \cdot d_1 \cdot d_{k-1} - 8(k-1)f_1 \cdot d_2 \cdot d_k - 4d_2^2 \cdot f_{k-1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{k-3} \left(f_2^2 \cdot d_{i+1} \cdot d_{k-1-i} + (i+1)(k-1-i) \cdot ((d_1^2 - 1)f_{i+2} \cdot f_{k-i} + \right. \right.$$

$$+ 4f_1 \cdot d_{i+2} \cdot d_{k-i}) + \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot f_{q+2} \cdot f_{i+2-q} \right) \times \\ \times \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} d_{q+1} \cdot d_{k-1-i-q} \right) + 4f_{k-1-i} \cdot \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) d_{q+2} \cdot d_{i+2-q} \right) \right)$$

Учитывая конечную степень полинома, при реализации рекуррентной формулы, согласно лемме 1.16, необходимо контролировать индексы коэффициентов d_k :

$$1 \leq q+1, q+2, k-1, k-1-i-q, i+1, i+2, i+2-q, k-1-i, k-i, k \leq 11$$

Вычислим начальные условия функции $F(D(x)) = (\arcsin D(x))^2$:

$$f_1 = \arcsin^2 d_1 = 0,27416; f_2 = \frac{2d_2 \cdot \arcsin d_1}{\sqrt{1-d_1^2}} = 2,4184$$

Численные значения нормированных производных функции приведены в табл. 1.6

Таблица 1.6

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
0,27416	2,4184	8,1548	1,7147e1	4,4481e1	1,4237e2
f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}
4,6113e2	1,5905e3	5,6570e3	2,0612e4	7,6663e4	2,8956e5
f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}
1,1081e6	4,2870e6	1,6739e7	6,5881e7	2,6109e8	1,0409e9
f_{19}	f_{20}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}
4,1725e9	1,6805e10	6,7970e10	2,7598e11	1,1245e12	4,5961e12

Вычислим начальные условия функции $F(D(x)) = (\arccos D(x))^2$:

$$f_1 = \arccos^2 d_1 = 1,0966; f_2 = \frac{2d_2 \cdot \arccos d_1}{\sqrt{1-d_1^2}} = -4,8368$$

Численные значения нормированных производных функции найдены по той же рекуррентной формуле с другими значениями начальных условий и приведены в табл.1.7.

Таблица 1.7

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
1,0966	-4,8368	-0,30960	3,0396	-4,9619	5,9272
f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}
-5,5572	3,5816	-0,094027	-4,2363	1,2915e1	-1,6232e1
f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}
1,3818e1	-3,2745	-1,5358e1	3,8045e1	-5,5917e1	5,6269e1
f_{19}	f_{20}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}
-2,6349e1	-3,9865e1	1,3529e2	-2,2888e2	2,6610e2	-1,7971e2

Для численного расчета производных составной функции

$$F = \eta(v(\dots\psi(\varphi(D(x))))\dots) ,$$

в которой $\eta, v, \dots, \psi, \varphi$ – внутренние дифференцируемые функции, при большом количестве внутренних функций в составной функции процесс

численного расчета производных можно упростить. Для этого используем разделение составной функции на части, каждая из которых в свою очередь может быть составной функцией, но меньшей сложности. Рассмотрим составную функцию

$$F = v(\dots \eta(\dots \psi(\dots v(\dots \rho(\dots \varphi(D(x))))))$$

и разделим ее на части, как показано в выражении. Тогда получим несколько более простых *частичных* составных функции

$$F = v(\dots \eta(H(x))); H = \psi(\dots v(P(x))); P = \rho(\dots \varphi(D(x))) .$$

Теорема 1.8. Задана составная функция $F = \psi(\varphi(D(x)))$ с известным полиномом

$$D(x) = d_1 + d_2 x + d_3 x^2 + d_4 x^3 + \dots + d_n x^{n-1} ,$$

в котором коэффициенты $d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_n$ вычислены для смещения переменной $x_0 = 0$. Тогда функцию можно разделить на части $F = \psi(H)$; $H = \varphi(D(x))$ и выполнить расчет l численных производных каждой части отдельно, обрабатывая частичные функции последовательно *справа налево*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отдельно частичную функцию $H = \varphi(D(x))$, для внутренней функции которой φ есть численная рекуррентная формула, например типа I, требующая только начального значения функции

$$h_k = \Xi \varphi(d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_k, h_1, h_2, h_3, h_4, \dots, h_{k-1}) .$$

Выполним расчет нормированных производных:

$$h_1 = \varphi(d_1);$$

$$h_2 = \Xi \varphi(d_1, d_2, h_1);$$

$$h_3 = \Xi \varphi(d_1, d_2, d_3, h_1, h_2);$$

$$h_4 = \Xi \varphi(d_1, d_2, d_3, d_4, h_1, h_2, h_3);$$

$$\vdots$$

$$h_n = \Xi \varphi(d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_n, h_1, h_2, h_3, h_4, \dots, h_{n-1});$$

$$h_{n+1} = \Xi \varphi(d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_n, h_1, h_2, h_3, h_4, \dots, h_n);$$

$$\vdots$$

$$h_l = \Xi \varphi(d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_n, h_1, h_2, h_3, h_4, \dots, h_{l-1})$$

Рассмотрим частичную функцию $F = \psi(H)$, для внутренней функции которой ψ есть численная рекуррентная формула типа I

$$f_k = \Xi \psi(h_1, h_2, h_3, h_4, \dots, h_k, f_1, f_2, f_3, f_4, \dots, f_{k-1})$$

Тогда расчет численных производных этой части отличается от расчета предыдущей части только обозначениями. Определим нормированные численные производные:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \psi(h_1) = \psi(\varphi(d_1)); \\
f_2 &= \Xi\psi(h_1, h_2, f_1); \\
f_3 &= \Xi\psi(h_1, h_2, h_3, f_1, f_2); \\
f_4 &= \Xi\psi(h_1, h_2, h_3, h_4, f_1, f_2, f_3); \\
&\vdots \\
f_{n+1} &= \Xi\psi(h_1, h_2, h_3, h_4, \dots, h_{n+1}, f_1, f_2, f_3, f_4, \dots, f_n); \\
&\vdots \\
f_l &= \Xi\psi(h_1, h_2, h_3, h_4, \dots, h_l, f_1, f_2, f_3, f_4, \dots, f_{l-1})
\end{aligned}$$

Выполняя расчет численных производных для всех частей последовательно справа налево, получаем в последней части слева численные производные заданной функции, что требовалось доказать.

Определение. Назовем составную полиномиальную функцию $T = \eta(v(\dots\psi(\varphi(F(x)))\dots))$ тождественной, если выполняется тождество $F(x) \equiv \eta(v(\dots\psi(\varphi(F(x)))\dots))$

Тождественные функции предназначены для контроля точности расчета численных производных и включают внутренние функции прямого и обратного действия. Простейшие тождественные функции содержат одну многократно используемую внутреннюю функцию, например

$$P(x) = T(F(x)) = 1 / \left(\frac{1}{F(x)} \right) = 1 / C(x) ,$$

в которой дважды используется численная рекуррентная формула D^m ($m = -1$), рекуррентное уравнение которой приведено в табл.П.1.

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{-1}{f_1} \cdot (c_1 \cdot f_k + \sum_{q=1}^{k-2} f_{q+1} \cdot c_{k-q}) , \quad (c_1 = \frac{1}{f_1}) ; \\
p_k &= \frac{-1}{c_1} \cdot (p_1 \cdot c_k + \sum_{q=1}^{k-2} c_{q+1} \cdot p_{k-q}) , \quad (p_1 = \frac{1}{c_1}) .
\end{aligned}$$

Проверкой на точность являются равенства значений производных $p_k = f_k$ ($k = 2, 3, \dots$) после преобразований рекуррентной формулой.

Более сложные тождественные функции содержат две внутренних функции – прямую и обратную к ней:

$$(F(x))^m \leftrightarrow \sqrt[m]{F(x)} ; \ln F(x) \leftrightarrow e^{F(x)} ;$$

$$\sin F(x) \leftrightarrow \arcsin F(x) ; \operatorname{tg}(F(x)) \leftrightarrow \operatorname{arctg} F(x)$$

Тождественная функция $T(F(x))$ имеет важное свойство равенства численных производных, вычисленных для одного значения x

$$\frac{d^k T}{dx^k} = \frac{d^k F}{dx^k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, l) \quad , \quad (1.25)$$

которое используется для контроля точности численных расчетов.

Рассмотрим заданную составную функцию

$$F(D(x)) = H(\dots W(D(x)))$$

и вычислим l численных производных, используя прием разделения функции на части. Согласно теореме 1.7, частичные функции обрабатываются справа налево, и в том же направлении идет накопление ошибок. Поэтому для наибольшей достоверности контроля тождественную контрольную функцию $T = \eta(v(\dots \psi(\varphi(F(x)))) \dots)$ следует включать слева в контролируемую функцию, получая новую составную функцию

$$P(D(x)) = T(F(x)) = \eta(v(\dots \psi(\varphi(H(\dots W(D(x))))) \dots)) .$$

Тогда критерий контроля (1.25) удобно применить в другом виде

$$\frac{d^k P}{dx^k} = \frac{d^k F}{dx^k} \quad ; \quad P_k = F_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, l) \quad (1.26)$$

Вследствие ошибок численных расчетов или численной неустойчивости тождества (1.26) нарушаются. Для оценки точности расчета можно выбрать значение

$$\varepsilon = \max \left(\frac{|p_k - f_k|}{|f_k|} \right) \quad (k = 1, 2, 3, \dots, l)$$

или зафиксировать количество значащих цифр, которое остается верным для всех вычисленных нормированных производных.

Пример 1.10.

Рассмотрим заданную составную функцию $F(D(x))$ с известным полиномом

$$D(x) = d_1 + d_2 x + d_3 x^2 + d_4 x^3 + d_5 x^4 + d_6 x^5 + d_7 x^6 + d_8 x^7 + d_9 x^8 + d_{10} x^9 + d_{11} x^{10} = \\ = 1 + 2x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 - x^{10},$$

коэффициенты которого $d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_n$ вычислены для смещения переменной $x_0 = 0$.

Найдем численные производные двумя способами:

- 1) численное p -дифференцирование заданной функции;
- 2) численное дифференцирование интерполяционными методами [15,16,20] в вычислительной среде **Mathcad**, в которой допустим расчет только для 5 производных.

1. Зададим функцию $F(D(x)) = \ln(\sin^2 D(x))$.

Численное p -дифференцирование выполняется с использованием приема разделения на части. В расчете применяются две рекуррентные формулы (табл. П.7, П.12) для внутренних функций.

Запишем численную рекуррентную формулу с новыми обозначениями для частичной функции $S(D(x)) = \sin^2 D(x)$

$$S_k = \frac{1}{2(k-1)S_2} \cdot (8(k-1) \cdot (S_1 - S_1^2) \cdot d_2 \cdot d_k + 4d_2^2 \cdot (1 - 2S_1) \cdot S_{k-1} + \\ + \sum_{i=1}^{k-3} ((i+1)(k-1-i) \cdot (4(S_1 - S_1^2) \cdot d_{i+2} \cdot d_{k-i} - S_{i+2} \cdot S_{k-i}) - 4d_2^2 \cdot S_{i+1} \cdot S_{k-1-i} + \\ + 4(S_{i+1} - \sum_{q=0}^i S_{q+1} \cdot S_{i+1-q}) \cdot (\sum_{q=0}^{k-i-2} (q+1)(k-1-i-q) d_{q+2} \cdot d_{k-i-q})))$$

и численную рекуррентную формулу с новыми обозначениями для частичной функции $F(S(x)) = \ln S(x)$

$$f_k = \frac{1}{(k-1)S_1} \left((k-1)S_k - \sum_{q=0}^{k-3} (q+1)f_{q+2} \cdot S_{k-1-q} \right)$$

Численные нормированные производные заданной функции приведены в табл.1.8.

Таблица 1.8

численное p -дифференцирование	f_1	f_2	f_3
	-0,3452074925	2,568370463	-4,364946477
	f_4	f_5	f_6
	-2,096962594	4,351396604	-12,06071651
численный расчет интерполяционным методом в среде Mathcad	f_1	f_2	f_3
	-0,3452074925	2,568370463	-4,364946477
	f_4	f_5	f_6
	-2,096962594	4,35139662	-12,06073215

2. Зададим функцию $F(D(x) = \ln(\sin^2(\ln(\sin^2 D(x))))).$

Численные нормированные производные приведены в табл. 1.9.

Таблица 1.9

численное p -дифференцирование	f_1	f_2	f_3
	-2,167100962	-14,28432451	-33,33079415
	f_4	f_5	f_6
	-66,82361137	-230,6549342	-692,967068
численный расчет интерполяционным методом в среде Mathcad	f_1	f_2	f_3
	-2,167100962	-14,28432451	-33,33079415
	f_4	f_5	f_6
	-66,82361141	-230,6549301	-692,967312

3. Зададим функцию $F(D(x) = \ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2 D(x)))))).$

Численные нормированные производные приведены в табл. 1.10.

4. Зададим функцию $F(D(x) = \ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2 D(x))))))))).$

Численные нормированные производные приведены в табл. 1.11.

Таблица 1.10

численное p -дифференцирование	f_1	f_2	f_3
	-0,3788940822	-19,390270855	-343,28249816
	f_4	f_5	f_6
	-3,407924289e3	-4,235148904e4	-5,667694393e5
численный расчет интерполяционным методом в среде Mathcad	f_1	f_2	f_3
	-0,3788940822	-19,39027086	-343,28249817
	f_4	f_5	f_6
	-3,407924290e3	-4,235148902e4	-5,667693822e5

Таблица 1.11

численное p -дифференцирование	f_1	f_2	f_3
	-1,989081840	97,406500335	-1,023518851e3
	f_4	f_5	f_6
	9,043627253e3	-3,069806052e5	2,0941760986e6
численный расчет интерполяционным методом в среде Mathcad	f_1	f_2	f_3
	-1,989081840	97,406500340	-1,023518850e3
	f_4	f_5	f_6
	9,043627259e3	-3,06980608e5	2,09417590e6

Для контроля точности в численном p -дифференцировании добавлена тождественная составная функция $T = \sqrt[3]{(F(D(x)))^3}$, которая заменила заданную функцию примера (пункт 4) другой более сложной составной функцией

$$P(D(x)) = \sqrt[3]{(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2 D(x))))))))^3}$$

Для сравнение выполнен расчет численных производных для функции $F(D(x))$ без контроля и с контролем для функции $P(F(D(x)))$ (табл.1.12).

Таблица 1.12

$F(D(x))$	f_1	f_2	f_3
	-1,989081840262403	97,40650033581098	-1,023518851161432e3
	f_4	f_5	f_6
	9,043627253817402e3	-3,069806052917166e5	2,094176098671556e6
$P(D(x))$	f_1	f_2	f_3
	-1,989081840262403	97,40650033581096	-1,023518851161433e3
	f_4	f_5	f_6
	9,043627253817206e3	-3,069806052917235e5	2,094176098671136e6

Сравнение показывает, что результаты численного p -дифференцирования содержат не менее 12 верных значащих цифр. Из табл.1.8–1.11 видно, что производная f_6 среды **Mathcad** содержит только 6 верных значащих цифр.

Определение. Назовем полином

$$D(x) = d_{0,1} + d_{0,2}x + d_{0,3}x^2 + d_{0,4}x^3 + \dots + d_{0,n+1}x^n$$

смещенным, если переменная x получает смещение $x + x_0$, которое изменяет численные значения коэффициентов полинома

$$\begin{aligned} D(x + x_0) &= d_{0,1} + d_{0,2}(x + x_0) + d_{0,3}(x + x_0)^2 + d_{0,4}(x + x_0)^3 + \dots + d_{0,n+1}(x + x_0)^n = \\ &= d_1 + d_2x + d_3x^2 + d_4x^3 + \dots + d_{n+1}x^n. \end{aligned}$$

Теорема 1.9. Задан полином

$$D(x) = d_1 + d_2x + d_3x^2 + d_4x^3 + \dots + d_{n+1}x^n,$$

в котором коэффициенты $d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_{n+1}$ вычислены при смещении переменной $x_0 = 0$. Тогда при смещении переменной $x + x_0$ численные значения коэффициентов полинома $D(x)$ пересчитываются по формулам

$$d_{n-i} = d_{n-i} + x_0 \cdot d_{n+1-i}, \quad ((i = 0, \dots, k); \quad k = 0, \dots, n-1) \quad (1.27)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приращение переменной $x + x_0$ изменяет численные значения коэффициентов

$$D(x + x_0) = d_1 + d_2(x + x_0) + d_3(x + x_0)^2 + d_4(x + x_0)^3 + \dots + d_{n+1}(x + x_0)^n.$$

Запишем преобразованный полином по схеме Горнера [21]

$$D(x + x_0) = d_1 + (x + x_0) \cdot (d_2 + (x + x_0) \cdot (d_3 + (x + x_0) \cdot (d_4 + \dots \\ \dots + (x + x_0) \cdot (d_{n-2} + (x + x_0) \cdot (d_{n-1} + (x + x_0) \cdot (d_n + (x + x_0) \cdot d_{n+1}))))))$$

и введем вспомогательные полиномы:

$$D(x + x_0) = P_1(x) = d_1 + (x + x_0) \cdot P_2(x);$$

$$P_2(x) = d_2 + (x + x_0) \cdot P_3(x);$$

$$P_3(x) = d_3 + (x + x_0) \cdot P_4(x);$$

$\vdots$

$$P_{n-2}(x) = d_{n-2} + (x + x_0) \cdot P_{n-1}(x);$$

$$P_{n-1}(x) = d_{n-1} + (x + x_0) \cdot P_n(x);$$

$$P_n(x) = d_n + (x + x_0) \cdot d_{n+1}$$

Преобразуем последний полином

$$P_n(x) = d_n + (x + x_0) \cdot d_{n+1} = (d_n + x_0 d_{n+1}) + x d_{n+1} = d_n + x d_{n+1}$$

и подставим его в предыдущий полином

$$P_{n-1}(x) = d_{n-1} + x_0 P_n(x) + x P_n(x) = d_{n-1} + x_0 (d_n + x d_{n+1}) + x (d_n + x d_{n+1}) = \\ = (d_{n-1} + x_0 d_n) + x (d_n + x_0 d_{n+1}) + x^2 d_{n+1} = d_{n-1} + x d_n + x^2 d_{n+1}$$

Продолжаем подстановку полиномов:

$$P_{n-2}(x) = d_{n-2} + (x + x_0) \cdot P_{n-1}(x) = \\ = d_{n-2} + x_0 \cdot (d_{n-1} + x \cdot d_n + x^2 \cdot d_{n+1}) + x \cdot (d_{n-1} + x \cdot d_n + x^2 \cdot d_{n+1}) = \\ = (d_{n-2} + x_0 \cdot d_{n-1}) + x \cdot (d_{n-1} + x_0 \cdot d_n) + x^2 \cdot (d_n + x_0 \cdot d_{n+1}) + x^3 d_{n+1} = \\ = d_{n-2} + x \cdot d_{n-1} + x^2 \cdot d_n + x^3 \cdot d_{n+1};$$

$$P_{n-3}(x) = d_{n-3} + (x + x_0) \cdot P_{n-2}(x) = (d_{n-3} + x_0 \cdot d_{n-2}) + x \cdot (d_{n-2} + x_0 \cdot d_{n-1}) + \\ + x^2 \cdot (d_{n-1} + x_0 \cdot d_n) + x^3 \cdot (d_{n-1} + x_0 \cdot d_n) + x^4 \cdot d_{n+1} = \\ = d_{n-3} + x \cdot d_{n-2} + x^2 \cdot d_{n-1} + x^3 \cdot d_n + x^4 \cdot d_{n+1};$$

$\vdots$

Из преобразованных полиномов видно, что коэффициенты $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$

полинома $D(x + x_0)$ многократно пересчитываются по одной формуле $d_{n-i} = d_{n-i} + x_0 \cdot d_{n+1-i}$, ($i = 0, 1, 2, \dots$), что требовалось доказать.

Лемма 1.17. Бином Ньютона $(x + x_0)^n$ [1,11,12] является частным случаем теоремы 1.9, и поэтому его коэффициенты $d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_{n+1}$ преобразуются по формулам

$$d_{n-i} = d_{n-i} + x_0 \cdot d_{n+1-i}, \quad ((i = 0, \dots, k); \quad k = 0, \dots, n-1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, бином Ньютона является полиномом

$$D(x + x_0) = d_1 + d_2(x + x_0) + d_3(x + x_0)^2 + d_4(x + x_0)^3 + \dots + d_{n+1}(x + x_0)^n,$$

в котором $d_1 = d_2 = d_3 = \dots = d_n = 0$; $d_{n+1} = 1$. Запишем этот полином по схеме Горнера [21]

$$D(x + x_0) = d_1 + (x + x_0) \cdot (d_2 + (x + x_0) \cdot (d_3 + (x + x_0) \cdot (d_4 + \dots \\ \dots + (x + x_0) \cdot (d_{n-2} + (x + x_0) \cdot (d_{n-1} + (x + x_0) \cdot (d_n + (x + x_0) \cdot d_{n+1}))))))$$

и введем вспомогательные полиномы:

$$D(x + x_0) = P_1(x) = d_1 + (x + x_0) \cdot P_2(x) = (x + x_0) \cdot P_2(x);$$

$$P_2(x) = d_2 + (x + x_0) \cdot P_3(x) = (x + x_0) \cdot P_3(x);$$

$$P_3(x) = d_3 + (x + x_0) \cdot P_4(x) = (x + x_0) \cdot P_4(x);$$

$\vdots$

$$P_{n-2}(x) = d_{n-2} + (x + x_0) \cdot P_{n-1}(x) = (x + x_0) \cdot P_{n-1}(x);$$

$$P_{n-1}(x) = d_{n-1} + (x + x_0) \cdot P_n(x) = (x + x_0) \cdot P_n(x);$$

$$P_n(x) = d_n + (x + x_0) \cdot d_{n+1} = (x + x_0) \cdot d_{n+1}$$

Последний полином определяется сразу

$$P_n(x) = (x + x_0) \cdot d_{n+1} = (x_0 \cdot d_{n+1}) + x \cdot d_{n+1} = d_n + x \cdot d_{n+1}.$$

Подставим его в предыдущий полином

$$P_{n-1}(x) = x_0 \cdot P_n(x) + x \cdot P_n(x) = x_0 \cdot (d_n + x \cdot d_{n+1}) + x \cdot (d_n + x \cdot d_{n+1}) = \\ = (x_0 \cdot d_n) + x \cdot (d_n + x_0 \cdot d_{n+1}) + x^2 \cdot d_{n+1} = d_{n-1} + x \cdot d_n + x^2 \cdot d_{n+1}$$

и продолжим подстановку полиномов:

$$P_{n-2}(x) = (x + x_0) \cdot P_{n-1}(x) = \\ = x_0 \cdot (d_{n-1} + x \cdot d_n + x^2 \cdot d_{n+1}) + x \cdot (d_{n-1} + x \cdot d_n + x^2 \cdot d_{n+1}) = \\ = (x_0 \cdot d_{n-1}) + x \cdot (d_{n-1} + x_0 \cdot d_n) + x^2 \cdot (d_n + x_0 \cdot d_{n+1}) + x^3 \cdot d_{n+1} = \\ = d_{n-2} + x \cdot d_{n-1} + x^2 \cdot d_n + x^3 \cdot d_{n+1} \\ P_{n-3}(x) = (x + x_0) \cdot P_{n-2}(x) = (x_0 \cdot d_{n-2}) + x \cdot (d_{n-2} + x_0 \cdot d_{n-1}) + \\ + x^2 \cdot (d_{n-1} + x_0 \cdot d_n) + x^3 \cdot (d_n + x_0 \cdot d_{n+1}) + x^4 \cdot d_{n+1} = \\ = d_{n-3} + x \cdot d_{n-2} + x^2 \cdot d_{n-1} + x^3 \cdot d_n + x^4 \cdot d_{n+1};$$

$\vdots$

Из преобразованных полиномов видно, что коэффициенты $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ полинома $D(x + x_0)$ многократно пересчитываются по одной формуле $d_{n-i} = d_{n-i} + x_0 \cdot d_{n+1-i}$, ($i = 0, 1, 2, \dots$).

Если выполнить полную подстановку вспомогательных полиномов:

$$P_n(x) = x + x_0;$$

$$P_{n-1}(x) = x_0^2 + 2xx_0 + x^2;$$

$$P_{n-2}(x) = x_0^3 + 3x \cdot x_0^2 + 3x^2 \cdot x_0 + x^3;$$

$$P_{n-3}(x) = x_0^4 + 4x \cdot x_0^3 + 6x^2 \cdot x_0^2 + 4x^3 \cdot x_0 + x^4;$$

⋮

то их коэффициенты образуют треугольник Паскаля [12], что требовалось доказать.

Пример 1.11.

Продолжим пример 1.10 для более сложных функций, используя для сравнения вычислительную среду **Mathcad**. Численные производные функций вычисляются для $x = 0$.

1. Зададим функцию

$$F(D(x) = \ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2 D(x)))))))))) .$$

Численные нормированные производные приведены в табл. 1.13

Таблица 1.13

численное p-дифференцирование	f_1	f_2	f_3
	-0,18031621399	86,59783011	-1,227277668e4
	f_4	f_5	f_6
	5,748330809e5	-4,259693597e7	3,112358268e9
численный расчет интерполяционным методом среды Mathcad	f_1	f_2	f_3
	-0,180316213	86,59783011	-1,22727668e4
	f_4	f_5	f_6
	5,74834458e5	failed	3,11235858e9

Для заданной функции среда **Mathcad** не может вычислить производную f_5 .

2. Зададим функцию

$$F(D(x) = \ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2 D(x)))))))))) .$$

Численные нормированные производные приведены в табл. 1.14

Таблица 1.14

численное p-дифференцирование	f_1	f_2	f_3
	-3,436936199416	-950,07811048	-9,851487557e4
	f_4	f_5	f_6
	-1,40591662276e7	-2,516051113e9	-4,263367377e11
численный расчет интерполяционным методом среды Mathcad	f_1	f_2	f_3
	-3,436936199	-950,07811046	-9,85148764e4
	f_4	f_5	f_6
	-1,40588166e7	failed	failed

Для заданной функции среда **Mathcad** не может вычислить производные f_5, f_6 .

3. Зададим функцию

$$F(D(x)) = \ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(D(x))...))))) (1.28)$$

Численные нормированные производные приведены в табл.1.15.

Таблица 1.15

численное p -дифференцирование	f_1	f_2	f_3
	-2,4683930251795	6,2455518337e3	-1,0006768183e7
	f_4	f_5	f_6
	2,0063710609e10	-4,706562638e13	1,17191663044e17
численный расчет интерполяционным методом среды Mathcad	f_1	f_2	f_3
	-2,4683930251795	6,2455518339e3	-1,00067681905e7
	f_4	f_5	f_6
	2,00637082443e10	-4,706522643e13	failed

Для заданной функции среда **Mathcad** не может вычислить производную f_6 .

Неудачи вычислительной среды **Mathcad** не являются случайностью и связаны с особенностью использованного метода расчета численных производных. Для вычисления производных применен интерполяционный метод пятого порядка [15, 16, 20], и его формула допускает расчет 5 производных. Для реализации интерполяционный метод требует построения дискретной шкалы расчета интерполируемой функции, и потому метод чувствителен к выбору дискретных точек шкалы. Для различных функций примера в интерполяционном методе выбираются различные дискретные значения переменной x , и этот выбор определяет удачу или неудачи интерполяционного расчета.

Покажем в вычислительном эксперименте чувствительность интерполяционного метода к выбору дискретной шкалы, для чего продолжим численный расчет производных функции (1.28) примера 1.11, выбирая различные смещения x_0 от начального значения переменной $x = 0$.

1) Смещение $x_0 = -0,0126$.

Результаты расчета численных производных приведены в табл.1.16.

Таблица 1.16

численное p -дифференцирование	f_1	f_2	f_3
	-4,5487985457e-3	-530,268319356	-1,62651396109e7
	f_4	f_5	f_6
	-4,9285300336e10	-1,57968643e14	-5,2022162689e17
численный расчет интерполяционным методом в среде Mathcad	f_1	f_2	f_3
	-4,5487985457e-3	-530,26831913	-1,62651397039e7
	f_4	f_5	f_6
	-4,9285929904e10	failed	failed

2) Смещение $x_0 = 0,00524$.

Результаты расчета численных производных приведены в табл.1.17.

3) Смещение $x_0 = 0,009875$.

Результаты расчета численных производных приведены в табл.1.18.

Таблица 1.17

численное p -дифференцирование	f_1	f_2	f_3
	-4,8326124381e-3	-746,84934436	-2,84171882924e7
	f_4	f_5	f_6
	3,16741165421e10	-1,74453028e14	3,3566593773e17
численный расчет интерполяционным методом в среде <i>Mathcad</i>	f_1	f_2	f_3
	-4,8326124379e-3	-746,849344266	2,84171890260e7
	f_4	f_5	f_6
	<i>failed</i>	<i>failed</i>	<i>failed</i>

Таблица 1.18

численное p -дифференцирование	f_1	f_2	f_3
	-16,6650919224	5,9436550018e6	-8,8323421297e12
	f_4	f_5	f_6
	1,74993756768e19	-3,90051324e25	9,2736282172e31
численный расчет интерполяционным методом в среде <i>Mathcad</i>	f_1	f_2	f_3
	-16,6650919224	5,943654737e6	<i>failed</i>
	f_4	f_5	f_6
	<i>failed</i>	<i>failed</i>	<i>failed</i>

Сравнение p -дифференцирования с численным дифференцированием интерполяционным методом показывает, что для сложных функций с неизвестными свойствами метод интерполирования оказался ненадежным и непредсказуемым вычислительным инструментом. Сбои в расчете не являются отдельными недоработками конкретной среды, которые можно исправить. В теории интерполяционного численного дифференцирования заложен серьезный недостаток – произвольный выбор интервала интерполирования. Внутри этого интервала функция должна быть гладкой, а в случае попадания в интервал особой точки сбой в расчетах становится неизбежным. Однако для сложных функций с возможными особыми точками предсказать поведение функции в произвольно выбранном интервале нереально.

Покажем особенности функции (1.28), которые были причиной сбоев интерполяционного метода. В табл.1.19 приведены особые точки функции, которые фиксировались по изменению знака первой производной (точности численного расчета с 16 значащими цифрами оказалось недостаточно для точного попадания в особую точку функции).

Таблица 1.19

координата особой точки	первая производная функции (1.28)	вторая производная функции (1.28)
0,0022181932	4,2900e10	-9,2022e20
0,0034431239	-7,4955e10	-2,8092e21
0,0040148126	-1,4866e11	-1,1049e22
0,00427802612	-3,7776e11	-7,1352e22
0,00439854688	-7,2930e11	-2,7594e23

Большая плотность особых точек, характерная для функций сложной структуры, делает интерполяционное численное дифференцирование бесполезным инструментом.

Философский аспект дифференциального исчисления состоит в том, что функция содержит бесконечный объем информации, а производные являются средством ее извлечения. Дифференцируемая функция имеет бесконечно много производных, и чем больше их найдено, тем лучше будет изучена функция. Аналитические производные более информативны и содержат информацию о функции для всех вещественных значений переменной (исключая особые точки). Однако классическое дифференциальное исчисление вследствие указанных ранее внутренних ограничений существенно сокращает количество возможных вычисленных производных двумя–тремя производными. Рекуррентное аналитическое исчисление снимает эти ограничения, и в компактной форме позволяет записать в память больше производных в символическом виде. При большом количестве найденных производных проявляется эффект размерности («проклятие размерности»), действие которого не позволяет выполнять над производными аналитические операции – поиск экстремумов, корней и т.п. Большая размерность задачи оставляет только одну возможность – подставить в аналитические производные численное значение переменной и перейти к численным производным. Рекуррентное дифференцирование определяет два направления: сформировать аналитические производные в компактной форме и подставить в них значение переменной или сразу применить численное рекуррентное дифференцирование. Различие этих направлений можно заметить по требуемым ресурсам – символическая запись многих аналитических производных требует большой памяти, а количество возможных численных производных ограничивается точностью выполнения арифметических операций. В настоящее время предпочтительнее использование численных рекуррентных формул для фиксированного значения переменной.

В сравнении с интерполяционными методами численного дифференцирования, собирающими информацию в ряде дискретных точек, численное рекуррентное дифференцирование имеет неоспоримое преимущество – оно собирает информацию в одной точке. В одной точке информации о функции не меньше, чем на множестве точек.

В способе обработки информации в интерполяционном дифференцировании возникают трудно преодолимые теоретические проблемы – вывод интерполяционных формул высокого порядка [15, 16, 20]. Напротив, в численном рекуррентном дифференцировании для 16 значащих цифр результата можно вычислять десятки численных производных, и с повышением точности арифметических операций количество вычисляемых производных существенно возрастет. Объем информации о функции в численном рекуррентном исчислении можно существенно увеличить, изменяя

значения переменной в широком диапазоне (смещение переменной по теореме 1.9), и так получить преимущества дискретного множества точек.

Приведенные примеры выявили еще одну непреодолимую проблему интерполяционного дифференцирования, связанную с возможным попаданием особой точки функции в интервал дискретных точек. Следует признать отказ вычислительной среды от дальнейших расчетов наилучшей реакцией вычислительной среды на указанную ситуацию, т. к. любая попытка ее преодолеть только ухудшит результат. Напротив, в рекуррентном дифференцировании, которое вычисляет производные в одной точке, таких проблем быть не может. Как показали примеры, умышленные попытки найти такую особую точку, в которой рекуррентное дифференцирование станет невозможным, оказались неудачными вследствие недостаточной точности арифметических операций. Эффект близости особой точки проявляется в увеличении численных значений производных, но эти значения редко выходят за допустимые пределы.

Ввиду того, что сравнение с другими методами численного дифференцирования потеряло смысл в связи с ограничениями этих методов, в примере ниже будут показаны большие возможности численного рекуррентного дифференцирования.

Пример 1.12.

Зададим функцию

$$\begin{aligned}
 F(x) = & \sqrt[7]{\ln \sin^2(\ln \sin^2(\ln \sin^2(\ln \sin^2(\ln \sin^2(\ln \sin^2(D1(x))))))} / \\
 & / \sqrt[5]{\ln \sin^2(\ln \sin^2(\ln \sin^2(\ln \sin^2(\ln \sin^2(D2(x))))))} / \\
 & / (\ln \sin^2(\ln \sin^2(\ln \sin^2(\ln \sin^2(\ln \sin^2(D3(x)))))) / \\
 & / \sqrt[3]{\ln \sin^2(\ln \sin^2(\ln \sin^2(\ln \sin^2(\ln \sin^2(D4(x))))))} / \\
 & / \sqrt[3]{\ln \sin^2(\ln \sin^2(\ln \sin^2(\ln \sin^2(\ln \sin^2(D5(x))))))} = \\
 & = W1(x)/W2(x)/W3(x)/W4(x)/W5(x) ,
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

в которой $W1(x), W2(x), W3(x), W4(x), W5(x)$ – вспомогательные составные функции. Операции деления упрощают расчет численных производных и дают возможность вычислять производные вспомогательных функций независимо. Для расчета численных производных функций деления используется рекуррентная формула (1.23).

Зададим численные полиномы для смещения переменной $x_0 = 0$:

$$D1(x) = 1 + 0,05x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 - x^{10} ;$$

$$D2(x) = 1 + 0 \cdot x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 - x^{10} ;$$

$$D3(x) = 1 - 0,05x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 - x^{10} ;$$

$$D4(x) = 1 - 0,10x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 - x^{10} ;$$

$$D5(x) = 1 - 0,15x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 - x^{10}$$

Для контроля точности расчета использовалась простейшая контрольная функция

$$P(x) = T(F(x)) = 1 / \left(\frac{1}{F(x)} \right) ,$$

которая включает две одинаковых численных операции рекуррентного деления. Чтобы не допустить накопления ошибок, контролировался расчет каждой вспомогательной функции $W1(x)$, $W2(x)$, $W3(x)$, $W4(x)$, $W5(x)$, который показал не менее 12 верных значащих цифр в результатах.

Выполним численное рекуррентное дифференцирование заданной функции для смещения переменной $x_0 = 0,008$. Результаты расчета численных производных вспомогательных функций приведены в табл.1.20.

Таблица 1.20

$W1(x)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
	-1,0488	1,2287e1	1,9086e2	6,9442e3	1,9286e5
	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
	7,1629e6	2,5042e8	9,5145e9	3,6671e11	1,4367e13
	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
	5,7969e14	2,3363e16	9,6579e17	3,9822e19	1,6712e21
$W2(x)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
	-1,1792	4,6330	2,6855e2	-2,1013e3	-4,29335e4
	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
	2,9381e6	-1,3866e7	-1,9609e9	6,6131e10	9,1099e11
	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
	-8,4792e13	8,6445e14	7,9942e16	-2,6574e18	-3,5592e19
$W3(x)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
	-3,9645	-2,2572e2	-6,1534e3	-2,2035e5	-9,3708e6
	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
	-4,0502e8	-1,8479e10	-8,5987e11	-4,0765e13	-1,9545e15
	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
	-9,4510e16	-4,5956e18	-2,2427e20	-1,0964e22	-5,3613e23
$W4(x)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
	-1,8514	1,7251e2	-6,3263e4	3,5449e7	-2,3013e10
	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
	1,6135e13	-1,1866e16	9,0164e18	-7,0150e21	5,5569e24
	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
	-4,4643e27	3,6276e30	-2,9754e33	2,4597e36	-2,0469e39
$W5(x)$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
	-1,4562	8,2078e1	-7,7044e3	1,3126e6	-2,5984e8
	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
	5,5737e10	-1,2563e13	2,9292e15	-6,9993e17	1,7039e20
	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
	-4,2089e22	1,0520e25	-2,6548e27	6,7541e29	-1,7302e32

Отдельно вычисленные производные вспомогательных функций соединяются операциями деления. Операции деления «разрезают» сложную функцию на части и делают эти части независимыми для расчета производных. Расчет производных

вспомогательных функций $W1(x)$, $W2(x)$, $W3(x)$, $W4(x)$, $W5(x)$ становится независимым друг от друга и может планироваться произвольно. Более того, операции деления для расчета производных также можно разбить на независимые части множеством способов. Один из возможных планов выполнения операций деления приведен в табл.1.21.

Таблица 1.21

$F1 = \frac{W1}{W2}$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
	0,88941	-6,9256	1,3486e1	-8,9965e3	-1,8673e5
	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
	-6,6399e6	-2,9270e8	-1,1730e10	-3,7241e11	-1,5856e13
	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
$F2 = \frac{F1}{W3}$	-6,8469e14	-2,5093e16	-1,0219e18	-4,4861e19	-1,8197e21
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
	-0,22434	1,4525e1	-4,8188e2	1,9637e4	-5,9972e5
	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
	2,0722e7	-5,6522e8	2,0099e10	-5,0978e11	1,9813e13
$F3 = \frac{F2}{W4}$	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
	-3,8123e14	1,8901e16	-2,0366e17	2,1015e19	-5,7369e18
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
	0,12117	3,4482	-3,5590e3	1,8601e6	-1,1449e9
	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
$F = \frac{F3}{W5}$	7,7476e11	-5,5543e14	4,1373e17	-3,1672e20	2,4748e23
	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
	-1,9650e26	1,5802e29	-1,2843e32	1,0529e35	-8,6966e37
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
	-8,3214e-2	-7,0584	2,4865e3	-1,1749e6	7,1533e8
	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
	-4,8521e11	3,4925e14	-2,6103e17	2,0034e20	-1,5684e23
	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
	1,2471e26	-1,0041e29	8,1683e31	-6,7021e34	5,5391e37
	f_{16}	f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}
	-4,6068e40	3,8523e43	-3,2368e46	2,7311e49	-2,3131e52
	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}	f_{25}
	1,9657e55	-1,6755e58	1,4321e61	-1,2271e64	1,05384e67

Производная $f_{25}=1,05384742168515e67$ содержит все верные значащие цифры.

Численный расчет выполнялся в среде **Matlab**. Программа расчета имеет простую структуру последовательного вызова рекуррентных уравнений (формул), запрограммированных в виде функций.

Для проверки скорости счета в численном рекуррентном дифференцировании пример 1.12 решался в цикле 50 раз на компьютере с процессором **2,66 ГГц**. Полное время счета составило **25 сек**, т.е. время расчета **25** численных производных функции (1.29) составило **0,5 сек**. Таким образом, для расчета численных производных сложных составных функций рекуррентное дифференцирование является надежным и эффективным вычислительным инструментом.

Раздел 1.3. Задачи численного рекуррентного дифференцирования

Дифференцируемые функции различаются по количеству составных функций, объединенных операциями умножения и деления, и сложностью самих составных функций. Составная функция

$$F = \eta(v(\psi(\varphi(D(x)))))) \quad (1.32)$$

включает дифференцируемые внутренние функции η, v, ψ, φ и полином

$$D(x) = d_1 + d_2x + d_3x^2 + d_4x^3 + \dots + d_nx^{n-1}, \quad (1.33)$$

в котором коэффициенты $d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_n$ вычислены при смещении x_0 . Внутренние функции и полином объединены в едином процессе расчета численных нормированных производных. Для расчета составная функция разбивается на части

$$F = \eta(P); P = v(H); H = \psi(C); C = \varphi(D) \quad (1.34)$$

Определение. Назовем *аргументом* внутренней функции входные данные в виде исходных нормированных численных производных и *результатом* выходные данные в виде найденных в расчете нормированных численных производных функции.

Согласно определению, формулы (1.34) преобразуют аргументы в результаты

$$D \rightarrow C; C \rightarrow H; H \rightarrow P; P \rightarrow F \quad (1.35)$$

После преобразования аргументы и результаты меняются местами, а инструментами этих преобразований являются численные рекуррентные формулы внутренних функций η, v, ψ, φ . Строго говоря, аргумент D – это не полином (1.33), а его нормированные численные производные при $x = 0$

$$d_1 = \left. \frac{d^0 D}{dx^0} \right|_0; d_2 = \left. \frac{dD}{dx} \right|_0; d_3 = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 D}{dx^2} \right|_0; d_4 = \left. \frac{1}{6} \frac{d^3 D}{dx^3} \right|_0; \dots$$

Кроме того, аргумент и результат могут содержать разное количество численных производных. Например, для расчета l численных производных заданной функции F при $l > n$ в первом преобразовании $D \rightarrow C$ аргумент D содержит n производных, а в результате C должно быть l производных.

Преобразования (1.35) удобно представить следующими схемами:

$$\begin{aligned} D \rightarrow C: [d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_n] &\xrightarrow[\text{формула } \Xi\varphi]{\text{численная рекуррентная}} [c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_l] \\ C \rightarrow H: [c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_l] &\xrightarrow[\text{формула } \Xi\psi]{\text{численная рекуррентная}} [h_1, h_2, h_3, h_4, \dots, h_l] \\ H \rightarrow P: [h_1, h_2, h_3, h_4, \dots, h_l] &\xrightarrow[\text{формула } \Xi v]{\text{численная рекуррентная}} [p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_l] \\ P \rightarrow F: [p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_l] &\xrightarrow[\text{формула } \Xi\eta]{\text{численная рекуррентная}} [f_1, f_2, f_3, f_4, \dots, f_l] \end{aligned}$$

Операции умножения (деления) составных функций

$$F = S \cdot T = (\eta(v(\psi(\varphi(D(x)))))) \cdot (\lambda(v(H(x))))$$

также являются преобразованиями, но более сложными, преобразующими два аргумента сомножителей (или делимого, делителя) в результат $S, T \rightarrow F$. Эти преобразования представим схемой:

$$S, T \rightarrow F : \begin{bmatrix} s_1, s_2, s_3, s_4, \dots, s_n \\ t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_l \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{рекуррентная формула}]{\text{численная}} [f_1, f_2, f_3, f_4, \dots, f_l]$$

Важной характеристикой численных расчетов является достоверность полученных численных результатов, которые надо подтверждать численными проверками.

Основной арифметической операцией численных рекуррентных формул является операция умножения численных производных. В операции умножения чисел погрешности сомножителей εa , εb переносятся в результат [18]

$$(a + \varepsilon a) \cdot (b + \varepsilon b) \simeq (a \cdot b) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon a}{a} + \frac{\varepsilon b}{b}\right)$$

и суммируются (без учета взаимной компенсации ошибок). Как следовало ожидать, наибольшей будет погрешность в численных производных самого высокого порядка, для которых требуется наибольшее количество операций умножения в рекуррентных формулах.

Отсюда следует практические рекомендации:

- 1) контроль ошибок надо начинать с производной самого высокого порядка;
- 2) в случае больших ошибок контроль надо распространить на производные меньшего порядка с допустимой ошибкой;
- 3) в случае допустимой ошибки в производной самого высокого порядка весь расчет можно считать точным.

Контроль точности расчета численных производных выполняется с помощью тождественных составных функций. Применим следующие функции для контроля численных производных заданной функции F .

1. *Функция контроля 1* : $T(F) = ((F)^{-1})^{-1}$.

При отсутствии ошибок в расчете функция контроля превращается в тождество $F \equiv T(F)$. Ошибки, сделанные в расчете, нарушают тождество и приводят к появлению двух разных функций : $F \Leftrightarrow P = T(F)$, численные производные которых надо сравнивать на различие или совпадение. Численные производные функции контроля, как и заданной функции, вычисляются по численной рекуррентной формуле (уравнению) (табл. П.1), которая используется дважды с разными обозначениями:

$$C = F^{-1} : \quad c_1 = \frac{1}{f_1}; \quad c_k = \frac{-1}{f_1} \left(c_1 f_k + \sum_{q=1}^{k-2} f_{q+1} c_{k-q} \right);$$

$$P = C^{-1} = (F^{-1})^{-1} : \quad p_1 = \frac{1}{c_1}; \quad p_k = \frac{-1}{c_1} \left(p_1 c_k + \sum_{q=1}^{k-2} c_{q+1} p_{k-q} \right)$$

Для проверки l -ой численной производной реализация функции контроля требует расчета всех предыдущих производных функции P и выполняет $2l$ операций умножения.

2. *Функция контроля 2* : $T(F) = (\sqrt[3]{F})^3$.

В этом контроле надо проверять производные $P = (\sqrt[3]{F})^3$ и сравнивать с производными заданной функции F . Численные производные функции контроля вычисляются по численным рекуррентным уравнениям (табл. П.1, П.2), которые используются с разными обозначениями:

$$f_k = (m(k-1)f_1d_k + \sum_{q=1}^{k-2} ((m+1)q - k + 1)d_{q+1}f_{k-q}) / (k-1)d_1;$$

$$C = \sqrt[3]{F} : c_1 = \sqrt[3]{f_1}; c_k = \frac{1}{(k-1)f_1} \left(\frac{1}{3}(k-1)c_1f_k + \sum_{q=1}^{k-2} \left(\frac{4}{3}q - k + 1 \right) f_{q+1}c_{k-q} \right);$$

$$P = C^3 : p_1 = (c_1)^3; p_k = \frac{1}{(k-1)c_1} \left(3(k-1)p_1c_k + \sum_{q=1}^{k-2} (4q - k + 1)c_{q+1}p_{k-q} \right)$$

Для проверки l -ой численной производной реализация функции контроля требует расчета всех предыдущих производных функции P и выполняет $80l$ операций умножения.

3. *Функция контроля 3* : $T(F) = \ln(e^F)$.

В этом контроле надо проверять производные $P = \ln(e^F)$ и сравнивать с производными заданной функции F . Численные производные функции контроля вычисляются по численным рекуррентным формулам (табл. П.5, П.7), записанным в других обозначениях:

$$f_k = \frac{1}{k-1} \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-2} (q+1)d_{q+2}f_{k-1-q} \right); h_k = \frac{1}{(k-1)d_1} \left((k-1)d_k - \sum_{q=0}^{k-3} (q+1)h_{q+2} \cdot d_{k-1-q} \right)$$

$$C = e^F : c_1 = e^{f_1}; c_k = \frac{1}{(k-1)} \left(\sum_{q=0}^{k-2} (q+1)f_{q+2}c_{k-1-q} \right);$$

$$P = \ln C : p_1 = \ln(c_1); p_k = \frac{1}{(k-1)c_1} \left((k-1)c_k - \sum_{q=0}^{k-3} (q+1)p_{q+2}c_{k-1-q} \right)$$

Для проверки l -ой численной производной реализация функции контроля требует расчета всех предыдущих производных функции P и выполняет $50l$ операций умножения.

4. *Функция контроля 4* : $T(F) = \arcsin(\sin F)$

В этом контроле надо проверять производные $P = \arcsin(\sin F)$ и сравнивать с производными заданной функции F . Численные производные функции контроля вычисляются по численным рекуррентным формулам (табл. П.8), записанным в других обозначениях:

$$C = \sin F : c_1 = \sin f_1; c_k = \frac{1}{2(k-1)c_2} (2(k-1) \cdot (1-c_1^2)f_2 \cdot f_k - 2f_2^2c_1 \cdot c_{k-1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{k-3} ((i+1)(k-1-i) \cdot (-c_{i+2} \cdot c_{k-i} + f_{i+2} \cdot f_{k-i} \cdot (1-c_1^2)) - f_2^2 \cdot c_{i+1} \cdot c_{k-1-i} - \\
& - (\sum_{q=0}^{k-i-2} c_{q+1} \cdot c_{k-1-i-q}) \cdot (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) f_{q+2} \cdot f_{i+2-q})); \\
P = \arcsin C : p_1 = \arcsin c_1; p_k = \frac{1}{2(k-1)(c_1^2-1) \cdot p_2} & (-2p_2^2 c_1 \cdot c_{k-1} - 2(k-1)c_2 c_k - \\
& - \sum_{i=1}^{k-3} (p_2^2 \cdot c_{i+1} \cdot c_{k-1-i} + (i+1)(k-1-i) \cdot ((c_1^2-1)p_{i+2} \cdot p_{k-i} + c_{i+2} \cdot c_{k-i}) + \\
& + (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) p_{q+2} \cdot p_{i+2-q}) \cdot (\sum_{q=0}^{k-i-2} c_{q+1} \cdot c_{k-1-i-q})))
\end{aligned}$$

Для проверки l – ой численной производной реализация функции контроля требует расчета всех предыдущих производных функции P и выполняет 500 l операций умножения .

Для заданной функции $F = \eta(v(\psi(\varphi(D(x)))))$ расчет численных производных можно представить как преобразование $D \rightarrow F$ и отобразить схемой

$$D \rightarrow F : [d_1, d_2, d_3, \dots, d_n] \xrightarrow[\text{численных рекуррентных формул}]{\text{последовательность}} [f_1, f_2, f_3, \dots, f_l]$$

Функции контроля могут быть сложнее описанных тождественных функций 1, 2, 3, 4 и могут содержать больше контрольных внутренних функций

$$P = \rho(\theta(\omega(v(F)))) .$$

Для расчета численных производных контрольной функции P также используется прием разделения на части

$$G = v(F) ; Q = \omega(G) ; R = \theta(Q) ; P = \rho(R) .$$

Если рассматривать весь процесс расчета численных производных, то функция контроля добавляет к заданной составной функции свои внутренние функции

$$P = \rho(\theta(\omega(v(F)))) = \rho(\theta(\omega(v(\eta(v(\psi(\varphi(D(x)))))))) .$$

Представим процесс расчета как преобразование

$$D \rightarrow F ; F \rightarrow G ; G \rightarrow Q ; Q \rightarrow R ; R \rightarrow P$$

и отобразим схемами:

$$\begin{aligned}
D \rightarrow F : [d_1, d_2, d_3, \dots, d_n] & \xrightarrow[\text{численных рекуррентных формул}]{\text{последовательность}} [f_1, f_2, f_3, \dots, f_l] \\
F \rightarrow G : [f_1, f_2, f_3, \dots, f_l] & \xrightarrow[\text{формула } \Xi_v]{\text{численная рекуррентная}} [g_1, g_2, g_3, \dots, g_l] \\
G \rightarrow Q : [g_1, g_2, g_3, \dots, g_l] & \xrightarrow[\text{формула } \Xi_\omega]{\text{численная рекуррентная}} [q_1, q_2, q_3, \dots, q_l] \\
Q \rightarrow R : [q_1, q_2, q_3, \dots, q_l] & \xrightarrow[\text{формула } \Xi_\theta]{\text{численная рекуррентная}} [r_1, r_2, r_3, \dots, r_l] \\
R \rightarrow P : [r_1, r_2, r_3, \dots, r_l] & \xrightarrow[\text{формула } \Xi_\rho]{\text{численная рекуррентная}} [p_1, p_2, p_3, \dots, p_l]
\end{aligned}$$

Таким образом, контрольные внутренние функции ρ , θ , ω , v участвуют в расчете каждой численной производной функции P , увеличивая трудоемкость процесса и внося новые погрешности за счет дополнительных операций умножения.

Пример 1.14.

Зададим составную функцию

$$F(D(x)) = \frac{\sqrt[5]{\left(\arctg\left(\sqrt[15]{\frac{1}{e^{(\ln(\sin D(x))^2)^2}}}\right)\right)^2}}{A(x)}$$

в которой полиномы при смещении $x_0 = 0$ равны:

$$\begin{aligned} D(x) &= d_1 + d_2x + d_3x^2 + d_4x^3 + d_5x^4 + d_6x^5 + d_7x^6 + d_8x^7 + d_9x^8 + d_{10}x^9 + d_{11}x^{10} = \\ &= 2 + 2x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 - x^{10}; \end{aligned}$$

$$A(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 = 2 + 3x + 4x^2.$$

Нормированные численные производные вычисляются при $x = 0$.

Составная функция числителя внешней дроби содержит 10 внутренних функций, для реализации которых используются численные рекуррентные формулы. Численный процесс представляется как последовательность из 10 этапов преобразований аргументов в результаты. В отличие от аналитического рекуррентного дифференцирования, допускающего отложенный результат, в численном дифференцировании нарушение правильной последовательности приводит к срыву процесса. Запишем правильную последовательность, указывая разбиение составной функции на 10 частей:

$$C = \sin D ; G = C^2 ; H = \ln G ; K = H^2 ; E = e^{-H} ; Q = \sqrt[15]{E} ; R = \arctg Q ;$$

$$S = R^2 ; W = \sqrt[5]{S} ; F = \frac{W}{A}$$

реализация которых требует 6 численных рекуррентных формул. Отметим, что в преобразованиях нет полиномов $D(x)$, $A(x)$, а записи D , A обозначают нормированные численные производные полиномов, значения которые при $x = 0$ равны соответствующим численным коэффициентам этих полиномов.

Нормированные численные производные заданной функции приведены в табл.1.23. Результаты расчета контролируемых производных (контроль 0) и численных производных функций контроля приведены 1,2,3,4 в табл.1.24.

Учитывая результаты всех проверок, устанавливаем, что неверными могут быть только 3 последних значащих цифры. Таким образом, в табл.1.23 все значащие цифры нормированных численных производных верные.

Таблица 1.23

f_1	f_2	f_3	f_4
4,5366902522e-1	-6,8587407160e-1	7,8698039989e-2	1,0703049779
f_5	f_6	f_7	f_8
-2,2389378368	3,3037465134e-1	2,3472636248	-7,5218456055
f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}
2,3159562866e-2	2,1975361613	-2,5884057369e1	-1,0271400851e1
f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
-2,1705807072e1	-1,2815365104e2	-1,1123531784e2	-2,3869884536e2
f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}
-6,7260895774e2	-8,7879560715e2	-1,7734252840e3	-3,8628681788e3
f_{21}	f_{22}		
-6,0351670071e3	-1,1605736194e4	—	—

Таблица 1.24

Контроль	Численные производные	Численные производные
0	f_{23}	f_{24}
	-2,264202664541655e4	-3,796735568053526e4
	f_{25}	
	-7,044402381110494e4	
1	f_{23}	f_{24}
	-2,264202664541649e4	-3,796735568053522e4
	f_{25}	
	-7,044402381110533e4	
2	f_{23}	f_{24}
	-2,264202664541655e4	-3,796735568053526e4
	f_{25}	
	-7,044402381110498e4	
3	f_{23}	f_{24}
	-2,264202664541655e4	-3,796735568053526e4
	f_{25}	
	-7,044402381110494e4	
4	f_{23}	f_{24}
	-2,264202664541674e4	-3,796735568053489e4
	f_{25}	
	-7,044402381110605e4	

Повторим расчет численных производных для другого значения переменной x , для чего выполним смещение переменной $x_0 = -0,1$. Смещение переменной x_0 изменяет численные значения производных через изменения численных коэффициентов полиномов. Запишем коэффициенты смещенных полиномов:

$$D(x + x_0) = 1,8111111109 + 1,76543212x + 1,3774115x^2 - 1,524132x^3 + 1,69305x^4 - \\ -1,87608x^5 + 2,043x^6 - 2,04x^7 + 1,45x^8 - (1,38777879 \cdot 10^{-16})x^9 - x^{10}; \\ A(x + x_0) = 1,74 + 2,2x + 4x^2.$$

Нормированные численные производные заданной функции приведены в табл.1.25.

Таблица 1.25

f_1	f_2	f_3	f_4
5,2174900499e-1	-6,605766254e-1	-3,749526012e-1	1,926145021
f_5	f_6	f_7	f_8
-1,797067157	-2,563635824	6,88879677	-3,676402049
f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}
-1,280078503e1	2,239518766e1	-3,108538944	-5,432350334e1
f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
6,550401505e1	2,293066953e1	-2,061639163e2	1,599287702
f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}
1,957728746e2	-7,295381237e2	2,679374693e2	1,046771030e3
f_{21}			
-2,440203989e3	—	—	—

Результаты расчета контролируемых производных (контроль 0) и численных производных функций контроля приведены в табл.1.26 .

Таблица 1.26

Контроль	Численные производные	Численные производные
0	f_{22}	f_{23}
	-9,451539850881741e1	4,533211506651211e3
	f_{24}	f_{25}
	-7,475249158605274e3	-3,924590524141842e3
1	f_{23}	f_{24}
	4,533211506651213e3	-7,475249158605277e3
	f_{25}	
	-3,924590524141829e3	
2	f_{23}	f_{24}
	4,533211506651211e3	-7,475249158605269e3
	f_{25}	
	-3,924590524141839e3	
3	f_{23}	f_{24}
	4,533211506651202e3	-7,475249158605271e3
	f_{25}	
	-3,924590524141822e3	
4	f_{22}	f_{23}
	-9,451539902435366e1	4,533211508440749e3
	f_{24}	f_{25}
	-7,475249164829928e3	-3,924590502449637e3

Учитывая результаты всех проверок, устанавливаем, что для f_{22} , f_{23} , f_{24} , f_{25} верными являются только 8 – 9 значащих цифр. Но для производных $f_2 - f_{21}$ уже верны 10 значащих цифр и, таким образом, все значащие цифры нормированных численных производных в табл.1.25 верные.

Повторим расчет численных производных для другого значения переменной x , для чего выполним смещение переменной $x_0 = 0,1$. Смещение изменяет численные значения коэффициентов полиномов:

$$D(x + x_0) = 2,20909089 + 2,1735537x + 0,75131395x^2 - 0,683036x^3 + 0,62053x^4 - \\ - 0,56912x^5 + 0,475x^6 - 0,68x^7 - 0,35x^8 - 2x^9 - x^{10};$$

$$A(x + x_0) = 2,34 + 3,8x + 4x^2.$$

Нормированные численные производные заданной функции приведены в табл.1.27

Таблица 1.27

f_1	f_2	f_3	f_4
3,8671990791e-1	-6,4672778074e-1	2,7069319061e-1	2,2821467545e-1
f_5	f_6	f_7	f_8
-1,9885520454	1,0764324779e-1	-3,4220373691	-1,0937355885e1
f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}
-1,5889741488e1	-5,0520143271e1	-1,1756909416e2	-2,5982909641e2
f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
-6,4059940957e2	-1,4658789314e3	-3,3611406107e3	-7,7551310222e3
f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}
-1,7518524081e4	-3,9437897707e4	-8,8137802211e4	-1,9489525110e5
f_{21}	f_{22}		
-4,2799750221e5	-9,3225360531e5	—	—

Результаты расчета контролируемых производных (контроль 0) и численных производных функций контроля приведены в табл.1.28.

Таблица 1.28

Контроль	Численные производные	Численные производные
0	f_{23}	f_{24}
	-2,014832840695014e6	-4,327776569425525e6
	f_{25}	
	-9,249454543383945e6	
1	f_{23}	f_{24}
	-2,014832840695017e6	-4,327776569425514e6
	f_{25}	
	-9,249454543383969e6	
2	f_{23}	f_{24}
	-2,014832840695009e6	-4,327776569425530e6
	f_{25}	
	-9,249454543383939e6	
3	f_{23}	f_{24}
	-2,014832840695014e6	-4,327776569425525e6
	f_{25}	
	-9,249454543383945e6	
4	f_{23}	f_{24}
	-2,014832840695015e6	-4,327776569425528e6
	f_{25}	
	-9,249454543383947e6	

Учитывая результаты всех проверок, устанавливаем, что неверными могут быть только 2 последних значащих цифры. Таким образом, в табл.1.27 все значащие цифры нормированных численных производных верные.

Пример 1.15.

Зададим составную функцию

$$F(D(x)) = \frac{\arctg(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{D(x)})^2})^2}{B(x)}$$

в которой полиномы при смещении $x_0 = 0$ равны:

$$D(x) = d_1 + d_2x + d_3x^2 + d_4x^3 + d_5x^4 + d_6x^5 + d_7x^6 + d_8x^7 + d_9x^8 + d_{10}x^9 + d_{11}x^{10} = \\ = 2 + 2x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 - x^{10};$$

$$B(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2 = 1 + 2x + x^2.$$

Нормированные численные производные вычисляются при $x = 0$.

Составная функция числителя дроби содержит 9 внутренних функций, для реализации которых используются численные рекуррентные формулы. Запишем правильную последовательность, указывая разбиение заданной составной функции на 9 частей:

$$C = \sqrt{D}; G = \ln C; H = G^2; K = \arcsin H; E = \sqrt{K}; Q = \ln E; R = Q^2;$$

$$S = \arctg R; F = \frac{S}{B}$$

реализация которых требует 5 численных рекуррентных формул. Отметим, что в преобразованиях нет полиномов $D(x)$, $B(x)$, а записи D , B обозначают нормированные численные производные полиномов, значения которых при $x = 0$ равны соответствующим численным коэффициентам этих полиномов.

Нормированные численные производные заданной функции приведены в табл.1.29. Результаты расчета контролируемых производных (контроль 0) и численных производных функций контроля приведены в табл.1.30

Функция контроля 4 выполняет много внутренних дополнительных операций умножения, вносящих свои погрешности в расчет, и потому оказывается самой «строгой» проверкой точности. Учитывая результаты всех проверок, устанавливаем, что в численных производных $f_1 - f_{13}$ верны все значащие цифры. Начиная с f_{14} до f_{21} количество верных значащих цифр уменьшается, как показано в табл.1.29, а расчет нормированных численных производных с f_{22} , согласно результатам функции контроля 4, следует признать неудачным.

Повторим расчет численных производных для другого значения переменной x , для чего выполним смещение переменной $x_0 = 0,1$. Смещение изменяет численные значения коэффициентов полиномов:

$$D(x + x_0) = 2,20909089 + 2,1735537x + 0,75131395x^2 - 0,683036x^3 + 0,62053x^4 - \\ - 0,56912x^5 + 0,475x^6 - 0,68x^7 - 0,35x^8 - 2x^9 - x^{10};$$

$$B(x + x_0) = 1,21 + 2,2x + x^2.$$

Нормированные численные производные заданной функции приведены в табл.1.31.

Таблица 1.29

f_1	f_2	f_3	f_4
8,420832638e-1	-3,045023422	5,067611109	-5,002056355
f_5	f_6	f_7	f_8
4,200800484	-6,004667851	7,954621516	-2,004930614
f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}
-8,087598466	3,563005607	9,998096365	1,398038613e1
f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
-6,6100445921e1	2,267159983e1	1,11566106e2	-1,174652e1
f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}
-3,579136e1	1,478443e2	8,21799e2	-2,2829e2
f_{21}			
-2,75128e3	—	—	—

Таблица 1.30

Контроль	Численные производные	Численные производные
0	f_{22}	f_{23}
	1,808411771282540e3	6,327356609306818e3
	f_{24}	f_{25}
	-4,975928325172643e3	-1,650429696889897e4
1	f_{22}	f_{23}
	1,808411771282542e3	6,327356609306802e3
	f_{24}	f_{25}
	-4,975928325172622e3	-1,650429696889896e4
2	f_{22}	f_{23}
	1,808411771282540e3	6,327356609306820e3
	f_{24}	f_{25}
	-4,975928325172639e3	-1,650429696889897e4
3	f_{22}	f_{23}
	1,808411771282845e3	6,327356609306818e3
	f_{24}	f_{25}
	-4,975928325174027e3	-1,650429696889839e4
4	f_{22}	f_{23}
	1,808389532652323e3	6,327486621862237e3
	f_{24}	f_{25}
	-4,976685648122482e3	-1,649989896792364e4

Таблица 1.31

f_1	f_2	f_3	f_4
5,836226876e-1	-2,167304822	3,770297683	-3,774228002
f_5	f_6	f_7	f_8
2,271623793	-2,034025496	4,806334944	-5,981859321
f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}
-7,67040379e-1	1,016449625e1	-3,232008778	-2,037452410e1
f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1,504026076e1	5,012604920e1	-8,185806071e1	-6,088341637e1
f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}
2,3701216618e2	1,16499510e1	-6,30752727e2	3,93725799e2
f_{21}	f_{22}		
1,38909792e3	-1,9553990e3	—	—

Результаты расчета контролируемых производных (контроль 0) и численных производных функций контроля приведены в табл.1.32.

Таблица 1.32

Контроль	Численные производные	Численные производные
0	f_{23}	f_{24}
	-2,409627924949879e3	6,908993853853856713e3
	f_{25}	
	1,658671733629240e3	
1	f_{23}	f_{24}
	-2,409627924949881e3	6,908993853853856711e3
	f_{25}	
	1,658671733629254e3	
2	f_{23}	f_{24}
	-2,409627924949880e3	6,908993853853856712e3
	f_{25}	
	1,658671733629240e3	
3	f_{23}	f_{24}
	-2,409627924949880e3	6,908993853853856712e3
	f_{25}	
	1,658671733629264e3	
4	f_{23}	f_{24}
	-2,409627938117785e3	6,908993901572956e3
	f_{25}	
	1,658671560740270e3	

Как в предыдущем расчете, самой «строгой» проверкой точности является функция контроля 4, и именно она определяет общую оценку. До расчета f_{18} все значащие цифры численных производных оказываются верными. После расчета f_{18} количество верных значащих цифр уменьшается до 9, и только они приведены в табл.1.31.

Повторим расчет численных производных для другого значения переменной x , для чего выполним смещение переменной $x_0 = 0,2$. Смещение изменяет численные значения коэффициентов полиномов:

$$D(x + x_0) = 2,4333331456 + 2,30554624x + 0,578496x^2 - 0,484992x^3 + 0,37824x^4 - 0,47424x^5 - 0,288x^6 - 1,8x^7 - 2,6x^8 - 3x^9 - x^{10};$$

$$B(x + x_0) = 1,44 + 2,4x + x^2.$$

Нормированные численные производные заданной функции приведены в табл.1.33.

Результаты расчета контролируемых производных (контроль 0) и численных производных функций контроля приведены в табл.1.34.

Учитывая результаты всех проверок, устанавливаем, что все значащие цифры, приведенные в табл.1.33, являются верными.

Таблица 1.33

f_1	f_2	f_3	f_4
4,0103198651e-1	-1,51815588702	2,7599524389	-2,9934345292
f_5	f_6	f_7	f_8
1,7723849115	-3,3718948139e-1	1,1159966182	-3,820784867
f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}
4,6978777723	9,2448682166e-1	-9,7046908000	7,6086805264
f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1,32515427870e1	-2,9926689355e1	5,7701388995e-1	7,1160593682e1
f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}
-8,0969084771e1	-7,5451145792e1	2,7210204251e2	-1,2000122508e2
f_{21}	f_{22}		
-5,1692538611e2	8,639438185e2	—	—

Таблица 1.34

Контроль	Численные производные	Численные производные
0	f_{23}	f_{24}
	2,832798602386717e2	-2,407488887836531e3
	f_{25}	
	2,011420321231742e3	
1	f_{23}	f_{24}
	2,832798602386695e2	-2,407488887836529e3
	f_{25}	
	2,011420321231742e3	
2	f_{23}	f_{24}
	2,832798602386716e2	-2,407488887836531e3
	f_{25}	
	2,011420321231743e3	
3	f_{23}	f_{24}
	2,832798602386702e2	-2,407488887836526e3
	f_{25}	
	2,011420321231737e3	
4	f_{23}	f_{24}
	2,832798601816161e2	-2,407488887685178e3
	f_{25}	
	2,011420320829562e3	

Приведенные примеры показывают, что численное рекуррентное дифференциальное исчисление является мощным вычислительным инструментом при расчете производных. Эффективный прием смещения переменной делает неограниченным диапазон расчета производных для вещественных чисел. Информация, накопленная в численных производных, остается верной только на интервале между особыми точками дифференцируемой функции. Изменяя точку расчета численных производных выбором смещения, можно менять интервал расчета. Конечная точность арифметических численных операций ограничивает количество достоверных численных производных, но эта точность уже сейчас позволяет вычислить несколько десятков производных, что нельзя сделать никаким другим методом. С другой стороны, конечная точность расчета, как правило, не дает с помощью

смещения переменной приблизиться к особой точке настолько, чтобы расчет численных производных вышел за допустимые пределы изменения чисел. Конечная точность расчета как бы оберегает численный процесс рекуррентного дифференцирования от нарушений. Нарушения могут возникнуть от недостаточно хорошо продуманных операций с дифференцируемыми функциями, которые имеют ограничения на диапазон изменения переменной. В составной функции, содержащей много внутренних функций, трудно предвидеть численные значения f_1 и f_2 в аргументе следующей внутренней функции, на которые накладываются ограничения. Так, для отрицательных f_1 невозможны вещественные операции $\sqrt{f_1}$, $\ln f_1$, а для $f_1 > 1$ невозможно вычислить f_2 функции арксинуса и т.п. Эти ограничения вызывают нарушения процесса численного рекуррентного дифференцирования, но к процедуре рекуррентного дифференцирования они отношения не имеют и должны быть учтены в конкретных заданиях. Указанные нарушения также следует учитывать в составлении функций контроля, в которых последовательность внутренних контрольных функций не может быть произвольной и должна учитывать особенности математических контрольных функций (например, функция логарифма должна следовать за функцией экспоненты, а функция арксинуса – за функцией синуса и т. д.).

Задача 1. Замена переменной дифференцирования

В численном рекуррентном дифференцировании возможна замена переменной, при которой переменная x выражается через другую переменную y

$$x = \zeta(Dy(y)), \quad (1.36)$$

где

$$Dy(y) = d_{y1} + d_{y2}y + d_{y3}y^2 + d_{y4}y^3 + \dots + d_{yK}y^{K-1}. \quad (1.37)$$

Замена (1.36) переносится в полиномы заданной составной функции $F(D(x))$.

$$\begin{aligned} D(x) &= d_1 + d_2x + d_3x^2 + d_4x^3 + \dots + d_nx^{n-1} = D(\zeta(Dy(y))) = \\ &= d_1 + d_2 \cdot \zeta(Dy(y)) + d_3 \cdot (\zeta(Dy(y)))^2 + d_4 \cdot (\zeta(Dy(y)))^3 + \dots + d_n \cdot (\zeta(Dy(y)))^{n-1} \end{aligned} \quad (1.38)$$

В классическом дифференциальном исчислении [1, 2, 3] функция $D(\zeta(Dy(y)))$ является сложной функцией переменной y , и производные по переменной y надо находить по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dy} &= d_2 \cdot \frac{d\zeta(Dy(y))}{dDy} \cdot \frac{dDy}{dy} + 2d_3 \cdot \zeta(Dy(y)) \cdot \frac{d\zeta(Dy(y))}{dDy} \cdot \frac{dDy}{dy} + \dots \\ &\dots + (n-1)d_n \cdot (\zeta(Dy(y)))^{n-2} \cdot \frac{d\zeta(Dy(y))}{dDy} \cdot \frac{dDy}{dy} = \\ &= \frac{d\zeta(Dy(y))}{dDy} \cdot \frac{dDy}{dy} \cdot (d_2 + 2d_3 \cdot \zeta(Dy(y)) + \dots + (n-1)d_n \cdot (\zeta(Dy(y)))^{n-2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 D}{dy^2} = & \left(\frac{d}{dD_y} \left(\frac{d\zeta(D_y(y))}{dD_y} \right) \cdot \left(\frac{dD_y}{dy} \right)^2 + \frac{d\zeta(D_y(y))}{dD_y} \cdot \frac{d^2 D_y}{dy^2} \right) \times \\ & \times \left(d_2 + 2d_3 \cdot \zeta(D_y(y)) + \dots + (n-1)d_n \cdot (\zeta(D_y(y)))^{n-2} \right) + \left(\frac{d\zeta(D_y(y))}{dD_y} \cdot \frac{dD_y}{dy} \right)^2 \times \\ & \times \left(2d_3 + 6d_4 \cdot \zeta(D_y(y)) + \dots + (n-1)(n-2)d_n \cdot (\zeta(D_y(y)))^{n-3} \right) \end{aligned}$$

Дифференцирование заданной функции $F(D(x)) = F(D(\zeta(D_y(y))))$

$$\frac{dF}{dy} = \frac{dF}{dD} \cdot \frac{dD}{dy} ; \quad \frac{d^2 F}{dy^2} = \frac{d}{dD} \left(\frac{dF}{dD} \right) \cdot \left(\frac{dD}{dy} \right)^2 + \frac{dF}{dD} \cdot \frac{d^2 D}{dy^2}$$

еще больше усложняет расчет.

Кроме того, производные $\frac{dF}{dD}$, $\frac{d\zeta(D_y(y))}{dD_y}$, как уже было отмечено, приводят к непредсказуемому появлению новых функций. В классическом дифференциальном исчислении [1, 2, 3] замена переменной создает неалгоритмический вычислительный процесс, лишенный порядка.

Рассмотрим реализацию вычислительного процесса замены переменной в численном рекуррентном дифференцировании.

Теорема 1.11. Задан полином с численными коэффициентами

$$D(x) = d_1 + d_2 x + d_3 x^2 + d_4 x^3 + \dots + d_n x^{n-1}$$

и выполнена замена переменной $x = \zeta(D_y(y))$, в которой полином

$$D_y(y) = d_{y1} + d_{y2} y + d_{y3} y^2 + d_{y4} y^3 + \dots + d_{yK} y^{K-1}$$

имеет численные коэффициенты, вычисленные при смещении $y_0 = 0$.

Тогда нормированные численные производные полинома $D(\zeta(D_y(y)))$:

$$\begin{aligned} D_1 = D(\zeta(D_y(y)))|_0 ; \quad D_2 = \frac{dD(\zeta(D_y(y)))}{dy} \Big|_0 ; \quad D_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 D(\zeta(D_y(y)))}{dy^2} \Big|_0 ; \\ D_4 = \frac{1}{6} \cdot \frac{d^3 D(\zeta(D_y(y)))}{dy^3} \Big|_0 ; \quad \dots ; \quad D_l = \frac{1}{(l-1)!} \cdot \frac{d^{l-1} D(\zeta(D_y(y)))}{dy^{l-1}} \Big|_0 \end{aligned}$$

вычисляются по формулам:

$$D_1 = d_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_{i+1} (g_i)_1 ; \quad \dots ; \quad D_k = \sum_{i=1}^{n-1} d_{i+1} (g_i)_k , \quad (k = 2, 3, \dots, l) , \quad (1.39)$$

где $(g_m)_k$ – численные нормированные производные функций

$$(g_m)_k = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{d^{k-1} ((\zeta(D_y(y)))^m)}{dy^{k-1}} \Big|_0 , \quad (m = 1, \dots, n-1) . \quad (1.40)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем полином (1.38) в виде

$$D(y) = d_1 + d_2 \cdot \zeta(Dy(y)) + d_3 \cdot (\zeta(Dy(y)))^2 + d_4 \cdot (\zeta(Dy(y)))^3 + \dots$$

$$\dots + d_n \cdot (\zeta(Dy(y)))^{n-1} = d_1 + \sum_{m=1}^{n-1} d_{m+1} \cdot (\zeta(Dy(y)))^m \quad (1.41)$$

и введем полиномиальную функцию $G_m = (\zeta(Dy(y)))^m$, зависящую от полинома $Dy(y)$. При $y = 0$ численные нормированные производные полинома определяются непосредственно:

$$d_{y1} = Dy(y)|_0; \quad d_{y2} = \left. \frac{dDy(y)}{dy} \right|_0; \quad d_{y3} = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 Dy(y)}{dy^2} \right|_0; \quad \dots$$

Предполагаем, что функция G_m имеет численные рекуррентные формулы для $m = 1, 2, \dots, n-1$. Обозначим общую рекуррентную формулу Ξ_m и выполним расчет l численных нормированных производных функции $G_m = (\zeta(Dy(y)))^m$ по численной рекуррентной формуле:

$$(g_m)_1 = (\zeta(Dy(y)))^m;$$

$$(g_m)_2 = \Xi_m(d_{y1}, d_{y2}, (g_m)_1);$$

$$(g_m)_3 = \Xi_m(d_{y1}, d_{y2}, d_{y3}, (g_m)_1, (g_m)_2);$$

$$\vdots$$

$$(g_m)_K = \Xi_m(d_{y1}, d_{y2}, d_{y3}, \dots, d_{yK}, (g_m)_1, (g_m)_2, \dots, (g_m)_{K-1});$$

$$\vdots$$

$$(g_m)_l = \Xi_m(d_{y1}, d_{y2}, d_{y3}, \dots, d_{yK}, (g_m)_1, (g_m)_2, \dots, (g_m)_{l-1})$$

Таким образом, для $m = 1, 2, \dots, n-1$ при $y=0$ получаем численные производные:

$m = 1$	$(g_1)_1, (g_1)_2, (g_1)_3, \dots, (g_1)_l;$
$m = 2$	$(g_2)_1, (g_2)_2, (g_2)_3, \dots, (g_2)_l;$
$m = 3$	$(g_3)_1, (g_3)_2, (g_3)_3, \dots, (g_3)_l;$
$\vdots$	
$m = n-1$	$(g_{n-1})_1, (g_{n-1})_2, (g_{n-1})_3, \dots, (g_{n-1})_l$

Подставляем эти численные производные в формулу (1.41) и находим численные нормированные производные полинома $D(y)$ при $y = 0$:

$$D_1 = d_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_{i+1} (\zeta(Dy(0)))^i = d_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_{i+1} (g_i)_1;$$

$$D_2 = \sum_{i=1}^{n-1} d_{i+1} \left. \frac{d((\zeta(Dy(y)))^i)}{dy} \right|_0 = \sum_{i=1}^{n-1} d_{i+1} (g_i)_2; \quad \dots; \quad D_l = \sum_{i=1}^{n-1} d_{i+1} (g_i)_l$$

что требовалось доказать.

С учетом формул (1.39) задача численного расчета нормированных производных полиномиальной функции $G = \varphi(D(y))$ после замены (1.37) превращается в задачу преобразования аргумента в результат.

$$D \rightarrow G : [D_1, D_2, D_3, \dots, D_l] \xrightarrow[\text{рекуррентная формула } \Xi\varphi]{\text{численная}} [g_1, g_2, g_3, \dots, g_l]$$

Пример 1.16.

Зададим составную функцию

$$F(D(x)) = \frac{\sqrt[5]{\left(\arctg\left(\sqrt[15]{\frac{1}{e^{(\ln(\sin D(x))^2)^2}}}\right)\right)^2}}{A(x)}$$

в которой есть два полинома переменной x . Значения коэффициентов полиномов при смещении $x_0 = 0$ равны:

$$\begin{aligned} D(x) &= d_1 + d_2x + d_3x^2 + d_4x^3 + d_5x^4 + d_6x^5 + d_7x^6 + d_8x^7 + d_9x^8 + d_{10}x^9 + d_{11}x^{10} = \\ &= 2 + 2x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 - x^{10}; \end{aligned}$$

$$A(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 = 2 + 3x + 4x^2.$$

Выполним замену переменной $x = \ln Dy(y)$, в которой задан новый полином $Dy(y) = 2 - 0,1y - 0,5y^2 - y^3 + y^4$ при смещении $y_0 = 0$. Выполненная замена изменяет и усложняет полиномы заданной функции:

$$\begin{aligned} D(x(y)) &= D(y) = d_1 + d_2(\ln Dy(y)) + d_3(\ln Dy(y))^2 + d_4(\ln Dy(y))^3 + d_5(\ln Dy(y))^4 + \\ &\quad + d_6(\ln Dy(y))^5 + d_7(\ln Dy(y))^6 + d_8(\ln Dy(y))^7 + d_9(\ln Dy(y))^8 + \\ &\quad + d_{10}(\ln Dy(y))^9 + d_{11}(\ln Dy(y))^{10} = \\ &= 2 + 2 \cdot \ln(2 - 0,1y - 0,5y^2 - y^3 + y^4) + (\ln(2 - 0,1y - 0,5y^2 - y^3 + y^4))^2 - \\ &\quad - (\ln(2 - 0,1y - 0,5y^2 - y^3 + y^4))^3 + (\ln(2 - 0,1y - 0,5y^2 - y^3 + y^4))^4 - \\ &\quad - (\ln(2 - 0,1y - 0,5y^2 - y^3 + y^4))^5 + (\ln(2 - 0,1y - 0,5y^2 - y^3 + y^4))^6 - \\ &\quad - (\ln(2 - 0,1y - 0,5y^2 - y^3 + y^4))^7 + (\ln(2 - 0,1y - 0,5y^2 - y^3 + y^4))^8 - \\ &\quad - (\ln(2 - 0,1y - 0,5y^2 - y^3 + y^4))^9 - (\ln(2 - 0,1y - 0,5y^2 - y^3 + y^4))^{10}; \end{aligned}$$

$$A(x(y)) = a_1 + a_2(\ln Dy(y)) + a_3(\ln Dy(y))^2 = 2 + 3 \cdot \ln Dy(y) + 4 \cdot (\ln Dy(y))^2.$$

Вычислим производные измененного полинома $D(y)$ при $y = 0$, используя маршрутную рекуррентную формулу $(\ln Dy(y))^m$ (табл.П.10). Результаты расчетов нормированных производных функции $D(y)$ приведены в табл.1.35.

Для проверки точности выполненной замены полинома применена функция контроля 1, и для сравнения приведены три последних вычисленных нормированных производных функции $D(y)$ и функции контроля (табл.1.36). Как показывают результаты (табл.1.36), в расчете замененного полинома $D(y)$ происходит потеря трех последних значащих цифр.

Вычислим производные измененного полинома $A(y)$ при $y = 0$. Результаты расчетов нормированных производных приведены в табл.1.37.

Таблица 1.35

D_1	D_2	D_3	D_4
3,629336505	-1,036310473e-1	-5,294570686e-1	-1,148096776
D_5	D_6	D_7	D_8
5,461028384e-1	-7,768904538e-1	4,666936402e-1	3,073590272
D_9	D_{10}	D_{11}	D_{12}
-1,320382873	-2,776356644	-2,010335331	5,593806663
D_{13}	D_{14}	D_{15}	D_{16}
1,305649177	-2,132299695	-5,1441080722	4,290441983
D_{17}	D_{18}	D_{19}	D_{20}
5,598378301e-1	1,507886138e-1	-2,033811113	1,953521617
D_{21}	D_{22}		
-9,040968536e-1	-4,801028192e-1	—	—

Таблица 1.36

Контроль	Численные производные	Численные производные
0	D_{23}	D_{24}
	7,773803790614542e-1	-1,742079372776917e-1
	D_{25}	
	-9,835947700758416e-2	
1	D_{23}	D_{24}
	7,773803790614561e-1	-1,742079372776957e-1
	D_{25}	
	-9,835947700758115e-2	

Таблица 1.37

A_1	A_2	A_3	A_4
6,001253597	-4,272588722e-1	-2,136975832	-4,279259489
A_5	A_6	A_7	A_8
4,244091319	-3,921109163e-2	5,869065348e-2	2,545493211e-1
A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}
-1,075428140e-2	-1,741821152e-1	-1,733650067e-1	3,131504231e-1
A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}
-3,410542571e-1	-9,519309524e-3	2,489609966e-1	-3,841845634e-1
A_{17}	A_{18}	A_{19}	A_{20}
3,010208179e-1	-2,313257269e-3	-2,628776561e-1	3,439406148e-1
A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}
-2,038694867e-1	-5,619667923e-2	2,500630394e-1	-2,724609518e-1

После указанных замен получаем составную функцию

$$F(D(y)) = \frac{\sqrt[5]{\left(\arctg\left(\sqrt[15]{\frac{1}{e^{(\ln(\sin D(y))^2)^2}}}\right)\right)^2}}{A(y)},$$

в которой численные нормированные производные полиномов найдены. Расчет численных производных заданной функции при $y=0$ приведен в табл.1.38.

Результаты расчета контролируемых производных (контроль 0) и численных производных некоторых функций контроля приведены в табл.1.39.

Таблица 1.38

f_1	f_2	f_3	f_4
1,452249558e-1	7,142400253e-3	3,504264681e-2	6,436362287e-2
f_5	f_6	f_7	f_8
-1,071548382e-1	-9,424013784e-2	-1,659777823e-1	-2,633343100e-1
f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}
-5,733163141e-1	-4,195863946e-1	-8,061249755e-1	-1,838414250
f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
4,658647338e-1	-3,449777019	-4,268158247	-7,401752804e-1
f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}
-1,240621940e1	-5,144781475	-6,711010435	-3,521147941e1
f_{21}	f_{22}		
5,438609452	-4,015038331e1	-	-

Таблица 1.39

Контроль	Численные производные	Численные производные
0	f_{23}	f_{24}
	-7,010090460576353e1	3,902455177619724e1
	f_{25}	
	-1,717389698988456e2	
1	f_{23}	f_{24}
	-7,010090460576355e1	3,902455177619728e1
	f_{25}	
	-1,717389698988455e2	
2	f_{23}	f_{24}
	-7,010090460576353e1	3,902455177619721e1
	f_{25}	
	-1,717389698988456e2	
3	f_{23}	f_{24}
	-7,010090460576355e1	3,902455177619724e1
	f_{25}	
	-1,717389698988456e2	

По результатам функций контроля приходим к выводу, что расчет производных заданной функции вносит меньше погрешностей, чем замена полинома $D(y)$. Учитывая погрешности всех функций контроля, определяем, что все значащие цифры в табл.1.38 верные.

Для изменения точки численного расчета производных необходимо ввести смещение переменной y . Для смещения y_0 выполняется следующая последовательность расчетов:

1. вычисляем смещенный полином $Dy(y + y_0)$;
2. находим производные смещенных полиномов $A(x(y + y_0))$, $D(x(y + y_0))$;
3. определяем численные производные составной функции $F(D(x(y + y_0)))$

В табл.1.40 приведены численные значения некоторых производных в диапазоне изменения смещения y_0 .

Таблица 1.40

y_0	f_1	f_2	f_3
0	1,452249558e-1	7,142400253e-3	3,504264681e-2
0,1	1,463421295e-1	1,559379026e-2	4,665774171e-2
0,2	1,483526446e-1	2,418863730e-2	3,327541572e-2
0,3	1,509288148e-1	2,481658078e-2	-4,429074923e-2
0,3884928	1,523298739e-1	5,382107242e-8	-2,822653349e-1
0,4	1,522900444e-1	-7,144788859e-3	-3,402248580e-1
0,5	1,453840863e-1	-1,730266329e-1	-1,666294402
0,6	9,424724055e-2	-1,172132678	-1,284353084e1
0,643615	5,655184776e-6	-3,634852160e-1	5,635243127e3
0,7	1,198609386e-1	1,222895834	-8,332380187
0,8	1,947414108e-1	4,739989187e-1	-1,638203223
0,9	2,295528970e-1	2,442071021e-1	-9,351067767e-1
1,0	2,743396424e-1	4,491735531e-2	-1,125668550

Пример 1.17.

Продолжим пример 1.16 для составной функции

$$F(D(x)) = \frac{\sqrt[5]{\left(\arctg\left(\sqrt[15]{\frac{1}{e^{(\ln(\sin D(x))^2)^2}}}\right)\right)^2}}{A(x)},$$

в которой полиномы переменной x при смещении $x_0 = 0$ равны:

$$\begin{aligned} D(x) &= d_1 + d_2x + d_3x^2 + d_4x^3 + d_5x^4 + d_6x^5 + d_7x^6 + d_8x^7 + d_9x^8 + d_{10}x^9 + d_{11}x^{10} = \\ &= 2 + 2x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 - x^{10}; \\ A(x) &= a_1 + a_2x + a_3x^2 = 2 + 3x + 4x^2. \end{aligned}$$

Выполним замену переменной $x = \sin Dy(y)$, в которой задан новый полином $Dy(y) = 2 - 0,1y - 0,5y^2 - y^3 + y^4$ при смещении $y_0 = 0$. Выполненная замена изменяет полиномы заданной функции:

$$\begin{aligned} D(x(y)) &= D(y) = d_1 + d_2(\sin Dy(y)) + d_3(\sin Dy(y))^2 + d_4(\sin Dy(y))^3 + \\ &+ d_5(\sin Dy(y))^4 + d_6(\sin Dy(y))^5 + d_7(\sin Dy(y))^6 + d_8(\sin Dy(y))^7 + \\ &+ d_9(\sin Dy(y))^8 + d_{10}(\sin Dy(y))^9 + d_{11}(\sin Dy(y))^{10} = \\ &= 2 + 2(\sin Dy(y)) + (\sin Dy(y))^2 - (\sin Dy(y))^3 + (\sin Dy(y))^4 - (\sin Dy(y))^5 + \\ &+ (\sin Dy(y))^6 - (\sin Dy(y))^7 + (\sin Dy(y))^8 - (\sin Dy(y))^9 - (\sin Dy(y))^{10} \\ A(x(y)) &= a_1 + a_2(\sin Dy(y)) + a_3(\sin Dy(y))^2 = 2 + 3\sin Dy(y) + 4(\sin Dy(y))^2. \end{aligned}$$

Выполняем расчет численных нормированных производных измененного полинома $D(y)$ при $y = 0$ по численной рекуррентной формуле $(\sin Dy(y))^m$ (табл. П.10) и сводим в табл.1.41.

Для проверки точности выполненной замены полинома применена функция контроля **1** и для сравнения приведены три последних вычисленных нормированных производных функции $D(y)$ (контроль **0**) и функции контроля (табл.1.42).

Таблица 1.41

D_1	D_2	D_3	D_4
3,662836530	-1,516330549e-1	-7,949243649e-1	-1,878421440
D_5	D_6	D_7	D_8
-5,420149856e-2	-2,340724102	2,385713963	1,266026725e1
D_9	D_{10}	D_{11}	D_{12}
1,149196725	-2,130499765	-6,942808754	-5,660034335
D_{13}	D_{14}	D_{15}	D_{16}
-3,828016138e1	1,237400652e1	4,942065070e1	-2,155995852e1
D_{17}	D_{18}	D_{19}	D_{20}
5,404578746e1	2,229918552e1	-7,239663153e1	-1,168230459e2
D_{21}	D_{22}		
7,615782264e1	2,768309632e1	—	—

Таблица 1.42

Контроль	Численные производные	Численные производные
0	D_{23}	D_{24}
	-1,263614365547982e2	3,460996709804674e2
	D_{25}	
	-1,360575469502445e1	
1	D_{23}	D_{24}
	-1,263614365547983e2	3,460996709804675e2
	D_{25}	
	-1,360575469502449e1	

Как показывают результаты табл.1.41, в расчете замененного полинома $D(y)$ происходит незначительная потеря значащих цифр.

Вычислим производные измененного полинома $A(y)$ при $y = 0$. Результаты расчетов нормированных производных приведены в табл.1.43.

Таблица 1.43

A_1	A_2	A_3	A_4
8,035179522	4,275650490e-1	2,098040039	3,875572215
A_5	A_6	A_7	A_8
-6,099279453	-3,414594392	-8,60532354e-1	6,393049507
A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}
-3,946265979	4,498005751	-3,731737357	-8,010079245
A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}
4,055585117e-2	9,035516366e-1	2,715354988	-3,591673319
A_{17}	A_{18}	A_{19}	A_{20}
3,628037998	3,323092498e-1	-3,714985501	1,576051020
A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}
3,214195609e-1	3,070511360e-1	-1,094659875	1,785242033

После указанных замен заданная составная функция принимает вид

$$F(D(y)) = \frac{\sqrt[5]{\left(\arctg\left(\sqrt[15]{\frac{1}{e^{(\ln(\sin D(y))^2)^2}}}\right)\right)^2}}{A(y)},$$

в которой найдены численные нормированные производные полиномов. Расчет численных производных заданной функции при $y = 0$ приведен в табл.1.44.

Таблица 1.44

f_1	f_2	f_3	f_4
1,091743890e-1	-8,759331100e-3	-4,62280818e-2	-9,657305455e-2
f_5	f_6	f_7	f_8
3,940065769e-2	-1,446232257e-1	-3,317170686e-1	-6,542426492e-1
f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}
-1,248917529	-1,342210630	-2,767490953	-5,970764258
f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
-5,608967394	-1,545096721e1	-2,291379178e1	-2,598275675e1
f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}
-6,773922773e1	-7,152818263e1	-1,109873256e2	-2,190875125e2
f_{21}	f_{22}		
-1,365599631e2	-3,232903830e2	—	—

Результаты расчета численных производных заданной функции (контроль 0) и некоторых функций контроля приведены в табл.1.45

Таблица 1.45

Контроль	Численные производные	Численные производные
0	f_{23}	f_{24}
	-3,929834619338519e2	4,250394211842774e1
	f_{25}	
	-4,957020584748968e2	
1	f_{23}	f_{24}
	-3,929834619338503e2	4,250394211842639e1
	f_{25}	
	-4,957020584748945e2	
2	f_{23}	f_{24}
	-3,929834619338523e2	4,250394211842766e1
	f_{25}	
	-4,957020584748988e2	
3	f_{23}	f_{24}
	-3,929834619338519e2	4,250394211842772e1
	f_{25}	
	-4,957020584748967e2	

По результатам функций контроля, приходим к выводу, что в этом примере расчет производных заданной функции вносит больше погрешностей, чем замена полинома $D(y)$. Учитывая погрешности всех функций контроля, определяем, что все значащие цифры в табл.1.44 верные.

Для изменения точки численного расчета производных необходимо ввести смещение переменной y . В табл.1.46 приведены численные значения некоторых производных в диапазоне изменения смещения y_0 .

Таблица 1.46

y_0	f_1	f_2	f_3
0	0,1091743890	-8,759331100e-3	-4,462280818e-2
-0,1	0,1097057938	-2,946556590e-3	-1,221379599e-2
-0,1320303	0,1097917352	-2,550099354e-3	-9,306752416e-9
-0,15	0,1098383355	-2,680064345e-3	7,284188864e-3
-0,2	0,1100082864	-4,482264874e-3	2,913620511e-2
-0,3	0,1109070973	-1,514240822e-2	7,855185220e-2
-0,4	0,1133907196	-3,649748983e-2	1,381979116e-1
-0,987655465	0,6315786966	7,338380390e-8	-5,243759173e1
-1,0	0,6236664842	1,265848614	-4,856094271e1
-1,5	0,4795854325	-1,293622924e1	-1,444688170e1

Задача 2. Чувствительность численных производных

Численные производные полиномиальной функции $F(D(x))$ зависят от полинома

$$D(x) = d_1 + d_2x + d_3x^2 + d_4x^3 + \dots + d_nx^{n-1}.$$

Определение. Коэффициент d_1 , изменение которого существенно влияет на значения производных, назовем *начальным коэффициентом*.

Покажем, что приращение начального коэффициента $d_1 + \Delta d_1$ изменяет все численные производные функции $F(D(x))$. Предположим, расчет численных производных проводится по рекуррентной формуле Ξ . Тогда получаем:

$$\begin{aligned} f_1 + \Delta f_1 &= F(d_1 + \Delta d_1); \\ f_2 + \Delta f_2 &= \Xi(d_1 + \Delta d_1, d_2, f_1 + \Delta f_1); \\ f_3 + \Delta f_3 &= \Xi(d_1 + \Delta d_1, d_2, d_3, f_1 + \Delta f_1, f_2 + \Delta f_2); \\ &\vdots \end{aligned}$$

Преобразуем найденные выражения.

$$f_1 + \Delta f_1 = F(d_1 + \Delta d_1);$$

$$\frac{\Delta f_1}{\Delta d_1} = \frac{F(d_1 + \Delta d_1) - f_1}{\Delta d_1} = \frac{F(d_1 + \Delta d_1) - F(d_1)}{\Delta d_1};$$

$$f_2 + \Delta f_2 = \Xi(d_1 + \Delta d_1, d_2, f_1 + \Delta f_1);$$

$$\frac{\Delta f_2}{\Delta d_1} = \frac{\Xi(d_1 + \Delta d_1, d_2, f_1 + \Delta f_1) - f_2}{\Delta d_1} = \frac{\Xi(d_1 + \Delta d_1, d_2, f_1 + \Delta f_1) - \Xi(d_1, d_2, f_1)}{\Delta d_1};$$

$$f_3 + \Delta f_3 = \Xi(d_1 + \Delta d_1, d_2, d_3, f_1 + \Delta f_1, f_2 + \Delta f_2);$$

$$\frac{\Delta f_3}{\Delta d_1} = \frac{\Xi(d_1 + \Delta d_1, d_2, d_3, f_1 + \Delta f_1, f_2 + \Delta f_2) - f_3}{\Delta d_1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Xi(d_1 + \Delta d_1, d_2, d_3, f_1 + \Delta f_1, f_2 + \Delta f_2) - \Xi(d_1, d_2, d_3, f_1, f_2)}{\Delta d_1}; \\
&\vdots \\
&f_k + \Delta f_k = \Xi(d_1 + \Delta d_1, d_2, \dots, d_k, f_1 + \Delta f_1, f_2 + \Delta f_2, \dots, f_{k-1} + \Delta f_{k-1}); \\
&\frac{\Delta f_k}{\Delta d_1} = \frac{\Xi(d_1 + \Delta d_1, d_2, \dots, d_k, f_1 + \Delta f_1, f_2 + \Delta f_2, \dots, f_{k-1} + \Delta f_{k-1}) - f_k}{\Delta d_1} = (1.42) \\
&= \frac{1}{\Delta d_1} (\Xi(d_1 + \Delta d_1, d_2, \dots, d_k, f_1 + \Delta f_1, f_2 + \Delta f_2, \dots, f_{k-1} + \Delta f_{k-1}) - \\
&\quad - \Xi(d_1, d_2, \dots, d_k, f_1, f_2, \dots, f_{k-1}))
\end{aligned}$$

Полученные формулы (1.42) являются *интерполяционно-рекуррентными формулами* для расчета чувствительностей численных производных к начальному коэффициенту. Эти формулы более эффективны, чем классические интерполяционные формулы [15,16,20], т. к. имеют простейшую дискретную шкалу значений d_1 , которая не расширяется с увеличением порядка производных. Но, главное, формулы не ограничивают порядок вычисляемых производной $\frac{\Delta f_k}{\Delta d_1}$. Однако этим формулам присущи все

недостатки методов интерполирования:

- 1) произвольный выбор приращения Δd_1 , не связанный с расположением особых точек функции;
- 2) удвоенное (для каждой производной) обращение к рекуррентным формулам.

Для устранения этих недостатков решим поставленную задачу чувствительности с использованием только рекуррентных формул без интерполяции.

Теорема 1.12. Задана составная функция $F(A(x), D(x))$, в которой полином

$$A(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots + a_v x^{v-1}$$

имеет коэффициенты, вычисленные при смещении $x_0 = 0$. Тогда задача расчета чувствительностей заданной функции к изменению начального коэффициента d_1 при $x=0$ эквивалентна задаче расчета численных нормированных производных функции $F(y) = F(a_1, d_1 + d_2 y)$ для $d_2 = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для $x = 0$ полиномы заданной функции получают значения $A(0) = a_1$; $D(0) = d_1$, и заданная функция равна $F(a_1, d_1)$. В полиноме D изменяется численный коэффициент d_1 , который получает малое приращение Δd_1 , что можно представить введением новой переменной y , обозначающей малое приращение коэффициента

$$D(y) = d_1 + \Delta d_1 = d_1 + d_2 y = (d_1 + y)|_{d_2=1}.$$

Тогда расчет чувствительностей функции к изменению коэффициента d_1 при $x = 0$ сводится к расчету численных нормированных производных заданной функции по переменной y при $y = 0$

$$F_2 = \left. \frac{dF(a_1, d_1 + d_2 y)}{dy} \right|_0; F_3 = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 F(a_1, d_1 + d_2 y)}{dy^2} \right|_0; F_4 = \left. \frac{1}{6} \frac{d^3 F(a_1, d_1 + d_2 y)}{dy^3} \right|_0; \dots$$

Предположим, что заданная функция имеет численную рекуррентную формулу Ξ . Тогда расчет численных производных можно выполнить непосредственно по рекуррентной формуле:

$$\begin{aligned} F_1 &= F(a_1, d_1); \\ F_2 &= \Xi(a_1, d_1, d_2, F_1); \\ F_3 &= \Xi(a_1, d_1, d_2, F_1, F_2); \\ &\vdots \\ F_k &= \Xi(a_1, d_1, d_2, F_1, F_2, \dots, F_{k-1}), \end{aligned} \quad (1.43)$$

что требовалось доказать.

Пример 1.18.

Зададим функцию

$$F(A(x), D(x)) = \ln\left(\frac{D(x)}{A(x)}\right) - \arctg(A(x) \cdot D(x)),$$

полиномы которой содержат коэффициенты, вычисленные при смещении $x_0 = 0$:

$$D(x) = d_1 + d_{x2}x + d_{x3}x^2 + d_{x4}x^3 + \dots = 9 + d_{x2}x + d_{x3}x^2 + d_{x4}x^3 + \dots;$$

$$A(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \dots = 2 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \dots$$

В расчете чувствительностей функции к начальному коэффициенту при $x = 0$ используются только два заданных коэффициента: $d_1 = 9$ и $a_1 = 2$. Введем новую переменную y и изменим заданную функцию

$$F(y) = \ln\left(\frac{d_1 + d_2 y}{a_1}\right) - \arctg(a_1 \cdot (d_1 + d_2 y)); \quad (d_2 = 1).$$

Для расчета численных производных этой функции необходимы две численных рекуррентных формулы (табл. П.7, П.8). Результаты расчета чувствительностей для $y = 0$ приведены в табл.1.47.

Таблица 1.47

F_1	F_2	F_3	F_4
-1,122042477e-2	1,049572649e-1	-5,491182701e-3	3,818184526e-4
F_5	F_6	F_7	F_8
-2,976595380e-5	2,466282062e-6	-2,120451066e-7	-1,867556923e-8
F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
-1,671782655e-9	1,513203576e-10	-1,379856737e-11	1,264140416e-12

Теорема 1.13. Задана составная функция $F(A(x), D(x))$, в которой полиномы

$$D(x) = d_1 + d_{x2}x + d_{x3}x^2 + d_{x4}x^3 + \dots + d_{xn}x^{n-1};$$

$$A(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \dots + a_vx^{v-1}$$

имеют коэффициенты, вычисленные при смещении $x_0 = 0$. Изменим точку расчета коэффициентов $A(x)$, $D(x)$, вводя новое смещение полинома $x_0 \neq 0$. Тогда задача расчета чувствительностей к изменению начального коэффициента d_1 для $d_2 = 1$ эквивалентна задаче расчета численных нормированных производных преобразованной функции

$$F(y) = F(a_1 + a_2x_0 + a_3x_0^2 + \dots + a_vx_0^{v-1}, d_1 + d_2y + d_{x2}x_0 + d_{x3}x_0^2 + \dots + d_{xn}x_0^{n-1})$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Смещение x_0 изменяет значения коэффициентов полиномов $A(x)$, $D(x)$:

$$A(x + x_0) = a_1 + a_2(x + x_0) + a_3(x + x_0)^2 + a_4(x + x_0)^3 + \dots + a_v(x + x_0)^{v-1};$$

$$D(x + x_0) = d_1 + d_{x2}(x + x_0) + d_{x3}(x + x_0)^2 + d_{x4}(x + x_0)^3 + \dots + d_{xn}(x + x_0)^{n-1}$$

Для $x = 0$ получаем новые значения полиномов:

$$A(0) = A_1 = a_1 + a_2x_0 + a_3x_0^2 + a_4x_0^3 + \dots + a_vx_0^{v-1};$$

$$D(0) = D_1 = d_1 + d_{x2}x_0 + d_{x3}x_0^2 + \dots + d_{xn}x_0^{n-1}.$$

Тогда начальный коэффициент d_1 получает приращение

$$\delta d_1 = d_{x2}x_0 + d_{x3}x_0^2 + \dots + d_{xn}x_0^{n-1}$$

и заданная функция для $x = 0$ равна $F(A_1, d_1 + \delta d_1)$. В полиноме D по-прежнему изменяется численный коэффициент d_1 , который получает малое приращение Δd_1 , что можно представить введением новой переменной y , обозначающей малое приращение коэффициента

$$D(y) = d_1 + \delta d_1 + \Delta d_1 = d_1 + \delta d_1 + d_2y = (d_1 + \delta d_1 + y)|_{d_2=1}$$

Тогда расчет чувствительностей функции к изменению коэффициента d_1 при $x = 0$ сводится к расчету численных нормированных производных заданной функции по переменной y при $y = 0$

$$F_2 = \left. \frac{dF(A_1, d_1 + \delta d_1 + d_2y)}{dy} \right|_0; F_3 = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 F(A_1, d_1 + \delta d_1 + d_2y)}{dy^2} \right|_0; \dots$$

Предположим, что заданная функция имеет численную рекуррентную формулу Ξ . Тогда расчет численных производных можно выполнить непосредственно по рекуррентной формуле ($d_2 = 1$):

$$F_1 = F(A_1, d_1 + \delta d_1);$$

$$F_2 = \Xi(A_1, d_1 + \delta d_1, d_2, F_1);$$

$$F_3 = \Xi(A_1, d_1 + \delta d_1, d_2, F_1, F_2);$$

$\vdots$

$$F_k = \Xi(A_1, d_1 + \delta d_1, d_2, F_1, F_2, \dots, F_{k-1})$$

что требовалось доказать.

Смещение x_0 изменяет на величину δd_1 численный уровень, на котором коэффициент d_1 получает малое приращение Δd_1 , что, в свою очередь, изменяет чувствительность функции к коэффициенту d_1 .

Пример 1.19.

Зададим функцию

$$F(A(x), B(x), D(x)) = \frac{5 \left(\operatorname{arctg} \left(\sqrt[15]{\frac{1}{e^{(\ln(\sin D(x))^2)^2}}} \right) \right)^2}{A(x)} - \frac{\operatorname{arctg} \left(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{D(x)})^2} \right)^2}{B(x)}$$

полиномы которой содержат коэффициенты, вычисленные при смещении $x_0 = 0$:

$$A(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 = 2 + 3x + 4x^2; \quad B(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 = 1 + 2x + x^2;$$

$$D(x) = d_1 + d_{x2}x + d_{x3}x^2 + d_{x4}x^3 + d_{x5}x^4 + d_{x6}x^5 + d_{x7}x^6 + d_{x8}x^7 + d_{x9}x^8 + d_{x10}x^9 + d_{x11}x^{10} = 2 + 2x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 - x^{10}$$

В расчете чувствительностей функции к начальному коэффициенту при $x = 0$ используются только коэффициенты: $d_1 = 2$; $a_1 = 2$; $b_1 = 1$; $d_2 = 1$. Вводим новую переменную y и изменяем заданную функцию

$$F(y) = \frac{5 \left(\operatorname{arctg} \left(\sqrt[15]{\frac{1}{e^{(\ln(\sin(d_1 + d_2 y))^2)}}} \right) \right)^2}{a_1} - \frac{\operatorname{arctg} \left(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{d_1 + d_2 y})^2} \right)^2}{b_1}$$

Результаты расчета чувствительностей для $y = 0$ приведены в табл.1.48.

Таблица 1.48

F_1	F_2	F_3	F_4
-3,884142386e-1	6,774318053e-1	-1,350414315e-1	-1,317037950e-1
F_5	F_6	F_7	F_8
4,732461323e-2	1,127866497e-2	-4,665489952e-2	-6,489480650e-3
F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
4,055403461e-3	-9,807346502e-3	-1,216493391e-2	5,228633472e-4
F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
-3,740292147e-3	-4,388225488e-3	-3,369226005e-3	-5,340214456e-5
F_{17}	F_{18}	F_{19}	F_{20}
-2,886137857e-3	-1,020710364e-3	-1,363879188e-3	-8,022555487e-5
F_{21}	F_{22}	F_{23}	F_{24}
1,474778878e-3	7,271834409e-5	-7,993565233e-4	1,451787543e-4

Введем смещение полиномов $x_0 = 0,1$, которое изменяет численные значения коэффициентов полиномов:

$$A(x) = 2,34 + 3,8x + 4x^2; \quad B(x) = 1,21 + 2,2x + x^2;$$

$$D(x) = 2,2090909089 + 2,1735537x + 0,75131395x^2 - 0,683036x^3 + 0,62053x^4 - 0,56912x^5 + 0,475x^6 - 0,68x^7 - 0,35x^8 - 2x^9 - x^{10}.$$

Таким образом, получаем значения $A_1 = 2,34$, $B_1 = 1,21$, $\delta d_1 = 0,2090909089$; $d_2 = 1$
Вводим новую переменную y и изменяем заданную функцию

$$F(y) = \frac{\sqrt[5]{\left(\arctg\left(\sqrt[15]{\frac{1}{e^{(\ln(\sin(d_1 + \delta d_1 + d_2 y))^2)}}}\right)\right)^2}}{A_1} - \frac{\arctg\left(\ln\sqrt{\arcsin(\ln\sqrt{d_1 + \delta d_1 + d_2 y})^2}\right)^2}{B_1}$$

Результаты расчета чувствительностей для $y = 0$ приведены в табл.1.49.

Таблица 1.49

F_1	F_2	F_3	F_4
$-1,969027797e-1$	$5,003104225e-1$	$-1,707023691e-1$	$-8,064997734e-2$
F_5	F_6	F_7	F_8
$2,048772759e-2$	$-4,647594602e-2$	$-5,411062068e-2$	$-2,622118634e-2$
F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
$-3,793185343e-2$	$-4,337963409e-2$	$-3,620805644e-2$	$-3,616198517e-2$
F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
$-3,823152939e-2$	$-3,509084285e-2$	$-3,340624919e-2$	$-3,262102899e-2$
F_{17}	F_{18}	F_{19}	F_{20}
$-3,051035332e-2$	$-2,814417594e-2$	$-2,637927624e-2$	$-2,415574054e-2$
F_{21}	F_{22}	F_{23}	F_{24}
$-2,185747836e-2$	$-1,976255075e-2$	$-1,773685266e-1$	$-1,573262296e-2$

Задача 3. Численный расчет корней уравнений

Рассмотрим задачу расчета корней уравнения, в которой необходимо определить значения переменной x , удовлетворяющих уравнению

$$F(D(x)) = 0 , \quad (1.44)$$

Для реализации эффективных методов необходимы численные производные составной функции в выбранной точке расчета x_0 (текущее значение корня)

$$\frac{dF(D(x))}{dx} \Big|_{x=x_0} ; \frac{1}{2} \frac{d^2 F(D(x))}{dx^2} \Big|_{x=x_0} ; \dots \quad (1.45)$$

Лемма 1.18. Задача расчета численных производных (1.45) эквивалентна задаче расчета чувствительностей .

Доказательство. В выбранной точке расчета x_0 (текущее значение корня) функция уравнения (1.44) равна $F(D(x_0))$ или в других обозначениях $F(D(d_1))$. Тогда для расчета численных производных (1.45) коэффициенту полинома d_1 необходимо задать малое приращение Δd_1 , что можно представить прежним способом через введение новой переменной y , обозначающей малое приращение коэффициента

$$D(y) = d_1 + \Delta d_1 = d_1 + d_2 y = (d_1 + y) \Big|_{d_2=1} .$$

Это преобразует функцию уравнения (1.44) в функцию новой переменной $F(y) = F(d_1 + d_2 y)$ ($d_2 = 1$), нормированные производные которой при $y = 0$ вычисляются по рекуррентным формулам, что требовалось доказать.

Пример 1.20.

Зададим уравнение

$$F(D(x)) \equiv \ln\left(\frac{D(x)}{a_1}\right) - \operatorname{arctg}(a_1 \cdot D(x)) = 0, \quad (a_1 = 2)$$

и вычислим производные функции для $x_0 = 9$ (начальное значение корня). Для этого преобразуем функцию уравнения в функцию одной переменной

$$F(y) = \ln\left(\frac{d_1 + d_2 y}{a_1}\right) - \operatorname{arctg}(a_1 \cdot (d_1 + d_2 y)) ; \quad (d_2 = 1).$$

Нормированные численные производные этой функции при $y = 0$ и $d_1 = x_0 = 9$ приведены в табл.1.47.

Зададим уравнение

$$F(A(x), D(x)) = 0, \quad (1.46)$$

в котором коэффициенты полинома

$$A(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots + a_v x^{v-1}$$

вычислены при смещении $x_0 = 0$. Тогда для расчета производных функции уравнения (1.46) в точке x_0 (для текущего значения корня x_0) уравнение необходимо преобразовать

$$F(a_1, D(x)) = 0 \quad (1.47)$$

В задаче расчета корней есть только одна переменная x , значение которой надо выбрать так, чтобы удовлетворить уравнению (1.44). Поэтому $A(x)$, $D(x)$ являются полиномами от этой единственной переменной. Но в отличие от задачи чувствительностей, в этой задаче смещение x_0 может изменять только полином $A(x)$, но не должно изменять полином $D(x)$. Это объясняется особенностью задачи расчета корня уравнения, в которой полином $D(x)$ отражает текущее значение корня и его приращение. В задаче чувствительностей значение коэффициента d_1 задано, а в задаче расчета корня, напротив, значение d_1 как текущее значение корня должно быть выбрано так, чтобы отследить изменения в смещенном полиноме $A(x)$. В дальнейшем изложении при решении сложных примеров с многими смещенными полиномами $A(x + x_0)$, $B(x + x_0)$, $C(x + x_0)$ для упрощения будет изменено обозначение переменной в смещенных полиномах, но суть задачи останется неизменной.

Лемма 1.19. Зададим уравнение

$$F(A(x), D(x)) = 0,$$

в котором коэффициенты полинома

$$A(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots + a_v x^{v-1}$$

вычислены при смещении $x_0 = 0$. Изменим точку расчета коэффициентов

$A(x)$, вводя смещение полинома x_0 . Тогда задача расчета чувствительностей эквивалентна задаче расчета численных производных в точке $x = 0$ преобразованного уравнения

$$F(a_1 + a_2x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 + \dots + a_vx_0^{v-1}, D(x)) = 0$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Смещение x_0 изменяет значения коэффициентов полинома $A(x)$

$$A(x + x_0) = a_1 + a_2(x + x_0) + a_3(x + x_0)^2 + a_4(x + x_0)^3 + \dots + a_v(x + x_0)^{v-1}.$$

Коэффициент полинома при $x = 0$ получает новое значение

$$A_1 = a_1 + a_2x_0 + a_3x_0^2 + a_4x_0^3 + \dots + a_vx_0^{v-1} \quad (1.48)$$

и задает в уравнении (1.47) новые исходные данные для расчета корня. Повторяя доказательство леммы 1.18, вводим новую переменную y , преобразующую функцию уравнения

$$F(y) = F(A_1, d_1 + d_2y), \quad (d_2 = 1).$$

Используя рекуррентную формулу Ξ , находим в точке x_0 численные нормированные производные функции со смещенным полиномом $A(x + x_0)$:

$$F_1 = F(A_1, d_1);$$

$$F_2 = \Xi(A_1, d_1, d_2, F_1);$$

$$F_3 = \Xi(A_1, d_1, d_2, F_1, F_2);$$

$\vdots$

$$F_k = \Xi(A_1, d_1, d_2, F_1, F_2, \dots, F_{k-1}),$$

что требовалось доказать.

Пример 1.21.

Зададим уравнение

$$F(A(x), B(x), D(x)) \equiv$$

$$\equiv \frac{\sqrt[5]{\left(\arctg\left(\sqrt[15]{\frac{1}{e^{(\ln(\sin D(x))^2)^2}}}\right)\right)^2}}{A(x)} - \frac{\arctg\left(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{D(x)})^2}\right)^2}{B(x)} = 0$$

полиномы которого содержат коэффициенты, вычисленные при смещении $x_0 = 0$:

$$A(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 = 2 + 3x + 4x^2; \quad B(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2 = 1 + 2x + x^2.$$

Введем смещение полиномов $x_0 = -1,5$, изменяющее значения коэффициентов при $x = 0$:

$$A_1 = a_1 + a_2x_0 + a_2x_0^2 = 6,5; \quad B_1 = b_1 + b_2x_0 + b_2x_0^2 = 0,25; \quad d_1 = 2.$$

Введем новую переменную y и изменим функцию уравнения

$$F(y) = \frac{\sqrt[5]{\left(\arctg\left(\sqrt[15]{\frac{1}{e^{(\ln(\sin(d_1+d_2y))^2)}}}\right)\right)^2}}{A_1} - \frac{\arctg\left(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{d_1 + d_2y})^2}\right)^2}{B_1}$$

Результаты расчета численных производных для $y = 0$ ($d_2 = 1$; $d_1 = 2$ из примера 1.19) приведены в табл.1.50.

Таблица 1.50

F_1	F_2	F_3	F_4
-3,228742586	2,720887553	-5,031598029e-1	-4,594340715e-1
F_5	F_6	F_7	F_8
2,549474304e-1	9,249140428e-2	-1,439341204e-1	8,967093388e-3
F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
4,622705165e-2	-1,440969653e-2	-2,787598108e-2	1,921247019e-2
F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
-8,428017492e-4	-6,020948833e-3	-4,089599109e-3	7,372842389e-3
F_{17}	F_{18}	F_{19}	F_{20}
-5,444622942e-3	7,897843018e-4	-1,586012705e-3	-2,732107910e-3
F_{21}	F_{22}	F_{23}	F_{24}
-3,505480948e-3	2,155149107e-3	-1,755004699e-3	1,689245238e-3

**Задача 4. Численные методы высокого порядка
для расчета корней уравнений и экстремумов функций**

Эффективные численные методы расчета корней уравнения

$$F(A(z), B(z), D(x)) = 0,$$

где z – численный параметр, используют численные производные по переменной x , и их применение ограничено точностью расчета этих производных. Чем выше порядок метода, тем выше требования к точности производных. По этой причине в практике численного расчета корней не используются методы высокого порядка. Расчет численных производных на основе рекуррентного дифференцирования снимает проблему точности расчета производных и оставляет только проблему сходимости методов.

Вычислим в точке x_0 (начальное значение корня) нормированные производные функции:

$$F_1 = F(x_0); F_2 = \frac{dF(x_0)}{dx}; F_3 = \frac{1}{2} \frac{d^2 F(x_0)}{dx^2}; F_4 = \frac{1}{6} \frac{d^3 F(x_0)}{dx^3}; F_5 = \frac{1}{24} \frac{d^4 F(x_0)}{dx^4}$$

Численный расчет корней уравнения можно выполнить методами различного порядка, которым соответствуют конечные степенные ряды.

1. Метод первого порядка (метод Ньютона): $F_1 + F_2 \cdot u = 0$. (1.49a)

2. Метод второго порядка: $F_1 + F_2 \cdot u + F_3 \cdot u^2 = 0$. (1.49б)

3. Метод третьего порядка: $F_1 + F_2 \cdot u + F_3 \cdot u^2 + F_4 \cdot u^3 = 0$. (1.49в)

4. Метод четвертого порядка: $F_1 + F_2 \cdot u + F_3 \cdot u^2 + F_4 \cdot u^3 + F_5 \cdot u^4 = 0$, (1.49г)

где $u = x - x_0$. Записанные уравнения являются алгебраическими уравнениями относительно неизвестного u и могут быть разрешимы алгебраическими методами. Найденное вещественное решение $\bar{u} = \bar{x} - x_0$ определяет следующее текущее значение корня $\bar{x} = \bar{u} + x_0$. В случае

нескольких текущих вещественных значений $\overline{u1}, \overline{u2}, \overline{u3}, \overline{u4}$ можно выбрать одно $\overline{x} = \min |\overline{u_k} - x_0|$, ($k = 1, 2, 3, 4$). При отсутствии сходимости к вещественному корню целесообразно применить метод другого порядка из предложенного списка 1, 2, 3, 4.

Обратим внимание, что в этом разделе не ставилась задача построения строгого вычислительного алгоритма, а только проверялась возможность применения методов высших порядков, освобожденных от неточностей в расчете численных производных. Кроме того, численные результаты примеров будут использованы в примерах последующих глав.

Приведенные методы различного порядка можно применить для решения задачи поиска экстремумов функций.

1. Метод первого порядка: $F_2 + 2F_3 \cdot u = 0$. (1.50a)

2. Метод второго порядка: $F_2 + 2F_3 \cdot u + 3F_4 \cdot u^2 = 0$. (1.50б)

3. Метод третьего порядка: $F_2 + 2F_3 \cdot u + 3F_4 \cdot u^2 + 4F_5 \cdot u^3 = 0$. (1.50в)

4. Метод четвертого порядка:

$$F_2 + 2F_3 \cdot u + 3F_4 \cdot u^2 + 4F_5 \cdot u^3 + 5F_6 \cdot u^4 = 0. \quad (1.50г)$$

Пример 1.22.

Зададим уравнение

$$F \equiv \frac{\arctg(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{D(x)})^2})^2}{B(z)} - 4 \sqrt[4]{\frac{e^{\arctg(C(z))}}{A(z)}} = 0$$

полиномы которого содержат коэффициенты при смещении $z_0 = 0$:

$$A(z) = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + a_4 z^3 = 1 + 3z - 3z^2 + z^3; \quad B(z) = b_1 + b_2 z + b_3 z^2 = 1 + 2z + z^2; \\ C(z) = c_1 + c_2 z + c_3 z^2 = 0,5 + 2z + z^2. \quad (1.51)$$

Дополнительная переменная z введена в полиномы, чтобы изменять с помощью смещения этой переменной z_0 численные значения коэффициентов полиномов и условия сходимости методов для их более полной проверки.

Для расчета корней уравнения преобразуем заданную функцию

$$F(y) \equiv \frac{\arctg(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{d_1 + d_2 y})^2})^2}{B_1} - 4 \sqrt[4]{\frac{e^{\arctg(C_1)}}{A_1}} = 0 \quad (1.52)$$

в которой для смещения полиномов $z_0 = 0$ коэффициенты равны:

$$A_1 = a_1 = 1; \quad B_1 = b_1 = 1; \quad C_1 = c_1 = 0,5.$$

Зададим начальное значение корня $x_0 = 1,5$ ($d_1 = 1,5$), выполним в этой точке расчет численных нормированных производных рекуррентным дифференцированием и представим в виде таблицы:

F_1	F_2	F_3	F_4
0,07368464665420405	-0,70155620477	-8,2323750599e-2	0,1049637993

Для оценки точности численного расчета производных выполним сравнение с расчетом производных по интерполяционным формулам [15,16,20]:

$$F_2 = \frac{dF}{dx} = \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0 - \Delta x)}{2 \cdot \Delta x};$$

$$F_3 = \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{F(x_0 + \Delta x) - 2F(x_0) + F(x_0 - \Delta x)}{2 \cdot \Delta x};$$

$$F_4 = \frac{1}{6} \frac{d^3 F}{dx^3} = \frac{F(x_0 + 2 \cdot \Delta x) - 3F(x_0 + \Delta x) + 3F(x_0) - F(x_0 - \Delta x)}{2 \cdot \Delta x}.$$

Расчеты производных рекуррентным дифференцированием (1-я строка) и численными интерполяционными формулами для различного шага Δx дискретной шкалы сведены в следующую таблицу:

Δx	F_2	F_3	F_4
–	–0,701556204776477	–0,082323750599036	0,104963799355668
0,001	–0,701556099799993	–0,082323600006373	0,105152960413098
0,0001	–0,701556203728248	–0,082323770023151	0,105138120432002
0,00001	–0,701556204785180	–0,082326367945029	0,296059473233375

Как показывают результаты таблицы, интерполяционными методами удовлетворительно вычисляется только F_2 ; F_3 имеет 4 – 6 верных цифр; F_4 имеет 2 верных цифры. Погрешности в расчете производных, перенесенные в метод расчета корней, ухудшают характеристики вычислительного процесса. Таблица с результатами интерполирования объясняет, почему для расчета корней используется, в основном, метод первого порядка. В результатах рекуррентного метода численные производные имеют 12 верных значащих цифр. В расчетах корня тремя методами различного порядка, результаты которых для начального значения корня $x_0 = 1,5$ приведены в таблицах, используются только численные производные, найденные методом рекуррентного дифференцирования.

Метод первого порядка для $x_0 = 1,5$

x	F_1	F_2	F_3
1,5	7,368464665e–2	–0,70155620477	–8,232375059e–2
1,60503	–7,744621068e–4	–0,71493727318	–4,330948723e–2
1,60394674	–5,015427140e–8	–0,71484295398	–4,376015172e–2
1,60394666983876	–2,220446049e–16	–0,71484294784	–4,376018089e–2

Метод второго порядка для $x_0 = 1,5$

x	F_1	F_2	F_3	F_4
1,5	7,3684646654e–2	–0,70155620477	–0,082323750599	0,1049637993556
1,60377	1,2628982171e–4	–0,71482747266	–0,043833607175	0,1385182930561
1,60394666983	7,540634783e–13	–0,71484294784	–0,043760180892	0,1385570355767
1,60394666... ...9838754	6,661338147e–16	–0,71484294784	–0,043760180892	0,1385570355769

Метод третьего порядка для $x_0 = 1,5$

x	F_1	F_2	F_3
1,5	7,36846466542e-2	-0,70155620477	-0,082323750599
	F_4	F_5	
	0,1049637993556	0,11018373933	
	F_1	F_2	F_3
1,603931	1,1201462982e-5	-0,71484157631	-0,043766694310
	F_4	F_5	
	0,1385536015755	0,054790357863	
	F_1	F_2	F_3
1,603946669838754	6,6613381477e-16	-0,71484294784	-0,043760180892
	F_4	F_5	
	0,1385570355769	0,05478324690	

Изменим смещение полиномов $z_0 = 0,1$ и вычислим для нового смещения значения коэффициентов полиномов в выражении (1.52), используя формулу (1.51):

$$A_1 = a_1 + a_2 z_0 + a_3 z_0^2 + a_4 z_0^3 = 1 + 3z_0 - 3z_0^2 + z_0^3 = 1,271 ;$$

$$B_1 = 1 + 2z_0 + z_0^2 = 1,21 ; C_1 = 0,5 + 2z_0 + z_0^2 = 0,71.$$

Зададим начальное значение корня $x_0 = 1,08$ ($d_1 = 1,08$) и выполним расчет корней тремя методами различного порядка.

Метод первого порядка для $x_0 = 1,08$

x	F_1	F_2	F_3
1,08	1,21529664937e-1	-0,5701857293	0,5722665928
1,29314	6,388985597e-3	-0,545135677	-0,0832666197
1,30486	-1,155723170e-5	-0,5471176969	-0,085735246
1,30483886615	-3,779998532e-11	-0,5471140749	-0,0857313925
1,304838866080910	2,220446049e-16	-0,5471140749	-0,0857313925

Метод второго порядка для $x_0 = 1,08$

x	F_1	F_2	F_3
1,08	1,21529664937e-1	-0,5701857293	0,5722665928
1,38892	-4,662780136e-2	-0,56206752669	-0,0883995669
1,30485078	-6,51828499e-6	-0,5471161177	-0,0857335665
1,304838866080910	2,220446049e-16	-0,5471140749	-0,0857313925

Пример 1.23.

Зададим уравнение

$$F \equiv \frac{\sqrt[5]{\left(\arctg\left(\sqrt[15]{\frac{1}{e^{(\ln(\sin D(x))^2)^2}}}\right)\right)^2}}{A(z)} \cdot \frac{\arctg\left(\ln\sqrt{\arcsin(\ln\sqrt{D(x)})^2}\right)^2}{B(z)} - 4\sqrt[4]{\frac{e^{\arctg(C(z))}}{G(z)}} = 0 ,$$

Метод третьего порядка для $x_0 = 1,08$

x	F_1	F_2	F_3
1,08	1,21529664937e-1	-0,5701857293	0,5722665928
	F_4	F_5	
	-5,4581874958	45,8585301168	
	F_1	F_2	F_3
1,266163	2,1036330285e-2	-0,540854961	-0,074668076365
	F_4	F_5	
	-0,135429887	0,6024551926	
	F_1	F_2	F_3
1,30483662	1,22886205e-6	-0,5471136898	-0,0857309825
	F_4	F_5	
	-0,06083944499	0,3848704634	
	F_1	F_2	F_3
1,30483886608910	2,220446049e-16	-0,5471140749	-0,0857313925
	F_4	F_5	
	-0,06083944499	0,3848704634	

полиномы которого содержат коэффициенты, вычисленные при смещении $z_0 = 0$:

$$A(z) = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 = 2 + 3z + 4z^2; \quad B(z) = b_1 + b_2 z + b_3 z^2 = 1 + 2z + z^2; \quad (1.53)$$

$$C(z) = c_1 + c_2 z + c_3 z^2 = 0,5 + 2z + z^2; \quad G(z) = g_1 + g_2 z + g_3 z^2 + g_4 z^3 = 1 + 3z - z^2 + z^3$$

Для расчета корней уравнения преобразуем заданную функцию

$$F(y) \equiv \frac{\sqrt[5]{\left(\arctg\left(15\sqrt{\frac{1}{e^{(\ln(\sin(d_1+d_2y))^2)}}}\right)\right)^2}}{\frac{A_1}{\arctg\left(\ln\sqrt{\arcsin(\ln\sqrt{d_1+d_2y})^2}\right)^2}} - 4\sqrt[4]{\frac{e^{\arctg(C_1)}}{G_1}} = 0 \quad (1.54)$$

B_1

в которой для нулевого смещения полиномов $z_0 = 0$:

$$A_1 = a_1 = 2; \quad B_1 = b_1 = 1; \quad C_1 = c_1 = 0,5; \quad G_1 = g_1 = 1$$

Зададим начальное значение корня $x_0 = 0,9$ ($d_1 = 0,9$) и выполним численный расчет корней уравнения ($d_2 = 1$) двумя методами различного порядка.

Метод первого порядка для $x_0 = 0,9$

x	F_1	F_2	F_3
0,9 не сходится	2,09735406522		
0,504	8,2791506979e-1	5,7814151674	-8,1558724396
0,36079716	-1,20851637846e-1	6,960975186	2,2116431134
0,37815846	4,81353270957e-4	7,0057162010	0,3655918592
0,378089751354	1,7338386282e-9	7,0056654646	0,3728370424
0,3780897511065091	-6,6613381477e-16	7,0056654644	0,3728370685

Метод третьего порядка для $x_0 = 0,9$

x	F_1	F_2	F_3	F_4
0,9	2,0973540652	1,7195977919	-0,8327103687	11,098623055
0,434816	3,924859199e-1	6,731604648	-4,9168552437	-25,158576521
0,3781752	5,98629062e-4	7,005728411	0,3638268084	-35,101804319
0,37808975... ...11065091	-6,6613381e-16	7,005665464	0,3728370685	-35,151658225

Изменим смещение полиномов с помощью параметра $z_0 = 0,1$ и вычислим для нового смещения значения коэффициентов полиномов в выражении (1.54), используя формулу (1.53):

$$A_1 = a_1 + a_2 z_0 + a_3 z_0^2 = 2 + 3z_0 + 4z_0^2 = 2,34 ;$$

$$B_1 = 1 + 2z_0 + z_0^2 = 1,21 ; C_1 = 0,5 + 2z_0 + z_0^2 = 0,71 ;$$

$$G_1 = g_1 + g_2 z_0 + g_3 z_0^2 + g_4 z_0^3 = 1 + 3z_0 - z_0^2 + z_0^3 = 1,291$$

Зададим начальное значение корня $x_0 = 0,9$ ($d_1 = 0,9$) и выполним расчет корней методом 3-го порядка.

Метод третьего порядка для $x_0 = 0,9$

x	F_1	F_2	F_3	F_4
0,9	2,01907799	1,6627515839	-0,8051827532	10,731726425
0,435771	3,767809316e-1	6,499925181	-4,8236657113	-24,08550253
0,3801037	4,701768185e-3	6,775112295	0,1555709516	-33,84812524
0,37940971... ...08491036	2,44249065e-15	6,774847435	0,22609467984	-33,89874412

Для каждого значения корня x_0 рекуррентное дифференцирование находит численные значения производных $F_2, F_3, F_4, F_5, \dots$, из которых в формулах методов (1.49), (1.50) используются только F_2, F_3, F_4 . На каждой итерации решая алгебраически все уравнения (1.49), можно одновременно запустить в работу несколько численных методов. Численное рекуррентное дифференцирование вычисляет производные в одной точке x_0 в отличие от интерполяционных методов, выполняющих вычисления на конечном интервале изменения переменной x . В сложных функциях $F(x)$ близость особых точек к корням функции вызывает сбои в расчете производных интерполяционными методами, как показано в примере 1.11.

Пример 1.24.

Рассмотрим функцию

$$F(x) = \ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2 D(x))))))))))))),$$

в которой полином равен

$$D(x) = d_1 + d_2 x + d_3 x^2 + d_4 x^3 + d_5 x^4 + d_6 x^5 + d_7 x^6 + d_8 x^7 + d_9 x^8 + d_{10} x^9 + d_{11} x^{10} =$$

$$= 1 + 2x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 - x^{10}$$

и коэффициенты $d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_n$ вычислены при смещении $x_0 = 0$.

В табл.1.51 приведены особые точки функции, которые фиксировались по изменению знака первой производной, т.к. точности численного расчета с 16 значащими цифрами оказалось недостаточно для более точного попадания в особую точку функции.

Таблица 1.51

координата особой точки функции $F(x)$	значение функции $F(x)$	первая производная функции $F(x)$	вторая производная функции $F(x)$
0,0022181932	-32,579	4,2900e10	-9,2022e20
0,0034431239	-32,191	-7,4955e10	-2,8092e21
0,0040148126	-32,017	-1,4866e11	-1,1049e22
0,00427802612	-32,324	-3,7776e11	-7,1352e22
0,00439854688	-32,074	-7,2930e11	-2,7594e23
0,00445360126	-32,801	-2,2981e12	-2,6406e24

В табл. 1.52 приведены минимумы функции. Заданная функция меняется так быстро, что точности численного расчета оказалось недостаточно, чтобы в точке минимума с малым значением функции получить значение первой производной, близкое к нулевому.

Таблица 1.52

координата минимума функции $F(x)$	значение функции $F(x)$	первая производная функции $F(x)$	вторая производная функции $F(x)$
0,00117045	-1,1024e-11	0,0083675	-3,1754e6
0,002944465	-2,6779e-13	-0,0027139	-1,37532e7
0,003783438	-8,9329e-13	0,010642	-6,3392e7
0,004171746	-2,9754e-14	0,0042183	-2,9952e8
0,0043499308	-1,9824e-12	0,075285	-1,412954e9
0,0044314028	-3,67716e-13	0,070981	-6,8526e9

Приведенные таблицы показывают, что сложные функции могут иметь очень высокую плотность особых точек, между которыми расположены минимумы функции. Из этого примера очевидно (проблема уже была рассмотрена в примере 1.11), что для таких функций расчет производных интерполяционными методами [15, 16, 20], требующими выбора конечного интервала изменения переменной, невозможен. Все производные в табл.1.51 , 1.52 вычислены рекуррентным дифференцированием. Это показывает, что близость особых точек функции не создает никаких трудностей для численного рекуррентного дифференцирования и не вызывает сбоев в расчете производных. В малой окрестности особой точки функции ее производные имеют большие численные значения, что замедляет сходимость методов расчета корней при недостаточной точности в арифметических операциях. Но эта проблема не имеет отношения к рекуррентному дифференцированию и требует отдельного изучения.

ГЛАВА 2. Обратное рекуррентное дифференциальное исчисление (обратное p -дифференцирование)

Раздел 2.1. Аналитическое обратное рекуррентное дифференцирование (аналитическое обратное p -дифференцирование)

В классическом дифференциальном исчислении рассмотрена задача аналитического дифференцирования неявных функций [1, 2, 3]

$$F(x, D(x)) = 0, \quad (2.1)$$

в которой определяются аналитические производные внутренней функции

$$\frac{dD}{dx}, \frac{d^2 D}{dx^2}, \frac{d^3 D}{dx^3}, \dots, \frac{d^n D}{dx^n},$$

удовлетворяющие уравнению (2.1). Особенности классической процедуры хорошо иллюстрирует конкретный пример.

Зададим уравнение

$$e^{\arctg D(x)} + \ln D(x) + e^{D(x)} = \sin x \quad (2.2)$$

и дифференцируем его по принятому в классическом исчислении правилу дифференцирования сложных функций

$$e^{\arctg D(x)} \cdot \frac{1}{1 + D^2(x)} \cdot \frac{dD}{dx} + \frac{1}{D(x)} \cdot \frac{dD}{dx} + e^{D(x)} \cdot \frac{dD}{dx} = \cos x.$$

Отсюда находим функцию производной:

$$\frac{dD(x)}{dx} = \frac{\cos x}{e^{\arctg D(x)} \cdot \frac{1}{1 + D^2(x)} + \frac{1}{D(x)} + e^{D(x)}} \quad (2.3a)$$

Дальше аналитические высшие производные можно определить при явном дифференцировании полученной аналитической функции $\frac{dD(x)}{dx}$ по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{d^2 D(x)}{dx^2} = \frac{-\sin x - \cos x \cdot \frac{e^{\arctg D(x)} \cdot \frac{1 - 2D(x)}{(1 + D^2(x))^2} - \frac{1}{D^2(x)} + e^{D(x)}}{e^{\arctg D(x)} \cdot \frac{1}{1 + D^2(x)} + \frac{1}{D(x)} + e^{D(x)}} \cdot \frac{dD(x)}{dx}}{e^{\arctg D(x)} \cdot \frac{1}{1 + D^2(x)} + \frac{1}{D(x)} + e^{D(x)}} \quad (2.3b)$$

В аналитические выражения производных входит функция $D(x)$ как аналитическое решение заданного уравнения (2.2). Для заданного уравнения можно найти его численное решение в конкретной точке x_0 . Тогда найденные аналитические выражения производных можно формально использовать для численных расчетов:

$$\frac{dD(x_0)}{dx}, \frac{d^2 D(x_0)}{dx^2}, \frac{d^3 D(x_0)}{dx^3}, \dots, \frac{d^n D(x_0)}{dx^n}.$$

Однако здесь повторяются все проблемы, характерные для классического дифференциального исчисления, которые делают его мало пригодным для аналитических и численных расчетов:

1. быстро растущая сложность аналитических выражений производных;
2. структура аналитического выражения для следующей производной непредсказуема ввиду того, что вся процедура классического дифференцирования, имея четкие правила, не имеет порядка в целом.

Отсутствие порядка лишает процедуру свойства алгоритмичности, необходимой для расчетов. В данном примере видно, что аналитические выражения первой и второй производных имеют различные структуры. Это означает, что для применения четких правил классического дифференцирования выражение первой производной надо предварительно опознать и описать последовательность применения правил. По этим правилам появляется конкретное выражение второй производной, в структуре которого заложены другие операции и новая последовательность применения правил. Для ее описания необходимо опознать новое аналитическое выражение. Распознавание выражений переводит задачу классического дифференцирования из раздела вычислительных в кибернетические задачи. Все сказанное только подчеркивает, что классическое дифференциальное исчисление является мощной интеллектуальной теорией, имеющей свою область применения. Попытка перенести интеллектуальный инструмент в вычислительную среду оказывается мало успешной. Вычислительная среда работает по правилу алгоритмичности, и все процедуры, выпадающие из этого правила, оказываются чужеродными.

Лемма 2.1. Для заданного уравнения

$$F1(x, D(x)) + F2(x, D(x)) + \dots = 0$$

справедливы равенства для нормированных производных

$$\frac{1}{k!} \frac{d^k F1}{dx^k} + \frac{1}{k!} \frac{d^k F2}{dx^k} + \dots = 0 ;$$

$$(F1)_{k+1} + (F2)_{k+1} + \dots = 0 , \quad (k = 1, 2, \dots)$$

или, в более простом виде,

$$(F1)_k + (F2)_k + \dots = 0 , \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (2.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно свойству дифференциального исчисления для дифференцируемых функций:

$$\frac{dF1}{dx} + \frac{dF2}{dx} + \dots = 0 ; \quad \frac{1}{2!} \frac{d^2 F1}{dx^2} + \frac{1}{2!} \frac{d^2 F2}{dx^2} + \dots = 0; \dots \quad \frac{1}{k!} \frac{d^k F1}{dx^k} + \frac{1}{k!} \frac{d^k F2}{dx^k} + \dots = 0$$

или, в нормированном виде,

$$(F1)_2 + (F2)_2 + \dots = 0 ; \quad (F1)_3 + (F2)_3 + \dots = 0 ; \quad (F1)_{k+1} + (F2)_{k+1} + \dots = 0$$

откуда следует формула (2.4), что требовалось доказать.

Формула (2.4) является линией раздела классического исчисления [1,2] и рекуррентного исчисления. Если рассматривать функции $F1(x, D(x))$, $F2(x, D(x))$, ... как сложные функции, зависящие от внутренней функции

$D(x)$, то приходим к классическому дифференцированию [1,2]. При другом подходе, применение прямых рекуррентных формул (глава 1) к функциям $F1(x, D(x))$, $F2(x, D(x))$,... и изменение в этих формулах статуса заданных и искомых величин приводит к новой рекуррентной процедуре – обратному рекуррентному дифференцированию. Обратное рекуррентное дифференцирование, как и классическое дифференцирование, также раскрывает функции $F1(x, D(x))$, $F2(x, D(x))$,... , но другим способом.

Лемма 2.2. Неявное дифференцирование уравнения (2.1) является задачей обратного рекуррентного дифференцирования

$$F_k = A_k \cdot D_k + B_k , \quad (2.5)$$

где D_k – теперь искомая нормированная производная; F_k – известная производная формулы (2.4); A_k , B_k определяются через компоненты рекуррентных формул Υ_A , Υ_B и зависят от накопленной информации:

$$A_k = \Upsilon_A(F_1 , F_2 , ..., F_{k-1} , D_1 , D_2 , ..., D_{k-1}) ;$$

$$B_k = \Upsilon_B(F_1 , F_2 , ..., F_{k-1} , D_1 , D_2 , ..., D_{k-1}),$$

где $F_1 , F_2 , ...$ - нормированные производные функции F .

Доказательство. Применим к функции $F(x, D(x))$ прямые рекуррентные формулы и выделим в них производные функции $D(x)$:

$$F_2 = \Upsilon_A(F_1 , D_1) \cdot \boxed{D_2} + \Upsilon_B(F_1 , D_1) = A_2 \cdot \boxed{D_2} + B_2;$$

$$F_3 = \Upsilon_A(F_1 , F_2 , D_1 , D_2) \cdot \boxed{D_3} + \Upsilon_B(F_1 , F_2 , D_1 , D_2) = A_3 \cdot \boxed{D_3} + B_3;$$

⋮

$$F_k = \Upsilon_A(F_1 , F_2 , ..., F_{k-1} , D_1 , D_2 , ..., D_{k-1}) \cdot \boxed{D_k} + \\ + \Upsilon_B(F_1 , F_2 , ..., F_{k-1} , D_1 , D_2 , ..., D_{k-1}) = A_k \cdot \boxed{D_k} + B_k$$

Если функции $F_1 , F_2 , ..., F_k$ принять известными (или вычисленными), то отсюда получаем формулы (2.5), в которых $D_2 , D_3 , ..., D_k$ являются искомыми производными, что требовалось доказать.

Рекуррентные формулы A_k , B_k для различных функций приведены в табл. П.14 – П.18 .

Лемма 2.3. Для заданного уравнения

$$F1(D(x)) + F2(D(x)) + ... = 0 \quad (2.6)$$

аналитические нормированные производные определяются по формуле

$$D_k = \frac{-(B1)_k - (B2)_k - ...}{(A1)_k + (A2)_k + ...} \quad (2.7)$$

где $(A1)_k$, $(B1)_k$, $(A2)_k$, $(B2)_k$,... – компоненты рекуррентных формул соответствующих функций $F1(D(x))$, $F2(D(x))$,...

Доказательство. Запишем по формуле (2.5) производные функций

$$(F1)_k = (A1)_k \cdot D_k + (B1)_k; (F2)_k = (A2)_k \cdot D_k + (B2)_k; \dots$$

и подставим в уравнение (2.6)

$$(F1)_k + (F2)_k + \dots = ((A1)_k \cdot D_k + (B1)_k) + ((A2)_k \cdot D_k + (B2)_k) + \dots = 0 ,$$

откуда следует формула (2.7) , что требовалось доказать .

Если все компоненты приведенных формул считать аналитическими функциями переменной x , то эти формулы дают аналитическое решение задачи (2.1) как задачи обратного рекуррентного дифференцирования.

Применим к уравнению (2.2) процедуру p -дифференцирования для расчета аналитических производных функции решения уравнения.

Запишем уравнение (2.2) в виде (2.6)

$$F1(D(x)) + F2(D(x)) + F3(D(x)) = \sin x$$

и предполагаем, что существует его аналитическое решение $D_1(x)$.

Этап 1.

Рассмотрим первую аналитическую функцию $F1(x) = e^{\arctg D(x)}$ уравнения (2.2)

$$F1(x) = e^{\arctg D(x)}; (F1)_1 = e^{\arctg D_1(x)}$$

Применим рекуррентные формулы (табл.П.17):

$$(A1)_2(x) = \frac{(F1)_1}{1 + D_1^2(x)} ; (B1)_2(x) = 0 ;$$

$$(F1)_2 = (A1)_2(x) \cdot \boxed{D_2} + (B1)_2(x) ;$$

$$(A1)_3(x) = \frac{(F1)_1}{1 + D_1^2(x)}; (B1)_3(x) = \frac{(F1)_2 \cdot D_2(x) - 2(F1)_2 \cdot D_1(x) \cdot D_2(x)}{2(1 + D_1^2(x))};$$

$$(F1)_3 = (A1)_3(x) \cdot \boxed{D_3} + (B1)_3(x);$$

$$(A1)_4(x) = \frac{(F1)_1}{1 + D_1^2(x)} ;$$

$$(B1)_4(x) = \frac{1}{3(1 + D_1^2(x))} \cdot ((F1)_3 \cdot D_2(x) - (F1)_2 \cdot (D_2^2(x) + 2D_1(x) \cdot D_3(x)) + 2(F1)_2 \cdot D_3(x) - 4(F1)_3 \cdot D_1(x) \cdot D_2(x));$$

$$(F1)_4 = (A1)_4(x) \cdot \boxed{D_4} + (B1)_4(x)$$

Этап 2.

Рассмотрим вторую аналитическую функцию $F2(x) = \ln D(x)$ уравнения (2.2)

$$F2(x) = \ln D(x); (F2)_1 = \ln D_1(x)$$

Применим рекуррентные формулы (табл.П.16)

$$(A2)_2(x) = \frac{1}{D_1(x)} ; (B2)_2(x) = 0 ; (F2)_2 = (A2)_2(x) \cdot \boxed{D_2} + (B2)_2(x);$$

$$(A2)_3(x) = \frac{1}{D_1(x)} ; (B2)_3(x) = -\frac{(F2)_2 \cdot D_2(x)}{2D_1(x)} ;$$

$$(F2)_3 = (A2)_3(x) \cdot \boxed{D_3} + (B2)_3(x);$$

$$(A2)_4(x) = \frac{1}{D_1(x)} ; (B2)_4(x) = -\frac{(F2)_2 \cdot D_3(x) + 2(F2)_3 \cdot D_2(x)}{3D_1(x)} ;$$

$$(F2)_4 = (A2)_4(x) \cdot \boxed{D_4} + (B2)_4(x);$$

Этап 3.

Рассмотрим третью аналитическую функцию $F3(x) = e^{D(x)}$ уравнения (2.2)

$$F3(x) = e^{D(x)}; (F3)_1 = e^{D_1(x)}$$

Применим рекуррентные формулы (табл.П.14):

$$(A3)_2(x) = (F3)_1 ; (B3)_2(x) = 0 ;$$

$$(F3)_2 = (A3)_2(x) \cdot \boxed{D_2} + (B3)_2(x);$$

$$(A3)_3(x) = (F3)_1 ; (B3)_3(x) = \frac{(F3)_2 \cdot D_2(x)}{2} ;$$

$$(F3)_3 = (A3)_3(x) \cdot \boxed{D_3} + (B3)_3(x);$$

$$(A3)_4(x) = (F3)_1 ; (B3)_4(x) = \frac{(F3)_3 \cdot D_2(x) + 2(F3)_2 \cdot D_3(x)}{3};$$

$$(F3)_4 = (A3)_4(x) \cdot \boxed{D_4} + (B3)_4(x)$$

Расчет $D_2(x)$ ($k = 2$).

Согласно равенству (2.4), для $k = 2$:

$$(F1)_2 + (F2)_2 + (F3)_2 = \frac{d}{dx}(\sin x);$$

$$(A1)_2 \cdot \boxed{D_2} + (B1)_2 + (A2)_2 \cdot \boxed{D_2} + (B2)_2 + (A3)_2 \cdot \boxed{D_2} + (B3)_2 = \frac{d}{dx}(\sin x)$$

Подставим найденные аналитические выражения $(A1)_2$, $(A2)_2$, $(A3)_2$

$$\frac{(F1)_1}{1 + D_1^2(x)} \cdot \boxed{D_2} + \frac{1}{D_1(x)} \cdot \boxed{D_2} + (F3)_1 \cdot \boxed{D_2} = \cos x ,$$

откуда находим аналитическое выражение первой производной:

$$D_2(x) = \frac{dD(x)}{dx} = \frac{\cos x}{e^{\arctg D_1(x)} \cdot \frac{1}{1 + D_1^2(x)} + \frac{1}{D_1(x)} + e^{D_1(x)}}$$

совпадающее с выражением (2.3a), ранее найденным классическим дифференцированием.

Расчет $D_3(x)$ ($k = 3$).

Согласно равенству (2.4), для $k = 3$:

$$(F1)_3 + (F2)_3 + (F3)_3 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} (\sin x);$$

$$(A1)_3 \cdot \boxed{D_3} + (B1)_3 + (A2)_3 \cdot \boxed{D_3} + (B2)_3 + (A3)_3 \cdot \boxed{D_3} + (B3)_3 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} (\sin x).$$

Подставим найденные аналитические выражения $(A1)_3$, $(A2)_3$, $(A3)_3$, $(B1)_3$, $(B2)_3$, $(B3)_3$ и после преобразований получаем

$$\begin{aligned} & \frac{(F1)_1}{1 + D_1^2(x)} \cdot \boxed{D_3} + \frac{(F1)_1 \cdot (1 - 2D_1(x))}{2(1 + D_1^2(x))^2} \cdot D_2^2(x) + \frac{1}{D_1(x)} \cdot \boxed{D_3} - \frac{D_2^2(x)}{2D_1^2(x)} + \\ & + (F3)_1 \cdot \boxed{D_3} + \frac{(F3)_1 \cdot D_2^2(x)}{2} = -\frac{1}{2} \sin x, \end{aligned}$$

откуда находим компактное аналитическое выражение второй производной:

$$D_3(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 D(x)}{dx^2} = - \frac{\sin x + (e^{\arctg D_1(x)} \frac{1 - 2D_1(x)}{(1 + D_1^2(x))^2} - \frac{1}{D_1^2(x)} + e^{D_1(x)}) \cdot D_2^2(x)}{2 \cdot (e^{\arctg D_1(x)} \frac{1}{1 + D_1^2(x)} + \frac{1}{D_1(x)} + e^{D_1(x)})}$$

которое после подстановки $D_2(x)$ отличается коэффициентом нормирования от выражения (2.36), ранее найденного классическим дифференцированием.

Расчет $D_4(x)$ ($k = 4$).

Согласно равенству (2.4), для $k = 4$:

$$(F1)_4 + (F2)_4 + (F3)_4 = \frac{1}{6} \frac{d^3}{dx^3} (\sin x);$$

$$(A1)_4 \cdot \boxed{D_4} + (B1)_4 + (A2)_4 \cdot \boxed{D_4} + (B2)_4 + (A3)_4 \cdot \boxed{D_4} + (B3)_4 = \frac{1}{6} \frac{d^3}{dx^3} (\sin x)$$

Подставим найденные аналитические выражения $(A1)_4$, $(A2)_4$, $(A3)_4$, $(B1)_4$, $(B2)_4$, $(B3)_4$ и, после преобразований, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{(F1)_1}{1 + D_1^2(x)} \cdot \boxed{D_4} + \frac{(F1)_1}{3(1 + D_1^2(x))^2} ((3 - 6D_1(x)) \cdot D_2(x) \cdot D_3(x) - \\ & - (1 - \frac{(1 - 4D_1(x))(1 - 2D_1(x))}{2(1 + D_1^2(x))}) D_2^3(x)) + \frac{1}{D_1(x)} \cdot \boxed{D_4} - \frac{3D_2(x) \cdot D_3(x) - \frac{1}{D_1(x)} D_2^3(x)}{3D_1^2(x)} + \\ & + (F3)_1 \cdot \boxed{D_4} + \frac{(F3)_1 \cdot (3D_2(x) \cdot D_3(x) + \frac{1}{2} D_2^3(x))}{3} = -\frac{1}{6} \cos x \end{aligned}$$

откуда находим аналитическое выражение нормированной третьей производной:

$$\begin{aligned} D_4(x) \cdot (e^{\arctg D_1(x)} \frac{1}{1 + D_1^2(x)} + \frac{1}{D_1(x)} + e^{D_1(x)}) = & -\frac{\cos x}{6} - \\ & - D_2(x) \cdot D_3(x) \cdot (\frac{1 - 2D_1(x)}{(1 + D_1^2(x))^2} + \frac{1}{D_1^2(x)} - e^{D_1(x)}) + \end{aligned}$$

$$+ D_2^3(x) \cdot \left(\frac{e^{\operatorname{arctg} D_1(x)}}{3(1 + D_1^2(x))^2} \cdot \left(1 - \frac{(1 - 4D_1(x)) \cdot (1 - 2D_1(x))}{2(1 + D_1^2(x))} \right) + \frac{1}{3D_1^2(x)} - \frac{e^{D_1(x)}}{6D_1(x)} \right).$$

Теорема 2.1. Задана аналитическая составная функция

$$F(v(\psi(\varphi(D(x))))),$$

в которой v, ψ, φ - аналитические внутренние функции. Тогда в обратном рекуррентном дифференцировании аналитическая нормированная производная F_k , определенная по формуле (2.5), как

$$F_k = A_k \cdot D_k + B_k,$$

имеет компоненты, вычисляемые по формулам:

$$\begin{aligned} A_k &= (A_F)_k \cdot (Av)_k \cdot (A\psi)_k \cdot (A\varphi)_k; \\ B_k &= (A_F)_k \cdot (Av)_k \cdot (A\psi)_k \cdot (B\varphi)_k + \\ &\quad + (A_F)_k \cdot (Av)_k \cdot (B\psi)_k + (A_F)_k \cdot (Bv)_k + (B_F)_k \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $(A_F)_k, (Av)_k, (A\psi)_k, (A\varphi)_k; (B_F)_k, (Bv)_k, (B\psi)_k, (B\varphi)_k$ - компоненты рекуррентных формул (2.5) для внутренних функций v, ψ, φ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим аналитическую нормированную производную внутренней функции по формуле (2.5)

$$(F\varphi)_k = (A\varphi)_k \cdot D_k + (B\varphi)_k.$$

Тогда нормированная производная внутренней функции ψ , включающей функцию φ , определится по формуле (2.5) следующим образом:

$$\begin{aligned} (F\psi)_k &= (A\psi)_k \cdot (F\varphi)_k + (B\psi)_k = (A\psi)_k \cdot ((A\varphi)_k \cdot D_k + (B\varphi)_k) + (B\psi)_k = \\ &= (A\psi)_k \cdot (A\varphi)_k \cdot D_k + (A\psi)_k \cdot (B\varphi)_k + (B\psi)_k \end{aligned}$$

Переходя к следующей внутренней функции v , получаем

$$\begin{aligned} (Fv)_k &= (Av)_k \cdot (F\psi)_k + (Bv)_k = (Av)_k \cdot ((A\psi)_k \cdot (F\varphi)_k + (B\psi)_k) + (Bv)_k = \\ &= (Av)_k \cdot (A\psi)_k \cdot (A\varphi)_k \cdot D_k + (Av)_k \cdot (A\psi)_k \cdot (B\varphi)_k + (Av)_k \cdot (B\psi)_k + (Bv)_k \end{aligned}$$

Наконец, для внешней функции F применение формулы (2.5) дает

$$\begin{aligned} F_k &= A_k \cdot D_k + B_k = (A_F)_k \cdot (Fv)_k + (B_F)_k = (A_F)_k \cdot ((Av)_k \cdot (A\psi)_k \cdot (A\varphi)_k \cdot D_k + \\ &\quad + (Av)_k \cdot (A\psi)_k \cdot (B\varphi)_k + (Av)_k \cdot (B\psi)_k + (Bv)_k) + (B_F)_k \end{aligned}$$

откуда следуют формулы (2.8), что требовалось доказать.

Пример 2.1.

Зададим уравнение

$$\sqrt{\ln(\operatorname{arctg}(\sqrt{D(x)}))} = e^{S(x)},$$

где $S(x) = \sum_{k=0}^n s_{k+1} x^k$. Предполагаем, что существует функция $D(x) = D_1(x)$,

которая является аналитическим решением заданного уравнения. Найдем

аналитические нормированные производные $D_2(x) = \frac{dD(x)}{dx}$; $D_3(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 D(x)}{dx^2}$,
удовлетворяющие заданному уравнению.

Находим нормированные аналитические производные правой части уравнения по прямой рекуррентной формуле (табл. П.1):

$$S_1(x) = S(x); E_1(x) = e^{S_1(x)}; E_2(x) = S_2(x) \cdot e^{S_1(x)};$$

$$E_3(x) = \frac{1}{2}(S_2(x) \cdot E_2(x) + 2S_3(x) \cdot E_1(x)) = \left(\frac{S_2^2(x)}{2} + S_3(x)\right) \cdot e^{S_1(x)},$$

где

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^n s_{k+1} x^k; S_2(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) s_{k+2} x^k; S_3(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)(k+2) s_{k+3} x^k.$$

Расчет $D_2(x)$ ($k=2$).

Этап 1.

$$C(x) = \sqrt{D(x)};$$

$$C_1(x) = \sqrt{D_1(x)}; C_2 = (Ac)_2 \cdot \boxed{D_2} + (Bc)_2;$$

По рекуррентным формулам (табл. П.14) находим:

$$(Ac)_2 = \frac{C_1(x)}{2D_1(x)}; (Bc)_2 = 0$$

Этап 2.

$$H(x) = \text{arctg}(C(x));$$

$$H_1(x) = \text{arctg}(C_1(x)); H_2 = (AH)_2 \cdot C_2 + (BH)_2$$

По рекуррентным формулам (табл. П.17) находим:

$$(AH)_2 = -\frac{1}{1 + C_1^2(x)}; (BH)_2 = 0$$

Этап 3.

$$L(x) = \ln H(x);$$

$$L_1(x) = \ln H_1(x); L_2 = (AL)_2 \cdot H_2 + (BL)_2$$

По рекуррентным формулам (табл. П.16) находим:

$$(AL)_2 = \frac{1}{H_1(x)}; (BL)_2 = 0$$

Этап 4.

$$F(x) = \sqrt{L(x)};$$

$$F_1(x) = \sqrt{L_1(x)}; F_2 = (AF)_2 \cdot L_2 + (BF)_2$$

По рекуррентным формулам (табл. П.14) находим:

$$(AF)_2 = \frac{F_1(x)}{2L_1(x)}; (BF)_2 = 0$$

Этап 5.

По формулам (2.8) определяем:

$$A_2 = (A_F)_2 \cdot (A_L)_2 \cdot (A_H)_2 \cdot (A_C)_2 = \frac{F_1(x)}{2L_1(x)} \cdot \frac{1}{H_1(x)} \cdot \left(-\frac{1}{1+C_1^2(x)}\right) \cdot \frac{C_1(x)}{2D_1(x)};$$

$$B_2 = (A_F)_2 \cdot (A_L)_2 \cdot (A_H)_2 \cdot (B_C)_2 + \\ + (A_F)_2 \cdot (A_L)_2 \cdot (B_H)_2 + (A_F)_2 \cdot (B_L)_2 + (B_F)_2 = 0$$

Согласно равенству (2.4), для $k = 2$ находим:

$$F_2 = A_2 \cdot D_2 + B_2 = E_2; \quad D_2 = \frac{E_2 - B_2}{A_2};$$

$$D_2(x) = -\frac{S_2 \cdot e^{S_1(x)}}{\frac{F_1(x) \cdot C_1(x)}{4L_1(x) \cdot H_1(x) \cdot (1+C_1^2(x)) \cdot D_1(x)}}.$$

Подставляя найденные выражения, окончательно получаем:

$$D_2(x) = -4(1+D_1(x)) \cdot \operatorname{arctg}(\sqrt{D_1(x)}) \cdot \sqrt{D_1(x) \cdot \ln(\operatorname{arctg}(\sqrt{D_1(x)}))} \cdot S_2(x) \cdot e^{S_1(x)}$$

Расчет $D_3(x)$ ($k = 3$).

Этап 1.

$$C(x) = \sqrt{D(x)};$$

$$C_1(x) = \sqrt{D_1(x)}; \quad C_3 = (A_C)_3 \cdot \boxed{D_3} + (B_C)_3;$$

По рекуррентным формулам (табл. П.14) находим:

$$(A_C)_3 = \frac{C_1(x)}{2D_1(x)}; \quad (B_C)_3 = \frac{1}{2D_1(x)} \cdot \left(\frac{1}{2}C_2(x) \cdot D_2(x) - C_2(x) \cdot D_2(x)\right) = -\frac{C_2(x) \cdot D_2(x)}{4D_1(x)}$$

Этап 2.

$$H(x) = \operatorname{arctg}(C(x));$$

$$H_1(x) = \operatorname{arctg}(C_1(x)); \quad H_3 = (A_H)_3 \cdot C_3 + (B_H)_3$$

По рекуррентным формулам (табл. П.17) находим:

$$(A_H)_3 = -\frac{1}{1+C_1^2(x)}; \quad (B_H)_3 = -\frac{C_1(x) \cdot C_2(x) \cdot H_2(x)}{1+C_1^2(x)}$$

Этап 3.

$$L(x) = \ln H(x);$$

$$L_1(x) = \ln H_1(x); \quad L_3 = (A_L)_3 \cdot H_3 + (B_L)_3$$

По рекуррентным формулам (табл. П.16) находим:

$$(A_L)_3 = \frac{1}{H_1(x)}; \quad (B_L)_3 = -\frac{H_2(x) \cdot L_2(x)}{2H_1(x)}$$

Этап 4.

$$F(x) = \sqrt{L(x)};$$

$$F_1(x) = \sqrt{L_1(x)}; \quad F_3 = (A_F)_3 \cdot L_3 + (B_F)_3$$

По рекуррентным формулам (табл. П.14) находим:

$$(A_F)_3 = \frac{F_1(x)}{2L_1(x)}; \quad (B_F)_3 = -\frac{L_2(x) \cdot F_2(x)}{4L_1(x)}$$

Этап 5.

По формулам (2.8) определяем:

$$A_3 = (A_F)_3 \cdot (A_L)_3 \cdot (A_H)_3 \cdot (A_C)_3;$$

$$B_3 = (A_F)_3 \cdot (A_L)_3 \cdot (A_H)_3 \cdot (B_C)_3 + (A_F)_3 \cdot (A_L)_3 \cdot (B_H)_3 + (A_F)_3 \cdot (B_L)_3 + (B_F)_3$$

Подставляем найденные выражения и находим:

$$A_3 = (A_F)_3 \cdot (A_L)_3 \cdot (A_H)_3 \cdot (A_C)_3 = \frac{F_1(x)}{2L_1(x)} \cdot \frac{1}{H_1(x)} \cdot \left(-\frac{1}{1+C_1^2(x)}\right) \cdot \frac{C_1(x)}{2D_1(x)};$$

$$B_3 = \frac{F_1(x)}{2L_1(x)} \cdot \frac{1}{H_1(x)} \cdot \left(-\frac{1}{1+C_1^2(x)}\right) \cdot \left(-\frac{C_2(x) \cdot D_2(x)}{4D_1(x)}\right) + \left(-\frac{L_2(x) \cdot F_2(x)}{4L_1(x)}\right) +$$

$$+ \frac{F_1(x)}{2L_1(x)} \cdot \frac{1}{H_1(x)} \cdot \left(-\frac{C_1(x) \cdot C_2(x) \cdot H_2(x)}{1+C_1^2(x)}\right) + \frac{F_1(x)}{2L_1(x)} \cdot \left(-\frac{H_2(x) \cdot L_2(x)}{2H_1(x)}\right)$$

Согласно равенству (2.4), для $k = 3$:

$$F_3 = A_3 \cdot D_3 + B_3 = E_3; \quad D_3(x) = \frac{E_3 - B_3}{A_3} = \frac{E_3}{A_3} - \frac{B_3}{A_3}.$$

Отсюда находим аналитическое выражение производной D_3 :

$$D_3(x) = -\frac{4D_1(x) \cdot H_1(x) \cdot L_1(x) \cdot (1+C_1^2(x))}{F_1(x) \cdot C_1(x)} E_3(x) -$$

$$-\frac{2D_1(x) \cdot L_2(x) \cdot (1+C_1^2(x)) \cdot (H_1(x) \cdot F_2(x) + H_2(x) \cdot F_1(x))}{2F_1(x) \cdot C_1(x)} -$$

$$-\frac{C_2(x) \cdot F_1(x) \cdot (4C_1(x) \cdot H_2(x) \cdot D_1(x) - D_2(x))}{2F_1(x) \cdot C_1(x)}$$

и, после преобразования, окончательно получаем:

$$D_3(x) = \frac{1+3D(x) - \frac{\sqrt{D(x)}}{\operatorname{arctg}(\sqrt{D(x)})} \cdot \left(\frac{1}{2\ln(\operatorname{arctg}(\sqrt{D(x)})} + 1\right)}{4D(x) \cdot (1+D(x))} \cdot D_2^2(x) -$$

$$-4(1+D(x)) \cdot \operatorname{arctg}(\sqrt{D(x)}) \cdot \sqrt{D(x)} \cdot \ln(\operatorname{arctg}(\sqrt{D(x)})) \cdot \left(\frac{S_2^2(x)}{2} + S_3(x)\right) \cdot e^{S_1(x)}$$

При большом количестве внутренних функций в составной функции процесс аналитического расчета производных можно упростить, используя прием разделения составной функции на части. Рассмотрим составную функцию

$$F = v(\dots \eta(\mid \psi(\dots v(\mid \rho(\dots \varphi(D(x))))))\dots)$$

и разделим ее на части, как показано в выражении. Тогда получим несколько более простых *частичных* составных функции

$$F = v(\dots \eta(H(x)); H = \psi(\dots v(P(x)); P = \rho(\dots \varphi(D(x))) ,$$

аналитические производные которых можно рассчитывать отдельно.

Теорема 2.2. Задана аналитическая составная функция

$$F = v(\chi(\dots \lambda(\eta(\mid \psi(\zeta \dots \xi(v(\mid \rho(\dots \varphi(D(x))))))))))\dots) ,$$

которая разделена на несколько частичных составных функций (разделение на части показано в выражении выше)

$$F_I = v(\chi(\dots \lambda(\eta(F_{II}(x)); F_{II} = \psi(\zeta(\dots \xi(v(F_{III}(x)); F_{III} = \rho(\dots \varphi(D(x)))$$

Их нормированные аналитические производные вычислены по формулам (2.5), (2.8). Тогда в обратном рекуррентном дифференцировании аналитическая нормированная производная составной функции F_k определяется по формуле (2.5)

$$F_k = A_k \cdot D_k + B_k ,$$

компоненты которой находятся по формулам:

$$\begin{aligned} A_k &= (A_I)_k \cdot (A_{II})_k \cdot (A_{III})_k; \\ B_k &= (A_I)_k \cdot (A_{II})_k \cdot (B_{III})_k + (A_I)_k \cdot (B_{II})_k + (B_I)_k \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $(A_I)_k, (A_{II})_k, (A_{III})_k; (B_I)_k, (B_{II})_k, (B_{III})_k$ – компоненты частичных составных функций.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим первую частичную составную функцию

$$F_I = v(\chi(\dots \lambda(\eta(F_{II}(x))))).$$

Согласно формуле (2.5), нормированные производные функции определяются выражением

$$(F_I)_k = (A_I)_k \cdot (F_{II})_k + (B_I)_k ,$$

в котором компоненты рассчитываются по формула (2.8):

$$\begin{aligned} (A_I)_k &= (A_v)_k \cdot (A_\chi)_k \cdot \dots \cdot (A_\lambda)_k \cdot (A_\eta)_k; \\ (B_I)_k &= (A_v)_k \cdot (A_\chi)_k \cdot \dots \cdot (A_\lambda)_k \cdot (B_\eta)_k + \dots + (A_v)_k \cdot (B_\chi)_k + (B_v)_k \end{aligned}$$

Аналогично раскрываем выражение второй частичной составной функции

$$F_{II} = \psi(\zeta(\dots \xi(v(F_{III}(x))))),$$

для которой находим:

$$\begin{aligned} (F_{II})_k &= (A_{II})_k \cdot (F_{III})_k + (B_{II})_k; \\ (A_{II})_k &= (A_\psi)_k \cdot (A_\zeta)_k \cdot \dots \cdot (A_\xi)_k \cdot (A_v)_k; \\ (B_{II})_k &= (A_\psi)_k \cdot (A_\zeta)_k \cdot \dots \cdot (A_\xi)_k \cdot (B_v)_k + \dots + (A_\psi)_k \cdot (B_\zeta)_k + (B_\psi)_k \end{aligned}$$

Подставляя выражение $(F_{II})_k$ в выражение $(F_I)_k$, получаем

$$\begin{aligned} (F_I)_k &= (A_I)_k \cdot (F_{II})_k + (B_I)_k = (A_I)_k \cdot ((A_{II})_k \cdot (F_{III})_k + (B_{II})_k) + (B_I)_k = \\ &= (A_I)_k \cdot (A_{II})_k \cdot (F_{III})_k + (A_I)_k \cdot (B_{II})_k + (B_I)_k \end{aligned}$$

Аналогично раскрывая последнюю частичную составную функцию, находим

$$(F_{\text{III}})_k = (A_{\text{III}})_k \cdot D_k + (B_{\text{III}})_k;$$

$$\begin{aligned}(F)_k &= (F_{\text{I}})_k = (A_{\text{I}})_k \cdot (A_{\text{II}})_k \cdot (F_{\text{III}})_k + (A_{\text{I}})_k \cdot (B_{\text{II}})_k + (B_{\text{I}})_k = \\ &= (A_{\text{I}})_k \cdot (A_{\text{II}})_k \cdot ((A_{\text{III}})_k \cdot (D)_k + (B_{\text{III}})_k) + (A_{\text{I}})_k \cdot (B_{\text{II}})_k + (B_{\text{I}})_k\end{aligned}$$

откуда следует формулы (2.9), что требовалось доказать.

Пример 2.2.

Найдем аналитические производные функции $D(x)$ уравнения

$$\sqrt{\ln(\text{arctg}(\sqrt{D(x)}))} = e^{S(x)},$$

где $S(x) = \sum_{k=0}^n s_{k+1} x^k$. Разобьем функцию $F(D(x)) = \sqrt{\ln(\text{arctg}(\sqrt{D(x)}))}$ на две

части: частичная составная функция $P(x) = \sqrt{\ln H(x)}$ и частичная составная функция $H(x) = \text{arctg}(\sqrt{D(x)})$, расчет которых можно выполнять независимо.

Расчет $D_2(x)$ ($k = 2$).

Выполним расчет первой частичной составной функции

Этап 1.

$$L(x) = \ln H(x);$$

$$L_1(x) = \ln H_1(x); L_2 = (A_L)_2 \cdot H_2 + (B_L)_2$$

По рекуррентным формулам (табл. П.16) находим:

$$(A_L)_2 = \frac{1}{H_1(x)}; (B_L)_2 = 0$$

Этап 2.

$$P(x) = \sqrt{L(x)};$$

$$P_1(x) = \sqrt{L_1(x)}; P_2 = (A_P)_2 \cdot L_2 + (B_P)_2$$

По рекуррентным формулам (табл. П.14) находим:

$$(A_P)_2 = \frac{P_1(x)}{2L_1(x)}; (B_P)_2 = 0$$

Подставляем эти выражения в P_2 :

$$\begin{aligned}P_2 &= (A_P)_2 \cdot L_2 + (B_P)_2 = (A_P)_2 \cdot ((A_L)_2 \cdot H_2 + (B_L)_2) + (B_P)_2 = \\ &= (A_P)_2 \cdot (A_L)_2 \cdot H_2 + (A_P)_2 \cdot (B_L)_2 + (B_P)_2 = (A_I)_2 \cdot H_2 + (B_I)_2; \\ (A_I)_2 &= (A_P)_2 \cdot (A_L)_2 = \frac{P_1}{2L_1 \cdot H_1}; (B_I)_2 = (A_P)_2 \cdot (B_L)_2 + (B_P)_2\end{aligned}$$

Выполняем расчет второй частичной составной функции.

Этап 1.

$$C(x) = \sqrt{D(x)};$$

$$C_1(x) = \sqrt{D_1(x)}; \quad C_2 = (Ac)_2 \cdot \boxed{D_2} + (Bc)_2$$

По рекуррентным формулам (табл. П.14) находим:

$$(Ac)_2 = \frac{C_1(x)}{2D_1(x)}; \quad (Bc)_2 = 0$$

Этап 2.

$$H(x) = \text{arctg}(C(x));$$

$$H_1(x) = \text{arctg}(C_1(x)); \quad H_2 = (AH)_2 \cdot C_2 + (BH)_2$$

По рекуррентным формулам (табл. П.17) находим:

$$(AH)_2 = -\frac{1}{1+C_1^2(x)}; \quad (BH)_2 = 0$$

Подставляем выражения в H_2 :

$$H_2 = (AH)_2 \cdot C_2 + (BH)_2 = (AH)_2 \cdot ((Ac)_2 \cdot \boxed{D_2} + (Bc)_2) + (BH)_2 =$$

$$= (AH)_2 \cdot (Ac)_2 \cdot \boxed{D_2} + (AH)_2 \cdot (Bc)_2 + (BH)_2 = (A\Pi)_2 \cdot \boxed{D_2} + (B\Pi)_2;$$

$$(A\Pi)_2 = (AH)_2 \cdot (Ac)_2 = -\frac{C_1}{2D_1 \cdot (1+C_1^2)}; \quad (B\Pi)_2 = (AH)_2 \cdot (Bc)_2 + (BH)_2$$

По формуле (2.9) находим:

$$A_2 = (A_I)_2 \cdot (A\Pi)_2 = \frac{P_1}{2L_1 \cdot H_1} \cdot \left(-\frac{C_1}{2D_1 \cdot (1+C_1^2)}\right); \quad B_2 = (A_I)_2 \cdot (B\Pi)_2 + (B_I)_2$$

Согласно равенству (2.4), для $k=2$:

$$F_2 = A_2 \cdot D_2 + B_2 = E_2; \quad D_2(x) = \frac{E_2 - B_2}{A_2}.$$

Подставляем найденные выражения:

$$D_2(x) = -\frac{E_2(x)}{\frac{P_1(x) \cdot C_1(x)}{4L_1(x) \cdot H_1(x) \cdot (1+C_1^2(x)) \cdot D_1(x)}},$$

откуда получаем результат, совпадающий с выражением $D_2(x)$ примера 2.1.

Теорема 2.3. Для заданного уравнения

$$F_1(D(x)) + F_2(D(x)) + \dots = 0$$

найжены аналитические нормированные производные D_k по формуле (2.7). Выполним в составной функции $F_1(D(x))$ замену внутренней функции $D(x)$ на функцию $\mu(D(x))$, зависящую от функции $D(x)$:

$$D(x) \rightarrow \mu(D(x))$$

Тогда новые аналитические производные $(D_N)_k$ определяются по формуле

$$(D_N)_k = \frac{D_k \cdot ((A1)_k + (A2)_k + \dots) - (A1)_k \cdot (B\mu)_k}{((A1)_k + (A2)_k + \dots) + (A1)_k \cdot ((A\mu)_k - 1)} \quad (2.10)$$

Доказательство. До замены составная функция $F1(D(x))$ имела вид

$$F1 = v(\dots \eta(D(x)) \dots),$$

а после замены составная функция получает новую внутреннюю функцию

$$F1 = v(\dots \eta(\mu(D(x))) \dots).$$

Разделим эту составную функцию на две части, как показано в выражении

$$F1 = v(\dots \eta(H(x)) \dots); \quad H = \mu(D(x)).$$

Тогда по формуле (2.5) находим:

$$(F1)_k = (A1)_k \cdot H_k + (B1)_k; \quad H_k = (A\mu)_k \cdot (D_N)_k + (B\mu)_k.$$

Применяем формулы (2.9):

$$(F1)_k = A_k \cdot (D_N)_k + B_k;$$

$$A_k = (A1)_k \cdot (A\mu)_k; \quad B_k = (A1)_k \cdot (B\mu)_k + (B1)_k$$

Подставим производные новой составной функции $F1$ в равенство (2.4).

$$((A1)_k \cdot (A\mu)_k \cdot (D_N)_k + (A1)_k \cdot (B\mu)_k + (B1)_k) + ((A2)_k \cdot (D_N)_k + (B2)_k) + \dots = 0;$$

$$\begin{aligned} (D_N)_k \cdot ((A1)_k \cdot (A\mu)_k - (A1)_k + ((A1)_k + (A2)_k + \dots)) = \\ = -(A1)_k \cdot (B\mu)_k + (-(B1)_k - (B2)_k - \dots). \end{aligned}$$

Подставляем выражение (2.7) производных функции $D(x)$ до замены и получаем

$$\begin{aligned} (D_N)_k \cdot ((A1)_k \cdot (A\mu)_k - (A1)_k + ((A1)_k + (A2)_k + \dots)) = \\ = -(A1)_k \cdot (B\mu)_k + ((A1)_k + (A2)_k + \dots) \cdot D_k, \end{aligned}$$

откуда следует формула (2.10), что требовалось доказать.

Лемма 2.4. Для уравнения частного вида

$$F1(D(x)) + F2(x) + F3(x) + \dots = 0$$

найлены аналитические нормированные производные D_k по формуле (2.7).

Выполним в составной функции $F1(D(x))$ замену внутренней функции $D(x)$ на функцию $\mu(D(x))$, зависящую от функции $D(x)$:

$$D(x) \rightarrow \mu(D(x)).$$

Тогда новые аналитические производные $(D_N)_k$ изменяются и могут быть определены по формуле

$$(D_N)_k = \frac{D_k}{(A\mu)_k} - \frac{(B\mu)_k}{(A\mu)_k} \quad (2.11)$$

Доказательство. Функции $F2(x)$, $F3(x)$,... не зависят от функции $D(x)$ и для них по формуле (2.5) $(A2)_k = (A3)_k = \dots = 0$. Подставляем эти значения в формулу (2.10)

$$(D_N)_k = \frac{D_k \cdot (A1)_k - (A1)_k \cdot (B\mu)_k}{((A1)_k) + (A1)_k \cdot ((A\mu)_k - 1)}$$

откуда получаем формулу (2.11), что требовалось доказать.

Пример 2.3.

Найдем аналитические выражения производных, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{\ln(\operatorname{arctg}(\sqrt{D(x)}))} = e^{S(x)},$$

где $S(x) = \sum_{k=0}^n s_{k+1} x^k$. Согласно формуле (2.11) функцию

$F(D(x)) = \sqrt{\ln(\operatorname{arctg}(\sqrt{D(x)}))}$ можно упростить до $F(x) = \sqrt{L(x)}$ и постепенно вводить в нее новые внутренние функции, пересчитывая найденные производные по формуле (2.11). Функция E_3 найдена в примере 2.1.

Расчет $D_3(x)$ ($k = 3$)

Этап 1.

$$F(x) = \sqrt{L(x)};$$

$$F_1(x) = \sqrt{L_1(x)}; F_3 = (A_F)_3 \cdot L_3 + (B_F)_3.$$

По рекуррентным формулам (табл. П.14) находим

$$(A_F)_3 = \frac{F_1}{2L_1}; (B_F)_3 = -\frac{F_2 \cdot L_2}{4L_1}.$$

Согласно равенству (2.4), для $k = 3$:

$$F_3 = (A_F)_3 \cdot L_3 + (B_F)_3 = E_3;$$

$$L_3 = \frac{E_3 - (B_F)_3}{(A_F)_3} = \frac{4L_1 \cdot E_3 + F_2 \cdot L_2}{2F_1}.$$

Этап 2.

Вводим замену функции $L(x)$

$$L(x) = \ln H(x); L_1 = \ln H_1.$$

По рекуррентным формулам (табл. П.16) находим:

$$(A_L)_3 = \frac{1}{H_1}; (B_L)_3 = -\frac{L_2 \cdot H_2}{2H_1}.$$

Пересчитываем производные по формуле (2.11)

$$H_3 = \frac{L_3}{(A_L)_3} - \frac{(B_L)_3}{(A_L)_3} = \frac{4L_1 \cdot H_1 \cdot E_3 + F_2 \cdot L_2 \cdot H_1 + L_2 \cdot H_2 \cdot F_1}{2F_1}.$$

Этап 3.

Вводим замену функции $H(x)$

$$H(x) = \operatorname{arctg}(C(x)); H_1 = \operatorname{arctg}(C_1).$$

По рекуррентным формулам (табл. П.17) находим:

$$(A_H)_3 = -\frac{1}{1+C_1^2}; (B_H)_3 = -\frac{C_1 \cdot C_2 \cdot H_2}{1+C_1^2}.$$

Пересчитываем производные по формуле (2.11):

$$C_3 = \frac{H_3}{(A_H)_3} - \frac{(B_H)_3}{(A_H)_3} = -(1+C_1^2) \frac{4L_1 \cdot H_1 \cdot E_3 + F_2 \cdot L_2 \cdot H_1 + L_2 \cdot H_2 \cdot F_1}{2F_1} - C_1 \cdot C_2 \cdot H_2$$

Этап 4.

Вводим замену функции $C(x)$

$$C(x) = \sqrt{D(x)}; C_1 = \sqrt{D_1}.$$

По рекуррентным формулам (табл. П.14) находим:

$$(A_C)_3 = \frac{C_1}{2D_1}; (B_C)_3 = -\frac{C_2 \cdot D_2}{4D_1}.$$

Пересчитываем производные по формуле (2.11)

$$D_3(x) = \frac{C_3}{(A_C)_3} - \frac{(B_C)_3}{(A_C)_3} = \frac{C_3 \cdot 2D_1}{C_1} + \frac{C_2 \cdot D_2}{2C_1}.$$

Подставляем найденные выражения и получаем аналитическую производную

$$D_3(x) = -\frac{4D_1 \cdot (1+C_1^2) \cdot H_1 \cdot L_1}{F_1 \cdot C_1} E_3 - \frac{D_1 \cdot L_2 \cdot (1+C_1^2) \cdot (H_1 \cdot F_2 + H_2 \cdot F_1)}{F_1 \cdot C_1} - \\ - \frac{C_2 \cdot F_1 \cdot (4C_1 \cdot H_2 \cdot D_1 - D_2)}{2F_1 \cdot C_1}$$

которая совпадает с результатом, полученным для $D_3(x)$ примера 2.1.

Вычисления производных по частям или с последовательной заменой внутренней функции являются приемами, упрощающими аналитический расчет производных. Формально в расчете производных используются выражения $(F_I)_1$, $(F_{II})_1$, $(F_{III})_1, \dots$, но они являются промежуточными и в дальнейшем заменяются другими выражениями (в примере 2.3 появляются аналитические выражения $F_1(x)$, $L_1(x)$, $H_1(x)$, $C_1(x)$). Это связано с тем, что описанные приемы расчета нельзя опустить на самый нижний уровень, а именно в заданное уравнение, которое обычно не допускает деления на части. Единственным выражением, которое должно входить в конечный результат, является аналитическое решение уравнения $D_1(x)$, и через него надо выражать все промежуточные результаты. Так, в конечный результат примера 2.3 должны быть подставлены выражения:

$$C_1(x) = \sqrt{D_1(x)}; H_1(x) = \operatorname{arccctg}(\sqrt{D_1(x)}); L_1(x) = \ln(\operatorname{arccctg}(\sqrt{D_1(x)}));$$

$$F_1(x) = \sqrt{\ln(\operatorname{arccctg}(\sqrt{D_1(x)}))}$$

Теорема 2.4. Рассмотрим функцию

$$F = U(D(x)) \cdot V(D(x)),$$

для сомножителей которой выполнен аналитический расчет обратного

рекуррентного дифференцирования

$$U_k = (Au)_k \cdot D_k + (Bu)_k; \quad V_k = (Av)_k \cdot D_k + (Bv)_k. \quad (2.12)$$

Тогда нормированные производные функции F определяются по формуле

$$F_k = A_k \cdot D_k + B_k,$$

где

$$A_k = V_1 \cdot (Au)_k + U_1 \cdot (Av)_k; \quad B_k = V_1 \cdot (Bu)_k + U_1 \cdot (Bv)_k + \sum_{i=1}^{k-2} U_{i+1} \cdot V_{k-i} \quad (2.13)$$

В случае более простой функции

$$F = U(D(x)) \cdot V(x),$$

получаем «короткую» операцию обратного рекуррентного умножения, для которой

$$A_k = V_1 \cdot (Au)_k; \quad B_k = V_1 \cdot (Bu)_k + \sum_{i=0}^{k-2} U_{i+1} \cdot V_{k-i} \quad (2.14)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем прямую рекуррентную формулу функции F (1.7, раздел 1.1) и выделим из нее некоторые слагаемые

$$F_k = \sum_{i=0}^{k-1} U_{i+1} \cdot V_{k-i} = V_1 \cdot U_k + U_1 \cdot V_k + \sum_{i=1}^{k-2} U_{i+1} \cdot V_{k-i}.$$

Подставим в нее формулы (2.12)

$$\begin{aligned} F_k &= V_1 \cdot ((Au)_k \cdot D_k + (Bu)_k) + U_1 \cdot ((Av)_k \cdot D_k + (Bv)_k) + \sum_{i=1}^{k-2} U_{i+1} \cdot V_{k-i} = \\ &= (V_1 \cdot (Au)_k + U_1 \cdot (Av)_k) \cdot D_k + (V_1 \cdot (Bu)_k + U_1 \cdot (Bv)_k) + \sum_{i=1}^{k-2} U_{i+1} \cdot V_{k-i} \end{aligned}$$

откуда следуют формулы (2.13). В случае, когда функция второго сомножителя не содержит $D(x)$, изменим преобразование рекуррентной формулы функции F

$$\begin{aligned} F_k &= V_1 \cdot U_k + \sum_{i=0}^{k-2} U_{i+1} \cdot V_{k-i} = V_1 \cdot ((Au)_k \cdot D_k + (Bu)_k) + \sum_{i=0}^{k-2} U_{i+1} \cdot V_{k-i} = \\ &= V_1 \cdot (Au)_k \cdot D_k + V_1 \cdot (Bu)_k + \sum_{i=0}^{k-2} U_{i+1} \cdot V_{k-i} \end{aligned}$$

откуда следуют формулы (2.14), что требовалось доказать.

Уточним задачу Лейбница-Коши.

Прямая задача Лейбница-Коши.

Заданы две функции $U(x)$, $V(x)$ с известными нормированными производными:

$$U_1(x) = U(x); \quad U_2(x) = \frac{dU(x)}{dx}; \quad U_3(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2U(x)}{dx^2}; \quad U_4(x) = \frac{1}{6} \frac{d^3U(x)}{dx^3}; \dots$$

$$V_1(x) = V(x); \quad V_2(x) = \frac{dV(x)}{dx}; \quad V_3(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2V(x)}{dx^2}; \quad V_4(x) = \frac{1}{6} \frac{d^3V(x)}{dx^3}; \dots$$

Тогда производные функции $F(x) = U(x) \cdot V(x)$ вычисляются по формуле

$$F_k = \sum_{r=0}^{k-1} U_{r+1} \cdot V_{k-r} \quad ,$$

и задача имеет единственное решение.

Эта задача была сначала сформулирована и решена Лейбницем как задача дифференцирования произведения двух аналитических функций, и позже была сформулирована и решена Коши как задача умножения численных степенных рядов. Идентичность этих, как кажется, разных задач была показана в разделе 1.1.

Теперь сформулируем новую задачу – обратную.

Обратная задача Лейбница-Коши.

Задана функция $F(x) = U(x) \cdot V(x)$ с известными нормированными производными:

$$F_1(x) = F(x) ; F_2(x) = \frac{dF(x)}{dx} ; F_3(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 F(x)}{dx^2} ; F_4(x) = \frac{1}{6} \frac{d^3 F(x)}{dx^3} ; \dots$$

Необходимо вычислить нормированные производные функций сомножителей:

$$U_1(x) = U(x) ; U_2(x) = \frac{dU(x)}{dx} ; U_3(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 U(x)}{dx^2} ; U_4(x) = \frac{1}{6} \frac{d^3 U(x)}{dx^3} ; \dots$$

$$V_1(x) = V(x) ; V_2(x) = \frac{dV(x)}{dx} ; V_3(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 V(x)}{dx^2} ; V_4(x) = \frac{1}{6} \frac{d^3 V(x)}{dx^3} ; \dots$$

Теорема 2.5. Задано уравнение

$$U(D(x)) \cdot V(D(x)) = F(x) \quad , \quad (2.15)$$

в котором известны нормированные производные функции правой части уравнения:

$$F_1(x) = F(x) ; F_2(x) = \frac{dF(x)}{dx} ; F_3(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 F(x)}{dx^2} ; F_4(x) = \frac{1}{6} \frac{d^3 F(x)}{dx^3} ; \dots$$

Тогда нормированные производные функций $U(x)$, $V(x)$ вычисляются по формулам

$$U_k = (Av)_k \cdot D_k + (Bu)_k ; V_k = (Av)_k \cdot D_k + (Bv)_k , \quad (2.16a)$$

где

$$D_k = \frac{F_k - (V_1 \cdot (Bu)_k + U_1 \cdot (Bv)_k + \sum_{i=1}^{k-2} U_{i+1} \cdot V_{k-i})}{V_1 \cdot (Av)_k + U_1 \cdot (Av)_k} ; \quad (2.16b)$$

$(Av)_k$, $(Bu)_k$, $(Av)_k$, $(Bv)_k$ – компоненты производных сомножителей (табл. П.14 – П.18). Если найдено выражение $D_1(x)$, удовлетворяющее уравнению (2.15), то решение задачи единственное.

Доказательство. Находим в обратном рекуррентном дифференцировании производные сомножителей левой части уравнения (2.15)

$$U_k = (Av)_k \cdot D_k + (Bu)_k ; V_k = (Av)_k \cdot D_k + (Bv)_k .$$

Введем функцию левой части уравнения (2.15) $\Phi = U(D(x)) \cdot V(D(x))$ и в обратном рекуррентном дифференцировании найдем производные функции Φ как произведения двух сомножителей по формуле (2.5)

$$\Phi_k = A_k \cdot D_k + B_k.$$

Подставляем A_k , B_k из формулы (2.13)

$$\Phi_k = (V_1 \cdot (Av)_k + U_1 \cdot (Av)_k) \cdot D_k + V_1 \cdot (Bv)_k + U_1 \cdot (Bv)_k + \sum_{i=1}^{k-2} U_{i+1} \cdot V_{k-i}.$$

Согласно уравнению (2.15), $\Phi_k = F_k$ и из равенства (2.4) находим

$$D_k = \frac{F_k - B_k}{A_k} = \frac{F_k - (V_1 \cdot (Bv)_k + U_1 \cdot (Bv)_k + \sum_{i=1}^{k-2} U_{i+1} \cdot V_{k-i})}{V_1 \cdot (Av)_k + U_1 \cdot (Av)_k}.$$

Подставляя найденное выражение в формулы U_k , V_k (2.16a), получаем формулы производных сомножителей (2.15). Все приведенные формулы однозначны, откуда следует единственность решения задачи для найденной функции D_1 , что требовалось доказать.

Пример 2.4.

Зададим функцию произведения двух сомножителей

$$\Phi(x) = U(x) \cdot V(x) = \ln D(x) \cdot e^{D(x)},$$

и считаем известными аналитические нормированные производные

$$F_1(x) = F(x); F_2(x); F_3(x); F_4(x); F_5(x); \dots$$

в уравнении (2.15). Предполагаем, что найдено аналитическое выражение $D_1(x)$, удовлетворяющее уравнению

$$\ln D_1(x) \cdot e^{D_1(x)} = F_1(x).$$

Найдем аналитическое решение обратной задачи Лейбница-Коши и определим аналитические производные сомножителей U_k , V_k , применяя обратное рекуррентное дифференцирование.

Расчет $U_2(x)$, $V_2(x)$ ($k = 2$).

Этап 1.

Рассмотрим первый сомножитель

$$U(x) = \ln D(x); U_1(x) = \ln D_1(x).$$

Применяя рекуррентные формулы (табл. П.16), находим:

$$(Av)_2 = \frac{1}{D_1}; (Bv)_2 = 0; U_2 = (Av)_2 \cdot \boxed{D_2} + (Bv)_2.$$

Этап 2.

Рассмотрим второй сомножитель

$$V(x) = e^{D(x)}; V_1(x) = e^{D_1(x)}$$

Применяя рекуррентные формулы (табл. П.14), находим:

$$(Av)_2 = V_1; (Bv)_2 = 0; V_2 = (Av)_2 \cdot \boxed{D_2} + (Bv)_2.$$

Этап 3.

Определяем нормированные производные функции произведения, используя формулу (2.13):

$$A_2 = U_1 \cdot (Av)_2 + V_1 \cdot (Av)_2; B_2 = U_1 \cdot (Bv)_2 + V_1 \cdot (Bu)_2 = 0; \Phi_2 = A_2 \cdot \boxed{D_2} + B_2$$

Согласно равенству (2.4), для $k = 2$:

$$\Phi_2 = F_2; D_2(x) = \frac{F_2}{A_2} = \frac{F_2(x)}{U_1(x) \cdot (Av)_2 + V_1(x) \cdot (Av)_2};$$

$$U_2(x) = (Av)_2 \cdot D_2(x) + (Bv)_2; V_2(x) = (Av)_2 \cdot D_2(x) + (Bv)_2$$

Расчет $U_3(x)$, $V_3(x)$ ($k = 3$).

Этап 1.

Рассмотрим первый сомножитель

$$U(x) = \ln D(x); U_1(x) = \ln D_1(x).$$

Применяя рекуррентные формулы (табл. П.16), находим:

$$(Av)_3 = \frac{1}{D_1}; (Bv)_3 = -\frac{U_2 \cdot D_2}{2D_1}; U_3 = (Av)_3 \cdot \boxed{D_3} + (Bv)_3.$$

Этап 2.

Рассмотрим второй сомножитель

$$V(x) = e^{D(x)}; V_1(x) = e^{D_1(x)}.$$

Применяя рекуррентные формулы (табл. П.14), находим:

$$(Av)_3 = V_1; (Bv)_3 = \frac{V_2 \cdot D_2}{2}; V_3 = (Av)_3 \cdot \boxed{D_3} + (Bv)_3.$$

Этап 3.

Определяем нормированные производные функции произведения, используя формулу (2.13):

$$A_3 = U_1 \cdot (Av)_3 + V_1 \cdot (Av)_3; B_3 = U_1 \cdot (Bv)_3 + V_1 \cdot (Bu)_3 + U_2 \cdot V_2;$$

$$\Phi_3 = A_3 \cdot \boxed{D_3} + B_3$$

Согласно равенству (2.4), для $k = 3$:

$$\Phi_3 = F_3; D_3(x) = \frac{F_3 - B_3}{A_3} = \frac{F_3(x) - (U_1(x) \cdot (Bv)_3 + V_1(x) \cdot (Bu)_3 + U_2(x) \cdot V_2(x))}{U_1(x) \cdot (Av)_3 + V_1(x) \cdot (Av)_3};$$

$$U_3(x) = (Av)_3 \cdot D_3(x) + (Bv)_3; V_3(x) = (Av)_3 \cdot D_3(x) + (Bv)_3$$

Найдем *численное* решение обратной задачи Лейбница-Коши, задав численные нормированные производные:

$$F_1 = 0; F_2 = 2e; F_3 = 3e; F_4 = \frac{14}{3}e; F_5 = \frac{9}{2}e; (e = 2,718282...)$$

Для заданной функции существует численное значение D_1 , удовлетворяющее уравнению

$$\ln D_1 \cdot e^{D_1} = F_1 ; \quad D_1 = 1.$$

Находим $U_1 = \ln D_1 = 0$; $V_1 = e^{D_1} = e$.

Определим численные производные сомножителей U_k, V_k , ($k = 2, 3, \dots$) , применяя обратное рекуррентное дифференцирование .

Численный расчет U_2, V_2 ($k = 2$) .

Для первого сомножителя:

$$U = \ln D ; \quad U_1 = \ln D_1 = 0 ; \quad (Au)_2 = 1 ; (Bu)_2 = 0 .$$

Для второго сомножителя:

$$V = e^D ; \quad V_1 = e^{D_1} = e ; \quad (Av)_2 = e ; (Bv)_2 = 0 .$$

Определяем нормированные производные функции произведения сомножителей, используя формулу (2.13):

$$A_2 = U_1 \cdot (Av)_2 + V_1 \cdot (Au)_2 = e ; \quad B_2 = U_1 \cdot (Bv)_2 + V_1 \cdot (Bu)_2 = 0 .$$

Согласно равенству (2.4), для $k = 2$:

$$\Phi_2 = F_2 ; \quad D_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{2e}{e} = 2 ; \quad U_2 = (Au)_2 \cdot D_2 + (Bu)_2 = 2 ; V_2 = (Av)_2 \cdot D_2 + (Bv)_2 = 2e$$

Численный расчет U_3, V_3 ($k = 3$) .

Для первого сомножителя:

$$U = \ln D ; \quad (Au)_3 = 1 ; (Bu)_3 = -\frac{U_2 \cdot D_2}{2D_1} = -2 .$$

Для второго сомножителя:

$$V = e^D ; \quad (Av)_3 = e ; (Bv)_3 = \frac{V_2 \cdot D_2}{2} = 2e .$$

Определяем нормированные производные функции произведения, используя формулу (2.13):

$$A_3 = U_1 \cdot (Av)_3 + V_1 \cdot (Au)_3 = e ; \quad B_3 = U_1 \cdot (Bv)_3 + V_1 \cdot (Bu)_3 + U_2 \cdot V_2 = 2e .$$

Согласно равенству (2.4), для $k = 3$:

$$D_3 = \frac{F_3 - B_3}{A_3} = \frac{3e - 2e}{e} = 1 ;$$

$$U_3 = (Au)_3 \cdot D_3 + (Bu)_3 = -1 ; \quad V_3 = (Av)_3 \cdot D_3 + (Bv)_3 = 3e$$

Численный расчет U_4, V_4 ($k = 4$) :

$$U = \ln D ; \quad (Au)_4 = 1 ; (Bu)_4 = -\frac{U_2 \cdot D_3 + 2U_3 \cdot D_2}{3D_1} = \frac{2}{3} ;$$

$$V = e^D ; \quad (Av)_4 = e ; (Bv)_4 = \frac{V_3 \cdot D_2 + 2V_2 \cdot D_3}{3} = \frac{10}{3} e .$$

Определяем нормированные производные функции произведения, используя формулу (2.13):

$$A_4 = e ; \quad B_4 = U_1 \cdot (Bv)_4 + V_1 \cdot (Bu)_4 + U_3 \cdot V_2 + U_2 \cdot V_3 = \frac{14}{3} e$$

Согласно равенству (2.4), для $k = 4$:

$$D_4(x) = \frac{F_4 - B_4}{A_4} = \frac{\frac{14}{3}e - \frac{14}{3}e}{e} = 0;$$

$$U_4 = (A_U)_4 \cdot D_4 + (B_U)_4 = \frac{2}{3}; \quad V_4 = (A_V)_4 \cdot D_4 + (B_V)_4 = \frac{10}{3}e.$$

Численный расчет U_5, V_5 ($k = 5$):

$$U = \ln D; \quad (A_U)_5 = 1; \quad (B_U)_5 = -\frac{U_2 \cdot D_4 + 2U_3 \cdot D_3 + 3U_4 \cdot D_2}{4D_1} = -\frac{1}{2};$$

$$V = e^D; \quad (A_V)_5 = e; \quad (B_V)_5 = \frac{V_4 \cdot D_2 + 2V_3 \cdot D_3 + 3V_2 \cdot D_4}{4} = \frac{19}{6}e.$$

Определяем нормированные производные функции произведения, используя формулу (2.13):

$$A_5 = e; \quad B_5 = U_1 \cdot (B_V)_5 + V_1 \cdot (B_U)_5 + U_4 \cdot V_2 + U_3 \cdot V_3 + U_2 \cdot V_4 = \frac{9}{2}e.$$

Согласно равенству (2.4), для $k = 5$:

$$D_5 = \frac{F_5 - B_5}{A_5} = \frac{\frac{9}{2}e - \frac{9}{2}e}{e} = 0;$$

$$U_5 = (A_U)_5 \cdot D_5 + (B_U)_5 = -\frac{1}{2}; \quad V_5 = (A_V)_5 \cdot D_5 + (B_V)_5 = \frac{19}{6}e$$

Таким образом, для заданных нормированных производных функции произведения двух сомножителей:

$$F_1 = 0; \quad F_2 = 2e; \quad F_3 = 3e; \quad F_4 = \frac{14}{3}e; \quad F_5 = \frac{9}{2}e; \quad (e = 2,718282...)$$

нормированные производные внутренней функции равны:

$$D_1 = 1; \quad D_2 = 2; \quad D_3 = 1; \quad D_4 = 0; \quad D_5 = 0;$$

В результате получаем численные нормированные производные сомножителей:

$$U_1 = 0; \quad U_2 = 2; \quad U_3 = -1; \quad U_4 = \frac{2}{3}; \quad U_5 = -\frac{1}{2};$$

$$V_1 = e; \quad V_2 = 2e; \quad V_3 = 3e; \quad V_4 = \frac{10}{3}e; \quad V_5 = \frac{19}{6}e; \quad (e = 2,718282...)$$

При решении задачи не указывается, в какой точке x_0 вычислены найденные производные. По умолчанию в этой точке заданы численные производные F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 .

Теорема 2.6. Рассмотрим функцию произведения сомножителей

$$F = U(D(x)) \cdot V(D(x)) \cdot W(D(x)) \cdot P(D(x)) \cdots R(D(x)) \cdot S(D(x)) \cdot T(D(x)),$$

для сомножителей которой выполнен аналитический расчет обратного рекуррентного дифференцирования:

$$\begin{aligned} U_k &= (A_U)_k \cdot D_k + (B_U)_k; \quad V_k = (A_V)_k \cdot D_k + (B_V)_k; \\ W_k &= (A_W)_k \cdot D_k + (B_W)_k; \quad P_k = (A_P)_k \cdot D_k + (B_P)_k; \\ &\vdots \\ R_k &= (A_R)_k \cdot D_k + (B_R)_k; \quad S_k = (A_S)_k \cdot D_k + (B_S)_k; \\ T_k &= (A_T)_k \cdot D_k + (B_T)_k \end{aligned} \tag{2.17}$$

Тогда нормированные производные функции определяются по формуле

$$F_k = A_k \cdot D_k + B_k ,$$

где

$$A_k = U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot (Ar)_k + U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot T_1 \cdot (As)_k + \\ + U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdots S_1 \cdot T_1 \cdot (Ar)_k + \dots + U_1 \cdot V_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot T_1 \cdot (Aw)_k + \\ + U_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot T_1 \cdot (Av)_k + V_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot T_1 \cdot (Au)_k; \quad (2.18a)$$

$$\begin{aligned} B_k = & U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot (B_T)_k + U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot T_1 \cdot (B_S)_k + \\ & + U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdots S_1 \cdot T_1 \cdot (B_R)_k + \dots + U_1 \cdot V_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot T_1 \cdot (B_W)_k + \\ & + U_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot T_1 \cdot (B_V)_k + V_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot T_1 \cdot (B_U)_k + (B_\Sigma)_k; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(B_{\Sigma})_k &= \sum_{l=1}^{k-2} \left(\sum_{q=0}^l \left(\dots \left(\sum_{j=0}^l \left(\sum_{i=0}^j \left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r} \right) \cdot W_{j+1-i} \right) \dots \right) \cdot S_{l+1-q} \right) \cdot T_{k-l} + \right. \\
&+ T_1 \cdot \left(\dots \left(\sum_{j=0}^j \left(\sum_{i=0}^i \left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r} \right) \cdot W_{j+1-i} \right) \dots \right) \cdot S_{k-l} + \right. \\
&+ S_1 \cdot \left(\dots \left(\sum_{i=0}^j \left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r} \right) \cdot W_{j+1-i} \right) \dots + \right. \\
&\vdots \\
&+ \square_1 \cdot \left(\left(\sum_{j=0}^l \left(\sum_{i=0}^j \left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r} \right) \cdot W_{j+1-i} \right) \cdot L_{l+1-j} \right) \cdot P_{k-l} + \right. \\
&+ P_1 \cdot \left(\left(\sum_{i=0}^l \left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r} \right) \cdot W_{l+1-i} \right) \cdot L_{k-l} + L_1 \cdot \left(\left(\sum_{r=0}^l U_{r+1} \cdot V_{l+1-r} \right) \cdot W_{k-l} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + W_1 \cdot (U_{l+1}) \cdot V_{k-l} \right) \right) \right) \right) \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.186}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для функции с двумя сомножителями $H = U(D) \cdot V(D)$ производные определяются по формуле Лейбница-Коши

$$H_k = \sum_{r=0}^{k-1} U_{r+1} \cdot V_{k-r} = V_1 \cdot U_k + U_1 \cdot V_k + \sum_{r=1}^{k-2} U_{r+1} \cdot V_{k-r} \quad .$$

Подставляем формулы (2.17) и выделяем A_k , B_k , $(B_\Sigma)_k$.

$$\mathbf{H}_k = V_1 \cdot ((A_U)_k \cdot D_k + (B_U)_k) + U_1 \cdot ((A_V)_k \cdot D_k + (B_V)_k) + \sum_{r=1}^{k-2} U_{r+1} \cdot V_{k-r};$$

$$A_k = V_1 \cdot (Av)_k + U_1 \cdot (Av)_k; \quad B_k = V_1 \cdot (Bu)_k + U_1 \cdot (Bv)_k + (B\Sigma)_k;$$

$$(B\Sigma)_k = \sum_{r=1}^{k-2} U_{r+1} \cdot V_{k-r}$$

Для функции с тремя сомножителями $\Psi = (U(D) \cdot V(D)) \cdot W(D) = H(D) \cdot W(D)$ производные определяются по формуле

$$\begin{aligned} \Psi_k &= \sum_{i=0}^{k-1} H_{i+1} \cdot W_{k-i} = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r} \right) \cdot W_{k-i} = W_1 \cdot H_k + H_1 \cdot W_k + \sum_{i=1}^{k-2} H_{i+1} W_{k-i} = \\ &= W_1 \cdot (V_1 \cdot U_k + U_1 \cdot V_k + \sum_{r=1}^{k-2} U_{r+1} \cdot V_{k-r}) + (U_1 \cdot V_1) \cdot W_k + \sum_{i=1}^{k-2} \left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} V_{i+1-r} \right) \cdot W_{k-i} = \\ &= U_1 \cdot V_1 \cdot W_k + V_1 \cdot W_1 \cdot U_k + U_1 \cdot W_1 \cdot V_k + \sum_{i=1}^{k-2} \left(\left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} V_{i+1-r} \right) W_{k-i} + W_1 \cdot (U_{i+1}) \cdot V_{k-i} \right) \end{aligned}$$

Подставляем формулы (2.17)

$$\begin{aligned} \Psi_k &= U_1 \cdot V_1 \cdot ((Aw)_k \cdot D_k + (Bw)_k) + V_1 \cdot W_1 \cdot ((Av)_k \cdot D_k + (Bu)_k) + \\ &+ U_1 \cdot W_1 \cdot ((Av)_k \cdot D_k + (Bv)_k) + \sum_{i=1}^{k-2} \left(\left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r} \right) \cdot W_{k-i} + W_1 \cdot (U_{i+1}) \cdot V_{k-i} \right) \end{aligned}$$

и выделяем $A_k, B_k, (B\Sigma)_k$:

$$A_k = U_1 \cdot V_1 \cdot (Aw)_k + V_1 \cdot W_1 \cdot (Av)_k + U_1 \cdot W_1 \cdot (Av)_k;$$

$$B_k = U_1 \cdot V_1 \cdot (Bw)_k + V_1 \cdot W_1 \cdot (Bu)_k + U_1 \cdot W_1 \cdot (Bv)_k + (B\Sigma)_k;$$

$$(B\Sigma)_k = \sum_{i=1}^{k-2} \left(\left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r} \right) \cdot W_{k-i} + W_1 \cdot (U_{i+1}) \cdot V_{k-i} \right)$$

По аналогии для функции с четырьмя сомножителями

$$\Pi = (U(D) \cdot V(D) \cdot W(D)) \cdot L(D) = \Psi(D) \cdot L(D)$$

найдем ее производные

$$\begin{aligned} \Pi_k &= \sum_{j=0}^{k-1} \Psi_{j+1} \cdot L_{k-j} = L_1 \cdot \Psi_k + \Psi_1 \cdot L_k + \sum_{j=1}^{k-2} \Psi_{j+1} \cdot L_{k-j} = \\ &= L_1 \cdot (U_1 \cdot V_1 \cdot W_k + V_1 \cdot W_1 \cdot U_k + U_1 \cdot W_1 \cdot V_k + \sum_{i=1}^{k-2} \left(\left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r} \right) \cdot W_{k-i} + \right. \\ &+ \left. W_1 \cdot (U_{i+1}) \cdot V_{k-i} \right)) + (U_1 \cdot V_1 \cdot W_1) \cdot L_k + \sum_{j=1}^{k-2} \left(\sum_{i=0}^j \left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r} \right) \cdot W_{j+1-i} \right) \cdot L_{k-j}. \end{aligned}$$

Изменяя индекс в первой сумме последнего выражения $i \rightarrow j$ и объединяя две суммы, получаем промежуточные выражения:

$$\Pi_k = U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot L_k + U_1 \cdot V_1 \cdot L_1 \cdot W_k + U_1 \cdot W_1 \cdot L_1 \cdot V_k + V_1 \cdot W_1 \cdot L_1 \cdot U_k + (B\Sigma)_k;$$

$$\begin{aligned} (B\Sigma)_k &= \sum_{j=1}^{k-2} \left(\left(\sum_{i=0}^j \left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r} \right) \cdot W_{j+1-i} \right) \cdot L_{k-j} + \right. \\ &+ \left. L_1 \cdot \left(\left(\sum_{r=0}^j U_{r+1} \cdot V_{j+1-r} \right) \cdot W_{k-j} + W_1 \cdot (U_{j+1}) \cdot V_{k-j} \right) \right). \end{aligned}$$

Подставляем формулы (2.17)

$$\begin{aligned}\Pi_k = & U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot ((A_L)_k \cdot D_k + (B_L)_k) + U_1 \cdot V_1 \cdot L_1 \cdot ((A_W)_k \cdot D_k + (B_W)_k) + \\ & + U_1 \cdot W_1 \cdot L_1 \cdot ((A_V)_k \cdot D_k + (B_V)_k) + V_1 \cdot W_1 \cdot L_1 \cdot ((A_U)_k \cdot D_k + (B_U)_k) + (B_\Sigma)_k; \\ \text{и выделяем в данном выражении } & A_k, B_k : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_k = & U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot (A_L)_k \cdot D_k + U_1 \cdot V_1 \cdot L_1 \cdot (A_W)_k + U_1 \cdot W_1 \cdot L_1 \cdot (A_V)_k + \\ & + V_1 \cdot W_1 \cdot L_1 \cdot (A_U)_k; \\ B_k = & U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot (B_L)_k \cdot D_k + U_1 \cdot V_1 \cdot L_1 \cdot (B_W)_k + U_1 \cdot W_1 \cdot L_1 \cdot (B_V)_k + \\ & + V_1 \cdot W_1 \cdot L_1 \cdot (B_U)_k + (B_\Sigma)_k\end{aligned}$$

По аналогии для функции пяти сомножителей

$$\Phi = (U(D) \cdot V(D) \cdot W(D) \cdot L(D)) \cdot P(D) = \Pi(D) \cdot P(D)$$

можно записать

$$\Phi_k = \sum_{q=0}^{k-1} \Pi_{q+1} \cdot P_{k-q} = \Pi_1 \cdot P_k + P_1 \cdot \Pi_k + \sum_{q=1}^{k-2} \Pi_{q+1} \cdot P_{k-q}.$$

Подставляя промежуточные выражения Π_k , $(B_\Sigma)_k$, получаем

$$\begin{aligned}\Phi_k = & (U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot L_1) \cdot P_k + P_1 \cdot (U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot L_k + U_1 \cdot V_1 \cdot L_1 \cdot W_k + V_1 \cdot W_1 \cdot L_1 \cdot U_k + \\ & + U_1 \cdot W_1 \cdot L_1 \cdot V_k + \sum_{j=1}^{k-2} ((\sum_{i=0}^j (\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r}) \cdot W_{j+1-i}) \cdot L_{k-j} + \\ & + L_1 \cdot ((\sum_{r=0}^j U_{r+1} \cdot V_{j+1-r}) \cdot W_{k-j} + W_1 \cdot (U_{j+1}) \cdot V_{k-j}))) + \\ & + \sum_{q=1}^{k-2} (\sum_{j=0}^q (\sum_{i=0}^j (\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r}) \cdot W_{j+1-i}) \cdot L_{q+1-j}) \cdot P_{k-q}.\end{aligned}$$

Изменяя индекс в первой сумме $\sum_{j=1}^{k-2}$ на $\sum_{q=1}^{k-2}$ и объединяя две одинаковых

суммы, получаем окончательные выражения

$$\begin{aligned}\Phi_k = & U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot L_1 \cdot P_k + U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdot L_k + U_1 \cdot V_1 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdot W_k + \\ & + U_1 \cdot W_1 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdot V_k + V_1 \cdot W_1 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdot U_k + (B_\Sigma)_k;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(B_\Sigma)_k = & \sum_{q=1}^{k-2} (\sum_{j=0}^q ((\sum_{i=0}^j (\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r}) \cdot W_{j+1-i}) \cdot L_{q+1-j}) \cdot P_{k-q} + \\ & + P_1 \cdot ((\sum_{i=0}^q (\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r}) \cdot W_{q+1-i}) \cdot L_{k-q} + L_1 \cdot ((\sum_{r=0}^q U_{r+1} \cdot V_{q+1-r}) \cdot W_{k-q} + \\ & + W_1 \cdot (U_{q+1}) \cdot V_{k-q})))\end{aligned}$$

Полагаем, что теорема доказана для функции общего вида

$$\Phi = (U(D) \cdot V(D) \cdot W(D) \cdot L(D)) \cdot P(D) \cdots R(D) \cdot S(D)$$

и найдены выражения

$$\Phi_k = U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_k + U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdots S_1 \cdot R_k +$$

Преобразуем выражение F_k

$$\begin{aligned} F_k = & U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot T_k + T_1 \cdot U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdots S_1 \cdot T_1 \cdot R_k + \\ & + U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot L_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot T_1 \cdot P_k + U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot T_1 \cdot L_k + \\ & + U_1 \cdot V_1 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot T_1 \cdot W_k + U_1 \cdot W_1 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot T_1 \cdot V_k + \\ & + V_1 \cdot W_1 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot T_1 \cdot U_k + B_\Sigma . \end{aligned}$$

Подставляя в него формулы (2.17) и сравнивая с формулой $F_k = A_k \cdot D_k + B_k$ обратного рекуррентного дифференцирования, получаем формулы (2.18а), что требовалось доказать.

Пример 2.5

Зададим уравнение

$$\ln D(x) \cdot e^{\operatorname{arctg} D(x)} \cdot (D(x))^5 = \sin C(x); \quad C(x) = 1 - x + x^2 ,$$

имеющее аналитическое решение $D(x) = D_1(x)$. Определим аналитические производные решения, применяя обратное рекуррентное дифференцирование. Находим нормированные производные полинома:

$$C_1(x) = 1 - x + x^2; \quad C_2(x) = -1 + 2x; \quad C_3(x) = 1 .$$

Применяя прямую рекуррентную формулу (табл. П.8), находим нормированные производные правой части уравнения:

$$E(x) = \sin C(x); \quad E_1 = \sin C_1;$$

$$E_2 = \sqrt{1 - E_1^2} \cdot C_2; \quad E_3 = \frac{4(1 - E_1^2) \cdot C_2 \cdot C_3 - 2E_1 \cdot E_2 \cdot C_2^2}{4E_2} .$$

Найдем формулы (2.17) для всех сомножителей левой части уравнения.

Этап 1.

Рассмотрим первый сомножитель

$$U = \ln D(x); \quad U_1 = \ln D_1(x)$$

и применим формулы обратного дифференцирования (табл. П.16):

$$(Au)_2 = \frac{1}{D_1}; \quad (Bu)_2 = 0; \quad U_2 = (Au)_2 \cdot \boxed{D_2} + (Bu)_2 = \frac{\boxed{D_2}}{D_1};$$

$$(Au)_3 = \frac{1}{D_1}; \quad (Bu)_3 = -\frac{U_2 \cdot D_2}{2D_1}; \quad U_3 = (Au)_3 \cdot \boxed{D_3} + (Bu)_3 .$$

Этап 2.

Рассмотрим второй сомножитель

$$V = e^{\operatorname{arctg} D(x)}; \quad V_1 = e^{\operatorname{arctg} D_1(x)};$$

и применим формулы обратного дифференцирования (табл. П.18):

$$(Av)_2 = -\frac{V_1}{1 + D_1^2}; \quad (Bv)_2 = 0; \quad V_2 = (Av)_2 \cdot \boxed{D_2} + (Bv)_2 = -\frac{V_1}{1 + D_1^2} \boxed{D_2}$$

$$(Av)_3 = -\frac{V_1}{1 + D_1^2}; \quad (Bv)_3 = -\frac{V_2 \cdot D_2 \cdot (1 + 2D_1)}{2(1 + D_1^2)}; \quad V_3 = (Av)_3 \cdot \boxed{D_3} + (Bv)_3$$

Этап 3.

Рассмотрим третий сомножитель

$$W = (D(x))^5; W_1 = (D_1(x))^5$$

и применим формулы обратного дифференцирования (табл. П.18):

$$(Aw)_2 = \frac{5W_1}{D_1}; (Bw)_2 = 0; W_2 = (Aw)_2 \cdot \boxed{D_2} + (Bw)_2 = \frac{5W_1}{D_1} \boxed{D_2};$$

$$(Aw)_3 = \frac{5W_1}{D_1}; (Bw)_3 = \frac{2W_2 \cdot D_2}{D_1}; W_3 = (Aw)_3 \cdot \boxed{D_3} + (Bw)_3.$$

Определяем нормированные производные функции $F = U(D) \cdot V(D) \cdot W(D)$ по формулам (2.18) для произведения трех сомножителей:

$$A_k = U_1 \cdot V_1 \cdot (Aw)_k + U_1 \cdot W_1 \cdot (Av)_k + V_1 \cdot W_1 \cdot (Au)_k;$$

$$B_k = U_1 \cdot V_1 \cdot (Bw)_k + U_1 \cdot W_1 \cdot (Bv)_k + V_1 \cdot W_1 \cdot (Bu)_k + (B\Sigma)_k;$$

$$(B\Sigma)_k = \sum_{i=1}^{k-2} \left(\left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r} \right) \cdot W_{k-i} + W_1 \cdot (U_{i+1}) \cdot V_{k-i} \right).$$

Расчет $D_2(x)$ ($k = 2$):

$$A_2 = U_1 \cdot V_1 \cdot (Aw)_2 + U_1 \cdot W_1 \cdot (Av)_2 + V_1 \cdot W_1 \cdot (Au)_2;$$

$$B_2 = U_1 \cdot V_1 \cdot (Bw)_2 + U_1 \cdot W_1 \cdot (Bv)_2 + V_1 \cdot W_1 \cdot (Bu)_2 + (B\Sigma)_2$$

Согласно равенству (2.4), для $k = 2$

$$F_2 = A_2 \cdot \boxed{D_2} + B_2 = E_2; D_2(x) = \frac{E_2(x) - B_2(x)}{A_2(x)},$$

откуда, подставляя все выражения, после преобразований находим:

$$D_2(x) = \frac{\cos(1-x-x^2) \cdot (-1+2x)}{e^{\arctg D(x)} \cdot (D(x))^5 \cdot \left(\frac{5 \ln D(x) + 1}{D(x)} - \frac{\ln D(x)}{1+D^2(x)} \right)}$$

Расчет $D_3(x)$ ($k = 3$):

$$A_3 = U_1 \cdot V_1 \cdot (Aw)_3 + U_1 \cdot W_1 \cdot (Av)_3 + V_1 \cdot W_1 \cdot (Au)_3 = A_2;$$

$$B_3 = U_1 \cdot V_1 \cdot (Bw)_3 + U_1 \cdot W_1 \cdot (Bv)_3 + V_1 \cdot W_1 \cdot (Bu)_3 + (B\Sigma)_3;$$

$$(B\Sigma)_3 = V_1 \cdot (U_2 \cdot W_2) + V_2 \cdot (U_1 \cdot W_2 + W_1 \cdot U_2)$$

Согласно равенству (2.4), для $k = 3$

$$F_3 = A_3 \cdot \boxed{D_3} + B_3 = E_3; D_3(x) = \frac{E_3(x) - B_3(x)}{A_3(x)},$$

откуда, подставляя все выражения, после преобразований находим:

$$D_3(x) = \frac{\cos(1-x-x^2) - \sin(1-x-x^2) \cdot \frac{(-1+2x)^2}{2}}{e^{\arctg D(x)} \cdot (D(x))^5 \cdot \left(\frac{5 \cdot \ln D(x) + 1}{D(x)} - \frac{\ln D(x)}{1+D^2(x)} \right)} -$$

$$- \left(\frac{\frac{20 \ln D(x) + 9}{2D^2(x)} + \frac{-10 + D(x) - 8D^2(x)}{2D(x) \cdot (1+D^2(x))^2} \ln D(x) - \frac{1}{D(x) \cdot (1+D^2(x))} \right) \cdot D_2^2(x)$$

$$\frac{5 \cdot \ln D(x) + 1}{D(x)} - \frac{\ln D(x)}{1+D^2(x)}$$

Теорема 2.7. Рассмотрим функцию

$$F = \frac{U(D(x))}{V(D(x))}, \quad (2.19)$$

для делимого и делителя которой выполнен аналитический расчет обратного рекуррентного дифференцирования

$$U_k = (Av)_k \cdot D_k + (Bu)_k; \quad V_k = (Av)_k \cdot D_k + (Bv)_k \quad (2.20)$$

Тогда нормированные производные функции определяются по формуле

$$F_k = A_k \cdot D_k + B_k,$$

где

$$A_k = \frac{V_1 \cdot (Av)_k - U_1 \cdot (Av)_k}{V_1^2}; \quad B_k = \frac{V_1 \cdot (Bu)_k - U_1 \cdot (Bv)_k - V_1 \cdot \sum_{i=1}^{k-2} F_{i+1} \cdot V_{k-i}}{V_1^2} \quad (2.21)$$

В частном случае функции

$$F = \frac{U(D(x))}{V(x)}, \quad (2.22)$$

получаем «короткую» операцию обратного рекуррентного деления, для которого

$$A_k = \frac{1}{V_1} \cdot (Av)_k; \quad B_k = \frac{(Bu)_k - \sum_{i=0}^{k-2} F_{i+1} \cdot V_{k-i}}{V_1} \quad (2.23)$$

В частном случае функции

$$F = \frac{U(x)}{V(D(x))}, \quad (2.24)$$

получаем «короткую» операцию обратного рекуррентного деления, для которого

$$A_k = -\frac{U_1}{V_1^2} \cdot (Av)_k; \quad B_k = \frac{V_1 \cdot U_k - U_1 \cdot (Bv)_k - V_1 \cdot \sum_{i=1}^{k-2} F_{i+1} \cdot V_{k-i}}{V_1^2} \quad (2.25)$$

Доказательство. Применим к функции (2.19) прямую рекуррентную формулу дифференцирования (1.23, раздел 1.1)

$$F_k = \frac{1}{V_1} (U_k - F_1 \cdot V_k - \sum_{i=1}^{k-2} F_{i+1} \cdot V_{k-i})$$

и подставим в нее формулы (2.20)

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{V_1} (((Av)_k \cdot D_k + (Bu)_k) - \frac{U_1}{V_1} \cdot ((Av)_k \cdot D_k + (Bv)_k) - \sum_{i=1}^{k-2} F_{i+1} \cdot V_{k-i}) = \\ &= \frac{1}{V_1^2} ((V_1 \cdot (Av)_k - U_1 \cdot (Av)_k) \cdot D_k + (V_1 \cdot (Bu)_k - U_1 \cdot (Bv)_k) - V_1 \sum_{i=1}^{k-2} F_{i+1} \cdot V_{k-i}) \end{aligned}$$

откуда получаем формулы (2.21).

Применим прямую рекуррентную формулу к функции (2.24) и подставим в нее вторую формулу (2.20).

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{V_1} (U_k - F_1 \cdot V_k - \sum_{i=1}^{k-2} F_{i+1} \cdot V_{k-i}) = \\ &= \frac{1}{V_1} (U_k - \frac{U_1}{V_1} \cdot ((A\nu)_k \cdot D_k + (B\nu)_k) - \sum_{i=1}^{k-2} F_{i+1} \cdot V_{k-i}) = \\ &= \frac{1}{V_1^2} (-U_1 \cdot (A\nu)_k \cdot D_k + V_1 \cdot U_k - U_1 \cdot (B\nu)_k - V_1 \cdot \sum_{i=1}^{k-2} F_{i+1} \cdot V_{k-i}), \end{aligned}$$

откуда следует формула (2.25) .

Применим прямую рекуррентную формулу к функции (2.22) и подставим в нее первую формулу (2.20)

$$F_k = \frac{1}{V_1} (U_k - \sum_{i=0}^{k-2} F_{i+1} \cdot V_{k-i}) = \frac{1}{V_1} \cdot (((A\nu)_k \cdot D_k + (B\nu)_k) - \sum_{i=0}^{k-2} F_{i+1} \cdot V_{k-i}) ,$$

откуда следует формула (2.23) , что требовалось доказать.

Пример 2.6.

Найдем аналитические производные функции $D(x)$, удовлетворяющие уравнению

$$\ln\left(\frac{D(x)}{S(x)}\right) = \operatorname{arctg}(S(x) \cdot D(x)); \quad S(x) = \sum_{k=0}^n s_{k+1} \cdot x^k$$

Предполагаем, что уравнение имеет аналитическое решение $D(x) = D_1(x)$.

Этап 1.

Находим аналитические нормированные производные функции $S(x)$:

$$S(x) = S_1(x) = \sum_{k=0}^n s_{k+1} x^k; S_2(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) s_{k+2} x^k; S_3(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)(k+2) s_{k+3} x^k$$

Этап 2.

Рассмотрим функцию деления

$$H(x) = \frac{D(x)}{S(x)}; \quad H_1 = \frac{D_1(x)}{S_1(x)}$$

По формуле (2.23) для короткой операции обратного рекуррентного деления находим:

$$\begin{aligned} (A_H)_2 &= \frac{1}{S_1}; \quad (B_H)_2 = -\frac{H_1 \cdot S_2}{S_1}; \quad H_2 = (A_H)_2 \cdot \boxed{D_2} + (B_H)_2; \\ (A_H)_3 &= \frac{1}{S_1}; \quad (B_H)_3 = -\frac{H_2 \cdot S_2 + H_1 \cdot S_3}{S_1}; \quad H_3 = (A_H)_3 \cdot \boxed{D_3} + (B_H)_3 . \end{aligned}$$

Этап 3.

$$L(x) = \ln H(x); \quad L_1 = \ln H_1(x);$$

По рекуррентным формулам (табл. П.16) находим:

$$(A_L)_2 = \frac{1}{H_1}; (B_L)_2 = 0; L_2 = (A_L)_2 \cdot H_2 + (B_L)_2;$$

$$(A_L)_3 = \frac{1}{H_1}; (B_L)_3 = -\frac{L_2 \cdot H_2}{2H_1}; L_3 = (A_L)_3 \cdot H_3 + (B_L)_3.$$

Этап 4.

Рассмотрим функцию умножения двух сомножителей

$$C(x) = S(x) \cdot D(x); C_1 = S_1(x) \cdot D_1(x).$$

По формуле (2.14) короткого обратного рекуррентного умножения находим:

$$(Ac)_2 = S_1; (Bc)_2 = S_2 \cdot D_1; C_2 = (Ac)_2 \cdot \boxed{D_2} + (Bc)_2;$$

$$(Ac)_3 = S_1; (Bc)_3 = S_2 \cdot D_2 + S_3 \cdot D_1; C_3 = (Ac)_3 \cdot \boxed{D_3} + (Bc)_3.$$

Этап 5.

$$T(x) = \operatorname{arctg} C(x); T_1 = \operatorname{arctg} C_1(x).$$

По рекуррентным формулам (табл. П.17) находим:

$$(A_T)_2 = \frac{1}{1+C_1^2}; (B_T)_2 = 0; T_2 = (A_T)_2 \cdot C_2 + (B_T)_2;$$

$$(A_T)_3 = \frac{1}{1+C_1^2}; (B_T)_3 = -\frac{C_1 \cdot C_2^2}{(1+C_1^2)^2}; T_3 = (A_T)_3 \cdot C_3 + (B_T)_3.$$

Расчет $D_2(x)$ ($k=2$)

Согласно равенству (2.4), для $k=2$

$$L_2 = T_2.$$

Подставляя найденные аналитические выражения, получаем:

$$D_2(x) = D(x) \cdot \frac{S_2(x)}{S_1(x)} \cdot \frac{(S_1(x) \cdot D(x))^2 + S_1(x) \cdot D(x) + 1}{(S_1(x) \cdot D(x))^2 - S_1(x) \cdot D(x) + 1}.$$

Расчет $D_3(x)$ ($k=3$)

Согласно равенству (2.4), для $k=3$

$$L_3 = T_3.$$

Подставляя найденные аналитические выражения, получаем:

$$\begin{aligned} D_3(x) = & \frac{D(x)}{(S_1(x) \cdot D(x))^2 - S_1(x) \cdot D(x) + 1} \cdot (S_2(x) \cdot D_2(x) + S_3(x) \cdot D(x) + \\ & + (1 + (S_1(x) \cdot D(x))^2) \cdot (\frac{S_3(x)}{S_1(x)} - \frac{S_2^2(x)}{2S_1^2(x)} + \frac{D_2^2(x)}{2D^2(x)}) - \\ & - \frac{S_1(x) \cdot D(x) \cdot (S_1(x) \cdot D_2(x) + S_2(x) \cdot D(x))^2}{1 + (S_1(x) \cdot D(x))^2}) \end{aligned}$$

Сопоставление прямого и обратного рекуррентного дифференцирования

Формальное сходство:

1. Процессы дифференцирования предназначены для определения производных указанных функций.
2. Набор требуемых рекуррентных формул (уравнений) связан с дифференцируемыми функциями и не зависит от количества определяемых производных.
3. Количество определяемых производных ограничивается только сложностью полученных выражений.
4. Составные функции дифференцируются в направлении от самой внутренней функции к внешней, т.е. слева направо, как принято выполнять численные операции расчета функции.
5. Для функции, которая содержит несколько ветвей составных функций, разделенных операциями умножения—деления, дифференцирование каждой ветви выполняется независимо и в произвольном порядке.

Принципиальные различия:

1. Прямое рекуррентное исчисление работает со «свободными» функциями, не связанными ограничениями, тогда как обратное исчисление дифференцирует связанные функции, на которые наложены ограничения в виде уравнений.
2. Прямые и обратные рекуррентные формулы, соответствующие некоторой полиномиальной функции, имеют в основе одно порождающее уравнение и по сути одинаковы, но в обратном дифференцировании формулы разделены на компоненты, реализующие обратный процесс.
3. Процесс прямого рекуррентного дифференцирования составной функции с многими ветвями допускает многократное и независимое дифференцирование любой ветви, и такой процесс можно характеризовать как «вертикальный», в котором определение производных более высокого порядка сдерживается только расчетом производных низших порядков этой ветви. В обратном дифференцировании все ветви функции связаны между собой в том смысле, что производная данного порядка должна определяться синхронно во всех ветвях функции, и такой процесс дифференцирования можно характеризовать как «горизонтальный».
4. В прямом рекуррентном дифференцировании операции умножения—деления, разделяющие ветви составной функции, не влияют на «вертикальный» процесс дифференцирования, тогда как в обратном дифференцировании операции умножения—деления также должны быть синхронизированы в «горизонтальном» процессе дифференцирования.

Раздел 2.2. Численное обратное рекуррентное дифференцирование (численное обратное p -дифференцирование)

Задано аналитическое уравнение

$$F(D(x)) = 0, \quad (2.30)$$

в котором необходимо вычислить численные производные внутренней функции при $x = 0$

$$\left. \frac{dD}{dx} \right|_0, \left. \frac{d^2 D}{dx^2} \right|_0, \dots, \left. \frac{d^k D}{dx^k} \right|_0, \quad (2.31)$$

удовлетворяющие уравнению (2.30).

В классическом дифференциальном исчислении [1,2] численная задача неявного дифференцирования является численным аналогом аналитической задачи, и численные производные (2.30) находятся подстановкой $x = 0$ в аналитические выражения производных. Таким образом в численное неявное дифференцирование переносится проблема неалгоритмичности классического исчисления. Чтобы выполнить численный расчет производной, надо предварительно найти ее аналитическое выражение и подставить в нее значение переменной x . Естественно, с каждым дифференцированием уравнения (2.30) растет сложность аналитических выражений. Однако основная трудность классического неявного дифференцирования состоит в неалгоритмичности процесса.

В обратном аналитическом p -дифференцировании сложность выражений производных также растет с каждым дифференцированием. Но в отличие от классического неявного дифференцирования в обратном рекуррентном дифференцировании расчет производных выполняется по готовым рекуррентным формулам, вид которых не меняется для аналитического и численного дифференцирования. Это означает, что в численном обратном дифференцировании нет необходимости в предварительных аналитических выражениях производных, и расчет по рекуррентным формулам можно сразу выполнять численно. Количество вычисленных производных также ограничено, но факторы ограничений в меньшей степени связаны с рекуррентным исчислением (сложностью рекуррентных формул) и лежат, в основном, в области численных расчетов – точность, быстродействие вычислений и т. п.

Для разрешимости аналитической задачи неявного дифференцирования уравнение (2.30) должно иметь аналитическое решение

$$F(D_1(x)) \equiv 0.$$

В аналитических примерах раздела 2.1 предполагалось, что каждое заданное уравнение имеет аналитическое решение. Для разрешимости задачи численного неявного дифференцирования не надо находить аналитическое решение уравнения (2.30) и достаточно найти численное решение уравнения

$$F(D_1(0)) \equiv F(d_1) = 0. \quad (2.32)$$

Для численного решения нелинейных уравнений (2.32) существуют эффективные методы [15 – 26].

Рассмотрим уравнение общего вида

$$F1(D(x)) + F2(D(x)) + \dots + G(x) = 0, \quad (2.33)$$

каждая функция которого имеет численную рекуррентную формулу (или несколько рекуррентных формул в случае маршрутных формул). В обратном рекуррентном дифференцировании численные производные функций представляются в виде (2.5)

$$(f1)_k = (A1)_k \cdot d_k + (B1)_k; (f2)_k = (A2)_k \cdot d_k + (B2)_k; \dots \quad (2.34)$$

Подставляя формулы (2.34) и производные $G(x)$ в уравнение (2.33), получаем

$$(A1)_k \cdot d_k + (B1)_k + (A2)_k \cdot d_k + (B2)_k + \dots + g_k = 0,$$

откуда находим нормированные численные производные решения

$$d_k = \frac{g_k - (B1)_k - (B2)_k - \dots}{(A1)_k + (A2)_k + \dots} \quad (2.35)$$

Рекуррентные формулы функций (табл. П.5–П.9) перестроены для обратного рекуррентного дифференцирования так, чтобы непосредственно вычислялись компоненты формулы (2.34) A_k, B_k .

В табл. П.14 – П.18 приведены обратные рекуррентные формулы некоторых функций.

Пример 2.7.

Рассмотрим уравнение частного вида

$$F1(D(x)) = G(x),$$

которое имеет численное решение при $x = 0$.

Зададим функции уравнения: $F1(D(x)) = (\arcsin D(x))^2$; функция $G(x)$ не задана в виде аналитической функции, а для нее известны нормированные численные производные, вычисленные при $x = 0$ ($g_k = 0, k = 10, 11, \dots$) (табл.2.1)

Таблица 2.1

g_1	g_2	g_3
0,2741556778080378	2,418399152312291	8,154799011031006
g_4	g_5	g_6
1,835608681676338e1	5,021734223003210e1	1,572218522737405e2
g_7	g_8	g_9
5,243917675288795e2	1,833605245139591e3	6,629331547449172e3

Этап 1.

Запишем заданное уравнение при $x = 0$

$$(\arcsin D(0))^2 = G(0); (\arcsin d_1)^2 = g_1,$$

откуда находим его численное решение: $d_1 = 0,5$.

Этап 2.

Для составной функции $F1(D(x))$ из табл. П.18 находим

$$(A1)_k = \frac{2 \arcsin d_1}{\sqrt{1 - d_1^2}} = 1,209199576156145; \quad (k = 2, 3, \dots)$$

Этап 3.

Из табл. П.18 по обратным численным рекуррентным формулам находим B_k и сводим в табл.2.2.

Таблица 2.2

B_1	B_2	B_3
–	0	6,945599434874861
B_4	B_5	B_6
1,835608681676338e1	5,021734223003210e1	1,572218522737405e2
B_7	B_8	B_9
5,243917675288795e2	1,833605245139591e3	6,629331547449172e3

Этап 4.

По формуле (2.35) вычисляем нормированные численные производные решения

$$d_k = \frac{g_k - B_k}{A_k}, \quad (k = 2, 3, \dots, 9) :$$

$$k = 1 \quad d_1 = 0,5;$$

$$k = 2 \quad d_2 = \frac{g_2 - B_2}{A_k} = \frac{2,418399152312291 - 0}{1,209199576156145} = 2;$$

$$k = 3 \quad d_3 = \frac{g_3 - B_3}{A_k} = \frac{8,154799011031006 - 6,945599434874861}{1,209199576156145} = 1;$$

$$k = 3, \dots, 9 \quad d_k = \frac{g_k - B_k}{A_k} = 0$$

Рассмотрим составную функцию

$$F = \psi(\varphi(D(x)))$$

для которой есть рекуррентные формулы внутренних функций Ξ_φ, Ξ_ψ . Уточним отличия прямого p -дифференцирования от обратного. Для этого сначала реализуем процесс *прямого* рекуррентного дифференцирования функции и найдем ее производные так, как сделано в разделе 1.2. Опишем этапы процесса численного расчета производных заданной функции, полагая известной внутреннюю функцию $D(x)$

$$D(x) = d_1 + d_2x + d_3x^2 + d_4x^3 + \dots + d_nx^{n-1}$$

Этап 1.

Выполняем численный расчет производных функции $H = \varphi(D(x))$ с помощью многократного обращения к рекуррентной формуле Ξ_φ функции:

$$h_1 = \varphi(d_1);$$

$$h_2 = \Xi_\varphi(d_1, d_2, h_1);$$

$$h_3 = \Xi_\varphi(d_1, d_2, d_3, h_1, h_2);$$

$\vdots$

$$h_l = \Xi_\varphi(d_1, d_2, d_3, \dots, d_n, h_1, h_2, \dots, h_{l-1})$$

Этап 2.

Выполняем численный расчет производных заданной функции $F = \psi(H(x))$ с помощью рекуррентной формуле $\Xi\psi$ функции:

$$f_1 = \psi(h_1) = \psi(\varphi(d_1));$$

$$f_2 = \Xi\psi(h_1, h_2, f_1);$$

$$f_3 = \Xi\psi(h_1, h_2, h_3, f_1, f_2);$$

⋮

$$f_l = \Xi\psi(h_1, h_2, h_3, \dots, h_l, f_1, f_2, \dots, f_{l-1})$$

Пример 2.8.

Зададим составную функцию $F = \ln(\sqrt{D(x)})$ и выполним сначала расчет прямого p -дифференцирования функции для заданного полинома $D(x)$.

$$D(x) = d_1 + d_2x + d_3x^2 + d_4x^3 + d_5x^4 + d_6x^5 + d_7x^6 + d_8x^7 + d_9x^8 + d_{10}x^9 + d_{11}x^{10} = \\ = 1 + 2x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 - x^{10}$$

Введем частичные функции:

$$H = \sqrt{D(x)}; \quad F = \ln(H); \quad (h_1 = \sqrt{d_1} = 1; \quad f_1 = \ln h_1 = 0)$$

и прямым рекуррентным дифференцированием (раздел 1.2) вычислим их производные $h_2, h_3, \dots, h_l$ (табл.2.3) и $f_2, f_3, \dots, f_l$ (табл.2.4)

Таблица 2.3

h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8
1	1	0	-0,5	1	-1,5	1,875	-1,875
h_9	h_{10}	h_{11}	h_{12}	h_{13}	h_{14}	h_{15}	h_{16}
1,125	0,8125	-5,25	10,5	-15,789	17,555	-9,7031	-15,980

Таблица 2.4

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0	1	-0,5	-0,16667	1,25	-2,8	4,5833	-5,8571
f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
5,125	-5,555e-2	-13,1	35,591	-65,208	90,077	-82,571	-4,5333

Теперь считаем производные (табл.2.3, 2.4) известными и решим численную задачу обратного p -дифференцирования уравнения $\ln(\sqrt{D(x)}) = F$. Так найдем численные производные внутренней функции $D(x)$ и сравним с известными (задача с известным ответом – “тождественная” задача для контроля процедуры).

Этап 1.

Используя известные численные производные $h_2, h_3, \dots, h_l$ функции $H = \sqrt{D(x)}$ (табл.2.3), вычисляем по обратным рекуррентным формулам (табл. П.14) компоненты $(Ah)_k, (Bh)_k$:

$$(Ah)_k = \frac{h_1}{2d_1} = 0,5, \quad (k = 2, 3, \dots);$$

результаты расчетов $(Bh)_k$ приведены в табл.2.5 .

Таблица 2.5

$(Bh)_1$	$(Bh)_2$	$(Bh)_3$	$(Bh)_4$	$(Bh)_5$	$(Bh)_6$	$(Bh)_7$	$(Bh)_8$
–	0	–0,5	0	0,5	–1	1,375	–1,375
$(Bh)_9$	$(Bh)_{10}$	$(Bh)_{11}$	$(Bh)_{12}$	$(Bh)_{13}$	$(Bh)_{14}$	$(Bh)_{15}$	$(Bh)_{16}$
0,625	1,3125	–4,75	10,5	–15,789	17,555	–9,7031	–15,980

Этап 2.

Используя известные численные производные $f_2, f_3, \dots, f_l$ функции $F = \ln(H)$ (табл.2.4) , вычисляем по обратным рекуррентным формулам (табл. П.16) компоненты $(Af)_k, (Bf)_k$.

$$(Af)_k = \frac{1}{h_1} = 1 \quad , \quad (k = 2, 3, \dots) \quad .$$

Результаты расчетов $(Bf)_k$ приведены в табл.2.6 .

Таблица 2.6

$(Bf)_1$	$(Bf)_2$	$(Bf)_3$	$(Bf)_4$	$(Bf)_5$	$(Bf)_6$	$(Bf)_7$	$(Bf)_8$
–	0	–0,5	0,333333	0,25	–1,3	2,7083	–3,9821
$(Bf)_9$	$(Bf)_{10}$	$(Bf)_{11}$	$(Bf)_{12}$	$(Bf)_{13}$	$(Bf)_{14}$	$(Bf)_{15}$	$(Bf)_{16}$
4	–0,86806	–7,85	25,091	–49,419	72,522	–72,868	11,447

Этап 3.

Определяем компоненты обратного p -дифференцирования функции F по формуле (2.8 , раздел 2.1)

$$A_k = (Af)_k \cdot (Ah)_k = 0,5 \quad ; \quad B_k = (Af)_k \cdot (Bh)_k + (Bf)_k \quad ; \quad (k = 2, 3, \dots)$$

откуда получаем формулу для расчета нормированных численных производных

$$d_k = \frac{f_k - B_k}{A_k} \quad ; \quad (k = 2, 3, \dots)$$

Приведем подробные результаты расчета:

$$\boxed{k=2} \quad A_2 = 0,5 \quad ; \quad B_2 = (Af)_2 \cdot (Bh)_2 + (Bf)_2 = 0 \quad ; \quad d_2 = (f_2 - B_2) / A_2 = 2;$$

$$\boxed{k=3} \quad A_3 = 0,5 \quad ; \quad B_3 = (Af)_3 \cdot (Bh)_3 + (Bf)_3 = -1 \quad ; \quad d_3 = (f_3 - B_3) / A_3 = 1;$$

$$\boxed{k=4} \quad A_4 = 0,5 \quad ; \quad B_4 = (Af)_4 \cdot (Bh)_4 + (Bf)_4 = \frac{1}{3} \quad ; \quad d_4 = (f_4 - B_4) / A_4 = -1;$$

⋮

$$\boxed{k=11} \quad A_{11} = 0,5; \quad B_{11} = (Af)_{11} \cdot (Bh)_{11} + (Bf)_{11} = -12,6; \quad d_{11} = (f_{11} - B_{11}) / A_{11} = -1;$$

$$\boxed{k=12} \quad A_{12} = 0,5; \quad B_{12} = (Af)_{12} \cdot (Bh)_{12} + (Bf)_{12} = 35,591; \quad d_{12} = \frac{f_{12} - B_{12}}{A_{12}} = 7,1e-15$$

Процедура обратного рекуррентного дифференцирования точно определяет численные производные, равные заданным коэффициентам внутренней функции $D(x)$.

В задаче обратного p -дифференцирования изменим уравнение

$$\begin{aligned} F1(D(x)) + F2(D(x)) - G(x) &= 0; \\ \lambda(\psi(\varphi(D(x)))) + \eta(v(v(D(x)))) &= G(x) \end{aligned} \quad (2.36)$$

в котором известны нормированные численные производные заданной функции $G(x) : g_1, g_2, g_3, \dots, g_l$. Коэффициент d_1 определяется при решении численного уравнения

$$\lambda(\psi(\varphi(d_1))) + \eta(v(v(d_1))) = g_1,$$

а остальные коэффициенты $d_2, d_3, \dots, d_l$, удовлетворяющие уравнению (2.36), необходимо определить в процессе обратного p -дифференцирования. Для его реализации используются формулы $(Y\lambda)_A, (Y\psi)_A, (Y\varphi)_A, (Y\eta)_A, (Yv)_A, (Yv)_A$, необходимые для расчета компонентов A_k , и рекуррентные формулы $(Y\lambda)_B, (Y\psi)_B, (Y\varphi)_B, (Y\eta)_B, (Yv)_B, (Yv)_B$, необходимые для расчета компонентов B_k (табл. П.14 – П.18). Опишем шаги реализации процесса обратного рекуррентного дифференцирования, для чего применим разбиение функций уравнения (2.36) на части и введем частичные функции

$$H = \varphi(D(x)); P = \psi(H(x)); F1 = \lambda(P(x));$$

$$Q = v(D(x)); S = v(Q(x)); F2 = \eta(S(x))$$

Для этих функций вычисляем значения

$$h_1 = \varphi(d_1); p_1 = \psi(h_1); (f1)_1 = \lambda(p_1); q_1 = v(d_1); s_1 = v(q_1); (f2)_1 = \eta(s_1)$$

Отобразим начало численного процесса обратного рекуррентного дифференцирования с помощью схем.

$$\begin{aligned} [d_1] &\rightarrow [h_1] \xrightarrow[\text{рекуррентная формула } B\varphi]{\text{формула } A\varphi} \begin{bmatrix} (A\varphi)_2 \\ (B\varphi)_2 \end{bmatrix} \rightarrow [p_1] \xrightarrow[\text{рекуррентная формула } B\psi]{\text{формула } A\psi} \dots \\ \dots &\rightarrow \begin{bmatrix} (A\psi)_2 \\ (B\psi)_2 \end{bmatrix} \rightarrow [(f1)_1] \xrightarrow[\text{рекуррентная формула } B\lambda]{\text{формула } A\lambda} \begin{bmatrix} (A\lambda)_2 \\ (B\lambda)_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{вторая группа}} [d_1] \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow [q_1] \xrightarrow[\text{рекуррентная формула } Bv]{\text{формула } Av} \begin{bmatrix} (Av)_2 \\ (Bv)_2 \end{bmatrix} \rightarrow [s_1] \xrightarrow[\text{рекуррентная формула } B\eta]{\text{формула } A\eta} \begin{bmatrix} (A\eta)_2 \\ (B\eta)_2 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow [(f2)_1] \xrightarrow[\text{рекуррентная формула } B\eta]{\text{формула } A\eta} \begin{bmatrix} (A\eta)_2 \\ (B\eta)_2 \end{bmatrix} \rightarrow [d_2] \end{aligned}$$

Теперь предполагаем, что в предыдущих расчетах уже найдены численные нормированные значения коэффициентов $d_2, d_3, \dots, d_{k-1}$, и, следовательно, найдены численные значения производных частичных функций

$$h_1, h_2, \dots, h_{k-1}; p_1, p_2, \dots, p_{k-1}; (f1)_1, (f1)_2, \dots, (f1)_{k-1};$$

$$q_1, q_2, \dots, q_{k-1}; s_1, s_2, \dots, s_{k-1}; (f2)_1, (f2)_2, \dots, (f2)_{k-1}$$

Рассмотрим процесс численного расчета коэффициентов d_r ($r = k, k+1, \dots, l$)

Заданная функция (2.36) содержит две группы функций, относящихся к функциям $F1, F2$, которые могут обрабатываться независимо. Этапы 1 – 4 будут обрабатывать первую группу функций, относящихся к $F1$, а этапы 5 – 8 – вторую группу функции $F2$.

Этап 1.

$$(A\phi)_k = (\Upsilon\phi)_A(d_1, h_1);$$

$$(B\phi)_k = (\Upsilon\phi)_B(d_1, d_2, d_3, \dots, d_{k-1}, h_1, h_2, \dots, h_{k-1})$$

Этап 2.

$$(A\psi)_k = (\Upsilon\psi)_A(h_1, p_1);$$

$$(B\psi)_k = (\Upsilon\psi)_B(h_1, h_2, h_3, \dots, h_{k-1}, p_1, p_2, \dots, p_{k-1})$$

Этап 3.

$$(A\lambda)_k = (\Upsilon\lambda)_A(p_1, (f1)_1);$$

$$(B\lambda)_k = (\Upsilon\lambda)_B(p_1, p_2, p_3, \dots, p_{k-1}, (f1)_1, (f1)_2, \dots, (f1)_{k-1})$$

Этап 4.

Согласно формулам (2.34) выполняем расчет

$$(f1)_k = (A1)_k \cdot d_k + (B1)_k = (A\lambda)_k \cdot p_k + (B\lambda)_k = (A\lambda)_k ((A\psi)_k \cdot h_k + (B\psi)_k) +$$

$$+ (B\lambda)_k = (A\lambda)_k \cdot ((A\psi)_k \cdot ((A\phi)_k \cdot d_k + (B\phi)_k) + (B\psi)_k) + (B\lambda)_k$$

откуда следуют формулы:

$$(A1)_k = (A\lambda)_k \cdot (A\psi)_k \cdot (A\phi)_k;$$

$$(B1)_k = (A\lambda)_k \cdot (A\psi)_k \cdot (B\phi)_k + (A\lambda)_k \cdot (B\psi)_k + (B\lambda)_k$$

Этап 5.

$$(A\nu)_k = (\Upsilon\nu)_A(d_1, q_1);$$

$$(B\nu)_k = (\Upsilon\nu)_B(d_1, d_2, d_3, \dots, d_{k-1}, q_1, q_2, \dots, q_{k-1})$$

Этап 6.

$$(A\nu)_k = (\Upsilon\nu)_A(q_1, s_1);$$

$$(B\nu)_k = (\Upsilon\nu)_B(q_1, q_2, q_3, \dots, q_{k-1}, s_1, s_2, \dots, s_{k-1})$$

Этап 7.

$$(A\eta)_k = (\Upsilon\eta)_A(s_1, (f2)_1);$$

$$(B\eta)_k = (\Upsilon\eta)_B(s_1, s_2, s_3, \dots, s_{k-1}, (f2)_1, (f2)_2, \dots, (f2)_{k-1})$$

Этап 8.

Согласно формулам (2.34), выполняем расчет

$$(f2)_k = (A2)_k \cdot d_k + (B2)_k = (A\eta)_k \cdot s_k + (B\eta)_k = (A\eta)_k ((A\nu)_k \cdot q_k + (B\nu)_k) + (B\eta)_k = (A\eta)_k \cdot ((A\nu)_k \cdot ((A\nu)_k \cdot d_k + (B\nu)_k) + (B\nu)_k) + (B\eta)_k$$

откуда следуют формулы:

$$(A2)_k = (A\eta)_k \cdot (A\nu)_k \cdot (A\nu)_k;$$

$$(B2)_k = (A\eta)_k \cdot (A\nu)_k \cdot (B\nu)_k + (A\eta)_k \cdot (B\nu)_k + (B\eta)_k$$

Этап 9.

Подставляя найденные формулы (2.34) для уравнение (2.36) находим:

$$(f1)_k + (f2)_k = g_k; ((A1)_k \cdot \boxed{d_k} + (B1)_k) + ((A2)_k \cdot \boxed{d_k} + (B2)_k) = g_k;$$

$$d_k = \frac{-(B1)_k - (B2)_k + g_k}{(A1)_k + (A2)_k}, \quad (k = 2, 3, \dots)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи операций обратного рекуррентного деления и умножения.

Теорема 2.9. Рассмотрим функцию

$$F = \frac{U(D(x))}{V(D(x))}, \quad (2.37)$$

для числителя и знаменателя которой выполнен численный расчет обратного рекуррентного дифференцирования

$$u_k = (AU)_k \cdot d_k + (BU)_k; \quad v_k = (AV)_k \cdot d_k + (BV)_k \quad (2.38)$$

Тогда для частного случая $V(D(x)) = D(x)$ нормированные численные производные функции определяются по формуле

$$f_k = A_k \cdot d_k + B_k, \quad (2.39a)$$

где

$$A_k = \frac{d_1 \cdot (AU)_k - u_1}{d_1^2}; \quad B_k = \frac{(BU)_k - \sum_{i=1}^{k-2} f_{i+1} \cdot d_{k-i}}{d_1} \quad (2.39b)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим к функции (2.37) прямую рекуррентную формулу дифференцирования

$$f_k = \frac{1}{d_1} (u_k - f_1 \cdot d_k - \sum_{i=1}^{k-2} f_{i+1} \cdot d_{k-i})$$

и подставим в нее формулы (2.38)

$$\begin{aligned}
f_k &= \frac{1}{d_1}(((A\nu)_k \cdot d_k + (B\nu)_k) - \frac{u_1}{d_1} \cdot ((A\nu)_k \cdot d_k + (B\nu)_k) - \sum_{i=1}^{k-2} f_{i+1} \cdot d_{k-i}) = \\
&= \frac{1}{d_1^2}((d_1 \cdot (A\nu)_k - u_1 \cdot (A\nu)_k) \cdot d_k + (d_1 \cdot (B\nu)_k - u_1 \cdot (B\nu)_k) - d_1 \sum_{i=1}^{k-2} f_{i+1} \cdot d_{k-i}) = \\
&= \frac{d_1 \cdot (A\nu)_k - u_1 \cdot (A\nu)_k}{d_1^2} \cdot d_k + \frac{d_1 \cdot (B\nu)_k - u_1 \cdot (B\nu)_k - d_1 \sum_{i=1}^{k-2} f_{i+1} \cdot d_{k-i}}{d_1^2} \quad (2.40)
\end{aligned}$$

Для частного случая $V(D(x)) = D(x)$ определим компоненты $(A\nu)_k$, $(B\nu)_k$. Из табл. П.18 находим обратную рекуррентную формулу функции $F = D^m$

$$(B\nu)_k = \frac{1}{(k-1)d_1} \left(\sum_{q=0}^{k-3} (q+1) \cdot (m \cdot d_{q+2} \cdot f_{k-1-q} - f_{q+2} \cdot d_{k-1-q}) \right),$$

откуда для $m = 1$ и $F = D$ получаем

$$(B\nu)_k = \frac{1}{(k-1)d_1} \left(\sum_{q=0}^{k-3} (q+1) \cdot (\cancel{d_{q+2} \cdot d_{k-1-q}} - \cancel{d_{q+2} \cdot d_{k-1-q}}) \right) = 0.$$

Из формулы (табл.П.18) следует $(A\nu)_k = \frac{mf_1}{d_1} = \frac{d_1}{d_1} \Big|_{m=1} = 1$. Тот же результат

можно получить другим способом из формулы (2.38) $v_k = (A\nu)_k \cdot d_k + (B\nu)_k$ для $V(D(x)) = D(x) = d_1 + d_2x + d_3x^2 + d_4x^3 + \dots + d_nx^{n-1}$. Тогда v_k , как производная полинома при $x = 0$, превращает формулу (2.38) в равенство $d_k = (A\nu)_k \cdot d_k + (B\nu)_k$, откуда следует $(A\nu)_k = 1$; $(B\nu)_k = 0$. Подставляя эти значения в формулу (2.40), получаем формулы (2.39б), что требовалось доказать.

Пример 2.9.

Зададим уравнение

$$\frac{U(D(x))}{V(D(x))} = G(x),$$

где $U(D(x)) = \sin D(x)$; $V(D(x)) = D(x)$ и известны численные нормированные производные функции $G(x)$ (табл.2.7).

Таблица 2.7

g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
4,7040e-2	-0,69135	2,1146e-2	0,90795	-0,42656	0,16259	-0,40807	0,50135
g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}
-0,46606	0,42581	0,32854	-0,81911	-0,35954	-0,11996	1,2010	-1,1296

Выполним обратное p -дифференцирование заданного уравнения, вычислив нормированные производные внутренней функции $D(x)$.

Решаем численное уравнение $\frac{\sin d_1}{d_1} = g_1$ относительно неизвестного d_1

находим значение $d_1 = 3$.

Опишем шаги обратного p -дифференцирования.

Численный расчет коэффициентов d_k для $k = 2, 3, \dots, 14$:

Этап 1.

Выполняем обратное p -дифференцирование функции числителя $U = \sin D(x)$ ($u_1 = \sin d_1$), находя компоненты $(Au)_k$, $(Bu)_k$ по обратным рекуррентным формулам (табл. П.17):

$$(Au)_k = \sqrt{1-u_1^2} = \sqrt{1-(\sin u_1)^2} = \cos u_1;$$

$$(Bu)_k = \frac{1}{2(k-1)u_2} \left(-2d_2^2 \cdot u_1 \cdot u_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-3} ((i+1)(k-1-i) \times \right. \\ \times (-u_{i+2} \cdot u_{k-i} + d_{i+2} \cdot d_{k-i} \cdot (1-u_1^2)) - d_2^2 \cdot u_{i+1} \cdot u_{k-1-i} - \\ \left. - (\sum_{q=0}^{k-i-2} u_{q+1} \cdot u_{k-1-i-q}) \cdot (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) d_{q+2} \cdot d_{i+2-q}) \right)$$

Этап 2.

Для функции $F = \frac{\sin D(x)}{D(x)}$ выполняем численное обратное рекуррентное деление и вычисляем A_k , B_k по формулам (2.39).

Этап 3.

Находим численные нормированные производные полинома $D(x)$ по формуле

$$d_k = \frac{f_k - B_k}{A_k} \quad ; \quad (k = 2, 3, \dots, 14).$$

Результаты численного расчета приведены в табл.2.8.

Таблица 2.8

k	1	2	3	4	5	6	7
$(Au)_k$	–	-0,98999	-0,98999	-0,98999	-0,98999	-0,98999	-0,98999
$(Bu)_k$	–	0	-0,28224	1,0377	2,2857	-1,2070	-0,48402
A_k	–	-0,34568	-0,34568	-0,34568	-0,34568	-0,34568	-0,34568
B_k	–	0	0,36682	0,56227	-0,080884	-0,18309	-0,062394
d_k	3	2	1	-1	1	-1	1
k	8	9	10	11	12	13	14
$(Au)_k$	-0,98999	-0,98999	-0,98999	-0,98999	-0,98999	-0,98999	-0,98999
$(Bu)_k$	0,43547	-0,55111	1,0023	-1,3599	2,1689	-5,7078	-0,74412
A_k	-0,34568	-0,34568	-0,34568	-0,34568	-0,34568	-0,34568	-0,34568
B_k	0,15567	-0,12038	0,080129	-0,017142	-0,81911	-0,35954	-0,11996
d_k	-1	1	-1	-1	0	0	0

Окончательный результат обратного рекуррентного дифференцирования заданной функции приведен в табл.2.9 .

Таблица 2.9

k	2	3	4
d_k	2,0000000000000000	1,0000000000000000	-1,0000000000000000
k	5	6	7
d_k	1,0000000000000000	-1,0000000000000001	1,0000000000000002
k	8	9	10
d_k	-1,0000000000000004	1,0000000000000011	-1,0000000000000016
k	11	12	13
d_k	-0,9999999999999566	-7,2e-14	2,6e-13
k	14	15	16
d_k	-4,6e-13	9,7e-13	-2,2e-12

Сравнение результатов (табл.2.9) и функции $D(x)$ примера 2.8 показывает, что приведенные значения содержат не менее 12 верных значащих цифр.

Теорема 2.10. Рассмотрим функцию

$$F = U(D(x)) \cdot V(D(x))$$

для сомножителей которой выполнен численный расчет обратного рекуррентного дифференцирования

$$u_k = (AU)_k \cdot d_k + (BU)_k; \quad v_k = (AV)_k \cdot d_k + (BV)_k \quad (2.41)$$

Тогда для частного случая $V(D(x)) = V(x)$ нормированные численные производные функции определяются по формуле

$$f_k = A_k \cdot d_k + B_k, \quad (2.42a)$$

где

$$A_k = v_1 \cdot (AU)_k; \quad B_k = v_1 \cdot (BU)_k + \sum_{i=0}^{k-2} u_{i+1} \cdot v_{k-i} \quad (2.42b)$$

Для частного случая $U(D(x)) = D(x); V(D(x)) = V(x)$

$$A_k = v_1; \quad B_k = \sum_{i=0}^{k-2} u_{i+1} \cdot v_{k-i} \quad (2.43)$$

Доказательство. Применим к заданной функции прямую рекуррентную формулу Лейбница-Коши

$$f_k = v_1 \cdot u_k + \sum_{i=0}^{k-2} u_{i+1} \cdot v_{k-i}$$

и подставим в нее формулы (2.41), учитывая, что сомножитель $V(x)$ не содержит d_k

$$\begin{aligned}
 f_k &= v_1 \cdot ((AU)_k \cdot d_k + (BU)_k) + \sum_{i=0}^{k-2} u_{i+1} \cdot v_{k-i} = \\
 &= v_1 \cdot (AU)_k \cdot d_k + v_1 \cdot (BU)_k + \sum_{i=0}^{k-2} u_{i+1} \cdot v_{k-i}
 \end{aligned}
 \tag{2.44}$$

откуда следуют формулы (2.42б).

Рассмотрим частный случай $U(D(x)) = D(x)$; $V(D(x)) = V(x)$. Как показано в доказательстве теоремы 2.9, для сомножителя $U = D(x)$ компоненты обратной рекуррентной формулы равны $(Av)_k = 1$; $(Bv)_k = 0$. Подставляя эти значения в формулу (2.44), получаем

$$f_k = v_1 \cdot d_k + \sum_{i=0}^{k-2} u_{i+1} \cdot v_{k-i} ,$$

откуда, согласно формуле (2.42а), следуют формулы (2.43), что требовалось доказать.

Пример 2.10.

Проверим правильность результата в примере 2.9, преобразовав заданное уравнение $\sin D(x) = D(x) \cdot G(x)$

Опишем шаги обратного p -дифференцирования нового уравнения.

Численный расчет коэффициента d_k для $k = 2, 3, \dots, 14$:

Этап 1.

Выполняем обратное p -дифференцирование функции числителя $U = \sin D(x)$ ($u_1 = \sin d_1$), находя компоненты $(AU)_k$, $(BU)_k$ по обратным рекуррентным формулам (табл. П.17).

Этап 2.

Для функции $F = D(x) \cdot G(x)$ выполняем численное обратное рекуррентное умножение и вычисляем $(AF)_k$, $(BF)_k$ по формулам (2.43).

Этап 3.

Находим численные нормированные производные внутренней функции $D(x)$ по формуле $d_k = \frac{(BU)_k - (BF)_k}{(AF)_k - (AU)_k}$; $(k = 2, 3, \dots, 14)$

Промежуточные результаты численного расчета приведены в табл.2.10. Окончательный результат обратного рекуррентного дифференцирования заданной функции приведен в табл.2.11.

Как видно из табл.2.11, все приведенные значения содержат не менее 14 верных значащих цифры.

Таблица 2.10

k	1	2	3	4	5	6	7
$(AU)_k$	–	–0,9899	–0,98999	–0,98999	–0,98999	–0,98999	–0,98999
$(BU)_k$	–	0	–0,28224	1,0377	2,2857	–1,2070	–0,48402
$(AF)_k$	–	0,04704	0,047040	0,047040	0,047040	0,04704	0,047040
$(BF)_k$	–	–2,0741	–1,3193	2,0748	1,2487	–0,16992	–1,5211
d_k	3	2	1	–1	1	–1	1
k	8	9	10	11	12	13	14
$(AU)_k$	–0,98999	–0,9899	–0,98999	–0,98999	–0,98999	–0,98999	–0,98999
$(BU)_k$	0,43547	–0,5511	1,0023	–1,3599	2,1689	–5,7078	–0,74412
$(AF)_k$	0,04704	0,04704	0,047040	0,047040	0,047040	0,04704	0,047040
$(BF)_k$	1,4725	–1,5881	2,0393	–0,32285	2,1683	–5,7078	–0,74412
d_k	–1	1	–1	–1	0	0	0

Таблица 2.11

k	2	3	4
d_k	2,0000000000000000	1,0000000000000000	–1,0000000000000000
k	5	6	7
d_k	1,0000000000000001	–1,0000000000000001	1,0000000000000003
k	8	9	10
d_k	–1,0000000000000004	1,0000000000000010	–1,0000000000000016
k	11	12	13
d_k	–0,9999999999999569	–7,1e–14	2,1e–13
k	14	15	16
d_k	–3,0e–13	7,7e–13	–1,8e–12

Примеры 2.9 , 2.10 показывают, что , преобразуя заданное уравнение и решая две задачи обратного p -дифференцирования, можно контролировать точность решения. Возможности рекуррентного дифференцирования ограничены точностью расчета численных производных. Точность можно контролировать, но ее сложно улучшить без привлечения современной вычислительной техники.

Уточним особенности процесса численного обратного рекуррентного дифференцирования при решении конкретных задач.

Рассмотрим уравнение

$$F1(\dots(D(x)))\dots) - G(x) = 0 \quad (2.45)$$

в котором функция $F1$ является составной и может включать, кроме указанной функции $D(x)$, другие внутренние функции. Функция $G(x)$ уравнения (2.45) не содержит полином $D(x)$, и ее численные нормированные производные $g_1, g_2, g_3, \dots, g_l$ можно вычислить прямым рекуррентным

дифференцированием. В процессе обратного p -дифференцирования должны быть вычислены коэффициенты внутреннего полинома

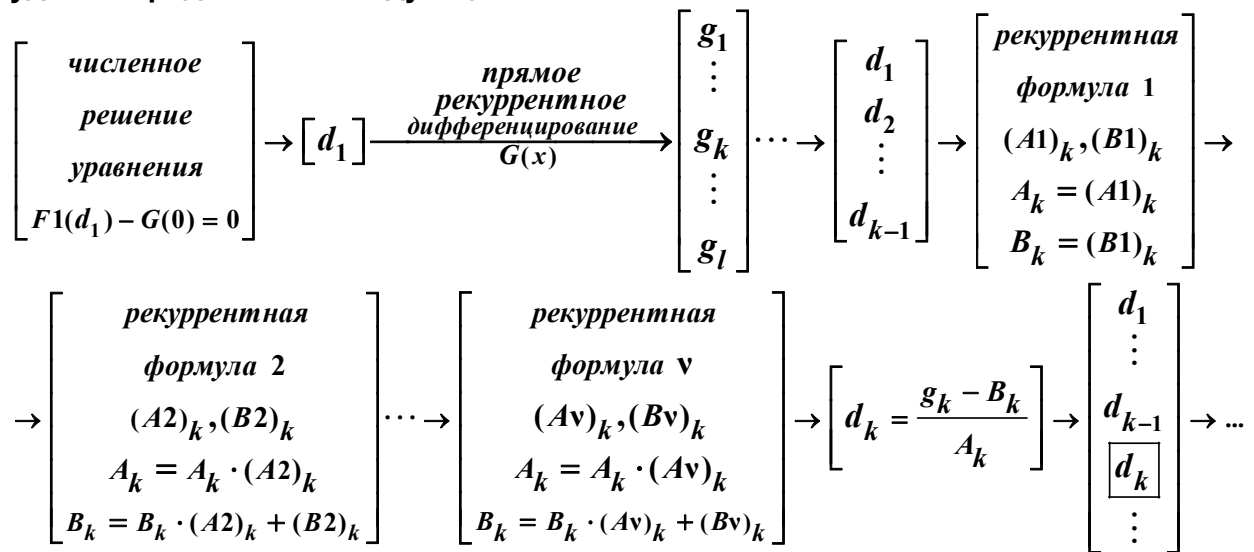
$$D(x) = d_1 + d_2x + d_3x^2 + d_4x^3 + \dots + d_lx^{l-1},$$

которые удовлетворяют заданному уравнению (2.45). Для начала процесса обратного рекуррентного дифференцирования необходимо вычислить коэффициент d_1 при численном решении уравнения (2.45) для $x = 0$

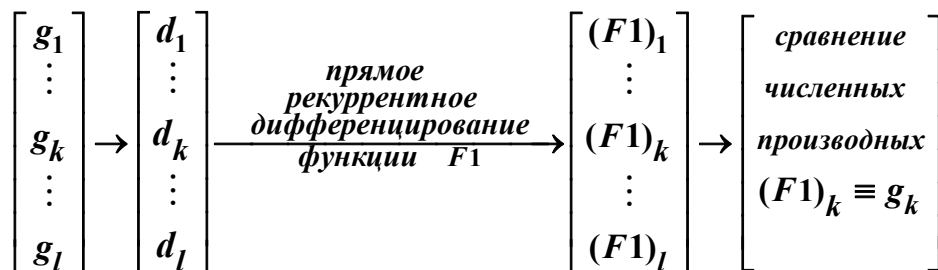
$$F1(d_1) - G(0) = 0$$

Функция $F1$ может содержать несколько внутренних функций, и для реализации обратного рекуррентного дифференцирования $F1$ потребуется последовательное обращение к рекуррентным формулам (табл. П.14 – П.18).

Процедуру обратного p -дифференцирования составной функции $F1$ удобно представить следующей схемой.



Контроль точности решения задачи можно осуществить с помощью следующей схемы.



Пример 2.11.

Зададим уравнение (2.45), в котором

$$F1 = \frac{\arctg(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{D(x)})^2})^2}{B(x)}; \quad G(x) = \sqrt[4]{\frac{e^{\arctg(C(x))}}{a(x)}}; \quad (2.46)$$

полиномы для смещения $x_0 = 0$ равны:

$$a(x) = 1 + 3x - 3x^2 + x^3; \quad B(x) = 1 + 2x + x^2; \quad C(x) = 0,5 + 2x + x^2.$$

Для начала процесса рекуррентного дифференцирования необходимо вычислить коэффициент d_1 при численном решении заданного уравнения для $x = 0$

$$\arctg(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{d_1})^2})^2 - \sqrt[4]{e^{\arctg(0,5)}} = 0.$$

Решение численного уравнения было найдено методом третьего порядка (раздел 1.3):

$$d_1 = 1,60394666983876 ; F1(0) = G(0) = 1,122896943081664 .$$

Найдем численные производные функции $G(x)$ прямым рекуррентным дифференцированием (табл.2.12).

Таблица 2.12

g_1	g_2	g_3	g_4
1,122896943	-0,3930139300	2,039461572	-6,486671522
g_5	g_6	g_7	g_8
1,970279687 e1	-6,3393843395e1	2,152011729e2	-7,451280905e2
g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}
2,603318124e3	-9,1873264138e2	3,273517237e4	-1,175046414e5
g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}
4,24226961188056e5	-1,53909670793365e6	5,6077236534449e6	-2,0507507235686e7
g_{17}	g_{18}	g_{19}	g_{20}
7,52375089774576e7	-2,76811058676510e8	1,0209941243095e9	-3,7743163981145e9
g_{21}	g_{22}	g_{23}	g_{24}
1,3980732311975e10	-5,1881634701652e10	1,928487466944e11	-7,179204615159e11

Функция $F1$ содержит 9 внутренних функций, и для реализации обратного рекуррентного дифференцирования $F1$ потребуется последовательное обращение к рекуррентным формулам (табл. П.14 - П.17).

$$E = \sqrt{D} \rightarrow L = \ln E \rightarrow H = L^2 \rightarrow P = \arcsin H \rightarrow S = \sqrt{P} \rightarrow U = \ln S \rightarrow \\ \rightarrow V = U^2 \rightarrow W = \arctg V \rightarrow F1 = \frac{W}{B}$$

Выполняя обратное p -дифференцирование составной функции $F1$, находим численные значения компонент: $A_k = -0,71484$; ($k = 2, 3, \dots, 24$) и значения B_k (табл.2.13) .

Таблица 2.13

B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
—	-2,2458	-0,63084	-6,9458	2,2189	-3,0636 e1
B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}
1,4837e2	4,0849e1	3,4553e3	6,9857e3	7,1853e4	2,0999e5
B_{13}	B_{14}	B_{15}	B_{16}	B_{17}	B_{18}
1,4686e6	5,1143e6	2,9983e7	1,1515e8	6,1232e8	2,4909e9
B_{19}	B_{20}	B_{21}	B_{22}	B_{23}	B_{24}
1,2484e10	5,2542e10	2,5341e11	1,0874e12	5,1056e12	2,2123e13

Окончательные результаты обратного p -дифференцирования приведены в табл.2.14.

Таблица 2.14

d_1	d_2	d_3	d_4
1,603946669	-2,591869953	-3,735509124	-0,642253928
d_5	d_6	d_7	d_8
-2,445843787e1	4,582579519e1	-9,349166022e1	1,099510563e3
d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
1,191839198e3	2,262454804e4	5,472213362e4	4,581326971e5
d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}
1,460997679e6	9,307443909e6	3,409823157e7	1,897713406e8
d_{17}	d_{18}	d_{19}	d_{20}
7,513353865e8	3,871711631e9	1,603608236e10	7,878120531e10
d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
3,349353090e11	1,593760610e12	6,872543086e12	3,195274635e13

Для контроля точности проведенных численных расчетов выполнено прямое рекуррентное дифференцирование функции $F1$ с найденным полиномом $D(x)$, численные коэффициенты которого приведены в табл.2.14. Согласно заданному уравнению (2.45), численные производные функции $F1$ должны быть равны численным производным функции $G(x)$ (табл.2.12). Вычисленные таким способом некоторые производные функции $F1$, имеющие наихудшую точность, приведены в табл.2.15.

Таблица 2.15

$(F1)_{13}$	$(F1)_{14}$	$(F1)_{15}$	$(F1)_{16}$
4,24226961188062e5	-1,5390967079337e6	5,60772365344522e6	-2,050750723569e7
$(F1)_{17}$	$(F1)_{18}$	$(F1)_{19}$	$(F1)_{20}$
7,5237508977448e7	-2,7681105867650e8	1,02099412430975e9	-3,774316398115e9
$(F1)_{21}$	$(F1)_{22}$	$(F1)_{23}$	$(F1)_{24}$
1,3980732311966e10	-5,188163470165e10	1,92848746694388e11	-7,17920461516e11

Сравнение табл.2.12 с табл.2.15 показывает, что в решении примера 2.11 для смещения $x_0 = 0$ все приведенные значащие цифры (табл.2.14) являются верными.

Изменяем смещение $x_0 = 0,1$ и решаем задачу обратного рекуррентного дифференцирования для другого значения переменной x . Смещение меняет коэффициенты полиномов заданной функции:

$a(x) = 1,271 + 2,43x - 2,7x^2 + x^3$; $B(x) = 1,21 + 2,2x + x^2$; $C(x) = 0,71 + 2,2x + x^2$ и численные производные функции $G(x)$ (табл.2.16).

Для начала процесса обратного рекуррентного дифференцирования необходимо для $x = 0,1$ вычислить коэффициент d_1 при численном решении заданного уравнения

$$\frac{1}{1,21} \cdot \arctg(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{d_1})^2})^2 - 4 \sqrt{\frac{1}{1,271}} \cdot e^{\arctg(0,71)} = 0.$$

Таблица 2.16

g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
1,098997	-0,1234208	0,8580590	-2,300497	5,223676	-1,150524 e1
g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}
2,727333e1	-6,909765e1	1,773935e2	-4,530409e2	1,159959e3	-3,000407e3
g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}	g_{17}	g_{18}
7,832931e3	-2,055390e4	5,410127e4	-1,428503e5	3,784642e5	-1,005779e6
g_{19}	g_{20}	g_{21}	g_{22}	g_{23}	g_{24}
2,679655e6	-7,154662e6	1,914039e7	-5,129856e7	1,377158e8	-3,702691e8

Решение численного уравнения было найдено методом третьего порядка (раздел 1.3):

$$d_1 = 1,304838866080915 ; F1(0,1) = G(0,1) = 1,098999779611595 .$$

Окончательные результаты обратного p -дифференцирования приведены в табл.2.17.

Таблица 2.17

d_1	d_2	d_3	d_4
1,304838866	-3,4266355274	-4,6581971273	1,01120748524
d_5	d_6	d_7	d_8
1,0971613192e2	1,3750592892e3	1,3033238712e4	1,16159335551e5
d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
9,9921129113e5	8,4385180477e6	7,0243797327e7	5,77306790981e8
d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}
4,6812871095e9	3,7375275661e10	2,9270661312e11	2,2348701437e12
d_{17}	d_{18}	d_{19}	d_{20}
1,6466593075e13	1,1493691451e14	7,3127199705e14	3,8195605479e15
d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
9,2237551328e15	-1,4595142638e17	-3,3968023742e18	-4,9513253529e19

Контроль точности расчета показывает, что все значащие цифры, приведенные в табл.2.17, являются верными.

Решим задачу обратного рекуррентного дифференцирования уравнения (2.45) в другой формулировке

$$F1(\dots(D(x)))\dots - G(x) + 0,7 = 0$$

где

$$F1 = \frac{\sqrt[5]{\left(\arctg\left(\frac{1}{\sqrt[15]{e^{(\ln \sin^2 D(x))^2}}}\right)\right)^2}}{A(x)}; \quad G(x) = \sqrt[4]{\frac{e^{\arctg(C(x))}}{a(x)}};$$

полиномы для смещения $x_0 = 0$ равны:

$$a(x) = 1 + 6x - 3x^2 + 6x^3; \quad A(x) = 2 + 3x + 4x^2; \quad C(x) = 0,5 + 2x + x^2.$$

Выполним расчет при другом значении переменной x и введем смещение переменной $x_0 = 0,05$, которое изменяет значения коэффициентов полиномов:

$$a(x) = 1,29325 + 5,745x - 2,1x^2 + 6x^3 ; A(x) = 2,16 + 3,4x + 4x^2 ;$$

$$C(x) = 0,6025 + 2,1x + x^2$$

Для начала процесса рекуррентного дифференцирования необходимо вычислить коэффициент d_1 при численном решении заданного уравнения для $x = 0,05$

$$\frac{1}{2,16} \cdot \sqrt[5]{\left(\arctg\left(\frac{1}{\sqrt[15]{e^{(\ln \sin^2 d_1)^2}}}\right)\right)^2} - 4\sqrt{\frac{1}{1,29325} e^{\arctg(0,6025)}} + 0,7 = 0.$$

Решение численного уравнения было найдено методом третьего порядка (раздел 1.3):

$$d_1 = 0,2937573690717; G(0,05) = 1,073875770630025; F1(0,05) = 0,373875770630025.$$

Найдем численные производной функции $G(x)$ прямым рекуррентным дифференцированием (табл.2.18).

Таблица 2.18

g_1	g_2	g_3	g_4
1,07387577063	-0,778985350242	3,18046465898	-1,35342634791e1
g_5	g_6	g_7	g_8
5,40908282474e1	-2,271827774856e2	9,89911358738e2	-4,39803313746e3
g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}
1,98035851395e4	-9,013859165073e4	4,13897948513e5	-1,91417824856e6
g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}
8,90512768877e6	-4,163547047086e7	1,95496720411e8	-9,21335939400e8
g_{17}	g_{18}	g_{19}	g_{20}
4,35608145184e9	-2,06541150653e10	9,817731885e10	-4,6772783311e11
g_{21}	g_{22}	g_{23}	g_{24}
2,2328208775e12	-1,0678459225e13	5,1154566277e13	-2,4542454361e14

Функция $F1$ содержит 10 внутренних функций, и для реализации обратного рекуррентного дифференцирования $F1$ потребуется последовательное обращение к рекуррентным формулам (табл. П.14 – П.18).

$$E = \sin D \rightarrow L = E^2 \rightarrow H = \ln L \rightarrow P = H^2 \rightarrow S = \exp P \rightarrow U = \sqrt[15]{S} \rightarrow$$

$$\rightarrow V = \frac{1}{U} \rightarrow R = \arctg V \rightarrow W = R^2 \rightarrow Z = \sqrt[5]{W} \rightarrow F1 = \frac{Z}{A}$$

Окончательные результаты обратного p -дифференцирования приведены в табл.2.19.

Для контроля точности проведенных численных расчетов выполнено прямое рекуррентное дифференцирования функции $F1$ с полиномом $D(x)$, численные коэффициенты которого приведены в табл.2.19. Согласно заданному уравнению, численные производные функции $F1$ должны быть равны численным производным функции $G(x)$ (табл.2.18).

Таблица 2.19

d_1	d_2	d_3	d_4
0,293757369071	-0,741347755330	1,207551813075e1	-9,301629581087e1
d_5	d_6	d_7	d_8
8,975954605864e2	-8,415729502151e3	8,170008635445e4	-8,031534366676e5
d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
8,01895835879e6	-8,103621374882e7	8,279320875869e8	-8,5393712638316e9
d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}
8,881554956e10	-9,305641993e11	9,813536885e12	-1,040887199e14
d_{17}	d_{18}	d_{19}	d_{20}
1,10969280e15	-1,18845626e16	1,2780218e17	-1,3793972e18
d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
1,4937628e19	-1,6224848e20	1,767131e21	-1,9294956e22

Вычисленные таким способом некоторые производные функции $F1$, имеющие наихудшую точность, приведены в табл.2.20.

Таблица 2.20

$(F1)_{13}$	$(F1)_{14}$	$(F1)_{15}$	$(F1)_{16}$
8,90512768905e6	-4,163547047318e7	1,95496720389e8	-9,213359394955e8
$(F1)_{17}$	$(F1)_{18}$	$(F1)_{19}$	$(F1)_{20}$
4,35608144901e9	-2,06541150099e10	9,8177318702e10	-4,67727830225e11
$(F1)_{21}$	$(F1)_{22}$	$(F1)_{23}$	$(F1)_{24}$
2,2328208494e12	-1,0678459171e13	5,1154561620e13	-2,4542454645e14

Сравнение результатов (табл.2.18, 2.20) показывает, что при решении примера со смещением $x_0 = 0,05$ все приведенные значащие цифры (табл.2.19) являются верными, но количество верных значащих цифр убывает к концу таблицы.

Рассмотрим уравнение

$$F1(...(D(x)))... - F2(...(D(x)))... = 0. \quad (2.47)$$

В процессе обратного p -дифференцирования должны быть вычислены коэффициенты внутреннего полинома

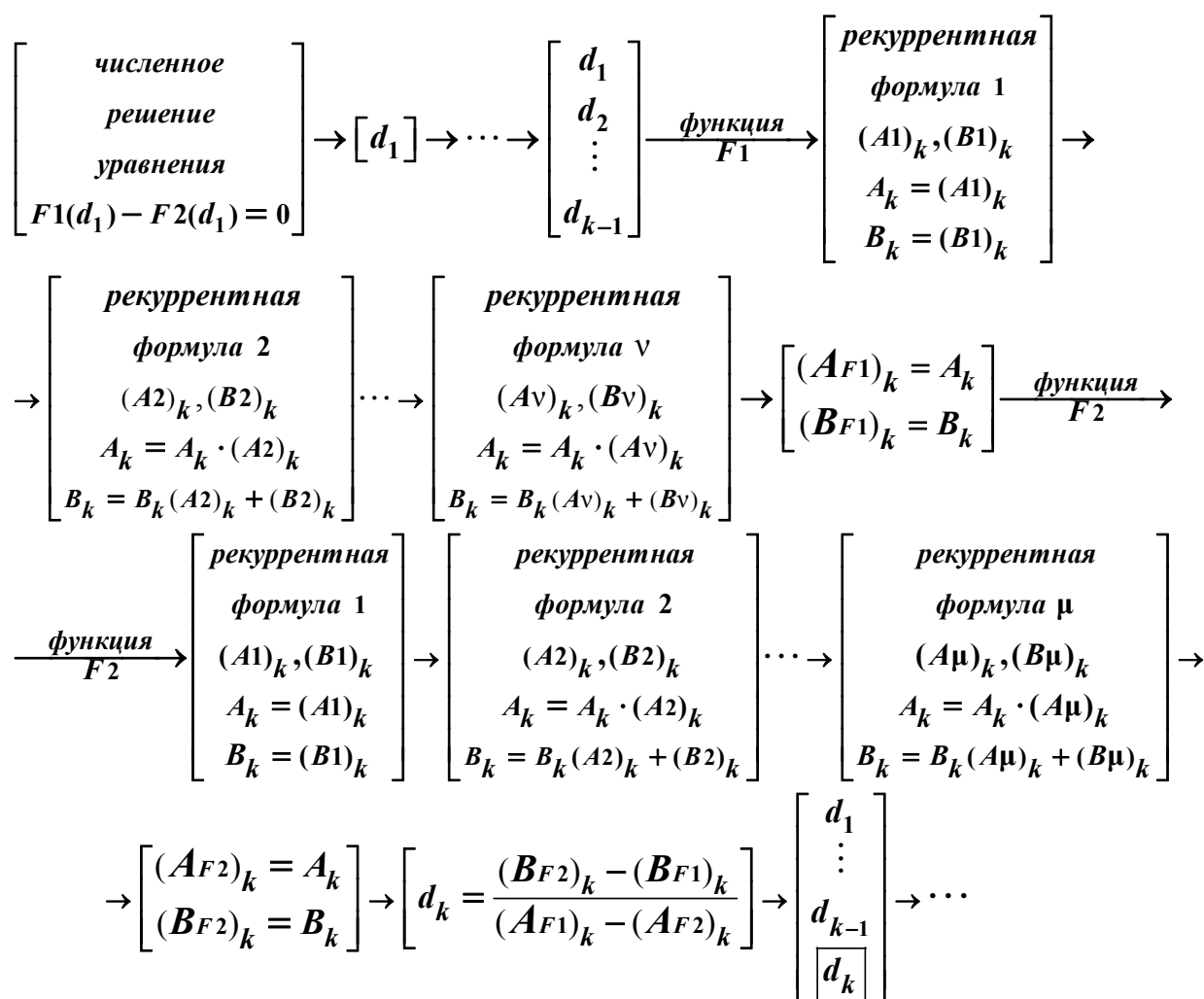
$$D(x) = d_1 + d_2x + d_3x^2 + d_4x^3 + \dots + d_lx^{l-1},$$

которые удовлетворяют заданному уравнению (2.47). Для начала процесса обратного рекуррентного дифференцирования необходимо вычислить коэффициент d_1 при численном решении уравнения (2.47) для $x = 0$

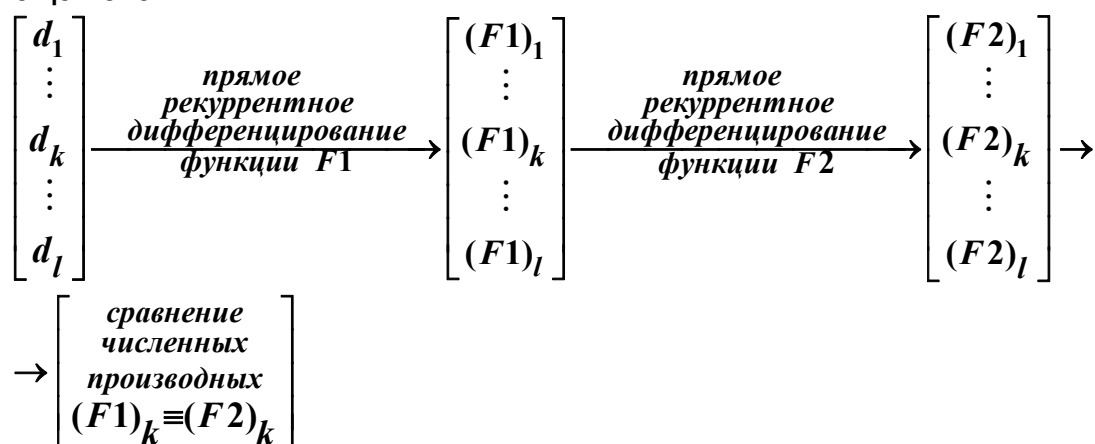
$$F1(d_1) - F2(d_1) = 0. \quad (2.48)$$

Функции $F1$, $F2$ могут содержать несколько внутренних функций, и для реализации обратного рекуррентного дифференцирования потребуются последовательные обращения к рекуррентным формулам (табл. П.14 – П.18).

Процедуру обратного p -дифференцирования составных функций $F1$, $F2$ удобно представить следующей схемой.



Контроль точности решения задачи можно осуществить с помощью следующей схемы.



Пример 2.12

Зададим уравнение (2.47), в котором

$$F1 = \frac{\sqrt[5]{\left(\arctg\left(\frac{1}{\sqrt[15]{e^{(\ln \sin^2 D(x))^2}}}\right)\right)^2}}{A(x)}; F2 = \frac{\arctg\left(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{D(x)})^2}\right)^2}{B(x)} \quad (2.49)$$

полиномы для смещения $x_0 = 0$ равны:

$$A(x) = 2 + 3x + 4x^2 ; B(x) = 1 + 2x + x^2 .$$

Для начала процесса рекуррентного дифференцирования необходимо вычислить коэффициент d_1 при численном решении уравнения (2.48) для $x = 0$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt[5]{\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[15]{e^{(\ln \sin^2 d_1)^2}}}\right)\right)^2 - \operatorname{arctg}\left(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{d_1})^2}\right)^2} = 0 .$$

Решение численного уравнения было найдено методом третьего порядка (раздел 1.3):

$$d_1 = 0,3605033078494889 ; F1(0) = F2(0) = 0,4189368740839464 .$$

Окончательные результаты обратного p -дифференцирования приведены в табл.2.21.

Таблица 2.21

d_1	d_2	d_3	d_4
0,360503307849	7,184255567462e-2	-0,253116024945	0,2471384225141
d_5	d_6	d_7	d_8
0,100388743592	-0,569793065276	0,549199241249	0,3514146279609
d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
-1,4292354004	1,007358834623	1,592402719978	-3,763809167508
d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}
0,90349546674	7,042383823970	-1,012504921042e1	-4,046337386239
d_{17}	d_{18}	d_{19}	d_{20}
2,85431862300e1	-2,641636814285e1	-3,356998510620e1	1,063242168210e2
d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
-6,08375484310e1	-1,6954765855e2	3,680536100043e2	-9,401666072072e1

Для контроля точности проведенных численных расчетов выполнено прямое рекуррентное дифференцирование функций $F1$, $F2$ с найденным полиномом $D(x)$, численные коэффициенты которого приведены в табл.2.21. Согласно заданному уравнению, численные производные функции $F1$ должны быть равны численным производным функции $F2$. В табл.2.22 приведены численные производные только функции $F1$.

Таблица 2.22

$(F1)_1$	$(F1)_2$	$(F1)_3$	$(F1)_4$
0,4189368740839	-0,6151553986606	0,3540693735362e-1	1,242777161732
$(F1)_5$	$(F1)_6$	$(F1)_7$	$(F1)_8$
-1,975027478833	0,4550851384330	3,3465722814399	-6,010251686767
$(F1)_9$	$(F1)_{10}$	$(F1)_{11}$	$(F1)_{12}$
2,337474326935	8,570104073334	-1,758307953855e1	9,220694057698
$(F1)_{13}$	$(F1)_{14}$	$(F1)_{15}$	$(F1)_{16}$
2,133693375020e1	-5,024221762881e1	3,227699921492e1	5,216491291392e1
$(F1)_{17}$	$(F1)_{18}$	$(F1)_{19}$	$(F1)_{20}$
-1,417904004994e2	1,063275145534e2	1,250828386535e2	-3,972381703465e2
$(F1)_{21}$	$(F1)_{22}$	$(F1)_{23}$	$(F1)_{24}$
3,386443230540e2	2,908348389634e2	-1,105079382836e3	1,054395116706e3

Сравнение численных производных $F1$, $F2$ показывает, что в них совпадают 13 значащих цифр, и поэтому приведенные значения в табл.2.21 имеют все верные значащие цифры.

Изменяем смещение $x_0 = 0,1$ и решаем задачу обратного рекуррентного дифференцирования для другого значения переменной x .

Смещение меняет коэффициенты полиномов заданной функции:

$$A(x) = 2,34 + 3,8x + 4x^2 ; B(x) = 1,21 + 2,2x + x^2 .$$

Для начала процесса обратного рекуррентного дифференцирования необходимо вычислить коэффициент d_1 при численном решении заданного уравнения для $x = 0,1$

$$\frac{1}{2,34} \cdot 5 \sqrt[5]{\left(\arctg\left(\frac{1}{\sqrt[15]{e^{(\ln \sin^2 d_1)^2}}}\right)\right)^2} - \frac{1}{1,21} \cdot \arctg\left(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{d_1})^2}\right)^2 = 0$$

Решение численного уравнения было найдено методом третьего порядка (раздел 1.3):

$$d_1 = 0,3654084537125330 ; F1(0,1) = F2(0,1) = 0,35882800469918 .$$

Окончательные результаты обратного p -дифференцирования приведены в табл.2.23.

Таблица 2.23

d_1	d_2	d_3	d_4
0,365408453712	2,878453290297e-2	-0,177787380299	0,2418260571976
d_5	d_6	d_7	d_8
-9,83450838157e-2	-0,231405162182	0,497411588468	-0,346667548651
d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
-0,321755805060	1,034456971108	-0,901561148912	-0,544892800198
d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}
2,371153959354	-2,332436591832	-1,138020147108	6,102702922095
d_{17}	d_{18}	d_{19}	d_{20}
-6,674539133044	-2,186288834106	1,658399951354e1	-2,040333173278e1
d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
-4,18683935144e-2	6,272629138893e1	1,098603064477e2	1,676211064193e3

Для контроля точности проведенных численных расчетов выполнено прямое рекуррентное дифференцирование функций $F1$, $F2$ с найденным полиномом $D(x)$, численные коэффициенты которого приведены в табл.2.23. Согласно заданному уравнению, численные производные функции $F1$ должны быть равны численным производным функции $F2$. Вычисленные таким способом производные функции $F1$ приведены в табл.2.24.

Сравнение численных производных $F1$, $F2$ показывает, что в них совпадают 13 значащих цифр, и поэтому приведенные значения в табл.2.23 имеют все верные значащие цифры.

Таблица 2.24

$(F1)_1$	$(F1)_2$	$(F1)_3$	$(F1)_4$
0,3588280046981	-0,5783020635499	0,2981359954691	0,5460067315951
$(F1)_5$	$(F1)_6$	$(F1)_7$	$(F1)_8$
-1,432011981490	1,400826209531	0,1993577140485	-2,764906955808
$(F1)_9$	$(F1)_{10}$	$(F1)_{11}$	$(F1)_{12}$
4,184282624102	-2,065855795287	-3,833715303836	9,786567386399
$(F1)_{13}$	$(F1)_{14}$	$(F1)_{15}$	$(F1)_{16}$
-9,321379271261	-1,647223979315	1,861995320084e1	-2,729619280323e1
$(F1)_{17}$	$(F1)_{18}$	$(F1)_{19}$	$(F1)_{20}$
1,226031057758e1	2,687928253829e1	-6,431200515492e1	5,777334827923e1
$(F1)_{21}$	$(F1)_{22}$	$(F1)_{23}$	$(F1)_{24}$
1,740978102148e1	-1,217072086094e2	2,148082930967e2	3,281399711805e2

Рассмотрим уравнение

$$F1(...(D(x)))... + F2(...(D(x)))... - G(x) = 0 \quad (2.50)$$

Функция $G(x)$ уравнения (2.50) не содержит полином $D(x)$, и ее численные нормированные производные $g_1, g_2, g_3, \dots, g_l$ можно вычислить прямым рекуррентным дифференцированием. В процессе обратного p -дифференцирования должны быть вычислены коэффициенты внутреннего полинома

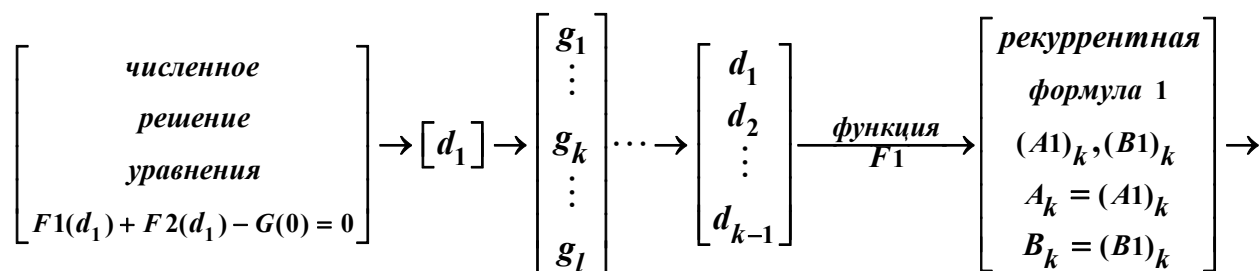
$$D(x) = d_1 + d_2x + d_3x^2 + d_4x^3 + \dots + d_lx^{l-1},$$

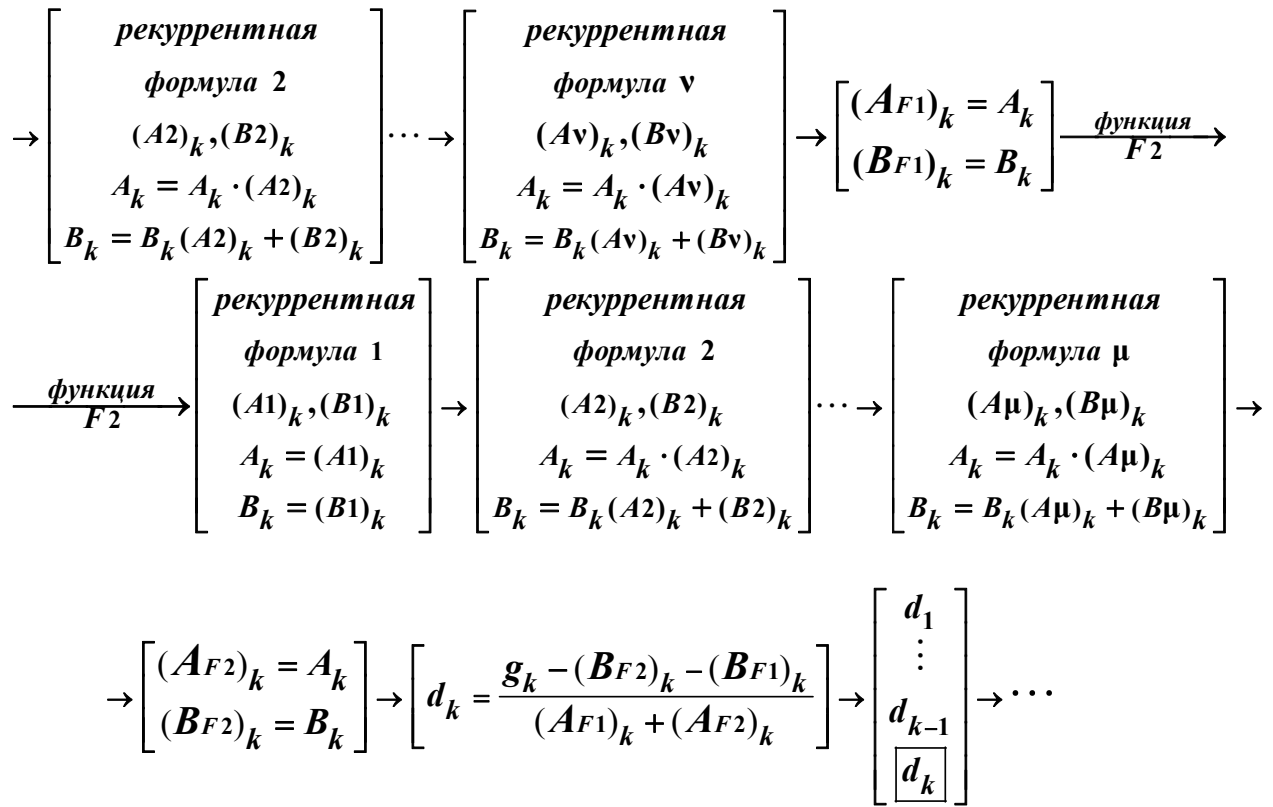
которые удовлетворяют заданному уравнению (2.50). Для начала процесса обратного рекуррентного дифференцирования необходимо вычислить коэффициент d_1 при численном решении уравнения (2.50) для $x = 0$

$$F1(d_1) + F2(d_1) - G(0) = 0. \quad (2.51)$$

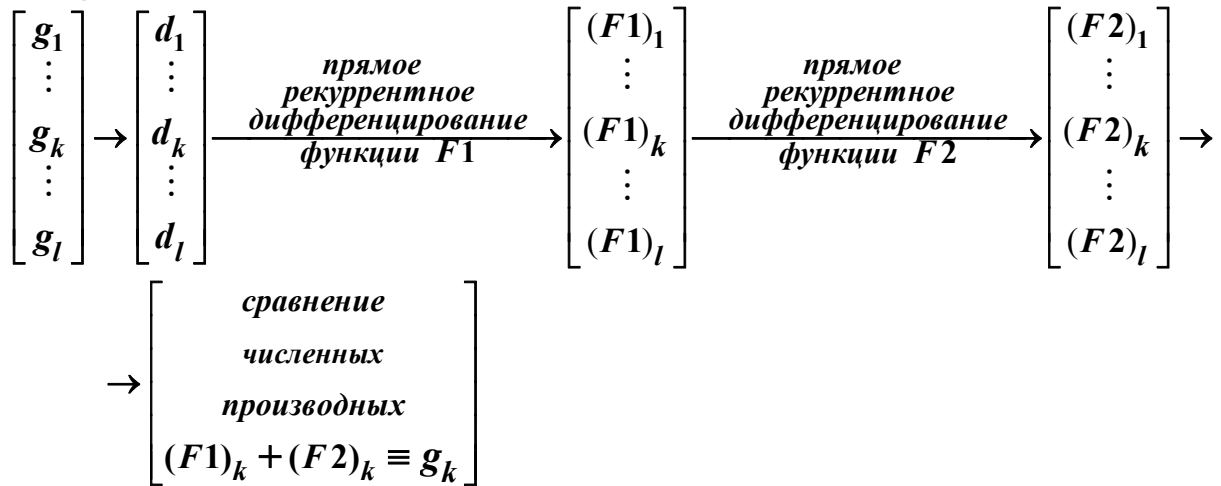
Функции $F1, F2$ могут содержать несколько внутренних функций, и для реализации их обратного рекуррентного дифференцирования потребуется последовательное обращение к обратным рекуррентным формулам (табл.П.14 – П.18).

Реализацию процесса обратного p -дифференцирования составных функций $F1, F2$ удобно представить следующей схемой.





Контроль точности решения задачи можно осуществить с помощью следующей схемы.



Пример 2.13.

Зададим уравнение (2.50) с функциями $F1$, $F2$ (2.49) и функцией $G(x)$ (2.46). Полиномы функций для смещения $x_0 = 0$ равны:

$$\begin{aligned}
a(x) &= 1 + 3x - x^2 + x^3; \quad A(x) = 2 + 3x + 4x^2; \quad B(x) = 1 + 2x + x^2; \\
C(x) &= 0,5 + 2x + x^2.
\end{aligned}$$

Для начала процесса рекуррентного дифференцирования необходимо вычислить коэффициент d_1 при численном решении заданного уравнения для $x = 0$

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \sqrt[5]{\left(\arctg\left(\frac{1}{\sqrt[15]{e^{(\ln \sin^2 d_1)^2}}}\right)\right)^2 + \arctg\left(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{d_1})^2}\right)^2 - \sqrt[4]{e^{\arctg(0,5)}}} = 0$$

Решение численного уравнения было найдено методом третьего порядка (раздел 1.3):

$$d_1 = 0,4477233456531 ; F1(0) = 0,43165124396755 ; F2(0) = 0,6912456991141129 ; G(0) = 1,122896943081664.$$

Найдем численные производные функции $G(x)$ прямым рекуррентным дифференцированием (табл.2.25).

Таблица 2.25

g_1	g_2	g_3	g_4
1,12289694308	-0,393013930078	1,47801310133	-4,60581914259
g_5	g_6	g_7	g_8
1,20579741245e1	-3,336309924664e1	9,98227972388e1	-3,05983292343e2
g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}
9,40257956890e2	-2,911664927030e3	9,11754276720e3	-2,87903477495e4
g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}
9,14114645764e4	-2,915717945581e5	9,34022608883e5	-3,00342817378e6
g_{17}	g_{18}	g_{19}	g_{20}
9,68898012527e6	-3,134421654247e7	1,01654322324e8	-3,30424981244e8
g_{21}	g_{22}	g_{23}	g_{24}
1,07621365246e9	-3,511692805650e9	1,14776817595e10	-3,75706534411e10

Окончательные результаты обратного p -дифференцирования приведены в табл.2.26.

Таблица 2.26

d_1	d_2	d_3	d_4
0,4477233456531	0,5209787893511	1,0283654416829	0,48914131504859
d_5	d_6	d_7	d_8
4,5749221116074	1,5364428627291	2,340196545490e1	-1,8924980379049e1
d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
1,76220839184e2	-3,25742839906e2	1,452257086366e3	-3,772400201296e3
d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}
1,35921092364e4	-4,10951501621e4	1,365707602836e5	-4,378391261586e5
d_{17}	d_{18}	d_{19}	d_{20}
1,42167634325e6	-4,65990397055e6	1,509785041726e7	-4,985487926212e7
d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
1,62225528853e8	-5,36987305175e8	1,756972136057e9	-5,821790089106e9

Для контроля точности проведенных численных расчетов выполнено прямое рекуррентное дифференцирование функций $F1$, $F2$ с полиномом $D(x)$, численные коэффициенты которого приведены в табл.2.26. Численные производные функций $F1$, $F2$ приведены в табл.2.27, 2.28. Согласно заданному уравнению (2.50), численные производные функции $F1+F2$ должны быть равны численным производным функции $G(x)$ (табл.2.25).

Таблица 2.27

$(F1)_1$	$(F1)_2$	$(F1)_3$	$(F1)_4$
0,431651243967	-0,5881295472954	5,451049022154e-2	0,91586136449779
$(F1)_5$	$(F1)_6$	$(F1)_7$	$(F1)_8$
-1,0025675034046	-1,22787200768745	5,4646056204775	-1,1341570316174e1
$(F1)_9$	$(F1)_{10}$	$(F1)_{11}$	$(F1)_{12}$
2,3803393583056e1	-7,3430880329676e1	2,361240732511e2	-7,3906529519857e2
$(F1)_{13}$	$(F1)_{14}$	$(F1)_{15}$	$(F1)_{16}$
2,2254944838894e3	-6,8757717853248e3	2,1511797119311e4	-6,8130085521748e4
$(F1)_{17}$	$(F1)_{18}$	$(F1)_{19}$	$(F1)_{20}$
2,1565822236722e5	-6,8509412033641e5	2,1825464484295e6	-6,9839772812002e6
$(F1)_{21}$	$(F1)_{22}$	$(F1)_{23}$	$(F1)_{24}$
2,2418503767893e7	-7,2172379355785e7	2,3289639703353e8	-7,5324836051473e8

Таблица 2.28

$(F2)_1$	$(F2)_2$	$(F2)_3$	$(F2)_4$
0,6912456991141	0,195115617216819	1,423502611109698	-5,521680507096
$(F2)_5$	$(F2)_6$	$(F2)_7$	$(F2)_8$
1,3060541627927e1	-3,21352272389597e1	9,43581916184187e1	-2,946417220271e2
$(F2)_9$	$(F2)_{10}$	$(F2)_{11}$	$(F2)_{12}$
9,1645456330719e2	-2,83823404670036e3	8,88141869395450e3	-2,805128245432e4
$(F2)_{13}$	$(F2)_{14}$	$(F2)_{15}$	$(F2)_{16}$
8,9185970092555e4	-2,84696022772825e5	9,12510811764587e5	-2,935298088265e6
$(F2)_{17}$	$(F2)_{18}$	$(F2)_{19}$	$(F2)_{20}$
9,4733219029126e6	-3,06591224221411e7	9,94717758759110e7	-3,234410039629e1
$(F2)_{21}$	$(F2)_{22}$	$(F2)_{23}$	$(F2)_{24}$
1,0537951487012e9	-3,43952042629429e9	1,1244785362534e10	-3,68174050806e10

Вычисленные производные функции $F1+F2$ отличаются от численных производных $G(x)$ только в двух последних значащих цифрах, и поэтому все приведенные значащие цифры (табл.2.26) являются верными.

Изменяем смещение $x_0 = 0,1$ и решаем задачу обратного рекуррентного дифференцирования для другого значения переменной x . Смещение меняет коэффициенты полиномов заданной функции:

$$a(x) = 1,291 + 2,83x - 0,7x^2 + x^3; A(x) = 2,34 + 3,8x + 4x^2;$$

$$B(x) = 1,21 + 2,2x + x^2; C(x) = 0,71 + 2,2x + x^2.$$

Для начала процесса обратного рекуррентного дифференцирования необходимо вычислить коэффициент d_1 при численном решении заданного уравнения для $x = 0,1$

$$\frac{1}{2,34} \cdot \sqrt[5]{\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[15]{e^{(\ln \sin^2 d_1)^2}}}\right)\right)^2} + \frac{1}{1,21} \cdot \operatorname{arctg}\left(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{d_1})^2}\right)^2 -$$

$$- \sqrt[4]{\frac{1}{1,291} e^{\operatorname{arctg}(0,71)}} = 0.$$

Решение численного уравнения было найдено методом третьего порядка (раздел 1.3):

$$d_1 = 0,511089940911915 ; F1(0,1) = 0,3741912330089783 ; F2(0,1) = 0,720527039122378 ; G(0,1) = 1,094718436921217$$

Смещение $x_0 = 0,1$ меняет численные производные функции $G(x)$ (табл.2.29).

Таблица 2.29

g_1	g_2	g_3	g_4
1,09471843692	-0,199630238439	0,59039502642	-1,83535984718
g_5	g_6	g_7	g_8
3,82702629714e1	-7,338533757379	1,53871078826e1	-3,58522069293e1
g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}
8,53095022725e1	-1,987544936923e2	4,59377055760e2	-1,07574002540e3
g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}
2,55881252409e3	-6,126369703631e3	1,46787155586e4	-3,52215216094e4
g_{17}	g_{18}	g_{19}	g_{20}
8,48304378943e4	-2,051326042088e5	4,97425141989e5	-1,20843137654e6
g_{21}	g_{22}	g_{23}	g_{24}
2,9407674786e6	-7,169778022678e6	1,751181728286e7	-4,28382130514e7

Окончательные результаты обратного p -дифференцирования приведены в табл.2.30.

Таблица 2.30

d_1	d_2	d_3	d_4
0,51108994091	0,76178894200	1,5003705616	2,9592498095
d_5	d_6	d_7	d_8
9,2420536261	2,0015903151e1	5,3369382405e1	1,2072164090e2
d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
2,9769594377e2	5,8437513159e2	1,1796524623e3	1,0360806481e3
d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}
-2,5426017627e3	-2,9189281288e4	-1,4312791172e5	-6,2624810460e5
d_{17}	d_{18}	d_{19}	d_{20}
-2,4273581774e6	-9,1410990829e6	-3,2886552638e7	-1,1653298089e8
d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
-4,0369463006e8	-1,3863572370e9	-4,6970185132e9	-1,5815084480e10

Для контроля точности проведенных численных расчетов выполнено прямое рекуррентное дифференцирование функций $F1$, $F2$ с найденным полиномом $D(x)$, численные коэффициенты которого приведены в табл.2.30. Согласно заданному уравнению, численные производные функции $F1+F2$ должны быть равны численным производным функции $G(x)$. Сравнение показало, что приведенные значения производных (табл.2.30) имеют все верные значащие цифры.

Рассмотрим уравнение

$$F1(...(D(x))) \cdot F2(...(D(x))) - G(x) + 0,45 = 0 ; \quad (2.52)$$

$$F(...(D(x))) - G(x) + 0,45 = 0 .$$

Функция $G(x)$ уравнения (2.52) не содержит полином $D(x)$, и ее численные нормированные производные $g_1, g_2, g_3, \dots, g_l$ можно вычислить прямым рекуррентным дифференцированием. В процессе обратного p -дифференцирования должны быть вычислены коэффициенты внутреннего полинома

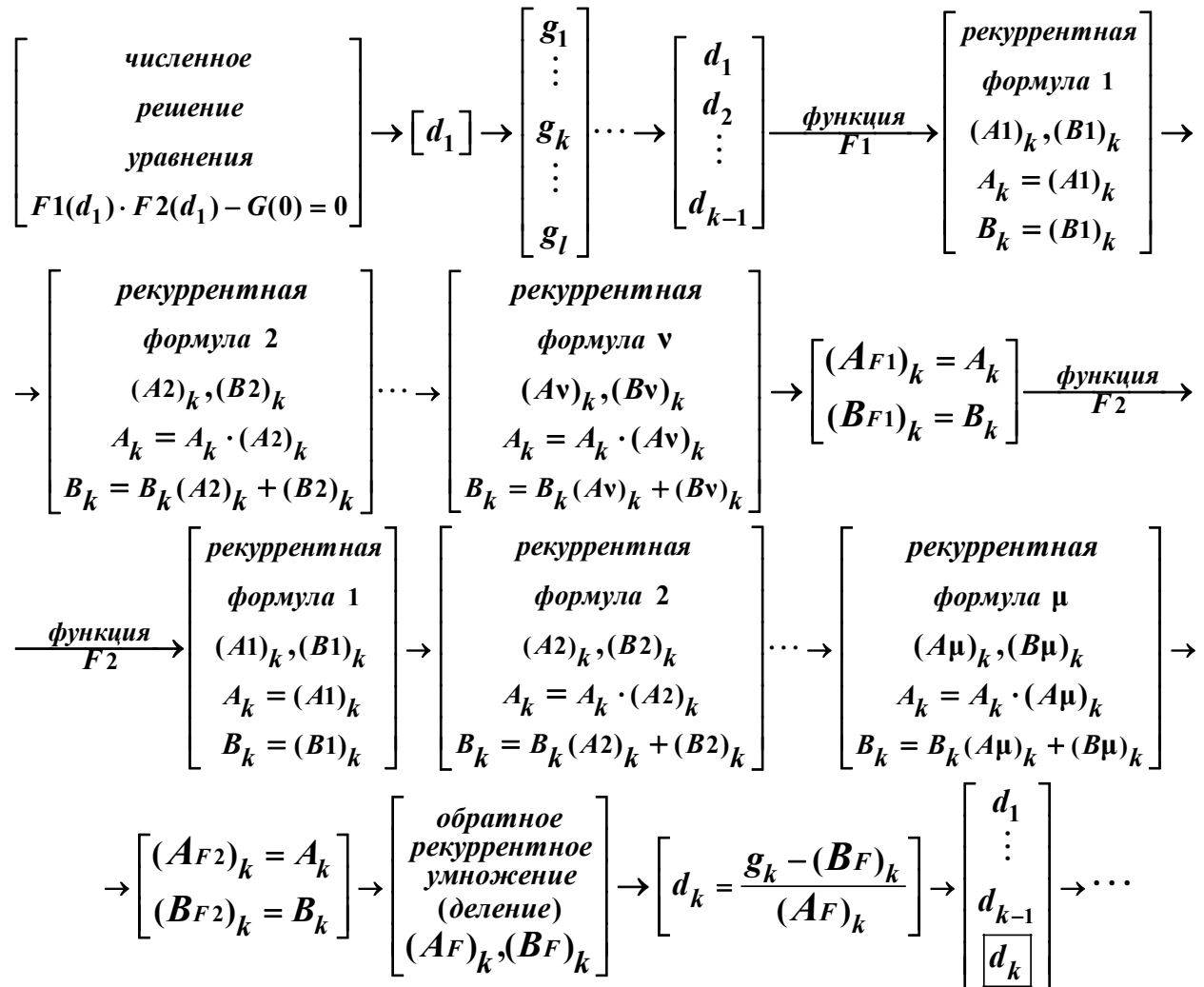
$$D(x) = d_1 + d_2 x + d_3 x^2 + d_4 x^3 + \dots + d_l x^{l-1},$$

которые удовлетворяют заданному уравнению (2.52). Для начала процесса обратного рекуррентного дифференцирования необходимо вычислить коэффициент d_1 при численном решении уравнения (2.52) для $x = 0$

$$F1(d_1) \cdot F2(d_1) - G(0) + 0,45 = 0. \quad (2.53)$$

Функции $F1, F2$ могут содержать несколько внутренних функций, и для реализации их обратного рекуррентного дифференцирования потребуется последовательное обращение к рекуррентным формулам (табл. П.14 – П.18).

Процедуру обратного p -дифференцирования составных функций $F1, F2$ удобно представить следующей схемой.



Контроль точности решения задачи можно осуществить с помощью следующей схемы.



Пример 2.14.

Зададим уравнение (2.52) с функциями $F1$, $F2$ (2.49) и функцией $G(x)$ (2.46). Полиномы функций для смещения $x_0 = 0$ равны:

$$\begin{aligned}
 a(x) &= 1 + 8x + 4x^2 - 4x^3; \quad A(x) = 2 + 3x + 4x^2; \quad B(x) = 1 + 2x + x^2; \\
 C(x) &= 0,5 + 2x + x^2
 \end{aligned}$$

Для начала процесса рекуррентного дифференцирования необходимо вычислить коэффициент d_1 при численном решении заданного уравнения для $x = 0$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \cdot \left(5 \sqrt{\left(\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt[15]{e^{(\ln \sin^2 d_1)^2}}} \right) \right)^2} \cdot \left(\operatorname{arctg} \left(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{d_1})^2} \right) \right)^2 \right) - \\
 &\quad - \sqrt[4]{e^{\operatorname{arctg}(0,5)}} + 0,45 = 0
 \end{aligned}$$

Решение численного уравнения было найдено методом второго порядка (раздел 1.3):
 $d_1 = 0,93850240395887$; $F1(0) = 0,4525217730939017$; $F2(0) = 1,486993517419177$;
 $G(0) = 1,122896943081664$.

Найдем численные производные функции $G(x)$ прямым рекуррентным дифференцированием (табл.2.31).

Окончательные результаты обратного p -дифференцирования приведены в табл.2.32.

Для контроля точности проведенных численных расчетов выполнено прямое рекуррентное дифференцирование функций $F1$, $F2$ с полиномом $D(x)$, численные коэффициенты которого приведены в табл.2.32. Численные производные функций $F1$, $F2$ приведены в табл.2.33, 2.34.

Согласно заданному уравнению (2.53), численные производные функции $(G(x) - 0,45) / F1(D(x))$, полученные в прямом рекуррентном дифференцировании с использованием найденных численных производных функции $D(x)$ (табл.2.32), должны быть равны численным производным функции $F2$ (табл.2.34).

Таблица 2.31

g_1	g_2	g_3	g_4
1,122896943081	-1,7966351089306	9,162839055546	-5,138675850726e1
g_5	g_6	g_7	g_8
3,073012600584e2	-1,9277750988017e3	1,246539536714e4	-8,223768335419e4
g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}
5,505888091818e5	-3,7283168181436e6	2,547451931202e7	-1,753359373130e8
g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}
1,214121975294e9	-8,4501539673479e9	5,906820020008e10	-4,144498349519e11
g_{17}	g_{18}	g_{19}	g_{20}
2,917501282133e12	-2,0596824700437e13	1,457799957693e14	-1,034153837417e15
g_{21}	g_{22}	g_{23}	g_{24}
7,351249844731e15	-5,2352803645703e16	3,734627308976e17	-2,668202691386e18

Таблица 2.32

d_1	d_2	d_3	d_4
0,93850240395	1,4628075523	1,6985323952e1	-1,4918528123e2
d_5	d_6	d_7	d_8
-2,1213022385e3	-5,1638502989e4	-6,830663864e5	-9,5876381461e6
d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
-1,061250815e8	-9,1543392518e8	-5,714481180e8	2,3659608128e11
d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}
7,919487009e12	1,9903452142e14	4,407484062e15	9,1720442990e16
d_{17}	d_{18}	d_{19}	d_{20}
1,825902963e18	3,5286540383e19	6,646752585e20	1,2249414118e22
d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
2,208260345e23	3,8900881750e24	6,6709097683e25	1,1063704723e27

Таблица 2.33

$(F1)_1$	$(F1)_2$	$(F1)_3$	$(F1)_4$
0,45252177309	-0,66452190753	0,19955296669	-1,6389889356
$(F1)_5$	$(F1)_6$	$(F1)_7$	$(F1)_8$
-1,0381800597e1	-1,7630057264e2	-2,2717435923e3	-3,0264129325e4
$(F1)_9$	$(F1)_{10}$	$(F1)_{11}$	$(F1)_{12}$
-4,6783073515e5	-5,0702973313e6	-4,5984313820e7	2,6935274816e8
$(F1)_{13}$	$(F1)_{14}$	$(F1)_{15}$	$(F1)_{16}$
2,2942585025e10	7,6062618554e11	1,9572927994e13	4,5485877471e14
$(F1)_{17}$	$(F1)_{18}$	$(F1)_{19}$	$(F1)_{20}$
9,8705741013e15	2,0485198585e17	4,1007417872e18	7,9691826053e19
$(F1)_{21}$	$(F1)_{22}$	$(F1)_{23}$	$(F1)_{24}$
1,5068120172e21	2,7742313848e22	4,9657155413e23	8,6088686989e24

Таблица 2.34

$(F2)_1$	$(F2)_2$	$(F2)_3$	$(F2)_4$
1,4869935174	-1,7866440651	1,6968997785e1	-8,2464079968e1
$(F2)_5$	$(F2)_6$	$(F2)_7$	$(F2)_8$
5,7814950434e2	-2,7749049534e3	3,0076191367e4	-3,9049588077e4
$(F2)_9$	$(F2)_{10}$	$(F2)_{11}$	$(F2)_{12}$
2,6201892702e6	1,1431339221e7	2,1741039280e8	-9,8997017749e8
$(F2)_{13}$	$(F2)_{14}$	$(F2)_{15}$	$(F2)_{16}$
-7,17430498159e10	-2,5434233182187e12	-6,5622738579505e13	-1,538191924733e15
$(F2)_{17}$	$(F2)_{18}$	$(F2)_{19}$	$(F2)_{20}$
-3,34894852182e16	-6,9733789954237e17	-1,3992208913192e19	-2,725115223228e20
$(F2)_{21}$	$(F2)_{22}$	$(F2)_{23}$	$(F2)_{24}$
-5,16285597499e21	-9,5245284360623e22	-1,7084767772186e24	-2,969246576967e25

В табл.2.35 приведены некоторые численные производные функции $(G(x) - 0,45) / F1(D(x))$ с наилучшей точностью.

Таблица 2.35

$((G-0,45)/F1)_{13}$	$((G-0,45)/F1)_{14}$	$((G-0,45)/F1)_{15}$	$((G-0,45)/F1)_{16}$
-7,174304981608e10	-2,5434233182184e12	-6,5622738579535e13	-1,538191924733e15
$((G-0,45)/F1)_{17}$	$((G-0,45)/F1)_{18}$	$((G-0,45)/F1)_{19}$	$((G-0,45)/F1)_{20}$
-3,348948521816e16	-6,9733789954309e17	-1,3992208913198e19	-2,725115223226e20
$((G-0,45)/F1)_{21}$	$((G-0,45)/F1)_{22}$	$((G-0,45)/F1)_{23}$	$((G-0,45)/F1)_{24}$
-5,162855974999e21	-9,5245284360593e22	-1,7084767772171e24	-2,969246576963e25

Сравнение показывает, что в численных производных (табл.2.32) все приведенные значения цифры являются верными.

Изменяем смещение $x_0 = -0,08$ и решаем задачу обратного рекуррентного дифференцирования для другого значения переменной x . Смещение меняет коэффициенты полиномов заданной функции:

$$a(x) = 0,387648 + 7,2832x + 4,96x^2 - 4x^3; \quad A(x) = 1,7856 + 2,36x + 4x^2;$$

$$B(x) = 0,8464 + 1,84x + x^2; \quad C(x) = 0,3464 + 1,84x + x^2.$$

Для начала процесса обратного рекуррентного дифференцирования необходимо вычислить коэффициент d_1 при численном решении заданного уравнения для $x = -0,08$

$$\frac{1}{1,7856} \cdot \left(5 \sqrt{\left(\arctg\left(\frac{1}{15 \sqrt{e^{(\ln \sin^2 d_1)^2}}} \right) \right)^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{0,8464} \cdot \arctg(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{d_1})^2})^2 \right) - \\ - \sqrt[4]{\frac{1}{0,387648} e^{\arctg(0,3464)}} + 0,45 = 0$$

Решение численного уравнения было найдено методом второго порядка (раздел 1.3):

$$d_1 = 0,99702326340018 ; F1(-0,08) = 0,5074008837187888 ;$$

$$F2(-0,08) = 1,827970778060979 ; G(-0,08) = 1,377513988200263.$$

Смещение $x_0 = -0,08$ меняет численные производные функции $G(x)$ (табл.2.36).

Таблица 2.36

g_1	g_2	g_3	g_4
1,3775139882	-5,9044766048	6,9015468559e1	-9,3532023148e2
g_5	g_6	g_7	g_8
1,3720268485e4	-2,1053731295e5	3,8263738919e6	-5,3613023163e7
g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}
8,7702000150e8	-1,4510923114e10	2,4226968773e11	-4,0745918156e12
g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}
6,8945030668e13	-1,1725693098e15	2,0029286252e16	-3,4341973085e17
g_{17}	g_{18}	g_{19}	g_{20}
5,9075702651e18	-1,0191666157e20	1,7627552809e21	-3,0558370037e22
g_{21}	g_{22}	g_{23}	g_{24}
5,3083393315e23	-9,2382814726e24	1,6104727740e26	-2,8117764217e27

Окончательные результаты обратного p -дифференцирования приведены в табл.2.37.

Таблица 2.37

d_1	d_2	d_3	d_4
0,99702326340	-1,8030936874	-2,5377871350e2	1,5888763035e4
d_5	d_6	d_7	d_8
1,0012322552e6	-3,4806010675e8	4,9963890589e10	-4,7540008171e12
d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
1,7575696550e14	5,2296790528e16	-1,7537737624e19	3,6173943659e21
d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}
-6,0959071983e23	8,8908946049e25	-1,1137194541e28	1,0916680386e30
d_{17}	d_{18}	d_{19}	d_{20}
-4,4596521176e31	-1,5124942140e34	5,9796294379e36	-1,4943037191e39
d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
3,157125333e41	-6,0686319451e43	1,0920008455e46	-1,8615910224e48

Для контроля точности проведенных численных расчетов выполнено прямое рекуррентное дифференцирование функции $(G(x) - 0,45)/F1(D(x))$ и функции $F2(D(x))$ с найденным полиномом $D(x)$, численные коэффициенты которого приведены в табл.2.37. Сравнение численных производных этих функций показывает, что значения производных (табл.2.37) имеют 11 верных значащих цифр.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{F2(\dots(D(x)))\dots}{F1(\dots(D(x)))\dots} - G(x) = 0 ; F(\dots(D(x)))\dots - G(x) = 0 . \quad (2.54)$$

Функция $G(x)$ уравнения (2.54) не содержит полином $D(x)$, и ее численные нормированные производные $g_1, g_2, g_3, \dots, g_l$ можно вычислить прямым рекуррентным дифференцированием. В процессе обратного p -дифференцирования должны быть вычислены коэффициенты внутреннего полинома

$$D(x) = d_1 + d_2 x + d_3 x^2 + d_4 x^3 + \dots + d_l x^{l-1},$$

которые удовлетворяют заданному уравнению (2.54). Для начала процесса обратного рекуррентного дифференцирования необходимо вычислить коэффициент d_1 при численном решении уравнения (2.54) для $x = 0$

$$\frac{F2(d_1)}{F1(d_1)} - G(0) = 0 \quad (2.55)$$

Процедура обратного p -дифференцирования уравнения (2.54) совпадает с предыдущей схемой (если заменить рекуррентное умножение на рекуррентное деление). Процедура контроля отличается от предыдущей схемы только заключительной частью.

$$\xrightarrow[\text{прямое рекуррентное умножение}]{C(x)=G(x) \cdot F1} \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_k \\ \vdots \\ C_l \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \text{сравнение} \\ \text{численных} \\ \text{производных} \\ (F2)_k \equiv C_k \\ (k = 2, 3, \dots, l) \end{bmatrix}$$

Пример 2.15.

Зададим уравнение (2.54) с функциями $F1, F2$ (2.49) и функцией $G(x)$ (2.46). Полиномы функций для смещения $x_0 = 0$ равны:

$$a(x) = 1 + 3x - x^2 + x^3; \quad A(x) = 2 + 3x + 4x^2; \quad B(x) = 1 + 2x + x^2;$$

$$C(x) = 0,5 + 2x + x^2$$

Для начала процесса обратного рекуррентного дифференцирования необходимо вычислить коэффициент d_1 при численном решении заданного уравнения для $x = 0$

$$\frac{\arctg(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{d_1})^2})^2}{\frac{1}{2} \cdot \left(5 \sqrt{\left(\arctg\left(\frac{1}{\sqrt[15]{e^{(\ln(\sin^2 d_1))^2}}}\right)} \right)^2} \right)} - \sqrt[4]{e^{\arctg(0,5)}} = 0.$$

Решение численного уравнения было найдено методом второго порядка (раздел 1.3):

$$d_1 = 0,378089751106509; \quad F1(0) = 0,4220210613364537; \quad F2(0) = 0,4738861596907829;$$

$$G(0) = 1,122896943081664$$

Численные производные функции $G(x)$ найдены прямым рекуррентным дифференцированием (табл.2.38).

Таблица 2.38

g_1	g_2	g_3	g_4
1,12289694308	-0,393013930078	1,47801310133	-4,60581914259
g_5	g_6	g_7	g_8
1,20579741245e1	-3,336309924664e1	9,98227972388e1	-3,05983292343e2
g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}
9,40257956890e2	-2,911664927030e3	9,11754276720e3	-2,87903477495e4
g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}
9,14114645764e4	-2,915717945581e5	9,34022608883e5	-3,00342817378e6
g_{17}	g_{18}	g_{19}	g_{20}
9,68898012527e6	-3,134421654247e7	1,01654322324e8	-3,30424981244e8
g_{21}	g_{22}	g_{23}	g_{24}
1,07621365246e9	-3,511692805650e9	1,14776817595e10	1,2315301855e11

Окончательные результаты обратного p -дифференцирования приведены в табл.2.39.

Таблица 2.39

d_1	d_2	d_3	d_4
0,3780897511065	2,40426184089e-2	-9,76037230303e-2	-0,1929998403837
d_5	d_6	d_7	d_8
1,1015263081009	-3,2473833920286	9,1434449118956	-2,7268247829666e1
d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
8,38599404932e1	-2,617906648573e2	8,267152141571e2	-2,6272058683683e3
d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}
8,37610159973e3	-2,68044554353e4	8,6159037539e4	-2,7804452827e5
d_{17}	d_{18}	d_{19}	d_{20}
9,000903050e5	-2,921498568e6	9,50550771e6	-3,09961067e7
d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
1,01275418e8	-3,3149631e8	1,0868264e9	-3,568522e9

Контроль точности показывает, что все значащие цифры, которые приведены в табл.2.39, являются верными.

Изменяем смещение $x_0 = -0,1$ и решаем задачу обратного рекуррентного дифференцирования для другого значения переменной x .

Смещение меняет коэффициенты полиномов заданной функции:

$$a(x) = 0,689 + 3,23x - 1,3x^2 + x^3 ; A(x) = 1,74 + 2,2x + 4x^2 ;$$

$$B(x) = 0,81 + 1,8x + x^2 ; C(x) = 0,31 + 1,8x + x^2$$

Для начала процесса обратного рекуррентного дифференцирования необходимо повторить расчет коэффициента d_1 при численном решении смещенного заданного уравнения, соответствующего смещению переменной $x_0 = -0,1$

$$\frac{1}{0,81} \cdot \arctg\left(\ln\left(\sqrt{\arcsin(\ln\sqrt{d_1})^2}\right)\right)^2 - 4\sqrt{\frac{1}{0,689} \cdot e^{\arctg(0,31)}} = 0.$$

$$\frac{1}{1,74} \cdot 5\sqrt{\left(\arctg\left(\frac{1}{15\sqrt{e^{(\ln\sin^2 d_1)^2}}}\right)\right)^2}$$

Решение численного уравнения было найдено методом второго порядка (раздел 1.3):

$$d_1 = 0,3750581702732278 ; F1(-0,1) = 0,484495814977963 ;$$

$$F2(-0,1) = 0,5732882893580678 ; G(-0,1) = 1,183267784024392.$$

Смещение $x_0 = -0,1$ приводит к изменению численных производных функции $G(x)$ (табл.2.40).

Таблица 2.40

g_1	g_2	g_3	g_4
1,1832677840	-0,9009896767	4,174320154373	-1,6794861420e1
g_5	g_6	g_7	g_8
6,8363436042e1	-2,9766789530e2	1,3391037471e3	-6,1256002808e3
g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}
2,8411983374e4	-1,3329405956e5	6,3092552024e5	-3,0077977578e6
g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}
1,4424612368e7	-6,9525354575e7	3,3654774524e8	-1,6351629947e9
g_{17}	g_{18}	g_{19}	g_{20}
7,9704296734e9	-3,8961954379e10	1,9094064135e11	-9,3785859966e11
g_{21}	g_{22}	g_{23}	g_{24}
4,6159195989e12	-2,2760191629e13	1,1241313700e14	-5,5605536870e14

Окончательные результаты обратного p -дифференцирования приведены в табл.2.41.

Таблица 2.41

d_1	d_2	d_3	d_4
0,375058170273227	3,0900742358960e-2	8,21988394757e-2	-1,32299629733339
d_5	d_6	d_7	d_8
6,30418049468015	-2,7087818795715e1	1,209338993592e2	-5,563847675929e2
d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
2,6004947993764e3	-1,227942102171e4	5,84446287177e4	-2,80051424437e5
d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}
1,34972572533e6	-6,5371636888e6	3,179488142e7	-1,5520459721e8
d_{17}	d_{18}	d_{19}	d_{20}
7,60036e8	-3,7323647e9	1,8374533e10	-9,0660078e10
d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
4,482139e11	-2,219934e12	1,101305e13	-5,47173e13

Контроль точности показывает, что все значащие цифры, которые приведены в табл.2.41, являются верными.

Лемма 2.6. Заданное уравнение

$$F1(D1(x) + D2(x) + D3(x) + \dots) + F2(D2(x)) + F3(D3(x)) + \dots = 0, \quad (2.56)$$

для функций которого $F1, F2, F3, \dots$ известны обратные рекуррентные формулы, в обратном рекуррентном дифференцировании преобразуется в уравнение

$$(A1)_k \cdot ((d1)_k + (d2)_k + (d3)_k + \dots) + (B1)_k + (A2)_k \cdot (d2)_k + (B2)_k + (A3)_k \cdot (d3)_k + (B3)_k + \dots = 0 ; \quad (k = 2, 3, \dots, l) \quad (2.57)$$

где $(d1)_k, (d2)_k, (d3)_k, \dots$ – нормированные производные внутренних функций $D1, D2, D3, \dots$, удовлетворяющие уравнению (2.56); $(A1)_k, (B1)_k, (A2)_k, (B2)_k, (A3)_k, (B3)_k, \dots$ – компоненты обратных рекуррентных формул функций $F1, F2, F3, \dots$.

Доказательство. Предполагаем, что для функций $F1, F2, F3, \dots$ известны обратные рекуррентные формулы

$$\Upsilon_{1A}, \Upsilon_{1B}, \Upsilon_{2A}, \Upsilon_{2B}, \Upsilon_{3A}, \Upsilon_{3B}, \dots$$

для расчета их компонент A_k, B_k . Тогда в обратном рекуррентном дифференцировании функции $F2, F3, \dots$ преобразуются согласно лемме 2.2 по формуле (2.5, раздел 2.1)

$$(F2)_k = (A2)_k \cdot (d2)_k + (B2)_k ; (F3)_k = (A3)_k \cdot (d3)_k + (B3)_k , \dots$$

Для реализации численного обратного дифференцирования должны быть найдены значения $(d1)_1, (d2)_1, (d3)_1, \dots$, удовлетворяющие численному уравнению (2.56)

$$F1((d1)_1 + (d2)_1 + (d3)_1 + \dots) + F2((d2)_1) + F3((d3)_1) + \dots = 0 .$$

Введем функцию $D(x) = D1(x) + D2(x) + D3(x) + \dots$, производные которой равны $d_k = (d1)_k + (d2)_k + (d3)_k + \dots ; \quad (k = 2, 3, \dots, l)$. Запишем для нее формулы обратного рекуррентного дифференцирования.

$$\begin{aligned} (F1)_1 &= F1(d_1) = F1((d1)_1 + (d2)_1 + (d3)_1 + \dots); \\ (F1)_2 &= \Upsilon_{1A}(d_1) \cdot d_2 + \Upsilon_{1B}(d_1) = (A1)_2 \cdot d_2 + (B1)_2 ; \\ (F1)_3 &= \Upsilon_{1A}(d_1, d_2) \cdot d_3 + \Upsilon_{1B}(d_1, d_2) = (A1)_3 \cdot d_3 + (B1)_3 ; \\ &\vdots \\ (F1)_k &= \Upsilon_{1A}(d_1, d_2, d_3, \dots, d_{k-1}) \cdot d_k + \Upsilon_{1B}(d_1, d_2, d_3, \dots, d_{k-1}) = \\ &= (A1)_k \cdot d_k + (B1)_k \end{aligned}$$

Подставляя формулу производной d_k , получаем

$$(F1)_k = (A1)_k \cdot d_k + (B1)_k = (A1)_k \cdot ((d1)_k + (d2)_k + (d3)_k + \dots) + (B1)_k ; (k = 2, 3, \dots, l)$$

откуда следует формула (2.57), что требовалось доказать.

Теорема 2.11. Зададим систему уравнений

$$\begin{cases} F1(D1(x) + D2(x)) + F2(D2(x)) - G(x) = 0; \\ F3(D1(x)) + F4(D1(x) + D2(x)) = 0 \end{cases} \quad (2.58)$$

в которой функции $F1, F2, F3, F4$ имеют обратные рекуррентные формулы. В обратном рекуррентном дифференцировании система уравнений (2.58) преобразуется в систему рекуррентных уравнений

$$\begin{cases} ((A1)_k \cdot ((d1)_k + (d2)_k) + (B1)_k) + ((A2)_k \cdot (d2)_k + (B2)_k) - G_k = 0; \\ ((A3)_k \cdot (d1)_k + (B3)_k) + ((A4)_k \cdot ((d1)_k + (d2)_k) + (B4)_k) = 0, (k = 2, 3, \dots, l) \end{cases} \quad (2.59)$$

где $(d1)_k, (d2)_k$ – нормированные производные внутренних функций $D1, D2$, удовлетворяющие системе уравнений (2.59);

$(A1)_k, (B1)_k, (A2)_k, (B2)_k, (A3)_k, (B3)_k, (A4)_k, (B4)_k$ – компоненты обратных рекуррентных формул функций $F1, F2, F3, F4$. Система уравнений (2.59) реализуема, если имеет численное решение система

$$\begin{cases} F1((d1)_1 + (d2)_1) + F2((d2)_1) - G_1 = 0; \\ F3((d1)_1) + F4((d1)_1 + (d2)_1) = 0 \end{cases} \quad (2.60)$$

Тогда имеет численное решение система уравнений (2.59):

$$\begin{bmatrix} (d1)_k \\ (d2)_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A1)_k + (A2)_k & (A2)_k \\ (A3)_k & (A3)_k + (A4)_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_k - (B1)_k - (B2)_k \\ -(B3)_k - (B4)_k \end{bmatrix}, \quad (k = 2, 3, \dots, l) \quad (2.61)$$

где обратная матрица – неособенная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем функции $F1, F2, F3, F4$ согласно лемме 2.2

$$(F1)_k = (A1)_k \cdot ((d1)_k + (d2)_k) + (B1)_k; (F2)_k = (A2)_k \cdot (d2)_k + (B2)_k;$$

$$(F3)_k = (A3)_k \cdot (d1)_k + (B3)_k; (F4)_k = (A4)_k \cdot ((d1)_k + (d2)_k) + (B4)_k$$

откуда получаем систему рекуррентных уравнений (2.59).

Предполагаем, что функции $F1, F2, F3, F4$ имеют обратные рекуррентные формулы $\Upsilon1_A, \Upsilon1_B, \Upsilon2_A, \Upsilon2_B, \Upsilon3_A, \Upsilon3_B, \Upsilon4_A, \Upsilon4_B$ для расчета их компонент A_k, B_k . Тогда запишем формулы обратного рекуррентного дифференцирования функций $F1, F2, F3, F4$ для $k = 2$:

$$\begin{aligned} (F1)_2 &= \Upsilon1_A((d1)_1 + (d2)_1) \cdot ((d1)_2 + (d2)_2) + \Upsilon1_B((d1)_1 + (d2)_1) = \\ &= (A1)_2 \cdot ((d1)_2 + (d2)_2) + (B1)_2; \end{aligned}$$

$$(F2)_2 = \Upsilon2_A((d2)_1) \cdot (d2)_2 + \Upsilon2_B((d2)_1) = (A2)_2 \cdot (d2)_2 + (B2)_2;$$

$$(F3)_2 = \Upsilon3_A((d1)_1) \cdot (d1)_2 + \Upsilon3_B((d1)_1) = (A3)_2 \cdot (d1)_2 + (B3)_2;$$

$$\begin{aligned} (F4)_2 &= \Upsilon4_A((d1)_1 + (d2)_1) \cdot ((d1)_2 + (d2)_2) + \Upsilon4_B((d1)_1 + (d2)_1) = \\ &= (A4)_2 \cdot ((d1)_2 + (d2)_2) + (B4)_2 \end{aligned}$$

Из записанных формул следует, что для их реализации необходимы значения $(d1)_1, (d2)_1$, которые определяются из системы уравнений (2.58) при $x = 0$,

$$\begin{cases} F1(D1(0) + D2(0)) + F2(D2(0)) - G(0) = 0; \\ F3(D1(0)) + F4(D1(0) + D2(0)) = 0 \end{cases}$$

откуда получаем систему уравнений (2.60), что требовалось доказать.

Пример 2.16.

Зададим систему уравнений

$$\begin{cases} F1(D1(x)) - F2(D2(x)) - G(x) = 0; \\ F3(D1(x)) - 2 \cdot F4(D2(x)) = 0 \end{cases},$$

в которой

$$F1(D1(x)) = \sin D1(x) ; F2(D2(x)) = \ln D2(x) ;$$

$$F3(D1(x)) = e^{D1(x)} ; F4(D2(x)) = \sin^2 D2(x) ;$$

$$G(x) = \frac{1}{e^{\arctg C(x)}};$$

полином функции $G(x)$ для смещения $x_0 = 0$ равен:

$$C(x) = 5 - x + 3,5x^2 + x^3.$$

Для начала процесса обратного рекуррентного дифференцирования необходимо вычислить коэффициенты $(d1)_1$, $(d2)_1$ при численном решении заданной системы уравнений для $x = 0$

$$\begin{cases} \sin(d1)_1 - \ln(d2)_1 - \frac{1}{e^{\arctg(5)}} = 0 ; \\ e^{(d1)_1} - 2\sin^2(d2)_1 = 0 \end{cases}$$

Решение численной системы уравнений было найдено методом Ньютона [15,16]:

$$(d1)_1 = -1,792864505905718 ; (d2)_1 = 0,2926762313755645 ;$$

$$F1(0) = -0,9754440245705714 ; F2(0) = -1,228688293311458 ;$$

$$F3(0) = 0,1664825956084224 ; F4(0) = 0,08324129780421118 ;$$

$$G(0) = 0,2532442687408867$$

Численные производные функции $G(x)$, которая не содержит функций $D1$, $D2$, вычислены прямым рекуррентным дифференцированием и приведены в табл.2.42.

Таблица 2.42

g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
0,25324	9,7402 e-3	-3,2030 e-2	-1,3993e-2	2,0815e-2	1,4576e-2
g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}
-1,2236e-2	-1,3050e-2	6,2131e-3	1,0583e-2	-2,3458e-3	-7,9475e-3
g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}	g_{17}	g_{18}
1,1722e-4	5,5800e-3	9,7505e-4	-3,6724e-3	-1,3515e-3	2,2583e-3
g_{19}	g_{20}	g_{21}	g_{22}	g_{23}	g_{24}
1,3275e-3	-1,2837e-3	-1,1175e-3	6,5826e-4	8,5286e-4	-2,8668e-4

Результаты обратного рекуррентного дифференцирования приведены в табл.2.43 – 2.48.

Таблица 2.43

$(F1)_1$	$(F1)_2$	$(F1)_3$	$(F1)_4$	$(F1)_5$	$(F1)_6$
-0,97544	2,9186e-3	-9,5372e-3	-4,5913e-3	6,7277e-3	5,1650e-3
$(F1)_7$	$(F1)_8$	$(F1)_9$	$(F1)_{10}$	$(F1)_{11}$	$(F1)_{12}$
-4,2076e-3	-4,9428e-3	2,2149e-3	4,2506e-3	-8,0604e-4	-3,3626e-3
$(F1)_{13}$	$(F1)_{14}$	$(F1)_{15}$	$(F1)_{16}$	$(F1)_{17}$	$(F1)_{18}$
-7,6350e-5	2,4727e-3	5,4404e-4	-1,6948e-3	-7,2171e-4	1,0736e-3
$(F1)_{19}$	$(F1)_{20}$	$(F1)_{21}$	$(F1)_{22}$	$(F1)_{23}$	$(F1)_{24}$
6,8786e-4	-8,2778e-4	-1,9483e-3	-8,5254e-3	-5,8644e-2	-0,39607

Таблица 2.44

$(F2)_1$	$(F2)_2$	$(F2)_3$	$(F2)_4$	$(F2)_5$	$(F2)_6$
-1,2287	-6,8216e-3	2,2493e-2	9,4018e-3	-1,4088e-2	-9,4111e-3
$(F2)_7$	$(F2)_8$	$(F2)_9$	$(F2)_{10}$	$(F2)_{11}$	$(F2)_{12}$
8,0285e-3	8,1069e-3	-3,9982e-3	-6,3325e-3	1,5397e-3	4,5849e-3
$(F2)_{13}$	$(F2)_{14}$	$(F2)_{15}$	$(F2)_{16}$	$(F2)_{17}$	$(F2)_{18}$
-1,9357e-4	-3,1073e-3	-4,3101e-4	1,9776e-3	6,2981e-4	-1,1846e-3
$(F2)_{19}$	$(F2)_{20}$	$(F2)_{21}$	$(F2)_{22}$	$(F2)_{23}$	$(F2)_{24}$
-6,3965e-4	4,5591e-4	-8,3084e-4	-9,1837e-3	-5,9497e-2	-0,39578

Таблица 2.45

$(F3)_1$	$(F3)_2$	$(F3)_3$	$(F3)_4$	$(F3)_5$	$(F3)_6$
0,16648	-2,2061e-3	7,2885e-3	2,9471e-3	-4,4404e-3	-2,8579e-3
$(F3)_7$	$(F3)_8$	$(F3)_9$	$(F3)_{10}$	$(F3)_{11}$	$(F3)_{12}$
2,4696e-3	2,3832e-3	-1,2102e-3	-1,8003e-3	4,7285e-4	1,2593e-3
$(F3)_{13}$	$(F3)_{14}$	$(F3)_{15}$	$(F3)_{16}$	$(F3)_{17}$	$(F3)_{18}$
-8,6375e-5	-8,2379e-4	-8,4107e-5	5,0594e-4	1,3443e-4	-2,9278e-4
$(F3)_{19}$	$(F3)_{20}$	$(F3)_{21}$	$(F3)_{22}$	$(F3)_{23}$	$(F3)_{24}$
-1,3355e-4	1,1587e-4	-1,7947e-4	-1,9333e-3	-1,2454e-2	-8,2896e-2

Таблица 2.46

$(F4)_1$	$(F4)_2$	$(F4)_3$	$(F4)_4$	$(F4)_5$	$(F4)_6$
0,083241	-1,1031e-3	3,6442e-3	1,4735e-3	-2,2202e-3	-1,4289e-3
$(F4)_7$	$(F4)_8$	$(F4)_9$	$(F4)_{10}$	$(F4)_{11}$	$(F4)_{12}$
1,2348e-3	1,1916e-3	-6,0512e-4	-9,0016e-4	2,3643e-4	6,2964e-4
$(F4)_{13}$	$(F4)_{14}$	$(F4)_{15}$	$(F4)_{16}$	$(F4)_{17}$	$(F4)_{18}$
-4,3188e-5	-4,1189e-4	-4,2054e-5	2,5297e-4	6,7216e-5	-1,4639e-4
$(F4)_{19}$	$(F4)_{20}$	$(F4)_{21}$	$(F4)_{22}$	$(F4)_{23}$	$(F4)_{24}$
-6,6773e-5	5,7936e-5	-8,9735e-5	-9,6663e-4	-6,2268e-3	-4,1448e-2

Теорема 2.12. Зададим систему уравнений

$$\begin{cases} F1(\dots D1(x)\dots) + F2(D2(x)) - G(x) = 0; \\ F3(D1(x)) + F4(D2(x)) = 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

в которой функции $F1$, $F2$, $F3$, $F4$ имеют обратные рекуррентные формулы. Составная функция $F1$ содержит несколько внутренних функций

$$F1 = v(\psi(\phi(D1(x)))) , \quad (2.63)$$

в которой v, ψ, ϕ - внутренние функции. Тогда в обратном рекуррентном дифференцировании система уравнений (2.62) преобразуется в систему рекуррентных уравнений

$$\begin{cases} ((A1)_k \cdot (d1)_k + (B1)_k) + ((A2)_k \cdot (d2)_k + (B2)_k) - G_k = 0 ; \\ ((A3)_k \cdot (d1)_k + (B3)_k) + ((A4)_k \cdot (d2)_k + (B4)_k) = 0 , \quad (k = 2, 3, \dots, l) \end{cases} \quad (2.64)$$

где $(d1)_k, (d2)_k$ - нормированные производные внутренних функций $D1, D2$, удовлетворяющие системе уравнений (2.62);

$(A1)_k, (B1)_k, (A2)_k, (B2)_k, (A3)_k, (B3)_k, (A4)_k, (B4)_k$ - компоненты обратных рекуррентных формул функций $F1, F2, F3, F4$. Компоненты составной функции $F1$, в свою очередь, определяются по обратным рекуррентным формулам:

$$\begin{cases} (A1)_k = (Av)_k \cdot (A\psi)_k \cdot (A\phi)_k ; \\ (B1)_k = (Av)_k \cdot (A\psi)_k \cdot (B\phi)_k + (Av)_k \cdot (B\psi)_k + (Bv)_k \end{cases} \quad (2.65)$$

где $(Av)_k, (A\psi)_k, (A\phi)_k; (Bv)_k, (B\psi)_k, (B\phi)_k$ - компоненты обратных рекуррентных формул для внутренних функций v, ψ, ϕ .

Система уравнений (2.62) рекуррентно реализуема, если имеет численное решение система

$$\begin{cases} F1((d1)_1) + F2((d2)_1) - G_1 = 0; \\ F3((d1)_1) + F4((d2)_1) = 0 \end{cases} \quad (2.66)$$

Тогда имеет численное решение система рекуррентных уравнений (2.64):

$$\begin{bmatrix} (d1)_k \\ (d2)_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Av)_k \cdot (A\psi)_k \cdot (A\phi)_k & (A2)_k \\ (A3)_k & (A4)_k \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} G_k - (Av)_k \cdot (A\psi)_k \cdot (B\phi)_k - (Av)_k \cdot (B\psi)_k - (Bv)_k - (B2)_k \\ -(B3)_k - (B4)_k \end{bmatrix}, (k = 2, 3, \dots, l) \quad (2.67)$$

где обратная матрица - неособенная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем функции $F1, F2, F3, F4$ согласно лемме 2.2

$$(F1)_k = (A1)_k \cdot (d1)_k + (B1)_k ; (F2)_k = (A2)_k \cdot (d2)_k + (B2)_k ;$$

$$(F3)_k = (A3)_k \cdot (d1)_k + (B3)_k ; (F4)_k = (A4)_k \cdot (d2)_k + (B4)_k$$

откуда получаем систему рекуррентных уравнений (2.64). Предполагаем, что функции $F2, F3, F4$ имеют обратные рекуррентные формулы

$\Upsilon_{2A}, \Upsilon_{2B}, \Upsilon_{3A}, \Upsilon_{3B}, \Upsilon_{4A}, \Upsilon_{4B}$ для расчета их компонент A_k, B_k .

Тогда запишем формулы обратного рекуррентного дифференцирования функций $F2, F3, F4$ для $k = 2$:

$$(F2)_2 = \Upsilon_{2A}((d2)_1) \cdot (d2)_2 + \Upsilon_{2B}((d2)_1) = (A2)_2 \cdot (d2)_2 + (B2)_2 ;$$

$$(F3)_2 = \Upsilon 3_A((d1)_1) \cdot (d1)_2 + \Upsilon 3_B((d1)_1) = (A3)_2 \cdot (d1)_2 + (B3)_2 ;$$

$$(F4)_2 = \Upsilon 4_A((d2)_1) \cdot (d2)_2 + \Upsilon 4_B((d2)_1) = (A4)_2 \cdot (d2)_2 + (B4)_2$$

Из записанных формул следует, что для их реализации необходимы значения $(d1)_1$, $(d2)_1$, которые определяются из заданной системы уравнений (2.62) при $x = 0$. Для составной функции $F1$ (2.63) введем обозначения:

$$F1 = F_I = v(F_{II}(x)); F_{II} = \psi(F_{III}(x)); F_{III} = \varphi(D(x))$$

и предполагаем, что функции F_I , F_{II} , F_{III} имеют обратные рекуррентные формулы $(\Upsilon\varphi)_A$, $(\Upsilon\varphi)_B$, $(\Upsilon\psi)_A$, $(\Upsilon\psi)_B$, $(\Upsilon v)_A$, $(\Upsilon v)_B$ для расчета их компонент A_k , B_k . Запишем формулы обратного рекуррентного дифференцирования функций F_I , F_{II} , F_{III} для $k = 2$:

$$(F_{III})_2 = (\Upsilon\varphi)_A((d1)_1) \cdot (d1)_2 + (\Upsilon\varphi)_B((d1)_1) = (A_{III})_2 \cdot (d1)_2 + (B_{III})_2 ;$$

$$(F_{II})_2 = (\Upsilon\psi)_A((F_{III})_1) \cdot (F_{III})_2 + (\Upsilon\psi)_B((F_{III})_1) =$$

$$= (\Upsilon\psi)_A((F_{III})_1) \cdot ((A_{III})_2 \cdot (d1)_2 + (B_{III})_2) + (\Upsilon\psi)_B((F_{III})_1) = (A_{II})_2 \cdot (d1)_2 + (B_{II})_2 ;$$

$$(F_I)_2 = (F1)_2 = (\Upsilon v)_A((F_{II})_1) \cdot (F_{II})_2 + (\Upsilon v)_B((F_{II})_1) =$$

$$= (\Upsilon v)_A((F_{II})_1) \cdot ((A_{II})_2 \cdot (d1)_2 + (B_{II})_2) + (\Upsilon v)_B((F_{II})_1) = (A_I)_2 \cdot (d1)_2 + (B_I)_2$$

где

$$(F_{III})_1 = \varphi((d1)_1) ; (F_{II})_1 = \psi(\varphi((d1)_1)) ; (F_I)_1 = v(\psi(\varphi((d1)_1))) .$$

Из записанных формул также следует, что для их реализации необходимо значение $(d1)_1$. Значения $(d1)_1$, $(d2)_1$ определяются из заданной системы уравнений (2.62) при $x = 0$

$$\begin{cases} F1(D1(0)) + F2(D2(0)) - G(0) = 0; \\ F3(D1(0)) + F4(D2(0)) = 0 \end{cases}$$

откуда получаем систему уравнений (2.66), что требовалось доказать.

Пример 2.17.

Зададим систему уравнений

$$\begin{cases} H1 \equiv -F1 - F2 - 0,43 \cdot G(x) = 0; \\ H2 \equiv F3 + F4 = 0 \end{cases}$$

в которой

$$F1 = \frac{\sqrt[5]{\left(\arctg\left(\frac{1}{\sqrt[15]{e^{(\ln \sin^2 D1(x))^2}}}\right)\right)^2}}{A(x)} ;$$

$$F4 = \frac{\arctg\left(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{D2(x)})^2}\right)^2}{B(x)} ; G(x) = \sqrt[4]{\frac{e^{\arctg(C(x))}}{a(x)}} ;$$

$$F2 = \frac{1}{\operatorname{arctg}\left(\ln\sqrt{\arcsin(\ln\sqrt{D2(x)})^2}\right)^2};$$

$$F3 = \frac{1}{\operatorname{arctg}\left(\ln\sqrt{\arcsin(\ln\sqrt{D1(x)})^2}\right)^2};$$

полиномы функций для смещения $x_0 = 0$ равны:

$$A(x) = 2 + 3x + 4x^2; \quad B(x) = 1 + 2x + x^2;$$

$$C(x) = 0,5 + 2x + x^2; \quad a(x) = 1 - 2x - 0,7x^2 - 1,1x^3.$$

Таблица 2.47

$(d1)_1$	$(d1)_2$	$(d1)_3$	$(d1)_4$	$(d1)_5$	$(d1)_6$
-1,7929	-1,3251e-2	4,3691e-2	1,8281e-2	-2,7388e-2	-1,8317e-2
$(d1)_7$	$(d1)_8$	$(d1)_9$	$(d1)_{10}$	$(d1)_{11}$	$(d1)_{12}$
1,5620e-2	1,5793e-2	-7,7825e-3	-1,2348e-2	2,9958e-3	8,9486e-3
$(d1)_{13}$	$(d1)_{14}$	$(d1)_{15}$	$(d1)_{16}$	$(d1)_{17}$	$(d1)_{18}$
-3,7159e-4	-6,0703e-3	-8,4761e-4	3,8668e-3	1,2369e-3	-2,3150e-3
$(d1)_{19}$	$(d1)_{20}$	$(d1)_{21}$	$(d1)_{22}$	$(d1)_{23}$	$(d1)_{24}$
-1,2351e-3	1,0322e-3	-6,9545e-4	-1,1799e-2	-7,5187e-2	-0,49833

Таблица 2.48

$(d2)_1$	$(d2)_2$	$(d2)_3$	$(d2)_4$	$(d2)_5$	$(d2)_6$
0,29269	-1,9965e-3	6,5899e-3	2,7068e-3	-4,0677e-3	-2,6648e-3
$(d2)_7$	$(d2)_8$	$(d2)_9$	$(d2)_{10}$	$(d2)_{11}$	$(d2)_{12}$
2,2888e-3	2,2571e-3	-1,1304e-3	-1,7330e-3	4,3881e-4	1,2328e-3
$(d2)_{13}$	$(d2)_{14}$	$(d2)_{15}$	$(d2)_{16}$	$(d2)_{17}$	$(d2)_{18}$
-6,8688e-5	-8,2071e-4	-9,8601e-5	5,1310e-4	1,4977e-4	-3,0244e-4
$(d2)_{19}$	$(d2)_{20}$	$(d2)_{21}$	$(d2)_{22}$	$(d2)_{23}$	$(d2)_{24}$
-1,5226e-4	1,0665e-4	-2,7411e-4	-2,6726e-3	-1,7379e-2	-0,11578

Для начала процесса обратного рекуррентного дифференцирования необходимо вычислить коэффициенты $(d1)_1$, $(d2)_1$ при численном решении заданной системы уравнений для $x = 0$

$$\begin{cases} \frac{-1}{2} \cdot \sqrt[5]{\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[15]{e^{(\ln(\sin^2 d1(x)))^2}}}\right)\right)^2} - \frac{1}{\operatorname{arctg}\left(\ln\sqrt{\arcsin(\ln\sqrt{d2(x)})^2}\right)^2} = \\ = 0,43 \cdot \sqrt[4]{e^{\operatorname{arctg}(0,5)}}, \\ \frac{1}{\operatorname{arctg}\left(\ln\sqrt{\arcsin(\ln\sqrt{d1(x)})^2}\right)^2} + \operatorname{arctg}\left(\ln\sqrt{\arcsin(\ln\sqrt{d2(x)})^2}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

Решение численной системы уравнения было найдено методом Ньютона [15,16]:

$$(d1)_1 = 1,041789828009049; \quad (d2)_1 = 1,822268517625480;$$

$$H1(0) \equiv -F1(0) - F2(0) - 0,43 \cdot G(0) = 1,110223024625157e - 16 ;$$

$$H2(0) \equiv F3(0) + F4(0) = -5,551115123125783e - 16$$

Численные производные функции $G(x)$, которая не содержит функций $D1$, $D2$, вычислены прямым рекуррентным дифференцированием и приведены в табл.2.49.

Составные функции $F1$, $F2$, $F3$, $F4$ содержат 9–10 внутренних функций, для реализации которых необходимо обращение к обратным рекуррентным формулам (табл. П.14 – П.18). Так, для расчета $(A1)_k$, $(B1)_k$ составной функции $F1$ реализуется следующая последовательность обратных рекуррентных формул:

$$E = \sin D1 \rightarrow L = E^2 \rightarrow H = \ln L \rightarrow P = H^2 \rightarrow S = \exp P \rightarrow U = \sqrt[15]{S} \rightarrow \\ \rightarrow V = \frac{1}{U} \rightarrow R = \arctg V \rightarrow W = R^2 \rightarrow Z = \sqrt[5]{W} \rightarrow F1 = \frac{Z}{A}$$

Таблица 2.49

g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
1,122896943	1,010607248	1,07798106	1,692579992	4,403412289	9,64280732
g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}
1,84784161e1	4,07389044e1	9,6469539e1	2,1508067e2	4,78164535e2	1,112057e3
g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}	g_{17}	g_{18}
2,59421776e3	5,975572e3	1,390168e4	3,270944e4	7,6863008e4	1,806584e5

Численные расчеты показывают, что для функции $F1$

$$(A1)_2 = (A1)_3 = \dots = (A1)_k, (k = 4, 5, \dots).$$

Аналогичные результаты получаем для функций $F2$, $F3$, $F4$:

$$(A2)_2 = (A2)_3 = \dots = (A2)_k; (A3)_2 = (A3)_3 = \dots = (A3)_k;$$

$$(A4)_2 = (A4)_3 = \dots = (A4)_k, (k = 4, 5, \dots)$$

Таким образом, рекуррентная система уравнений (2.67) преобразуется в более простую систему

$$\begin{bmatrix} (d1)_k \\ (d2)_k \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0,43 \cdot G_k + (B1)_k + (B2)_k \\ -(B3)_k - (B4)_k \end{bmatrix}, \quad (k = 2, 3, \dots, l)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -(A1)_2 & -(A2)_2 \\ (A3)_2 & (A4)_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,308938171006129e - 3 & 6,911358019518459e - 2 \\ 0,1761536715454855 & -0,7128121488054081 \end{bmatrix};$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 44,66553148550249 & 4,330726962857282 \\ 11,03796754290399 & -0,3326634449610003 \end{bmatrix}.$$

Окончательные результаты обратного p -дифференцирования приведены в табл.2.50, 2.51.

Таблица 2.50

$(d1)_1$	$(d1)_2$	$(d1)_3$	$(d1)_4$
1,04178982800905	-2,589863997885457	9,114377094783396	2,9602854114732e2
$(d1)_5$	$(d1)_6$	$(d1)_7$	$(d1)_8$
-2,4370025743629e3	1,5369085511445e4	1,923128137154e5	-3,284189433663e6
$(d1)_9$	$(d1)_{10}$	$(d1)_{11}$	$(d1)_{12}$
2,59515639547e6	1,497724938e8	-4,84154559e9	4,5510038e10
$(d1)_{13}$	$(d1)_{14}$	$(d1)_{15}$	$(d1)_{16}$
1,2877926e11	-8,016621e12	8,6704e13	9,7559e13

Для контроля точности проведенных численных расчетов выполнено прямое рекуррентное дифференцирование функций $F1$, $F3$ с полиномом $D1(x)$, численные коэффициенты которого приведены в табл.2.50, и функций $F2$, $F4$ с полиномом $D2(x)$ (табл.2.51).

Таблица 2.51

$(d2)_1$	$(d2)_2$	$(d2)_3$	$(d2)_4$
1,822268517625480	-3,351167529660713	-3,28986592961714	6,86351760596618e1
$(d2)_5$	$(d2)_6$	$(d2)_7$	$(d2)_8$
4,2178014202813e2	2,135996619963e3	1,11928554421e4	-1,603837578789e5
$(d2)_9$	$(d2)_{10}$	$(d2)_{11}$	$(d2)_{12}$
-5,33213117028e5	1,092829420e7	-1,59333242e8	-1,3527652e8
$(d2)_{13}$	$(d2)_{14}$	$(d2)_{15}$	$(d2)_{16}$
2,04754214e10	-2,556999e11	-1,56309e12	3,76558e13

Согласно заданной системе уравнений, численные производные функции $F1$, $F2$, $F3$, $F4$ должны удовлетворять рекуррентной системе

$$\begin{cases} (H1)_k \equiv (F1)_k + (F2)_k - 0,43 \cdot G_k = 0; \\ (H2)_k \equiv (F3)_k + (F4)_k = 0, \end{cases} \quad (k = 2, 3, \dots, 16)$$

Из двух рекуррентных уравнений системы наиболее критичным к точности численных расчетов оказалось первое уравнение, которое определило точность результатов в целом. Все значащие цифры, приведенные в табл.2.50 – 2.55, являются верными.

Таблица 2.52

$(F1)_1$	$(F1)_2$	$(F1)_3$	$(F1)_4$
0,453281153744931	-0,666172302781308	0,15567828892068	-0,799494831602253
$(F1)_5$	$(F1)_6$	$(F1)_7$	$(F1)_8$
-1,3979744984369e1	8,704536016105e1	1,90949711832e2	-1,189967342356e4
$(F1)_9$	$(F1)_{10}$	$(F1)_{11}$	$(F1)_{12}$
1,05331100741e5	4,301754550e5	-1,66030526e7	1,47666642e8
$(F1)_{13}$	$(F1)_{14}$	$(F1)_{15}$	$(F1)_{16}$
7,0356378e8	-2,78597449e10	2,502763077e11	1,216960403e12

Из табл.2.54, 2.55 следует, что для функций $F3$, $F4$ значения производных содержат 15 совпадающих значащих цифр и отличаются по знаку, и потому значения производных левой части второго уравнения $(H2)_k \equiv (F3)_k + (F4)_k$, $(k = 2, 3, \dots, 16)$ имеют порядок 10^{-15} .

В табл.2.56 приведены значения производных левой части первого уравнения.

Таблица 2.53

$(F2)_1$	$(F2)_2$	$(F2)_3$	$(F2)_4$
-0,93612683927004	0,23161118580870	-0,619210147024788	7,16854349540599e-2
$(F2)_5$	$(F2)_6$	$(F2)_7$	$(F2)_8$
1,2086277699725e1	-9,119176730765e1	-1,988954307609e2	1,188215569463e4
$(F2)_9$	$(F2)_{10}$	$(F2)_{11}$	$(F2)_{12}$
-1,05372582644e5	-4,302679397e5	1,66028470e7	-1,4766689e8
$(F2)_{13}$	$(F2)_{14}$	$(F2)_{15}$	$(F2)_{16}$
-7,0356489e8	2,785974242e10	-2,502763137e11	-1,216960417e12

Таблица 2.54

$(F3)_1$	$(F3)_2$	$(F3)_3$	$(F3)_4$
-0,96626943789668	-0,456214052030993	-1,073527677743127	5,5912706317195e1
$(F3)_5$	$(F3)_6$	$(F3)_7$	$(F3)_8$
2,3405781710727e2	8,3753849938107e2	3,5386605850689e3	-1,2906034449527e5
$(F3)_9$	$(F3)_{10}$	$(F3)_{11}$	$(F3)_{12}$
-1,662890389992e5	9,3847134015538e6	-1,183390474535e8	1,10715159647958e7
$(F3)_{13}$	$(F3)_{14}$	$(F3)_{15}$	$(F3)_{16}$
1,470774630341e10	-2,003285251959e11	1,884689197060e11	2,7253203634938e13

Таблица 2.55

$(F4)_1$	$(F4)_2$	$(F4)_3$	$(F4)_4$
0,96626943789668	0,456214052030993	1,073527677743129	-5,5912706317195e1
$(F4)_5$	$(F4)_6$	$(F4)_7$	$(F4)_8$
-2,3405781710727e2	-8,3753849938107e2	-3,5386605850689e3	1,29060344495270e5
$(F4)_9$	$(F4)_{10}$	$(F4)_{11}$	$(F4)_{12}$
1,662890389992e5	-9,3847134015538e6	1,1833904745353e8	-1,1071515964794e7
$(F4)_{13}$	$(F4)_{14}$	$(F4)_{15}$	$(F4)_{16}$
-1,470774630341e10	2,003285251959e11	-1,88468919706e11	-2,725320363494e13

Таблица 2.56

$(H1)_1$	$(H1)_2$	$(H1)_3$	$(H1)_4$
1,11e-16	0	2,22e-16	2,88e-15
$(H1)_5$	$(H1)_6$	$(H1)_7$	$(H1)_8$
-9,32e-15	-1,82e-13	-1,32e-12	-3,23e-13
$(H1)_9$	$(H1)_{10}$	$(H1)_{11}$	$(H1)_{12}$
2,08e-12	1,67e-9	-1,43e-8	-2,59e-7
$(H1)_{13}$	$(H1)_{14}$	$(H1)_{15}$	$(H1)_{16}$
-9,59e-7	2,75e-6	-2,56e-4	-4,25e-4

Как следует из табл.2.56, в расчете производных левой части первого уравнения $H1 \equiv -F1 - F2 - 0,43 \cdot G(x)$ наблюдается рост ошибок с увеличением порядка вычисляемых производных. Причиной роста ошибок является сложность задачи, в которой каждая итерация решения, вычисляющая производные k – го порядка, требует обращения к 40 рекуррентным формулам.

Раздел 2.3. Численное рекуррентное преобразование степенных рядов

Определение. Составную аппроксимирующую функцию $F_A(D(x))$ назовем численным *составным степенным рядом*, если ее внутренняя функция $D(x)$ является степенным рядом

$$D(x) = d_1 + d_2x + d_3x^2 + d_4x^3 + \dots + d_kx^{k-1} + \dots \quad (2.70)$$

Сформулируем задачу аппроксимации функции составными степенными рядами.

Составная функция $F(H(x))$ с известными нормированными производными, вычисленными при $x = x_0$:

$$F_1 = F(H(x_0)) ; F_2 = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_0} ; F_3 = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2F}{dx^2} \right|_{x_0} ; \dots ; F_l = \left. \frac{1}{l!} \frac{d^{l-1}F}{dx^{l-1}} \right|_{x_0} , \quad (2.71)$$

аппроксимируется более простой составной функцией

$$F_A(D(x)) = F_A(d_1 + d_2(x - x_0) + d_3(x - x_0)^2 + \dots + d_k(x - x_0)^{k-1} + \dots) \quad (2.72)$$

для которой должны быть выполнены равенства

$$F_1 = F_A(x_0) ; F_2 = \left. \frac{dF_A}{dx} \right|_{x_0} ; F_3 = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2F_A}{dx^2} \right|_{x_0} ; \dots ; F_l = \left. \frac{1}{l!} \frac{d^{l-1}F_A}{dx^{l-1}} \right|_{x_0} . \quad (2.73)$$

Условие (2.73) определяет семейство аппроксимирующих функций $F_A(D(x))$, в которых информация о поведении функции $F(x)$ извлечена в одной точке $x = x_0$ в отличие от аппроксимирующих функций [27], использующих информацию о функции в конечном интервале изменения переменной x .

Степенной ряд Тейлора [1, 2] является простейшим частным случаем составного степенного ряда

$$\begin{aligned} F_A(x) = D(x) &= d_1 + d_2(x - x_0) + d_3(x - x_0)^2 + d_4(x - x_0)^3 + \dots + d_l(x - x_0)^{l-1} = \\ &= F_1 + F_2(x - x_0) + F_3(x - x_0)^2 + F_4(x - x_0)^3 + \dots + F_l(x - x_0)^{l-1} \end{aligned} \quad (2.74)$$

В ряде Тейлора достоверность аппроксимации заданной функции и интервал сходимости ряда определяются ее численными производными [27]. Эффективность аппроксимация функции в одной точке $x = x_0$ существенно зависит от количества производных, вычисленных в этой точке.

Рекуррентное дифференцирование расширяет численные возможности составных степенных рядов. В составной аппроксимирующей функции $F_A(L(D(x)))$ между степенным рядом (2.70) и функцией F_A введена внутренняя функция $L(D(x))$, которая преобразует степенной ряд $D(x)$ в составной степенной ряд с другими численными характеристиками.

Рассмотрим инверсный степенной ряд как частный случай составного ряда

$$F_A(D(x)) = \frac{1}{d_1 + d_2(x - x_0) + d_3(x - x_0)^2 + d_4(x - x_0)^3 + \dots + d_l(x - x_0)^{l-1}} \quad (2.75)$$

Лемма 2.8. Задача аппроксимации заданной составной функции $F(H(D(x)))$ с известными численными производными (2.71) составным степенным рядом $F_A(D(x))$ является задачей обратного численного рекуррентного дифференцирования.

Доказательство. Согласно равенствам (2.73) для выбранной аппроксимирующей функции $F_A(D(x))$ известны численные нормированные производные $F_1, F_2, F_3, \dots, F_l$. Решаем численное уравнение

$$F_1 = F_A(d_1); \quad d_1 = F_A^{-1}(F_1)$$

и определяем коэффициент составного степенного ряда d_1 . Предполагаем, что для аппроксимирующей функции $F_A(x)$ известны рекуррентные формулы расчета компонент обратного дифференцирования A_k, B_k , которые обозначим через Υ_A, Υ_B . Тогда неизвестные коэффициенты степенного ряда d_k ($k = 2, 3, \dots, l$) определяются в численном процессе обратного дифференцирования следующим образом:

$$\begin{aligned} F_2 &= \Upsilon_A(d_1, F_1) \cdot \boxed{d_2} + \Upsilon_B(d_1, F_1) = A_2 \cdot d_2 + B_2; & d_2 &= \frac{F_2 - B_2}{A_2}; \\ F_3 &= \Upsilon_A(d_1, d_2, F_1, F_2) \cdot \boxed{d_3} + \Upsilon_B(d_1, d_2, F_1, F_2) = A_3 \cdot d_3 + B_3; & d_3 &= \frac{F_3 - B_3}{A_3}; \\ &\vdots & & \\ F_l &= \Upsilon_A(d_1, d_2, \dots, d_{l-1}, F_1, F_2, \dots, F_{l-1}) \cdot \boxed{d_l} + \\ &\quad + \Upsilon_B(d_1, d_2, \dots, d_{l-1}, F_1, F_2, \dots, F_{l-1}) = A_l \cdot d_l + B_l; & d_l &= \frac{F_l - B_l}{A_l} \end{aligned}$$

что требовалось доказать.

Для инверсного степенного ряда (2.75), согласно формулам обратного дифференцирования (табл. П.14), после преобразования запишем:

$$\Upsilon_A = \frac{-F_1}{d_1}; \quad \Upsilon_B = \frac{-1}{d_1} \cdot \sum_{i=1}^{k-2} F_{i+1} \cdot d_{k-i},$$

откуда

$$d_k = \frac{1}{F_1} \cdot (-d_1 \cdot F_k - \sum_{i=1}^{k-2} F_{i+1} \cdot d_{k-i}). \quad (2.76)$$

Теорема 2.14. Два численных ряда $d_1, d_2, d_3, \dots, d_k, \dots$ и $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k, \dots$ связаны рекуррентной формулой (2.76). Тогда для сходимости численного ряда $d_1, d_2, d_3, \dots, d_k, \dots$ достаточно сходимости численного ряда $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k, \dots$ с условием

$$\left| \frac{F_k}{F_{k-1}} \right| < \frac{k-1\sqrt{2}}{2}. \quad (2.77a)$$

При условии (2.77а) численный ряд $d_1, d_2, d_3, \dots, d_k, \dots$ сходится с соотношением

$$\left| \frac{d_k}{d_{k-1}} \right| < \sqrt[k-1]{2}. \quad (2.776)$$

Доказательство. Преобразуем рекуррентную формулу (2.76)

$$\frac{d_k}{d_1} = -\frac{F_k}{F_1} - \sum_{i=1}^{k-2} \frac{F_{i+1}}{F_1} \cdot \frac{d_{k-i}}{d_1},$$

и применим дополнительное нормирование $F_k = \frac{F_k}{F_1}; d_k = \frac{d_k}{d_1}$, вследствие которого $F_1 = 1; d_1 = 1$. Тогда нормированная таким способом формула принимает вид

$$d_k = -F_k - \sum_{i=1}^{k-2} F_{i+1} \cdot d_{k-i}; \quad \frac{d_k}{d_{k-1}} = -F_2 - \frac{F_k}{d_{k-1}} - \sum_{i=2}^{k-2} F_{i+1} \cdot \frac{d_{k-i}}{d_{k-1}}. \quad (2.78)$$

Запишем члены численного ряда $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k, \dots$ следующим образом:

$$\left| \frac{F_2}{F_1} \right| = \rho_2; \quad \left| \frac{F_3}{F_2} \right| = \rho_3; \quad \left| \frac{F_4}{F_3} \right| = \rho_4; \dots; \quad \left| \frac{F_k}{F_{k-1}} \right| = \rho_k$$

и введем параметр $\rho = \max(\rho_2, \rho_3, \rho_4, \dots, \rho_k, \dots)$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} |F_2| &= \rho_2 \leq \rho; \quad |F_3| = \rho_3 \cdot |F_2| = \rho_3 \cdot \rho_2 \leq \rho^2; \quad |F_4| = \rho_4 \cdot |F_3| = \rho_4 \cdot \rho_3 \cdot \rho_2 \leq \rho^3; \dots \\ \dots; \quad |F_k| &= \rho_k \cdot |F_{k-1}| = \prod_{i=2}^k \rho_i \leq \rho^{k-1}. \end{aligned}$$

Определим члены ряда d_k ($k = 2, 3, \dots, l$) по рекуррентной формуле (2.78).

Для $k = 2$: $d_2 = -F_2$; $|d_2| = \rho_2 \leq \rho$;

для $k = 3$: $\frac{d_3}{d_2} = -F_2 - \frac{F_3}{d_2}$; $\left| \frac{d_3}{d_2} \right| = \left| -F_2 - \frac{F_3}{d_2} \right| \leq |F_2| + \left| \frac{F_3}{d_2} \right| = \rho_2 + \frac{\rho_3 \cdot \rho_2}{\rho_2} \leq 2\rho$;
 $|d_3| \leq 2\rho^2$;

для $k = 4$:

$$\begin{aligned} \frac{d_4}{d_3} &= -F_2 - \frac{F_4}{d_3} - F_3 \cdot \frac{d_2}{d_3}; \quad \left| \frac{d_4}{d_3} \right| = \left| -F_2 - \frac{F_4}{d_3} - F_3 \cdot \frac{d_2}{d_3} \right| \leq |F_2| + \left| \frac{F_4}{d_3} \right| + \left| \frac{F_3}{d_3/d_2} \right| \leq \\ &\leq \rho + \frac{\rho^3}{2\rho^2} + \frac{\rho^2}{2\rho} = 2\rho; \quad |d_4| = |d_3| \cdot 2\rho \leq 4\rho^3; \end{aligned}$$

для $k = 5$:

$$\frac{d_5}{d_4} = -F_2 - \frac{F_5}{d_4} - F_4 \cdot \frac{d_2}{d_4} - F_3 \cdot \frac{d_3}{d_4}; \quad \left| \frac{d_5}{d_4} \right| = \left| -F_2 - \frac{F_5}{d_4} - F_4 \cdot \frac{d_2}{d_4} - F_3 \cdot \frac{d_3}{d_4} \right| \leq$$

$$\leq |F_2| + \left| \frac{F_5}{d_4} \right| + \left| F_4 \cdot \frac{d_2}{d_4} \right| + \left| \frac{F_3}{d_4/d_3} \right| \leq \rho + \frac{\rho^4}{4\rho^3} + \frac{\rho^3 \cdot \rho}{4\rho^3} + \frac{\rho^2}{2\rho} = 2\rho ; |d_5| = |d_4| \cdot 2\rho \leq 8\rho^4$$

Распространяя по аналогии результат, получаем

$$|d_k| \leq 2^{k-2} \rho^{k-1}$$

и подставляем в рекуррентную формулу (2.78).

$$\begin{aligned} \left| \frac{d_k}{d_{k-1}} \right| &= \left| -F_2 - \frac{F_k}{d_{k-1}} - \sum_{i=2}^{k-2} F_{i+1} \cdot \frac{d_{k-i}}{d_{k-1}} \right| \leq |F_2| + \left| \frac{F_k}{d_{k-1}} \right| + \left| \sum_{i=2}^{k-2} F_{i+1} \cdot \frac{d_{k-i}}{d_{k-1}} \right| \leq \\ &\leq \rho + \frac{\rho^{k-1}}{2^{k-3} \rho^{k-2}} + \sum_{i=2}^{k-2} \rho^i \cdot \frac{2^{k-i-2} \rho^{k-i-1}}{2^{k-3} \rho^{k-2}} = \rho \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{k-3}} + \sum_{i=2}^{k-2} 2^{-i+1} \right). \end{aligned}$$

Раскрываем геометрическую прогрессию

$$\sum_{i=2}^{k-2} 2^{-i+1} = \sum_{i=1}^{k-3} 2^{-i} = 1 - \frac{1}{2^{k-3}}$$

и находим

$$\left| \frac{d_k}{d_{k-1}} \right| \leq \rho \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{k-3}} + 1 - \frac{1}{2^{k-3}} \right) = 2\rho.$$

По признаку Даламбера для сходимости численного ряда необходимо выполнить условие $\left| \frac{d_k}{d_{k-1}} \right| \leq 2\rho < 1$, откуда следует условие $\rho < \frac{1}{2}$ и

сходимость численного ряда $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k, \dots$ с условием

$\left| \frac{F_k}{F_{k-1}} \right| \leq \rho < \frac{1}{2}$. Согласно более тонкому признаку Коши-Адамара, для

сходимости численного ряда $d_1, d_2, d_3, \dots, d_k, \dots$ необходимо выполнить условие

$$\sqrt[k]{|d_k|} \leq \sqrt[k]{2^{k-2} \cdot \rho^{k-1}} = \sqrt[k]{2^{k-2}} \cdot \sqrt[k]{\rho^{k-1}} < 1,$$

откуда следуют формулы (2.77)

$$\rho < \frac{1}{k-1\sqrt[k]{2^{k-2}}}; \left| \frac{F_k}{F_{k-1}} \right| \leq \rho < \frac{1}{k-1\sqrt[k]{2^{k-2}}}; \left| \frac{d_k}{d_{k-1}} \right| \leq 2\rho < \frac{2}{k-1\sqrt[k]{2^{k-2}}},$$

что требовалось доказать.

Из неравенств в доказательстве следует, что условия сходимости (2.77) не являются необходимыми, и ряды могут сходиться с менее строгими условиями.

Определение. Назовем два порождающих уравнения

$$\Phi\left(\left(\frac{dF}{dx}\right)^2, \frac{dF}{dx}, F^\nu, F^{\nu-1}, \dots, F, \left(\frac{dD}{dx}\right)^2, \frac{dD}{dx}, D^\mu, D^{\mu-1}, \dots, D\right) = 0$$

$$\Phi\left(\left(\frac{dD}{dx}\right)^2, \frac{dD}{dx}, D^\nu, D^{\nu-1}, \dots, D, \left(\frac{dF}{dx}\right)^2, \frac{dF}{dx}, F^\mu, F^{\mu-1}, \dots, F\right) = 0$$

взаимно-обратными, если они получены заменой обозначений $F \leftrightarrow D$.

Лемма 2.9. Задача обратного рекуррентного дифференцирования заданной функции $F=\varphi(D(x))$ эквивалентна задаче прямого рекуррентного дифференцирования обратной функции $D=\varphi^{-1}(F(x))$, где функции φ и φ^{-1} являются взаимно-обратными.

Доказательство. Выполним классическое дифференцирование [1, 2, 3] сложных функций $F=\varphi(D(x))$ и $D=\varphi^{-1}(F(x))$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d\varphi}{dD} \cdot \frac{dD}{dx}; \quad \frac{dD}{dx} = \frac{d\varphi^{-1}}{dF} \cdot \frac{dF}{dx},$$

откуда находим дифференциальное соотношение

$$\frac{d\varphi}{dD} \cdot \frac{d\varphi^{-1}}{dF} = 1.$$

Подставляем соотношение в формулы производных

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d\varphi}{dD} \cdot \frac{dD}{dx}; \quad \frac{dD}{dx} = \frac{1}{\frac{d\varphi}{dD}} \cdot \frac{dF}{dx}$$

и получаем взаимно-обратные выражения производных.

Выразим функцию φ из выражения $F=\varphi(D(x))$ через функцию F (лемма 1, раздел 1.1) $\frac{d\varphi}{dD} = \psi(F)$, как это сделано в выводе порождающих уравнений (табл.1.1), и получаем взаимно-обратные порождающие уравнения

$$\frac{dF}{dx} = \psi(F) \cdot \frac{dD}{dx}; \quad \frac{dD}{dx} = \frac{1}{\psi(F)} \cdot \frac{dF}{dx}.$$

Взаимно-обратные порождающие уравнения, в свою очередь, приводят к взаимно-обратным рекуррентным формулам – прямой и обратной, которые обозначим через $\Xi\varphi$ и $\Xi\varphi^{-1}$. Тогда взаимно-обратные прямая и обратная рекуррентные формулы имеют вид:

$$F_k = \Xi\varphi(d_1, d_2, d_3, \dots, d_k, F_1, F_2, F_3, \dots, F_{k-1});$$

$$d_k = \Xi\varphi^{-1}(d_1, d_2, d_3, \dots, d_{k-1}, F_1, F_2, F_3, \dots, F_k), \quad (k = 2, 3, \dots, l),$$

где F_1 и d_1 вычисляются по взаимно-обратным формулам

$$F_1 = \varphi(d_1); \quad d_1 = \varphi^{-1}(F_1),$$

что требовалось доказать.

Заменяя обозначения $F \leftrightarrow D$ в порождающих уравнениях взаимно-обратных функций, получаем взаимно-обратные порождающие уравнения. Действительно, запишем из табл.1.1 (раздел 1.1) порождающие уравнения некоторых функций, для которых несложно найти обратные функции, и сравним их порождающие уравнения в следующей таблице.

Функция	Порождающее уравнение	Обратная функция	Взаимно-обратное порождающее уравнение
D^m	$F' \cdot D - mF \cdot D' = 0$	$D^{\frac{1}{m}}$	$mF' \cdot D - F \cdot D' = 0$
e^D	$F' - F \cdot D' = 0$	$\ln D$	$F' \cdot D - D' = 0$
e^{D^2}	$F' - 2F \cdot D \cdot D' = 0$	$\sqrt{\ln D}$	$2F' \cdot F \cdot D - D' = 0$
$e^{\frac{1}{D}}$	$F' \cdot D^2 + F \cdot D' = 0$	$\frac{1}{\ln D}$	$F' \cdot D + F^2 \cdot D' = 0$
$e^{\frac{1}{D^2}}$	$F' \cdot D^3 + 2F \cdot D' = 0$	$\frac{1}{\sqrt{\ln D}}$	$2F' \cdot D + F^3 \cdot D' = 0$
$e^{\frac{1}{\sqrt{D}}}$	$4(F')^2 \cdot D^3 - F^2 \cdot (D')^2 = 0$	$\frac{1}{(\ln D)^2}$	$(F')^2 \cdot D^2 - 4F^3 \cdot (D')^2 = 0$
$\sin D$ $\cos D$	$(F')^2 + (F^2 - 1) \cdot (D')^2 = 0$	$\arcsin D$ $\arccos D$	$(F')^2 \cdot (D^2 - 1) + (D')^2 = 0$

Лемма. Взаимно-обратные порождающие уравнения соответствуют взаимно-обратным функциям.

Пример 2.19

Зададим составную функцию

$$F = e^{\arctg H(x)}, \quad (2.79)$$

в которой внутренний полином для смещения $x_0=0$ равен $H(x) = 2 + 2x + x^2 - x^3$. Для задачи аппроксимации функции в широком диапазоне изменения переменной x введем смещение $x_0 \neq 0$ и выполним аппроксимацию двумя способами: степенным рядом (2.74) и инверсным степенным рядом (2.75).

Выберем смещение $x_0 = 2$ и определим полином функции для смещения x_0 $H(x) = 2 - 6x - 5x^2 - x^3$. Для нового полинома выполним численное прямое p -дифференцирование заданной функции и найдем ее численные нормированные производные (табл.2.57).

Таблица 2.57

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
3,0257	-3,6309	-9,5613	-2,1083e1	-3,8785e1	-4,1357e1
f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}
8,3482e1	7,5948e2	3,3071e3	1,1187e4	3,1533e4	7,2051e4
f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}
1,0874e5	-6,9017e4	-1,4341e6	-7,5222e6	-2,9167e7	-9,4078e7
f_{19}	f_{20}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}
-2,552e8	-5,4309e8	-6,0076e8	1,9785e9	1,7720e10	8,409150877591853e10

По вычисленным производным строим аппроксимирующий степенной ряд Тейлора ($l = 24$)

$$F_{As}(x) = f_1 + f_2(x - x_0) + f_3(x - x_0)^2 + f_4(x - x_0)^3 + \dots + f_l(x - x_0)^{l-1} \quad (2.80)$$

и по значениям (табл.2.57) вычисляем интервал сходимости степенного ряда, используя признак Коши-Адамара. Критерий Коши-Адамара имеет итерационный

характер $R_S(k) = 1/\sqrt[k]{|f_k|}$ и при $k=24$ принимает значение $R_S(24) = 1/\sqrt[24]{|f_{24}|} = 0,351$.

Теперь применим для аппроксимации заданной функции со смещением $x_0 = 2$ инверсный степенной ряд

$$F_{AI}(x) = \frac{1}{d_1 + d_2(x - x_0) + d_3(x - x_0)^2 + d_4(x - x_0)^3 + \dots + d_l(x - x_0)^{l-1}} \quad (2.81)$$

Для расчета коэффициентов ряда используем обратную рекуррентную формулу (табл. П.14)

$$d_k = \frac{1}{f_1} \cdot (-d_1 \cdot f_k - \sum_{i=1}^{k-2} f_{i+1} \cdot d_{k-i}) , \quad (2.82)$$

в которой коэффициенты $f_1, f_2, f_3, \dots, f_{24}$ приведены в табл.2.57. Вычисленные коэффициенты $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{24}$ сведены в табл.2.58.

Таблица 2.58

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
0,33050	0,39660	1,5203	5,3805	1,8261e1	5,9110e1
d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
1,8192e2	5,2818e2	1,4254e3	3,4690e3	7,0606e3	8,9043e3
d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}	d_{17}	d_{18}
-1,4215e4	-1,6712e5	-8,4217e5	-3,3304e6	-1,1404e7	-3,4608e7
d_{19}	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
-9,1965e7	-2,0064e8	-2,7026e8	4,1631e8	5,2390e9	2,71148e10

Для контроля результатов можно использовать прямую рекуррентную формулу, полученную из рекуррентной формулы (2.82)

$$f_k = \frac{1}{d_1} \cdot (-f_1 \cdot d_k - \sum_{i=1}^{k-2} d_{i+1} \cdot f_{k-i}) .$$

Подставляя в нее найденные значения (табл.2.58), получим значения (табл.2.57). Сравнение вычисленного таким способом точного значения последнего коэффициента $f_{24} = 8,409150877591856e10$ со значением этого коэффициента в табл.2.57 показывает, что численные результаты содержат 14 верных значащих цифр.

Для внутреннего степенного ряда в знаменателе инверсного ряда (2.81) вычислим интервал сходимости по признаку Коши-Адамара $R_I(24) = 1/\sqrt[24]{|d_{24}|} = 0,352$.

Изменяя значения переменной x при отклонении от смещения $x_0 = 2$, вычисляем значение заданной функции (2.79), а также значения аппроксимирующего степенного ряда (2.80) и аппроксимирующего инверсного степенного ряда (2.81).

Численные результаты сведены в табл.2.59.

Таблица 2.59

x	2	2,1	2,15	2,20	2,25	2,275
x_0	2	2	2	2	2	2
F	3,0257189	2,5418522900092	2,175801986	1,706622	1,18555	0,95229
F_{AI}	3,0257189	2,5418522900103	2,175802002	1,706635	1,18693	0,96042
F_{AS}	3,0257189	2,5418522900088	2,175801977	1,706612	1,18348	0,93525
x	2,3	2,31	2,32	2,33	2,34	2,35
x_0	2	2	2	2	2	2
F	0,7632	0,7014	0,6472	0,6031	0,5590	0,5236
F_{AI}	0,7984	0,7608	0,7454	0,7853	0,8255	0,9779
F_{AS}	0,6657	0,5259	0,3531	0,1703	-0,0517	-0,1326

Как видно из табл.2.59 , составной инверсный степенной ряд более точно аппроксимирует заданную функцию, чем ряд Тейлора, и может быть применен для аппроксимации в более широком интервале изменения x .

Изменим точку аппроксимации заданной функции, выбирая другое смещение $x_0 = 4$. Для нового смещения пересчитаем полином заданной функции : $H(x) = -38 - 38x - 11x^2 - x^3$, выполним для заданной функции (2.79) прямое p -дифференцирование и найдем ее численные нормированные производные (табл.2.60).

Таблица 2.60

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
0,21342	-5,6125e-3	4,0577e-3	-2,6094e-3	1,6004e-3	-9,6200e-4
f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}
5,7312e-4	-3,3996e-4	2,0114e-4	-1,1879e-4	7,0049e-5	-4,1247e-5
f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}
2,4254e-5	-1,4242e-5	8,3521e-6	-4,8914e-6	2,8609e-6	-1,6711e-6
f_{19}	f_{20}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}
9,7481e-7	-5,6790e-7	3,3042e-7	-1,9199e-7	1,1141e-7	-6,4566e-8

По вычисленным производным строим аппроксимирующий степенной ряд (2.80) и из значений табл.2.60 вычисляем интервал сходимости степенного ряда по признаку Коши-Адамара. Критерий Коши-Адамара при $k = 24$ принимает значение

$$R_S(24) = \frac{1}{\sqrt[24]{|f_{24}|}} = 2,054.$$

Теперь применим для аппроксимации заданной функции со смещением $x_0 = 4$ инверсный степенной ряд (2.81), коэффициенты которого $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{24}$, вычисленные по рекуррентной формуле (2.82) , приведены в табл.2.61.

Таблица 2.61

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
4,6856	0,12322	-8,5845e-2	5,2689e-3	-3,0612e-2	1,7340e-2
d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
-9,7012e-3	5,3916e-3	-2,9839e-3	1,6460e-3	-9,0541e-4	4,9660e-4
d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}	d_{17}	d_{18}
-2,7156e-4	1,4804e-4	-8,0425e-5	4,3534e-5	-2,3470e-5	1,2598e-5
d_{19}	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
-6,7294e-6	3,5751e-6	-1,8877e-6	9,8975e-7	-5,1476e-7	2,6519e-7

Для внутреннего степенного ряда в знаменателе инверсного ряда (2.81) вычислим интервал сходимости по признаку Коши_Адамара $R_I(24) = 1 / \sqrt[24]{|d_{24}|} = 1,93$.

Изменяя значения переменной x при отклонении от смещения $x_0 = 4$, вычисляем значение заданной функции (2.79), а также значения аппроксимирующего степенного ряда (2.80) и аппроксимирующего инверсного степенного ряда (2.81). Численные результаты приведены в табл.2.62.

Таблица 2.62

x	4	5,0	5,5	5,6	5,8	5,9	6,0
x_0	4	4	4	4	4	4	4
F	0,2134214	0,2102552143	0,209574	0,20947	0,20929	0,20920	0,20913
F_{AI}	0,2134214	0,2102552104	0,209518	0,20921	0,20522	0,19541	0,16927
F_{AS}	0,2134214	0,2102551907	0,209239	0,20793	0,18478	0,12199	-0,08154

Из табл.2.62 видно, что точность аппроксимации у инверсного ряда выше.

Введем другую аппроксимирующую составную степенную функцию вида

$$F_A(D(x)) = m \sqrt[m]{d_1 + d_2(x - x_0) + d_3(x - x_0)^2 + d_4(x - x_0)^3 + \dots + d_l(x - x_0)^{l-1}} \quad (2.83)$$

и запишем для функции (2.83) формулу обратного рекуррентного дифференцирования (табл. П.14)

$$\frac{d_k}{d_1} = m \frac{F_k}{F_1} + \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{i=1}^{k-2} (m(k-i-1) - i) \cdot \frac{d_{i+1}}{d_1} \cdot \frac{F_{k-i}}{F_1}.$$

Упростим рекуррентную формулу, применяя дополнительное нормирование

$$F_k = F_k / F_1; \quad d_k = d_k / d_1$$

$$d_k = m F_k + \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{i=1}^{k-2} (m(k-i-1) - i) \cdot d_{i+1} \cdot F_{k-i}. \quad (2.84)$$

Развернем формулу (2.84) с помощью подстановок:

$$\boxed{k=2} \quad d_2 = m F_2;$$

$$\boxed{k=3} \quad d_3 = m F_3 + \frac{1}{2} (m-1) d_2 \cdot F_2 = m F_3 + \frac{1}{2} m (m-1) F_2^2;$$

$$\boxed{k=4} \quad d_4 = mF_4 + \frac{1}{3}(2m-1)d_2 \cdot F_3 + \frac{1}{3}(m-2)d_3 \cdot F_2 =$$

$$= mF_4 + m(m-1)F_2 \cdot F_3 + \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)F_2^3; \quad (2.85)$$

$$\boxed{k=5} \quad d_5 = mF_5 + \frac{1}{4}(3m-1)d_2 \cdot F_4 + \frac{1}{4}(2m-2)d_3 \cdot F_3 + \frac{1}{4}(m-3)d_4 \cdot F_2 =$$

$$= mF_5 + m(m-1)F_2 \cdot F_4 + \frac{1}{2}m(m-1)F_3^2 + \frac{1}{2}m(m-1)(m-2)F_2^2 \cdot F_3 +$$

$$+ \frac{1}{24}m(m-1)(m-2)(m-3)F_2^4;$$

$$\boxed{k=6} \quad d_6 = mF_6 + \frac{1}{5}(4m-1)d_2 \cdot F_5 + \frac{1}{5}(3m-2)d_3 \cdot F_4 + \frac{1}{5}(2m-3)d_4 \cdot F_3 +$$

$$+ \frac{1}{5}(m-4)d_5 \cdot F_2 = mF_6 + m(m-1)F_2 \cdot F_5 + m(m-1)F_3 \cdot F_4 +$$

$$+ \frac{1}{2}m(m-1)(m-2)F_2^2 \cdot F_4 + \frac{1}{2}m(m-1)(m-2)F_3^2 \cdot F_2 +$$

$$+ \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)(m-3)F_2^3 \cdot F_3 + \frac{1}{120}m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)F_2^5$$

Анализ выражений d_k ($k = 2, 3, \dots$) показывает, что наилучшие условия сходимости численного ряда $d_1, d_2, d_3, \dots, d_k, \dots$ функция (2.83) имеет при $m = 2, 3$.

Теорема 2.15. Два численных ряда $d_1, d_2, d_3, \dots, d_k, \dots$ и $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k, \dots$ связаны рекуррентной формулой (2.84). Тогда для сходимости численного ряда $d_1, d_2, d_3, \dots, d_k, \dots$ достаточно сходимости численного ряда $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k, \dots$ с условием

$$\left| \frac{F_k}{F_{k-1}} \right| < \frac{1}{k-1\sqrt[k]{k}}. \quad (2.86a)$$

При условии (2.86a) численный ряд $d_1, d_2, d_3, \dots, d_k, \dots$ сходится с соотношением

$$\left| \frac{d_k}{d_{k-1}} \right| < \frac{1}{k-1} \cdot k-1\sqrt[k]{k^{k-2}} \quad (2.86b)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем члены численные ряда $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k, \dots$ следующим образом:

$$\left| \frac{F_2}{F_1} \right| = \rho_2; \quad \left| \frac{F_3}{F_2} \right| = \rho_3; \quad \left| \frac{F_4}{F_3} \right| = \rho_4; \dots; \quad \left| \frac{F_k}{F_{k-1}} \right| = \rho_k$$

и введем параметр $\rho = \max(\rho_2, \rho_3, \rho_4, \dots, \rho_k, \dots)$. Тогда получаем

$$|F_2| = \rho_2 \leq \rho; \quad |F_3| = \rho_3 \cdot |F_2| = \rho_3 \cdot \rho_2 \leq \rho^2; \quad |F_4| = \rho_4 \cdot |F_3| = \rho_4 \cdot \rho_3 \cdot \rho_2 \leq \rho^3; \dots$$

$$\dots; \quad |F_k| = \rho_k \cdot |F_{k-1}| = \prod_{i=2}^k \rho_i \leq \rho^{k-1}.$$

Определим члены ряда d_k ($k = 2, 3, \dots, l$) по формулам (2.85) для $m = 2$.

Для $\boxed{k=2}$ $d_2 = 2F_2$; $|d_2| = 2\rho_2 \leq 2\rho$;

для $\boxed{k=3}$ $d_3 = 2F_3 + F_2^2$; $|d_3| = |2F_3 + F_2^2| \leq 2|F_3| + |F_2^2| = 2\rho_3 \cdot \rho_2 + \rho_2^2 \leq 3\rho^2$;
 $|d_3| \leq 3\rho^2$;

для $\boxed{k=4}$ $d_4 = 2F_4 + 2F_2 \cdot F_3$; $|d_4| = |2F_4 + 2F_2 \cdot F_3| \leq 2|F_4| + 2|F_2| \cdot |F_3| \leq$
 $\leq 2\rho^3 + 2\rho \cdot \rho^2 = 4\rho^3$;

для $\boxed{k=5}$ $d_5 = 2F_5 + 2F_2 \cdot F_4 + F_3^2$; $|d_5| = |2F_5 + 2F_2 \cdot F_4 + F_3^2| \leq$
 $\leq 2|F_5| + 2|F_2 \cdot F_4| + |F_3^2| \leq 2\rho^4 + 2\rho \cdot \rho^3 + \rho^4 = 5\rho^4$;

для $\boxed{k=6}$ $d_6 = 2F_6 + 2F_2 \cdot F_5 + 2F_3 \cdot F_4$; $|d_6| = |2F_6 + 2F_2 \cdot F_5 + 2F_3 \cdot F_4| \leq$
 $\leq 2|F_6| + 2|F_2 \cdot F_5| + 2|F_3 \cdot F_4| \leq 2\rho^5 + 2\rho \cdot \rho^4 + 2\rho^2 \cdot \rho^3 = 6\rho^5$;

Распространяя по аналогии результат, получаем

$$|d_k| \leq k \cdot \rho^{k-1}.$$

Согласно признаку Коши-Адамара для сходимости численного ряда $d_1, d_2, d_3, \dots, d_k, \dots$ необходимо выполнить условие

$$\sqrt[k]{|d_k|} \leq \sqrt[k]{k \cdot \rho^{k-1}} = \sqrt[k]{k} \cdot \sqrt[k]{\rho^{k-1}} < 1,$$

откуда следуют формулы (2.86):

$$\rho < \frac{1}{\sqrt[k-1]{k}}; \quad \left| \frac{F_k}{F_{k-1}} \right| \leq \rho < \frac{1}{\sqrt[k-1]{k}}; \quad \left| \frac{d_k}{d_{k-1}} \right| \leq \frac{k \cdot \rho^{k-1}}{(k-1) \cdot \rho^{k-2}} = \frac{k}{k-1} \rho < \frac{\sqrt[k-1]{k^{k-2}}}{k-1},$$

что требовалось доказать.

Рассмотрим аппроксимирующий составной степенной ряд более общего вида

$$F_A = \varphi(D(x)) \quad (2.87)$$

в котором известны нормированные численные производные функции F_A : $F_1, F_2, F_3, \dots, F_l$ и $D(x)$ — внутренний степенной ряд.

Лемма 2.10. Задана аппроксимирующая функция $F_A = \varphi(D(x))$, для которой известны нормированные численные производные $F_1, F_2, F_3, \dots, F_l$ при $x=0$. Тогда интервал достоверности аппроксимирующей функции определяется численным рядом

$$D(x) = d_1 + d_2 x + d_3 x^2 + d_4 x^3 + \dots + d_k x^{k-1} + \dots,$$

коэффициенты которого $d_1, d_2, d_3, \dots, d_l$ однозначно определяются в процессе преобразования численного ряда $F_1, F_2, F_3, \dots, F_l$ с помощью обратного рекуррентного дифференцирования.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При аппроксимации степенным рядом Тейлора заданные производные $F_1, F_2, F_3, \dots, F_l$ являются коэффициентами ряда

$$F_A(x) = F_1 + F_2x + F_3x^2 + F_4x^3 + \dots + F_lx^{l-1}.$$

Тогда интервал достоверности аппроксимации $|\bar{x}|$ однозначно определяется заданными коэффициентами $F_1, F_2, F_3, \dots, F_l$ и может быть вычислен по признаку Коши-Адамара $|\bar{x}| \leq 1/\sqrt[k]{F_k}$. При аппроксимации составным степенным рядом $F_A = \varphi(D(x))$ заданные производные $F_1, F_2, F_3, \dots, F_l$ образуют численный степенной ряд, который преобразуется в другой степенной ряд $d_1, d_2, d_3, \dots, d_l$ функцией φ . Тогда интервал достоверности аппроксимации $|\bar{x}|$ однозначно определяется по признаку Коши-Адамара коэффициентами $d_1, d_2, d_3, \dots, d_l$ — $|\bar{x}| \leq 1/\sqrt[k]{d_k}$ и зависит от выбора преобразующей функции φ .

Покажем, что коэффициенты $d_1, d_2, d_3, \dots, d_l$ однозначно вычисляются в обратном рекуррентном дифференцировании. Обозначим прямую рекуррентную формулу функции $\varphi(D(x))$ через $\Xi\varphi$

$$F_k = \Xi\varphi(d_1, d_2, d_3, \dots, d_k, F_1, F_2, F_3, \dots, F_{k-1}), \quad (2.88)$$

в которой коэффициент d_1 определяется из решения численного уравнения с однозначной функцией φ

$$F_1 = \varphi(d_1); \quad d_1 = \varphi^{-1}(F_1)$$

Для численного расчета коэффициентов внутреннего степенного ряда d_k ($k = 2, 3, \dots, l$) перейдем к обратной рекуррентной формуле

$$d_k = \Xi_{\varphi}^{-1}(\varphi^{-1}(F_1), d_2, d_3, \dots, d_{k-1}, F_1, F_2, F_3, \dots, F_k) \quad (2.89)$$

которая является единственной. Развернем численный процесс реализации обратной рекуррентной формулы:

$$d_1 = \varphi^{-1}(F_1);$$

$$d_2 = \Xi_{\varphi}^{-1}(d_1, F_1, F_2);$$

$$d_3 = \Xi_{\varphi}^{-1}(d_1, d_2, F_1, F_2, F_3);$$

$$\vdots$$

$$d_l = \Xi_{\varphi}^{-1}(d_1, d_2, d_3, \dots, d_{l-1}, F_1, F_2, F_3, \dots, F_l)$$

и однозначно определяем коэффициенты внутреннего степенного ряда, что требовалось доказать.

Пример 2.20.

Выберем составную функцию (2.79) $F = e^{\arctg H(x)}$, в которой внутренний полином для смещения $x_0=0$ равен $H(x) = 2 + 2x + x^2 - x^3$. Для задачи аппроксимации функции в диапазоне изменения переменной x введем смещение $x_0 \neq 0$ и выполним аппроксимацию двумя способами: степенным рядом Тейлора и составным степенным рядом

$$F_A(x) = \varphi(D(x - x_0)) = (d_1 + d_2(x - x_0) + d_3(x - x_0)^2 + \dots + d_l(x - x_0)^{l-1})^m, \quad (m = 3) \quad (2.90)$$

Выберем смещение $x_0 = 2$ и определим полином функции для нового смещение: $H(x) = 2 - 6x - 5x^2 - x^3$. Численное прямое p -дифференцирование заданной составной функции (2.79) определяет ее численные нормированные производные (табл.2.63).

Таблица 2.63

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
3,02257	-3,6309	-9,5613	-2,1083e1	-3,8785e1	-4,1357e1
f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}
8,3482e1	7,5948e2	3,3071e3	1,1187e4	3,1533e4	7,2051e4
f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}
1,0874e5	-6,9017e4	-1,4341e6	-7,5222e6	-2,9167e7	-9,4078e7
f_{19}	f_{20}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}
-2,5521e8	-5,4309e8	-6,0076e8	1,9785e9	1,7720e10	8,409150877591853e10

По вычисленным производным (табл.2.63) строим аппроксимирующий степенной ряд Тейлора ($l = 24$)

$$F_{AS}(x) = f_1 + f_2(x - x_0) + f_3(x - x_0)^2 + f_4(x - x_0)^3 + \dots + f_l(x - x_0)^{l-1}$$

и вычисляем интервал сходимости степенного ряда по признаку Коши-Адамара. Критерий Коши-Адамара имеет итерационный характер $R_S(k) = 1/\sqrt[k]{|f_k|}$ и для $k = 24$ принимает значение $R_S(24) = 1/\sqrt[24]{|f_{24}|} = 0,351$.

Для аппроксимирующего составного степенного ряда (2.90) запишем прямую рекуррентную формулу, полученную из рекуррентного уравнения (табл. П.14)

$$F_k = mF_1 \frac{d_k}{d_1} + \frac{1}{(k-1)d_1} \cdot \sum_{i=1}^{k-2} ((m+1)i - (k-1)) \cdot d_{i+1} \cdot F_{k-i} \quad (2.91)$$

и преобразуем ее в обратную рекуррентную формулу

$$d_k = \frac{1}{mF_1} (d_1 \cdot F_k - \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{i=1}^{k-2} ((m+1)i - (k-1)) \cdot d_{i+1} \cdot F_{k-i}), \quad (k = 2, 3, \dots, l) \quad (2.92)$$

Коэффициент d_1 определяется из решения численного уравнения

$$F_1 = \varphi(d_1); \quad d_1 = \varphi^{-1}(F_1) = \sqrt[3]{F_1}$$

Результаты расчета коэффициентов $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{24}$ для $m = 3$ приведены в табл.2.64.

Таблица 2.64

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
1,4464	-0,57854	-1,7549	-4,7325	-1,1815e1	-2,5917e1
d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
-4,4241e1	-2,5806e1	2,3219e2	1,4952e3	6,2153e3	2,1168e4
d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}	d_{17}	d_{18}
6,1807e4	1,5201e5	2,7929e5	1,3742e5	-1,9368e6	-1,2627e7
d_{19}	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
-5,4502e7	-1,9304e8	-5,8607e8	-1,5007e9	-2,9071e9	-1,8884e9

Для контроля точности выполненного расчета можно использовать прямую рекуррентную формулу (2.91) и, подставив в нее значения коэффициентов (табл.2.64), получить численные нормированные производные (табл.2.63). Сравнение вычисленного таким способом коэффициента $f_{24} = 8,409150877591849e10$ со значением этого коэффициента в табл.2.63 показывает, что значения (табл.2.63, 2.64) имеют 12 верных значащих цифр.

Для внутреннего степенного ряда составной аппроксимирующей функции (2.90) вычислим интервал сходимости по признаку Коши-Адамара $R_A(24) = 1/\sqrt[24]{|d_{24}|} = 0,395$.

Изменяя значения переменной x при отклонении от смещения $x_0 = 2$, вычисляем значение заданной функции (2.79), а также значения степенного ряда Тейлора и аппроксимирующего составного степенного ряда (2.90). Все вычисленные значения приведены в табл.2.65.

Таблица 2.65

x	2	2,15	2,25	2,275	2,3	2,31	2,32
x_0	2	2	2	2	2	2	2
F	3,0257189	2,1758019867	1,18555	0,95229	0,7632	0,7014	0,6472
F_A	3,0257189	2,1758019813	1,18378	0,93569	0,6507	0,4860	0,2773
F_{AS}	3,0257189	2,1758019772	1,18348	0,93525	0,6657	0,5259	0,3531
x	1,85	1,75	1,7	1,65	1,625	1,62	1,615
F	3,4100847856	3,55441	3,6070	3,6501	3,6686	3,672	3,675
F_A	3,4100847848	3,55430	3,6002	3,4334	2,7279	2,449	2,111
F_{AS}	3,4100847821	3,55380	3,5632	2,0221	-4,5243	-7,499	-11,49

Теорема 2.16. Для аппроксимирующего составного степенного ряда

$$F_A = e^{D(x)} = e^{d_1 + d_2(x-x_0) + d_3(x-x_0)^2 + d_4(x-x_0)^3 + \dots + d_l(x-x_0)^{l-1}} \quad (2.93)$$

известны его нормированные численные производные $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k, \dots$

Тогда для сходимости численного ряда $d_1, d_2, d_3, \dots, d_k, \dots$ достаточно сходимости численного ряда $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k, \dots$ с условием

$$\left| \frac{F_k}{F_{k-1}} \right| < \frac{1}{k-1}, \quad (2.94a)$$

При условии (2.94a) численный ряд $d_1, d_2, d_3, \dots, d_k, \dots$ сходится с соотношением

$$\left| \frac{d_k}{d_{k-1}} \right| < \left(\frac{k-2}{k-1} \right)^2. \quad (2.94b)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем прямую рекуррентную формулу функции (2.94)

$$\frac{F_k}{F_1} = \frac{1}{k-1} \cdot \left((k-1) \cdot d_k + \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \cdot d_{i+2} \cdot \frac{F_{k-1-i}}{F_1} \right)$$

и после дополнительного нормирования $F_k / F_1 = F_k$ преобразуем в обратную рекуррентную формулу

$$d_k = F_k - \frac{1}{k-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \cdot d_{i+2} \cdot F_{k-1-i} \right), \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (2.95)$$

Тогда два численных ряда $d_1, d_2, d_3, \dots, d_k, \dots$ и $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k, \dots$ связаны рекуррентной формулой (2.95).

Запишем члены численные ряда $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k, \dots$ следующим образом:

$$\left| \frac{F_2}{F_1} \right| = \rho_2; \quad \left| \frac{F_3}{F_2} \right| = \rho_3; \quad \left| \frac{F_4}{F_3} \right| = \rho_4; \dots; \quad \left| \frac{F_k}{F_{k-1}} \right| = \rho_k$$

и введем параметр $\rho = \max(\rho_2, \rho_3, \rho_4, \dots, \rho_k, \dots)$. Тогда получаем

$$\left| F_2 \right| = \rho_2 \leq \rho; \quad \left| F_3 \right| = \rho_3 \cdot \left| F_2 \right| = \rho_3 \cdot \rho_2 \leq \rho^2; \quad \left| F_4 \right| = \rho_4 \cdot \left| F_3 \right| = \rho_4 \cdot \rho_3 \cdot \rho_2 \leq \rho^3; \dots$$

$$\dots; \quad \left| F_k \right| = \rho_k \cdot \left| F_{k-1} \right| = \prod_{i=2}^k \rho_i \leq \rho^{k-1}$$

Определим члены ряда d_k ($k = 2, 3, \dots$) по формулам (2.95):.

Для $k=2$ $d_2 = F_2; \quad |d_2| = \rho_2 \leq \rho;$

для $k=3$ $d_3 = F_3 - \frac{1}{2} d_2 \cdot F_2 = F_3 - \frac{1}{2} F_2^2;$

$$|d_3| = \left| F_3 - \frac{1}{2} F_2^2 \right| \leq \left| \rho_3 \cdot \rho_2 - \frac{1}{2} \rho_2^2 \right| \leq \frac{1}{2} \rho^2;$$

для $k=4$ $d_4 = F_4 - F_2 \cdot F_3 + \frac{1}{3} F_2^3;$

$$|d_4| = \left| F_4 - F_2 \cdot F_3 + \frac{1}{3} F_2^3 \right| \leq \left| \rho^3 - \rho \cdot \rho^2 + \frac{1}{3} \rho^3 \right| = \frac{1}{3} \rho^3;$$

для $k=5$ $d_5 = F_5 - F_2 \cdot F_4 + F_2^2 \cdot F_3 - \frac{1}{2} F_3^2 - \frac{1}{4} F_2^4;$

$$|d_5| = \left| F_5 - F_2 \cdot F_4 + F_3^2 \cdot F_4 - \frac{1}{2} F_3^2 - \frac{1}{4} F_2^4 \right| \leq \left| \rho^4 - \rho \cdot \rho^3 + \rho^2 \cdot \rho^2 - \frac{1}{2} \rho^4 - \frac{1}{4} \rho^4 \right| \leq \frac{1}{4} \rho^4;$$

для $\boxed{k=6}$ $d_6 = F_6 - F_2 \cdot F_5 - F_3 \cdot F_4 + F_2^2 \cdot F_4 + F_3^2 \cdot F_2 - F_2^3 \cdot F_3 + \frac{1}{5} F_2^5;$

$$|d_6| = \left| F_6 - F_2 \cdot F_5 - F_3 \cdot F_4 + F_2^2 \cdot F_4 + F_3^2 \cdot F_2 - F_2^3 \cdot F_3 + \frac{1}{5} F_2^5 \right| \leq \left| \rho^5 - \rho \cdot \rho^4 - \rho^2 \cdot \rho^3 + \rho^2 \cdot \rho^3 + \rho^4 \cdot \rho - \rho^3 \cdot \rho^2 + \frac{1}{5} \rho^5 \right| \leq \frac{1}{5} \rho^5;$$

Распространяя по аналогии результат, получаем $|d_k| \leq \frac{1}{k-1} \cdot \rho^{k-1}$.

Согласно признаку Коши-Адамара, для сходимости численного ряда $d_1, d_2, d_3, \dots, d_k, \dots$ необходимо выполнить условие

$$\sqrt[k]{|d_k|} \leq \sqrt[k]{\frac{1}{k-1} \cdot \rho^{k-1}} = \sqrt[k]{\frac{1}{k-1}} \cdot \sqrt[k]{\rho^{k-1}} < 1,$$

откуда следуют формулы (2.94):

$$\rho < \frac{1}{k-1 \sqrt[k]{k-1}}; \quad \left| \frac{F_k}{F_{k-1}} \right| \leq \rho < \frac{1}{k-1 \sqrt[k]{k-1}};$$

$$|d_k| \leq \frac{1}{k-1} \left(\frac{1}{k-1 \sqrt[k]{k-1}} \right)^{k-1} = \frac{1}{(k-1)^2}; \quad |d_{k-1}| \leq \frac{1}{(k-2)^2}; \quad \left| \frac{d_k}{d_{k-1}} \right| \leq \frac{(k-2)^2}{(k-1)^2},$$

что требовалось доказать.

Пример 2.21.

Аппроксимируем составную функцию (2.79) $F = e^{\arctg H(x)}$, в которой внутренний полином для смещения $x_0=0$ равен $H(x) = 2 + 2x + x^2 - x^3$. Для задачи аппроксимации функции в диапазоне изменения переменной x введем смещение $x_0 \neq 0$ и выполним аппроксимацию двумя способами: степенным рядом Тейлора и составным степенным рядом

$$F_A(x) = \varphi(D(x - x_0)) = \ln(d_1 + d_2(x - x_0) + d_3(x - x_0)^2 + d_4(x - x_0)^3 + \dots + d_l(x - x_0)^{l-1}) \quad (2.96)$$

Выберем смещение $x_0 = 2$ и определим полином функции для нового смещение: $H(x) = 2 - 6x - 5x^2 - x^3$. Численное прямое p -дифференцирование заданной составной функции (2.79) определяет ее численные нормированные производные (табл.2.66).

По вычисленным производным (табл.2.66) строим аппроксимирующий степенной ряд Тейлора ($l = 24$).

$$F_{AS}(x) = f_1 + f_2(x - x_0) + f_3(x - x_0)^2 + f_4(x - x_0)^3 + \dots + f_l(x - x_0)^{l-1}$$

и вычисляем интервал сходимости степенного ряда по признаку Коши-Адамара.

Критерий Коши-Адамара имеет итерационный характер $R_S(k) = 1 / \sqrt[k]{|f_k|}$ и для

$k = 24$ принимает значение $R_S(24) = 1/\sqrt[24]{|f_{24}|} = 0,351$.

Таблица 2.66

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
3,0257	-3,6309	-9,56135	-2,1083e1	-3,8785e1	-4,1357e1
f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}
8,3482e1	7,5948e2	3,3071e3	1,1187e4	3,1533e4	7,2051e4
f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}
1,0874e5	-6,9017e4	-1,4341e6	-7,5222e6	-2,9167e7	-9,4078e7
f_{19}	f_{20}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}
-2,5521e8	-5,4309e8	-6,0076e8	1,9785e9	1,7720e10	8,409150877591853e10

Для аппроксимирующего составного степенного ряда запишем прямую рекуррентную формулу (табл. П.7)

$$F_k = \frac{1}{(k-1)d_1} \left((k-1)d_k - \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \cdot F_{i+2} \cdot d_{k-1-i} \right) \quad (2.97)$$

и преобразуем ее в обратную рекуррентную формулу

$$d_k = d_1 \cdot F_k + \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) F_{i+2} \cdot d_{k-1-i} \quad , \quad (k = 2, 3, \dots, l) \quad (2.98)$$

Коэффициент d_1 определяется из решения численного уравнения

$$F_1 = \varphi(d_1) ; \quad d_1 = \varphi^{-1}(F_1) = e^{F_1}$$

Результаты расчета коэффициентов $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{24}$ приведены в табл.2.67.

Таблица 2.67

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
2,0609e1	-7,4828e1	-6,1202e1	1,1654e2	5,7070e2	1,3835e3
d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
1,9972e3	-4,4922e2	-1,4992e4	-6,3071e4	-1,8011e5	-3,7712e5
d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}	d_{17}	d_{18}
-4,4198e5	7,4330e5	7,0480e6	2,8953e7	8,8304e7	2,1128e8
d_{19}	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
3,5334e8	6,9689e7	-2,5720e9	-1,3903e10	-5,0736e10	-1,4766e11

Для контроля точности выполненного расчета можно использовать прямую рекуррентную формулу (2.97) и, подставив в нее значения коэффициентов (табл.2.67), получить численные нормированные производные (табл.2.66). Сравнение вычисленного таким способом коэффициента $f_{24} = 8,409150877591851e10$ со значением этого коэффициента в табл.2.66 показывает, что значения (табл.2.66, 2.67) имеют 14 верных значащих цифр.

Для внутреннего степенного ряда составной аппроксимирующей функции (2.96) вычислим интервал сходимости по признаку Коши-Адамара

$$R_A(24) = 1/\sqrt[24]{|d_{24}|} = 0,342.$$

Изменяя значения переменной x при отклонении от смещения $x_0 = 2$, вычисляем значение заданной функции (2.79), а также значения степенного ряда

Тейлора и аппроксимирующего составного степенного ряда (2.96). Все вычисленные значения приведены в табл.2.68 .

Таблица 2.68

x	2	2,15	2,25	2,275	2,3	2,31	2,32
x_0	2	2	2	2	2	2	2
F	3,0257189	2,17580198675	1,18555	0,95229	0,7632	0,7014	0,6472
F_A	3,0257189	2,17580198683	1,18530	0,94707	0,7349	0,6118	0,3760
F_{AS}	3,0257189	2,17580197723	1,18348	0,93525	0,6657	0,5259	0,3531
x	1,85	1,75	1,7	1,65	1,625	1,62	1,615
F	3,4100847856	3,554410	3,60709	3,6501	3,6686	3,672	3,6755
F_A	3,4100847853	3,554434	3,60874	3,7083	3,9297	4,012	4,1140
F_{AS}	3,4100847821	3,553806	3,56327	2,0221	-4,5243	-7,499	-11,494

Пример показывает, что для каждого класса функций можно подобрать такие составные степенные ряды, которые обеспечивают требуемую точность аппроксимации в необходимом интервале изменения переменной x .

Рассмотрим аппроксимирующий составной степенной ряд общего вида

$$F_A = H(G(D(x))) , \quad (2.99)$$

в котором $D(x)$ – внутренний степенной ряд ; H , G – внутренние функции, выбранные для обеспечения требуемой точности и интервала аппроксимации. Аппроксимация необходима для замены сложной заданной функции F более простой (в сравнении с ней) функцией (2.99). Для заданной функции F в прямом рекуррентном дифференцировании можно вычислить нормированные производные $F_1, F_2, F_3, \dots, F_l$. Согласно определению составного степенного ряда, производные аппроксимирующей функции (2.99) должны быть равны производным $F_1, F_2, F_3, \dots, F_l$. Коэффициенты внутреннего степенного ряда

$$D(x) = d_1 + d_2(x - x_0) + d_3(x - x_0)^2 + d_4(x - x_0)^3 + \dots + d_l(x - x_0)^{l-1}$$

определяются через нормированные производные

$$d_k = \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1} D}{dx^{k-1}} , \quad (k = 2, 3, \dots, l) .$$

Поставленная задача аппроксимации состоит в том, чтобы по известным численным производным $F_1, F_2, F_3, \dots, F_l$ найти неизвестные численные производные $d_1, d_2, d_3, \dots, d_l$. Задача усложнена тем, что в аппроксимирующей функции выбраны внутренние функции H, G , преобразующие численный ряд производных $F_1, F_2, F_3, \dots, F_l$ заданной функции в численные коэффициенты $d_1, d_2, d_3, \dots, d_l$.

Рассмотрим способы решения этой задачи.

Первый способ (обратное рекуррентное дифференцирование аппроксимирующей функции (2.99)).

Обозначим обратные рекуррентные формулы для расчета компонентов функции H через $(Y_H)_A$, $(Y_H)_B$. Эти формулы преобразуют нормированные численные производные $F_1, F_2, F_3, \dots, F_l$ в нормированные численные производные функции G : $g_1, g_2, g_3, \dots, g_l$. Численный процесс расчета опишем следующим образом:

$$\begin{aligned} F_1 &= H(g_1); \quad g_1 = H^{-1}(F_1); \\ F_2 &= (Y_H)_A(g_1, F_1) \cdot \boxed{g_2} + (Y_H)_B(g_1, F_1) = A_2 \cdot g_2 + B_2; \quad g_2 = \frac{F_2 - B_2}{A_2}; \\ F_3 &= (Y_H)_A(g_1, g_2, F_1, F_2) \cdot \boxed{g_3} + (Y_H)_B(g_1, g_2, F_1, F_2) = A_3 \cdot g_3 + B_3; \\ & \quad g_3 = \frac{F_3 - B_3}{A_3}; \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_l &= (Y_H)_A(g_1, g_2, \dots, g_{l-1}, F_1, F_2, \dots, F_{l-1}) \cdot \boxed{g_l} + \\ & \quad + (Y_H)_B(g_1, g_2, \dots, g_{l-1}, F_1, F_2, \dots, F_{l-1}) = A_l \cdot g_l + B_l; \quad g_l = \frac{F_l - B_l}{A_l} \end{aligned}$$

Обозначим обратные рекуррентные формулы для расчета компонентов функции G через $(Y_G)_A$, $(Y_G)_B$. Эти формулы преобразуют нормированные численные производные $g_1, g_2, g_3, \dots, g_l$ в нормированные численные производные функции D : $d_1, d_2, d_3, \dots, d_l$. Опишем для нее численный процесс расчета:

$$\begin{aligned} g_1 &= G(d_1); \quad d_1 = G^{-1}(g_1); \\ g_2 &= (Y_G)_A(d_1, g_1) \cdot \boxed{d_2} + (Y_G)_B(d_1, g_1) = A_2 \cdot d_2 + B_2; \quad d_2 = \frac{g_2 - B_2}{A_2}; \\ g_3 &= (Y_G)_A(d_1, d_2, g_1, g_2) \cdot \boxed{d_3} + (Y_G)_B(d_1, d_2, g_1, g_2) = A_3 \cdot d_3 + B_3; \\ & \quad d_3 = \frac{g_3 - B_3}{A_3}; \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_l &= (Y_G)_A(d_1, d_2, \dots, d_{l-1}, g_1, g_2, \dots, g_{l-1}) \cdot \boxed{d_l} + \\ & \quad + (Y_G)_B(d_1, d_2, \dots, d_{l-1}, g_1, g_2, \dots, g_{l-1}) = A_l \cdot d_l + B_l; \quad d_l = \frac{g_l - B_l}{A_l} \end{aligned}$$

Преобразования производных, показанные для двух внутренних функций, применимы для любого количества преобразовательных функций $H, G, \dots$.

Описанные преобразования производных удобно представить следующими схемами:

$$F_1 \rightarrow g_1 ;$$

$$F \rightarrow G: [F_1, F_2, F_3, F_4, \dots, F_l] \xrightarrow[\text{формулы для } H]{\text{обратные рекуррентные}} [g_1, g_2, g_3, g_4, \dots, g_l]$$

$$g_1 \rightarrow d_1 ;$$

$$G \rightarrow D: [g_1, g_2, g_3, g_4, \dots, g_l] \xrightarrow[\text{формулы для } G]{\text{обратные рекуррентные}} [d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_l]$$

Второй способ (прямое рекуррентное дифференцирование обратных внутренних функций, лемма 2.9).

Предполагаем, что внутренние функции H, G имеют обратные функции H^{-1}, G^{-1} и соответствующие им прямые рекуррентные формулы Ξ_h, Ξ_g . Опишем численный процесс расчета производных $g_1, g_2, g_3, \dots, g_l$:

$$g_1 = H^{-1}(F_1) ;$$

$$g_2 = \Xi_h(F_1, F_2, g_1) ;$$

$$g_3 = \Xi_h(F_1, F_2, F_3, g_1, g_2) ;$$

$\vdots$

$$g_l = \Xi_h(F_1, F_2, F_3, \dots, F_l, g_1, g_2, \dots, g_{l-1})$$

Опишем численный процесс расчета производных $d_1, d_2, d_3, \dots, d_l$:

$$d_1 = G^{-1}(g_1) ;$$

$$d_2 = \Xi_g(g_1, g_2, d_1) ;$$

$$d_3 = \Xi_g(g_1, g_2, g_3, d_1, d_2) ;$$

$\vdots$

$$d_l = \Xi_g(g_1, g_2, g_3, \dots, g_l, d_1, d_2, \dots, d_{l-1})$$

Описанные преобразования производных удобно представить следующими схемами:

$$F_1 \rightarrow g_1 ;$$

$$F \rightarrow G: [F_1, F_2, F_3, F_4, \dots, F_l] \xrightarrow[\text{формула } \Xi_h]{\text{прямая рекуррентная}} [g_1, g_2, g_3, g_4, \dots, g_l]$$

$$g_1 \rightarrow d_1 ;$$

$$G \rightarrow D: [g_1, g_2, g_3, g_4, \dots, g_l] \xrightarrow[\text{формула } \Xi_g]{\text{прямая рекуррентная}} [d_1, d_2, d_3, d_4, \dots, d_l]$$

Пример 2.22.

Зададим составную функцию

$$F(x) = \frac{\sqrt[5]{\left(\arctg\left(\sqrt[15]{\frac{1}{e^{(\ln(\sin C(x))^2)}}}\right)\right)^2}}{A(x)} \quad (2.100)$$

в которой полиномы переменной x для смещения $x_0 = 0$ равны:

$$C(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4 + c_6x^5 + c_7x^6 + c_8x^7 + c_9x^8 + c_{10}x^9 + c_{11}x^{10} = \\ = 2 + 2x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 - x^{10};$$

$$A(x) = 2 + 3x + 4x^2.$$

Численное прямое p -дифференцирование заданной составной функции (2.100) определяет ее численные нормированные производные (табл.2.69).

Таблица 2.69

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
0,45367	-0,68587	-7,8698e-2	1,0703	-2,2389	0,33037
F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
2,3473	-7,5218	2,3160e-2	2,1975	-2,8588e1	-1,0271e1
F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}
-2,1706e1	-1,2815e2	-1,1124e2	-2,3870e2	-6,7261e2	-8,7880e2
F_{19}	F_{20}	F_{21}	F_{22}	F_{23}	F_{24}
-1,7734e3	-3,8629e3	-6,0352e3	-1,1606e4	-2,2642e4	-3,7967e4

По вычисленным производным (табл.2.69) строим аппроксимирующий степенной ряд Тейлора ($l = 24$)

$$F_{As}(x) = F_1 + F_2(x - x_0) + F_3(x - x_0)^2 + F_4(x - x_0)^3 + \dots + F_l(x - x_0)^{l-1}$$

и вычисляем интервал сходимости степенного ряда по признаку Коши-Адамара, который для $k = 24$ принимает значение $R_S(24) = 1/\sqrt[24]{|F_{24}|} = 0,644$.

Для задачи аппроксимации функции в диапазоне изменения переменной x при смещении $x_0 = 0$ выполним аппроксимацию двумя способами: степенным рядом Тейлора и составным степенным рядом

$$F_A(x) = H(G(D(x - x_0))) = \\ = \sqrt[m]{\ln(d_1 + d_2(x - x_0) + d_3(x - x_0)^2 + d_4(x - x_0)^3 + \dots + d_l(x - x_0)^{l-1})} \quad (2.101)$$

Выполним аппроксимацию в интервале переменной $x = 0 \div 0,485$. На левом краю интервала $x = 0$, и отклонение аппроксимирующей функции (2.101) от заданной (2.100) $\delta F = 0$, тогда как на правом краю интервала функция (2.101) ничем не ограничена. Аппроксимирующая функция (2.101) имеет свободный параметр m , и его можно выбрать так, чтобы отклонение δF на правом краю было минимальным. Такой выбор аппроксимирующей функции с «привязанными краями» увеличивает точность аппроксимации внутри интервала и может быть реализован с помощью

оптимизационной процедуры. Затраты на оптимальный выбор параметра оправданы в случае многократных расчетов заданной сложной функции.

На правом краю интервала значение функции равно $F(0,485) = 0,033407$, и минимальному отклонению аппроксимирующей функции $\delta F = 0,00004$ соответствует оптимальное значение параметра $m = 50/71$. Выполним обратное рекуррентное дифференцирование первой функции $F(x) = \sqrt[50]{G(x)}$, которая преобразует нормированные численные производные $F_1, F_2, F_3, \dots, F_{24}$ (табл.2.69) в нормированные численные производные $g_1, g_2, g_3, \dots, g_{24}$. Результаты расчета приведены в табл.2.70.

Таблица 2.70

g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
0,32551	-0,69882	0,30205	1,1044	-2,9543	1,5760
g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}
3,0278	-1,0823e1	5,7550	5,8037	-3,8867e1	1,5731e1
g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}	g_{17}	g_{18}
-2,3854	-1,4497	1,4900e1	-1,1475e2	-5,8488e2	-1,9254e2
g_{19}	g_{20}	g_{21}	g_{22}	g_{23}	g_{24}
-8,8788e2	-2,5427e3	-1,8765e3	-5,1417e3	-1,1139e4	-1,1016e4

Выполним обратное рекуррентное дифференцирование второй внутренней функции (2.101) $G(x) = \ln(D(x))$, которая преобразует нормированные численные производные $g_1, g_2, g_3, \dots, g_{24}$ в нормированные численные производные $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{24}$. Результаты приведены в табл.2.71.

Таблица 2.71

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
1,3847	-0,96768	0,75637	1,1583	-4,9806	5,8066
d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
0,89402	-2,0548e1	3,1616e1	-1,6432e1	-7,3448e1	1,4428
d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}	d_{17}	d_{18}
-1,5238	-2,2628e2	5,7036e2	-9,3858e2	-5,6489e2	1,9468e3
d_{19}	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
-4,8413e3	-8,2667 e2	5,5321e3	-2,2214e4	2,5518e3	1,1996e4

Для внутреннего степенного ряда составной аппроксимирующей функции (2.101) вычислим интервал сходимости по признаку Коши-Адамара

$$R_A(24) = \frac{1}{\sqrt[24]{|d_{24}|}} = 0,676.$$

Изменяя значения переменной x при отклонении от смещения $x_0 = 0$, вычисляем значение заданной функции (2.100), а также значения степенного ряда Тейлора и аппроксимирующего составного степенного ряда (2.101) для $m = 50/71$. Все вычисленные значения сведены в табл.2.72.

Таблица 2.72

x	0	0,2	0,3	0,4	0,45	0,46
x_0	0	0	0	0	0	0
F	0,4536690252	0,3247797572749	0,266432809	0,198229	0,1369	0,11713
F_A	0,4536690252	0,3247797572762	0,266432833	0,198256	0,1373	0,11772
F_{AS}	0,4536690252	0,3247797572767	0,266432852	0,198299	0,1387	0,12059
x	0,47	0,48	0,485	0,486	0,487	0,488
F	0,09176	0,05701	0,033407	0,02791	0,02209	0,01592
F_A	0,09265	0,05805	0,033367	0,02714	0,02008	0,01154
F_{AS}	0,09871	0,07192	0,056200	0,05284	0,04940	0,04588

Выполним аппроксимацию в интервале переменной $x = -0,5 \div 0$. При смещении $x_0 = 0$ теперь на правом краю интервала отклонение аппроксимирующей функции (2.101) от заданной (2.100) $\delta F = 0$. На левом краю интервала значение функции равно $F(-0,5) = 0,605263$, и минимальному отклонению $\delta F = 0,0013$ соответствует оптимальное значение параметра $m = \frac{100}{107}$. Результаты полного обратного рекуррентного дифференцирования функции (2.101) приведены в табл. 2.73.

Таблица 2.73

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
1,5361	-1,0666	0,54916	1,4681	-4,7439	3,9011
d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
2,7079	-1,8842e1	1,9238e1	-3,6398	-7,1233e1	7,7989e1
d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}	d_{17}	d_{18}
-7,5052 e1	-2,6630e2	2,5591e2	-5,4868e2	-1,0370e3	5,6009e2
d_{19}	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
-3,2140e3	-4,3918 e3	-4,4803e2	-1,7064e4	-2,0091e4	-1,4763e4

Для внутреннего степенного ряда составной аппроксимирующей функции (2.101) вычислим интервал сходимости по признаку Коши-Адамара $R_A(24) = 1/\sqrt[24]{|d_{24}|} = 0,670$.

Изменяя значения переменной x при отклонении от смещения $x_0 = 0$, вычисляем значение заданной функции (2.100), а также значения степенного ряда Тейлора и аппроксимирующего составного степенного ряда (2.101) для $m = 100/107$. Все вычисленные значения приведены в табл. 2.74.

Изменим смещение переменной $x_0 = -0,5$ и для нового смещения вычислим коэффициенты смещенных полиномов функции (2.100):

$$C(x) = 1,4970703125 - 0,9375x + 7,38671875x^2 - 12,3125x^3 + 16,65625x^4 - \\ - 16,25x^5 + 8,875x^6 + x^7 - 5,75x^8 + 4x^9 - x^{10}; \\ A(x) = 1,5 - x + 4x^2.$$

Таблица 2.74

x	0	-0,4	-0,45	-0,475	-0,5	-0,525
x_0	0	0	0	0	0	0
F	0,4536690252	0,6304818	0,62184	0,61448	0,60526	0,5943
F_A	0,4536690252	0,6304890	0,62195	0,61486	0,60652	0,5982
F_{AS}	0,4536690252	0,6304922	0,62202	0,61510	0,60736	0,6009
x	-0,55	-0,575	-0,6	-0,625	-0,65	-0,675
F	0,5819	0,5683	0,5535	0,5380	0,5217	0,5048
F_A	0,5931	0,5990	0,6326	0,7263	0,9260	1,2665
F_{AS}	0,6016	0,6239	0,7044	0,9305	1,5053	2,8856

Численное прямое p -дифференцирование заданной составной функции (2.100) определяет ее новые численные нормированные производные (табл.2.75).

Таблица 2.75

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
0,60526	0,40349	-1,3452	-1,9709	2,2989	6,5470
F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
-2,4031	-2,5395	-9,9783e1	3,5620 e2	-8,1000e2	2,3394e3
F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}
-7,6803e3	2,3881e4	-7,3336e4	2,2671e5	-7,0371e5	2,2103e6
F_{19}	F_{20}	F_{21}	F_{22}	F_{23}	F_{24}
-6,9866e6	2,1978e7	-6,8821e7	2,1574e8	-6,7804e8	2,1355e9

По вычисленным производным (табл.2.75) строим аппроксимирующий степенной ряд Тейлора ($l = 24$)

$$F_{AS}(x) = F_1 + F_2(x - x_0) + F_3(x - x_0)^2 + F_4(x - x_0)^3 + \dots + F_l(x - x_0)^{l-1}$$

и вычисляем интервал сходимости степенного ряда по признаку Коши-Адамара. Критерий Коши-Адамара для $k = 24$ принимает значение $R_S(24) = 1 / \sqrt[24]{|F_{24}|} = 0,408$

Выбираем интервал изменения переменной $x = -0,8 \div -0,5$. При смещении $x_0 = -0,5$ теперь на правом краю интервала отклонение аппроксимирующей функции (2.101) от заданной (2.100) $\delta F = 0$. На левом краю интервала значение функции $F(-0,5) = 0,332548$, и минимальному отклонению $\delta F = 0,00009$ соответствует оптимальное значение параметра $m = \frac{25}{134}$. Выполним обратное рекуррентное

дифференцирование первой внутренней функции $F(x) = \sqrt[134]{G(x)}$, которая преобразует нормированные численные производные $F_1, F_2, F_3, \dots, F_{24}$ (табл.2.75) в нормированные численные производные $g_1, g_2, g_3, \dots, g_{24}$. Результаты расчета приведены в табл.2.76.

Таблица 2.76

g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
0,067799	0,24226	-0,45560	-3,2680	-0,67159	2,2963 e1
g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}
3,0007e1	-9,5721e1	-2,9828e2	2,5533e2	1,6679e3	7,5612e2
g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}	g_{17}	g_{18}
-8,8065e3	-6,5162e3	2,1291e4	7,8566e4	-1,2409e5	-1,1539e5
g_{19}	g_{20}	g_{21}	g_{22}	g_{23}	g_{24}
-4,8501e5	2,5894e6	-3,4043e6	9,0775e6	-4,3504e7	1,1883e8

Выполним обратное рекуррентное дифференцирование второй внутренней функции (2.101) $G(x) = \ln(D(x))$, которая преобразует нормированные численные производные $g_1, g_2, g_3, \dots, g_{24}$ в нормированные численные производные $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{24}$. Результаты приведены в табл.2.77.

Таблица 2.77

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
1,0702	0,25925	-0,45616	-3,6128	-1,4690	2,5916 e1
d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
4,4449 e1	-1,0164e2	-4,4244e2	8,9683e1	2,5967e3	3,3372 e3
d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}	d_{17}	d_{18}
-1,2135e4	-2,9067e4	1,4802e4	2,1829e5	8,9542e4	-7,1621e5
d_{19}	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
-2,4968e6	3,7066e6	9,5437e6	1,8128e7	-1,0475e8	-4,7471e6

Для внутреннего степенного ряда составной аппроксимирующей функции (2.101) вычислим интервал сходимости по признаку Коши-Адамара $R_A(24) = 1 / \sqrt[24]{|d_{24}|} = 0,527$.

Изменяя значения переменной x при отклонении от смещения $x_0 = -0,5$, вычисляем значение заданной функции (2.100), а также значения степенного ряда Тейлора $F_{AS}(x)$ и аппроксимирующего составного степенного ряда $F_A(x)$ (2.101) для $m = 25/134$. Все вычисленные значения приведены в табл.2.78.

Таблица 2.78

x	-0,5	-0,7	-0,75	-0,8	-0,805
x_0	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5
F	0,6052634866	0,487333323	0,446990	0,33254	0,28907
F_A	0,6052634866	0,487333365	0,447010	0,33263	0,27099
F_{AS}	0,6052634866	0,487333621	0,447099	0,36080	0,34236

Процедура выбора нескольких оптимальных параметров аппроксимирующей функции на различных участках интервала может обеспечить высокую точность аппроксимации в широких пределах изменения переменной.

Раздел 2.4. Численные рекуррентные методы решения систем нелинейных уравнений

Рассмотрим систему нелинейных уравнений (СНУ)

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 ; \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 ; \\ \vdots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 , \end{cases} \quad (2.105)$$

которая имеет численное решение $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$. Зададим произвольно начальную точку поиска решения $X_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ и вычислим ненулевые невязки уравнений (2.105):

$$\begin{aligned} F_{01} &= F_1(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) ; \\ F_{02} &= F_2(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) ; \\ &\vdots \\ F_{0n} &= F_n(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \end{aligned} \quad (2.106)$$

Введем систему уравнений, зависящих от параметра α :

$$\begin{cases} F_1(x_1(\alpha), x_2(\alpha), \dots, x_n(\alpha)) = F_{01}(1-\alpha) ; \\ F_2(x_1(\alpha), x_2(\alpha), \dots, x_n(\alpha)) = F_{02}(1-\alpha) ; \\ \vdots \\ F_n(x_1(\alpha), x_2(\alpha), \dots, x_n(\alpha)) = F_{0n}(1-\alpha) . \end{cases} \quad (2.107)$$

Решение системы (2.107) совпадает с решением $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ заданной системы (2.105) при $\alpha = 1$. Начальные значения переменных $X_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ также являются решением системы (2.107) для $\alpha = 0$.

Сначала рассмотрим систему уравнений с разделяющимися переменными.

$$\begin{cases} F_{11}(x_1(\alpha)) + F_{12}(x_2(\alpha)) + \dots + F_{1n}(x_n(\alpha)) = F_{01}(1-\alpha) ; \\ F_{21}(x_1(\alpha)) + F_{22}(x_2(\alpha)) + \dots + F_{2n}(x_n(\alpha)) = F_{02}(1-\alpha) ; \\ \vdots \\ F_{n1}(x_1(\alpha)) + F_{n2}(x_2(\alpha)) + \dots + F_{nn}(x_n(\alpha)) = F_{0n}(1-\alpha) . \end{cases} \quad (2.108)$$

Для известных функций выполним расчет нормированных производных переменных по параметру α , используя теорему 2.11. Применяя обратное рекуррентное дифференцирование, определяем производные переменных согласно теореме 2.11 из систем рекуррентных уравнений вида (2.61):

$$\begin{bmatrix} (d1)_2 \\ (d2)_2 \\ \vdots \\ (dn)_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A11)_k & (A12)_k & \cdots & (A1n)_k \\ (A21)_k & (A22)_k & \cdots & (A2n)_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (An1)_k & (An2)_k & \cdots & (Ann)_k \end{bmatrix}_{k=2}^{-1} \begin{bmatrix} -F_{01} \\ -F_{02} \\ \vdots \\ -F_{0n} \end{bmatrix} \quad (2.109a)$$

$$\begin{bmatrix} (d1)_k \\ (d2)_k \\ \vdots \\ (dn)_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A11)_k & (A12)_k & \cdots & (A1n)_k \\ (A21)_k & (A22)_k & \cdots & (A2n)_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (An1)_k & (An2)_k & \cdots & (Ann)_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -(B11)_k - (B12)_k - \dots - (B1n)_k \\ -(B21)_k - (B22)_k - \dots - (B2n)_k \\ \vdots \\ -(Bn1)_k - (Bn2)_k - \dots - (Bnn)_k \end{bmatrix};$$

(k = 3, ..., l), (2.109б)

где $(d1)_1 = x_{01}$; $(d1)_2, (d1)_3, \dots, (d1)_k, \dots$ – нормированные производные переменной $x_1(\alpha)$; $(d2)_1 = x_{02}$; $(d2)_2, (d2)_3, \dots, (d2)_k, \dots$ – производные переменной $x_2(\alpha)$ и т. д. В обратном рекуррентном дифференцировании функции системы уравнений (2.108) представляются по формуле (2.5):

$$\begin{aligned} (F11)_k &= (A11)_k \cdot (d1)_k + (B11)_k; \dots; (F1n)_k = (A1n)_k \cdot (dn)_k + (B1n)_k; \\ (F21)_k &= (A21)_k \cdot (d1)_k + (B21)_k; \dots; (F2n)_k = (A2n)_k \cdot (dn)_k + (B2n)_k; \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$(Fn1)_k = (An1)_k \cdot (d1)_k + (Bn1)_k; \dots; (Fnn)_k = (Ann)_k \cdot (dn)_k + (Bnn)_k$$

где $(A11)_k, (B11)_k, (A12)_k, (B12)_k, \dots; (An1)_k, (Bn1)_k, \dots, (Ann)_k, (Bnn)_k$ – компоненты обратных рекуррентных формул функций $F11, \dots, F1n, \dots, Fn1, \dots, Fnn$ (табл. П.14 – П.18).

Предположим, что для всех переменных вычислены m нормированных производных при $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} x_1(\alpha) &= (d1)_1 + (d1)_2 \cdot \alpha + (d1)_3 \cdot \alpha^2 + \dots + (d1)_{m+1} \cdot \alpha^m; \\ x_2(\alpha) &= (d2)_1 + (d2)_2 \cdot \alpha + (d2)_3 \cdot \alpha^2 + \dots + (d2)_{m+1} \cdot \alpha^m; \\ &\vdots \\ x_n(\alpha) &= (dn)_1 + (dn)_2 \cdot \alpha + (dn)_3 \cdot \alpha^2 + \dots + (dn)_{m+1} \cdot \alpha^m \end{aligned} \quad (2.111)$$

Подставим формулы (2.111) в уравнения (2.105) и найдем значение параметра $\alpha = \alpha_{\min}$, при котором функция

$$F(x_1(\alpha), x_2(\alpha), \dots, x_n(\alpha)) = \sum_{i=1}^n (F_i(x_1(\alpha), x_2(\alpha), \dots, x_n(\alpha)))^2 \quad (2.112)$$

принимает минимальное значение.

В отличие от линейного одномерного поиска математической оптимизации [46 – 52] одномерный поиск функции (2.112) является нелинейным. При изменении значения параметра α текущая точка поиска $X(\alpha) = (x_1(\alpha), x_2(\alpha), \dots, x_n(\alpha))$, координаты которой вычисляются по формулам (2.111), движется по кривой в многомерном пространстве, выписывая сложную траекторию и отслеживая таким образом поведение нелинейной функции (2.112).

Определение. Вычислительный процесс, объединяющий расчеты производных (в частности по формулам (2.109)), конечные выражения (2.111)

и нелинейный одномерный поиск минимума функции (2.112) , реализует семейство рекуррентных методов m – го порядка ($m = 1, 2, 3, \dots, l$).

Лемма 2.12. В матричном рекуррентном уравнении (2.109) матрица

$$J = \begin{bmatrix} (A11)_k & (A12)_k & \dots & (A1n)_k \\ (A21)_k & (A22)_k & \dots & (A2n)_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (An1)_k & (An2)_k & \dots & (Ann)_k \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

является матрицей Якоби [1] системы уравнений (2.105). Следовательно, рекуррентный метод порядка $m = 1$ совпадает с методом Ньютона [41 – 45] для решения систем нелинейных уравнений.

Доказательство. Выполним классическое дифференцирование уравнений (2.107) по параметру α [1,2] .

$$\begin{cases} \frac{dF_1}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{d\alpha} + \frac{dF_1}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{d\alpha} + \dots + \frac{dF_1}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{d\alpha} = -F_{01} ; \\ \frac{dF_2}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{d\alpha} + \frac{dF_2}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{d\alpha} + \dots + \frac{dF_2}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{d\alpha} = -F_{02} ; \\ \vdots \\ \frac{dF_n}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{d\alpha} + \frac{dF_n}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{d\alpha} + \dots + \frac{dF_n}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{d\alpha} = -F_{0n} . \end{cases}$$

Запишем уравнения в матричной форме, применяя для производных от переменных по параметру α обозначения в уравнениях (2.109а)

$$\frac{dx_1}{d\alpha} = (d1)_2, \quad \frac{dx_2}{d\alpha} = (d2)_2, \dots, \quad \frac{dx_n}{d\alpha} = (dn)_2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dF_1}{dx_1} & \frac{dF_1}{dx_2} & \dots & \frac{dF_1}{dx_n} \\ \frac{dF_2}{dx_1} & \frac{dF_2}{dx_2} & \dots & \frac{dF_2}{dx_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{dF_n}{dx_1} & \frac{dF_n}{dx_2} & \dots & \frac{dF_n}{dx_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (d1)_2 \\ (d2)_2 \\ \vdots \\ (dn)_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_{01} \\ F_{02} \\ \vdots \\ F_{0n} \end{bmatrix}. \quad (2.114)$$

Полученное матричное выражение, совпадающее с матричным уравнением (2.109а), по сути, является математическим уравнением метода Ньютона, и матрица коэффициентов в нем – матрица Якоби, что требовалось доказать.

Покажем, что из леммы 2.12 следует сходимость рекуррентных методов.

Лемма 2.13. Рекуррентные методы m – го порядка ($m = 1, 2, 3, \dots, l$) гарантируют уменьшение функции (2.112) для начальной точки X_0 .

Доказательство. В матричном уравнении (2.114) введем обозначение строк матрицы Якоби

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (d1)_2 \\ (d2)_2 \\ \vdots \\ (dn)_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_{01} \\ F_{02} \\ \vdots \\ F_{0n} \end{bmatrix},$$

откуда следуют скалярные уравнения в матричном виде

$$[J_1] \cdot \begin{bmatrix} (d1)_2 \\ (d2)_2 \\ \vdots \\ (dn)_2 \end{bmatrix} = -F_{01}; [J_2] \cdot \begin{bmatrix} (d1)_2 \\ (d2)_2 \\ \vdots \\ (dn)_2 \end{bmatrix} = -F_{02}; \dots; [J_n] \cdot \begin{bmatrix} (d1)_2 \\ (d2)_2 \\ \vdots \\ (dn)_2 \end{bmatrix} = -F_{0n} \quad (2.115)$$

Выполним классическое дифференцирование функции (2.112) по параметру α :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dF}{d\alpha} &= F_{01} \cdot \left(\frac{dF_1}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{d\alpha} + \frac{dF_1}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{d\alpha} + \dots + \frac{dF_1}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{d\alpha} \right) + \\ &+ F_{02} \cdot \left(\frac{dF_2}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{d\alpha} + \frac{dF_2}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{d\alpha} + \dots + \frac{dF_2}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{d\alpha} \right) + \\ &\vdots \\ &+ F_{0n} \cdot \left(\frac{dF_n}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{d\alpha} + \frac{dF_n}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{d\alpha} + \dots + \frac{dF_n}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{d\alpha} \right). \end{aligned}$$

Введем в полученное уравнение скалярные произведения (2.115) и изменим обозначения производных согласно уравнению (2.109а).

$$\frac{1}{2} \frac{dF}{d\alpha} = F_{01} \cdot [J_1] \cdot \begin{bmatrix} (d1)_2 \\ (d2)_2 \\ \vdots \\ (dn)_2 \end{bmatrix} + F_{02} \cdot [J_2] \cdot \begin{bmatrix} (d1)_2 \\ (d2)_2 \\ \vdots \\ (dn)_2 \end{bmatrix} + \dots + F_{0n} \cdot [J_n] \cdot \begin{bmatrix} (d1)_2 \\ (d2)_2 \\ \vdots \\ (dn)_2 \end{bmatrix}$$

Подставляя скалярные произведения матриц (2.115), окончательно получаем

$$\frac{1}{2} \frac{dF}{d\alpha} = F_{01} \cdot (-F_{01}) + F_{02} \cdot (-F_{02}) + \dots + F_{0n} \cdot (-F_{0n}) = - \sum_{i=1}^n F_{0i}^2,$$

откуда следует отрицательное значение производной функции (2.112). Согласно выражениям (2.111) любой метод с $m > 1$ при $\alpha \rightarrow 0$ приближается к методу Ньютона, что требовалось доказать.

Пример 2.25.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений с разделяющимися переменными

$$\begin{cases} x_2 - x_1^4 = 0; \\ x_1^4 - 4x_1^3 + 6x_1^2 - 4x_1 + 1 = 0 \end{cases}$$

имеющую решение $\bar{X} = (1; 1)$. Выберем начальную точку поиска $X_0 = (x_{01}, x_{02}) = (-1; 1)$ и вычислим невязки уравнений $F_0 = (F_{01}, F_{02}) = (0; 16)$. Построим систему уравнений (2.107)

$$\begin{cases} x_2 - x_1^4 = 0; \\ x_1^4 - 4x_1^3 + 6x_1^2 - 4x_1 + 1 = F_{02}(1 - \alpha) \end{cases} \quad (2.116)$$

в которой $F_{11} = -x_1^4$; $F_{12} = x_2$; $F_{21} = x_1^4 - 4x_1^3 + 6x_1^2 - 4x_1 + 1$; $F_{22} = 0$.

Применим к выделенным функциям обратное рекуррентное дифференцирование, используя компоненты обратных рекуррентных формул функции D^m (табл. П.14).

$$(A11)_k = 4; (A12)_k = 1; (A21)_k = -32; (A22)_k = 0, (k = 2, 3, \dots).$$

Тогда матрица Якоби остается неизменной для значений $k = 2, 3, \dots$

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -32 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для начальных значений переменных находим $(d1)_1 = x_{01} = -1$; $(d2)_1 = x_{02} = 1$ и формируем систему уравнений для $k = 2$.

$$J \cdot \begin{bmatrix} (d1)_2 \\ (d2)_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ F_{02} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -32 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (d1)_2 \\ (d2)_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 16 \end{bmatrix}; (d1)_2 = \frac{1}{2}; (d2)_2 = -2.$$

Формируем матричные рекуррентные системы уравнений

$$\begin{bmatrix} (d1)_k \\ (d2)_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -32 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -(B11)_k - (B12)_k \\ -(B21)_k \end{bmatrix}, (k = 3, \dots, 9),$$

в которых для каждого значения k вычисляются правые части уравнений по формулам (табл. П.14). Рассмотрим рекуррентные методы различных порядков.

Метод 1 – го порядка:

$$x_1(\alpha) = (d1)_1 + (d1)_2 \cdot \alpha = -1 + \frac{1}{2}\alpha;$$

$$x_2(\alpha) = (d2)_1 + (d2)_2 \cdot \alpha = 1 - 2 \cdot \alpha$$

Метод 2 – го порядка:

$$x_1(\alpha) = (d1)_1 + (d1)_2 \cdot \alpha + (d1)_3 \cdot \alpha^2 = -1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{16}\alpha^2;$$

$$x_2(\alpha) = (d2)_1 + (d2)_2 \cdot \alpha + (d2)_3 \cdot \alpha^2 = 1 - 2\alpha + \frac{3}{4}\alpha^2$$

Метод 3 – го порядка:

$$x_1(\alpha) = (d1)_1 + (d1)_2 \cdot \alpha + (d1)_3 \cdot \alpha^2 + (d1)_4 \cdot \alpha^3 = -1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{16}\alpha^2 + \frac{7}{64}\alpha^3;$$

$$x_2(\alpha) = (d2)_1 + (d2)_2 \cdot \alpha + (d2)_3 \cdot \alpha^2 + (d2)_4 \cdot \alpha^3 = 1 - 2\alpha + \frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{3}{16}\alpha^3$$

Метод 4 – го порядка:

$$x_1(\alpha) = -1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{16}\alpha^2 + \frac{7}{64}\alpha^3 + \frac{77}{1024}\alpha^4;$$

$$x_2(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{3}{16}\alpha^3 + \frac{17}{256}\alpha^4$$

Метод 5 – го порядка:

$$x_1(\alpha) = -1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{16}\alpha^2 + \frac{7}{64}\alpha^3 + \frac{77}{1024}\alpha^4 + \frac{231}{4096}\alpha^5;$$

$$x_2(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{3}{16}\alpha^3 + \frac{17}{256}\alpha^4 + \frac{27}{1024}\alpha^5$$

Метод 6 – го порядка:

$$x_1(\alpha) = -1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{16}\alpha^2 + \frac{7}{64}\alpha^3 + \frac{77}{1024}\alpha^4 + \frac{231}{4096}\alpha^5 + \frac{1463}{32768}\alpha^6;$$

$$x_2(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{3}{16}\alpha^3 + \frac{17}{256}\alpha^4 + \frac{27}{1024}\alpha^5 + \frac{83}{8192}\alpha^6$$

Метод 7 – го порядка:

$$x_1(\alpha) = -1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{16}\alpha^2 + \frac{7}{64}\alpha^3 + \frac{77}{1024}\alpha^4 + \frac{231}{4096}\alpha^5 + \frac{1463}{32768}\alpha^6 + \frac{4807}{131072}\alpha^7;$$

$$x_2(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{3}{16}\alpha^3 + \frac{17}{256}\alpha^4 + \frac{27}{1024}\alpha^5 + \frac{83}{8192}\alpha^6 + \frac{91}{32768}\alpha^7$$

Метод 8 – го порядка:

$$x_1(\alpha) = -1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{16}\alpha^2 + \frac{7}{64}\alpha^3 + \frac{77}{1024}\alpha^4 + \frac{231}{4096}\alpha^5 + \frac{1463}{32768}\alpha^6 + \frac{4807}{131072}\alpha^7 + \frac{129789}{4194304}\alpha^8;$$

$$x_2(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{3}{16}\alpha^3 + \frac{17}{256}\alpha^4 + \frac{27}{1024}\alpha^5 + \frac{83}{8192}\alpha^6 + \frac{91}{32768}\alpha^7 + \frac{783}{1048576}\alpha^8$$

Выполним только один нелинейный одномерный поиск из начальной точки $X_0 = (-1 ; 1)$ рекуррентными методами различного порядка и сравним полученные результаты (табл.2.80) .

Таблица 2.80

m	1	2	3	4
$\alpha_{\min}$	1,725	1,84	1,4306	1,489
F	8,8072	5,7024e-2	4,9736e-2	1,9985e-8
x_1	-0,13752	0,54292	0,41928	0,89105
x_2	-2,4531	-0,14832	0,22274	0,63037
m	5	6	7	8
$\alpha_{\min}$	1,366	1,285	1,228	1,187
F	4,0442e-7	4,0939e-6	2,3435e-5	8,9971e-5
x_1	0,84507	0,78794	0,73634	0,68990
x_2	0,50424	0,38538	0,29369	0,22443

На примере двух переменных можно показать особенности методов высокого порядка. Функция (2.112) имеет сложную структуру с двумя поворотами, и для достижения ее минимума необходимо несколько раз существенно менять направления поиска. В методе Ньютона переменные линейно зависят от параметра α , и в линейном одномерном поиске текущая точка движется по прямой. В рекуррентных методах высокого порядка переменные имеют нелинейную зависимость от параметра α , и, как показывают результаты табл.2.80, методы с $m > 2$ в первом же одномерном нелинейном поиске сразу преодолевают два поворота к минимуму функции. В приведенном примере при точном расчете достаточного количества производных переменных можно найти минимум функции вообще без одномерного поиска, положив сразу $\alpha = 1$. В практике расчетов рекуррентные методы высшего порядка имеют более высокую скорость сходимости, чем метод $m = 1$.

Рекуррентные методы представляют переменные в виде степенных рядов, область применения которых определяется их радиусом сходимости.

Определение. Особую точку функции, в которой функция стремится к бесконечности, в отличие от других точек вырождения, назовем *бесконечной особой точкой (бесконечной особенностью)*.

Теорема 2.18. Поведение степенного ряда функции $F(\alpha)$ определяется ближайшей бесконечной особой точкой, и радиус сходимости степенного ряда R равен расстоянию R_0 до этой особой точки.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разложим возрастающую функцию $F(\alpha)$ в окрестности бесконечной особой точки в конечный степенной ряд

$$f(\alpha) = f_1 + f_2 \cdot \alpha + f_3 \cdot \alpha^2 + f_4 \cdot \alpha^3 + \dots + f_{m+1} \cdot \alpha^m.$$

и примем для функции, возрастающей при $\alpha > 0$, все слагаемые ряда положительными. Найдем значение $m_1 > m$, при котором степенной ряд более точно приближает функцию. В случае нескольких допустимых значений $m < m_1 < m_2 < m_3 < \dots \leq m_k$ для более точного приближения возрастающей функции степень необходимо поднять до наибольшего возможного уровня.

Полагаем $\alpha = R > 0$, и в степенном ряде

$$f(R) = f_1 + f_2 \cdot R + f_3 \cdot R^2 + f_4 \cdot R^3 + \dots + f_{m_k+1} \cdot R^{m_k}$$

изменяем значение R для наилучшего приближения возрастающей функции. Обозначим расстояние до бесконечной особой точки через R_0 . Выберем значения $R_1, R_2, \dots$ ($R_1 < R_2 < \dots < R_0$), для которых в возрастающей функции $F(R_1) < F(R_2) < \dots$. Для степенного ряда, приближающего функцию, также выполняются неравенства $f(R_1) < f(R_2) < \dots$. При $R = R_0$ конечный степенной ряд для значений m_k , R приближает бесконечную функцию в особой точке наилучшим образом и, следовательно, для $R \leq R_0$ степенной ряд сходится. Для значений $R > R_0$ при удалении от особой точки функция $F(R)$ уменьшается, но значение $f(R)$ продолжает возрастать, и, следовательно,

степенной ряд расходится. Таким образом, радиус сходимости степенного ряда равен расстоянию до бесконечной особой точки, что требовалось доказать.

Следствие. Бесконечный радиус сходимости степенного ряда может быть только для функций, которые не имеют бесконечных особых точек или такие точки расположены на бесконечности.

Пример 2.26

1. Найдем вещественные корни полинома

$$D(\alpha) = (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdot (\alpha^2 - 6\alpha + 10)^2 = \\ = \alpha^6 - 15\alpha^5 + 94\alpha^4 - 312\alpha^3 + 572\alpha^2 - 540\alpha + 200$$

для чего построим функцию

$$F(\alpha) = \frac{1}{D(\alpha)} = \frac{1}{\alpha^6 - 15\alpha^5 + 94\alpha^4 - 312\alpha^3 + 572\alpha^2 - 540\alpha + 200},$$

в которой вещественные корни полинома превращаются в полюсы. Тогда, согласно теореме 2.18, радиус сходимости степенного ряда функции $F(\alpha)$ должен быть равен расстоянию до ближайшего полюса – $R = 1$.

Найдем численные производные функции $F(\alpha)$ для $\alpha = 0$ прямым рекуррентным дифференцированием, используя рекуррентное уравнение $(D(\alpha))^m$ для $m = -1$ (табл.П.1). Результаты расчета производных приведены в табл. 2.81.

Таблица 2.81

k	1	2	3	4
f_k	5,0e-3	1,3500e-2	2,2150e-2	2,8990e-2
k	5	6	7	8
f_k	3,364e-2	3,3650e-2	3,8145e-2	3,9039e-2
k	9	10	11	12
f_k	3,9510e-2	3,9753e-2	3,9876e-2	3,9938e-2
k	13	14	15	16
f_k	3,9969e-2	3,9985e-2	3,9992e-2	3,9996e-2

Для расчета радиуса сходимости применим два критерия: Даламбера (радиус Rd) и Коши–Адамара (радиус Rk) [1]. Результаты расчета радиуса приведены в табл.2.82.

Таблица 2.82

k	5	10	15	20	25
Rd	0,8617	0,9938	0,999	0,9999	0,99999
Rk	2,4233	1,4319	1,2585	1,1846	1,1435
k	30	35	40	45	50
Rd	0,9999999	0,999999999	0,99999999999	0,999999999999	0,9999999999999
Rk	1,1173	1,0992	1,0860	1,0758	1,0678

Как видно из табл.2.82, критерий Даламбера правильно решает задачу и находит

вещественный корень с высокой точностью. Но главное, критерий практически подтверждает теорему 2.18.

2. Найденный корень можно выделить из полинома и построить новую функцию с ближайшим полюсом $\hat{\alpha} = 2$

$$F(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{D(\alpha)} = \frac{1}{(\alpha - 2) \cdot (\alpha^2 - 6\alpha + 10)^2} = \frac{1}{\alpha^5 - 14\alpha^4 + 80\alpha^3 - 232\alpha^2 + 340\alpha - 200}$$

Найдем численные производные функции $F(\alpha)$ для $\alpha = 0$ прямым рекуррентным дифференцированием. Результаты расчета производных приведены в табл. 2.83.

Таблица 2.83

k	1	2	3	4
f_k	$-5,0e-3$	$-8,500e-3$	$-8,650e-3$	$-6,845e-3$
k	5	6	7	8
f_k	$-4,6525e-3$	$-2,8591e-3$	$-1,6385e-3$	$-8,9403e-4$
k	9	10	11	12
f_k	$-4,7137e-4$	$-2,4279e-4$	$-1,2316e-4$	$-6,1892e-5$
k	13	14	15	16
f_k	$-3,0945e-5$	$-1,5435e-5$	$-7,6940e-6$	$-3,8361e-6$

Для расчета радиуса сходимости применим критерии Даламбера и Коши-Адамара. Результаты расчета радиуса приведены в табл.2.84.

Таблица 2.84

k	10	20	30	40
Rd	1,9415	2,0114	1,99998	2,0000002
Rk	2,3422	2,1512	2,0979	2,0723
k	50	60	70	80
Rd	2,000000002	2,00000000003	2,0000000000003	2,00000000000002
Rk	2,05739	2,0475	2,0405	2,0354

Критерий Даламбера находит вещественный полюс $\hat{\alpha} = 2$ с высокой точностью.

Критерий Даламбера можно использовать для определения полюсов функции, но этот критерий имеет существенные недостатки:

1. Для определения полюсов с высокой точностью требуется расчет большого количества производных, что невозможно для сложных задач.

2. Критерий определяет абсолютное значение полюса и не определяет его положение в системе координат.

Теорема 2.19. Задана функция $F(D(x))$, имеющая бесконечные особые точки, для которой найдены нормированные численные производные для $x = 0$ и построен конечный степенной ряд

$$f(x) = f_1 + f_2 \cdot x + f_3 \cdot x^2 + \dots + f_{l+1} \cdot x^l \quad (2.117)$$

Тогда положение (координаты) бесконечных особых точек заданной функции $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots$ можно определить с помощью рекуррентных критериев.

1. Линейный рекуррентный критерий:

$$B(x) = (b_2x + b_1)^\gamma \quad ; \quad \widehat{x_1} = -\frac{b_1}{b_2} \quad , \quad (2.118a)$$

где $3 < n \leq l$;

$$b_2 = 1; \gamma = \frac{(n-1)(n-3)f_{n-2} \cdot f_n - (n-2)^2 f_{n-1}^2}{(n-1)f_{n-2} \cdot f_n - (n-2)f_{n-1}^2}; b_1 = \frac{-f_{n-1} \cdot f_{n-2}}{(n-1)f_{n-2} \cdot f_n - (n-2)f_{n-1}^2} \quad (2.118b)$$

2. Квадратичный рекуррентный критерий:

$$B(x) = (b_3x^2 + b_2x + b_1)^\gamma \quad ; \quad \widehat{x_{1,2}} = \frac{-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4b_3 \cdot b_1}}{2b_3} \quad (2.119a)$$

где $5 < n \leq l$;

$$b_3 = 1; \gamma = \gamma_{1,2} = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_3 \cdot a_1}}{2a_3}; \quad b_2 = \frac{c_1}{c_2}; \quad b_1 = \frac{\gamma \cdot A5 - A3 - b_2 \cdot (A2 - \gamma \cdot A4)}{A1};$$

$$A1 = (n-1)f_n; \quad A2 = (n-2)f_{n-1}; \quad A3 = (n-3)f_{n-2}; \quad A4 = f_{n-1}; \quad A5 = 2f_{n-2};$$

$$B1 = (n-2)f_{n-1}; \quad B2 = (n-3)f_{n-2}; \quad B3 = (n-4)f_{n-3}; \quad B4 = f_{n-2}; \quad B5 = 2f_{n-3};$$

$$C1 = (n-3)f_{n-2}; \quad C2 = (n-4)f_{n-3}; \quad C3 = (n-5)f_{n-4}; \quad C4 = f_{n-3}; \quad C5 = 2f_{n-4};$$

$$D2 = A2 \cdot B1 - B2 \cdot A1; \quad D3 = A3 \cdot B1 - B3 \cdot A1; \quad D4 = A4 \cdot B1 - B4 \cdot A1;$$

$$D5 = A5 \cdot B1 - B5 \cdot A1; \quad E2 = B2 \cdot C1 - C2 \cdot B1; \quad E3 = B3 \cdot C1 - C3 \cdot B1;$$

$$E4 = B4 \cdot C1 - C4 \cdot B1; \quad E5 = B5 \cdot C1 - C5 \cdot B1; \quad (2.119b)$$

$$c_1 = \gamma \cdot D5 - D3; \quad c_2 = D2 - \gamma \cdot D4; \quad a_1 = E3 \cdot D2 - E2 \cdot D3;$$

$$a_2 = (E2 \cdot D5 - E5 \cdot D2) - (E3 \cdot D4 - E4 \cdot D3); \quad a_3 = E5 \cdot D4 - E4 \cdot D5;$$

3. Кубический рекуррентный критерий:

$$B(x) = (b_4x^3 + b_3x^2 + b_2x + b_1)^\gamma \quad ; \quad b_4(\widehat{x})^3 + b_3(\widehat{x})^2 + b_2\widehat{x} + b_1 = 0 \quad (2.120a)$$

где $8 < n \leq l$;

$$b_4 = 1; \quad p_5\gamma^4 + p_4\gamma^3 + p_3\gamma^2 + p_2\gamma + p_1 = 0;$$

$$b_3 = \frac{h_1\gamma^2 + g_1\gamma + l_1}{e_1\gamma^2 + d_1\gamma + c_1}; \quad b_2 = \frac{b_3(\gamma \cdot E6 - E3) + \gamma \cdot E7 - E4}{E2 - \gamma \cdot E5}; \quad (2.120b)$$

$$b_1 = (\gamma \cdot A7 - A4 - b_2(A2 - \gamma \cdot A5) - b_3(A3 - \gamma \cdot A6)) / A1;$$

$$A1 = (n-1)f_n; \quad A2 = (n-2)f_{n-1}; \quad A3 = (n-3)f_{n-2}; \quad A4 = (n-4)f_{n-3};$$

$$A5 = f_{n-1}; \quad A6 = 2f_{n-2}; \quad A7 = 3f_{n-3};$$

$$B1 = (n-2)f_{n-1}; \quad B2 = (n-3)f_{n-2}; \quad B3 = (n-4)f_{n-3}; \quad B4 = (n-5)f_{n-4};$$

$$B5 = f_{n-2}; \quad B6 = 2f_{n-3}; \quad B7 = 3f_{n-4};$$

$$\begin{aligned}
C1 &= (n-3)f_{n-2} ; C2 = (n-4)f_{n-3} ; C3 = (n-5)f_{n-4} ; C4 = (n-6)f_{n-5} ; \\
C5 &= f_{n-3} ; C6 = 2f_{n-4} ; C7 = 3f_{n-5} ; \\
D1 &= (n-4)f_{n-3} ; D2 = (n-5)f_{n-4} ; D3 = (n-6)f_{n-5} ; D4 = (n-7)f_{n-6} ; \\
D5 &= f_{n-4} ; D6 = 2f_{n-5} ; D7 = 3f_{n-6} ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E2 &= A2 \cdot B1 - B2 \cdot A1 ; E3 = A3 \cdot B1 - B3 \cdot A1 ; E4 = A4 \cdot B1 - B4 \cdot A1 ; \\
E5 &= A5 \cdot B1 - B5 \cdot A1 ; E6 = A6 \cdot B1 - B6 \cdot A1 ; E7 = A7 \cdot B1 - B7 \cdot A1 ; \\
F2 &= A2 \cdot C1 - C2 \cdot A1 ; F3 = A3 \cdot C1 - C3 \cdot A1 ; F4 = A4 \cdot C1 - C4 \cdot A1 ; \\
F5 &= A5 \cdot C1 - C5 \cdot A1 ; F6 = A6 \cdot C1 - C6 \cdot A1 ; F7 = A7 \cdot C1 - C7 \cdot A1 ; \\
L2 &= A2 \cdot D1 - D2 \cdot A1 ; L3 = A3 \cdot D1 - D3 \cdot A1 ; L4 = A4 \cdot D1 - D4 \cdot A1 ; \\
L5 &= A5 \cdot D1 - D5 \cdot A1 ; L6 = A6 \cdot D1 - D6 \cdot A1 ; L7 = A7 \cdot D1 - D7 \cdot A1 ;
\end{aligned} \tag{2.121}$$

$$\begin{aligned}
e_1 &= E6 \cdot F5 - E5 \cdot F6 ; d_1 = (E2 \cdot F6 - E6 \cdot F2) - (E3 \cdot F5 - E5 \cdot F3) ; \\
c_1 &= E3 \cdot F2 - E2 \cdot F3 ; h_1 = (E5 \cdot F7 - E7 \cdot F5) ; \\
g_1 &= (E7 \cdot F2 - E2 \cdot F7) - (E5 \cdot F4 - E4 \cdot F5) ; l_1 = E2 \cdot F4 - E4 \cdot F2 ; \\
e_2 &= E6 \cdot L5 - E5 \cdot L6 ; d_2 = (E2 \cdot L6 - E6 \cdot L2) - (E3 \cdot L5 - E5 \cdot L3) ; \\
c_2 &= E3 \cdot L2 - E2 \cdot L3 ; h_2 = E5 \cdot L7 - E7 \cdot L5 ; \\
g_2 &= (E7 \cdot L2 - E2 \cdot L7) - (E5 \cdot L4 - E4 \cdot L5) ; l_2 = E2 \cdot L4 - E4 \cdot L2 ;
\end{aligned} \tag{2.122}$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= c_2 \cdot l_1 - c_1 \cdot l_2 ; p_2 = (c_2 \cdot g_1 - c_1 \cdot g_2) - (d_1 \cdot l_2 - d_2 \cdot l_1) ; \\
p_3 &= (e_2 \cdot l_1 - e_1 \cdot l_2) - (c_1 \cdot h_2 - c_2 \cdot h_1) - (d_1 \cdot g_2 - d_2 \cdot g_1) ; \\
p_4 &= (e_2 \cdot g_1 - e_1 \cdot g_2) - (d_1 \cdot h_2 - d_2 \cdot h_1) ; p_5 = e_2 \cdot h_1 - e_1 \cdot h_2 ;
\end{aligned} \tag{2.123}$$

Доказательство. Запишем прямое рекуррентное уравнения (табл.П.2) для функции кубического критерия $B(x) = (b_4 x^3 + b_3 x^2 + b_2 x + b_1)^\gamma$, оставляя в уравнении только слагаемые, содержащие коэффициенты функции $B(x)$.

$$\begin{aligned}
b_1(k-1)f_k + b_2(k-2)f_{k-1} + b_3(k-3)f_{k-2} + b_4(k-4)f_{k-3} - \\
-\gamma \cdot b_2 \cdot f_{k-1} - 2\gamma \cdot b_3 \cdot f_{k-2} - 3\gamma \cdot b_4 \cdot f_{k-3} = 0
\end{aligned} \tag{2.124}$$

1. Линейный критерий

Из рекуррентного уравнения (1.124) получаем уравнения частного вида, полагая $b_4 = b_3 = 0$; $b_2 = 1$

$$b_1(k-1)f_k + (k-2)f_{k-1} - \gamma \cdot f_{k-1} = 0 \tag{2.125}$$

Выбираем в степенном ряде (2.117) численные коэффициенты с индексами $1 < n, n-1 \leq l$ и подставляем в уравнение (2.125)

$$\begin{cases} (n-1)f_n \cdot b_1 - f_{n-1} \cdot \gamma = -(n-2)f_{n-1} ; \\ (n-2)f_{n-1} \cdot b_1 - f_{n-2} \cdot \gamma = -(n-3)f_{n-2} \end{cases}$$

Решаем систему линейных уравнений относительно b_1 , γ и получаем формулы (2.118б). Выбор индекса n в установленных пределах влияет на результат за счет неравномерной сходимости степенного ряда снизу и возможных ошибок расчета ряда сверху.

2. Квадратичный критерий

Из рекуррентного уравнения (1.124) получаем уравнение частного вида, полагая $b_4 = 0$; $b_3 = 1$

$$b_1(k-1)f_k + b_2(k-2)f_{k-1} + (k-3)f_{k-2} - \gamma \cdot b_2 \cdot f_{k-1} - 2\gamma \cdot f_{k-2} = 0 \quad (2.126)$$

Выбираем в степенном ряде (2.117) численные коэффициенты с индексами

$1 < n, n-1, n-2 \leq l$ и подставляем в уравнение (2.126)

$$\begin{cases} (n-1)f_n \cdot b_1 + (n-2)f_{n-1} \cdot b_2 + (n-3)f_{n-2} - f_{n-1} \cdot \gamma \cdot b_2 - 2f_{n-2} \cdot \gamma = 0; \\ (n-2)f_{n-1} \cdot b_1 + (n-3)f_{n-2} \cdot b_2 + (n-4)f_{n-3} - f_{n-2} \cdot \gamma \cdot b_2 - 2f_{n-3} \cdot \gamma = 0; \\ (n-3)f_{n-2} \cdot b_1 + (n-4)f_{n-3} \cdot b_2 + (n-5)f_{n-4} - f_{n-3} \cdot \gamma \cdot b_2 - 2f_{n-4} \cdot \gamma = 0 \end{cases}$$

Вводя обозначения (2.119б), получаем уравнения

$$\begin{cases} A1 \cdot b_1 + A2 \cdot b_2 + A3 - A4 \cdot \gamma \cdot b_2 - A5 \cdot \gamma = 0; \\ B1 \cdot b_1 + B2 \cdot b_2 + B3 - B4 \cdot \gamma \cdot b_2 - B5 \cdot \gamma = 0; \\ C1 \cdot b_1 + C2 \cdot b_2 + C3 - C4 \cdot \gamma \cdot b_2 - C5 \cdot \gamma = 0. \end{cases}$$

Полученная система нелинейных уравнений имеет решение, и преобразование системы приводит к квадратному уравнению

$$\gamma^2(E5 \cdot D4 - E4 \cdot D5) + \gamma(E2 \cdot D5 - E5 \cdot D2 + E4 \cdot D3 - E3 \cdot D4) + E3 \cdot D2 - E2 \cdot D3 = 0$$

в котором обозначения соответствуют формулам (2.119б). В большинстве случаев система имеет два вещественных значения γ_1 и γ_2 , которым соответствуют два решения b_1 , b_2 по формулам (2.119б).

3. Кубический критерий

Подставляем в рекуррентное уравнение (2.124) $b_4 = 1$

$$b_1(k-1)f_k + b_2(k-2)f_{k-1} + b_3(k-3)f_{k-2} + (k-4)f_{k-3} - \gamma \cdot b_2 f_{k-1} - 2\gamma \cdot b_3 f_{k-2} - 3\gamma \cdot f_{k-3} = 0 \quad (2.127)$$

Выбираем в степенном ряде (2.117) численные коэффициенты с индексами $1 < n, n-1, n-2, n-3 \leq l$ и, вводя обозначения (2.120б), получаем уравнения

$$\begin{cases} A1 \cdot b_1 + A2 \cdot b_2 + A3 \cdot b_3 + A4 - A5 \cdot \gamma \cdot b_2 - A6 \cdot \gamma \cdot b_3 - A7 \cdot \gamma = 0; \\ B1 \cdot b_1 + B2 \cdot b_2 + B3 \cdot b_3 + B4 - B5 \cdot \gamma \cdot b_2 - B6 \cdot \gamma \cdot b_3 - B7 \cdot \gamma = 0; \\ C1 \cdot b_1 + C2 \cdot b_2 + C3 \cdot b_3 + C4 - C5 \cdot \gamma \cdot b_2 - C6 \cdot \gamma \cdot b_3 - C7 \cdot \gamma = 0; \\ D1 \cdot b_1 + D2 \cdot b_2 + D3 \cdot b_3 + D4 - D5 \cdot \gamma \cdot b_2 - D6 \cdot \gamma \cdot b_3 - D7 \cdot \gamma = 0 \end{cases} \quad (2.128)$$

Исключая в уравнениях неизвестную переменную b_1 , получаем систему

$$\begin{cases} b_2(E2 - E5 \cdot \gamma) + b_3(E3 - E6 \cdot \gamma) = -(E4 - E7 \cdot \gamma); \\ b_2(F2 - F5 \cdot \gamma) + b_3(F3 - F6 \cdot \gamma) = -(F4 - F7 \cdot \gamma); \\ b_2(L2 - L5 \cdot \gamma) + b_3(L3 - L6 \cdot \gamma) = -(L4 - L7 \cdot \gamma), \end{cases} \quad (2.129)$$

где $E2, \dots, E7, F2, \dots, F7, L2, \dots, L7$ определены в формулах (2.121).

Исключаем из системы (2.129) неизвестную переменную b_2 и получаем систему уравнений

$$\begin{cases} b_3((E3 - E6 \cdot \gamma) \cdot (F2 - F5 \cdot \gamma) - (F3 - F6 \cdot \gamma) \cdot (E2 - E5 \cdot \gamma)) = \\ = \gamma \cdot (E7 \cdot (F2 - F5 \cdot \gamma) - F7 \cdot (E2 - E5 \cdot \gamma)) - (E4 \cdot (F2 - F5 \cdot \gamma) - F4 \cdot (E2 - E5 \cdot \gamma)); \\ b_3((E3 - E6 \cdot \gamma) \cdot (L2 - L5 \cdot \gamma) - (L3 - L6 \cdot \gamma) \cdot (E2 - E5 \cdot \gamma)) = \\ = \gamma \cdot (E7 \cdot (L2 - L5 \cdot \gamma) - L7 \cdot (E2 - E5 \cdot \gamma)) - (E4 \cdot (L2 - L5 \cdot \gamma) - L4 \cdot (E2 - E5 \cdot \gamma)). \end{cases} \quad (2.130)$$

Полученная система нелинейных уравнений имеет решение, и ее преобразование приводит к уравнению 4-ой степени (2.120б)

$$p_5 \gamma^4 + p_4 \gamma^3 + p_3 \gamma^2 + p_2 \gamma + p_1 = 0,$$

где $p_1, \dots, p_5$ определены в формулах (2.123). Преобразуя первое уравнение системы (2.130), находим выражение для расчета b_3

$$b_3(e_1 \gamma^2 + d_1 \gamma + c_1) = h_1 \gamma^2 + g_1 \gamma + l_1,$$

где $c_1, d_1, e_1, l_1, g_1, h_1$ определены в формулах (2.122). Значения b_2, b_1 найдены из первых уравнений систем (2.129) и (2.128).

Уравнение 4-ой степени дает 4 значения γ и соответственно 4 решения для координат особых точек, которые могут повторять координаты одной особой точки или выдавать информацию о расположении нескольких особых точек. Таким образом, существует три рекуррентных критерия, имеющих различную точность и информативность, что требовалось доказать.

Продолжим пример 2.26.

3. Найдем вещественные корни полинома

$$D(x) = (x - 2)^2(x^2 - 6x + 10)^2 = x^6 - 16x^5 + 108x^4 - 392x^3 + 804x^2 - 880x + 400$$

для чего построим функцию

$$F(x) = \frac{1}{D(x)} = \frac{1}{x^6 - 16x^5 + 108x^4 - 392x^3 + 804x^2 - 880x + 400},$$

имеющую кратный вещественный полюс.

Найдем численные производные функции для $x = 0$ прямым рекуррентным дифференцированием и применим для определения координат кратного полюса критерии Даламбера (радиус Rd) и Коши-Адамара (радиус Rk), а также рекуррентные критерии – линейный критерий (координата полюса $\widehat{x_{1l}}$) и квадратичный критерий (координаты $\widehat{x_{1kv}}, \widehat{x_{2kv}}, \dots$).

Результаты расчетов приведены в табл.2.85. Из результатов видно, что критерии Даламбера и Коши-Адамара не могут точно решить задачу даже для большого количества производных. Линейный критерий дает достаточно точное

значение координаты полюса, но для задачи расчета корней критерий дает грубое приближение. Квадратичный критерий показывает очень хорошую точность для задачи расчета координат особой точки и приемлемую точность расчета корня.

Таблица 2.85

k	10	20	30	40
Rd	1,6647	1,8749	1,9230	1,9444
Rk	2,1101	1,9349	1,9234	1,9257
$\widehat{x_{1l}}$	2,3588	2,0481	2,0145	2,0071
$\widehat{x_{1kv}}$		2,8650	3,0117	2,9996
$\widehat{x_{2kv}}$		1,9947	2,000137	1,9999976
			1,9933	
k	50	60	70	80
Rd	1,9565	1,9642	1,9696	1,9741
Rk	1,9307	1,9357	1,9401	1,9468
$\widehat{x_{1l}}$	2,0042	2,0027	2,0020	2,0012
$\widehat{x_{1kv}}$	3,0000084	2,99999985	3,0000000063	2,9999999941
	2,0000000329	1,9999999996	2,0000000000104	1,999999999925
$\widehat{x_{2kv}}$	2,00020	1,999999977±	2,00000195	2,00000194
	1,9999981	± j2,72e-5	1,99999804	1,99999806

Квадратичный критерий, как будто, выдает координаты двух разных полюсов, но детальный анализ показывает, что второй полюс – это вещественная часть пары кратных комплексных корней ($3 \pm j$). Критерий имеет высокую чувствительность и фиксирует вторую пару кратных полюсов, но в искаженном виде.

Рассмотрим полином с комплексными корнями

$$D(x) = (x^2 - 6x + 10)^2 = x^4 - 12x^3 + 56x^2 - 120x + 100$$

и построим функцию

$$F(x) = \frac{1}{D(x)} = \frac{1}{x^4 - 12x^3 + 56x^2 - 120x + 100},$$

имеющую кратные комплексные полюсы.

Находим численные производные функции для $x = 0$ прямым рекуррентным дифференцированием (табл. П.1) и сводим их в табл.2.86.

Таблица 2.86

k	1	2	3	4	5
f_k	1,0e-2	1,2e-2	8,8e-3	5,04e-3	2,46e-3
k	6	7	8	9	10
f_k	1,0656e-3	4,1792e-4	1,4957e-4	4,8118e-5	1,4198e-5

Результаты расчетов особых точек приведены в табл.2.87.

Таблица 2.87

k	Rd	Rk	$\widehat{x_{1l}}$	$\widehat{x_{1kv}}$
10	3,4312	3,0140	3,1622	2,99999999999981 ± j 0,99999999999982

Для 10 численных производных линейный критерий точно определил расстояние до комплексного полюса функции $F(x)$: $R = \sqrt{10} = 3,1622$, а квадратичный критерий определил положение комплексного полюса и расстояние до него.

4. Определим логарифмические особые точки функции

$$F(D(x)) = \ln((x-1)(x-2)(x^2-6x+10)^2) = \\ = \ln(x^6 - 15x^5 + 94x^4 - 312x^3 + 572x^2 - 540x + 200)$$

которая имеет две вещественных особых точки и пару комплексных особых точек.

Находим численные производные функции для $x = 0$ прямым рекуррентным дифференцированием (табл. П.7) и сводим их в табл.2.88.

Таблица 2.88

k	1	2	3	4	5
f_k	5,2983	-2,7	-0,785	-0,399	-0,26843
k	6	7	8	9	10
f_k	-0,20615	-0,16904	-0,14386	-0,12545	-0,11131
k	11	12	13	14	15
f_k	-0,10009	-0,90952e-1	-0,83353e-1	-0,76932e-1	-0,71433e-1
k	16	17	18	19	20
f_k	-0,66669e-1	-0,62501e-1	-0,58824e-1	-0,55556e-1	-0,52632e-1
k	21	22	23	24	25
f_k	-0,50000e-1	-0,47619e-1	-0,45455e-1	-0,43478e-1	-0,41667e-1

Применим для определения особых точек критерии Даламбера и Коши–Адамара, а также для определения координат особых точек рекуррентные критерии – линейный (координата $\widehat{x_{1l}}$), квадратичный (координаты $\widehat{x_{1kv}}$) и кубический (координаты $\widehat{x_{1kb}}$).

Результаты расчетов особых точек приведены в табл.2.89 .

Таблица 2.89

k	10	20	30	40
Rd	1,1269	1,0555	1,0357	1,0263
Rk	1,2594	1,1643	1,1217	1,0977
$\widehat{x_{1l}}$	0,98169	0,999943	0,99999999068	0,99999999987
$\widehat{x_{1kv}}$	0,97140	1,000000804	0,99999999988	0,9999999999982
	0,9928	0,99913	0,9999947	0,99999999984
	3,0054	1,9839	2,000153	2,000067
$\widehat{x_{1kb}}$	0,999999999964	0,99999975	1,00000000000032	0,99999999999982
	0,9999999999998	0,999968	0,9999999965	0,99999999999937
	1,000000000000005	1,000112	0,999999954	1,000000000000058
	0,99999999952	2,0202	1,99983	2,000068

Результаты показывают, что критерии Даламбера и Коши–Адамара мало эффективны для определения логарифмических особых точек. Линейный рекуррентный критерий достаточно эффективен, но наилучшими являются квадратичный и кубический критерии. Они показывают не только более высокую точность расчета при меньшем количестве производных, но также сразу фиксируют несколько различных ближайших особых точек. Так, в примере оба критерия зафиксировали с высокой точностью самую близкую особую точку $\widehat{x_{1kv}} = \widehat{x_{1kb}} \approx 1$ и с меньшей точностью более отдаленную особую точку $\widehat{x_{1kv}} = \widehat{x_{1kb}} \approx 2$.

Определим логарифмические особые точки функции

$$F(D(x)) = \ln((x^2 + 6x + 10)^2) = \ln(x^4 + 12x^3 + 56x^2 + 120x + 100),$$

которая имеет пару комплексных особых точек.

Находим численные производные функции для $x = 0$ прямым рекуррентным дифференцированием (табл. П.7) и сводим их в табл.2.90.

Таблица 2.90

k	1	2	3	4	5
f_k	4,6052	1,2	– 1,6e–1	2,4e–2	– 2,8e–3
k	6	7	8	9	10
f_k	– 9,6e–5	2,3467e–4	– 1,1383e–4	4,2160e–5	– 1,3632e–5
k	11	12	13	14	15
f_k	3,9885e–6	– 1,0602e–6	2,5073e–7	– 4,9158e–8	5,8968e–9
k	16	17	18	19	20
f_k	9,5816e–10	– 1,0549e–9	5,1118e–10	– 1,9590e–10	6,5615e–11

Результаты расчетов особых точек приведены в табл.2.91 .

Таблица 2.91

k	10	20	30
Rd	3,0927	2,9855	3,0094
Rk	3,0628	3,2430	3,2601
$\widehat{x_{1l}}$	2,3126	0,74652	0,53235
$\widehat{x_{1kv}}$	– 2,9999999999985 ± ± j 0,99999999999867	– 2,9999999999958 ± ± j 0,99999999999822	– 2,9999999999901 ± ± j 0,99999999999751
$\widehat{x_{1kb}}$	– 2,9999999999990 ± ± j 0,99999999999829	– 2,9999999999932 ± ± j 0,99999999999837	– 2,99999999999317 ± ± j 0,99999999999845
	– 2,9999999999995 ± ± j 0,99999999999816	– 2,9999999999932 ± ± j 1,000000000000254	– 2,99999999999897 ± ± j 0,99999999999756

Результаты показывают, что критерии Даламбера и Коши–Адамара дают грубое приближение расстояния до комплексной особой точки $R = \sqrt{10} = 3,162277$. Линейный критерий при отсутствии вещественных особых точек оказался непригодным, тогда как квадратичный и кубический критерии показали отличные результаты даже для малого количества производных $k = 10$. Отметим, что рекуррентные критерии определили координаты особых точек $(-3 \pm j)$, в отличие от критериев Даламбера и Коши–Адамара, которые определяют только расстояние.

5. Определим тригонометрические особые точки функции

$$F(x) = \frac{1}{\cos D(x)} = \frac{1}{\cos((x - \frac{\pi}{5})(x - \frac{5\pi}{4}))},$$

которая имеет 4 особые точки, расположенных вблизи точки $x = 0$:

$$\widehat{x}_1 = 0,206156172804349; \quad \widehat{x}_2 = -0,4486429425926;$$

$$\widehat{x}_3 = 1,2055010532107; \quad \widehat{x}_4 = -0,97415887354286$$

Находим численные производные функции для $x = 0$ прямым рекуррентным дифференцированием (табл. П.1, П.8) и сводим их в табл.2.92

Таблица 2.92

k	1	2	3	4	5
f_k	-1,2801	-4,6596	-2,9220e1	-1,2904e2	-6,5795e2
k	6	7	8	9	10
f_k	-3,1217e3	-1,5301e4	-7,3868e4	-3,5911e6	-1,7401e6
k	11	12	13	14	15
f_k	-8,4448e6	-4,0954e7	-1,9868e8	-9,6367e8	-4,6748e9
k	16	17	18	19	20
f_k	-2,2675e10	-1,0999e11	-5,3352e11	-2,5879e12	-1,2553e13

Результаты расчетов особых точек приведены в табл.2.93.

Таблица 2.93

k	10	20	30
Rd	0,20636	0,20615626	0,206156172841
Rk	0,24141	0,22217	0,21651
$\widehat{x}_{1l}$	0,19616	0,206146	0,206156165
$\widehat{x}_{1kv}$	0,20622	0,206156172814	0,206156172804349
	0,18332	0,206678	0,206145
	-0,44506	-0,4486418	-0,44864274
γ	-1,0017	-0,9999999	-1
$\widehat{x}_{1kb}$	0,206202	0,20615617278	0,20615617271
	-0,44564	-0,4486104	-0,448639
	-0,45760	-0,44864105	-0,4486442

С наибольшей точностью ближайшую особую точку находит квадратичный критерий, а критерий Даламбера и кубический критерий показали одинаковую эффективность для вещественной особой точки. Линейный критерий оказался немного хуже. Надо учесть, что квадратичный и кубический критерии зафиксировали координату еще второй особой точки, но более далекие особые точки не проявились.

Определим тригонометрические особые точки функции

$$F(x) = \frac{\cos D(x)}{\sin D(x)} = \frac{\cos((x - \frac{\pi}{5})(x - \frac{5\pi}{4}))}{\sin((x - \frac{\pi}{5})(x - \frac{5\pi}{4}))},$$

которая имеет 2 особые точки, расположенных вблизи точки $x = 0$:

$$\widehat{x}_1 = -0,14348191185256; \quad \widehat{x}_2 = 0,628318530717957;$$

Находим численные производные функции для $x = 0$ прямым рекуррентным дифференцированием (табл. П.8) и сводим их в табл.2.94.

Таблица 2.94

k	1	2	3	4	5
f_k	-1,2514	1,1689e1	-6,9200e1	4,8996e2	-3,3938e3
k	6	7	8	9	10
f_k	2,3674e4	-1,6495e5	1,1497e6	-8,0126e6	5,5844e7
k	11	12	13	14	15
f_k	-3,6921e8	2,7126e9	-1,8905e10	1,3176e11	-9,1832e11
k	16	17	18	19	20
f_k	6,4002e12	-4,4607e13	3,1089e14	2,1667e15	1,5101e16

Результаты расчетов особых точек приведены в табл.2.95.

Таблица 2.95

k	10	20	30
Rd	0,1434815	0,1434819118524	0,14348191185256
Rk	0,17096	0,15590	0,15151
$\widehat{x}_{1l}$	-0,14354	-0,1434819119	-0,14348191185256
γ	-0,99886	-1,0000000082	-0,99952
$\widehat{x}_{1kv}$	-0,143461	-0,143481911838	-0,143481911813
	-0,143465	-0,143481911842	-0,143481904
	0,55021	0,51548	-0,143481933
γ	-1,000037	-0,9999999	-1,00000000000071
$\widehat{x}_{1kb}$	-0,1434826	-0,14348191169	-0,14348191185252
	-0,14354	-0,1434819122	-0,1434819137
	0,63341	0,63271	-0,14348190992

Критерий Даламбера, а также линейный и кубический критерии одинаково успешно решили задачу, но рекуррентные критерии указали точную координату ближайшей особой точки. Более того, кубический и с меньшей точностью квадратичный критерий обнаружили вторую особую точку.

Определим тригонометрические особые точки функции

$$F(x) = \frac{\cos D(x)}{\sin D(x)} = \frac{\cos(x^2 - 0,2x + 0,02)}{\sin(x^2 - 0,2x + 0,02)},$$

которая имеет пару комплексных особых точки, расположенных вблизи точки $x = 0$, и дальние вещественные особые точки:

$$\widehat{x_{1,2}} = 0,1 \pm j0,1 ; \widehat{x_3} = 1,869630654568854 ; \widehat{x_4} = -2,404632768926332.$$

Находим численные производные функции для $x = 0$ прямым рекуррентным дифференцированием (табл. П.8) и сводим их в табл.2.96 .

Таблица 2.96

k	1	2	3	4	5
f_k	4,9993e1	5,0007e2	2,4997e3	7,1125e-4	-1,25e5
k	6	7	8	9	10
f_k	-1,25e6	-6,25e6	3,3888e-4	3,1256e6	3,125e9
k	11	12	13	14	15
f_k	1,5625e10	4,0686e-4	-7,8125e11	-7,8125e12	-3,9062e13
k	16	17	18	19	20
f_k	1,6672	1,9531e15	1,9531e16	9,7656e16	1,4888e4
k	21	22	23	24	—
f_k	-4,8828e18	-4,8828e19	-2,4414e20	1,2072e8	—

Степенной ряд отличается сильной неравномерностью сходимости, и для критерия Даламбера и линейного критерия, использующих мало производных, возможны срывы сходимости. Квадратичный и кубический критерии, работающие с большим количеством производных, имеют свойство сглаживать неравномерную сходимость ряда.

Результаты расчетов особых точек приведены в табл.2.97.

Таблица 2.97

k	10	20	30
Rd	0,099999	6,5594e12	0,1
Rk	0,11379	0,12758	0,13219
$\widehat{x_{1l}}$	1,35e-13	-0,0125	-1,25e-15
γ	-1,00021	-1,00000000	-1,2463
$\widehat{x_{1kv}}$	0,1000034 ± ± j 0,1000026	0,1000000000000004 ± ± j 0,0999999999999960	0,1009 ± j 0,10084
γ	-1,000024	-1,0000000000	-1,000069
$\widehat{x_{1kb}}$	0,100000033 ± ± j 0,100000026	0,09999972 ± ± j 1,0000031	0,10000026 ± ± j 0,10000024
	0,099967 ± ± j 0,099975	1,0000027 ± ± j 0,09999968	0,09999973 ± ± j 0,09999975

Как видно из результатов, неравномерная сходимость ряда разрушила работу более простых критериев и внесла отклонения в работу сложных критериев. Квадратичный и кубический критерии постоянно указывали на координаты комплексных особых точек с некоторыми отклонениями в точности.

Система нелинейных уравнений (2.107) может содержать алгебраические и трансцендентные функции, которые могут быть источниками бесконечных особых точек. Укажем другие источники особых точек, и их появление необходимо учитывать при численном решении систем.

Определение. Точки пространства, в которых траектории переменных (2.111) переходят из вещественного пространства в комплексное или из комплексного в вещественное, назовем *точками перехода* x_p (“дыры” пространства).

Теорема 2.20. Задано уравнение $F(x(\alpha)) = 0$, переменная которой зависит от параметра α , и при некотором значении параметра $\alpha = \alpha_p$ достигается точка перехода. Тогда в этой точке производная $\left. \frac{dx_p}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_p}$ стремится к бесконечности, и точка перехода превращается в бесконечную особую точку функции $F(x(\alpha))$.

Доказательство. Полагаем, что из функции $F(x(\alpha))$ выделен квадратичный сомножитель

$$F(x(\alpha)) \equiv F_0(x(\alpha)) \cdot (x^2(\alpha) + A(\alpha) \cdot x(\alpha) + B(\alpha)) = 0$$

и выполним классическое дифференцирование уравнения по параметру α

$$\begin{aligned} \frac{dF_0}{dx} \frac{dx}{d\alpha} \cdot (x^2(\alpha) + A(\alpha) \cdot x(\alpha) + B(\alpha)) + \\ + F_0(x(\alpha)) \cdot (2x(\alpha) \frac{dx}{d\alpha} + \frac{dA(\alpha)}{d\alpha} x(\alpha) + A(\alpha) \frac{dx}{d\alpha} + \frac{dB(\alpha)}{d\alpha}) = 0; \end{aligned} \quad (2.131)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_0}{dx} \frac{dx}{d\alpha} \cdot (x^2(\alpha) + A(\alpha) \cdot x(\alpha) + B(\alpha)) + \\ + F_0(x(\alpha)) \cdot \left(\frac{dx}{d\alpha} (2x(\alpha) + A(\alpha)) + \frac{dA(\alpha)}{d\alpha} x(\alpha) + \frac{dB(\alpha)}{d\alpha} \right) = 0 \end{aligned}$$

Найдем корни квадратичного сомножителя

$$x_p = -\frac{A(\alpha)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A(\alpha)}{2}\right)^2 - B(\alpha)}. \quad (2.132)$$

Предположим, что квадратичный сомножитель обращается в нуль, и упростим уравнение (2.131)

$$\begin{aligned} F_0(x(\alpha)) \cdot \left(\frac{dx}{d\alpha} (2x(\alpha) + A(\alpha)) + \frac{dA(\alpha)}{d\alpha} x(\alpha) + \frac{dB(\alpha)}{d\alpha} \right) \equiv F_0(x_p(\alpha)) \times \\ \times \left(\frac{dx_p}{d\alpha} \cdot (-\cancel{A(\alpha)} \pm \sqrt{\left(\frac{A(\alpha)}{2}\right)^2 - B(\alpha)} + \cancel{A(\alpha)}) + \frac{dA(\alpha)}{d\alpha} x_p(\alpha) + \frac{dB(\alpha)}{d\alpha} \right) = 0 \end{aligned}$$

Учитывая, что $F_0(x_p(\alpha)) \neq 0$, найдем производную переменной по параметру

$$\frac{dx_p}{d\alpha} = \frac{\frac{dA(\alpha)}{d\alpha} x_p(\alpha) + \frac{dB(\alpha)}{d\alpha}}{\mp \sqrt{\left(\frac{A(\alpha)}{2}\right)^2 - B(\alpha)}}. \quad (2.133)$$

Изменяем значения параметра α , приближая точку перехода $\alpha \rightarrow \alpha_p$,

вследствие чего в формуле (2.132) подкоренное выражение $\left(\frac{A(\alpha)}{2}\right)^2 - B(\alpha) \rightarrow 0$

Следовательно, в выражении (2.133) $\frac{dx_p}{d\alpha} \rightarrow \infty$, что требовалось доказать.

Рассмотрим алгебраическую систему уравнений как частный случай системы уравнений (2.107)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{\mu_1} (x_1(\alpha))^i + \sum_{i=1}^{\nu_1} (x_2(\alpha))^i + \dots + \sum_{i=1}^{\nu_1} (x_n(\alpha))^i = F_{01}(1-\alpha); \\ \sum_{i=1}^{\mu_2} (x_1(\alpha))^i + \sum_{i=1}^{\nu_2} (x_2(\alpha))^i + \dots + \sum_{i=1}^{\nu_2} (x_n(\alpha))^i = F_{02}(1-\alpha); \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{\mu_n} (x_1(\alpha))^i + \sum_{i=1}^{\nu_n} (x_2(\alpha))^i + \dots + \sum_{i=1}^{\nu_n} (x_n(\alpha))^i = F_{0n}(1-\alpha) \end{cases} \quad (2.134)$$

Исключая некоторым способом неизвестные $x_2(\alpha)$, $x_3(\alpha), \dots, x_n(\alpha)$, получаем алгебраическое уравнение, которое содержит одну переменную, зависящую от параметра α

$$F(x_1(\alpha)) = 0. \quad (2.135)$$

Задав начальные значения переменных $X_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ и решая численно уравнение (2.135) для различных значений параметра α , можно найти значение $\alpha = \alpha_p$, соответствующее точке перехода.

В действительности, систему (2.134) сложно решить способом исключения переменных, и потому уравнение (2.135) для сложных задач существует только теоретически. Более того, в уравнении (2.135) нет практической необходимости. Согласно теореме 2.20, переходы создают бесконечные особые точки, координаты которых можно определить, как для любых особых точек, с помощью рекуррентных критериев (теорема 2.19). Однако решение уравнения (2.135) для простых примеров помогает выяснить особенности численных процессов в сложных задачах.

К бесконечным особым точкам, которые создают дробно-рациональные, логарифмические, тригонометрические функции системы уравнений (2.107), добавляются точки перехода из вещественного пространства в комплексное пространство (или наоборот).

Пример 2.27

1. Вернемся к системе алгебраических уравнений примера 2.25.

Алгебраические функции системы не создают бесконечных особых точек (при конечных значениях переменных), и особые точки могут возникнуть только за счет точек перехода. Для определения точек перехода используем второе уравнение системы, содержащее одну переменную x_1 . Следовательно, это уравнение является тем уравнением (2.135), из которого можно определить координату $\alpha = \alpha_p$ точки перехода.

$$x_1^4 - 4x_1^3 + 6x_1^2 - 4x_1 + 1 - F_{02}(1 - \alpha) = 0, \quad (F_{02} = 16, 0);$$

$$F(x_1(\alpha)) \equiv x_1^4 - 4x_1^3 + 6x_1^2 - 4x_1 - 15, 0 + 16, 0 \cdot \alpha = 0.$$

Для $\alpha = 0$ находим корни этого уравнения:

$$x_{11} = -1, 0; \quad x_{12} = 3, 0; \quad x_{13} = 1, 0 + j2, 0; \quad x_{14} = 1, 0 - j2, 0,$$

один из которых, естественно, равен начальному значению $x_{11} = x_{01} = -1, 0$.

Изменяем параметр α и для каждого значения вычисляем корни уравнения, находя значение $\alpha = \alpha_p$ точки перехода, при котором вещественные корни x_{11}, x_{12} превращаются в комплексные или пара комплексных корней x_{13}, x_{14} превращаются в вещественные корни. Находим, что для значения $\alpha = 1$ все корни становятся вещественными и равными

$$x_{11} = x_{12} = x_{13} = x_{14} = 1, 0,$$

и, таким образом, получаем кратную точку перехода. Более того, при значении $\alpha = 1$ заданная система уравнений имеет решение $\bar{X} = (1; 1)$, а это означает, что в точке решения находится кратная точка перехода. Для численного рекуррентного метода любого порядка сходимость к решению системы будет медленной вследствие уменьшения шага одномерного поиска в окрестности особой точки. Это подтверждают результаты в табл.2.80а поиска решения системы уравнений различными численными рекуррентными методами из наилучшей точки в табл.2.80 (метод $m = 4$)

Таблица 2.80а

№ итер.	порядок m	$\alpha_{\min}$	F	x_1	x_2
1	4	1,489045	1,9985e-8	0,89105	0,63037
2	4	0,419	8,1179e-9	0,90482	0,67023
3	6	0,48	1,5273e-9	0,92803	0,74172
4	8	0,55	3,8972e-10	0,94104	0,78422
5	8	0,53	1,2646e-10	0,94987	0,81406
10	8	0,45	4,6778e-13	0,97783	0,91422
15	8	0,395	4,4741e-15	0,98868	0,95507
20	8	0,355	8,0448e-17	0,99366	0,97489
25	8	0,325	2,2963e-18	0,99620	0,98489
30	8	0,295	9,3869e-20	0,9975946867	0,990113404383

2. Зададим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_2 - x_1^4 = 0; \\ x_1^4 - x_1^3 - 5x_1^2 - x_1 + 4 = 0, \end{cases}$$

и построим систему (2.107)

$$\begin{cases} x_2 - x_1^4 = F_{01}(1 - \alpha); \\ x_1^4 - x_1^3 - 5x_1^2 - x_1 + 4 = F_{02}(1 - \alpha) \end{cases} \quad (2.136)$$

Алгебраические функции этой системы не создают бесконечных особых точек, и такие особые точки могут возникать только за счет точек перехода.

Выберем начальную точку поиска $X_0 = (x_{01}, x_{02}) = (0, 55; 5)$ и вычислим невязки уравнений $F_0 = (F_{01}, F_{02}) = (4, 90849375; 1, 86263125)$, а также

значение минимизируемой функции (2.112) $F_0 = 27,562706$.

Найдем численные производные переменных для $\alpha = 0$ обратным рекуррентным дифференцированием (табл. П.14) и применим рекуррентный метод 9 – го порядка. Результаты решения приведены в табл. 2.98.

Таблица 2.98

№ итерации	0	1	2
$\alpha_{\min}$	–	1	1
F	27,562706	4,2653373	8,381647e–31
x_1	0,55	0,78912919	0,7884037265047809
x_2	5,0	0,38637985	0,3863622383764598

По результатам найдено первое решение системы уравнений.

Изменим начальную точку поиска $X_0 = (x_{01}, x_{02}) = (5 ; 5)$. Результаты решения приведены в табл.2.99.

Таблица 2.99

№ итерации	0	1	2	3
$\alpha_{\min}$	–	1	1	1
F	5,24276e5	4,482884e2	1,471185e–5	4,827828e–28
x_1	5,0	3,050666085	2,7552871831	2,755221607237486
x_2	5,0	69,624365108	57,629307784	57,62701742650027

Теперь найдено второе решение системы уравнений.

Изменим начальную точку поиска $X_0 = (x_{01}, x_{02}) = (-5 ; 5)$. Результаты решения приведены в табл.2.100.

Таблица 2.100

№ итерации	0	1	2	3	4
$\alpha_{\min}$	–	1	1	0,14	1.0e–4
F	7,86356e5	1,58063e3	8,82294	6,75525	
x_1	– 5,0	– 2,48499102	– 1,36359528	– 1,17946520644	
x_2	5,0	1,10300194	1,316852685	6,0209600007e–2	

Выясним причину резкого замедления скорости сходимости ($\alpha_{\min} = 1.0e-4$).

Проверка матрицы Якоби после 3 – й итерации для переменных $X = (-1,179465206444; 0,060209600007)$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{dF_1}{dx_1} & \frac{dF_1}{dx_2} \\ \frac{dF_2}{dx_1} & \frac{dF_2}{dx_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,563196 & 1 \\ 0,05804125 & 0 \end{bmatrix}$$

показывает, что матрица не вырождена, и нарушения сходимости не связаны с этой матрицей.

В системе (2.136) второе уравнение содержит одну переменную x_1 и является тем уравнением (2.135), из которого можно определить координату $\alpha = \alpha_p$ точки

перехода.

$$x_1^4 - x_1^3 - 5x_1^2 - x_1 + 4 - F_{02}(1 - \alpha) = 0, \quad (F_{02} = 1,79983884); \quad (2.137)$$

$$F(x_1(\alpha)) \equiv x_1^4 - x_1^3 - 5x_1^2 - x_1 + 2,2003161158 + 1,79983884\alpha = 0$$

Для $\alpha = 0$ значениям переменных X после 3-й итерации соответствуют следующие корни уравнения 4-й степени (2.137):

$$x_{11} = -1,18000000000043; \quad x_{12} = -1,187305398628167;$$

$$x_{13} = 0,5592566624398117; \quad x_{14} = 2,808048774230093$$

Значения корней показывают, что вещественные корни x_{11} , x_{12} расположены рядом и, следовательно, близко от точки перехода. Чтобы точно определить координату точки перехода, увеличиваем α до полного совпадения этих корней и получаем $\alpha_p = 5,15745098e - 5$.

Для практических расчетов после 3-й итерации вычисляем степенной ряд обратным рекуррентным дифференцированием и определяем радиус сходимости степенного ряда с помощью критериев Даламбера, Коши–Адамара, линейного критерия (радиус $(\alpha_p)_l$), квадратичного критерия (радиус $(\alpha_p)_{kv}$), кубического критерия (радиус $(\alpha_p)_{kb}$). Результаты приведены в табл. 2.101.

Таблица 2.101

k	10	
Rd	5,7763e-5	
Rk	2,2411e-4	
$(\alpha_p)_l$	5,157451e-5	
γ	-0,250009	-0,500000
$(\alpha_p)_{kv}$	5,157430e-5	5,157450e-5
	5,157229e-5 ± ± j 1,8e-8	-1,826285
γ	-0,2499999	-0,5000025
$(\alpha_p)_{kb}$	5,157438e-5	5,157451e-5
	5,157462e-5	7,73566e-5 ±
	-0,913026	± j 0,012167

Критерии подтверждают, что радиус сходимости степенного ряда после 3-й итерации $R \approx 5e - 5$, и для $\alpha > R$ в минимизируемую функцию (2.112) подставляются расходящиеся степенные ряды переменных. Подстановка расходящихся рядов не нарушает процесс рекуррентного метода, но замедляет сходимость метода, т. к. значение $\alpha_{\min}$ одномерного поиска не может существенно отличаться от значения радиуса сходимости R .

3. Зададим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 - 2x_1 + 1 = 0; \\ x_1^4 - x_1^3 - 5x_1^2 - x_1 + x_2^2 - x_2 + 4 = 0 \end{cases}$$

и построим систему (2.107)

$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 - 2x_1 + 1 = F_{01}(1-\alpha) ; \\ x_1^4 - x_1^3 - 5x_1^2 - x_1 + x_2^2 - x_2 + 4 = F_{02}(1-\alpha). \end{cases}$$

Выберем начальную точку поиска $X_0 = (x_{01}, x_{02}) = (1, 0 ; 1, 0)$ и вычислим невязки уравнений $F_0 = (F_{01}, F_{02}) = (-1, 0 ; -2, 0)$, а также значение минимизируемой функции (2.112) $F_0 = 5,0$.

Для точного контроля точек перехода применим исключение переменных и найдем уравнение с одной переменной вида (2.135):

$$F(x_1(\alpha)) \equiv 2x_1^4 + 3x_1^3 + x_1^2(-4 + 2F_{01}(1-\alpha)) + x_1(-7 + 4F_{01}(1-\alpha)) + 6 - 3F_{01} - F_{02} + F_{01}^2 + (3F_{01} - 2F_{01}^2 + F_{02}) \cdot \alpha + F_{01}^2 \cdot \alpha^2 = 0 \quad (2.138)$$

Для начальной точки поиска $X_0 = (1, 0 ; 1, 0)$ получаем уравнение 4-й степени

$$F(x_1(0)) \equiv 2x_1^4 + 3x_1^3 - 6x_1^0 - 11x_1 + 12 = 0 ,$$

одним из решений которого, естественно, должно быть $x_{01} = 1$:

$$x_{11} = 1, 0 ; x_{12} = 1, 320355885 ; x_{13,4} = -1, 91017794 \pm j0, 94628199$$

Имея уравнение (2.138), заданную систему уравнений можно решить сразу без численных методов, подставив в уравнение значение параметра $\alpha = 1$ и решив уравнение 4-й степени

$$F(x_1(1)) \equiv 2x_1^4 + 3x_1^3 - 4x_1^2 - 7x_1 + 6 = 0 .$$

Так, уравнение для $\alpha = 1$ имеет решения:

$$\overline{x_{11}} = 1, 0 ; \overline{x_{12}} = 0, 8719979207805526 ; \overline{x_{13,4}} = -1, 68599896 \pm j0, 77316407$$

Таким образом, заданная система уравнений имеет два вещественных решения:

$$\overline{X_1} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}) = (1, 0 ; 2, 0) ;$$

$$\overline{X_2} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}) = (0, 8719979207805526 ; 1, 504376215406666)$$

Как было сказано, способ исключения не применим для сложных систем, и в данной задаче служит только инструментом для точного определения точек перехода. При изменении параметра α корни уравнения 4-й степени описывают траекторию (годограф), в которой могут быть точки ухода из вещественного пространства в комплексное пространство или наоборот точки возврата (дыры пространства). При изменении параметра в пределах $\alpha = 0 \div 3$ найдены две точки перехода:

$$1) \alpha_{p1} = 1, 1209669 ; x_{p1} = 0, 9056069 ; 2) \alpha_{p2} = 2, 365502 ; x_{p2} = -1, 2557221$$

и для обеих точек перехода $\alpha > 1$. Это означает, что для начальной точки поиска нет препятствий в виде точек перехода, и, по крайней мере, 1-я итерация рекуррентного метода будет успешной.

Находим численные производные функции для $\alpha = 0$ обратным рекуррентным дифференцированием (табл. П.14) и сводим их в табл.2.102.

Таблица 2.102

k	1	2	3	4	5
$(x_1)_k$	1,0	-0,166666	1,38888e-1	7,71605e-3	5,17618e-3
k	6	7	8	9	10
$(x_1)_k$	3,24717e-3	2,19053e-3	1,52470e-3	1,09910e-3	8,12285e-4
k	1	2	3	4	5
$(x_2)_k$	1,0	0,333333	8,33333e-2	2,62346e-2	1,83256e-2
k	6	7	8	9	10
$(x_2)_k$	1,14776e-2	7,88305e-3	5,53872e-3	4,02592e-3	2,99255e-3

Вычислим радиус сходимости ряда с помощью критериев (табл.2.103).

Таблица 2.103

k	10	
Rd	3.4877	
Rk	3.9828	
$(\alpha p)_l$	1.0050	
$(\alpha p)_{kv}$	1.58854	
	3.02773	
$(\alpha p)_{kb}$	1.13371	2.99383
	1.63109	1.62048
	3.02687	

Критерии показывают, что все точки перехода имеют $\alpha > 1$, и подтверждают успешность первой итерации рекуррентного метода. Выберем рекуррентный метод 9-го порядка и результаты решения запишем в табл. 2.104.

Таблица 2.104

№ итерации	0	1	2
$\alpha_{\min}$	—	1	1
F	5,0	3,2198633e-5	3,664258e-28
x_1	1	0,86898824	0,8719979207805407
x_2	1	1,49314471	1,504376215406666

Метод находит второе решение системы.

Изменим начальную точку $X_0 = (x_{01}, x_{02}) = (9, 0; -2, 0)$ и решим систему тем же рекуррентным методом (табл.2.105).

Таблица 2.105

№ итер	0	1	2	3	4	5
$\alpha_{\min}$	—	0,7	1,1	1	1	1
F	29,4732e6	4,29575e6	1,43860	5,40222e-3	4,06512e-10	3,9443e-31
x_1	9,0	6,5925720	1,52256	1,0372883	1,00001243	1
x_2	-2,0	26,77076	3,35922	2,1427388	2,00004813	2

Метод находит первое решение системы уравнений.

Изменим начальную точку поиска $X_0 = (x_{01}, x_{02}) = (0,9056 ; 1,75)$.

Находим численные производные функции для $\alpha = 0$ обратным рекуррентным дифференцированием (табл. П.14) и сводим их в табл.2.106.

Таблица 2.106

k	1	2	3	4	5
$(x_1)_k$	0,9056	-3,44415	9,7888e3	-5,5158e7	3,8851e11
k	6	7	8	9	10
$(x_1)_k$	-3,0648e15	2,5905e19	-2,2938e23	2,10033e27	-1,9725e31
k	1	2	3	4	5
$(x_2)_k$	1,75	-1,32451e1	3,7319e4	-2,1028e8	1,4811e12
k	6	7	8	9	10
$(x_2)_k$	-1,16845e16	9,8760e19	-8,7449e23	8,0074e27	-7,5200e31

Вычислим радиус сходимости ряда с помощью критериев (табл.2.107).

Таблица 2.107

k	10	
Rd	1,0648e-4	
Rk	9,2085e-4	
$(\alpha p)_l$	-8,8734e-5	
$(\alpha p)_{kv}$	-8,8695e-5	
	-8,8772e-5	
$(\alpha p)_{kb}$	-8,8734e-5	-8,8701e-5
	-8,8734e-5 $\pm$	-8,9559e-5 $\pm$
	$\pm j 4,9e-10$	$\pm j 9,4e-7$

В отличие от рассмотренных ранее примеров критерии указывают на точку перехода “сзади” при $\alpha < 0$, близость которой замедляет сходимость рекуррентных методов. В табл.2.108 приведены результаты первого одномерного поиска из начальной точки и второго одномерного поиска из наилучшей точки ($m = 4$) рекуррентными методами различного порядка.

Таблица 2.108

№ итер.	0	1				
m	—	1	2	3	4	9
$\alpha_{\min}$	—	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
F	6,9893e-2	6,9880e-2	6,9878e-2	6,9879e-2	6,9878e-2	6,9879e-2
x_1	0,9056	0,905255	0,905353	0,905298	0,905337	0,905299
x_2	1,75	1,748675	1,749048	1,748838	1,748986	1,748842
№ итер.	2					
m	—	1	2	3	4	9
$\alpha_{\min}$	—	0,001	0,0005	0,00025	0,0003	0,00015
F	6,9878e-2	6,9818e-2	6,9810e-2	6,9866e-2	6,9846e-2	6,98778e-2

Результаты показывают, что рекуррентные методы, включая метод Ньютона ($m = 1$), не могут быстро выйти из области близкой точки перехода “сзади”, приводящей к малой скоростью сходимости.

Для скорости сходимости рекуррентного метода в текущей итерации имеет значение близость точек перехода, независимо от их расположения – “вперед” ($\alpha > 0$) или “сзади” ($\alpha < 0$).

4. Зададим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1^4 - x_1^3 + 2x_1^2 + x_1 + x_2^3 - x_2^2 + x_2 = 0; \\ x_1^3 - 3x_1^2 + x_1 + x_2^4 + 2x_2^3 + x_2^2 - x_2 = 0 \end{cases}$$

и построим систему (2.107)

$$\begin{cases} x_1^4 - x_1^3 + 2x_1^2 + x_1 + x_2^3 - x_2^2 + x_2 = F_{01}(1 - \alpha); \\ x_1^3 - 3x_1^2 + x_1 + x_2^4 + 2x_2^3 + x_2^2 - x_2 = F_{02}(1 - \alpha) \end{cases}$$

Выберем начальную точку поиска $X_0 = (x_{01}, x_{02}) = (2, 0; -2, 0)$ и вычислим невязки уравнений $F_0 = (F_{01}, F_{02}) = (4, 0; -4, 0)$, а также значение минимизируемой функции (2.112) $F_0 = 32$.

Найдем численные производные функции для $\alpha = 0$ обратным рекуррентным дифференцированием (табл. П.14) и оценим успешность первой итерации по результатам расчета радиуса сходимости ряда (табл.2.109).

Таблица 2.109

k	10	
Rd	1.2193	
Rk	1.6522	
(αp)_l	1.0303	
(αp)_{kv}	1.0278	
	1.0472	
(αp)_{kb}	1.0273	1.0453
	1.0301	1.0969
	1.2855	-5.7735

Критерии указывают на удаленность точек перехода и успешность первой итерации. Применим рекуррентный метод 9 – го порядка (табл.2.110).

Таблица 2.110

№ итер.	0	1	2
$\alpha_{\min}$	–	1,045	1
F	32,0	1,396083e–3	1,284876e–21
x_1	2	1,372953	1,361485428988664
x_2	–2	–1,402929	–1,387211326649414

Изменим начальную точку поиска $X_0 = (x_{01}, x_{02}) = (2, 0; 1, 0)$, вычислим производные функции для $\alpha = 0$ обратным рекуррентным дифференцированием (табл. П.14) и оценим успешность первой итерации по результатам расчета радиуса сходимости ряда (табл.2.111).

Таблица 2.111

<i>k</i>	10	
<i>Rd</i>	1,1412	
<i>Rk</i>	1,3449	
$(\alpha p)_l$	1,0390	
$(\alpha p)_{kv}$	1,0233	
	1,0715	
$(\alpha p)_{kb}$	1,0868	1,0379
	2,0948	1,0225
	6,2969	3,0034

Критерии указывают на удаленность точки перехода и успешность первой итерации. Применим рекуррентный метод 9 – го порядка (табл.2.112) .

Таблица 2.112

№ итер.	0	1	2
$\alpha_{\min}$	–	1,065	0,0921
<i>F</i>	362,0	8,879220e–2	1,78753e–2
x_1	2	– 0,06748664	0,0938821
x_2	1	0,3777879	0,009248706

Для проверки причины замедления сходимости метода после 1 –й итерации найдем матрицу Якоби и оценим ее определитель

$$J = \begin{bmatrix} 0,71516 & 0,67259 \\ 1,4186 & 0,82759 \end{bmatrix}; \Delta(J) = -0,36227; |\Delta(J)| > 0 .$$

Замедление сходимости связано с появлением после 1 –й итерации близкой точки перехода, что устанавливают рекуррентные критерии оценки радиуса сходимости ряда (табл.2.113)

Таблица 2.113

<i>k</i>	10	
<i>Rd</i>	0,42094	
<i>Rk</i>	0,13997	
$(\alpha p)_l$	– 1,3405e–3	
$(\alpha p)_{kv}$	– 7,3681e–3	
	0,049296	
$(\alpha p)_{kb}$	0,011939	– 0,011270
	– 0,097741	– 0,33704
	0,034759	

По результатам рекуррентных критериев находим очень близкую точку перехода.

5. Зададим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1^4 - x_1^3 + 2x_1^2 + x_1 + x_2^3 - x_2^2 + x_2 + 2x_3^3 - 3x_3^2 - 4x_3 + 5 = 0; \\ x_1^3 - 3x_1^2 + x_1 + x_2^4 + 2x_2^3 + x_2^2 - x_2 + x_3^3 - 2x_3^2 + x_3 = 0; \\ -x_1^3 + 2x_1^2 - x_1 + 3x_2^3 - x_2^2 - 2x_2 + x_3^4 - 3x_3^3 + 2x_3^2 - x_3 + 3 = 0 \end{cases}$$

и построим систему (2.107)

$$\begin{cases} x_1^4 - x_1^3 + 2x_1^2 + x_1 + x_2^3 - x_2^2 + x_2 + 2x_3^3 - 3x_3^2 - 4x_3 + 5 = F_{01}(1 - \alpha); \\ x_1^3 - 3x_1^2 + x_1 + x_2^4 + 2x_2^3 + x_2^2 - x_2 + x_3^3 - 2x_3^2 + x_3 = F_{02}(1 - \alpha); \\ -x_1^3 + 2x_1^2 - x_1 + 3x_2^3 - x_2^2 - 2x_2 + x_3^4 - 3x_3^3 + 2x_3^2 - x_3 + 3 = F_{03}(1 - \alpha) \end{cases}$$

Выберем начальную точку поиска $X_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) = (2, 0; -2, 0; 2, 0)$ и вычислим невязки уравнений $F_0 = (F_{01}, F_{02}, F_{03}) = (5, 0; 6, 0; -25, 0)$, а также значение минимизируемой функции (2.112) $F_0 = 686$.

Найдем численные производные функции для $\alpha = 0$ обратным рекуррентным дифференцированием (табл. П.14) и применим рекуррентный метод 9-го порядка (табл.2.114).

Таблица 2.114

№ итер.	0	1	2	3	4
$\alpha_{\min}$	—	0,77	1	1	1
F	686	41,781818	6,166915e-2	1,89976e-10	7,88860905e-31
x_1	2,0	1,395754	1,0634046	1,06031580	1,060314748590579
x_2	-2,0	-1,327019	-0,8495821	-0,89070003	-0,8907020699198981
x_3	2,0	2,178763	1,4774113	1,39704753	1,397040133813904

Изменим начальную точку поиска $X_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) = (2, 0; 1, 0; -1, 0)$, вычислим производные функции для $\alpha=0$ обратным рекуррентным дифференцированием (табл. П.14) и оценим успешность первой итерации по результатам расчета радиуса сходимости ряда (табл.2.115).

Таблица 2.115

k	10	
Rd	0,85841	
Rk	1,0655	
$(\alpha p)_l$	0,70017	
$(\alpha p)_{kv}$	0,55012	
	0,66749	
$(\alpha p)_{kb}$	0,46013	0,35127
	0,70785	0,71528
	2,16671	1,04242

Критерии указывают на удаленность точки перехода и успешность 1-й итерации. Выполним 1-ю итерацию рекуррентным методом 9-го порядка (табл.2.116).

Таблица 2.116

$\alpha_{\min}$	—	0,747
F	602,0	48,969
x_1	2	0,2555283916866033
x_2	1	0,3483956819040415
x_3	— 1	—0,2683365477868062

Вычислим производные функции для $\alpha=0$ обратным рекуррентным дифференцированием (табл. П.14) и оценим успешность 2-й итерации по результатам расчета радиуса сходимости ряда (табл.2.117) .

Таблица 2.117

k	10	
Rd	2,1571e-3	
Rk	8,8533e-3	
$(\alpha p)_l$	1,7977e-3	
$(\alpha p)_{kv}$	1,7977e-3	
	1,8092e-3	
$(\alpha p)_{kb}$	1,7977e-3	1,8813e-3
	7,0743e-3	0,10116
	2,7536e-3	— 0,10861

Близость точки перехода, несомненно, замедлит дальнейший процесс поиска.

6. Зададим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1^8 - 3x_1^7 + x_1^6 + x_1^5 + x_1^4 - x_1^3 + 2x_1^2 + x_1 + x_2^6 + x_2^5 + x_2^3 - x_2^2 + x_2 + x_3^7 + \\ + x_3^6 - 2x_3^5 + 2x_3^3 - 3x_3^2 - 4x_3 + 5 = 0; \\ x_1^8 - x_1^7 + x_1^6 - x_1^5 + x_1^3 - 3x_1^2 + x_1 + x_2^8 + x_2^7 + x_2^6 + x_2^5 + x_2^4 + 2x_2^3 + \\ + x_2^2 - x_2 + x_3^6 - x_3^5 + x_3^3 - 2x_3^2 + x_3 = 0; \\ x_1^8 - x_1^7 - x_1^6 + x_1^5 - x_1^3 + 2x_1^2 - x_1 + x_2^7 + 2x_2^6 + x_2^5 + 3x_2^3 - x_2^2 - 2x_2 + \\ + x_3^8 - 3x_3^7 + x_3^6 + x_3^5 + x_3^4 - 3x_3^3 + 2x_3^2 - x_3 + 3 = 0; \end{cases}$$

и построим систему (2.107)

$$\begin{cases} x_1^8 - 3x_1^7 + x_1^6 + x_1^5 + x_1^4 - x_1^3 + 2x_1^2 + x_1 + x_2^6 + x_2^5 + x_2^3 - x_2^2 + x_2 + x_3^7 + \\ + x_3^6 - 2x_3^5 + 2x_3^3 - 3x_3^2 - 4x_3 + 5 = F_{01}(1 - \alpha); \\ x_1^8 - x_1^7 + x_1^6 - x_1^5 + x_1^3 - 3x_1^2 + x_1 + x_2^8 + x_2^7 + x_2^6 + x_2^5 + x_2^4 + 2x_2^3 + \\ + x_2^2 - x_2 + x_3^6 - x_3^5 + x_3^3 - 2x_3^2 + x_3 = F_{02}(1 - \alpha); \\ x_1^8 - x_1^7 - x_1^6 + x_1^5 - x_1^3 + 2x_1^2 - x_1 + x_2^7 + 2x_2^6 + x_2^5 + 3x_2^3 - x_2^2 - 2x_2 + \\ + x_3^8 - 3x_3^7 + x_3^6 + x_3^5 + x_3^4 - 3x_3^3 + 2x_3^2 - x_3 + 3 = F_{03}(1 - \alpha) \end{cases}$$

Выберем начальную точку поиска $X_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) = (1, 2; -1, 2; 1, 2)$ и вычислим невязки уравнений

$$F_0 = (F_{01}, F_{02}, F_{03}) = (-3,55838 ; 0,50836 ; 2,83986),$$

а также значение минимизируемой функции (2.112) $F_0 = 20,9853$.

Найдем численные производные функции для $\alpha = 0$ обратным рекуррентным дифференцированием (табл. П.14) и применим рекуррентный метод 9–го порядка (табл.2.118).

Таблица 2.118

№ итер.	0	1	2	3	4
$\alpha_{\min}$	–	1,01	0,36	1	1
F	20,9853	8,19317e–2	1,85737e–2	1,25666e–4	3,53714e–17
x_1	1,2	1,06182374	1,02891694	0,99868849	1,00000000
x_2	– 1,2	– 1,0393078	– 1,02985033	– 1,00251667	– 1,00000000
x_3	1,2	0,9166937	0,93364809	0,99272592	0,99999999

Изменим начальную точку поиска $X_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) = (2,0 ; -2,0 ; 2,0)$, вычислим производные функции для $\alpha=0$ обратным рекуррентным дифференцированием (табл. П.14) и оценим успешность 1–й итерации по результатам расчета радиуса сходимости ряда (табл.2.119) .

Таблица 2.119

k	10	
Rd	1,0867	
Rk	1,5704	
$(\alpha p)_l$	0,92513	
$(\alpha p)_{kv}$	0,92539	
	0,94603	
$(\alpha p)_{kb}$	0,92526	0,94943
	0,92586	1,31738
	1,25059	2,78913

Критерии указывают на удаленность точки перехода и успешность 1–й итерации. Применим рекуррентный метод 9–го порядка (табл.2.120) .

Таблица 2.120

№ итер.	0	1
$\alpha_{\min}$	–	1,2
F	1,45902e5	15,512833
x_1	2	1,201196599837875
x_2	– 2	0,1645773588213744
x_3	2	1,094497661382265

Вычислим производные функции для $\alpha=0$ обратным рекуррентным дифференцированием (табл. П.14) и оценим успешность 2–й итерации по результатам расчета радиуса сходимости ряда (табл.2.121) .

Таблица 2.121

k	10	
Rd	3.9995e-3	
Rk	1.8716e-2	
$(\alpha p)_l$	3.31996e-3	
$(\alpha p)_{kv}$	8.0633e-3	
	2.8249e-3	
$(\alpha p)_{kb}$	8.1683e-3	3.3299e-3
	2.8713e-3	0.014188
	3.4011e-3	- 0.10861

Учитывая результаты критериев, указывающих на существенное замедление процесса, продолжим расчет методом Ньютона (порядок $m = 1$) (табл.2.122).

Таблица 2.122

№ итер.	2	3
$\alpha_{\min}$	0,006	0,000007
F	15,4111998	15,4110798
x_1	1,2109006385	1,211022314
x_2	0,2552965289	0,257619599
x_3	1,0711504536	1,070466752

После 2-й итерации вычислительный процесс метода Ньютона практически остановился, и причина этого скрыта в результатах 2-й итерации, которые можно оценить с помощью критериев (табл.2.123).

Таблица 2.123

k	10	
Rd	4,8060e-6	
Rk	6,9489e-5	
$(\alpha p)_l$	4,0050e-6	
$(\alpha p)_{kv}$	4,0050e-6	
	4,0055e-6	
	4,0047e-6	
$(\alpha p)_{kb}$	4,0050e-6	3,3299e-3
	4,0705e-6	- 4,7425e-4
	4,8893e-4	- 4,0081e-6

Примеры решения систем алгебраических уравнений рекуррентными методами позволили установить причину замедления или нарушения сходимости численных методов.

В численных методах, не накапливающих предыдущую информацию о минимизируемой функции, причиной замедления или нарушения сходимости является близость бесконечных особых точек, в том числе точек перехода. Каждая итерация численного метода создает свою особенную конфигурацию точек перехода. Для численных рекуррентных

методов низкого порядка значение $\alpha_{\min}$ ограничивается быстрым ростом функции в бесконечных особых точках. Методы высокого порядка, имеющие нелинейный одномерный поиск, способны обходить точки с большим значением функции. Тогда близкие особые точки воздействуют на сходимость методов через значение $\alpha_{\min}$, которое не может существенно превышать радиус сходимости рядов переменных вследствие дальнейшей расходимости этих рядов.

Рассмотрим обратное рекуррентное дифференцирование функций с не разделяющимися переменными.

Теорема 2.21. Задана функция двух переменных, зависящих от параметра α ,

$$F(x_1(\alpha), x_2(\alpha)) = \frac{U(x_1(\alpha))}{V(x_2(\alpha))}, \quad (2.139)$$

и для переменных вычислены нормированные производные

$$x_1(\alpha) = (d1)_1 + (d1)_2 \cdot \alpha + (d1)_3 \cdot \alpha^2 + \dots + (d1)_{l+1} \cdot \alpha^l;$$

$$x_2(\alpha) = (d2)_1 + (d2)_2 \cdot \alpha + (d2)_3 \cdot \alpha^2 + \dots + (d2)_{l+1} \cdot \alpha^l$$

Пусть для функций числителя и знаменателя (2.139) выполнено обратное рекуррентное дифференцирование (формула (2.5), раздел 2.1)

$$U_k = (AU)_k \cdot (d1)_k + (BU)_k; \quad V_k = (AV)_k \cdot (d2)_k + (BV)_k, \quad (2.140)$$

где $(AU)_k, (BU)_k, (AV)_k, (BV)_k$ – компоненты обратных рекуррентных формул (табл. П.14 – П.18).

Тогда в обратном дифференцировании нормированные производные функции (2.139) определяются по формулам

$$F_k = (A1)_k \cdot (d1)_k + (A2)_k \cdot (d2)_k + B_k, \quad (2.141)$$

в которых

$$(A1)_k = \frac{(AU)_k}{V_1}; \quad (A2)_k = -\frac{(AV)_k \cdot U_1}{V_1^2}; \quad (2.142)$$

$$B_k = \frac{1}{V_1^2} \cdot (V_1 \cdot (BU)_k - U_1 \cdot (BV)_k) - B_\Sigma; \quad B_\Sigma = \frac{1}{V_1} \sum_{r=1}^{k-2} F_{r+1} \cdot V_{k-r}$$

В частном случае функции

$$F(x_1(\alpha), x_2(\alpha)) = \frac{x_1(\alpha)}{V(x_2(\alpha))}$$

формулы (2.142) упрощаются.

$$(A1)_k = \frac{1}{V_1}; \quad (A2)_k = -\frac{(AV)_k \cdot (d1)_1}{V_1^2}; \quad B_k = -\frac{(BV)_k \cdot (d1)_1}{V_1^2} - B_\Sigma \quad (2.142a)$$

Для частного случая функции

$$F(x_1(\alpha), x_2(\alpha)) = \frac{U(x_1(\alpha))}{x_2(\alpha)}$$

формулы (2.142) принимают вид:

$$(A1)_k = \frac{(AU)_k}{(d2)_1}; (A2)_k = -\frac{U_1}{(d2)_1^2}; B_k = \frac{(BU)_k}{(d2)_1} - \frac{1}{(d2)_1} \sum_{r=1}^{k-2} F_{r+1} \cdot (d2)_{k-r} \quad (2.1426)$$

Для частного случая функции

$$F(x_1(\alpha), x_2(\alpha)) = \frac{x_1(\alpha)}{x_2(\alpha)}$$

формулы (2.142) имеет простой вид:

$$(A1)_k = \frac{1}{(d2)_1}; (A2)_k = -\frac{(d1)_1}{(d2)_1^2}; B_k = -\frac{1}{(d2)_1} \sum_{r=1}^{k-2} F_{r+1} \cdot (d2)_{k-r}. \quad (2.142в)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для расчета нормированных производных функции (2.139) запишем формулу Коши

$$F_k = \frac{1}{V_1} (U_k - F_1 \cdot V_k - \frac{1}{V_1} \sum_{r=1}^{k-2} F_{r+1} \cdot V_{k-r}) = \frac{U_k}{V_1} - \frac{U_1 \cdot V_k}{V_1^2} - \frac{1}{V_1} \sum_{r=1}^{k-2} F_{r+1} \cdot V_{k-r}.$$

Подставим в нее формулы обратного дифференцирования (2.140)

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{(AU)_k \cdot (d1)_k + (BU)_k}{V_1} - \frac{U_1 \cdot ((AV)_k \cdot (d2)_k + (BV)_k)}{V_1^2} - \frac{1}{V_1} \sum_{r=1}^{k-2} F_{r+1} \cdot V_{k-r} = \\ &= \frac{(AU)_k}{V_1} \cdot (d1)_k + \frac{V_1 \cdot (BU)_k}{V_1^2} - \frac{U_1 \cdot (AV)_k}{V_1^2} \cdot (d2)_k - \frac{U_1 \cdot (BV)_k}{V_1^2} - \frac{1}{V_1} \sum_{r=1}^{k-2} F_{r+1} \cdot V_{k-r} = \\ &= (A1)_k \cdot (d1)_k + (A2)_k \cdot (d2)_k + B_k, \end{aligned}$$

откуда следуют формулы (2.141), (2.142).

В частном случае в функции (2.139) числитель равен $U(x_1(\alpha)) = x_1(\alpha)$, и тогда в формулы (2.140) подставляем $(AU)_k = 1$; $(BU)_k = 0$; $U_k = (d1)_k$, откуда следуют формулы (2.142а). В частном случае знаменатель функции равен $V(x_2(\alpha)) = x_2(\alpha)$, и тогда в формулы (2.140) подставляем $(AV)_k = 1$; $(BV)_k = 0$; $V_k = (d2)_k$, откуда следуют формулы (2.142б).

В частном случае в функции $U(x_1(\alpha)) = x_1(\alpha)$; $V(x_2(\alpha)) = x_2(\alpha)$, и тогда в формулы (2.140) подставляем $(AU)_k = 1$; $(BU)_k = 0$; $U_k = (d1)_k$; $(AV)_k = 1$; $(BV)_k = 0$; $V_k = (d2)_k$, откуда следуют формулы (2.142в), что требовалось доказать.

Теорема 2.22. Задана функция двух переменных, зависящих от параметра α

$$F(x_1(\alpha), x_2(\alpha)) = U(x_1(\alpha)) \cdot V(x_2(\alpha)), \quad (2.143)$$

и для переменных вычислены нормированные производные

$$x_1(\alpha) = (d1)_1 + (d1)_2 \cdot \alpha + (d1)_3 \cdot \alpha^2 + \dots + (d1)_{l+1} \cdot \alpha^l;$$

$$x_2(\alpha) = (d2)_1 + (d2)_2 \cdot \alpha + (d2)_3 \cdot \alpha^2 + \dots + (d2)_{l+1} \cdot \alpha^l$$

Пусть для функций сомножителей (2.139) выполнено обратное рекуррентное дифференцирование (формула (2.5), раздел 2.1)

$$U_k = (AU)_k \cdot (d1)_k + (BU)_k; V_k = (AV)_k \cdot (d2)_k + (BV)_k$$

Тогда в обратном дифференцировании нормированные производные функции (2.143) определяются по формулам

$$F_k = (A1)_k \cdot (d1)_k + (A2)_k \cdot (d2)_k + B_k, \quad (2.144)$$

в которых

$$(A1)_k = V_1 \cdot (AU)_k; (A2)_k = U_1 \cdot (AV)_k; \\ B_k = V_1 \cdot (BU)_k + U_1 \cdot (BV)_k + B_\Sigma; B_\Sigma = \sum_{r=1}^{k-2} U_{r+1} \cdot V_{k-r} \quad (2.145)$$

В частном случае функции $F(x_1(\alpha), x_2(\alpha)) = x_1(\alpha) \cdot V(x_2(\alpha))$ формулы (2.145) упрощаются:

$$(A1)_k = V_1; (A2)_k = (AV)_k \cdot (d1)_1; B_k = (d1)_1 \cdot (BV)_k + B_\Sigma \quad 2.145a)$$

В частном случае функции $F(x_1(\alpha), x_2(\alpha)) = x_1(\alpha) \cdot x_2(\alpha)$ формулы (2.145) принимают простой вид:

$$(A1)_k = (d2)_1; (A2)_k = (d1)_1; B_k = \sum_{r=1}^{k-2} (d1)_{r+1} \cdot (d2)_{k-r}. \quad (2.145b)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для расчета нормированных производных функции (2.139) запишем формулу Лейбница–Коши

$$F_k = V_1 \cdot U_k + U_1 \cdot V_k + \sum_{r=1}^{k-2} U_{r+1} \cdot V_{k-r}.$$

Подставим в нее выражения обратного дифференцирования (2.140)

$$F_k = V_1 \cdot ((AU)_k \cdot (d1)_k + (BU)_k) + U_1 \cdot ((AV)_k \cdot (d2)_k + (BV)_k) + \sum_{r=1}^{k-2} U_{r+1} V_{k-r} = \\ = (V_1 \cdot (AU)_k) \cdot (d1)_k + (U_1 \cdot (AV)_k) \cdot (d2)_k + V_1 \cdot (BU)_k + U_1 \cdot (BV)_k + \\ + \sum_{r=1}^{k-2} U_{r+1} V_{k-r} = (A1)_k \cdot (d1)_k + (A2)_k \cdot (d2)_k + B_k,$$

откуда следуют формулы (2.144), (2.145).

В частном случае в функции (2.143) $U(x_1(\alpha)) = x_1(\alpha)$, и тогда в формулы (2.145) подставляются $(AU)_k = 1; (BU)_k = 0$, откуда следуют формулы (2.145a).

В частном случае функции $U(x_1(\alpha)) = x_1(\alpha); V(x_2(\alpha)) = x_2(\alpha)$, и тогда в формулы (2.145) подставляются $(AU)_k = 1; (BU)_k = 0; (AV)_k = 1; (BV)_k = 0; V_k = (d2)_k$, откуда следуют формулы (2.145b), что требовалось доказать.

Теорема 2.23. Задана функция нескольких переменных, зависящих от параметра α

$$F = U(x_1(\alpha)) \cdot V(x_2(\alpha)) \cdot W(x_3(\alpha)) \cdot P(x_4(\alpha)) \cdots \cdots R(x_{n-2}(\alpha)) \cdot S(x_{n-1}(\alpha)) \cdot T(x_n(\alpha)) \quad (2.146)$$

и для переменных вычислены нормированные производные

$$\begin{aligned} x_1(\alpha) &= (d1)_1 + (d1)_2 \cdot \alpha + (d1)_3 \cdot \alpha^2 + \dots + (d1)_{l+1} \cdot \alpha^l; \\ x_2(\alpha) &= (d2)_1 + (d2)_2 \cdot \alpha + (d2)_3 \cdot \alpha^2 + \dots + (d2)_{l+1} \cdot \alpha^l; \\ &\vdots \\ x_n(\alpha) &= (dn)_1 + (dn)_2 \cdot \alpha + (dn)_3 \cdot \alpha^2 + \dots + (dn)_{l+1} \cdot \alpha^l. \end{aligned}$$

Пусть для сомножителей функции (2.146) выполнено обратное рекуррентное дифференцирование (формула (2.5), раздел 2.1)

$$\begin{aligned} U_k &= (AU)_k \cdot (d1)_k + (BU)_k; \quad V_k = (AV)_k \cdot (d2)_k + (BV)_k; \\ W_k &= (AW)_k \cdot (d3)_k + (BW)_k; \quad P_k = (AP)_k \cdot (d4)_k + (BP)_k; \\ &\vdots \\ R_k &= (AR)_k \cdot (dn-2)_k + (BR)_k; \quad S_k = (AS)_k \cdot (dn-1)_k + (BS)_k; \\ T_k &= (AT)_k \cdot (dn)_k + (BT)_k \end{aligned} \quad (2.147)$$

Тогда нормированные производные функции определяются по формуле

$$F_k = (A1)_k \cdot (d1)_k + (A2)_k \cdot (d2)_k + (A3)_k \cdot (d3)_k + \dots + (An)_k \cdot (dn)_k + B_k, \quad (2.148)$$

где $(A1)_k = V_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot T_1 \cdot (AU)_k$;

$$(A2)_k = U_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot T_1 \cdot (AV)_k; \quad (2.148a)$$

$$(A3)_k = U_1 \cdot V_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot T_1 \cdot (AW)_k; \dots; (An-2)_k = U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdots S_1 \cdot T_1 \cdot (AR)_k;$$

$$(An-1)_k = U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot T_1 \cdot (AS)_k; (An)_k = U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot (AT)_k;$$

$$\begin{aligned} B_k &= V_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot T_1 \cdot (BU)_k + U_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot T_1 \cdot (BV)_k + \\ &+ U_1 \cdot V_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot T_1 \cdot (BW)_k + \dots + U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdots S_1 \cdot T_1 \cdot (BR)_k + \end{aligned} \quad (2.148b)$$

$$+ U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot T_1 \cdot (BS)_k + U_1 \cdot V_1 \cdot W_1 \cdot P_1 \cdots R_1 \cdot S_1 \cdot (BT)_k + (B\Sigma)_k;$$

$(B\Sigma)_k$ – определяется по формуле (2.18б, раздел 2.1).

В частном случае функции

$$F = x_1(\alpha) \cdot x_2(\alpha) \cdot x_3(\alpha) \cdot x_4(\alpha) \cdots x_{n-2}(\alpha) \cdot x_{n-1}(\alpha) \cdot x_n(\alpha) \quad (2.148b)$$

нормированные производные функции определяются по формуле

$$F_k = (A1)_k \cdot (d1)_k + (A2)_k \cdot (d2)_k + (A3)_k \cdot (d3)_k + \dots + (An)_k \cdot (dn)_k + (B\Sigma)_k,$$

где

$$\begin{aligned} (A1)_k &= (d2)_1 \cdot (d3)_1 \cdot (d4)_1 \cdots (dn-2)_1 \cdot (dn-1)_1 \cdot (dn)_1; \\ (A2)_k &= (d1)_1 \cdot (d3)_1 \cdot (d4)_1 \cdots (dn-2)_1 \cdot (dn-1)_1 \cdot (dn)_1; \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(An-1)_k &= (d1)_1 \cdot (d2)_1 \cdot (d3)_1 \cdot (d4)_1 \cdots (dn-2)_1 \cdot (dn)_1; \\ (An)_k &= (d1)_1 \cdot (d2)_1 \cdot (d3)_1 \cdot (d4)_1 \cdots (dn-2)_1 \cdot (dn-1)_1\end{aligned}\quad (2.148г)$$

Доказательство. Для двух сомножителей $H(x_1(a), x_2(a)) = U(x_1) \cdot V(x_2)$, согласно теореме 2.22, записываем

$$H_k = V_1 \cdot U_k + U_1 \cdot V_k + \sum_{r=1}^{k-2} U_{r+1} \cdot V_{k-r}$$

Для функции с тремя сомножителями $\Psi = (U(D) \cdot V(D)) \cdot W(D) = H(D) \cdot W(D)$ производные определяются по формуле

$$\begin{aligned}\Psi_k &= \sum_{i=0}^{k-1} H_{i+1} \cdot W_{k-i} = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r} \right) \cdot W_{k-i} = W_1 \cdot H_k + H_1 \cdot W_k + \sum_{i=1}^{k-2} H_{i+1} \cdot W_{k-i} = \\ &= W_1 \cdot (V_1 \cdot U_k + U_1 \cdot V_k + \sum_{r=1}^{k-2} U_{r+1} \cdot V_{k-r}) + (U_1 \cdot V_1) \cdot W_k + \sum_{i=1}^{k-2} \left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r} \right) \cdot W_{k-i} = \\ &= U_1 \cdot V_1 \cdot W_k + V_1 \cdot W_1 \cdot U_k + U_1 \cdot W_1 \cdot V_k + \sum_{i=1}^{k-2} \left(\left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} V_{i+1-r} \right) \cdot W_{k-i} + W_1 \cdot (U_{i+1}) \cdot V_{k-i} \right)\end{aligned}$$

Подставляем формулы (2.147)

$$\begin{aligned}\Psi_k &= V_1 \cdot W_1 \cdot ((Au)_k \cdot (d1)_k + (Bu)_k) + U_1 \cdot W_1 \cdot ((Av)_k \cdot (d2)_k + (Bv)_k) + \\ &+ U_1 \cdot V_1 \cdot ((Aw)_k \cdot (d3)_k + (Bw)_k) + \sum_{i=1}^{k-2} \left(\left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r} \right) \cdot W_{k-i} + W_1 \cdot (U_{i+1}) \cdot V_{k-i} \right)\end{aligned}$$

и выделяем $(A1)_k$, $(A2)_k$, $(A3)_k$, B_k , $(B\Sigma)_k$

$$(A1)_k = V_1 \cdot W_1 \cdot (Au)_k; \quad (A2)_k = U_1 \cdot W_1 \cdot (Av)_k; \quad (A3)_k = U_1 \cdot V_1 \cdot (Aw)_k;$$

$$B_k = V_1 \cdot W_1 \cdot (Bu)_k + U_1 \cdot W_1 \cdot (Bv)_k + U_1 \cdot V_1 \cdot (Bw)_k + (B\Sigma)_k;$$

$$(B\Sigma)_k = \sum_{i=1}^{k-2} \left(\left(\sum_{r=0}^i U_{r+1} \cdot V_{i+1-r} \right) \cdot W_{k-i} + W_1 \cdot (U_{i+1}) \cdot V_{k-i} \right)$$

Повторяя этапы доказательства теоремы 2.6 (раздел 2.1) с учетом формул (2.147), получаем формулы (2.148а,б).

В частном случае функции (2.148в) формулы (2.147) упрощаются:

$$(Au)_k = 1; \quad (Bu)_k = 0; \quad (Av)_k = 1; \quad (Bv)_k = 0; \quad (Aw)_k = 1; \quad (Bw)_k = 0; \quad \dots$$

$$\dots (AR)_k = 1; \quad (BR)_k = 0; \quad (As)_k = 1; \quad (Bs)_k = 0; \quad (At)_k = 1; \quad (Bt)_k = 0; \quad \dots$$

$$U_k = (d1)_k; \quad V_k = (d2)_k; \quad W_k = (d3)_k; \quad P_k = (d4)_k;$$

$\vdots$

$$R_k = (dn-2)_k; \quad S_k = (dn-1)_k; \quad T_k = (dn)_k$$

Подставляя эти выражения в формулы (2.148а,б), получаем формулы (2.148г) и $B_k = (B\Sigma)_k$, что требовалось доказать.

Рассмотрим решение систем алгебраических полилинейных уравнений, в которых несложно контролировать положение точек перехода и их влияние

на сходимость численных методов.

Согласно теореме Виета [12], коэффициенты полинома и его корни связаны полилинейной системой уравнений. Задав корни полинома определенной степени, можно вычислить коэффициенты полинома и сформировать систему уравнений с известными решениями. Более того, по взаимному расположению начальных значений корней и значений решения нетрудно предугадать возникновение близких точек перехода и медленную сходимость численных методов. В системах полилинейных уравнений эффект близости точек перехода усиливается вырождением матрицы Якоби при равенстве двух переменных. Планирование сходимости в некоторых примерах помогает понять проблемы, возникающие при решении сложных задач.

Пример 2.28.

1. Зададим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 - 2 = 0; \\ x_1 + x_2 - 3 = 0, \end{cases}$$

которая имеет известное решение $\overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}) = (1; 2)$.

Построим систему уравнений (2.107)

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 - 2 = F_{01}(1-\alpha); \\ x_1 + x_2 - 3 = F_{02}(1-\alpha) \end{cases} \quad (2.149)$$

и, применяя исключение переменных, найдем одномерное уравнение (2.135)

$$x_1^2 - x_1(3 + F_{02}(1-\alpha)) + (2 + F_{01}(1-\alpha)) = 0$$

Из него следует, что координаты точек перехода определяются при решении квадратного уравнения

$$F_{02}^2 \cdot \beta^2 + (6F_{02} - 4F_{01}) \cdot \beta + 1 = 0 \quad ; \quad (\beta = 1 - \alpha) \quad (2.150)$$

Выбираем начальной точку поиска $X_0 = (x_{01}, x_{02}) = (2,5; 0,5)$ таким образом, чтобы избежать точек перехода в интервале изменения параметра $\alpha = 0 \div 1$. Действительно, существует траектория беспрепятственного движения координат начальной точки к точке решения:

$$x_{02} = 0,5 \rightarrow \overline{x_1} = 1; \quad x_{01} = 2,5 \rightarrow \overline{x_2} = 2.$$

За пределами интервала при $\alpha > 1$ может быть точка перехода, и для быстрой сходимости численного метода важно, чтобы эта точка перехода лежала как можно дальше от границы интервала $\alpha = 1$. Это нетрудно проверить, решая уравнение (2.150). Вычисляем невязки уравнений системы (2.149) $F_0 = (F_{01}, F_{02}) = (-0,75; 0)$ и получаем решение уравнение (2.150) – $\alpha_p = 4/3$. Используем это точное значение точки перехода для проверки критериев определения радиуса сходимости степенных рядов.

Находим численные производные переменных для $\alpha = 0$ обратным рекуррентным дифференцированием с учетом формулы (2.145) произведения переменных (табл.2.124). Критерии Даламбера и Коши–Адамара дают мало

пригодные оценки, тогда как рекуррентные критерии точно определяют координату точки перехода (табл.2.125).

Таблица 2.124

k	1	2	3	4	5
$(x_1)_k$	2,5	– 0,375	– 7,0313e–2	– 2,6367e–2	– 1,2360e–2
k	6	7	8	9	10
$(x_1)_k$	– 6,4888e–3	– 3,6499e–3	– 2,1509e–3	– 1,3107e–3	– 8,1917e–4
k	1	2	3	4	5
$(x_2)_k$	0,5	0,375	7,0313e–2	2,6367e–2	1,2360e–2
k	6	7	8	9	10
$(x_2)_k$	6,4888e–3	3,6499e–3	2,1509e–3	1,3107e–3	8,1917e–4

Таблица 2.125

k	10
Rd	1,6
Rk	2,0906
$(\alpha p)_l$	1,3333333333
γ	0,25
$(\alpha p)_{kv}$	1,3333333333
γ	0,1666666666
$(\alpha p)_{kb}$	1,33334

Удаленность единственной точки перехода от интервала изменения параметра $\alpha = 0 \div 1$ гарантирует быструю сходимость численных рекуррентных методов (табл.2.126).

Таблица 2.126

№ итер.	0	1	1
m	–	1	9
$\alpha_{\min}$	–	1,33333333	1,0021
F	0,5625	1,5625e–14	8,4709e–14
x_1	2,5	2,00000013	2,00000029
x_2	0,5	0,99999987	0,99999971

Усложним сходимость численных методов, выбирая начальные значения переменных так, чтобы в интервале $\alpha = 0 \div 1$ появились точки перехода.

Для начальной точки $X_0 = (x_{01}, x_{02}) = (0; 0,8)$ не существует вещественных траекторий от начальных значений переменных к значениям переменных в точке решения. Траектория (годограф) должна иметь на интервале $\alpha = 0 \div 1$ точку перехода в комплексное пространство и точку возврата в вещественное пространство. Вычисляем невязки уравнений системы (2.149) $F_0 = (F_{01}, F_{02}) = (-2, 0; -2, 2)$ и получаем решения уравнения (2.150)

1) $\alpha_{p1} = 0,17652$; $x_{p1} = 0,69417$; 2) $\alpha_{p2} = 0,74912$; $x_{p2} = 1,2241$

Находим численные производные переменных для $\alpha = 0$ обратным рекуррентным дифференцированием (табл.2.127).

Таблица 2.127

k	1	2	3	4	5
$(x_1)_k$	0	2,5	0,9375	3,28125	1,2583e1
k	6	7	8	9	10
$(x_1)_k$	5,17309e1	2,2401e2	1,0085e3	4,6770e3	2,2198e4
k	1	2	3	4	5
$(x_2)_k$	0,8	-0,3	-0,9375	-3,28125	-1,2583e1
k	6	7	8	9	10
$(x_2)_k$	-5,1709e1	-2,2401e2	-1,0085e3	-4,6770e3	-2,2198e4

Зная точки перехода, проверим критерии определения радиуса сходимости степенных рядов (табл.2.128).

Таблица 2.128

k	10	
Rd	0,21069	
Rk	0,39104	
$(\alpha p)_l$	0,17809	
γ	0,5	
$(\alpha p)_{kv}$	0,17652	
	0,74911	
γ	0,5	0,17395
$(\alpha p)_{kb}$	0,17652	0,17972
	0,17706	0,19524
	0,74911	0,68454

Близкое положение точки перехода снижает эффективность 1-й итерации. Применим численный рекуррентный метод 9-го порядка (табл.2.129).

Таблица 2.129

№ итер.	0	1	2	3	4	5	6	7
$\alpha_{\min}$	—	0,23	0,155	0,17	0,725	0,15	0,525	1
F	8,84	5,50644	4,04318	2,8803	0,16181	0,12044	3,2632e-2	5,1e-17
x_1	0	0,87713	0,61917	1,0867	1,48246	1,60781	1,85817	2,00000
x_2	0,8	0,42887	0,94991	0,7251	1,19081	1,11448	1,00991	0,99999

Усложним задачу выбором начальной точки $X_0 = (x_{01}, x_{02}) = (0; 0,1)$. Вычисляем невязки уравнений системы (2.149) $F_0 = (F_{01}, F_{02}) = (-2, 0; -2, 9)$ и при решении уравнения (2.150) получаем точки перехода:

1) $\alpha_{p1} = 0,00134977$; $x_{p1} = 0,051957$; 2) $\alpha_{p2} = 0,8809332$; $x_{p2} = 1,32735$

Находим численные производные переменных для $\alpha = 0$ обратным рекуррентным дифференцированием (табл.2.130).

Таблица 2.130

k	1	2	3	4	5
$(x_1)_k$	0	20	3,42e3	1,26882e6	5,87696e8
k	6	7	8	9	10
$(x_1)_k$	3,04822e11	1,69387e14	9,86059e16	5,93580e19	3,66477e22
k	1	2	3	4	5
$(x_2)_k$	0,1	– 17,1	– 3,42e3	– 1,26882e6	– 5,87696e8
k	6	7	8	9	10
$(x_2)_k$	– 3,04822e11	– 1,69387e14	– 9,86059e16	– 5,93580e19	– 3,66477e22

Зная точки перехода, проверим критерии определения радиуса сходимости степенных рядов (табл.2.131).

Таблица 2.131

k	10	
Rd	0,0016197	
Rk	0,0063525	
$(\alpha p)_l$	0,0013498	
γ	0,5	
$(\alpha p)_{kv}$	0,00134977	
	0,8809332	
γ	0,49999	0,24999
$(\alpha p)_{kb}$	0,00134977	0,00134980
	0,0013776	0,058097
	0,8809325	0,44745

Близкое положение точки перехода снижает эффективность 1–й итерации. Применим численный рекуррентный метод 9–го порядка (табл.2.132).

Таблица 2.132

№ итер.	0	1
m	–	9
$\alpha_{\min}$	–	0,0015
F	12,41	12,3739
x_1	0	0,050538115
x_2	0,1	0,050538413
радиус сходимости R	0,0013497	1,45e–6

После 1–ой итерации радиус сходимости рядов уменьшился до уровня, который указывает на возможное нарушение сходимости метода 9–го порядка. Учитывая, что методы низкого порядка могут быть более устойчивы к влиянию близких особых точек, применим комбинированный рекуррентный метод – метод Ньютона и метод 9–го порядка (табл.2.133).

Таблица 2.133

№ итер.	0	1	2	3	4	5
m	—	1	1	1	9	9
$\alpha_{\min}$	—	0,01	0,07	0,45	1	1
F	12,41	12,2996	11,4817	6,1341	5,0626e-5	1,9e-31
x_1	0	0,2	-0,171955	1,527818	1,9928335	2
x_2	0,1	-0,071	0,501925	3,6652e-3	1,0071665	1

2. Зададим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - 6 = 0; \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 - 11 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0 \end{cases}$$

которая имеет известное решение $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (1; 2; 3)$.

Построим систему уравнений (2.107)

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - 6 = F_{01}(1-\alpha); \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 - 11 = F_{02}(1-\alpha); \\ x_1 + x_2 + x_3 - 6 = F_{03}(1-\alpha) \end{cases} \quad (2.151)$$

По теореме Виета найдем одномерное уравнение вида (2.135):

$$x_1^3 - x_1^2(6 + F_{03}(1-\alpha)) + x_1(11 + F_{02}(1-\alpha)) - (6 + F_{01}(1-\alpha)) = 0 \quad (2.152)$$

Выбираем начальной точку поиска $X_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) = (0,5; 1,5; 2,5)$ таким образом, чтобы избежать точек перехода в интервале изменения параметра $\alpha = 0 \div 1$. Действительно, существует траектория беспрепятственного движения координат начальной точки к точке решения:

$$x_{01} = 0,5 \rightarrow \bar{x}_1 = 1; \quad x_{02} = 1,5 \rightarrow \bar{x}_2 = 2; \quad x_{03} = 2,5 \rightarrow \bar{x}_3 = 3.$$

Находим численные производные переменных для $\alpha = 0$ обратным рекуррентным дифференцированием с учетом формул (2.148) и формулы (2.186, раздел 2.1) произведения переменных и применяем численный рекуррентный метод 9-го порядка (табл.2.134).

Таблица 2.134

№ итер.	0	1	1
m	—	9	9
$\alpha_{\min}$	—	1	1
F	46,828125	0,0629337	1,1695e-15
x_1	0,5	0,9219217	0,99999999989
x_2	1,5	2,0923845	2,00000000011
x_3	2,5	2,9856938	3,00000000026

Усложним сходимость численных методов, выбирая начальные значения переменных так, чтобы в интервале $\alpha = 0 \div 1$ появились точки перехода. Для

начальной точки $X_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) = (-1; -2; 1,5)$ не существует вещественных траекторий от начальных значений переменных к значениям переменных в точке решения. Траектория (годограф) должна иметь на интервале $\alpha = 0 \div 1$ точку перехода в комплексное пространство и точку возврата в вещественное пространство. Вычисляем невязки уравнений системы (2.151) $F_0 = (F_{01}, F_{02}, F_{03}) = (-3,0; -13,5; -7,5)$ и получаем вещественные корни уравнения (2.152):

1) $\alpha_{p1} = 0,01907866$; $x_{p1} = -1,4280377$; 2) $\alpha_{p2} = 0,97564178$; $x_{p2} = 2,3897388$

Находим численные производные переменных для $\alpha = 0$ обратным рекуррентным дифференцированием и проверяем критерии определения радиуса рядов (табл.2.135).

Таблица 2.135

k	10	
Rd	0,022886	
Rk	0,051865	
$(\alpha_p)_l$	0,019087	
γ	0,49999	0,23841
$(\alpha_p)_{kv}$	0,0190786642	0,019370
	0,93384	
γ	0,5	0,49423
$(\alpha_p)_{kb}$	0,0190786634	0,019085
	0,019530	0,024172
	0,93594	0,56189

Близкое положение точки перехода снижает эффективность 1-й итерации. Применим численный рекуррентный метод 9-го порядка (табл.2.136).

Таблица 2.136

№ итер.	0	1
m	—	9
$\alpha_{\min}$	—	0,021
F	247,5	238,084
x_1	-1	-1,425266
x_2	-2	-1,416313
x_3	1,5	1,499079

После 1-ой итерации вычисляем точные значения невязок уравнений

$$F_0 = (F_{01}, F_{02}, F_{03}) = (-3,274661093877552; -13,22383151020408; -7,2)$$

и получаем вещественный корень уравнения (2.152) $\alpha_{p1} = 0,00010111$.

Находим численные производные переменных обратным рекуррентным дифференцированием и проверяем критерии определения радиуса рядов (табл.2.137). Радиус сходимости рядов уменьшился до уровня, который указывает на возможное нарушение сходимости численных рекуррентных методов.

Таблица 2.137

<i>k</i>	10	
<i>Rd</i>	0,00012133	
<i>Rk</i>	0,00066053	
<i>(ap)_l</i>	0,00010111	
<i>γ</i>	0,5	0,24999
<i>(ap)_{kv}</i>	0,00010111	0,00010111
	0,929247	
<i>γ</i>	0,5	0,49423
<i>(ap)_{kb}</i>	0,00010111	0,00010111
	0,00010262	0,015869
	0,93588	0,46514

3. Зададим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 - 24 = 0; \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 - 50 = 0; \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 - 35 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 10 = 0 \end{cases},$$

которая имеет известное решение $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4) = (1; 2; 3; 4)$.

Построим систему уравнений (2.107)

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 - 24 = F_{01}(1-\alpha); \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 - 50 = F_{02}(1-\alpha); \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 - 35 = F_{03}(1-\alpha); \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 10 = F_{04}(1-\alpha) \end{cases} \quad (2.153)$$

По теореме Виета найдем одномерное уравнение вида (2.135):

$$x_1^4 - x_1^3(10 + F_{04}(1-\alpha)) + x_1^2(35 + F_{03}(1-\alpha)) - x_1(50 + F_{02}(1-\alpha)) + (24 + F_{01}(1-\alpha)) = 0 \quad (2.154)$$

Начальная точка $X_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04}) = (1,5; 2,5; 3,5; 4,5)$ выбрана относительно точки решения системы $\bar{X}$ таким образом, чтобы существовал беспрепятственный путь между этими точками:

$$x_{01} = 1,5 \rightarrow \bar{x}_1 = 1; \quad x_{02} = 2,5 \rightarrow \bar{x}_2 = 2; \quad x_{03} = 3,5 \rightarrow \bar{x}_3 = 3; \quad x_{04} = 4,5 \rightarrow \bar{x}_4 = 4.$$

Координаты точек $\bar{X}$, X_0 чередуются (возможно чередование X_0 , $\bar{X}$):

$$\bar{x}_1 \rightarrow x_{01} \rightarrow \bar{x}_2 \rightarrow x_{02} \rightarrow \bar{x}_3 \rightarrow x_{03} \rightarrow \bar{x}_4 \rightarrow x_{04}$$

Такое взаимное расположение точек с чередованием гарантирует без проверок уравнения (2.154) или критериев сходимости рядов успешность 1-й итерации численного рекуррентного метода любого порядка. При нарушении чередования возникает точка перехода “сзади”, близость которой может замедлить сходимость.

Находим численные производные переменных для $\alpha = 0$ обратным

рекуррентным дифференцированием и применяем численный рекуррентный метод 9 – го порядка (табл.2.138).

Таблица 2.138

№ итер.	0	1	2	3
$\alpha_{\min}$	–	1	0,01678	1
F	3354,6289	0,87167417	3,27374e–4	0
x_1	1,5	0,996577974198791	0,996632799001664	1
x_2	2,5	2,008998748661832	2,008864306728097	2
x_3	3,5	3,453917919763583	2,996183956172945	3
x_4	4,5	3,540505357375781	3,998318938097278	4

После 1 –й итерации чередование нарушается, вследствие чего возникает близкая точка перехода “сзади”, которая найдена из уравнения (2.154) – $\alpha_{p1} = -0,007518885$; $x_{p1} = 3,49719387$. Ближняя точка перехода “сзади” ограничивает шаг одномерного поиска $\alpha_{\min}$ 2 –й итерации, но не препятствует процессу поиска.

Для другой начальной точки

$$X_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04}) = (0,5 ; -1,055 ; 4,1 ; 4,5)$$

чередование нарушено и не существует вещественных траекторий от начальных значений переменных к значениям переменных в точке решения. Траектория (годограф) должна иметь на интервале $\alpha = 0 \div 1$ несколько точек перехода в комплексное пространство и точек возврата в вещественное пространство. Вычисляем невязки уравнений системы:

$$F_0 = (F_{01}, F_{02}, F_{03}, F_{04}) = (-33,732375 ; -64,77625 ; -21,8505 ; -1,955)$$

и получаем вещественные корни уравнения (2.154):

$$1) \alpha_{p1} = 0,25695805 ; x_{p1} = 4,206577462 ; 2) \alpha_{p2} = 0,2962885 ; x_{p2} = 0,12217783;$$

$$3) \alpha_{p1} = 0,79836305 ; x_{p1} = 3,863976346 ; 4) \alpha_{p2} = 0,945975966 ; x_{p2} = 1,295026668$$

Находим численные производные переменных для $\alpha = 0$ обратным рекуррентным дифференцированием и проверяем критерии определения радиуса рядов (табл.2.139).

Таблица 2.139

k	10	
Rd	0,35335	
Rk	0,57531	
$(\alpha p)_l$	0,300058	
$(\alpha p)_{kv}$	0,29584	0,30949
	1,0197	0,43203
$(\alpha p)_{kb}$	0,29646	0,29867
	0,31346	0,30127
	0,95709	0,91026

Применим численный рекуррентный метод 9 – го порядка (табл.2.140).

Таблица 2.140

№ итер.	0	1
m	—	9
$\alpha_{\min}$	—	0,36
F	5815,102	2599,837
x_1	0,5	$-4,24344325565e-3$
x_2	-1,055	0,43039730472722
x_3	4,1	4,37886047527457
x_4	4,5	3,94378566325386

После 1-ой итерации вычисляем точные значения невязок уравнений $F_0 = (F_{01}, F_{02}, F_{03}, F_{04})$ и получаем вещественный корень уравнения (2.154) $\alpha_{p1} = 0,0492288$. Находим после 1-ой итерации численные производные переменных обратным рекуррентным дифференцированием и проверяем критерии определения радиуса рядов (2.141).

Таблица 2.141

k	10	
Rd	0,059037	
Rk	0,13231	
$(\alpha_p)_l$	0,049272	
γ	0,50035	0,22545
$(\alpha_p)_{kv}$	0,0492276	0,050811
	1,23421	0,047279
γ	0,49992	0,24954
$(\alpha_p)_{kb}$	0,0492289	0,049180
	0,0492627	0,074717

После 1-ой итерации появляется близкая точка перехода, которая может существенно уменьшить скорость сходимости метода 9-го порядка. Поэтому применяем комбинированный метод – метод Ньютона и метод 9-го порядка (табл.2.142).

Таблица 2.142

№ итер.	2	3	4	5
m	1	9	9	9
$\alpha_{\min}$	0,33	0,77	1	1
F	1785,298	121,8455	$4,01915e-2$	$2,335e-27$
x_1	1,058103711	1,386347124	1,985187751	2
x_2	-0,01842753	0,959706974	1,01469732	1
x_3	4,194834558	2,995044505	2,999960036	3
x_4	3,922718526	4,466091476	4,000154926	4

4. Зададим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 - 120 = 0; \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 - 274 = 0; \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 + x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + \\ + x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 + x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 + x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 - 225 = 0; \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_5 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_5 + x_3 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_5 + x_4 \cdot x_5 - 85 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 15 = 0 \end{cases}$$

которая имеет известное решение $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5) = (1; 2; 3; 4; 5)$.

Построим систему уравнений (2.107)

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 - 120 = F_{01}(1-\alpha); \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 + \\ + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 - 274 = F_{02}(1-\alpha); \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 + x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + \\ + x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 + x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 + x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 - 225 = F_{03}(1-\alpha); \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_5 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_5 + x_3 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_5 + \\ + x_4 \cdot x_5 - 85 = F_{04}(1-\alpha); \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 15 = F_{05}(1-\alpha) \end{cases}$$

По теореме Виета найдем одномерное уравнение вида (2.135):

$$x_1^5 - x_1^4(15 + F_{05}(1-\alpha)) + x_1^3(85 + F_{04}(1-\alpha)) - x_1^2(225 + F_{03}(1-\alpha)) + \\ + x_1(274 + F_{02}(1-\alpha)) - (120 + F_{01}(1-\alpha)) = 0 \quad (2.155)$$

Начальная точка $X_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04}, x_{05}) = (1,1; 2,1; 3,1; 4,1; 5,1)$ выбрана относительно точки решения системы $\bar{X}$ таким образом, чтобы существовал беспрепятственный путь между этими точками:

$$x_{01} = 1,1 \rightarrow \bar{x}_1 = 1; \quad x_{02} = 2,1 \rightarrow \bar{x}_2 = 2; \quad x_{03} = 3,1 \rightarrow \bar{x}_3 = 3; \quad x_{04} = 4,1 \rightarrow \bar{x}_4 = 4; \\ x_{05} = 5,1 \rightarrow \bar{x}_5 = 5$$

Кроме того, должно быть выполнено второе условие быстрой сходимости – чередование координат точек $\bar{X}$, X_0 :

$$\bar{x}_1 \rightarrow x_{01} \rightarrow \bar{x}_2 \rightarrow x_{02} \rightarrow \bar{x}_3 \rightarrow x_{03} \rightarrow \bar{x}_4 \rightarrow x_{04} \rightarrow \bar{x}_5 \rightarrow x_{05}$$

Такое расположение гарантирует успешность, по крайней мере, 1-й итерации численного рекуррентного метода любого порядка. В практике расчетов, когда расположение точки решения системы неизвестно, такие рекомендации теряют смысл. Однако практика решения систем алгебраических уравнений показывает общие особенности вычислительного процесса и объясняет причины быстрой или медленной его сходимости. Критерии определения радиуса сходимости рядов являются инструментами предсказания успешности будущих шагов процесса.

Находим численные производные переменных для $\alpha = 0$ обратным рекуррентным дифференцированием (табл.2.143).

Таблица 2.143

k	1	2	3	4	5
$(x_1)_k$	1,1	-8,05838e-2	-1,66655e-2	-2,56441e-3	-2,24259e-4
k	6	7	8	9	10
$(x_1)_k$	1,57758e-5	1,00479e-5	1,68963e-6	8,58162e-9	-6,60662e-9
k	1	2	3	4	5
$(x_2)_k$	2,1	-9,09154e-2	-1,02419e-2	6,62823e-4	5,16682e-5
k	6	7	8	9	10
$(x_2)_k$	2,1868e-5	-1,02219e-5	-4,04493e-6	-2,59757e-7	1,83885e-7
k	1	2	3	4	5
$(x_3)_k$	3,1	-9,87525e-2	-3,69088e-3	2,29089e-3	2,46262e-4
k	6	7	8	9	10
$(x_3)_k$	-8,23707e-5	-1,52032e-5	3,06386e-6	8,75092e-7	-1,05080e-7
k	1	2	3	4	5
$(x_4)_k$	4,1	-1,07415e-1	5,23513e-3	2,66129e-3	-4,25427e-4
k	6	7	8	9	10
$(x_4)_k$	-8,48586e-5	2,88467e-5	1,48917e-6	-1,63775e-6	9,62682e-8
k	1	2	3	4	5
$(x_5)_k$	5,1	-1,22384e-1	2,53527e-2	-3,05061e-3	-5,33975e-5
k	6	7	8	9	10
$(x_5)_k$	9,97854e-5	-1,34695e-5	-2,19773e-6	1,01384e-6	-5,90071e-8

Применяем для сравнения численные рекуррентные методы 1-го и 9-го порядков (табл.2.144).

Таблица 2.144

№ итерации	0	1	0	1
m	—	1	—	9
$\alpha_{\min}$	—	1,055	—	1
F	3885,97	0,8736089	3885,97	6,22536e-13
x_1	1,1	1,0149841	1,1	1,000000016
x_2	2,1	2,0040847	2,1	1,999999966
x_3	3,1	2,9958161	3,1	3,000000041
x_4	4,1	3,9866771	4,1	3,999999942
x_5	5,1	4,9709372	5,1	5,000000033

Изменим начальную точку

$$X_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04}, x_{05}) = (1,5; 2,5; 3,5; 4,5; 5,5),$$

сохраняя свойство чередования, гарантирующее успешность 1-й итерации.

Находим численные производные переменных для $\alpha = 0$ обратным рекуррентным дифференцированием и применяем метод Ньютона (табл.2.145).

Таблица 2.145

№ итер.	0	1	2	3
m	—	1	1	1
$\alpha_{\min}$	—	1,25	0,018	0,0002
F	1,53849e5	372,236	321,80934	321,8015
x_1	1,5	1,32910156	1,312172139129237	1,311973
x_2	2,5	2,20703125	2,181391150453395	2,181107
x_3	3,5	3,06054688	3,032104550169033	3,031828
x_4	4,5	3,81640625	3,808112626589916	3,808062
x_5	5,5	3,96191406	3,996219533658493	3,996532

Как предполагалось, 1–я итерация метода прошла успешно, но ее результат существенно изменяет расположение текущих точек в худшую сторону. Действительно, теперь три переменных находятся в интервале значений $(3 \div 4)$, причем две из них расположены близко, что неизбежно приводит к появлению близких точек перехода. После 2–ой итерации вычислительная ситуация существенно не меняется, что подтверждают рекуррентные критерии определения радиуса сходимости рядов (табл.2.146).

Таблица 2.146

k	10
Rd	0,98804
Rk	0,60153
$(\alpha p)_l$	– 0,036626
$(\alpha p)_{kv}$	– 0,12763
	0,13448
$(\alpha p)_{kb}$	0,064102
	– 0,10432
	– 0,084329

Каждая итерация метода изменяет расположение текущей начальной точки относительно точки (или точек) решения, что может ускорить процесс или замедлить его даже до полной остановки.

В практических задачах критерии определения радиуса сходимости степенных рядов дают численную оценку качества процесса и перспективности его продолжения. Точки перехода “сзади”, как показывают расчеты, замедляют, но не нарушают процесс. С каждым малым шагом процесс удаляется от этих точек, и если не появляются новые точки перехода, скорость процесса возрастает. Точка перехода “впереди” более существенно влияет на численные методы высокого порядка, чем на численные методы низкого порядка. Используя предсказание критериев можно построить процесс как комбинацию численных рекуррентных методов различного порядка.

Теорема 2.24. Задана составная функция переменных, зависящих от α

$$F(H(x_1(\alpha), x_2(\alpha), \dots, x_n(\alpha))) , \quad (2.156)$$

и для переменных вычислены нормированные производные

$$\begin{aligned} x_1(\alpha) &= (d1)_1 + (d1)_2 \cdot \alpha + (d1)_3 \cdot \alpha^2 + \dots + (d1)_{l+1} \cdot \alpha^l; \\ x_2(\alpha) &= (d2)_1 + (d2)_2 \cdot \alpha + (d2)_3 \cdot \alpha^2 + \dots + (d2)_{l+1} \cdot \alpha^l; \\ &\vdots \\ x_n(\alpha) &= (dn)_1 + (dn)_2 \cdot \alpha + (dn)_3 \cdot \alpha^2 + \dots + (dn)_{l+1} \cdot \alpha^l \end{aligned}$$

Пусть для внутренней функции $H(x_1(\alpha), x_2(\alpha), \dots, x_n(\alpha))$ выполнено обратное рекуррентное дифференцирование и его результат имеет вид (2.148)

$$H_k = (A1_H)_k \cdot (d1)_k + (A2_H)_k \cdot (d2)_k + (A3_H)_k \cdot (d3)_k + \dots + (An_H)_k \cdot (dn)_k + (B_H)_k \quad (2.157)$$

Тогда нормированные производные функции (2.156) определяются в обратном дифференцировании по формуле

$$F_k = (A1_F)_k \cdot (d1)_k + (A2_F)_k \cdot (d2)_k + (A3_F)_k \cdot (d3)_k + \dots + (An_F)_k \cdot (dn)_k + B_k, \quad (2.158)$$

где

$$(A1_F)_k = (A_F)_k \cdot (A1_H)_k; (A2_F)_k = (A_F)_k \cdot (A2_H)_k; (A3_F)_k = (A_F)_k \cdot (A3_H)_k; \dots$$

$$B_k = (A_F)_k \cdot (B_H)_k + (B_F)_k; \quad (2.159)$$

$(A_F)_k, (B_F)_k$ – компоненты обратных рекуррентных формул функции F (табл. П.14 – П.18).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для внутренней функции одной переменной $H(x(\alpha))$ нормированные производные в обратном рекуррентном дифференцировании определяются по формуле (2.5, раздел 2.1)

$$H_k = (A_H)_k \cdot d_k + (B_H)_k, \quad (2.160)$$

в которой $(A_H)_k, (B_H)_k$ – компоненты обратных рекуррентных формул, и выражение (2.160) является частным случаем формулы (2.157).

Для функции нескольких переменных вида

$$H(x_1(\alpha), x_2(\alpha), \dots, x_n(\alpha)) = H(A1 \cdot x_1(\alpha) + A2 \cdot x_2(\alpha) + \dots + An \cdot x_n(\alpha))$$

введем новую переменную $x(\alpha) = A1 \cdot x_1(\alpha) + A2 \cdot x_2(\alpha) + \dots + An \cdot x_n(\alpha)$ и найдем ее производную $d_k = A1 \cdot (d1)_k + A2 \cdot (d2)_k + \dots + An \cdot (dn)_k$. Подставим это

выражение в формулу (2.160) и найдем производные внутренней функции

$$\begin{aligned} H_k &= (A_H)_k \cdot (A1 \cdot (d1)_k + A2 \cdot (d2)_k + \dots + An \cdot (dn)_k) + (B_H)_k = \\ &= ((A_H)_k \cdot A1) \cdot (d1)_k + ((A_H)_k \cdot A2) \cdot (d2)_k + \dots + ((A_H)_k \cdot An) \cdot (dn)_k + (B_H)_k = \\ &= (A1_H)_k \cdot (d1)_k + (A2_H)_k \cdot (d2)_k + \dots + (An_H)_k \cdot (dn)_k + (B_H)_k. \end{aligned}$$

Полученная формула совпадает с формулой (2.157).

Для внутренней функции вида $H(x_1(\alpha), x_2(\alpha)) = U(x_1(\alpha)) / V(x_2(\alpha))$, согласно теореме 2.21, производные функции определяются по формуле

$$H_k = (A1_H)_k \cdot (d1)_k + (A2_H)_k \cdot (d2)_k + (B_H)_k ,$$

которая является частным случаем формулы (2.157).

Наконец, для внутренней функции как произведения сомножителей

$$H = U(x_1(\alpha)) \cdot V(x_2(\alpha)) \cdot W(x_3(\alpha)) \cdots R(x_{n-2}(\alpha)) \cdot S(x_{n-1}(\alpha)) \cdot T(x_n(\alpha))$$

формула производной (1.148) повторяет формулу (2.157) в других обозначениях.

Рассмотрены все возможные варианты внутренней функции, и во всех случаях формулы расчета производных совпадают с формулой (2.157), что доказывает обобщающий вид формулы (2.157).

Найдем в обратном дифференцировании нормированные производные функции $F(H(\alpha))$, применяя формулу (2.5, раздел 2.1) с другими обозначениями

$$F_k = (A_F)_k \cdot H_k + (B_F)_k ,$$

где $(A_F)_k$, $(B_F)_k$ – компоненты обратных рекуррентных формул функции F .

Подставляя выражение (2.157), получаем

$$F_k = (A_F)_k ((A1_H)_k (d1)_k + (A2_H)_k (d2)_k + \dots + (A_n)_k (dn)_k + (B_H)_k) + (B_F)_k = \\ = (A1_F)_k \cdot (d1)_k + (A2_F)_k \cdot (d2)_k + \dots + (A_n)_k \cdot (dn)_k + (A_F)_k \cdot (B_H)_k + (B_F)_k$$

что требовалось доказать.

Пример 2.29

1. Зададим систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0; \\ \frac{1}{\exp(1)} \exp(x_1) + x_2^3 - 2 = 0, \end{cases}$$

которая имеет известное решение $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (1; 1)$.

Построим систему уравнений (2.107)

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2 = F_{01}(1 - \alpha); \\ \frac{1}{\exp(1)} \exp(x_1) + x_2^3 - 2 = F_{02}(1 - \alpha) \end{cases}$$

Выбираем начальной точку поиска $X_0 = (x_{01}, x_{02}) = (2, 0; 1, 5)$.

Находим численные производные переменных для $\alpha = 0$ обратным рекуррентным дифференцированием (табл. П.14) и применяем численный рекуррентный метод 9-го порядка (табл.2.147).

Таблица 2.147

№ итер.	0	1	2	3	4
m	—	9	9	9	9
$\alpha_{\min}$	—	0,84	0,96	1	1
F	34,81746	1,201948	2,744463e-3	3,072039e-6	4,35616e-13
x_1	2,0	1,29339214	1,04535841	1,00087655	1,00000033
x_2	1,5	1,09665712	0,97069624	0,99912268	0,99999967

2. Зададим систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0; \\ \frac{1}{\exp(1)} \exp(x_1 \cdot x_2) + x_2^3 - 2 = 0 \end{cases}$$

которая имеет известное решение $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (1; 1)$.

Построим систему уравнений (2.107)

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2 = F_{01}(1 - \alpha); \\ \frac{1}{\exp(1)} \exp(x_1 \cdot x_2) + x_2^3 - 2 = F_{02}(1 - \alpha) \end{cases}$$

Выбираем начальную точку поиска $X_0 = (x_{01}, x_{02}) = (2, 0; 1, 5)$.

Находим численные производные переменных для $\alpha = 0$ обратным рекуррентным дифференцированием (табл. П.14) с учетом формул (2.145а), (2.159) и сводим производные в табл.2.148).

Таблица 2.148

k	1	2	3	4	5
$(x_1)_k$	2,0	-1,2334509	0,36264473	3,2622026	8,0007931
k	6	7	8	9	10
$(x_1)_k$	6,4521504	-2,72979e1	-1,05943e2	-2,77475e1	1,03724e3
k	1	2	3	4	5
$(x_2)_k$	1,5	0,2279346	-1,0079781	-3,8982318	-7,775362
k	6	7	8	9	10
$(x_2)_k$	-4,250530	2,65768e1	7,274902e1	-1,032845e2	-1,243625e3

Применим численный рекуррентный метод 9-го порядка, перед каждой итерацией которого оценивая успешность процесса с помощью квадратичного рекуррентного критерия (табл.2.149)

Таблица 2.149

№ итерации	0	1	2	3	4
m	—	9	9	9	9
$\alpha_{\min}$	—	0,4	0,93	1	1
F	94,8712	7,047083	0,1482578	6,841876e-7	3,64848e-28
x_1	2,0	2,01264674	1,20294297	1,00027607	1,0000000000
x_2	1,5	0,77218878	0,85684422	0,99972416	0,9999999999
$(ap)_{kv}$	0,04255 ± ± j 0,7625 0,07626 ± ± j 0,1803	0,2238 ± ± j 0,2823 0,3752 ± ± j 0,8838	0,1984 ± ± j 1,1779		

Сходимость метода на первых итерациях ограничивается комплексными полюсами, которые могут замедлить процесс, не нарушая его.

3. Зададим систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} x_1(c_1 + c_2)/(c_1 \cdot c_2) - 12/c_1 + 2 \cdot 10^{-7} \exp(40x_1) + 5 \cdot 10^{-6} \cdot \exp(40(x_1 - x_2)) = 0; \\ (x_2 - 12)/c_3 - 10^{-5} \cdot \exp(40(x_1 - x_2)) + 9,8 \cdot 10^{-6} \cdot \exp(40x_1) = 0 \end{cases}$$

(постоянные коэффициенты : $c_1 = 5,7563$; $c_2 = 0,15$; $c_3 = 3,1348$).

Система имеет единственное решение

$$\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0,30001212951978 ; 6,99976031955637) .$$

Выбираем начальную точку поиска $X_0 = (x_{01}, x_{02}) = (0,3 ; 0,02)$. Вычислим невязки уравнений $F_0 = (F_{01}, F_{02}) = (0,36564 ; -2,9579)$ и построим систему уравнений (2.107).

Находим численные производные переменных для $\alpha = 0$ обратным рекуррентным дифференцированием (табл. П.14) с учетом формул (2.145а) , (2.159) и сводим производные в табл.2.150.

Таблица 2.150

k	1	2	3	4	5
$(x_1)_k$	0,3	2,75332e-2	-1,26282e-2	6,77491e-3	-3,86120e-3
k	6	7	8	9	10
$(x_1)_k$	1,93616e-3	-1,08249e-3	2,38804e-4	-2,44162e-4	-3,30550e-4
k	1	2	3	4	5
$(x_2)_k$	0,02	6,78604e-2	1,42171e-2	3,56187e-2	2,74595e-2
k	6	7	8	9	10
$(x_2)_k$	4,00127e-2	4,62024e-2	6,09684e-2	7,93098e-2	1,05428e-1

Результаты расчета численными рекуррентными методами различного порядка приведены в табл.2.151 , 2.152.

Таблица 2.151

m	№ итер.	$\alpha_{\min}$	$10^{-6} \cdot F$	m	№ итер.	$\alpha_{\min}$	$10^{-6} \cdot F$
1	—	—	8,8830	2	—	—	8,8830
	1	0,83091	9,071e-2		1	1,1428	8,602e-1
	2	0,39837	5,717e-2		2	1,3808	9,206e-3
	3	0,17934	4,873e-2		3	0,9577	9,844e-5
	4	0,07279	4,592e-2		4	1,0001	5,816e-12
	5	0,03108	4,486e-2		5	1	1,217e-30
	6	1,01241	1,042e-2		—	—	—
	7	0,35015	6,278e-3		—	—	—
	8	0,49704	3,219e-3		—	—	—
	9	1,03762	4,923e-4		—	—	—
	10	1,0006	2,149e-11		—	—	—
	11	1,0001	5,224e-19		—	—	—
	12	1	1,217e-30		—	—	—

Таблица 2.152

m	№ итер.	$\alpha_{\min}$	$10^{-6} \cdot F$	m	№ итер.	$\alpha_{\min}$	$10^{-6} \cdot F$
8	—	—	8,8830	9	—	—	8,8830
	1	1,1746	3,083e-2		1	1,2210	2,495e-2
	2	0,5420	6,885e-3		2	1,0002	6,143e-10
	3	1,0001	1,658e-10		3	1	4,645e-31
	4	1	4,645e-31		—	—	—

4. Задана система нелинейных уравнений с 7 неизвестными

$$\begin{cases} (x_1 - 12) / c_1 + 0,02 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_1 - x_4)) + 0,5 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_1 - x_2)) = 0; \\ x_2(1 / c_2 + 1 / c_5) - x_5 / c_2 - 12 / c_5 - c_0 \cdot \exp(40(x_1 - x_2)) + 0,98 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_1 - x_4)) = 0; \\ (x_3 - 12) / c_6 - c_0 \cdot \exp(40(x_5 - x_3)) + 0,98 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_5 - x_4)) = 0; \\ c_0 \cdot \exp(40(x_1 - x_4)) - 0,5 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_1 - x_2)) + c_0 \cdot \exp(40(x_5 - x_4)) - \\ - 0,5 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_5 - x_3)) + c_0 \cdot \exp(40(x_6 - x_4)) - 0,98 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_6 - x_7)) = 0; \\ -x_2 \frac{1}{c_2} + x_5 \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right) - x_6 \frac{1}{c_3} + 0,02 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_6 - x_4)) + 0,5 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_5 - x_3)) = 0; \\ -x_5 / c_3 + x_6(1 / c_3 + 1 / c_4) + 0,02 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_6 - x_7)) + 0,5 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_6 - x_4)) = 0; \\ x_7 / c_7 - c_0 \cdot \exp(40(x_6 - x_7)) + 0,5 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_6 - x_4)) = 0 \end{cases}$$

(постоянные коэффициенты: $c_0 = 1,0e-8$; $c_1 = 2,2e5$; $c_2 = 1,0e3$; $c_3 = 1,35e3$;
 $c_4 = 285$; $c_5 = 1,38e3$; $c_6 = 4,22e3$; $c_7 = 100$)

Система имеет единственное решение

$$\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7) = (3,83256167286864 ; 6,20533853064194 ; \\ 6,17099540126905 ; 3,52927126546639 ; 3,82567474415263 ; \\ 0,651177299929003 ; 0,333260284919817).$$

Выбираем начальную точку поиска

$$X_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04}, x_{05}, x_{06}, x_{07}) = (5,0 ; 4,7 ; 4,7 ; 4,7 ; 5,0 ; 0,53 ; 0,5).$$

Вычислим невязки уравнений

$$F_0 = (F_{01}, F_{02}, F_{03}, F_{04}, F_{05}, F_{06}, F_{07}) = (8,145e-4 ; -5,6224e-3 ; \\ -1,7624e-3 ; 1,6275e-3 ; 4,4574e-3 ; -1,4515e-3 ; 4,99997e-3)$$

и построим систему уравнений (2.107).

Находим численные производные переменных для $\alpha = 0$ обратным рекуррентным дифференцированием (табл. П.14) с учетом формул (2.145а), (2.159). Результаты расчета численными рекуррентными методами различного порядка приведены в табл.2.153, 2.154.

Таблица 2.153

m	№ итер.	$\alpha_{\min}$	$10^{-6} \cdot F$	m	№ итер.	$\alpha_{\min}$	$10^{-6} \cdot F$
1	—	—	85,04488	2	—	—	85,04488
	5	0,5003	2,7582e-3		1	0,22741	40,7539
	15	0,00311	7,2008e-4		5	1,16602	2,1670e-3
	25	0,00358	6,9674e-4		7	0,01844	6,4236e-4
	35	0,00450	6,6981e-4		10	0,01394	6,0693e-4
	45	0,00539	6,3660e-4		13	0,02139	5,6184e-4
	55	0,00755	5,9574e-4		15	0,02865	5,2188e-4
	65	0,00961	5,4587e-4		20	0,07915	3,7406e-4
	75	0,01367	4,8495e-4		22	0,12052	2,9224e-4
	85	0,01978	4,1031e-4		25	0,29342	1,4563e-4
	95	0,03168	3,1675e-4		26	0,47738	9,2921e-5
	110	0,17345	1,0157e-4		27	1,0244	4,1874e-5
	116	1	5,9701e-29		29	1	1,8224e-27

Таблица 2.154

m	№ итер.	$\alpha_{\min}$	$10^{-6} \cdot F$	m	№ итер.	$\alpha_{\min}$	$10^{-6} \cdot F$
4	—	—	85,04488	8	—	—	85,04488
	1	0,23746	39,29737		1	0,21053	56,7264
	2	0,05135	25,050e-4		2	0,00811	55,9170
	3	1,0308	2,0762e-2		3	0,02099	45,2818
	4	0,82662	2,5831e-3		4	0,17339	14,2133
	5	0,43260	6,6787e-4		5	1,02192	8,90148e-3
	6	0,02039	6,4331e-4		6	0,90789	9,97650e-4
	7	0,03659	5,9687e-4		7	0,02578	9,50193e-4
	8	0,03850	5,5813e-4		8	0,03672	8,87352e-4
	9	0,05285	5,0991e-4		9	0,07574	7,52705e-4
	10	0,07534	4,4823e-4		10	0,11829	5,97293e-4
	11	0,11023	3,7032e-4		11	0,21215	3,88836e-4
	12	0,16719	2,7546e-4		12	0,42290	1,46845e-4
	13	0,26687	1,6747e-4		13	0,99589	4,49382e-7
	14	0,47738	6,1196e-5		14	1	4,989496e-28
	15	1,0186	6,3368e-7		—	—	—
	16	1	1,3954e-25		—	—	—

Как видно из табл.2.154, скорость процесса метода 8-го порядка, регистрируемая по величине шага одномерного поиска $\alpha_{\min}$, существенно изменяется по итерациям. Уточним причины таких изменений по критериям определения радиуса степенных рядов (табл.2.155).

Таблица 2.155

№ итер.	1	2
k	10	10
Rd	0,19756	0,002871
Rk	0,33519	0,023803
$(\alpha p)_l$	-0,35714	-2,5808e-4
$(\alpha p)_{kv}$	0,29004	-1,1865e-3
	-0,24469 ± ± j 0,15573	4,6774e-3
$(\alpha p)_{kb}$	-0,18807 ± ± j 0,40862	-4,5905e-4
		-1,2081e-3
	-0,25279 ± ± j 0,29793	0,033779 ± ± j 0,28571

Как показывают критерии (табл.2.155), изменения скорости сходимости связаны с появлением близких бесконечных особых точек – вещественных и комплексных. Чем выше порядок метода, тем лучше результаты критериев согласуются с практикой расчетов. Поведение метода 8-го порядка в 1-й и 2-ой итерациях соответствует результатам (табл.2.155). Все рекуррентные методы с нелинейным одномерным поиском $m = 2,4,8$ имеют в 1-й итерации значение $\alpha_{\min}$, соответствующее полученному в табл.2.155. Метод Ньютона ($m = 1$), имеющий в отличие от других рекуррентных методов линейный одномерный поиск, обычно показывает шаг $\alpha_{\min}$, который превышает в 2–3 раза оценки критериев. Но для малых радиусов сходимости, подобно 2-й итерации (табл.2.155), превышение в 2–3 раза не меняет

вычислительной ситуации. С 15-й итерации метод Ньютона попадает в область близкой особой точки, из которой выходит к 65-й итерации.

5. Задана система нелинейных уравнений с 12 неизвестными

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(1/c_1 + 1/c_2) - 15/c_1 + 0,02 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_1 - x_4)) + 0,5 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_1 - x_2)) = 0; \\ x_2(1/c_3 + 1/c_{11}) - x_{12}/c_{11} - 15/c_3 - c_0 \cdot \exp(40(x_1 - x_2)) + 0,98 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_1 - x_4)) = 0; \\ (x_3 - 15)/c_4 - c_0 \cdot \exp(40(x_5 - x_3)) + 0,98 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_5 - x_4)) + \\ + 0,02 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_3 - x_9)) + 0,5 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_3 - x_{10})) = 0; \\ c_0 \cdot \exp(40(x_1 - x_4)) - 0,5 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_1 - x_2)) + c_0 \cdot \exp(40(x_5 - x_4)) - \\ - 0,5 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_5 - x_3)) + c_0 \cdot \exp(40(x_6 - x_4)) - 0,98 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_6 - x_7)) = 0; \\ x_5(1/c_5 + 1/c_8) - x_6/c_5 - x_9/c_8 + 0,02 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_5 - x_4)) + 0,5 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_5 - x_3)) = 0; \\ (x_6 - x_5)/c_5 + 0,02 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_6 - x_7)) + 0,5 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_6 - x_4)) + c_0 \cdot \exp(40(x_6 - x_8)) = 0; \\ x_7/c_6 - c_0 \cdot \exp(40(x_6 - x_7)) + 0,5 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_6 - x_4)) = 0; \\ x_8/c_7 - c_0 \cdot \exp(40(x_6 - x_8)) = 0; \\ (x_9 - x_5)/c_8 - c_0 \cdot \exp(40(x_3 - x_9)) + 0,5 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_3 - x_{10})) - \\ - c_0 \cdot \exp(40(x_{12} - x_9)) + 0,5 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_{12} - x_{11})) = 0; \\ (x_{10} - 15)/c_9 - c_0 \cdot \exp(40(x_3 - x_{10})) + 0,98 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_3 - x_9)) = 0; \\ (x_{11} - 15)/c_{10} - c_0 \cdot \exp(40(x_{12} - x_{11})) + 0,98 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_{12} - x_9)) = 0; \\ (x_{12} - x_2)/c_{11} + 0,02 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_{12} - x_9)) + 0,5 \cdot c_0 \cdot \exp(40(x_{12} - x_{11})) = 0 \end{array} \right.$$

(постоянные коэффициенты: $c_0 = 1,0e-8$; $c_1 = 3,97e3$; $c_2 = 3,46e3$; $c_3 = 3,43e3$; $c_4 = 4,12e3$;

$c_5 = 1,0e3$; $c_6 = 1,0e3$; $c_7 = 1,0e3$; $c_8 = 343$; $c_9 = 100$; $c_{10} = 2,45e3$; $c_{11} = 34,0e3$)

Система имеет единственное решение

$$\overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}, \overline{x_6}, \overline{x_7}, \overline{x_8}, \overline{x_9}, \overline{x_{10}}, \overline{x_{11}}, \overline{x_{12}}) = (6,925954240262883 ; \\ 9,500654824126777 ; 8,382985868148989 ; 6,626342763816600 ; 6,925973437721604 ; \\ 3,589001195650312 ; 3,271546450970271 ; 3,271546413051886 ; 8,081554383484976 ; \\ 14,83110089603560 ; 11,04893643678422 ; 8,381830004057331).$$

Выбираем начальную точку поиска

$$X_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04}, x_{05}, x_{06}, x_{07}, x_{08}, x_{09}, x_{010}, x_{011}, x_{012}) = \\ = (14,5 ; 14,5 ; \dots ; 14,5 ; 14,5)$$

Вычислим невязки уравнений и построим систему уравнений (2.107)..

Находим численные производные переменных для $\alpha = 0$ обратным рекуррентным дифференцированием (табл. П.14) с учетом формул (2.145а), (2.159). Результаты расчета численными рекуррентными методами различного порядка приведены в табл.2.156.

Таблица 2.156

m	1	2	3	4	5
к-во итераций	62	33	17	33	13
m	6	7	9	10	12
к-во итераций	59	47	13	18	14

Изменяем начальные точки поиска следующим образом:

$$X_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04}, x_{05}, x_{06}, x_{07}, x_{08}, x_{09}, x_{010}, x_{011}, x_{012}) = \\ = (x_0; x_0; x_0; x_0; x_0; x_0; x_0; x_0; x_0; x_0; x_0; x_0)$$

и для различных значений x_0 выполняем расчет двумя рекуррентными методами 1-го и 5-го порядков. Количество сделанных итераций для различных начальных точек поиска приведены в табл.2.157.

Таблица 2.157

x_0	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5
$m = 1$	27	30	26	25	31	25	24	29	26	28	25
$m = 5$	18	25	28	34	15	16	16	25	13	21	17
x_0	11,5	12,5	12,55	13,5	14,0	14,5	14,55	15,0	15,5	16,5	17,5
$m = 1$	24	47	58	24	32	62	49	25	32	27	34
$m = 5$	18	15	21	16	17	13	14	19	27	28	14

В отличие от предыдущей, эта задача с одинаковыми начальными значениями переменных оказалась проще, и, несмотря на большое количество экспериментов, нарушения сходимости не зафиксированы. В методе Ньютона на все эксперименты затрачено 710 итераций, а в рекуррентном методе 5-го порядка – 430 итераций. Трудоемкость расчета заданной системы уравнений и обращения матрицы Якоби значительно превосходит трудоемкость операций со степенными рядами, и поэтому трудоемкость обоих методов можно считать одинаковой. Эксперименты показали, что рекуррентный метод высокого порядка так же надежен, как метод Ньютона, но имеет более высокую скорость процесса решения.

Процедуры линейного и нелинейного одномерного поиска идентичны и выполняются стандартными методами [46 – 52]. Ввиду того, что рекуррентные методы не используют предыдущую информацию, трудоемкую процедуру одномерного поиска можно заменить простым регулированием величины шага итерации [41, 47]. Теоретически, чем выше порядок метода, тем ближе величина шага к единице. На практике величина шага одномерного поиска определяется близостью бесконечных особых точек, расположение которых меняется с каждой итерацией и зависит от порядка примененного рекуррентного метода. Предсказать появление особых точек до выполнения итерации практически невозможно, но после сделанной итерации можно определить положение особых точек и достаточно точно предсказать успешность следующей итерации.

Обратное рекуррентное дифференцирование положено в основу нового семейства численных рекуррентных методов для решения систем нелинейных уравнений. Несмотря на усложнение алгоритма, методы высокого порядка сохранили надежность метода Ньютона при увеличении быстродействия. Кроме того, вычисление степенных рядов позволило создать критерии оценки успешности будущих шагов решения системы.

ГЛАВА 3. МНОГОМЕРНОЕ РЕКУРРЕНТНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Раздел 3.1. Двумерное прямое рекуррентное дифференцирование (двумерное прямое p -дифференцирование)

Дифференцируемую двумерную функцию $F(x, y)$ можно многократно дифференцировать [1 – 7] и получить производные $\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left(\frac{\partial^{w-1} F(x, y)}{\partial y^{w-1}} \right)$, которые запишем в нормированном виде

$$F_{k,w} = \frac{1}{(k-1)! (w-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left(\frac{\partial^{w-1} F(x, y)}{\partial y^{w-1}} \right), \quad (k = 1, 2, \dots; w = 1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

где $F_{1,1} = F(x, y)$; $l!$ - обозначает факториал. Совокупность нормированных производных представим в матричной форме

$$F = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & \dots \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} F_{1,1} & F_{2,1} & F_{3,1} & F_{4,1} & \dots \\ F_{1,2} & F_{2,2} & F_{3,2} & F_{4,2} & \dots \\ F_{1,3} & F_{2,3} & F_{3,3} & F_{4,3} & \dots \\ F_{1,4} & F_{2,4} & F_{3,4} & F_{4,4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (3.2)$$

Нумерация нормированных производных в этой матрице отличается от принятого обозначения элементов матрицы [28–31], в котором первый индекс должен обозначать номер строки, а второй индекс – номер столбца. В матрице (3.2) первый индекс обозначает порядок производной по первой переменной x , а второй индекс – порядок производной по второй переменной y . Такие обозначения сохраняют преемственность с обозначениями предыдущих разделов, в которых рассматривались производные одной переменной x . Действительно, для одной переменной x полагаем в матрице (3.2) y^0 , и тогда нормированные производные функции одной переменной определяет первая строка матрицы

$$F_{1,1}, F_{2,1}, F_{3,1}, F_{4,1}, \dots,$$

а второй индекс, равный 1, означает отсутствие второй переменной. Именно так в виде строки было принято записывать производные одной переменной.

Теорема 3.1. Заданы двумерные функции $U(x, y)$, $V(x, y)$ и найдены их нормированные аналитические производные

$$U = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & \dots \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{2,1} & U_{3,1} & U_{4,1} & \dots \\ U_{1,2} & U_{2,2} & U_{3,2} & U_{4,2} & \dots \\ U_{1,3} & U_{2,3} & U_{3,3} & U_{4,3} & \dots \\ U_{1,4} & U_{2,4} & U_{3,4} & U_{4,4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad V = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & \dots \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} V_{1,1} & V_{2,1} & V_{3,1} & V_{4,1} & \dots \\ V_{1,2} & V_{2,2} & V_{3,2} & V_{4,2} & \dots \\ V_{1,3} & V_{2,3} & V_{3,3} & V_{4,3} & \dots \\ V_{1,4} & V_{2,4} & V_{3,4} & V_{4,4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Тогда нормированные аналитические производные функции произведения двух сомножителей $F(x, y) = U(x, y) \cdot V(x, y)$ определяются по следующей двумерной рекуррентной формуле

$$F_{k,w} = U \odot V = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} U_{i+1, \xi+1} \cdot V_{k-i, w-\xi} . \quad (3.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Представим заданные функции как функции одной переменной $U(x)$, $V(x)$ и рассмотрим функцию их произведения $F(x) = U(x) \cdot V(x)$. Найдем нормированные производные этой функции по формуле Лейбница – Коши

$$F_k = \sum_{i=0}^{k-1} U_{i+1} \cdot V_{k-i} , \quad (3.4)$$

в которой каждая производная является аналитической функцией переменной x . Введем функцию $\Phi = U_{i+1} \cdot V_{k-i}$ и допустим, что эта функция зависит от переменной y : $\Phi(y) = U_{i+1}(y) \cdot V_{k-i}(y)$. Тогда ее нормированные аналитические производные можно найти по формуле (3.4) для других сомножителей

$$\Phi_w = \sum_{\xi=0}^{w-1} (U_{i+1})_{\xi+1} \cdot (V_{k-i})_{w-\xi} = \sum_{\xi=0}^{w-1} U_{i+1, \xi+1} \cdot V_{k-i, w-\xi} .$$

Подставляя найденное выражение в формулу (3.4), получаем формулу (3.3), что требовалось доказать.

Теорема 3.2. Заданы двумерные функции

$$U(x, y), V(x, y), W(x, y), P(x, y), \dots, R(x, y), S(x, y)$$

и для всех функций найдены аналитические нормированные производные. Тогда нормированные производные функции произведения сомножителей

$$F(x, y) = U(x, y) \cdot V(x, y) \cdot W(x, y) \cdots R(x, y) \cdot S(x, y)$$

определяются по следующей двумерной рекуррентной формуле

$$F_{k,w} = U \odot V \odot W \odot \dots \odot R \odot S = \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{\mu=0}^{w-1} \left(\sum_{q=0}^l \sum_{\nu=0}^{\mu} \dots \right. \\ \left. \cdots \left(\sum_{i=0}^j \sum_{\xi=0}^{\xi} \left(\sum_{r=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon} U_{r+1, \varepsilon+1} V_{i+1-r, \xi+1-\varepsilon} \right) \cdot W_{j+1-i, \xi+1-\xi} \right) \cdots R_{l+1-q, \mu+1-\nu} \right) \cdot S_{k-l, w-\mu} \quad (3.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для функции $H(x, y) = U(x, y) \cdot V(x, y)$ с двумя сомножителями нормированные производные определяем по формуле (3.3)

$$H_{k,w} = U \odot V = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{\varepsilon=0}^{w-1} U_{r+1, \varepsilon+1} \cdot V_{k-r, w-\varepsilon} . \quad (3.6)$$

Для функции с тремя сомножителями

$$\Psi(x, y) = U(x, y) \cdot V(x, y) \cdot W(x, y) = (U(x, y) \cdot V(x, y)) \cdot W(x, y) = H(x, y) \cdot W(x, y)$$

производные определяем по той же рекуррентной формуле для других функций

$$\Psi_{k,w} = H \odot W = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\zeta=0}^{w-1} H_{i+1, \zeta+1} \cdot W_{k-i, w-\zeta}.$$

Подставляем производную $H_{i+1, \zeta+1}$ из формулы (3.6) и получаем

$$\Psi_{k,w} = U \odot V \odot W = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\zeta=0}^{w-1} \left(\sum_{r=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\zeta} U_{r+1, \varepsilon+1} \cdot V_{i+1-r, \zeta+1-\varepsilon} \right) \cdot W_{k-i, w-\zeta}.$$

Повторяя те же операции для функции с четырьмя сомножителями

$$\Pi(x, y) = U(x, y) \cdot V(x, y) \cdot W(x, y) \cdot P(x, y) = \Psi(x, y) \cdot P(x, y)$$

получаем

$$\begin{aligned} \Pi_{k,w} &= U \odot V \odot W \odot P = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \left(\sum_{i=0}^j \sum_{\zeta=0}^{\xi} \left(\sum_{r=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\zeta} U_{r+1, \varepsilon+1} \cdot V_{i+1-r, \zeta+1-\varepsilon} \right) \cdot W_{j+1-i, \xi+1-\zeta} \right) \cdot P_{k-j, w-\xi} \end{aligned}$$

Положим, что теорема доказана для функции произведения сомножителей общего вида

$$\Phi(x, y) = U(x, y) \cdot V(x, y) \cdot W(x, y) \cdots R(x, y)$$

и найдена двумерная рекуррентная формула

$$\begin{aligned} \Phi_{k,w} &= U \odot V \odot W \odot \dots \odot R = \\ &= \sum_{q=0}^{k-1} \sum_{v=0}^{w-1} \dots \left(\sum_{i=0}^j \sum_{\zeta=0}^{\xi} \left(\sum_{r=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\zeta} U_{r+1, \varepsilon+1} \cdot V_{i+1-r, \zeta+1-\varepsilon} \cdot W_{j+1-i, \xi+1-\zeta} \right) \cdots R_{k-q, w-v} \right) \end{aligned}$$

Добавим в рассмотренную функцию еще один сомножитель

$$F(x, y) = (U(x, y) \cdot V(x, y) \cdot W(x, y) \cdots R(x, y)) \cdot S(x, y) = \Phi(x, y) \cdot S(x, y)$$

и применим двумерную рекуррентную формулу (3.6) для других обозначений

$$F_{k,w} = \Phi \odot S = \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{\mu=0}^{w-1} \Phi_{l+1, \mu+1} \cdot S_{k-l, w-\mu}.$$

Из формулы для $\Phi_{k,w}$ найдем

$$\Phi_{l+1, \mu+1} = \sum_{q=0}^l \sum_{v=0}^{\mu} \dots \left(\sum_{i=0}^j \sum_{\zeta=0}^{\xi} \left(\sum_{r=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\zeta} U_{r+1, \varepsilon+1} V_{i+1-r, \zeta+1-\varepsilon} W_{j+1-i, \xi+1-\zeta} \right) \cdots R_{l+1-q, \mu+1-v} \right)$$

и, подставив выражение в формулу $F_{k,w}$, получаем формулу (3.5), что требовалось доказать.

Лемма 3.1. Заданы двумерные функции

$$U(x, y), V(x, y), W(x, y), R(x, y)$$

и для всех функций найдены аналитические нормированные производные. Тогда нормированные производные двумерной функции произведения сомножителей, включающих функции и их производные, также определяются по двумерным рекуррентным формулам.

Для функции произведения сомножителей

$$F(x, y) = \frac{dU(x, y)}{dx} \cdot V(x, y) \cdot W(x, y) \cdot R(x, y) \quad (3.7)$$

производные определяются по следующей рекуррентной формуле:

$$F_{k,w} = U \odot V \odot W \odot R =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{i=0}^j \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{r=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\varsigma} (r+1) U_{r+2, \varepsilon+1} \cdot V_{i+1-r, \varsigma+1-\varepsilon} \cdot W_{j+1-i, \xi+1-\varsigma} \cdot R_{k-j, w-\xi} \quad (3.8)$$

Для функции произведения сомножителей

$$F(x, y) = \frac{dU(x, y)}{dx} \cdot \frac{dV(x, y)}{dx} \cdot W(x, y) \cdot R(x, y) \quad (3.9)$$

производные определяются по следующей рекуррентной формуле:

$$F_{k,w} = U \odot V \odot W \odot R =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{i=0}^j \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{r=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\varsigma} (r+1) \cdot (i+1-r) \cdot U_{r+2, \varepsilon+1} \cdot V_{i+2-r, \varsigma+1-\varepsilon} \cdot W_{j+1-i, \xi+1-\varsigma} \cdot R_{k-j, w-\xi} \quad (3.10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим функцию (3.7) как одномерную функцию переменной x

$$F(x) = \frac{dU(x)}{dx} \cdot V(x) \cdot W(x) \cdot R(x)$$

и запишем для нее одномерную рекуррентную формулу (табл.1.2, раздел 1.1)

$$F_k = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j \sum_{r=0}^i (r+1) U_{r+2} \cdot V_{i+1-r} \cdot W_{j+1-i} \cdot R_{k-j}.$$

Допустим, что все составляющие одномерной рекуррентной формулы являются функциями второй переменной y

$$F_k(y) = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j \sum_{r=0}^i (r+1) U_{r+2}(y) \cdot V_{i+1-r}(y) \cdot W_{j+1-i}(y) \cdot R_{k-j}(y).$$

Введем функцию $\Phi(y) = U_{r+2}(y) \cdot V_{i+1-r}(y) \cdot W_{j+1-i}(y) \cdot R_{k-j}(y)$ и построим для нее одномерную рекуррентную формулу по переменной y (1.9, раздел 1.1)

$$\Phi_w = \sum_{\xi=0}^{w-1} \left(\sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\varepsilon=0}^{\varsigma} (U_{r+2})_{\varepsilon+1} \cdot (V_{i+1-r})_{\varsigma+1-\varepsilon} \cdot (W_{j+1-i})_{\xi+1-\varsigma} \cdot (R_{k-j})_{w-\xi} \right).$$

Подставляя Φ_w в формулу F_k , получаем двумерную рекуррентную формулу (3.8).

Представим функцию (3.9) как одномерную функцию переменной x

$$F(x) = \frac{dU(x)}{dx} \cdot \frac{dV(x)}{dx} \cdot W(x) \cdot R(x)$$

и запишем для нее одномерную рекуррентную формулу (табл.1.2, раздел 1.1)

$$F_k = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^j \sum_{r=0}^i (r+1) \cdot (i+1-r) \cdot U_{r+2} \cdot V_{i+2-r} \cdot W_{j+1-i} \cdot R_{k-j}.$$

Повторяя те же преобразования для этой рекуррентной формулы, получаем двумерную формулу (3.10), что требовалось доказать.

Двумерные рекуррентные формулы для частных случаев функций вида (3.7), (3.9) приведены в табл.3.1.

Таблица 3.1

Функция $F(x,y)$	Двумерная рекуррентная формула $F_{k,w}$
$\frac{dU(x,y)}{dx} \cdot V(x,y)$	$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} (i+1) U_{i+2, \xi+1} \cdot V_{k-i, w-\xi}$
$\frac{dU(x,y)}{dx} \cdot V(x,y) \cdot W(x,y)$	$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \left(\sum_{r=0}^i \sum_{\varsigma=0}^{\xi} (r+1) \cdot U_{r+2, \varsigma+1} \cdot V_{i+1-r, \xi+1-\varsigma} \right) \cdot W_{k-i, w-\xi}$
$\frac{dU(x,y)}{dx} \cdot \frac{dV(x,y)}{dx}$	$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} (i+1)(k-i) \cdot U_{i+2, \xi+1} \cdot V_{k+1-i, w-\xi}$
$\frac{dU(x,y)}{dx} \cdot \frac{dV(x,y)}{dx} \times$ $\times W(x,y)$	$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \left(\sum_{r=0}^i \sum_{\varsigma=0}^{\xi} (r+1)(i+1-r) \cdot U_{r+2, \varsigma+1} \cdot V_{i+2-r, \xi+1-\varsigma} \right) \times$ $\times W_{k-i, w-\xi}$

Двумерные функции вида (3.7) , (3.9) , содержащие четыре и больше сомножителей, имеют несколько равнозначных рекуррентных формул. Действительно, представим одномерную функцию (3.7) переменной x следующим образом

$$F(x) = \left(\frac{dU(x)}{dx} \cdot V(x) \right) \cdot (W(x) \cdot R(x)) = \Phi(x) \cdot \Psi(x) .$$

Тогда одномерная рекуррентная формула имеет вид (раздел 1.1)

$$F_k = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{r=0}^i (r+1) \cdot U_{r+2} \cdot V_{i+1-r} \right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{k-1-i} W_{r+1} \cdot R_{k-i-r} \right) .$$

Преобразуя согласно лемме 3.1 одномерную рекуррентную формулу в двумерную, получаем двумерную формулу, отличную от формулы (3.8)

$$F_{k,w} = U \odot V \odot W \odot R =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \left(\sum_{r=0}^i \sum_{\varsigma=0}^{\xi} (r+1) \cdot U_{r+2, \varsigma+1} \cdot V_{i+1-r, \xi+1-\varsigma} \right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{k-1-i} \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} W_{r+1, \varsigma+1} \cdot R_{k-i-r, w-\xi-\varsigma} \right)$$

Теорема 3.3. Заданы двумерные функции $U(x,y)$, $V(x,y)$, $W(x,y)$ и найдены их нормированные аналитические функции производных

$$U = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & \dots \\ y^0 & U_{1,1} & U_{2,1} & U_{3,1} & U_{4,1} & \dots \\ y^1 & U_{1,2} & U_{2,2} & U_{3,2} & U_{4,2} & \dots \\ y^2 & U_{1,3} & U_{2,3} & U_{3,3} & U_{4,3} & \dots \\ y^3 & U_{1,4} & U_{2,4} & U_{3,4} & U_{4,4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix} ; \quad V = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & \dots \\ y^0 & V_{1,1} & V_{2,1} & V_{3,1} & V_{4,1} & \dots \\ y^1 & V_{1,2} & V_{2,2} & V_{3,2} & V_{4,2} & \dots \\ y^2 & V_{1,3} & V_{2,3} & V_{3,3} & V_{4,3} & \dots \\ y^3 & V_{1,4} & V_{2,4} & V_{3,4} & V_{4,4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix} ;$$

$$W = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & \dots \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_{1,1} & W_{2,1} & W_{3,1} & W_{4,1} & \dots \\ W_{1,2} & W_{2,2} & W_{3,2} & W_{4,2} & \dots \\ W_{1,3} & W_{2,3} & W_{3,3} & W_{4,3} & \dots \\ W_{1,4} & W_{2,4} & W_{3,4} & W_{4,4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Введем двумерную функцию $F(U(x, y), V(x, y), W(x, y))$, для которой некоторым способом найдена одномерная рекуррентная формула по переменной x

$$F_k = (G_{v(k)} + \sum_l U_{\alpha(l,k)} \cdot V_{\beta(l,k)}) \cdot (P_{\tau(k)} + \sum_r W_{\gamma(r,k)} \cdot R_{\sigma(r,k)}) \quad (3.11)$$

Тогда двумерная рекуррентная формула имеет следующий вид

$$F_{k,w} = U \odot V \odot W \odot R = \sum_{\xi=0}^{w-1} (G_{v(k), \xi+1} + \sum_l \sum_{\varsigma=0}^{\xi} U_{\alpha(l,k), \varsigma+1} \cdot V_{\beta(l,k), \xi+1-\varsigma}) \times \\ \times (P_{\tau(r,k), w-\xi} + \sum_r \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} W_{\gamma(r,k), \varsigma+1} \cdot R_{\sigma(r,k), w-\xi-\varsigma}) \quad (3.12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим рекуррентную формулу (3.11) как функцию переменной y

$$F_k(y) = (G_{v(k)}(y) + \sum_l U_{\alpha(l,k)}(y) \cdot V_{\beta(l,k)}(y)) \cdot (P_{\tau(k)}(y) + \sum_r W_{\gamma(r,k)}(y) \cdot R_{\sigma(r,k)}(y)) = \\ = S_{v(l,k)}(y) \cdot T_{\lambda(r,k)}(y).$$

Согласно рекуррентной формуле (3.3) определяем

$$F_{k,w} = S \odot T = \sum_{\xi=0}^{w-1} S_{v(l,k), \xi+1} \cdot T_{\lambda(r,k), w-\xi} \quad (3.13)$$

Производные каждого сомножителя также определяются по формуле (3.3)

$$S_{v(l,k), \xi+1} = U \odot V = G_{v(k), \xi+1} + \sum_l \sum_{\varsigma=0}^{\xi} U_{\alpha(l,k), \varsigma+1} \cdot V_{\beta(l,k), \xi+1-\varsigma}; \\ T_{\lambda(r,k), w-\xi} = W \odot R = P_{\tau(r,k), w-\xi} + \sum_r \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} W_{\gamma(r,k), \varsigma+1} \cdot R_{\sigma(r,k), w-\xi-\varsigma}$$

Подставляя выражения в формулу (3.13), получаем формулу (3.12), что требовалось доказать.

Двумерные рекуррентные формулы получены в теоремах 3.1–3.3 в результате преобразования одномерных рекуррентных формул в двумерные. Пусть задана двумерная функция $F(U(x, y), V(x, y), \dots)$, для которой необходимо найти нормированные производные. Тогда двумерная рекуррентная формула функции находится как конечный результат

последовательного процесса преобразования рекуррентных формул функции по каждой переменной в отдельности.

При дифференцировании функции $F(U(x,y), V(x,y), \dots)$ можно выбрать любой порядок следования переменных, в частности, сначала дифференцировать по переменной x , сохранив вторую переменную y как параметр. Тогда для функции одной переменной $F(U(x), V(x), \dots)$ нормированные производные можно определить по одномерной рекуррентной формуле Ξ

$F_k = \Xi(F_1, \dots, F_{k-2}, F_{k-1}, U_1, \dots, U_{k-2}, U_{k-1}, U_k, V_1, \dots, V_{k-1}, V_k)$, где $F_1, \dots, F_{k-2}, F_{k-1}, U_1, \dots, U_{k-1}, U_k, V_1, \dots, V_{k-1}, V_k$ – функции, зависящие от параметра y . Найденная одномерная рекуррентная формула превращается в функцию одной переменной y

$$F_k(y) = \Xi(F_1(y), \dots, F_{k-1}(y), U_1(y), \dots, U_{k-1}(y), U_k(y), V_1(y), \dots, V_{k-1}(y), V_k(y))$$

и ее можно дифференцировать по переменной y . Нормированные производные новой функции одной переменной y можно также найти по соответствующим рекуррентным формулам. Нормированные производные внутренних функций $U(x,y), V(x,y)$, необходимые для расчета, находятся с помощью такого же процесса последовательного преобразования рекуррентных формул по каждой переменной в отдельности. Полученные таким способом двумерные рекуррентные формулы функций приведены в табл. П.19 – П.25.

Определение. Двумерным p -дифференцированием назовем процесс многократного применения двумерной рекуррентной формулы для последовательности значений индексов производных $k = 2, 3, \dots$; $w = 2, 3, \dots$

Лемма 3.2. Задана двумерная функция $F(D(x,y))$, для которой известны нормированные производные

$$D = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & \dots \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} D_{1,1} & D_{2,1} & D_{3,1} & D_{4,1} & \dots \\ D_{1,2} & D_{2,2} & D_{3,2} & D_{4,2} & \dots \\ D_{1,3} & D_{2,3} & D_{3,3} & D_{4,3} & \dots \\ D_{1,4} & D_{2,4} & D_{3,4} & D_{4,4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (3.14)$$

Тогда для расчета нормированных производных $F_{k,w}$ необходим предварительный расчет одномерных производных функции по переменным x и y

$$F_{1,1}, F_{2,1}, F_{3,1}, F_{4,1}, \dots, F_{1,2}, F_{1,3}, F_{1,4}, \dots$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Индекс нормированной производной, равный 1 , означает отсутствие переменной, и расчеты двумерных переменных выполняются для индексов 2, 3,... . Применим двумерную рекуррентную формулу, имеющую некоторую структуру

$$F_{k,w} = \Xi(D_{1,1}, D_{2,1}, D_{1,2}, \dots, F_{1,1}, \dots, F_{k-1,w-1}, F_{k-1,w}, F_{k,w-1}),$$

где $F_{1,1} = F(D_{1,1})$. Изменяя индексы $k = 2, 3, \dots$; $w = 2, 3, \dots$, получаем

$$F_{2,2} = \Xi(D_{1,1}, D_{2,1}, D_{1,2}, D_{2,2}, F_{1,1}, F_{2,1}, F_{1,2});$$

$$F_{2,3} = \Xi(D_{1,1}, D_{2,1}, D_{1,2}, D_{1,3}, D_{2,2}, D_{2,3}, F_{1,1}, F_{2,1}, F_{1,2}, F_{1,3}, F_{2,2});$$

$$F_{3,2} = \Xi(D_{1,1}, D_{2,1}, D_{1,2}, D_{3,1}, D_{2,2}, D_{3,2}, F_{1,1}, F_{2,1}, F_{1,2}, F_{3,1}, F_{2,2});$$

⋮

$$F_{k,w} = \Xi(D_{1,1}, \dots, D_{k,w}, \dots, F_{1,1}, F_{2,1}, \dots, F_{k,1}, \dots, F_{1,k}, \dots, F_{k-1,w-1}, F_{k-1,w}, F_{k,w-1}),$$

откуда видно, что в начале процесса появляются неопределенные производные $F_{2,1}, F_{3,1}, F_{4,1}, \dots, F_{1,2}, F_{1,3}, F_{1,4}, \dots$ по переменным x и y , что требовалось доказать.

Пример 3.1.

Рассмотрим двумерную функцию $F(D(x,y)) = e^{D(x,y)}$, для которой известны аналитические нормированные производные (3.14) функции $D(x,y)$. Выполним двумерное p -дифференцирование функции $F(D(x,y))$.

Запишем одномерную рекуррентную формулу заданной функции (табл. П.5)

$$F_k = \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{r=0}^{k-2} (r+1) \cdot D_{r+2} \cdot F_{k-1-r}$$

и, применяя формулу (3.3) , превратим ее в двумерную рекуррентную формулу

$$F_{k,w} = \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{r=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} (r+1) \cdot D_{r+2, \xi+1} \cdot F_{k-1-r, w-\xi} \quad (3.15)$$

Для начала расчета по двумерной рекуррентной формуле необходимо определить нормированные одномерные производные, видоизменяя одномерную рекуррентную формулу.

Для первой переменной x формула имеет вид

$$F_{k,1} = \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{r=0}^{k-2} (r+1) \cdot D_{r+2, 1} \cdot F_{k-1-r, 1}.$$

Изменяем первый индекс:

$$\boxed{k=2} \quad F_{2,1} = D_{2,1} \cdot F_{1,1};$$

$$\boxed{k=3} \quad F_{3,1} = \frac{1}{2} (D_{2,1} \cdot F_{2,1} + 2D_{3,1} \cdot F_{1,1});$$

$$\boxed{k=4} \quad F_{4,1} = \frac{1}{3} (D_{2,1} \cdot F_{3,1} + 2D_{3,1} \cdot F_{2,1} + 3D_{4,1} \cdot F_{1,1})$$

Для второй переменной y одномерная формула подобна, но имеет другие обозначения

$$F_{1,w} = \frac{1}{w-1} \cdot \sum_{\xi=0}^{w-2} (\xi+1) \cdot D_{1, \xi+2} \cdot F_{1, w-1-\xi}.$$

Изменяем второй индекс:

$$\boxed{w=2} \quad F_{1,2} = D_{1,2} \cdot F_{1,1};$$

$$\boxed{w=3} \quad F_{1,3} = \frac{1}{2}(D_{1,2} \cdot F_{1,2} + 2D_{1,3} \cdot F_{1,1});$$

$$\boxed{w=4} \quad F_{1,4} = \frac{1}{3}(D_{1,2} \cdot F_{1,3} + 2D_{1,3} \cdot F_{1,2} + 3D_{1,4} \cdot F_{1,1})$$

Подставляя в формулы аналитические выражения

$$F_{1,1} = F(x, y); \quad D_{2,1} = \frac{dD(x, y)}{dx}; \quad D_{1,2} = \frac{dD(x, y)}{dy}; \quad \dots,$$

получаем аналитические выражения одномерных производных. Выражения двумерных нормированных производных заданной функции $F(D(x, y))$, найденные по рекуррентной формуле (3.15), сведены в табл.3.2.

Таблица 3.2

k	w	$F_{k,w}$
2	2	$F_{2,2} = D_{2,1} \cdot F_{1,2} + D_{2,2} \cdot F_{1,1}$
2	3	$F_{2,3} = D_{2,1} \cdot F_{1,3} + D_{2,2} \cdot F_{1,2} + D_{2,3} \cdot F_{1,1}$
2	4	$F_{2,4} = D_{2,1} \cdot F_{1,4} + D_{2,2} \cdot F_{1,3} + D_{2,3} \cdot F_{1,2} + D_{2,4} \cdot F_{1,1}$
3	2	$F_{3,2} = \frac{1}{2}(D_{2,1} \cdot F_{2,2} + 2D_{3,1} \cdot F_{1,2} + D_{2,2} \cdot F_{2,1} + 2D_{3,2} \cdot F_{1,1})$
3	3	$F_{3,3} = \frac{1}{2}(D_{2,1} \cdot F_{2,3} + 2D_{3,1} \cdot F_{1,3} + D_{2,2} \cdot F_{2,2} + 2D_{3,2} \cdot F_{1,2} + D_{2,3} \cdot F_{2,1} +$ $+ 2D_{3,3} \cdot F_{1,1})$
3	4	$F_{3,4} = \frac{1}{2}(D_{2,1} \cdot F_{2,4} + 2D_{3,1} \cdot F_{1,4} + D_{2,2} \cdot F_{2,3} + 2D_{3,2} \cdot F_{1,3} + D_{2,3} \cdot F_{2,2} +$ $+ 2D_{3,3} \cdot F_{1,2} + D_{2,4} \cdot F_{2,1} + 2D_{3,4} \cdot F_{1,1})$
4	2	$F_{4,2} = \frac{1}{3}(D_{2,1} \cdot F_{3,2} + 2D_{3,1} \cdot F_{2,2} + 3D_{4,1} \cdot F_{1,2} + D_{2,2} \cdot F_{3,1} +$ $+ 2D_{3,2} \cdot F_{2,1} + 3D_{4,2} \cdot F_{1,1})$
4	3	$F_{4,3} = \frac{1}{3}(D_{2,1} \cdot F_{3,3} + 2D_{3,1} \cdot F_{2,3} + 3D_{4,1} \cdot F_{1,3} + D_{2,2} \cdot F_{3,2} +$ $+ 2D_{3,2} \cdot F_{2,2} + 3D_{4,2} \cdot F_{1,2} + D_{2,3} \cdot F_{3,1} + 2D_{3,3} \cdot F_{2,1} + 3D_{4,3} \cdot F_{1,1})$
4	4	$F_{4,4} = \frac{1}{3}(D_{2,1} \cdot F_{3,4} + 2D_{3,1} \cdot F_{2,4} + 3D_{4,1} \cdot F_{1,4} + D_{2,2} \cdot F_{3,3} + 2D_{3,2} \cdot F_{2,3} +$ $+ 3D_{4,2} \cdot F_{1,3} + D_{2,3} \cdot F_{3,2} + 2D_{3,3} \cdot F_{2,2} + 3D_{4,3} \cdot F_{1,2} + D_{2,4} \cdot F_{3,1} +$ $+ 2D_{3,4} \cdot F_{2,1} + 3D_{4,4} \cdot F_{1,1})$

Подставляя в формулы (табл.3.2) аналитические выражения, получаем результаты в аналитической форме.

Определение. Функцию $F(x,y)$ назовем *симметричной*, если выполняется условие $F_{k,w} = F_{w,k}$, и, как следует отсюда, матрица нормированных производных (3.2) симметрична.

Лемма 3.3. Матрица (3.2) функции $F(D(x,y))$ симметрична, если симметрична матрица (3.14) внутренней функции $D(x,y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предполагаем, что функция $F(D(x,y))$ имеет двумерную рекуррентную формулу следующей структуры

$$F_{k,w} = \Xi(D_{1,1}, \dots, D_{k,1}, \dots, D_{1,k}, \dots, D_{k,w}, F_{1,1}, \dots, F_{k-1,w-1}, F_{k-1,w}, F_{k,w-1})$$

Найдем одномерные нормированные производные, которые, согласно лемме 3.2, необходимы для расчета двумерных производных:

$$\begin{aligned} F_{2,1} &= \Xi(D_{1,1}, D_{2,1}, F_{1,1}); \\ F_{1,2} &= \Xi(D_{1,1}, D_{1,2}, F_{1,1}); \\ F_{3,1} &= \Xi(D_{1,1}, D_{2,1}, D_{3,1}, F_{1,1}, F_{2,1}); \\ F_{1,3} &= \Xi(D_{1,1}, D_{1,2}, D_{1,3}, F_{1,1}, F_{1,2}); \\ &\vdots \end{aligned}$$

Учитывая симметричность матрицы (3.14) функции $D(x,y)$, получаем

$$F_{2,1} = F_{1,2}; F_{3,1} = F_{1,3}; \dots F_{k,1} = F_{1,k}.$$

Находим двумерные нормированные производные

$$\begin{aligned} F_{2,2} &= \Xi(D_{1,1}, D_{2,1}, D_{1,2}, D_{2,2}, F_{1,1}, F_{2,1}, F_{1,2}); \\ F_{2,3} &= \Xi(D_{1,1}, D_{2,1}, D_{1,2}, D_{1,3}, D_{2,2}, D_{2,3}, F_{1,1}, F_{2,1}, F_{1,2}, F_{1,3}, F_{2,2}); \\ F_{3,2} &= \Xi(D_{1,1}, D_{2,1}, D_{1,2}, D_{3,1}, D_{2,2}, D_{3,2}, F_{1,1}, F_{2,1}, F_{1,2}, F_{3,1}, F_{2,2}); \\ &\vdots \end{aligned}$$

Учитывая симметричность матрицы (3.14) функции $D(x,y)$ и симметричность одномерных нормированных производных $F_{k,1} = F_{1,k}$, устанавливаем

симметричность матрицы производных (3.2)

$$\begin{aligned} F_{k,w} &= \Xi(D_{1,1}, \dots, D_{k,w}, \dots, F_{1,1}, F_{2,1}, \dots, F_{k,1}, \dots, F_{1,2}, \dots, F_{1,k}, \dots, F_{k-1,w}, F_{k,w-1}) = \\ &= \Xi(D_{1,1}, \dots, D_{w,k}, \dots, F_{1,1}, F_{1,2}, \dots, F_{1,k}, \dots, F_{2,1}, \dots, F_{k,1}, \dots, F_{w-1,k}, F_{w,k-1}) = F_{w,k} \end{aligned}$$

что требовалось доказать.

Таблицы двумерных рекуррентных формул конкретных функций формируются с помощью преобразования соответствующих одномерных формул, построенных для переменной x , в двумерные формулы, включающие вторую переменную y . Если в знаменатель одномерной

формулы входят нормированные производные, зависящие от переменной y , то такая формула непригодна для преобразования, и преобразовывать в двумерную форму надо одномерное рекуррентное уравнение функции. Полученные двумерные уравнения можно решать относительно $F_{k,w}$ и находить таким способом двумерную рекуррентную формулу. Бесспорно, решить можно двумерное уравнение любой сложности, но полученная рекуррентная формула может оказаться намного сложнее двумерного рекуррентного уравнения, и решать такие рекуррентные уравнения вряд ли нецелесообразно. Рекуррентные уравнения имеют простую структуру, и численный расчет $F_{k,w}$ можно выполнить с помощью несложной вычислительной процедуры, собирающей в уравнении слагаемые, которые содержат сомножитель $F_{k,w}$. Двумерные рекуррентные уравнения и некоторые формулы конкретных функций приведены в табл. П.19 – П.25.

Пример 3.2.

Рассмотрим двумерную функцию $F(D(x, y)) = \sqrt{\ln(D(x, y))}$, для которой известны аналитические нормированные производные (3.14) функции $D(x, y)$. Выполним двумерное p -дифференцирование функции $F(D(x, y))$.

Запишем одномерную рекуррентную формулу заданной функции (табл. П.7)

$$F_k = \frac{1}{2(k-1)D_1 \cdot F_1} \cdot \left((k-1)D_k - 2 \sum_{i=0}^{k-3} ((i+1) \cdot D_1 \cdot F_{i+2} \cdot F_{k-1-i} + \right. \\ \left. + D_{k-1-i} \cdot \sum_{r=0}^i (r+1) \cdot F_{r+2} \cdot F_{i+1-r}) \right).$$

Для начала расчета по двумерной рекуррентной формуле необходимо определить нормированные одномерные производные, видоизменяя одномерную рекуррентную формулу.

Для первой переменной x формула имеет вид

$$F_{k,1} = \frac{1}{2(k-1)D_{1,1} \cdot F_{1,1}} \cdot \left((k-1)D_{k,1} - 2 \sum_{i=0}^{k-3} ((i+1) \cdot D_{1,1} \cdot F_{i+2,1} \cdot F_{k-1-i,1} + \right. \\ \left. + D_{k-1-i,1} \cdot \sum_{r=0}^i (r+1) \cdot F_{r+2,1} \cdot F_{i+1-r,1}) \right).$$

Изменяем первый индекс:

$$\boxed{k=2} \quad F_{2,1} = \frac{D_{2,1}}{2D_{1,1} \cdot F_{1,1}};$$

$$\boxed{k=3} \quad F_{3,1} = \frac{1}{2D_{1,1} \cdot F_{1,1}} (D_{3,1} - D_{1,1} \cdot F_{2,1}^2 - D_{2,1} \cdot F_{2,1} \cdot F_{1,1}).$$

Для второй переменной y одномерная формула имеет вид

$$F_{1,w} = \frac{1}{2(w-1)D_{1,1} \cdot F_{1,1}} \cdot \left((w-1)D_{1,w} - 2 \sum_{i=0}^{w-3} ((i+1) \cdot D_{1,1} \cdot F_{1,i+2} \cdot F_{1,w-1-i} + \right.$$

$$+ D_{1, w-1-i} \cdot \sum_{r=0}^i (r+1) \cdot F_{1, r+2} \cdot F_{1, i+1-r})).$$

Изменяем второй индекс:

$$\boxed{w=2} \quad F_{1,2} = \frac{D_{1,2}}{2D_{1,1} \cdot F_{1,1}} ;$$

$$\boxed{w=3} \quad F_{1,3} = \frac{1}{2D_{1,1} \cdot F_{1,1}} (D_{1,3} - D_{1,1} \cdot F_{1,2}^2 - D_{1,2} \cdot F_{1,2} \cdot F_{1,1}) .$$

Подставляя в формулы аналитические выражения

$$F_{1,1} = F(x, y) ; D_{2,1} = \frac{dD(x, y)}{dx} ; D_{1,2} = \frac{dD(x, y)}{dy} ; \dots ,$$

получаем аналитические выражения одномерных производных. Выражения двумерных нормированных производных заданной функции $F(x, y)$ находим по двумерному рекуррентному уравнению (табл. П.19) . Для упрощения расчетов запишем уравнение для $k = 2, 3$.

Для $k = 2$ запишем двумерное уравнение (табл. П.19)

$$2 \cdot \left(\sum_{\xi=0}^{w-1} (D_{1, w-\xi} \cdot \sum_{\varsigma=0}^{\xi} F_{2, \varsigma+1} \cdot F_{1, \xi+1-\varsigma}) \right) - D_{2, w} = 0 .$$

Полагаем $w = 2$

$$2F_{2,2} \cdot F_{1,1} \cdot D_{1,1} + 2F_{2,1} \cdot F_{1,2} \cdot D_{1,1} + 2F_{2,1} \cdot F_{1,1} \cdot D_{1,2} - D_{2,2} = 0 ,$$

откуда находим

$$F_{2,2} = \frac{1}{2F_{1,1} \cdot D_{1,1}} \cdot (D_{2,2} - 2F_{2,1} \cdot F_{1,2} \cdot D_{1,1} - 2F_{2,1} \cdot F_{1,1} \cdot D_{1,2}) .$$

Полагаем $w = 3$

$$2F_{2,3} \cdot F_{1,1} \cdot D_{1,1} + 2F_{2,2} \cdot F_{1,2} \cdot D_{1,1} + 2F_{2,2} \cdot F_{1,1} \cdot D_{1,2} + 2F_{2,1} \cdot F_{1,3} \cdot D_{1,1} + \\ + 2F_{2,1} \cdot F_{1,2} \cdot D_{1,2} + 2F_{2,1} \cdot F_{1,1} \cdot D_{1,3} - D_{2,3} = 0$$

откуда находим

$$F_{2,3} = \frac{1}{2F_{1,1} \cdot D_{1,1}} \cdot (D_{2,3} - 2F_{2,2} \cdot F_{1,2} \cdot D_{1,1} - 2F_{2,2} \cdot F_{1,1} \cdot D_{1,2} - 2F_{2,1} \cdot F_{1,3} \cdot D_{1,1} - \\ - 2F_{2,1} \cdot F_{1,2} \cdot D_{1,2} - 2F_{2,1} \cdot F_{1,1} \cdot D_{1,3})$$

Для $k = 3$ запишем двумерное уравнение (табл. П.19)

$$2 \sum_{\xi=0}^{w-1} \left(D_{2, w-\xi} \cdot \sum_{\varsigma=0}^{\xi} F_{2, \varsigma+1} \cdot F_{1, \xi+1-\varsigma} + \right. \\ \left. + D_{1, w-\xi} \cdot \sum_{\varsigma=0}^{\xi} (F_{2, \varsigma+1} \cdot F_{2, \xi+1-\varsigma} + 2F_{3, \varsigma+1} \cdot F_{1, \xi+1-\varsigma}) \right) - 2D_{3, w} = 0$$

Полагаем $w = 2$

$$2F_{3,2} \cdot F_{1,1} \cdot D_{1,1} + 2F_{3,1} \cdot F_{1,2} \cdot D_{1,1} + 2F_{3,1} \cdot F_{1,1} \cdot D_{1,2} + 2F_{2,1} \cdot F_{2,2} \cdot D_{1,1} + \\ + F_{2,1} \cdot F_{1,2} \cdot D_{2,1} + F_{2,2} \cdot F_{1,1} \cdot D_{2,1} + F_{2,1} \cdot F_{1,1} \cdot D_{2,2} + F_{2,1}^2 \cdot D_{1,2} - D_{3,2} = 0 ,$$

откуда находим

$$F_{3,2} = \frac{1}{2F_{1,1} \cdot D_{1,1}} (D_{3,2} - 2F_{3,1} \cdot F_{1,2} \cdot D_{1,1} - 2F_{3,1} \cdot F_{1,1} \cdot D_{1,2} - 2F_{2,1} \cdot F_{2,2} \cdot D_{1,1} - \\ - F_{2,1} \cdot F_{1,2} \cdot D_{2,1} - F_{2,2} \cdot F_{1,1} \cdot D_{2,1} - F_{2,1} \cdot F_{1,1} \cdot D_{2,2} - F_{2,1}^2 \cdot D_{1,2}) .$$

Подставляя аналитические выражения одномерных нормированных производных, находим аналитические выражения двумерных производных.

Как видно из рекуррентных формул и уравнений (табл. П.19 – П.25) , их выражения не являются симметричными, и индексы k и w , определяющие нормированные производные $\frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(\frac{\partial^w F(x,y)}{\partial y^w} \right)$ и $\frac{\partial^w}{\partial x^w} \left(\frac{\partial^k F(x,y)}{\partial y^k} \right)$, неравнозначны. В случае симметрии функции $D(x,y)$ несимметричность формул приводит к разным по записи выражениям $F_{k,w}$ и $F_{w,k}$, и для проверки их равенства необходимо выполнять подстановки и алгебраические преобразования формул.

Пример 3.3.

В примере 3.1 установим равенство $F_{2,4}$ и $F_{4,2}$ для случая симметричной матрицы производных (3.14) функции $D(x,y)$. Запишем из табл.3.2 $F_{2,4}$

$$6F_{2,4} = 6D_{2,1} \cdot F_{1,4} + 6D_{2,2} \cdot F_{1,3} + 6D_{2,3} \cdot F_{1,2} + 6D_{2,4} \cdot F_{1,1}$$

и , выполнив подстановки $F_{1,2}$, $F_{1,3}$, $F_{1,4}$, найдем

$$6F_{2,4} = F_{1,1} \cdot (D_{2,1} \cdot D_{1,2}^3 + 3D_{1,2}^2 \cdot D_{2,2} + 6D_{1,2} \cdot D_{2,1} \cdot D_{1,3} + 6D_{2,1} \cdot D_{2,3} + \\ + 6D_{2,2} \cdot D_{1,3} + 6D_{2,1} \cdot D_{1,4} + 6D_{2,4}) .$$

Запишем из табл.3.2 $F_{4,2}$, отмечая различия с $F_{2,4}$

$$6F_{4,2} = 2D_{2,1} \cdot F_{3,2} + 4D_{3,1} \cdot F_{2,2} + 6D_{4,1} \cdot F_{1,2} + 2D_{2,2} \cdot F_{3,1} + 4D_{3,2} \cdot F_{2,1} + 6D_{4,2} \cdot F_{1,1}$$

После подстановок $F_{2,1}$, $F_{3,1}$, $F_{4,1}$, $F_{2,2}$, $F_{3,2}$ и преобразования, найдем выражение

$$6F_{4,2} = F_{1,1} \cdot (D_{1,2} \cdot D_{2,1}^3 + 3D_{2,1}^2 \cdot D_{2,2} + 6D_{2,1} \cdot D_{1,2} \cdot D_{3,1} + 6D_{1,2} \cdot D_{3,2} + \\ + 6D_{2,2} \cdot D_{3,1} + 6D_{1,2} \cdot D_{4,1} + 6D_{4,2})$$

Действительно, согласно лемме 3.3, из симметрии матрицы (3.14) следует равенство рассмотренных производных.

Переменные x и y равнозначны в том смысле, что рекуррентное дифференцирование двумерной функции можно начинать с любой переменной. Принятое ранее условие, что первой переменной должна быть переменная x было связано с тем, что через x обозначалась переменная в одномерных рекуррентных формулах. Записывая производные функции по переменной x в строках матриц производных (3.2) , (3.14) , непосредственно переходим к одномерному случаю при отсутствии второй переменной. Такое условие

продиктовано только удобством записи и не должно быть ограничением в процессе дифференцирования.

Лемма 3.4. Задана функция $F(D(x, y))$. Тогда равнозначность переменных x и y обеспечивается транспонированием матриц нормированных производных (3.14) и (3.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что при дифференцировании переменная x является первой, а переменная y – второй, и двумерная рекуррентная формула имеет структуру

$$F_{k,w} = \Xi(D_{1,1}, D_{2,1}, D_{1,2}, \dots, F_{1,1}, \dots, F_{k-1,w-1}, F_{k-1,w}, F_{k,w-1}), \quad F_{1,1} = F(D_{1,1})$$

Найдем одномерные нормированные производные по переменной y

$$F_{1,2} = \Xi(D_{1,1}, D_{1,2}, F_{1,1});$$

$$F_{1,3} = \Xi(D_{1,1}, D_{1,2}, D_{1,3}, F_{1,1}, F_{1,2});$$

⋮

Как следует из этих выражений, для расчета производных используется первый столбец матрицы (3.14), и найденные производные записываются в первый столбец матрицы (3.2). Находим двумерные нормированные производные по переменной y

$$F_{2,2} = \Xi(D_{1,1}, D_{2,1}, D_{1,2}, D_{2,2}, F_{1,1}, F_{2,1}, F_{1,2});$$

$$F_{2,3} = \Xi(D_{1,1}, D_{1,2}, D_{1,3}, D_{2,1}, D_{2,2}, D_{2,3}, F_{1,1}, F_{1,2}, F_{1,3}, F_{2,1}, F_{2,2});$$

$$F_{2,4} = \Xi(D_{1,1}, D_{1,2}, D_{1,3}, D_{1,4}, D_{2,1}, D_{2,2}, D_{2,3}, D_{2,4}, F_{1,1}, F_{1,2}, F_{1,3}, F_{1,4}, F_{2,1}, F_{2,2}, F_{2,3});$$

⋮

Как видно, для расчета двумерных производных используются столбцы матриц (3.2), (3.14), и найденные производные записываются в столбцы матрицы (3.2). Чтобы поменять местами переменные и сделать переменную y первой, надо поменять местами строки и столбцы матрицы (3.14). Кроме того, запись вычисляемых производных по переменной y необходимо производить в строки матрицы (3.2), а запись производных по переменной x – в столбцы матрицы (3.2), что требовалось доказать.

Пример 3.4.

Рассмотрим двумерную функцию $F(D(x, y)) = \ln(D(x, y))$, для которой известны аналитические нормированные производные внутренней функции $D(x, y)$ (3.14), и выполним двумерное p -дифференцирование заданной функции.

Как показано в разделе 1.1, одномерные производные можно получить без рекуррентных формул другим способом, а именно дифференцируя порождающее уравнение функции (табл.1.1). Применим этот способ для расчета двумерных производных функции $F = \ln(D)$ по переменным x и y . Но тогда могут быть два порождающих уравнения, изначально полученных при дифференцировании функции по переменным x или y .

Найдем производную $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 F(D(x,y))}{\partial y^2} \right)$, дифференцируя порождающее уравнение функции [1 - 7]. При дифференцировании учитываем основное свойство порождающего уравнения – в нем двумерные функции $F(x,y)$, $D(x,y)$ не связаны между собой и являются взаимно простыми. Покажем, что конечный результат зависит от того, по какой из двух переменных получено порождающее уравнение (условно такую переменную будем отмечать индексом – x^0 или y^0). Строим изначально порождающее уравнение по переменной x . Меняя порядок дифференцирования по переменным x и y , выбираем следующие комбинации переменных для дифференцирования:

$$\frac{d}{dx^0} \rightarrow \frac{d}{dx} \rightarrow \frac{d}{dy} \rightarrow \frac{d}{dy} ; \frac{d}{dx^0} \rightarrow \frac{d}{dy} \rightarrow \frac{d}{dx} \rightarrow \frac{d}{dy} ; \frac{d}{dx^0} \rightarrow \frac{d}{dy} \rightarrow \frac{d}{dy} \rightarrow \frac{d}{dx} .$$

Для всех комбинаций получаем одинаковый результат

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \cdot D + 2 \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \cdot \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \cdot \frac{\partial D}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 D}{\partial x \partial y^2} = \\ = \frac{\partial^4 D}{\partial x^2 \partial y^2} . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Построим порождающее уравнение по переменной y и применим для дифференцирования по переменным x и y комбинации переменных:

$$\frac{d}{dy^0} \rightarrow \frac{d}{dx} \rightarrow \frac{d}{dy} \rightarrow \frac{d}{dx} ; \frac{d}{dy^0} \rightarrow \frac{d}{dx} \rightarrow \frac{d}{dx} \rightarrow \frac{d}{dy} ; \frac{d}{dy^0} \rightarrow \frac{d}{dy} \rightarrow \frac{d}{dx} \rightarrow \frac{d}{dx} .$$

Для всех комбинаций получаем одинаковый результат

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \cdot D + \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \cdot \frac{\partial D}{\partial y} + 2 \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \cdot \frac{\partial D}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial^3 D}{\partial x^2 \partial y} = \\ = \frac{\partial^4 D}{\partial x^2 \partial y^2} . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Сравнение выражений (3.16) и (3.17) показывает, что они различны, и это различие связано с тем, по какой переменной x или y получено порождающее уравнение.

Способ двумерного дифференцирования порождающего уравнения имеет ограничения и неэффективен, как и в одномерном случае. Единственным эффективным способом является двумерное рекуррентное дифференцирование. Согласно теоремам 3.2, 3.3, двумерные рекуррентные формулы (уравнения) выводятся из одномерных. Но тогда результат двумерной рекуррентной формулы должен зависеть от того, по какой переменной x или y получено одномерное порождающее уравнение. Никаких трудностей в двумерном рекуррентном дифференцировании не возникает, если выполнить простые правила:

1. Из двух переменных произвольно выбрать первую переменную, обозначая ее как переменную x , и вторую переменную, обозначая как y .

2. В соответствии с этим построить матрицу $D(x,y)$ (3.14), записывая в

матрицу нормированные производные переменной x по строкам и производные переменной y – по столбцам.

3. В двумерных рекуррентных формулах индекс k определяет порядок производной по переменной x , а индекс w – по переменной y .

4. Результат $F_{k,w}$ в матрице (3.2) содержит в строках нормированные производные по переменной x и в столбцах – переменной y .

Продолжим пример 3.4 и выполним p -дифференцирование заданной функции. Запишем одномерную рекуррентную формулу функции (табл. П.7)

$$F_k = \frac{1}{(k-1)D_1} \cdot \left((k-1)D_k - \sum_{r=0}^{k-3} (r+1) \cdot F_{r+2} \cdot D_{k-1-r} \right).$$

Для начала расчета по двумерной рекуррентной формуле необходимо определить нормированные одномерные производные, видоизменяя одномерную рекуррентную формулу.

Для первой переменной x формула имеет вид

$$F_{k,1} = \frac{1}{(k-1)D_{1,1}} \cdot \left((k-1)D_{k,1} - \sum_{r=0}^{k-3} (r+1) \cdot F_{r+2,1} \cdot D_{k-1-r,1} \right).$$

Изменяем первый индекс:

$$\boxed{k=2} \quad F_{2,1} = \frac{D_{2,1}}{D_{1,1}};$$

$$\boxed{k=3} \quad F_{3,1} = \frac{1}{2D_{1,1}} (2D_{3,1} - F_{2,1} \cdot D_{2,1});$$

$$\boxed{k=4} \quad F_{4,1} = \frac{1}{3D_{1,1}} (3D_{4,1} - F_{2,1} \cdot D_{3,1} - 2F_{3,1} \cdot D_{2,1})$$

Для второй переменной y одномерная формула имеет вид

$$F_{1,w} = \frac{1}{(w-1)D_{1,1}} \cdot \left((w-1)D_{1,w} - \sum_{r=0}^{w-3} (r+1) \cdot F_{1,r+2} \cdot D_{1,w-1-r} \right).$$

Изменяем второй индекс:

$$\boxed{w=2} \quad F_{1,2} = \frac{D_{1,2}}{D_{1,1}};$$

$$\boxed{w=3} \quad F_{1,3} = \frac{1}{2D_{1,1}} (2D_{1,3} - F_{1,2} \cdot D_{1,2});$$

$$\boxed{w=4} \quad F_{1,4} = \frac{1}{3D_{1,1}} (3D_{1,4} - F_{1,2} \cdot D_{1,3} - 2F_{1,3} \cdot D_{1,2})$$

Выражения двумерных нормированных производных заданной функции $F(x,y)$ находим по рекуррентной формуле (табл. П.19).

$$F_{2,2} = \frac{1}{D_{1,1}} (D_{2,2} - F_{2,1} \cdot D_{1,2});$$

$$F_{2,3} = \frac{1}{D_{1,1}} (D_{2,3} - F_{2,1} \cdot D_{1,3} - F_{2,2} \cdot D_{1,2});$$

$$F_{3,2} = \frac{1}{2D_{1,1}}(2D_{3,2} - 2F_{3,1} \cdot D_{1,2} - F_{2,2} \cdot D_{2,1} - F_{2,1} \cdot D_{2,2})$$

Наконец, для нормированной производной $\frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2}$ находим уравнение

$4F_{3,3} \cdot D_{1,1} + 4F_{3,2} \cdot D_{1,2} + 2F_{2,3} \cdot D_{2,1} + 2F_{2,2} \cdot D_{2,2} + 4F_{3,1} \cdot D_{1,3} + 2F_{2,1} \cdot D_{2,3} = 4D_{3,3}$,
которое точно повторяет в нормированном виде уравнение для производной (3.16),
полученное при выборе первой переменной x .

Чтобы получить выражение нормированной двумерной производной при выборе первой переменной y , необходимо, согласно лемме 3.4, транспонировать матрицы (3.14), (3.2) или, еще проще, зеркально отобразить индексы в найденном нормированном уравнении

$$4F_{3,3} \cdot D_{1,1} + 4F_{2,3} \cdot D_{2,1} + 2F_{3,2} \cdot D_{1,2} + 2F_{2,2} \cdot D_{2,2} + 4F_{1,3} \cdot D_{3,1} + 2F_{1,2} \cdot D_{3,2} = 4D_{3,3}$$

Это уравнение точно повторяет в нормированном виде уравнение для производной (3.17), полученное при выборе первой переменной y .

При большом количестве внутренних функций в заданной составной функции процесс аналитического расчета производных можно упростить, используя прием разделения составной функции на части. Рассмотрим двумерную составную функцию

$$F(x, y) = v(\dots \eta(\mid \psi(\dots v(\mid \rho(\dots \varphi(D(x, y)))\dots)))\dots)$$

и разделим ее на части, как показано в выражении. Тогда получим несколько более простых составных функций

$$F(x, y) = v(\dots \eta(P(x, y))); P(x, y) = \psi(\dots v(S(x, y))); S(x, y) = \rho(\dots \varphi(D(x, y))),$$

аналитические производные которых можно рассчитывать отдельно.

Теорема 3.4. Задана аналитическая двумерная составная функция

$$F(x, y) = v(\dots \eta(\mid \lambda(v(\mid \rho(\dots \psi(\varphi(D(x, y)))\dots)))\dots))\dots),$$

для которой известны аналитические двумерные производные (3.14). Разделим заданную функцию на несколько частей, распределяя внутренние функции $v(x, y), \dots, \eta(x, y), \lambda(x, y), \dots, v(x, y), \rho(x, y), \dots, \psi(x, y), \varphi(x, y)$ между частичными составными функциями (разделение на части условно показано в выражении заданной функции разделителями)

$$F_I(x, y) = v(\dots \eta(F_{II}(x, y))); F_{II}(x, y) = \lambda(\dots v(F_{III}(x, y))); F_{III}(x, y) = \rho(\dots (\varphi(D(x, y)))$$

Тогда расчет двумерных производных частичных составных функций можно выполнять независимо в произвольном порядке.

Доказательство. Выделим в заданной составной функции ее часть

$$L(x, y) = \psi(\varphi(D(x, y)))$$

и разделим ее, в свою очередь, на две части:

$$L(x, y) = \psi(H(x, y)); H(x, y) = \varphi(D(x, y)).$$

Рассмотрим первую частичную функцию $H(x, y) = \varphi(D(x, y))$, для которой известна матрица производных функции $D(x, y)$, и выполним расчет ее двумерных производных. Согласно лемме 3.2, для расчета двумерных производных функции $H(x, y)$ необходимо определить одномерные

нормированные производные для каждой переменной в отдельности: $H_{2,1}, H_{3,1}, H_{4,1}, \dots, H_{1,2}, H_{1,3}, H_{1,4}, \dots$. Двумерные нормированные производные можно найти по рекуррентным формулам и записать их в виде матрицы производных. Эти этапы расчета представим в виде схемы преобразования двумерных матриц.

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} D_{1,1} & D_{2,1} & D_{3,1} & D_{4,1} \dots \\ D_{1,2} & D_{2,2} & D_{3,2} & D_{4,2} \dots \\ D_{1,3} & D_{2,3} & D_{3,3} & D_{4,3} \dots \\ D_{1,4} & D_{2,4} & D_{3,4} & D_{4,4} \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix} \xrightarrow{\text{рекуррентные формулы}} H = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} H_{1,1} & H_{2,1} & H_{3,1} & H_{4,1} \dots \\ H_{1,2} & H_{2,2} & H_{3,2} & H_{4,2} \dots \\ H_{1,3} & H_{2,3} & H_{3,3} & H_{4,3} \dots \\ H_{1,4} & H_{2,4} & H_{3,4} & H_{4,4} \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Рассмотрим вторую частичную функцию $L(x, y) = \psi(H(x, y))$, для которой уже известна матрица производных внутренней функции H . Таким образом, расчет производных этой функции отличается от предыдущего расчета только обозначениями. Порядок рассмотрения двух функций можно изменить, и рассматривать функцию $L(x, y) = \psi(H(x, y))$ первой, предполагая известной матрицу производных внутренней функции H . Тогда процесс расчета реализует схему преобразования матриц.

$$H = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} H_{1,1} & H_{2,1} & H_{3,1} & H_{4,1} \dots \\ H_{1,2} & H_{2,2} & H_{3,2} & H_{4,2} \dots \\ H_{1,3} & H_{2,3} & H_{3,3} & H_{4,3} \dots \\ H_{1,4} & H_{2,4} & H_{3,4} & H_{4,4} \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix} \xrightarrow{\text{рекуррентные формулы}} L = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} L_{1,1} & L_{2,1} & L_{3,1} & L_{4,1} \dots \\ L_{1,2} & L_{2,2} & L_{3,2} & L_{4,2} \dots \\ L_{1,3} & L_{2,3} & L_{3,3} & L_{4,3} \dots \\ L_{1,4} & L_{2,4} & L_{3,4} & L_{4,4} \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

в которой матрица производных функции H трактуется как отложенный результат и определяется после расчета производных функции $H(x, y) = \varphi(D(x, y))$. Расчеты двумерных производных частных составных функций $F_{\text{ш}}(x, y)$, $F_{\text{п}}(x, y)$, $F_{\text{л}}(x, y)$ многократно реализуют указанную схему преобразования матриц с различными обозначениями. Эти расчеты для различных частных составных функций можно выполнять в произвольном порядке и для каждой составной функции независимо от других, что требовалось доказать.

Пример 3.5.

Рассмотрим составную двумерную функцию

$$F(D(x, y)) = \text{arctg}(\text{ch} D(x, y)) = \text{arctg}\left(\frac{1}{2}(e^{D(x, y)} + e^{-D(x, y)})\right),$$

для которой известны аналитические нормированные производные (3.14) функции $D(x, y)$. Выполним двумерное p -дифференцирование функции $F(D(x, y))$, применяя разделение составной функции на части:

$$F(x, y) = \text{arctg}(H(x, y)); \quad H(x, y) = \text{ch}D(x, y),$$

расчет производных которых можно выполнять независимо. Согласно лемме 3.2, для расчета двумерных производных необходимо предварительно определить одномерные нормированные производные. Для одной переменной заданная функция также является составной функцией, и ее необходимо разделить на такие же части.

Для первой переменной x

$$H(x) = \text{ch}D(x) = \frac{1}{2}(e^{D(x)} + e^{-D(x)}).$$

Одномерная рекуррентная формула для функции $B(x) = e^{D(x)}$ имеет вид

$$B_{k,1} = \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{r=0}^{k-2} (r+1) \cdot D_{r+2,1} \cdot B_{k-1-r,1}.$$

Изменяем первый индекс:

$$B_{1,1} = e^{D_{1,1}};$$

$$\boxed{k=2} \quad B_{2,1} = D_{2,1} \cdot B_{1,1};$$

$$\boxed{k=3} \quad B_{3,1} = \frac{1}{2}(D_{2,1} \cdot B_{2,1} + 2D_{3,1} \cdot B_{1,1})$$

Для функции $C(x) = e^{-D(x)}$ в одномерной рекуррентной формуле изменяются только обозначения (табл. П.5)

$$C_{1,1} = e^{-D_{1,1}};$$

$$\boxed{k=2} \quad C_{2,1} = D_{2,1} \cdot C_{1,1};$$

$$\boxed{k=3} \quad C_{3,1} = \frac{1}{2}(D_{2,1} \cdot C_{2,1} + 2D_{3,1} \cdot C_{1,1})$$

Объединяя два расчета, для функции $H(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^{D(x)} + e^{-D(x)})$ получаем

$$H_{1,1} = \frac{1}{2}(B_{1,1} + C_{1,1});$$

$$\boxed{k=2} \quad H_{2,1} = \frac{1}{2}(B_{2,1} + C_{2,1});$$

$$\boxed{k=3} \quad H_{3,1} = \frac{1}{4}(B_{3,1} + C_{3,1})$$

Одномерная рекуррентная формула для функции $F(x) = \text{arctg}(H(x))$ для новых обозначений имеет вид (табл. П.8)

$$F_{k,1} = \frac{1}{(k-1) \cdot (H_{1,1}^2 + 1)} \cdot ((k-1)H_{k,1} - \sum_{i=0}^{k-3} (i+1)F_{i+2,1} \cdot (\sum_{q=0}^{k-2-i} H_{q+1,1} \cdot H_{k-1-i-q,1}))$$

Изменяем первый индекс:

$$F_{1,1} = \text{arctg}(H_{1,1});$$

$$\boxed{k=2} \quad F_{2,1} = \frac{H_{2,1}}{1 + H_{1,1}^2};$$

$$\boxed{k=3} \quad F_{3,1} = \frac{1}{2(1+H_{1,1}^2)}(2H_{3,1} - 2F_{2,1} \cdot H_{2,1} \cdot H_{1,1})$$

Для второй переменной y одномерная рекуррентная формула функции $B(y) = e^{D(y)}$ имеет вид (табл. П.5)

$$B_{1,w} = \frac{1}{w-1} \cdot \sum_{r=0}^{w-2} (r+1) \cdot D_{1,r+2} \cdot B_{1,w-1-r}$$

Изменяем второй индекс:

$$B_{1,1} = e^{D_{1,1}};$$

$$\boxed{w=2} \quad B_{1,2} = D_{1,2} \cdot B_{1,1};$$

$$\boxed{w=3} \quad B_{1,3} = \frac{1}{2}(D_{1,2} \cdot B_{1,2} + 2D_{1,3} \cdot B_{1,1})$$

Для функции $C(y) = e^{-D(y)}$ в одномерной рекуррентной формуле изменяются только обозначения (табл. П.5)

$$C_{1,1} = e^{-D_{1,1}};$$

$$\boxed{w=2} \quad C_{1,2} = D_{1,2} \cdot C_{1,1};$$

$$\boxed{w=3} \quad C_{1,3} = \frac{1}{2}(D_{1,2} \cdot C_{1,2} + 2D_{1,3} \cdot C_{1,1})$$

Объединяя два расчета, для функции $H(y) = \frac{1}{2}(e^{D(y)} + e^{-D(y)})$ получаем

$$H_{1,1} = \frac{1}{2}(B_{1,1} + C_{1,1});$$

$$\boxed{w=2} \quad H_{1,2} = \frac{1}{2}(B_{1,2} + C_{1,2});$$

$$\boxed{w=3} \quad H_{1,3} = \frac{1}{4}(B_{1,3} + C_{1,3})$$

Одномерная рекуррентная формула для функции $F(y) = \text{arctg}(H(y))$ имеет вид (табл. П.8)

$$F_{1,w} = \frac{1}{(w-1) \cdot (H_{1,1}^2 + 1)} \left((w-1)H_{1,w} - \sum_{i=0}^{w-3} (i+1)F_{1,i+2} \cdot \left(\sum_{q=0}^{w-2-i} H_{1,q+1} \cdot H_{1,w-1-i-q} \right) \right)$$

Изменяем второй индекс:

$$F_{1,1} = \text{arctg}(H_{1,1});$$

$$\boxed{w=2} \quad F_{1,2} = \frac{H_{1,2}}{1+H_{1,1}^2};$$

$$\boxed{w=3} \quad F_{1,3} = \frac{1}{2(1+H_{1,1}^2)}(2H_{1,3} - 2F_{1,2} \cdot H_{1,2} \cdot H_{1,1})$$

Подставляя в формулы аналитические выражения:

$$F_{1,1} = F(x, y); \quad D_{2,1} = \frac{dD(x, y)}{dx}; \quad D_{1,2} = \frac{dD(x, y)}{dy}; \quad D_{2,2} = \frac{d^2 D(x, y)}{dxdy}; \dots$$

получаем аналитические выражения одномерных производных.

Определяем нормированные двумерные производные функции

$$H(x, y) = \text{ch} D(x, y) = \frac{1}{2}(e^{D(x, y)} + e^{-D(x, y)}) = \frac{1}{2}(B(x, y) + C(x, y)) .$$

Результаты расчета двумерных нормированных производных сведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

k	w	$F_{k,w}$
2	2	$B_{2,2} = D_{2,1} \cdot B_{1,2} + D_{2,2} \cdot B_{1,1}; \quad C_{2,2} = D_{2,1} \cdot C_{1,2} + D_{2,2} \cdot C_{1,1};$ $H_{2,2} = \frac{1}{2}(B_{2,2} + C_{2,2});$
2	3	$B_{2,3} = D_{2,1} \cdot B_{1,3} + D_{2,2} \cdot B_{1,2} + D_{2,3} \cdot B_{1,1};$ $C_{2,3} = D_{2,1} \cdot C_{1,3} + D_{2,2} \cdot C_{1,2} + D_{2,3} \cdot C_{1,1}; \quad H_{2,3} = \frac{1}{2}(B_{2,3} + C_{2,3})$
3	2	$B_{3,2} = \frac{1}{2}(D_{2,1} \cdot B_{2,2} + 2D_{3,1} \cdot B_{1,2} + D_{2,2} \cdot B_{2,1} + 2D_{3,2} \cdot B_{1,1});$ $C_{3,2} = \frac{1}{2}(D_{2,1} \cdot C_{2,2} + 2D_{3,1} \cdot C_{1,2} + D_{2,2} \cdot C_{2,1} + 2D_{3,2} \cdot C_{1,1});$ $H_{3,2} = \frac{1}{2}(B_{3,2} + C_{3,2})$
3	3	$B_{3,3} = \frac{1}{2}(D_{2,1} \cdot B_{2,3} + 2D_{3,1} \cdot B_{1,3} + D_{2,2} \cdot B_{2,2} + 2D_{3,2} \cdot B_{1,2} + D_{2,3} \cdot B_{2,1} +$ $+ 2D_{3,3} \cdot B_{1,1});$ $C_{3,3} = \frac{1}{2}(D_{2,1} \cdot C_{2,3} + 2D_{3,1} \cdot C_{1,3} + D_{2,2} \cdot C_{2,2} + 2D_{3,2} \cdot C_{1,2} + D_{2,3} \cdot C_{2,1} +$ $+ 2D_{3,3} \cdot C_{1,1}); \quad H_{3,3} = \frac{1}{2}(B_{3,3} + C_{3,3})$

Определяем двумерные нормированные производные функции $F(x, y) = \arctg(H(x, y))$ и сводим результаты в табл. 3.4. Подставляя в формулы найденные аналитические производные, получаем аналитические двумерные нормированные производные заданной составной функции.

Теорема 3.5. Заданы двумерные функции $U(x, y)$, $V(x, y)$ и найдены их нормированные аналитические функции производных

$$U = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & \dots \\ y^0 & \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{2,1} & U_{3,1} & U_{4,1} & \dots \end{bmatrix} \\ y^1 & \begin{bmatrix} U_{1,2} & U_{2,2} & U_{3,2} & U_{4,2} & \dots \end{bmatrix} \\ y^2 & \begin{bmatrix} U_{1,3} & U_{2,3} & U_{3,3} & U_{4,3} & \dots \end{bmatrix} \\ y^3 & \begin{bmatrix} U_{1,4} & U_{2,4} & U_{3,4} & U_{4,4} & \dots \end{bmatrix} \\ \vdots & \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix} ; \quad V = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & \dots \\ y^0 & \begin{bmatrix} V_{1,1} & V_{2,1} & V_{3,1} & V_{4,1} & \dots \end{bmatrix} \\ y^1 & \begin{bmatrix} V_{1,2} & V_{2,2} & V_{3,2} & V_{4,2} & \dots \end{bmatrix} \\ y^2 & \begin{bmatrix} V_{1,3} & V_{2,3} & V_{3,3} & V_{4,3} & \dots \end{bmatrix} \\ y^3 & \begin{bmatrix} V_{1,4} & V_{2,4} & V_{3,4} & V_{4,4} & \dots \end{bmatrix} \\ \vdots & \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix} .$$

Тогда нормированные аналитические производные функции деления $F(x, y) = \frac{U(x, y)}{V(x, y)}$ определяются по следующей двумерной рекуррентной формуле

$$F_{k,w} = U \circledast V = \frac{1}{V_{1,1}} \cdot \left(U_{k,w} - \sum_{\xi=0}^{w-2} F_{k,\xi+1} \cdot V_{1,w-\xi} - \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} F_{i+1,\xi+1} V_{k-i,w-\xi} \right) \quad (3.18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для определения производных функции деления одной переменной x $F(x) = \frac{U(x)}{V(x)}$ запишем нормированное рекуррентное уравнение

$$\sum_{i=0}^{k-1} F_{i+1} \cdot V_{k-i} = U_k \quad .$$

Введем функцию $\Phi = F_{i+1} \cdot V_{k-i}$ и допустим, что эта функция зависит от переменной y : $\Phi(y) = U_{i+1}(y) \cdot V_{k-i}(y)$. Тогда ее нормированные аналитические производные можно найти по рекуррентной формуле Лейбница-Коши

$$\Phi_w = \sum_{\xi=0}^{w-1} (F_{i+1})_{\xi+1} \cdot (V_{k-i})_{w-\xi} = \sum_{\xi=0}^{w-1} F_{i+1,\xi+1} \cdot V_{k-i,w-\xi} \quad .$$

Подставляем эту формулу в рекуррентное одномерное уравнение и получаем двумерное рекуррентное уравнение

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} F_{i+1,\xi+1} \cdot V_{k-i,w-\xi} = U_{k,w} \quad ,$$

которое решаем относительно $F_{k,w}$

$$F_{k,w} \cdot V_{1,1} + \sum_{\xi=0}^{w-2} F_{k,\xi+1} \cdot V_{1,w-\xi} + \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} F_{i+1,\xi+1} \cdot V_{k-i,w-\xi} = U_{k,w} \quad ,$$

что требовалось доказать.

Пример 3.6.

Рассмотрим двумерную функцию

$$F(D(x, y)) = \frac{E(D(x, y))}{L(D(x, y))} = \frac{e^{D(x, y)}}{\ln D(x, y)} \quad ,$$

для которой известны аналитические нормированные производные (3.14) .

Выполним двумерное p -дифференцирование функции $F(D(x, y))$. Нормированные двумерные производные функции $E(D(x, y))$ уже найдены в примере 3.1, и некоторые из них сведены в табл.3.5. Нормированные двумерные производные функции $L(D(x, y))$ найдены в примере 3.4 и сведены в табл. 3.6.

Применяя двумерную рекуррентную формулу (3.18) , находим двумерные производные заданной функции $F(D(x, y))$ и записываем в табл.3.7.

Таблица 3.4

k	w	$F_{k,w}$
2	2	$F_{2,2} = \frac{1}{1 + H_{1,1}^2} (H_{2,2} - 2F_{2,1} \cdot H_{1,2} \cdot H_{1,1})$
2	3	$F_{2,3} = \frac{1}{1 + H_{1,1}^2} (H_{2,3} - 2F_{2,2} \cdot H_{1,2} \cdot H_{1,1} - F_{2,1} \cdot (2H_{1,3} \cdot H_{1,1} + H_{1,2}^2))$
3	2	$F_{3,2} = \frac{1}{1 + H_{1,1}^2} (H_{3,2} - F_{2,2} \cdot H_{2,1} \cdot H_{1,1} - F_{2,1} \cdot (H_{2,2} \cdot H_{1,1} + H_{1,2} \cdot H_{2,1}) - 2F_{3,1} \cdot H_{1,2} \cdot H_{1,1})$
3	3	$F_{3,3} = \frac{1}{1 + H_{1,1}^2} (H_{3,3} - F_{2,1} \cdot (H_{2,3} \cdot H_{1,1} + H_{1,3} \cdot H_{2,1} + H_{1,2} \cdot H_{2,2}) - F_{2,3} \cdot H_{2,1} \cdot H_{1,1} - F_{2,2} \cdot (H_{2,2} \cdot H_{1,1} + H_{1,2} \cdot H_{2,1}) - F_{3,1} \cdot (2H_{1,3} \cdot H_{1,1} + H_{1,2}^2) - 2F_{3,2} \cdot H_{1,2} \cdot H_{1,1})$

Таблица 3.5

k	w	$E_{k,w}$
1	2	$E_{1,2} = D_{1,2} \cdot E_{1,1}$
2	1	$E_{2,1} = D_{2,1} \cdot E_{1,1}$
1	3	$E_{1,3} = \frac{1}{2} (D_{1,2} \cdot E_{1,2} + 2D_{1,3} \cdot E_{1,1})$
3	1	$E_{3,1} = \frac{1}{2} (D_{2,1} \cdot E_{2,1} + 2D_{3,1} \cdot E_{1,1})$
2	2	$E_{2,2} = D_{2,1} \cdot E_{1,2} + D_{2,2} \cdot E_{1,1}$
2	3	$E_{2,3} = D_{2,1} \cdot E_{1,3} + D_{2,2} \cdot E_{1,2} + D_{2,3} \cdot E_{1,1}$
3	2	$E_{3,2} = \frac{1}{2} (D_{2,1} \cdot E_{2,2} + 2D_{3,1} \cdot E_{1,2} + D_{2,2} \cdot E_{2,1} + 2D_{3,2} \cdot E_{1,1})$
3	3	$E_{3,3} = \frac{1}{2} (D_{2,1} \cdot E_{2,3} + 2D_{3,1} \cdot E_{1,3} + D_{2,2} \cdot E_{2,2} + 2D_{3,2} \cdot E_{1,2} + D_{2,3} \cdot E_{2,1} + 2D_{3,3} \cdot E_{1,1})$

Подставляя во все рекуррентные формулы аналитические выражения производных, получим аналитические нормированные двумерные производные заданной функции.

Аналитические выражения производных получаются сложными для использования, но сложность выражений определяется самими производными и не зависит от примененных рекуррентных формул. Более того, рекуррентное исчисление отличается тем, что выдает результат в наиболее сжатой, компактной форме, которая не может быть сокращена никакими другими способами. Пользователю надо решить, нужны ли ему аналитические производные. Бесспорно, они содержат значительно больше информации о

функции, чем численные производные, но этот способ извлечения информации имеет большую трудоемкость.

Таблица 3.6

k	w	$L_{k,w}$
1	2	$L_{1,2} = D_{1,2} / D_{1,1}$
2	1	$L_{2,1} = D_{2,1} / D_{1,1}$
1	3	$L_{1,3} = (2D_{1,3} - L_{1,2} \cdot D_{1,2}) / (2D_{1,1})$
3	1	$L_{3,1} = (2D_{3,1} - L_{2,1} \cdot D_{2,1}) / (2D_{1,1})$
2	2	$L_{2,2} = (D_{2,2} - L_{2,1} \cdot D_{1,2}) / D_{1,1}$
2	3	$L_{2,3} = (D_{2,3} - L_{2,1} \cdot D_{1,3} - L_{2,2} \cdot D_{1,2}) / D_{1,1}$
3	2	$L_{3,2} = (2D_{3,2} - 2L_{3,1} \cdot D_{1,2} - L_{2,2} \cdot D_{2,1} - L_{2,1} \cdot D_{2,2}) / (2D_{1,1})$
3	3	$L_{3,3} = (4D_{3,3} - 4L_{3,2} \cdot D_{1,2} - 2L_{2,3} \cdot D_{2,1} - 2L_{2,2} \cdot D_{2,2} - 4L_{3,1} \cdot D_{1,3} -$ $- 2L_{2,1} \cdot D_{2,3}) / (4D_{1,1})$

Таблица 3.7

k	w	$F_{k,w}$
1	1	$F_{1,1} = E_{1,1} / L_{1,1}$
1	2	$F_{1,2} = (E_{1,2} - F_{1,1} \cdot L_{1,2}) / L_{1,1}$
2	1	$F_{2,1} = (E_{2,1} - F_{1,1} \cdot L_{2,1}) / L_{1,1}$
1	3	$F_{1,3} = (E_{1,3} - F_{1,1} \cdot L_{1,3} - F_{1,2} \cdot L_{1,2}) / L_{1,1}$
3	1	$F_{3,1} = (E_{3,1} - F_{1,1} \cdot L_{3,1} - F_{2,1} \cdot L_{2,1}) / L_{1,1}$
2	2	$F_{2,2} = (E_{2,2} - F_{1,2} \cdot L_{2,1} - F_{2,1} \cdot L_{1,2} - F_{1,1} \cdot L_{2,2}) / L_{1,1}$
2	3	$F_{2,3} = (E_{2,3} - F_{1,3} \cdot L_{2,1} - F_{2,1} \cdot L_{1,3} - F_{1,2} \cdot L_{2,2} - F_{2,2} \cdot L_{1,2} - F_{1,1} \cdot L_{2,3}) / L_{1,1}$
3	2	$F_{3,2} = (E_{3,2} - F_{1,2} \cdot L_{3,1} - F_{3,1} \cdot L_{1,2} - F_{2,1} \cdot L_{2,2} - F_{2,2} \cdot L_{2,1} - F_{1,1} \cdot L_{3,2}) / L_{1,1}$
3	3	$F_{3,3} = (E_{3,3} - F_{1,2} \cdot L_{3,2} - F_{2,1} \cdot L_{2,3} - F_{1,3} \cdot L_{3,1} - F_{3,1} \cdot L_{1,3} - F_{2,2} \cdot L_{2,2} -$ $- F_{2,3} \cdot L_{2,1} - F_{3,2} \cdot L_{1,2} - F_{1,1} \cdot L_{3,3}) / L_{1,1}$

Более эффективным является численный способ извлечения информации, который описывается в следующих разделах. Основой аналитического и численного рекуррентного дифференцирования являются двумерные рекуррентные уравнения (формулы), в которые можно подставлять аналитические выражения найденных производных или их численные значения.

Раздел 3.2. Двумерное обратное рекуррентное дифференцирование (двумерное численное обратное p -дифференцирование)

Задано двумерное уравнение

$$F(x, y, D(x, y)) = 0 \quad (3.20)$$

с нормированными двумерными производными

$$F_{k,w} = \frac{1}{(k-1)! (w-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left(\frac{\partial^{w-1} F(x, y)}{\partial y^{w-1}} \right) \Big|_{x_0, y_0}, \quad (k = 1, 2, \dots; w = 1, 2, \dots), \quad (3.21)$$

где $F_{1,1} = F(x_0, y_0)$; $l!$ – обозначает факториал. Для уравнения (3.20) необходимо найти двумерные численные нормированные производные

$$d_{k,w} = \frac{1}{(k-1)! (w-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left(\frac{\partial^{w-1} D(x, y)}{\partial y^{w-1}} \right) \Big|_{x_0, y_0}, \quad (k = 1, 2, \dots; w = 1, 2, \dots) \quad (3.22)$$

где $d_{1,1} = D(x_0, y_0)$. Совокупность нормированных производных удобно представить в матричной форме

$$F = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} F_{1,1} & F_{2,1} & F_{3,1} & F_{4,1} & \dots \\ F_{1,2} & F_{2,2} & F_{3,2} & F_{4,2} & \dots \\ F_{1,3} & F_{2,3} & F_{3,3} & F_{4,3} & \dots \\ F_{1,4} & F_{2,4} & F_{3,4} & F_{4,4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad D = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{2,1} & d_{3,1} & d_{4,1} & \dots \\ d_{1,2} & d_{2,2} & d_{3,2} & d_{4,2} & \dots \\ d_{1,3} & d_{2,3} & d_{3,3} & d_{4,3} & \dots \\ d_{1,4} & d_{2,4} & d_{3,4} & d_{4,4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.23)$$

Нумерация нормированных производных в этой матрице отличается от принятого обозначения элементов матрицы [28–31], в котором первый индекс должен обозначать номер строки, а второй индекс – номер столбца. В матрицах (3.23) первый индекс обозначает порядок производной по первой переменной x , а второй индекс – порядок производной по второй переменной y . Такие обозначения сохраняют преемственность с обозначениями предыдущих разделов, в которых рассматривались производные одной переменной x . Действительно, для одной переменной x полагаем в матрицах (3.23) y^0 , и тогда нормированные производные одной переменной x определяет первая строка матрицы

$$d_{1,1}, d_{2,1}, d_{3,1}, d_{4,1}, \dots,$$

а второй индекс, равный 1, означает отсутствие второй переменной и может быть опущен. Именно так в виде строки было принято записывать производные одной переменной.

Рассмотрим уравнения более общего вида

$$F1(D(x, y)) + F2(D(x, y)) + \dots = 0. \quad (3.24)$$

Для уравнения (3.24) из свойства дифференцируемых функций следует уравнение для двумерных нормированных производных

$$(F1)_{k,w} + (F2)_{k,w} + \dots = 0, \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (3.25)$$

В зависимости от способа вычисления двумерных производных в уравнении (3-25) приходим к многомерному классическому дифференциальному исчислению или рекуррентному дифференциальному исчислению. Действительно, дифференцируя функции $F1(D(x,y))$, $F2(D(x,y))$, ... по классическим правилам дифференцирования сложной функции, приходим к задаче неявного классического дифференцирования. Однако возможен другой путь, заключающийся в замене производных функций $F1(D(x,y))$, $F2(D(x,y))$, ... их прямыми рекуррентными формулами (раздел 3.1), что приводит к обратному рекуррентному дифференцированию.

Лемма 3.5. Задана двумерная дифференцируемая функция $F(D(x,y))$, имеющая двумерную прямую рекуррентную формулу. Тогда замена статуса искомых и заданных производных приводит к задаче обратного рекуррентного дифференцирования.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим прямую двумерную рекуррентную формулу функции $F(D(x,y))$ через Ξ и развернем рекуррентные выражения:

$$F_{2,2} = \Xi(F_{1,1}, F_{2,1}, F_{1,2}, d_{1,1}, d_{2,1}, d_{1,2}, d_{2,2});$$

$$F_{2,3} = \Xi(F_{1,1}, F_{2,1}, F_{1,2}, F_{1,3}, F_{2,2}, d_{1,1}, d_{2,1}, d_{1,2}, d_{1,3}, d_{2,2}, d_{2,3});$$

⋮

$$F_{k,w} = \Xi(F_{1,1}, F_{2,1}, \dots, F_{k-1,1}, F_{1,2}, \dots, F_{1,w-1}, F_{2,2}, \dots, F_{k-1,2}, \dots, F_{k-1,w-1}, \\ d_{1,1}, d_{2,1}, \dots, d_{k,1}, d_{1,2}, \dots, d_{1,w}, d_{2,2}, \dots, d_{k,2}, \dots, d_{k,w})$$

Структура прямых рекуррентных формул допускает разделение на рекуррентные формулы отдельных компонент:

$$F_{2,2} = \Upsilon_A(F_{1,1}, F_{2,1}, F_{1,2}, d_{1,1}, d_{2,1}, d_{1,2}) \cdot d_{2,2} +$$

$$+ \Upsilon_B(F_{1,1}, F_{2,1}, F_{1,2}, d_{1,1}, d_{2,1}, d_{1,2}) = A_{2,2} \cdot \boxed{d_{2,2}} + B_{2,2};$$

$$F_{2,3} = \Upsilon_A(F_{1,1}, F_{2,1}, F_{1,2}, F_{1,3}, F_{2,2}, d_{1,1}, d_{2,1}, d_{1,2}, d_{1,3}, d_{2,2}) \cdot d_{2,3} +$$

$$+ \Upsilon_B(F_{1,1}, F_{2,1}, F_{1,2}, F_{1,3}, F_{2,2}, d_{1,1}, d_{2,1}, d_{1,2}, d_{1,3}, d_{2,2}) = A_{2,3} \cdot \boxed{d_{2,3}} + B_{2,3};$$

⋮

$$F_{k,w} = \Upsilon_A(F_{1,1}, F_{2,1}, \dots, F_{k-1,1}, F_{1,2}, \dots, F_{1,w-1}, F_{2,2}, \dots, F_{k-1,2}, \dots, F_{k-1,w-1}, \\ d_{1,1}, d_{2,1}, \dots, d_{k,1}, d_{1,2}, \dots, d_{1,w}, d_{2,2}, \dots, d_{k,2}, \dots, d_{k-1,w}, \dots, d_{k,w-1}) \cdot d_{k,w} + \\ + \Upsilon_B(F_{1,1}, F_{2,1}, \dots, F_{k-1,1}, F_{1,2}, \dots, F_{1,w-1}, F_{2,2}, \dots, F_{k-1,2}, \dots, F_{k-1,w-1}, \\ d_{1,1}, d_{2,1}, \dots, d_{k,1}, d_{1,2}, \dots, d_{1,w}, d_{2,2}, \dots, d_{k,2}, \dots, d_{k-1,w}, \dots, d_{k,w-1}) = \\ = A_{k,w} \cdot \boxed{d_{k,w}} + B_{k,w}$$

Изменим в рекуррентных формулах статус производных и примем производные функции $F_{k,w}$ как заданные, а производные $d_{k,w}$ как искомые

(в формулах они окаймлены). Тогда приходим к двумерному рекуррентному соотношению обратного рекуррентного дифференцирования

$$F_{k,w} = A_{k,w} \cdot d_{k,w} + B_{k,w}, \quad (3.26)$$

что требовалось доказать.

В табл. П.19 – П.22 приведены двумерные рекуррентные уравнения, а в табл. П.23 – П.25 – двумерные рекуррентные формулы, полученные при аналитическом решении двумерных рекуррентных уравнений. Эти уравнения и формулы предназначены для прямого двумерного p -дифференцирования. Для реализации обратного рекуррентного дифференцирования необходимы обратные рекуррентные формулы, которые можно получить из прямых двумерных формул (табл. П.23 – П.25), решая их аналитически относительно переменной $d_{k,w}$. Найденные рекуррентные обратные формулы приведены в табл. П.26, П.27. Сложность вывода обратных формул состоит в том, что двумерные рекуррентные уравнения аналитически решаются дважды – для получения прямых формул из уравнений и получения обратных формул из прямых. Бесспорно, для любого рекуррентного уравнения можно найти аналитические решения, но сложность результата может сделать их практически непригодными. В действительности, нет необходимости в двукратном аналитическом решении рекуррентных уравнений, если применить численный способ сортировки слагаемых рекуррентного уравнения и их распределения между переменными $F_{k,w}$ и $d_{k,w}$ в соответствии с уравнением обратного дифференцирования (3.26).

Лемма 3.6. Для численной реализации обратного рекуррентного дифференцирования двумерной функции $F(D(x,y))$ необходима численная реализация двух одномерных обратных рекуррентных дифференцирований

$$F_{k,1} = A_{k,1} \cdot d_{k,1} + B_{k,1}; \quad F_{1,w} = A_{1,w} \cdot d_{1,w} + B_{1,w}, \quad (k, w = 2, 3, \dots) \quad (3.27)$$

по переменным x и y .

Доказательство. Запишем для функции $F(D(x,y))$ двумерные рекуррентные формулы компонент:

$$\begin{aligned} F_{2,2} &= \Upsilon_A(F_{1,1}, F_{2,1}, F_{1,2}, d_{1,1}, d_{2,1}, d_{1,2}) \cdot d_{2,2} + \\ &+ \Upsilon_B(F_{1,1}, F_{2,1}, F_{1,2}, d_{1,1}, d_{2,1}, d_{1,2}) = A_{2,2} \cdot d_{2,2} + B_{2,2}; \\ F_{2,3} &= \Upsilon_A(F_{1,1}, F_{2,1}, F_{1,2}, F_{1,3}, F_{2,2}, d_{1,1}, d_{2,1}, d_{1,2}, d_{1,3}, d_{2,2}) \cdot d_{2,3} + \\ &+ \Upsilon_B(F_{1,1}, F_{2,1}, F_{1,2}, F_{1,3}, F_{2,2}, d_{1,1}, d_{2,1}, d_{1,2}, d_{1,3}, d_{2,2}) = \\ &= A_{2,3} \cdot d_{2,3} + B_{2,3}; \\ F_{3,2} &= \Upsilon_A(F_{1,1}, F_{2,1}, F_{3,1}, F_{1,2}, F_{2,2}, d_{1,1}, d_{2,1}, d_{3,1}, d_{1,2}, d_{2,2}) \cdot d_{2,3} + \end{aligned}$$

$$+Y_B(F_{1,1}, F_{2,1}, F_{3,1}, F_{1,2}, F_{2,2}, d_{1,1}, d_{2,1}, d_{3,1}, d_{1,2}, d_{2,2}) = \\ = A_{3,2} \cdot d_{3,2} + B_{3,2};$$

⋮

Из формул следует, что для расчета

$$d_{2,2} = \frac{F_{2,2} - B_{2,2}}{A_{2,2}}; d_{2,3} = \frac{F_{2,3} - B_{2,3}}{A_{2,3}}; d_{3,2} = \frac{F_{3,2} - B_{3,2}}{A_{3,2}}; \dots$$

необходимо предварительно вычислить

$$d_{2,1}, d_{3,1}, d_{4,1}, \dots, d_{k,1}; d_{1,2}, d_{1,3}, d_{1,4}, \dots, d_{1,w}, \quad (k, w = 2, 3, \dots)$$

соответственно принятой нумерации индексов в матрицах (3.23) по переменным x и y , что требовалось доказать.

Теорема 3.6. Для уравнения (3.24) численные нормированные двумерные производные $D(x, y)$ вычисляются по формуле двумерного обратного рекуррентного дифференцирования

$$d_{k,w} = \frac{-(B1)_{k,w} - (B2)_{k,w} - \dots}{(A1)_{k,w} + (A2)_{k,w} + \dots}. \quad (3.28)$$

Для уравнения

$$F1(D(x, y)) + F2(D(x, y)) + \dots = G(x, y) \quad (3.29)$$

численные нормированные двумерные производные $D(x, y)$ вычисляются по формуле обратного рекуррентного дифференцирования

$$d_{k,w} = \frac{G_{k,w} - (B1)_{k,w} - (B2)_{k,w} - \dots}{(A1)_{k,w} + (A2)_{k,w} + \dots}, \quad (3.30)$$

где $(A1)_{k,w}, (A2)_{k,w}, \dots, (B1)_{k,w}, (B2)_{k,w}, \dots$ — компоненты двумерных рекуррентных формул $(Y1A)_{k,w}, (Y2A)_{k,w}, \dots$

$\dots, (Y1B)_{k,w}, (Y2B)_{k,w}, \dots$; $G_{k,w}$ — двумерная нормированная производная функции $G(x, y)$, вычисленная прямым двумерным рекуррентным дифференцированием. Численный расчет производных функций $F1(D(x, y)), F2(D(x, y)), \dots$ выполняется согласно формуле (3.26)

$$(F1)_{k,w} = (A1)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (B1)_{k,w}; (F2)_{k,w} = (A2)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (B2)_{k,w}; \dots (3.31)$$

где $d_{k,w}$ определены по формулам (3.28) или (3.30) для уравнения (3.29).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполним для функций $F1(D(x, y)), F2(D(x, y)), \dots$ двумерное обратное дифференцирование согласно формуле (3.26) и, не вычисляя производные функций $F1(D(x, y)), F2(D(x, y)), \dots$, подставим выражения (3.31) в уравнение для производных (3.25)

$$((A1)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (B1)_{k,w}) + ((A2)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (B2)_{k,w}) + \dots = 0,$$

откуда получаем формулу (3.28). В уравнении (3.29) функция $G(x, y)$ не содержит внутренней функции $D(x, y)$, и потому уравнение для производных

(3-25) принимает вид

$$(F1)_{k,w} + (F2)_{k,w} + \dots = G_{k,w}, \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (3.32)$$

Подставляя выражения (3.31) в уравнение (3.32), получаем формулу (3.30). Найденные по формулам (3.28) или (3.30) значения производных $d_{k,w}$ могут быть подставлены в формулы (3.31) для расчета производных функций $F1(D(x,y))$, $F2(D(x,y))$, ..., что требовалось доказать.

Пример 3.7.

Рассмотрим двумерное уравнение

$$F1(D(x,y)) = G(x,y), \quad (3.33)$$

в котором функция $G(x,y)$ не содержит аргумент $D(x,y)$, и ее нормированные производные могут быть вычислены прямым двумерным рекуррентным дифференцированием. Задачу обратного рекуррентного дифференцирования решим так, чтобы можно было проверить достоверность и точность ее решения. С этой целью предварительно зададим внутреннюю функцию при смещении $x_0 = y_0 = 0$

$$D(x,y) = 1 + 2x + x^2 + 2y + y^2 - xy + x^2y + xy^2 - x^2y^2.$$

Выбрав двумерную функцию $F1(D(x,y))$, для известной функции $D(x,y)$ можно определить численные производные $F1(D(x,y))$ прямым двумерным рекуррентным дифференцированием. Тогда, согласно уравнению (3.33), вычисленные производные равны соответствующим производным функции $G(x,y)$. Следовательно, в процессе численного решения задачи обратного рекуррентного дифференцирования уравнения (3.33) с известной функцией $G(x,y)$ должны быть получены коэффициенты функции $D(x,y)$. Согласно лемме 3.6, для вычисления двумерных производных функции $D(x,y)$ необходимо предварительно вычислить одномерные нормированные производные, удовлетворяющие одномерным уравнениям (3.33) по переменным x и y . Найдем первый коэффициент функции $D(x,y)$ из численного уравнения

$$F1(d_{1,1}) = G_{1,1} \quad (3.34)$$

1. Выберем двумерную функцию $F1(D(x,y)) = \ln D(x,y)$.

Прямое рекуррентное дифференцирование определяет численные двумерные производные функции $G(x,y)$ для $x = y = 0$, которые представим в виде известной матрицы вида (3.23)

$$G = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{2,1} & G_{3,1} & G_{4,1} & G_{5,1} \\ G_{1,2} & G_{2,2} & G_{3,2} & G_{4,2} & G_{5,2} \\ G_{1,3} & G_{2,3} & G_{3,3} & G_{4,3} & G_{5,3} \\ G_{1,4} & G_{2,4} & G_{3,4} & G_{4,4} & G_{5,4} \\ G_{1,5} & G_{2,5} & G_{3,5} & G_{4,5} & G_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 0,66666 & -0,5 \\ 2 & -5 & 9 & -13 & 17 \\ -1 & 9 & -30,5 & 72 & -141,5 \\ 0,66666 & -13 & 72 & -253,67 & 694 \\ -0,5 & 17 & -141,5 & 694 & -2512,3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Запишем для заданной функции $F1(D(x,y))$ формулы одномерного обратного рекуррентного дифференцирования (табл. П.16) с другими обозначениями:

$$A_{k,1} = \frac{1}{d_{1,1}} ; B_{k,1} = \frac{1}{(k-1)d_{1,1}} \left(- \sum_{q=0}^{k-3} (q+1) \cdot (F1)_{q+2,1} \cdot d_{k-1-q,1} \right) ; \quad (3.35a)$$

$$A_{1,w} = \frac{1}{d_{1,1}} ; B_{1,w} = \frac{1}{(w-1)d_{1,1}} \left(- \sum_{q=0}^{w-3} (q+1) \cdot (F1)_{1,q+2} \cdot d_{1,k-1-q} \right)$$

Численные результаты одномерного обратного дифференцирования представлены в виде матрицы (3.23)

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{2,1} & d_{3,1} & d_{4,1} & d_{5,1} \\ d_{1,2} & - & - & - & - \\ d_{1,3} & - & - & - & - \\ d_{1,4} & - & - & - & - \\ d_{1,5} & - & - & - & - \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & - & - & - & - \\ 1 & - & - & - & - \\ 0 & - & - & - & - \\ 0 & - & - & - & - \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Запишем двумерные формулы обратного рекуррентного дифференцирования функции $F1(D(x,y))$ (табл. П.24) с другими обозначениями

$$(A1)_{k,w} = (A1)_{1,1} = \frac{1}{d_{1,1}} ; (B1)_{k,w} = \frac{-1}{(k-1)d_{1,1}} \left((k-1) \sum_{\xi=0}^{w-2} (F1)_{k,\xi+1} d_{1,w-\xi} + \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{k-3} \sum_{\xi=0}^{w-1} (i+1) \cdot (F1)_{i+2,\xi+1} \cdot d_{k-1-i,w-\xi} \right) , \quad (k,w = 2,3,\dots) \quad (3.35b)$$

где в формуле $(B1)_{k,w}$ используются вычисленные ранее двумерные производные функций $D(x,y)$, $F1(D(x,y))$. Искомая двумерная производная определяется по формуле (3.30)

$$d_{k,w} = \frac{G_{k,w} - (B1)_{k,w}}{(A1)_{k,w}} , \quad (k,w = 2,3,\dots) \quad (3.36)$$

и ее найденное значение используется для расчета двумерной производной

$$(F1)_{k,w} = (A1)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (B1)_{k,w} .$$

Для заданной функции $F1(D(x,y))$ и вычисленным элементам матрицы D по формулам (3.35) вычисляем

$$d_{1,1} = 1 ; (A1)_{k,w} = (A1)_{1,1} = 1 , \quad (k,w = 2,3,\dots) .$$

и компоненты $(B1)_{k,w}$, представленные в виде матрицы (3.23),

$$B1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} (B1)_{1,1} & (B1)_{2,1} & (B1)_{3,1} & (B1)_{4,1} & (B1)_{5,1} \\ (B1)_{1,2} & (B1)_{2,2} & (B1)_{3,2} & (B1)_{4,2} & (B1)_{5,2} \\ (B1)_{1,3} & (B1)_{2,3} & (B1)_{3,3} & (B1)_{4,3} & (B1)_{5,3} \\ (B1)_{1,4} & (B1)_{2,4} & (B1)_{3,4} & (B1)_{4,4} & (B1)_{5,4} \\ (B1)_{1,5} & (B1)_{2,5} & (B1)_{3,5} & (B1)_{4,5} & (B1)_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ - & -4 & 8 & -13 & 17 \\ - & 8 & -29,5 & 72 & -141,5 \\ - & -13 & 72 & -253,67 & 694 \\ - & 17 & -141,5 & 694 & -2512,3 \end{bmatrix}$$

Двумерные численные производные функции $D(x,y)$ находим по формуле (3.36):

$$\boxed{k=2, w=2} \quad d_{2,2} = \frac{G_{2,2} - (B1)_{2,2}}{(A1)_{1,1}} = -1; \quad \boxed{k=3, w=2} \quad d_{3,2} = \frac{G_{3,2} - (B1)_{3,2}}{(A1)_{1,1}} = 1;$$

$$\boxed{k=3, w=3} \quad d_{3,3} = \frac{G_{3,3} - (B1)_{3,3}}{(A1)_{1,1}} = -1; \quad \boxed{k=4, w=2} \quad d_{4,2} = \frac{G_{4,2} - (B1)_{4,2}}{(A1)_{1,1}} = 0$$

Окончательный результат представим в виде матрицы (3.23)

$$D = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{2,1} & d_{3,1} & d_{4,1} & d_{5,1} \\ d_{1,2} & d_{2,2} & d_{3,2} & d_{4,2} & d_{5,2} \\ d_{1,3} & d_{2,3} & d_{3,3} & d_{4,3} & d_{5,3} \\ d_{1,4} & d_{2,4} & d_{3,4} & d_{4,4} & d_{5,4} \\ d_{1,5} & d_{2,5} & d_{3,5} & d_{4,5} & d_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Сравнение с заданными коэффициентами функции $D(x,y)$ показывает, что все 25 вычисленных производных содержат 15 верных значащих цифр.

2. Выберем двумерную функцию $F1(D(x,y)) = \arctg D(x,y)$.

Прямое рекуррентное дифференцирование определяет численные двумерные производные функции $G(x,y)$ для $x = y = 0$, которые представим в виде матрицы (3.23)

$$G = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{2,1} & G_{3,1} & G_{4,1} & G_{5,1} \\ G_{1,2} & G_{2,2} & G_{3,2} & G_{4,2} & G_{5,2} \\ G_{1,3} & G_{2,3} & G_{3,3} & G_{4,3} & G_{5,3} \\ G_{1,4} & G_{2,4} & G_{3,4} & G_{4,4} & G_{5,4} \\ G_{1,5} & G_{2,5} & G_{3,5} & G_{4,5} & G_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,7854 & 1 & -0,5 & -0,33333 & 0,75 \\ 1 & -2,5 & 2,5 & 0,5 & -4 \\ -0,5 & 2,5 & -3,25 & -3,5 & 14,75 \\ -0,33333 & 0,5 & -3,5 & 19,083 & -41,75 \\ 0,75 & -4 & 14,75 & -41,75 & 63 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Запишем для заданной функции $F1(D(x,y))$ формулы одномерного обратного рекуррентного дифференцирования (табл. П.17) с другими обозначениями:

$$A_{k,1} = \frac{1}{1 + D_{1,1}^2}; B_{k,1} = \frac{1}{(k-1)(1 + D_{1,1}^2)} \left(- \sum_{i=0}^{k-3} (i+1)(F1)_{i+2,1} \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-2-i} d_{q+1,1} \cdot d_{k-1-i-q,1} \right) \right)$$

$$A_{1,w} = \frac{1}{1 + D_{1,1}^2}; B_{1,w} = \frac{1}{(w-1)(1 + D_{1,1}^2)} \left(- \sum_{i=0}^{w-3} (i+1)(F1)_{1,i+2} \cdot \left(\sum_{q=0}^{w-2-i} d_{1,q+1} \cdot d_{1,w-1-i-q} \right) \right)$$

Численные результаты одномерного обратного дифференцирования представлены в виде матрицы (3.23) и определяют окаймление матрицы для дальнейших двумерных расчетов

$$D = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{2,1} & d_{3,1} & d_{4,1} & d_{5,1} \\ d_{1,2} & - & - & - & - \\ d_{1,3} & - & - & - & - \\ d_{1,4} & - & - & - & - \\ d_{1,5} & - & - & - & - \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & - & - & - & - \\ 1 & - & - & - & - \\ 0 & - & - & - & - \\ 0 & - & - & - & - \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Запишем двумерные формулы обратного рекуррентного дифференцирования функции $F1(D(x,y))$ (табл. П.27) в других обозначениях:

$$A_{k,w} = \frac{1}{1 + (D_{1,1})^2};$$

$$B_{k,w} = \frac{-1}{(k-1) \cdot (1 + (D_{1,1})^2)} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-3} (i+1)(F1)_{i+2, w} \cdot \sum_{r=0}^{k-2-i} d_{r+1, 1} \cdot d_{k-1-i-r, 1} + \right. \\ \left. + \sum_{\xi=1}^{w-1} \sum_{\zeta=0}^{\xi} ((k-1)(F1)_{k, w-\xi} \cdot d_{1, \zeta+1} \cdot d_{1, \xi+1-\zeta} + \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{k-3} (i+1)(F1)_{i+2, w-\xi} \cdot \sum_{r=0}^{k-2-i} d_{r+1, \zeta+1} \cdot d_{k-1-i-r, \xi+1-\zeta}) \right)$$

По этим формулам для выбранной функции $F1(D(x,y))$ и известным элементам матрицы D вычисляем

$$d_{1,1} = 1; (A1)_{k,w} = (A1)_{1,1} = 0,5, \quad (k, w = 2, 3, \dots).$$

и компоненты $(B1)_{k,w}$, представленные в виде матрицы (3.23)

$$B1 = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} (B1)_{1,1} & (B1)_{2,1} & (B1)_{3,1} & (B1)_{4,1} & (B1)_{5,1} \\ (B1)_{1,2} & (B1)_{2,2} & (B1)_{3,2} & (B1)_{4,2} & (B1)_{5,2} \\ (B1)_{1,3} & (B1)_{2,3} & (B1)_{3,3} & (B1)_{4,3} & (B1)_{5,3} \\ (B1)_{1,4} & (B1)_{2,4} & (B1)_{3,4} & (B1)_{4,4} & (B1)_{5,4} \\ (B1)_{1,5} & (B1)_{2,5} & (B1)_{3,5} & (B1)_{4,5} & (B1)_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ - & -2 & 2 & 0,5 & -4 \\ - & 2 & -2,75 & -3,5 & 14,75 \\ - & 0,5 & -3,5 & 19,083 & -41,75 \\ - & -4 & 14,75 & -41,75 & 63 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Двумерные численные производные функции $D(x,y)$ находим по формуле (3.36):

$$\boxed{k=2, w=2} \quad d_{2,2} = \frac{G_{2,2} - (B1)_{2,2}}{(A1)_{1,1}} = -1; \quad \boxed{k=3, w=2} \quad d_{3,2} = \frac{G_{3,2} - (B1)_{3,2}}{(A1)_{1,1}} = 1; \\ \boxed{k=3, w=3} \quad d_{3,3} = \frac{G_{3,3} - (B1)_{3,3}}{(A1)_{1,1}} = -1; \quad \boxed{k=4, w=2} \quad d_{4,2} = \frac{G_{4,2} - (B1)_{4,2}}{(A1)_{1,1}} = 0$$

Окончательный результат представим в виде матрицы (3.23), в которой из 25 вычисленных производных ненулевыми является 9 производных, значения которых действительно равны производным заданной внутренней функции $D(x,y)$:

$$D = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{2,1} & d_{3,1} & d_{4,1} & d_{5,1} \\ d_{1,2} & d_{2,2} & d_{3,2} & d_{4,2} & d_{5,2} \\ d_{1,3} & d_{2,3} & d_{3,3} & d_{4,3} & d_{5,3} \\ d_{1,4} & d_{2,4} & d_{3,4} & d_{4,4} & d_{5,4} \\ d_{1,5} & d_{2,5} & d_{3,5} & d_{4,5} & d_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Таким образом, сравнение с заданной функцией $D(x,y)$ показывает, что все результаты обратного дифференцирования содержат 15 верных значащих цифр.

Теорема 3.7. Задана двумерная функция

$$F = U(D(x, y)) \cdot V(D(x, y)), \quad (3.37)$$

для сомножителей которой выполнено обратное дифференцирование согласно формуле (3.26)

$$U_{k,w} = (AU)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (BU)_{k,w}; \quad V_{k,w} = (AV)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (BV)_{k,w} \quad (3.38)$$

Тогда нормированные численные производные функции (3.37) определяются по формуле

$$F_{k,w} = A_{k,w} \cdot d_{k,w} + B_{k,w}, \quad (3.39)$$

где компоненты двумерных обратных рекуррентных формул равны:

$$\begin{aligned} A_{k,w} &= V_{1,1} \cdot (AU)_{k,w} + U_{1,1} \cdot (AV)_{k,w}; \\ B_{k,w} &= V_{1,1} \cdot (BU)_{k,w} + U_{1,1} \cdot (BV)_{k,w} + U_{k,1} \cdot V_{1,w} + U_{1,w} \cdot V_{k,1} + \\ &+ \sum_{\xi=1}^{w-2} (U_{k,\xi+1} \cdot V_{1,w-\xi} + U_{1,\xi+1} \cdot V_{k,w-\xi}) + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} U_{i+1,\xi+1} \cdot V_{k-i,w-\xi} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Для частного случая двумерной функции

$$F = U(D(x, y)) \cdot V(x, y) \quad (3.41)$$

компоненты обратных рекуррентных формул равны:

$$\begin{aligned} A_{k,w} &= V_{1,1} \cdot (AU)_{k,w}; \\ B_{k,w} &= V_{1,1} \cdot (BU)_{k,w} + U_{1,w} \cdot V_{k,1} + \\ &+ \sum_{\xi=0}^{w-2} (U_{k,\xi+1} \cdot V_{1,w-\xi} + U_{1,\xi+1} \cdot V_{k,w-\xi}) + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} U_{i+1,\xi+1} \cdot V_{k-i,w-\xi} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Для частного случая двумерной функции

$$F = U(D(x, y)) \cdot D(x, y) \quad (3.43)$$

компоненты обратных рекуррентных формул равны:

$$\begin{aligned} A_{k,w} &= d_{1,1} \cdot (AU)_{k,w} + U_{1,1}; \\ B_{k,w} &= d_{1,1} \cdot (BU)_{k,w} + U_{k,1} \cdot d_{1,w} + U_{1,w} \cdot d_{k,1} + \\ &+ \sum_{\xi=1}^{w-2} (U_{k,\xi+1} \cdot d_{1,w-\xi} + U_{1,\xi+1} \cdot d_{k,w-\xi}) + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-2} U_{i+1,\xi+1} \cdot d_{k-i,w-\xi} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Для частного случая двумерной функции

$$F = D(x, y) \cdot V(x, y) \quad (3.45)$$

компоненты обратных рекуррентных формул равны:

$$\begin{aligned} A_{k,w} &= V_{1,1} ; \\ B_{k,w} &= d_{1,w} \cdot V_{k,1} + \sum_{\xi=0}^{w-2} (d_{k,\xi+1} \cdot V_{1,w-\xi} + d_{1,\xi+1} \cdot V_{k,w-\xi}) + \\ &+ \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} d_{i+1,\xi+1} \cdot V_{k-i,w-\xi} . \end{aligned} \quad (3.46)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Запишем двумерную прямую рекуррентную формулу (3.3) для производных функции произведения двух сомножителей (3.37)

$$F_{k,w} = U \odot V = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} U_{i+1,\xi+1} \cdot V_{k-i,w-\xi}$$

и выделим из нее производные $U_{k,w}$ и $V_{k,w}$

$$\begin{aligned} F_{k,w} &= V_{1,1} \cdot U_{k,w} + U_{1,1} \cdot V_{k,w} + U_{k,1} \cdot V_{1,w} + U_{1,w} \cdot V_{k,1} + \\ &+ \sum_{\xi=1}^{w-2} (U_{k,\xi+1} \cdot V_{1,w-\xi} + U_{1,\xi+1} \cdot V_{k,w-\xi}) + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} U_{i+1,\xi+1} \cdot V_{k-i,w-\xi} \end{aligned}$$

Выполним для функции произведения сомножителей двумерное обратное рекуррентное дифференцирование и подставим формулы (3.38) и (3.39) в выражение $F_{k,w}$

$$\begin{aligned} A_{k,w} \cdot d_{k,w} + B_{k,w} &= V_{1,1} \cdot ((A_U)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (B_U)_{k,w}) + \\ &+ U_{1,1} \cdot ((A_V)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (B_V)_{k,w}) + U_{k,1} \cdot V_{1,w} + U_{1,w} \cdot V_{k,1} + \\ &+ \sum_{\xi=1}^{w-2} (U_{k,\xi+1} \cdot V_{1,w-\xi} + U_{1,\xi+1} \cdot V_{k,w-\xi}) + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} U_{i+1,\xi+1} \cdot V_{k-i,w-\xi} \end{aligned}$$

откуда получаем формулы (3.40).

Для частного случая функции (3.41) сомножитель $V(x,y)$ не содержит внутреннюю функцию $D(x,y)$, и для него формула обратного дифференцирования (3.38) упрощается

$$V_{k,w} = (A_V)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (B_V)_{k,w} = 0 \cdot d_{k,w} + (B_V)_{k,w} .$$

Подставляя выражение в $F_{k,w}$ и включая некоторые слагаемые в суммы, получаем формулы (3.42).

Для частного случая функции (3.43) функция второго сомножителя включает только искомую функцию $D(x,y)$, и для него формула обратного дифференцирования (3.38) упрощается

$$V_{k,w} = (A_V)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (B_V)_{k,w} = 1 \cdot d_{k,w} + 0 .$$

Подставляя выражение в $F_{k,w}$, получаем формулы (3.44).

Частный случай функции (3.45) включает оба предыдущих частных случая

$$U_{k,w} = 1 \cdot d_{k,w} + 0 ; V_{k,w} = 0 \cdot d_{k,w} + (B_V)_{k,w} .$$

Подставляя выражения в $F_{k,w}$ и включая некоторые слагаемые в суммы, получаем формулы (3.45), что требовалось доказать.

Пример 3.8.

1. Зададим в функции (3.37) сомножители:

$$U(D(x, y)) = \sin(D(x, y)) ; V(x, y) = D(x, y) ,$$

в которых двумерные производные функции $D(x, y)$ представлены в виде известной матрицы

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{2,1} & d_{3,1} & d_{4,1} & d_{5,1} \\ d_{1,2} & d_{2,2} & d_{3,2} & d_{4,2} & d_{5,2} \\ d_{1,3} & d_{2,3} & d_{3,3} & d_{4,3} & d_{5,3} \\ d_{1,4} & d_{2,4} & d_{3,4} & d_{4,4} & d_{5,4} \\ d_{1,5} & d_{2,5} & d_{3,5} & d_{4,5} & d_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.47)$$

Применяя двумерную прямую рекуррентную формулу для функции $U(D(x, y))$, найдем ее численные производные и представим в виде матрицы

$$U = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{2,1} & U_{3,1} & U_{4,1} & U_{5,1} \\ U_{1,2} & U_{2,2} & U_{3,2} & U_{4,2} & U_{5,2} \\ U_{1,3} & U_{2,3} & U_{3,3} & U_{4,3} & U_{5,3} \\ U_{1,4} & U_{2,4} & U_{3,4} & U_{4,4} & U_{5,4} \\ U_{1,5} & U_{2,5} & U_{3,5} & U_{4,5} & U_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,84147 & 1,0806 & -1,1426 & -2,4033 & -0,94036 \\ 1,0806 & -3,9062 & -1,6209 & 0,32185 & 1,5826 \\ -1,1426 & -1,6209 & -1,8025 & 0,46359 & 4,3269 \\ -2,4033 & 0,32185 & 0,46359 & 8,7478 & -0,29283 \\ -0,94036 & 1,5826 & 4,3269 & -0,29283 & 3,1522 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.48)$$

Выполним двумерное прямое p -дифференцирование функции

$$G(D(x, y)) = \sin(D(x, y)) \cdot D(x, y)$$

и представим ее численные производные в виде матрицы (3.23)

$$G = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{2,1} & G_{3,1} & G_{4,1} & G_{5,1} \\ G_{1,2} & G_{2,2} & G_{3,2} & G_{4,2} & G_{5,2} \\ G_{1,3} & G_{2,3} & G_{3,3} & G_{4,3} & G_{5,3} \\ G_{1,4} & G_{2,4} & G_{3,4} & G_{4,4} & G_{5,4} \\ G_{1,5} & G_{2,5} & G_{3,5} & G_{4,5} & G_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,84147 & 2,7635 & 1,8600 & -3,6080 & -6,8897 \\ 2,7635 & -0,42524 & -10,877 & -9,4096 & -0,014674 \\ 1,8600 & -10,877 & -5,3455 & -11,031 & 2,4729 \\ -3,6080 & -9,4096 & -11,031 & 13,713 & 27,579 \\ -6,8897 & -0,014674 & 2,4729 & 27,579 & 4,6166 \end{bmatrix} \end{matrix} .$$

Теперь для задачи неявного дифференцирования зададим двумерное уравнение с известной матрицей G

$$U(D(x, y)) \cdot D(x, y) = G(x, y)$$

и найдем двумерные численные производные функции $D(x, y)$ для известной двумерной функции $G(x, y)$, применяя обратное p -дифференцирование. Численные результаты двух одномерных обратных дифференцирований по переменным x, y записаны в матрице (3.49)

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{2,1} & d_{3,1} & d_{4,1} & d_{5,1} \\ d_{1,2} & - & - & - & - \\ d_{1,3} & - & - & - & - \\ d_{1,4} & - & - & - & - \\ d_{1,5} & - & - & - & - \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & - & - & - & - \\ 1 & - & - & - & - \\ 0 & - & - & - & - \\ 0 & - & - & - & - \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (3.49)$$

Выполним обратное рекуррентное дифференцирование функции $U(D(x, y)) = \sin D(x, y)$ и определим для этой функции компоненты обратных рекуррентных формул:

$$(AU)_{k,w} = \sqrt{1 - U_{1,1}^2} = \sqrt{1 - (\sin(d_{1,1}))^2} = \cos(d_{1,1}) = 0,54030; \quad (k, w = 2, 3, \dots) \quad (3-50a)$$

$$B_U = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} (BU)_{1,1} & (BU)_{2,1} & (BU)_{3,1} & (BU)_{4,1} & (BU)_{5,1} \\ (BU)_{1,2} & (BU)_{2,2} & (BU)_{3,2} & (BU)_{4,2} & (BU)_{5,2} \\ (BU)_{1,3} & (BU)_{2,3} & (BU)_{3,3} & (BU)_{4,3} & (BU)_{5,3} \\ (BU)_{1,4} & (BU)_{2,4} & (BU)_{3,4} & (BU)_{4,4} & (BU)_{5,4} \\ (BU)_{1,5} & (BU)_{2,5} & (BU)_{3,5} & (BU)_{4,5} & (BU)_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ - & -3,3659 & -2,1612 & 0,32185 & 1,5826 \\ - & -2,1612 & -1,2622 & 0,46359 & 4,3269 \\ - & 0,32185 & 0,46359 & 8,7478 & -0,29283 \\ - & 1,5826 & 4,3269 & -0,29283 & 3,1522 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3-50b)$$

Выполняем расчет по формулам (3.44) и находим:

$$A_{k,w} = d_{1,1} \cdot (AU)_{k,w} + U_{1,1} = 1,3818; \quad (k, w = 2, 3, \dots)$$

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{2,1} & B_{3,1} & B_{4,1} & B_{5,1} \\ B_{1,2} & B_{2,2} & B_{3,2} & B_{4,2} & B_{5,2} \\ B_{1,3} & B_{2,3} & B_{3,3} & B_{4,3} & B_{5,3} \\ B_{1,4} & B_{2,4} & B_{3,4} & B_{4,4} & B_{5,4} \\ B_{1,5} & B_{2,5} & B_{3,5} & B_{4,5} & B_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ - & 0,95653 & -12,259 & -9,4096 & -0,014674 \\ - & -12,259 & -3,9637 & -11,031 & 2,4729 \\ - & -9,4096 & -11,031 & 13,713 & 27,579 \\ - & -0,014674 & 2,4729 & 27,579 & 4,6166 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Численные производные функции $D(x, y)$ определяем по формуле

$$d_{k,w} = \frac{G_{k,w} - B_{k,w}}{A_{k,w}}, \quad (k, w = 2, 3, \dots)$$

и записываем в виде матрицы (3.23)

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1,0000000000000001 & 0,9999999999999967 & -1,5426e-14 & -6,9259e-14 \\ 1 & 0,9999999999999979 & -1,0000000000000011 & -5,7850e-14 & -2,5325e-13 \\ 0 & -6,4227e-15 & -3,4710e-14 & -1,9154e-13 & -9,8217e-13 \\ 0 & -1,5908e-14 & -1,2630e-13 & -7,3019e-13 & -3,7686e-12 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Сравнение полученного результата с матрицей (3.47) показывает, что вычисленные двумерные производные содержат 12 верных значащих цифр.

2. Зададим в функции (3.37) сомножители

$$U(D(x, y)) = \sin(D(x, y)) ; V(D(x, y)) = (D(x, y))^2,$$

в которых двумерные численные производные функции $D(x, y)$ известны и представлены в виде матрицы (3.47). Двумерные численные производные функции $U(D(x, y))$ уже найдены прямым рекуррентным дифференцированием в виде матрицы (3.48). Выполним двумерное прямое p -дифференцирование функции $V(D(x, y))$ для матрицы (3.47) и представим результат в виде матрицы

$$V = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} V_{1,1} & V_{2,1} & V_{3,1} & V_{4,1} & V_{5,1} \\ V_{1,2} & V_{2,2} & V_{3,2} & V_{4,2} & V_{5,2} \\ V_{1,3} & V_{2,3} & V_{3,3} & V_{4,3} & V_{5,3} \\ V_{1,4} & V_{2,4} & V_{3,4} & V_{4,4} & V_{5,4} \\ V_{1,5} & V_{2,5} & V_{3,5} & V_{4,5} & V_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 9 & -4 & -1 \\ 4 & 2 & -4 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.51)$$

Применяя двумерную прямую рекуррентную формулу (3.3), выполним двумерное прямое дифференцирование функции

$$G(D(x, y)) = U(D(x, y)) \cdot V(D(x, y)) = \sin(D(x, y)) \cdot (D(x, y))^2$$

и представим ее численные производные в виде матрицы (3.23)

$$G = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{2,1} & G_{3,1} & G_{4,1} & G_{5,1} \\ G_{1,2} & G_{2,2} & G_{3,2} & G_{4,2} & G_{5,2} \\ G_{1,3} & G_{2,3} & G_{3,3} & G_{4,3} & G_{5,3} \\ G_{1,4} & G_{2,4} & G_{3,4} & G_{4,4} & G_{5,4} \\ G_{1,5} & G_{2,5} & G_{3,5} & G_{4,5} & G_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,84147 & 4,4465 & 8,2286 & 2,8756 & -12,246 \\ 4,4465 & 9,7875 & -7,1660 & -37,902 & -38,022 \\ 8,2286 & -7,1660 & -40,023 & -45,477 & -38,788 \\ 2,8756 & -37,902 & -45,477 & -65,212 & 56,058 \\ -12,246 & -38,022 & -38,788 & 56,058 & 89,452 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Теперь для задачи неявного дифференцирования зададим двумерное уравнение с известной матрицей G

$$U(D(x, y)) \cdot V(D(x, y)) = G(x, y),$$

в котором известны двумерные численные производные функции $G(x, y)$, и найдем двумерные численные производные функции $D(x, y)$, применяя обратное p -дифференцирование. Численные результаты двух одномерных обратных

дифференцирований по переменным x, y представлены в виде матрицы (3.49). Компоненты обратных рекуррентных формул для функции $U(D(x, y)) = \sin D(x, y)$ уже найдены в формулах (3.50). Теперь выполним обратное рекуррентное дифференцирование функции $V(D(x, y)) = (D(x, y))^2$ и определим для этой функции компоненты обратных рекуррентных формул (табл. П.26):

$$(AV)_{k,w} = 2d_{1,1} = 2; \quad (k, w = 2, 3, \dots) \quad (3-52a)$$

$$B_V = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} (B_V)_{1,1} & (B_V)_{2,1} & (B_V)_{3,1} & (B_V)_{4,1} & (B_V)_{5,1} \\ (B_V)_{1,2} & (B_V)_{2,2} & (B_V)_{3,2} & (B_V)_{4,2} & (B_V)_{5,2} \\ (B_V)_{1,3} & (B_V)_{2,3} & (B_V)_{3,3} & (B_V)_{4,3} & (B_V)_{5,3} \\ (B_V)_{1,4} & (B_V)_{2,4} & (B_V)_{3,4} & (B_V)_{4,4} & (B_V)_{5,4} \\ (B_V)_{1,5} & (B_V)_{2,5} & (B_V)_{3,5} & (B_V)_{4,5} & (B_V)_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ - & 8 & -5,3e-15 & 2 & 2 \\ - & -3,5e-15 & 11 & -4 & -1 \\ - & 2 & -4 & 4 & -2 \\ - & 2 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3-52b)$$

Выполняем расчет по формулам (3.40):

$$A_{k,w} = V_{1,1} \cdot (AU)_{k,w} + U_{1,1} \cdot (AV)_{k,w} = 1 \cdot 0,54030 + 0,84147 \cdot 2 = 2,2232; (k, w = 2, 3, \dots)$$

$$B = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{2,1} & B_{3,1} & B_{4,1} & B_{5,1} \\ B_{1,2} & B_{2,2} & B_{3,2} & B_{4,2} & B_{5,2} \\ B_{1,3} & B_{2,3} & B_{3,3} & B_{4,3} & B_{5,3} \\ B_{1,4} & B_{2,4} & B_{3,4} & B_{4,4} & B_{5,4} \\ B_{1,5} & B_{2,5} & B_{3,5} & B_{4,5} & B_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{bmatrix} y^0 & - & - & - & - \\ y^1 & - & 12,011 & -9,3893 & -37,902 & -38,022 \\ y^2 & - & -9,3893 & -37,800 & -45,477 & -38,788 \\ y^3 & - & -37,902 & -45,477 & -65,212 & 56,058 \\ y^4 & - & -38,022 & -38,788 & 56,058 & 89,452 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Численные производные функции $D(x, y)$ определяем по формуле

$$d_{k,w} = \frac{G_{k,w} - B_{k,w}}{A_{k,w}}, \quad (k, w = 2, 3, \dots)$$

и записываем в виде матрицы

$$D = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1,5980e-14 & -2,5568e-14 \\ 1 & 1 & -1 & 3,5156e-14 & -2,4289e-13 \\ 0 & -9,5879e-15 & 4,1548e-14 & -3,3238e-13 & 8,4054e-13 \\ 0 & 9,5879e-15 & -2,1413e-13 & 9,1085e-13 & -5,9125e-12 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Сравнение с матрицей (3.47) показывает, что вычисленные двумерные производные содержат не менее 12 верных значащих цифр.

Теорема 3.8. Задана двумерная функция

$$F = \frac{U(D(x, y))}{V(D(x, y))}, \quad (3.53)$$

для внутренних функций которой выполнено двумерное обратное дифференцирование согласно формуле (3.26)

$$U_{k,w} = (AU)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (BU)_{k,w}; \quad V_{k,w} = (AV)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (BV)_{k,w} \quad (3.54)$$

Тогда нормированные численные производные функции (3.53) определяются по формуле

$$F_{k,w} = A_{k,w} \cdot d_{k,w} + B_{k,w}, \quad (3.55)$$

где компоненты двумерных обратных рекуррентных формул равны:

$$\begin{aligned} A_{k,w} &= \frac{V_{1,1} \cdot (AU)_{k,w} - U_{1,1} \cdot (AV)_{k,w}}{(V_{1,1})^2}; \\ B_{k,w} &= \frac{V_{1,1} \cdot (BU)_{k,w} - U_{1,1} \cdot (BV)_{k,w}}{(V_{1,1})^2} - \frac{1}{V_{1,1}} (F_{k,1} \cdot V_{1,w} + F_{1,w} \cdot V_{k,1} + \\ &+ \sum_{\xi=1}^{w-2} (F_{k,\xi+1} \cdot V_{1,w-\xi} + F_{1,\xi+1} \cdot V_{k,w-\xi}) + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} F_{i+1,\xi+1} \cdot V_{k-i,w-\xi}) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Для частного случая двумерной функции деления

$$F = \frac{U(D(x, y))}{V(x, y)} \quad (3.57)$$

компоненты обратных рекуррентных формул равны:

$$\begin{aligned} A_{k,w} &= \frac{(AU)_{k,w}}{V_{1,1}}; \\ B_{k,w} &= \frac{1}{V_{1,1}} ((BU)_{k,w} - F_{1,w} \cdot V_{k,1} - \\ &- \sum_{\xi=0}^{w-2} (F_{k,\xi+1} \cdot V_{1,w-\xi} + F_{1,\xi+1} \cdot V_{k,w-\xi}) - \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} F_{i+1,\xi+1} \cdot V_{k-i,w-\xi}) \end{aligned} \quad (3.58)$$

Для частного случая двумерной функции деления

$$F = \frac{U(D(x, y))}{D(x, y)} \quad (3.59)$$

компоненты обратных рекуррентных формул равны:

$$\begin{aligned} A_{k,w} &= \frac{V_{1,1} \cdot (AU)_{k,w} - U_{1,1}}{(V_{1,1})^2}; \\ B_{k,w} &= \frac{1}{V_{1,1}} ((BU)_{k,w} - F_{k,1} \cdot V_{1,w} - F_{1,w} \cdot V_{k,1} - \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$- \sum_{\xi=1}^{w-2} (F_{k, \xi+1} \cdot V_{1, w-\xi} + F_{1, \xi+1} \cdot V_{k, w-\xi}) - \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} F_{i+1, \xi+1} \cdot V_{k-i, w-\xi})$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем двумерную прямую рекуррентную формулу (3.18) для производных функции (3.53) как функции деления внутренних функций

$$F_{k,w} = U \circledast V = \frac{1}{V_{1,1}} (U_{k,w} - \sum_{\xi=0}^{w-2} F_{k, \xi+1} \cdot V_{1, w-\xi} - \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} F_{i+1, \xi+1} \cdot V_{k-i, w-\xi})$$

и выделим из нее производные $U_{k,w}$ и $V_{k,w}$

$$F_{k,w} = \frac{1}{V_{1,1}} (U_{k,w} - F_{1,1} \cdot V_{k,w} - F_{k,1} \cdot V_{1,w} - F_{1,w} \cdot V_{k,1} - \\ - \sum_{\xi=1}^{w-2} (F_{k, \xi+1} \cdot V_{1, w-\xi} + F_{1, \xi+1} \cdot V_{k, w-\xi}) - \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} F_{i+1, \xi+1} \cdot V_{k-i, w-\xi})$$

Выполним для внутренних функций двумерное обратное рекуррентное дифференцирование и подставим формулы (3.54) и (3.55) в выражение $F_{k,w}$

$$A_{k,w} \cdot d_{k,w} + B_{k,w} = \frac{1}{V_{1,1}} (((AU)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (BU)_{k,w}) - \\ - F_{1,1} \cdot ((AV)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (BV)_{k,w}) - F_{k,1} \cdot V_{1,w} - F_{1,w} \cdot V_{k,1} - \\ - \sum_{\xi=1}^{w-2} (F_{k, \xi+1} \cdot V_{1, w-\xi} + F_{1, \xi+1} \cdot V_{k, w-\xi}) - \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} F_{i+1, \xi+1} \cdot V_{k-i, w-\xi}).$$

Подставляя $F_{1,1} = U_{1,1} / V_{1,1}$ в функцию (3.53), получаем формулы (3.56).

Для частного случая (3.57) функция знаменателя $V(x,y)$ не содержит внутреннюю функцию $D(x,y)$, и для нее формула обратного дифференцирования (3.54) упрощается

$$V_{k,w} = (AV)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (BV)_{k,w} = 0 \cdot d_{k,w} + (BV)_{k,w}.$$

Подставляя выражение в $F_{k,w}$ и включая некоторые слагаемые в суммы, получаем формулы (3.58).

Для частного случая (3.59) функция знаменателя включает только искомую функцию $D(x,y)$, и для нее формула обратного дифференцирования (3.55) упрощается

$$V_{k,w} = (AV)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (BV)_{k,w} = 1 \cdot d_{k,w} + 0.$$

Подставляя выражение в $F_{k,w}$, получаем формулы (3.60), что требовалось доказать.

Пример 3.9.

1. Зададим в функции (3.53) внутренние функции

$$U(D(x,y)) = \sin(D(x,y)); V(x,y) = D(x,y),$$

где двумерные производные функции $D(x,y)$ известны и представлены в виде матрицы (3.47). Двумерные численные производные функции $U(D(x,y))$ уже найдены прямым рекуррентным дифференцированием в виде матрицы (3.48).

Выполним двумерное прямое p -дифференцирование функции

$$G(D(x,y)) = \frac{\sin(D(x,y))}{D(x,y)}$$

и представим ее численные производные в виде матрицы

$$G = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{2,1} & G_{3,1} & G_{4,1} & G_{5,1} \\ G_{1,2} & G_{2,2} & G_{3,2} & G_{4,2} & G_{5,2} \\ G_{1,3} & G_{2,3} & G_{3,3} & G_{4,3} & G_{5,3} \\ G_{1,4} & G_{2,4} & G_{3,4} & G_{4,4} & G_{5,4} \\ G_{1,5} & G_{2,5} & G_{3,5} & G_{4,5} & G_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,84147 & -0,60234 & -0,77944 & -0,24214 & 0,32335 \\ -0,60234 & -0,65537 & 0,40723 & 0,46993 & 0,12606 \\ -0,77944 & 0,40723 & -0,48176 & 1,5618 & 0,63493 \\ -0,24214 & 0,46993 & 1,5618 & -0,39103 & -0,48764 \\ 0,32335 & 0,12606 & 0,63493 & -0,48764 & -0,16362 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Теперь для задачи неявного дифференцирования зададим двумерное уравнение с известной матрицей G

$$\frac{U(D(x,y))}{D(x,y)} = G(x,y)$$

и найдем двумерные численные производные функции $D(x,y)$ для известных двумерных производных функции $G(x,y)$, применяя обратное p -дифференцирование. Численные результаты двух одномерных обратных дифференцирований по переменным x, y представлены в матрице (3.49). Обратное рекуррентное дифференцирование функции $U(D(x,y)) = \sin D(x,y)$ уже выполнено и компоненты обратных рекуррентных формул определены в формулах (3.52).

Выполняем расчет по формулам (3.60):

$$A_{k,w} = \frac{V_{1,1} \cdot (A_v)_{k,w} - U_{1,1}}{(V_{1,1})^2} = 0,54030 - 0,84147 = -0,30117; \quad (k, w = 2, 3, \dots)$$

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{2,1} & B_{3,1} & B_{4,1} & B_{5,1} \\ B_{1,2} & B_{2,2} & B_{3,2} & B_{4,2} & B_{5,2} \\ B_{1,3} & B_{2,3} & B_{3,3} & B_{4,3} & B_{5,3} \\ B_{1,4} & B_{2,4} & B_{3,4} & B_{4,4} & B_{5,4} \\ B_{1,5} & B_{2,5} & B_{3,5} & B_{4,5} & B_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ - & -0,95653 & 0,70839 & 0,46993 & 0,12606 \\ - & 0,70839 & -0,78293 & 1,5618 & 0,63493 \\ - & 0,46993 & 1,5618 & -0,39103 & -0,48764 \\ - & 0,12606 & 0,63493 & -0,48764 & -0,16362 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Численные производные функции $D(x,y)$ определяем по формуле

$$d_{k,w} = \frac{G_{k,w} - B_{k,w}}{A_{k,w}}, \quad (k, w = 2, 3, \dots)$$

и записываем в виде матрицы

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -0,999999999999978 & 1,000000000000006 & 2,2302e-14 & 1,0026e-13 \\ 1 & 0,999999999999927 & -1 & -5,5295e-14 & -1,7252e-13 \\ 0 & 1,4561e-14 & -4,8660e-14 & 1,2976e-13 & -3,3638e-13 \\ 0 & -2,5067e-14 & 1,9169e-13 & -7,5663e-13 & 1,6868e-12 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Сравнение с матрицей (3.47) показывает, что вычисленные двумерные производные содержат не менее 12 верных значащих цифр.

2. Зададим в функции (3.53) внутренние функции

$$U(D(x, y)) = \sin(D(x, y)) ; V(D(x, y)) = (D(x, y))^2,$$

где двумерные численные производные функции $D(x, y)$ представлены в виде матрицы (3.47). Двумерные численные производные функции $U(D(x, y))$ уже найдены прямым рекуррентным дифференцированием и представлены в виде матрицы (3.48). Выполняя двумерное прямое дифференцирование функции $V(D(x, y))$ для матрицы (3.47), получаем матрицу (3.51).

Теперь выполним двумерное прямое p -дифференцирование функции

$$G(D(x, y)) = \frac{U(D(x, y))}{V(D(x, y))} = \frac{\sin(D(x, y))}{(D(x, y))^2},$$

применяя двумерную прямую рекуррентную формулу (3.18), и представим ее численные производные в виде матрицы

$$G = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{2,1} & G_{3,1} & G_{4,1} & G_{5,1} \\ G_{1,2} & G_{2,2} & G_{3,2} & G_{4,2} & G_{5,2} \\ G_{1,3} & G_{2,3} & G_{3,3} & G_{4,3} & G_{5,3} \\ G_{1,4} & G_{2,4} & G_{3,4} & G_{4,4} & G_{5,4} \\ G_{1,5} & G_{2,5} & G_{3,5} & G_{4,5} & G_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,84147 & -2,2853 & 2,9497 & -3,8562 & 5,0860 \\ -2,2853 & 9,3272 & -24,9880 & 54,066 & -99,996 \\ 2,9497 & -24,988 & 108,31 & -333,90 & 840,88 \\ -3,8562 & 54,066 & -333,90 & 1394,7 & -4559,0 \\ 5,0860 & -99,996 & 840,88 & -4559,0 & 18725,2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Теперь для задачи неявного дифференцирования зададим двумерное уравнение с известной матрицей G

$$\frac{U(D(x, y))}{V(D(x, y))} = G(x, y),$$

в котором известны двумерные численные производные функции $G(x, y)$, и найдем двумерные численные производные функции $D(x, y)$, применяя обратное p -дифференцирование. Численные результаты двух одномерных обратных дифференцирований по переменным x, y представлены в виде матрицы (3.49). Компоненты обратных рекуррентных формул для функции $U(D(x, y)) = \sin D(x, y)$ и функции $V(D(x, y)) = (D(x, y))^2$ уже найдены в формулах (3.50), (3.52).

Выполняем расчет по формулам (3.56):

$$A_{k,w} = \frac{V_{1,1} \cdot (A_v)_{k,w} - U_{1,1} \cdot (A_v)_{k,w}}{(V_{1,1})^2} = 1 \cdot 0,54030 - 0,84147 \cdot 2 = -1,1426; (k, w = 2, 3, \dots)$$

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{2,1} & B_{3,1} & B_{4,1} & B_{5,1} \\ B_{1,2} & B_{2,2} & B_{3,2} & B_{4,2} & B_{5,2} \\ B_{1,3} & B_{2,3} & B_{3,3} & B_{4,3} & B_{5,3} \\ B_{1,4} & B_{2,4} & B_{3,4} & B_{4,4} & B_{5,4} \\ B_{1,5} & B_{2,5} & B_{3,5} & B_{4,5} & B_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ - & 8,1846 & -23,845 & 54,066 & -99,996 \\ - & -23,845 & 107,17 & -333,90 & 840,88 \\ - & 54,066 & -333,90 & 1394,7 & -4559,0 \\ - & -99,996 & 840,88 & -4559,0 & 18725,2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Численные производные функции $D(x, y)$ определяем по формуле

$$d_{k,w} = \frac{G_{k,w} - B_{k,w}}{A_{k,w}}, \quad (k, w = 2, 3, \dots)$$

и записываем в виде матрицы

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -0,999999999999985 & 1,000000000000011 & 1,2436e-14 & 4,9747e-14 \\ 1 & 1 & -1,000000000000017 & -9,9494e-14 & -3,9797e-13 \\ 0 & 6,2184e-15 & 0 & -3,9797e-13 & -1,5919e-12 \\ 0 & 1,2436e-14 & -9,9494e-14 & -7,9595e-13 & -3,1838e-12 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Сравнение с матрицей (3.47) показывает, что вычисленные двумерные производные содержат 12 верных значащих цифр.

Для численного расчета производных составной функции

$$F = \eta(v(\dots \psi(\varphi(D(x)))\dots)) ,$$

в которой $\eta, v, \dots, \psi, \varphi$ - внутренние дифференцируемые функции, при большом количестве внутренних функций в составной функции процесс численного расчета производных можно упростить. Для этого используем разделение составной функции на части, каждая из которых в свою очередь может быть составной функцией, но меньшей сложности. Рассмотрим составную функцию

$$F = v(\dots \eta(\psi(\dots v(\rho(\dots \varphi(D(x))))))$$

и разделим ее на части, как показано в выражении. Тогда получим несколько более простых составных функций:

$$F = v(\dots \eta(H(x))); H = \psi(\dots v(P(x))); P = \rho(\dots \varphi(D(x))) .$$

Лемма 3.7. Задана двумерная составная функция $F(x, y) = \psi(\varphi(D(x, y)))$, в которой ψ, φ - двумерные внутренние дифференцируемые функции. Применим разделение заданной функции на части:

$$F(x, y) = \psi(H(x, y)); H(x, y) = \varphi(D(x, y)) .$$

Тогда двумерные численные производные заданной функции определяются из выражения

$$F_{k,w} = A_{k,w} \cdot d_{k,w} + B_{k,w} \quad , \quad (k, w = 1, 2, 3, \dots), \quad (3.61)$$

Пусть внутренние функции φ, ψ имеют двумерные обратные рекуррентные формулы со компонентами соответственно $(A\varphi)_{k,w}, (A\psi)_{k,w}, (B\varphi)_{k,w}, (B\psi)_{k,w}$

Тогда для заданной составной функции справедлива лемма 3.5, и компоненты формулы (3.61) равны:

$$A_{k,w} = (A\varphi)_{k,w} \cdot (A\psi)_{k,w} ; \quad (3.62a)$$

$$B_{k,w} = (A\psi)_{k,w} \cdot (B\varphi)_{k,w} + (B\psi)_{k,w} , \quad (3.62b)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим двумерную внутреннюю функцию $H(x, y) = \varphi(D(x, y))$, имеющую рекуррентную формулу, и запишем для нее формулу (3.26)

$$H_{k,w} = (A\varphi)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (B\varphi)_{k,w} \quad , \quad (k, w = 1, 2, 3, \dots) .$$

Функция $F(x, y) = \psi(H(x, y))$ также имеет рекуррентную формулу, из которой согласно (3.26) следует

$$F_{k,w} = (A\psi)_{k,w} \cdot H_{k,w} + (B\psi)_{k,w} \quad , \quad (k, w = 1, 2, 3, \dots) .$$

Подставим в это выражение $H_{k,w}$ и получаем формулу (3.61)

$$\begin{aligned} F_{k,w} &= (A\psi)_{k,w} \cdot H_{k,w} + (B\psi)_{k,w} = \\ &= (A\psi)_{k,w} \cdot ((A\varphi)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (B\varphi)_{k,w}) + (B\psi)_{k,w} = \\ &= ((A\psi)_{k,w} \cdot (A\varphi)_{k,w}) d_{k,w} + (A\psi)_{k,w} \cdot (B\varphi)_{k,w} + (B\psi)_{k,w} = A_{k,w} \cdot d_{k,w} + B_{k,w} \end{aligned}$$

Заданная составная функция $F(x, y) = \psi(\varphi(D(x, y))) = v(D(x, y))$, внутренние функции которой ψ, φ имеют рекуррентные формулы, может не иметь собственной рекуррентной формулы для функции v (или рекуррентная формула неизвестна). Но, согласно лемме 3.5, для нее выполняется формула (3.26) двумерного обратного дифференцирования, что требовалось доказать.

Пример 3.10.

Задана двумерная составная функция $F = \exp(\arctg D(x, y))$, в которой производные внутренней функции известны и представлены матрицей вида

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{2,1} & d_{3,1} & d_{4,1} & d_{5,1} \\ d_{1,2} & d_{2,2} & d_{3,2} & d_{4,2} & d_{5,2} \\ d_{1,3} & d_{2,3} & d_{3,3} & d_{4,3} & d_{5,3} \\ d_{1,4} & d_{2,4} & d_{3,4} & d_{4,4} & d_{5,4} \\ d_{1,5} & d_{2,5} & d_{3,5} & d_{4,5} & d_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} .$$

Применяя двумерную прямую рекуррентную формулу для функции $T = \text{arctg}D(x, y)$ (табл. П.25), найдем ее численные производные для известной внутренней функции $D(x, y)$ и представим в виде матрицы

$$T = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{2,1} & T_{3,1} & T_{4,1} & T_{5,1} \\ T_{1,2} & T_{2,2} & T_{3,2} & T_{4,2} & T_{5,2} \\ T_{1,3} & T_{2,3} & T_{3,3} & T_{4,3} & T_{5,3} \\ T_{1,4} & T_{2,4} & T_{3,4} & T_{4,4} & T_{5,4} \\ T_{1,5} & T_{2,5} & T_{3,5} & T_{4,5} & T_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,46345 & 1,6 & -0,48 & -1,6256 & 1,6256 \\ 1,6 & -3,36 & -0,224 & 8,6784 & -3,5174 \\ -0,48 & -0,224 & 10,426 & -20,5 & -27,789 \\ -1,6256 & 8,6784 & -20,5 & -13,993 & 179,10 \\ 1,6256 & -3,5174 & -27,789 & 179,10 & -293,75 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

По двумерной прямой рекуррентной формуле для функции $G = \exp(T(x, y))$ (табл. П.23) найдем численные производные и представим в виде матрицы

$$G = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{2,1} & G_{3,1} & G_{4,1} & G_{5,1} \\ G_{1,2} & G_{2,2} & G_{3,2} & G_{4,2} & G_{5,2} \\ G_{1,3} & G_{2,3} & G_{3,3} & G_{4,3} & G_{5,3} \\ G_{1,4} & G_{2,4} & G_{3,4} & G_{4,4} & G_{5,4} \\ G_{1,5} & G_{2,5} & G_{3,5} & G_{4,5} & G_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1,5899 & 2,5438 & 1,2719 & -2,7134 & -1,8994 \\ 2,5438 & -1,2719 & -6,8662 & 4,6127 & 22,277 \\ 1,2719 & -6,8662 & 11,752 & 21,354 & -80,701 \\ -2,7134 & 4,6127 & 21,354 & -100,60 & 28,115 \\ -1,8994 & 22,277 & -80,701 & 28,115 & 661,17 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Теперь для задачи неявного дифференцирования зададим двумерное уравнение с известной матрицей G

$$\exp(\text{arctg}D(x, y)) = G(x, y)$$

и найдем двумерные численные производные функции $D(x, y)$ для известных двумерных производных функции $G(x, y)$, применяя обратное p -дифференцирование. Численные результаты двух одномерных обратных дифференцирований по переменным x, y следуют из матрицы D

$$D = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{2,1} & d_{3,1} & d_{4,1} & d_{5,1} \\ d_{1,2} & - & - & - & - \\ d_{1,3} & - & - & - & - \\ d_{1,4} & - & - & - & - \\ d_{1,5} & - & - & - & - \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & - & - & - & - \\ 1 & - & - & - & - \\ 0 & - & - & - & - \\ 0 & - & - & - & - \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Выполним обратное рекуррентное дифференцирование функции $T = \text{arctg}D(x, y)$ и определим для этой функции компоненты обратных рекуррентных формул (табл. П.27):

$$(Ar)_{k,w} = \frac{1}{1 + (d_{1,1})^2} = 0,8 ; \quad (k, w = 2, 3, \dots)$$

$$\begin{aligned}
B_T &= \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} (B_T)_{1,1} & (B_T)_{2,1} & (B_T)_{3,1} & (B_T)_{4,1} & (B_T)_{5,1} \\ (B_T)_{1,2} & (B_T)_{2,2} & (B_T)_{3,2} & (B_T)_{4,2} & (B_T)_{5,2} \\ (B_T)_{1,3} & (B_T)_{2,3} & (B_T)_{3,3} & (B_T)_{4,3} & (B_T)_{5,3} \\ (B_T)_{1,4} & (B_T)_{2,4} & (B_T)_{3,4} & (B_T)_{4,4} & (B_T)_{5,4} \\ (B_T)_{1,5} & (B_T)_{2,5} & (B_T)_{3,5} & (B_T)_{4,5} & (B_T)_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \\
&= \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ - & -2,56 & -1,024 & 8,6784 & -3,5174 \\ - & -1,024 & 11,226 & -20,5 & -27,789 \\ - & 8,6784 & -20,5 & -13,993 & 179,10 \\ - & -3,5174 & -27,789 & 179,10 & -293,75 \end{bmatrix} \end{matrix}
\end{aligned}$$

Выполним обратное рекуррентное дифференцирование функции $E = \exp(T(x, y))$ и определим для этой функции компоненты обратных рекуррентных формул (табл. П.26):

$$\begin{aligned}
(AE)_{k,w} &= E_{1,1} = G_{1,1} = 1,5899 ; \quad (k, w = 2, 3, \dots) \\
B_E &= \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} (B_E)_{1,1} & (B_E)_{2,1} & (B_E)_{3,1} & (B_E)_{4,1} & (B_E)_{5,1} \\ (B_E)_{1,2} & (B_E)_{2,2} & (B_E)_{3,2} & (B_E)_{4,2} & (B_E)_{5,2} \\ (B_E)_{1,3} & (B_E)_{2,3} & (B_E)_{3,3} & (B_E)_{4,3} & (B_E)_{5,3} \\ (B_E)_{1,4} & (B_E)_{2,4} & (B_E)_{3,4} & (B_E)_{4,4} & (B_E)_{5,4} \\ (B_E)_{1,5} & (B_E)_{2,5} & (B_E)_{3,5} & (B_E)_{4,5} & (B_E)_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ - & 4,07 & -6,5121 & -9,1847 & 27,869 \\ - & -6,5121 & -4,8230 & 53,947 & -36,521 \\ - & -9,1847 & 53,947 & -78,349 & -256,63 \\ - & 27,869 & -36,521 & -256,63 & 1128,2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Выполняем расчет по формулам (3.62)

$$\begin{aligned}
A_{k,w} &= (A_T)_{k,w} \cdot (AE)_{k,w} = 1,2719 ; \quad (k, w = 2, 3, \dots) \\
B &= \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{2,1} & B_{3,1} & B_{4,1} & B_{5,1} \\ B_{1,2} & B_{2,2} & B_{3,2} & B_{4,2} & B_{5,2} \\ B_{1,3} & B_{2,3} & B_{3,3} & B_{4,3} & B_{5,3} \\ B_{1,4} & B_{2,4} & B_{3,4} & B_{4,4} & B_{5,4} \\ B_{1,5} & B_{2,5} & B_{3,5} & B_{4,5} & B_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ - & 0 & -8,1401 & 4,6127 & 22,277 \\ - & -8,1401 & 13,024 & 21,354 & -80,701 \\ - & 4,6127 & 21,354 & -100,60 & 28,115 \\ - & 22,277 & -80,701 & 28,115 & 661,17 \end{bmatrix} \end{matrix} .
\end{aligned}$$

Численные производные функции $D(x, y)$ определяем по формуле

$$d_{k,w} = \frac{G_{k,w} - B_{k,w}}{A_{k,w}} , \quad (k, w = 2, 3, \dots)$$

и записываем в виде матрицы

$$D = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -0,999999999999997 & 0,999999999999997 & 0 & -1,1173e-14 \\ 1 & 0,999999999999997 & -0,999999999999976 & -5,5865e-15 & 0 \\ 0 & 6,9831e-16 & 0 & 2,2346e-14 & -7,5417e-14 \\ 0 & 2,7932e-15 & 0 & -4,4692e-14 & 8,9384e-14 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Сравнение с заданной матрицей показывает, что вычисленные двумерные производные содержат не менее 14 верных значащих цифр.

Теорема 3.9. Задана двумерная составная функция

$$F = \lambda(\mid \eta(\mid \dots v(\mid \psi(\mid \varphi(D(x, y)))))) , \quad (3.63)$$

в которой $\lambda, \eta, \dots, v, \psi, \varphi$ - двумерные внутренние дифференцируемые функции. Применим разделение заданной функции на части, как показано в выражении функции (3.63):

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \lambda(S(x, y)); S(x, y) = \eta(R(x, y)); \dots; P(x, y) = v(L(x, y)); \\ L(x, y) &= \psi(H(x, y)); H(x, y) = \varphi(D(x, y)) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Пусть внутренние функции $\lambda, \eta, \dots, v, \psi, \varphi$ имеют двумерные обратные рекуррентные формулы с компонентами соответственно

$$\begin{aligned} &(A\varphi)_{k,w}, (B\varphi)_{k,w}, (A\psi)_{k,w}, (B\psi)_{k,w}, (Av)_{k,w}, (Bv)_{k,w}, \dots \\ &\dots, (A\eta)_{k,w}, (B\eta)_{k,w}, (A\lambda)_{k,w}, (B\lambda)_{k,w} \end{aligned}$$

Тогда для составной функции (3.63) справедлива лемма 3.5 обратного дифференцирования

$$F_{k,w} = A_{k,w} \cdot d_{k,w} + B_{k,w}, \quad (k, w = 2, 3, \dots)$$

и компоненты этой формулы равны:

$$A_{k,w} = (A\lambda)_{k,w} \cdot (A\eta)_{k,w} \cdots (Av)_{k,w} \cdot (A\psi)_{k,w} \cdot (A\varphi)_{k,w}; \quad (3.65a)$$

$$\begin{aligned} B_{k,w} &= (B\lambda)_{k,w} + (A\lambda)_{k,w} \cdot (B\eta)_{k,w} + \dots + ((A\lambda)_{k,w} \cdot (A\eta)_{k,w} \cdots) \cdot (Bv)_{k,w} + \\ &+ ((A\lambda)_{k,w} \cdot (A\eta)_{k,w} \cdots (Av)_{k,w}) \cdot (B\psi)_{k,w} + \\ &+ ((A\lambda)_{k,w} \cdot (A\eta)_{k,w} \cdots (Av)_{k,w} \cdot (A\psi)_{k,w}) \cdot (B\varphi)_{k,w} \end{aligned} \quad (3.65b)$$

Для обратного дифференцирования составной функции с произвольным количеством внутренних функций достаточным условием является существование обратных рекуррентных формул внутренних функций.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим двумерную составную функцию $F = v(\psi(\varphi(D(x))))$, внутренние функции которой имеют обратные рекуррентные формулы. Запишем для них формулу (3.26) обратного рекуррентного дифференцирования

$$H_{k,w} = (A\varphi)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (B\varphi)_{k,w}; \quad L_{k,w} = (A\psi)_{k,w} \cdot H_{k,w} + (B\psi)_{k,w};$$

$$F_{k,w} = (Av)_{k,w} \cdot L_{k,w} + (Bv)_{k,w} \quad , \quad (k, w = 2, 3, \dots) .$$

Подставляем найденные выражения в $F_{k,w}$ и получаем

$$\begin{aligned} F_{k,w} &= (Av)_{k,w} \cdot L_{k,w} + (Bv)_{k,w} = (Av)_{k,w} \cdot ((A\psi)_{k,w} \cdot H_{k,w} + (B\psi)_{k,w}) + \\ &+ (Bv)_{k,w} = (Av)_{k,w} \cdot ((A\psi)_{k,w} \cdot ((A\phi)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (B\phi)_{k,w}) + (B\psi)_{k,w}) + \\ &+ (Bv)_{k,w} = (Av)_{k,w} \cdot (A\psi)_{k,w} \cdot (A\phi)_{k,w} \cdot d_{k,w} + (Av)_{k,w} \cdot (A\psi)_{k,w} \cdot (B\phi)_{k,w} + \\ &+ (Av)_{k,w} \cdot (B\psi)_{k,w} + (Bv)_{k,w} = A_{k,w} \cdot d_{k,w} + B_{k,w} \end{aligned}$$

Рассмотрим двумерную составную функцию $F = \theta(v(\psi(\phi(D(x))))))$ и разделим ее на части:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \theta(P(x, y)); \quad P(x, y) = v(L(x, y)); \quad L(x, y) = \psi(H(x, y)); \\ H(x, y) &= \phi(D(x, y)) \end{aligned}$$

Повторяя тот же вывод для новой составной функции, получаем формулу

$$\begin{aligned} F_{k,w} &= (A\theta)_{k,w} \cdot (Av)_{k,w} \cdot (A\psi)_{k,w} \cdot (A\phi)_{k,w} \cdot d_{k,w} + \\ &+ (A\theta)_{k,w} \cdot (Av)_{k,w} \cdot (A\psi)_{k,w} \cdot (B\phi)_{k,w} + (A\theta)_{k,w} \cdot (Av)_{k,w} \cdot (B\psi)_{k,w} + \\ &+ (A\theta)_{k,w} \cdot (Bv)_{k,w} + (B\theta)_{k,w} = A_{k,w} \cdot d_{k,w} + B_{k,w} \end{aligned}$$

По аналогии для заданной составной функции (3.63) можно записать

$$\begin{aligned} F_{k,w} &= ((A\lambda)_{k,w} \cdot (A\eta)_{k,w} \cdots (Av)_{k,w} \cdot (A\psi)_{k,w} \cdot (A\phi)_{k,w}) \cdot d_{k,w} + \\ &+ (B\lambda)_{k,w} + (A\lambda)_{k,w} \cdot (B\eta)_{k,w} + \dots + ((A\lambda)_{k,w} \cdot (A\eta)_{k,w} \cdots) \cdot (Bv)_{k,w} + \\ &+ ((A\lambda)_{k,w} \cdot (A\eta)_{k,w} \cdots (Av)_{k,w}) \cdot (B\psi)_{k,w} + \\ &+ ((A\lambda)_{k,w} \cdot (A\eta)_{k,w} \cdots (Av)_{k,w} \cdot (A\psi)_{k,w}) \cdot (B\phi)_{k,w} = A_{k,w} \cdot d_{k,w} + B_{k,w} \end{aligned}$$

откуда следуют формулы (3.65) .

Для заданной составной функции (3.63) независимо от того, имеет ли сама функция рекуррентную формулу (или формула неизвестна), выполняется формула (3.26) для внутренних функций. Выполнение этой формулы, согласно лемме 3.5, делает возможным обратное рекуррентное дифференцирование, что требовалось доказать.

В задаче обратного дифференцирования рассмотрим двумерное уравнение

$$\lambda(\eta(\dots v(\psi(\phi(D(x, y)))))) = G(x, y) \quad ,$$

включающее составные функции. Для численного расчета двумерных производных внутренней функции D можно использовать разделение составной функции на части.

Реализация процесса обратного дифференцирования по формулам (3.26) , (3.65) с разделением составных функций на части удобно отобразить следующей схемой, включающей последовательность операций и список используемых переменных.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} d_{1,1} & \dots & d_{k-1,1} & d_{k,1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_{1,w-1} & \dots & d_{k-1,w-1} & d_{k,w-1} \\ d_{1,w} & \dots & d_{k-1,w} & \boxed{?} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{формула } \Xi \Phi]{\text{рекуррентная}} \begin{bmatrix} H_{1,1} & \dots & H_{k-1,1} & H_{k,1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ H_{1,w-1} & \dots & H_{k-1,w-1} & H_{k,w-1} \\ H_{1,w} & \dots & H_{k-1,w} & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} (A\Phi)_{k,w} \\ (B\Phi)_{k,w} \end{bmatrix} \rightarrow \\
& \dots \xrightarrow[\text{формула } \Xi \lambda]{\text{рекуррентная}} \begin{bmatrix} F_{1,1} & \dots & F_{k-1,1} & F_{k,1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ F_{1,w-1} & \dots & F_{k-1,w-1} & F_{k,w-1} \\ F_{1,w} & \dots & F_{k-1,w} & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} (A\lambda)_{k,w} \\ (B\lambda)_{k,w} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{(3.65)}]{\text{формулы}} \begin{bmatrix} A_{k,w} \\ B_{k,w} \end{bmatrix} \rightarrow [d_{k,w}]
\end{aligned}$$

Пример 3.11.

Зададим двумерную составную функцию

$$F = \frac{\text{arctg}(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{D(x,y)})^2})^2}{b(x,y)},$$

в которой двумерную численную функцию $b(x,y)$ при смещении $x_0 = 0, y_0 = 0$ представим в виде матрицы

$$\begin{aligned}
& \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ y^0 & \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{2,1} & b_{3,1} & b_{4,1} & b_{5,1} \end{bmatrix} \\ y^1 & \begin{bmatrix} b_{1,2} & b_{2,2} & b_{3,2} & b_{4,2} & b_{5,2} \end{bmatrix} \\ y^2 & \begin{bmatrix} b_{1,3} & b_{2,3} & b_{3,3} & b_{4,3} & b_{5,3} \end{bmatrix} \\ y^3 & \begin{bmatrix} b_{1,4} & b_{2,4} & b_{3,4} & b_{4,4} & b_{5,4} \end{bmatrix} \\ y^4 & \begin{bmatrix} b_{1,5} & b_{2,5} & b_{3,5} & b_{4,5} & b_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ y^0 & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y^1 & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y^2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y^3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y^4 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.
\end{aligned}$$

1. Тождественная задача обратного дифференцирования.

Зададим двумерную внутреннюю функцию $D(x,y)$ в виде матрицы

$$\begin{aligned}
& \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ y^0 & \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{2,1} & d_{3,1} & d_{4,1} & d_{5,1} \end{bmatrix} \\ y^1 & \begin{bmatrix} d_{1,2} & d_{2,2} & d_{3,2} & d_{4,2} & d_{5,2} \end{bmatrix} \\ y^2 & \begin{bmatrix} d_{1,3} & d_{2,3} & d_{3,3} & d_{4,3} & d_{5,3} \end{bmatrix} \\ y^3 & \begin{bmatrix} d_{1,4} & d_{2,4} & d_{3,4} & d_{4,4} & d_{5,4} \end{bmatrix} \\ y^4 & \begin{bmatrix} d_{1,5} & d_{2,5} & d_{3,5} & d_{4,5} & d_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ y^0 & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y^1 & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y^2 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y^3 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y^4 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.66)
\end{aligned}$$

и проверим, как вычисляет производные этой функции обратное p -дифференцирование.

Составная функция F содержит 9 внутренних функций, и для реализации двумерного прямого рекуррентного дифференцирования потребуется последовательное обращение к рекуррентным уравнениям и формулам (табл. П.19 – П.25), выполняющим следующие этапы расчета:

$$E(x,y) = \sqrt{D(x,y)} \rightarrow L(x,y) = \ln E(x,y) \rightarrow H(x,y) = (L(x,y))^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow P(x, y) = \arcsin H(x, y) \rightarrow S(x, y) = \sqrt{P(x, y)} \rightarrow U(x, y) = \ln S(x, y) \rightarrow$$

$$\rightarrow V(x, y) = (U(x, y))^2 \rightarrow W(x, y) = \operatorname{arctg} V(x, y) \rightarrow G(x, y) = \frac{W(x, y)}{b(x, y)}$$

Выполним прямое рекуррентное дифференцирование функции F с заданной функцией $D(x, y)$ и запишем двумерные производные в виде матрицы

$$G = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{2,1} & G_{3,1} & G_{4,1} & G_{5,1} \\ G_{1,2} & G_{2,2} & G_{3,2} & G_{4,2} & G_{5,2} \\ G_{1,3} & G_{2,3} & G_{3,3} & G_{4,3} & G_{5,3} \\ G_{1,4} & G_{2,4} & G_{3,4} & G_{4,4} & G_{5,4} \\ G_{1,5} & G_{2,5} & G_{3,5} & G_{4,5} & G_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{bmatrix} 0,84208 & -3,0450 & 5,0676 & -5,6825 & 6,7422 \\ -3,0450 & 13,861 & -32,769 & 60,487 & -1,0878e2 \\ 5,0676 & -32,769 & 1,1675e2 & -3,2155e2 & 7,5730e2 \\ -5,6825 & 60,487 & -3,2155e2 & 1,1876e3 & -3,4565e3 \\ 6,7422 & -108,78 & 7,5730e2 & -3,4565e3 & 1,2237e4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Теперь для задачи обратного p -дифференцирования зададим двумерное уравнение

$$\frac{\operatorname{arctg}(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{D(x, y)})^2})^2}{b(x, y)} = G(x, y),$$

в котором известны двумерные численные производные функции $G(x, y)$, и найдем двумерные численные производные функции $D(x, y)$, применяя обратное p -дифференцирование. Численные результаты двух одномерных обратных дифференцирований по переменным x, y следуют из матрицы (3.66)

$$D = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{2,1} & d_{3,1} & d_{4,1} & d_{5,1} \\ d_{1,2} & - & - & - & - \\ d_{1,3} & - & - & - & - \\ d_{1,4} & - & - & - & - \\ d_{1,5} & - & - & - & - \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & - & - & - & - \\ 1 & - & - & - & - \\ 0 & - & - & - & - \\ 0 & - & - & - & - \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (3.67)$$

Выполняя расчеты 9 этапов обратного p -дифференцирования по формулам (3.65), находим:

$$A_{k,w} = -0,68043; \quad (k, w = 2, 3, \dots)$$

$$B = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{2,1} & B_{3,1} & B_{4,1} & B_{5,1} \\ B_{1,2} & B_{2,2} & B_{3,2} & B_{4,2} & B_{5,2} \\ B_{1,3} & B_{2,3} & B_{3,3} & B_{4,3} & B_{5,3} \\ B_{1,4} & B_{2,4} & B_{3,4} & B_{4,4} & B_{5,4} \\ B_{1,5} & B_{2,5} & B_{3,5} & B_{4,5} & B_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ - & 13,180 & -32,089 & 60,487 & -108,78 \\ - & -32,089 & 1,1607e2 & -3,2155e2 & 7,5730e2 \\ - & 60,487 & -3,2155e2 & 1,1876e3 & -3,4565e3 \\ - & -108,78 & 7,5730e2 & -3,4565e3 & 1,2237e4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Численные производные функции $D(x, y)$ определяем по формуле

$$d_{k,w} = \frac{G_{k,w} - B_{k,w}}{A_{k,w}} \quad (k, w = 2, 3, \dots)$$

и записываем в виде матрицы

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0,999999999999811 & -2,0885e-14 & -6,2655e-14 \\ 1 & 0,999999999999916 & -1 & -1,6708e-13 & 0 \\ 0 & -4,1772e-14 & 0 & 0 & -1,3367e-12 \\ 0 & -8,3541e-14 & 3,3416e-13 & 1,3367e-12 & -5,3466e-12 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Сравнивая полученные двумерные производные с матрицей (3.66), устанавливаем точность решения задачи – все вычисленные производные содержат не менее 12 верных значащих цифр.

2. Нетождественная задача обратного дифференцирования

Зададим двумерное уравнение $F(x, y) = G(x, y)$:

$$\frac{\arctg(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{D(x, y)})^2})^2}{b(x, y)} = \sqrt[4]{\frac{e^{\arctg(c(x, y))}}{a(x, y)}},$$

в котором двумерные численные многочлены при смещении $x_0 = y_0 = 0$ равны:

$$a(x, y) = 1 + 3x - 3x^2 + x^3 + 3y - 3y^2 + y^3; \quad b(x, y) = 1 + 2x + x^2 + 2y + y^2;$$

$$c(x, y) = 0,5 + 2x + x^2 + 2y + y^2$$

Составная функция $G(x, y)$ содержит 4 внутренних функции, и для реализации двумерного прямого рекуррентного дифференцирования потребуется последовательное обращение к рекуррентным формулам (табл. П.24 – П.25), выполняющим следующие этапы расчета:

$$\begin{aligned} H(x, y) = \arctg(c(x, y)) &\rightarrow L(x, y) = \exp(H(x, y)) \rightarrow P(x, y) = \frac{L(x, y)}{a(x, y)} \rightarrow \\ &\rightarrow G(x, y) = \sqrt[4]{P(x, y)} \end{aligned}$$

Запишем вычисленные двумерные производные функции $G(x, y)$ в виде матрицы (3.23)

$$G = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{2,1} & G_{3,1} & G_{4,1} & G_{5,1} \\ G_{1,2} & G_{2,2} & G_{3,2} & G_{4,2} & G_{5,2} \\ G_{1,3} & G_{2,3} & G_{3,3} & G_{4,3} & G_{5,3} \\ G_{1,4} & G_{2,4} & G_{3,4} & G_{4,4} & G_{5,4} \\ G_{1,5} & G_{2,5} & G_{3,5} & G_{4,5} & G_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1,1229 & -0,39301 & 2,0395 & -6,4867 & 19,703 \\ -0,39301 & 1,9454 & -12,099 & 50,529 & -1,9979e2 \\ 2,0395 & -12,099 & 6,8374e1 & -3,3297e2 & 1,5889e3 \\ -6,4867 & 50,529 & -3,3297e2 & 1,9615e3 & -1,0891e4 \\ 19,703 & -199,79 & 1,5889e3 & -1,0891e4 & 6,7714e4 \end{bmatrix}$$

Численные результаты двух одномерных обратных дифференцирований по переменным x, y приведены в матрице D

$$D = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{2,1} & d_{3,1} & d_{4,1} & d_{5,1} \\ d_{1,2} & - & - & - & - \\ d_{1,3} & - & - & - & - \\ d_{1,4} & - & - & - & - \\ d_{1,5} & - & - & - & - \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1,6039 & -2,5918 & -3,7355 & -0,64225 & -24,458 \\ -2,5918 & - & - & - & - \\ -3,7355 & - & - & - & - \\ -0,64225 & - & - & - & - \\ -24,458 & - & - & - & - \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Выполняем расчеты 9 этапов обратного p -дифференцирования для функции $F(x,y)$ и используем формулы (3.65):

$$A_{k,w} = -0,71484 ; \quad (k, w = 2, 3, \dots)$$

$$B = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{2,1} & B_{3,1} & B_{4,1} & B_{5,1} \\ B_{1,2} & B_{2,2} & B_{3,2} & B_{4,2} & B_{5,2} \\ B_{1,3} & B_{2,3} & B_{3,3} & B_{4,3} & B_{5,3} \\ B_{1,4} & B_{2,4} & B_{3,4} & B_{4,4} & B_{5,4} \\ B_{1,5} & B_{2,5} & B_{3,5} & B_{4,5} & B_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ - & 0,98411 & -15,967 & 18,686 & -89,446 \\ - & -15,967 & 27,025 & -1,5645e2 & 1,44570e3 \\ - & 18,686 & -1,5645e2 & 1,8660e3 & 2,4697e3 \\ - & -89,446 & 1,44570e3 & 2,4697e3 & 1,1548e5 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Численные производные функции $D(x,y)$ определяем по формуле

$$d_{k,w} = \frac{G_{k,w} - B_{k,w}}{A_{k,w}}, \quad (k, w = 2, 3, \dots)$$

и записываем в виде матрицы

$$D = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1,60394669838 & -2,59186995083 & -3,73550912481 & -0,642253928487 & -2,4458437877e1 \\ -2,59186995083 & -1,34478018401 & -5,40993882745 & -44,5457583500 & 1,54356322753e2 \\ -3,73550912481 & -5,40993882745 & -57,8427188201 & 246,925630557 & -2,0033488379e2 \\ -0,642253928487 & -44,5457583500 & 246,925630557 & -133,576304878 & 1,86900233977e4 \\ -24,4584378779 & 154,356322753 & -200,334883796 & 1,86900233977e4 & 6,68175428728e4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Для контроля точности численного решения нетождественной задачи обратного дифференцирования необходимо вычисленные производные матрицы D подставить в составную функцию F и выполнить двумерное прямое рекуррентное дифференцирование функции F с внутренней функцией D . Согласно расчетному двумерному уравнению, полученные таким способом численные производные функции F должны быть равны численным производным, записанным в матрице G . Сравнение этих производных показывает, что все значащие цифры, приведенные в результирующей матрице D , являются верными.

Рассмотренная реализация процесса обратного дифференцирования на основе теоремы 3.8 и формул (3.65) требует запоминания компонентов рекуррентных формул всех внутренних функций заданной составной функции

$$(A\varphi)_{k,w}, (B\varphi)_{k,w}, (A\psi)_{k,w}, (B\psi)_{k,w}, (Av)_{k,w}, (Bv)_{k,w}, \dots \\ \dots, (A\eta)_{k,w}, (B\eta)_{k,w}, (A\lambda)_{k,w}, (B\lambda)_{k,w}$$

Возможна другая реализация процесса на основе теоремы 3.9 и формул (3.62), которые запишем с помощью другого алгоритма:

$$A_{k,w} = (A\varphi)_{k,w}; B_{k,w} = (B\varphi)_{k,w}; \quad (3.68a)$$

$$A_{k,w} = A_{k,w} \cdot (A\psi)_{k,w}; B_{k,w} = (A\psi)_{k,w} \cdot B_{k,w} + (B\psi)_{k,w};$$

$$A_{k,w} = A_{k,w} \cdot (Av)_{k,w}; B_{k,w} = (Av)_{k,w} \cdot B_{k,w} + (Bv)_{k,w}; \quad (3.68б)$$

⋮

Реализацию процесса обратного дифференцирования по формулам (3.26), (3.68) с разделением составной функции (3.63) на части, принятые в формулах (3.64), удобно отобразить следующей схемой.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} d_{1,1} & \dots & d_{k-1,1} & d_{k,1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_{1,w-1} & \dots & d_{k-1,w-1} & d_{k,w-1} \\ d_{1,w} & \dots & d_{k-1,w} & \boxed{?} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{формула } \Xi\varphi]{\text{рекуррентная}} \begin{bmatrix} H_{1,1} & \dots & H_{k-1,1} & H_{k,1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ H_{1,w-1} & \dots & H_{k-1,w-1} & H_{k,w-1} \\ H_{1,w} & \dots & H_{k-1,w} & \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \xrightarrow[\text{(3.68a)}]{\text{формула}} \begin{bmatrix} (A\psi)_{k,w} \\ (B\psi)_{k,w} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{(3.68б)}]{\text{формула}} \begin{bmatrix} A_{k,w} = (A\varphi)_{k,w} \\ B_{k,w} = (B\varphi)_{k,w} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{формула } \Xi\psi]{\text{рекуррентная}} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} L_{1,1} & \dots & L_{k-1,1} & L_{k,1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ L_{1,w-1} & \dots & L_{k-1,w-1} & L_{k,w-1} \\ L_{1,w} & \dots & L_{k-1,w} & \end{bmatrix} \rightarrow \dots \xrightarrow[\text{формула } \Xi\lambda]{\text{рекуррентная}} \begin{bmatrix} F_{1,1} & \dots & F_{k-1,1} & F_{k,1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ F_{1,w-1} & \dots & F_{k-1,w-1} & F_{k,w-1} \\ F_{1,w} & \dots & F_{k-1,w} & \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \xrightarrow[\text{(3.68a)}]{\text{формула}} \begin{bmatrix} (A\lambda)_{k,w} \\ (B\lambda)_{k,w} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{(3.68б)}]{\text{формула}} \begin{bmatrix} A_{k,w} \\ B_{k,w} \end{bmatrix} \rightarrow [d_{k,w}] \end{aligned}$$

Пример 3.12.

Зададим двумерную составную функцию

$$F = \frac{\sqrt[5]{\left(\arctg\left(\frac{1}{\sqrt[15]{e^{(\ln \sin^2 D(x,y))^2}}}\right)\right)^2}}{a(x,y)},$$

в которой представим двумерную численную функцию $a(x,y)$ при смещении $x_0 = y_0 = 0$ в виде двумерной матрицы

$$a = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & a_{4,1} & a_{5,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & a_{4,2} & a_{5,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & a_{4,3} & a_{5,3} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4} & a_{5,4} \\ a_{1,5} & a_{2,5} & a_{3,5} & a_{4,5} & a_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

1. Тождественная задача обратного p -дифференцирования

Зададим двумерную внутреннюю функцию $D(x,y)$, записанную в виде матрицы (3.66), и проверим расчет ее двумерных производных в процессе обратного p -дифференцирования.

Составная функция F содержит 10 внутренних функций, и для реализации двумерного прямого рекуррентного дифференцирования потребуется последовательное обращение к рекуррентным уравнениям и формулам (табл. П.19 – П.25), выполняющим следующие этапы расчета:

$$\begin{aligned} E(x,y) &= \sin D(x,y) \rightarrow L(x,y) = (E(x,y))^2 \rightarrow H(x,y) = \ln L(x,y) \rightarrow P(x,y) = \\ &= (H(x,y))^2 \rightarrow S(x,y) = \exp P(x,y) \rightarrow U(x,y) = \sqrt[15]{S(x,y)} \rightarrow V(x,y) = \frac{1}{U(x,y)} \rightarrow \\ &\rightarrow R(x,y) = \operatorname{arctg} V(x,y) \rightarrow W(x,y) = (R(x,y))^2 \rightarrow Z = \sqrt[5]{W(x,y)} \rightarrow F = \frac{Z(x,y)}{a(x,y)} \end{aligned}$$

В прямом рекуррентном дифференцировании функции F с известной функцией $D(x,y)$ выполним расчет двумерных производных

$$G = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{2,1} & G_{3,1} & G_{4,1} & G_{5,1} \\ G_{1,2} & G_{2,2} & G_{3,2} & G_{4,2} & G_{5,2} \\ G_{1,3} & G_{2,3} & G_{3,3} & G_{4,3} & G_{5,3} \\ G_{1,4} & G_{2,4} & G_{3,4} & G_{4,4} & G_{5,4} \\ G_{1,5} & G_{2,5} & G_{3,5} & G_{4,5} & G_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,45367 & -0,68587 & 0,078698 & 1,0676 & -2,2723 \\ -0,68587 & 1,9801 & -2,1572 & -3,7029 & 9,9567 \\ 0,078698 & -2,1572 & 4,3422 & -4,1812 & -29,356 \\ 1,0676 & -3,7029 & -4,1812 & 6,7631 & -42,821 \\ -2,2723 & 9,9567 & -29,356 & -42,821 & 2,3138 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Теперь в задаче обратного p -дифференцирования зададим двумерное уравнение

$$\frac{\sqrt[5]{\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[15]{e^{(\ln(\sin^2 D(x,y))^2)}}}\right)\right)^2}}{a(x,y)} = G(x,y),$$

в котором известны двумерные численные производные функции $G(x,y)$, и найдем двумерные численные производные функции $D(x,y)$, применяя обратное p -дифференцирование. Численные результаты двух одномерных обратных дифференцирований по переменным x, y приведены в виде матрицы (3.67). Выполним обратное дифференцирование функции F и расчет по формулам (3.68):

$$A_{k,w} = -2,6852e - 3; \quad (k, w = 2, 3, \dots)$$

$$B = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{2,1} & B_{3,1} & B_{4,1} & B_{5,1} \\ B_{1,2} & B_{2,2} & B_{3,2} & B_{4,2} & B_{5,2} \\ B_{1,3} & B_{2,3} & B_{3,3} & B_{4,3} & B_{5,3} \\ B_{1,4} & B_{2,4} & B_{3,4} & B_{4,4} & B_{5,4} \\ B_{1,5} & B_{2,5} & B_{3,5} & B_{4,5} & B_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ - & 1,9774 & -2,1545 & -3,7029 & 9,9567 \\ - & -2,1545 & 4,3395 & -4,1812 & -29,356 \\ - & -3,7029 & -4,1812 & 6,7631 & -42,821 \\ - & 9,9567 & -29,356 & -42,821 & 2,3138 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Численные производные функции $D(x,y)$ определяем по формуле

$$d_{k,w} = \frac{G_{k,w} - B_{k,w}}{A_{k,w}}, \quad (k, w = 2, 3, \dots)$$

и записываем в виде матрицы

$$D = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -0,99999999999961 & 0,99999999992996 & 7,1113e-12 & -5,5568e-11 \\ 1 & 0,999999999994650 & -0,99999999877229 & -1,5546e-10 & 1,4858e-9 \\ 0 & 4,9614e-12 & -1,4256e-10 & 2,1923e-9 & -2,4781e-8 \\ 0 & -3,9691e-11 & 1,3164e-9 & -2,3590e-8 & 3,0829e-7 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Сравнивая полученные двумерные производные с заданными в матрице (3.66), устанавливаем точность решения задачи – все вычисленные производные содержат не менее 8 верных значащих цифр.

2. Нетождественная задача обратного дифференцирования

Зададим двумерное уравнение вида $F(x, y) + 0,7 = G(x, y)$:

$$\frac{\sqrt[5]{\left(\arctg\left(\frac{1}{\sqrt[15]{e^{(\ln(\sin^2 D(x,y))})^2}}\right)\right)^2}}{a(x,y)} + 0,7 = \sqrt[4]{\frac{e^{\arctg(c(x,y))}}{aa(x,y)}},$$

в котором двумерные численные многочлены при смещении $x_0 = y_0 = 0$ равны:

$$a(x, y) = 2 + 3x + 4x^2 + 3y + 4y^2; \quad c(x, y) = 0,5 + 2x + x^2 + 2y + y^2;$$

$$aa(x, y) = 1 + 6x - 3x^2 + 6x^3 + 6y - 3y^2 + 6y^3;$$

Для расчета двумерных численных производных составной функции $G(x,y)$ применим, как в примере 3.11, прямое p -дифференцирование, и представим производные функции G в виде матрицы

$$G = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{2,1} & G_{3,1} & G_{4,1} & G_{5,1} \\ G_{1,2} & G_{2,2} & G_{3,2} & G_{4,2} & G_{5,2} \\ G_{1,3} & G_{2,3} & G_{3,3} & G_{4,3} & G_{5,3} \\ G_{1,4} & G_{2,4} & G_{3,4} & G_{4,4} & G_{5,4} \\ G_{1,5} & G_{2,5} & G_{3,5} & G_{4,5} & G_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1,1229 & -1,2352 & 6,4398 & -33,990 & 181,57e2 \\ -1,2352 & 10,746 & -83,746 & 6,0123e2 & -4,2096e3 \\ 6,4398 & -83,746 & 8,4603e2 & -7,6582e3 & 6,5067e4 \\ -33,990 & 6,0123e2 & -7,6582e3 & 8,3540e4 & -8,2876e5 \\ 181,57 & -4,2096e3 & 6,5067e4 & -8,2876e5 & 9,3782e6 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Численные результаты двух одномерных обратных дифференцирований по переменным x, y приведены соответственно в строке и столбце матрицы D

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{2,1} & d_{3,1} & d_{4,1} & d_{5,1} \\ d_{1,2} & - & - & - & - \\ d_{1,3} & - & - & - & - \\ d_{1,4} & - & - & - & - \\ d_{1,5} & - & - & - & - \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0,383424 & -3,71534 & 72,5854 & -1,35662e3 & 2,74336e4 \\ -3,71534 & - & - & - & - \\ 72,5854 & - & - & - & - \\ -1,35662e3 & - & - & - & - \\ 2,74336e4 & - & - & - & - \end{bmatrix}$$

Выполним обратное дифференцирование функции F и расчет по формулам (3.68):

$$A_{k,w} = 0,16172 ; \quad (k, w = 2, 3, \dots)$$

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{2,1} & B_{3,1} & B_{4,1} & B_{5,1} \\ B_{1,2} & B_{2,2} & B_{3,2} & B_{4,2} & B_{5,2} \\ B_{1,3} & B_{2,3} & B_{3,3} & B_{4,3} & B_{5,3} \\ B_{1,4} & B_{2,4} & B_{3,4} & B_{4,4} & B_{5,4} \\ B_{1,5} & B_{2,5} & B_{3,5} & B_{4,5} & B_{5,5} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ - & -8,9057 & 4,7418e2 & -1,4372e4 & 3,9186e5 \\ - & 4,7418e2 & -2,0498e4 & 7,2373e5 & -2,3622e7 \\ - & -1,4372e4 & 7,2373e5 & -3,0511e7 & 1,1708e9 \\ - & 3,9186e5 & -2,3622e7 & 1,1708e9 & -5,1753e10 \end{bmatrix}$$

Численные производные функции $D(x,y)$ определяем по формуле

$$d_{k,w} = \frac{G_{k,w} - B_{k,w}}{A_{k,w}} , \quad (k, w = 2, 3, \dots)$$

и записываем в виде матрицы

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,3834244396 & -3,715340990 & 72,58544526 & -1,3566202977e3 & 2,743360286e4 \\ -3,715340990 & 1,215181842e2 & -3,449951655e3 & 9,258658540e4 & -2,449144638e6 \\ 72,58544526 & -3,449951655e3 & 1,319805612e5 & -4,522558118e6 & 1,464709665e8 \\ -1,3566202977e3 & 9,258658540e4 & -4,522558118e6 & 1,891839072e8 & -7,244584580e9 \\ 2,743360286e4 & -2,449144638e6 & 1,464709665e8 & -7,244584580e9 & 3,200765112e11 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Для контроля точности численного расчета необходимо подставить вычисленные производные матрицы D в составную функцию F и выполнить двумерное прямое рекуррентное дифференцирование функции F с внутренней функцией D . Согласно расчетному двумерному уравнению, полученные таким способом численные производные функции F должны быть равны численным производным матрицы G (элемент матрицы F_{11} , согласно заданному уравнению, отличается от элемента G_{11} на $0,7$). Выполняем расчет нормированных производных функции F прямым двумерным p -дифференцированием, используя матрицу D , и сравниваем полученные двумерные численные производные в матрицах F и G .

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
x^0 & x^1 & x^2 \\
\begin{array}{l} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{array}
\begin{bmatrix}
1,222896943081664 & -1,235186637389831 & 6,439813968573343 \\
-1,235186637389831 & 10,74612374529153 & -83,74621546350207 \\
6,439813968573343 & -83,74621546350207 & 8,460334796533750e2 \\
-33,99027761657248 & 6,012293228284367e2 & -7,658234458592741e3 \\
1,815728521039214e2 & -4,209563425421221e3 & 6,506706634754680e4
\end{bmatrix}
\end{array} \\
\begin{array}{cc}
x^3 & x^4 \\
\begin{array}{l} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{array}
\begin{bmatrix}
-33,99027761657248 & 1,815728521039214e2 \\
6,012293228284367e2 & -4,209563425421221e3 \\
-7,658234458592741e3 & 6,506706634754680e4 \\
8,353974820685049e4 & -8,287601273162131e5 \\
-8,287601273162131e5 & 9,378234606535027e6
\end{bmatrix}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
x^0 & x^1 & x^2 \\
\begin{array}{l} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{array}
\begin{bmatrix}
0,422896943081675 & -1,235186637389829 & 6,439813968573344 \\
-1,235186637389829 & 10,74612374529151 & -83,74621546350200 \\
6,439813968573344 & -83,74621546350259 & 8,460334796533508e2 \\
-33,99027761648239 & 6,012293228284409e2 & -7,658234458592540e3 \\
1,815728521052831e2 & -4,209563425421101e3 & 6,506706634749728e4
\end{bmatrix}
\end{array} \\
\begin{array}{cc}
x^3 & x^4 \\
\begin{array}{l} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{array}
\begin{bmatrix}
-33,99027761656318 & 1,815728521037191e2 \\
6,0122932282843817e2 & -4,209563425421095e3 \\
-7,658234458591489e3 & 6,506706634750884e4 \\
8,353974820687628e4 & -8,287601273148411e5 \\
-8,287601273163552e5 & 9,378234606547134e6
\end{bmatrix}
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Сравнение матриц показывает, что численные значения 25 двумерных производных, приведенные в результирующей матрице D , являются верными.

Численное двумерное рекуррентное дифференцирование решает задачу чувствительности нелинейных уравнений к изменению нескольких параметров. В отличие от прямого рекуррентного дифференцирования двумерных функций, для реализации которого достаточно знать значение функции в точке расчета, подготовка процесса обратного дифференцирования более сложная. Она требует предварительного обратного рекуррентного дифференцирования отдельно по каждой переменной. Более точно, объем предварительных данных зависит от выбранной организации вычислительного процесса. В случае преимущественного расчета по переменной x требуется предварительное одномерное рекуррентное дифференцирование по выбранной переменной с последующим расчетом элементов матрицы D вида (3.23) по строкам. При организации процесса с преимущественным расчетом по переменной y требуется предварительное одномерное обратное рекуррентное дифференцирование по переменной y , а процесс одномерного обратного дифференцирования по переменной x растягивается во времени при последующих расчетах элементов матрицы D по столбцам.

Раздел 3.3. Многомерное численное рекуррентное дифференцирование (многомерное p -дифференцирование)

Дифференцируемую трехмерную функцию $F(x, y, z)$ можно многократно дифференцировать [1–7] и получить производные

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left(\frac{\partial^{w-1}}{\partial y^{w-1}} \left(\frac{\partial^{s-1} F(x, y, z)}{\partial y^{s-1}} \right) \right), \text{ которые запишем в нормированном виде}$$

$$F_{k,w,s} = \frac{1}{(k-1)! (w-1)! (s-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left(\frac{\partial^{w-1}}{\partial y^{w-1}} \left(\frac{\partial^{s-1} F(x, y, z)}{\partial y^{s-1}} \right) \right), (k, w, s = 1, 2, \dots) \quad (3.74)$$

где $F_{1,1,1} = F(x, y, z)$; $l!$ – обозначает факториал. Совокупность нормированных производных представим в матричной форме в виде множества двумерных матриц для переменных x и y , составленных для различных степеней третьей переменной $z^0, z^1, z^2, z^3, z^4, \dots$ (сечений [36])

$$F_1 = \begin{matrix} \boxed{z^0} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & \dots & \boxed{z^1} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & \dots \\ y^0 & \begin{bmatrix} F_{1,1,1} & F_{2,1,1} & F_{3,1,1} & F_{4,1,1} & \dots \end{bmatrix} & y^0 & \begin{bmatrix} F_{1,1,2} & F_{2,1,2} & F_{3,1,2} & F_{4,1,2} & \dots \end{bmatrix} \\ y^1 & \begin{bmatrix} F_{1,2,1} & F_{2,2,1} & F_{3,2,1} & F_{4,2,1} & \dots \end{bmatrix} & y^1 & \begin{bmatrix} F_{1,2,2} & F_{2,2,2} & F_{3,2,2} & F_{4,2,2} & \dots \end{bmatrix} \\ y^2 & \begin{bmatrix} F_{1,3,1} & F_{2,3,1} & F_{3,3,1} & F_{4,3,1} & \dots \end{bmatrix} & y^2 & \begin{bmatrix} F_{1,3,2} & F_{2,3,2} & F_{3,3,2} & F_{4,3,2} & \dots \end{bmatrix} \\ y^3 & \begin{bmatrix} F_{1,4,1} & F_{2,4,1} & F_{3,4,1} & F_{4,4,1} & \dots \end{bmatrix} & y^3 & \begin{bmatrix} F_{1,4,2} & F_{2,4,2} & F_{3,4,2} & F_{4,4,2} & \dots \end{bmatrix} \\ \vdots & \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} & \vdots & \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \end{matrix}; \dots \quad (3.75)$$

Нумерация нормированных производных в этой матрице отличается от принятого обозначения элементов матриц [28–31] только для двух первых индексов, которые в матрицах обозначают номер строки и номер столбца. В матрице (3.75) первый индекс обозначает порядок производной по первой переменной x , а второй индекс – порядок производной по второй переменной y . Такие обозначения сохраняют преемственность с обозначениями предыдущих разделов, в которых рассматривались производные одной переменной x и двух переменных x и y . Действительно, для двух переменных x и y в матрице (3.75) полагаем z^0 , и тогда нормированные производные функции по двум переменным определяет первая матрица (3.75) с элементами $F_{1,1,1}, F_{2,1,1}, F_{3,1,1}, F_{4,1,1}, \dots$, в которых третий индекс, равный 1, означает отсутствие третьей переменной и может быть опущен. Именно так в виде двумерной матрицы было принято записывать производные по двум переменным (раздел 3.1).

Матрицы (3.75) можно преобразовать в двумерные многочлены:

$$F_1(x, y) = F_{1,1,1} + F_{2,1,1}x + F_{1,2,1}y + F_{2,2,1}xy + F_{3,1,1}x^2 + F_{1,3,1}y^2 + F_{3,2,1}x^2y + \dots;$$

$$F_2(x, y) = F_{1,1,2} + F_{2,1,2}x + F_{1,2,2}y + F_{2,2,2}xy + F_{3,1,2}x^2 + F_{1,3,2}y^2 + F_{3,2,2}x^2y + \dots;$$

$$\vdots$$

и найденные двумерные многочлены объединяются в трехмерный многочлен

$$F(x, y, z) = F_1(x, y) \cdot z^0 + F_2(x, y) \cdot z^1 + F_3(x, y) \cdot z^2 + \dots$$

Производные трехмерного полинома можно представить пространственной трехмерной матрицей, для которой двумерные матрицы (3.75) являются матрицами-сечениями трехмерной матрицы для различных степеней переменной z . Эту взаимосвязь матриц разной размерности можно отобразить символическим выражением

$$F \Leftrightarrow F_1 \cdot z^0 + F_2 \cdot z^1 + F_3 \cdot z^2 + \dots,$$

которое по аналогии с выражением для трехмерного многочлена $F(x, y, z)$ удобно записывать

$$F = F_1 \cdot z^0 + F_2 \cdot z^1 + F_3 \cdot z^2 + \dots$$

Записанное выражение не является матричным, но верно отражает переход от двумерных матриц (3.75) к двумерным многочленам и трехмерному многочлену $F(x, y, z)$.

Теорема 3.10. Заданы трехмерные функции $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$ и найдены их нормированные аналитические производные в виде (3.75)

$$U_1, U_2, U_3, \dots, V_1, V_2, V_3, \dots$$

Тогда нормированные аналитические производные функции произведения двух сомножителей $F(x, y, z) = U(x, y, z) \cdot V(x, y, z)$ определяются по следующей рекуррентной формуле

$$F_{k,w,s} = U \odot V = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} U_{i+1, \xi+1, \eta+1} \cdot V_{k-i, w-\xi, s-\eta}. \quad (3.76)$$

Доказательство. Представим заданные функции $U(x, y, z), V(x, y, z)$ как функции двух переменных $U(x, y)$, $V(x, y)$ и рассмотрим функцию их произведения $F(x, y) = U(x, y) \cdot V(x, y)$. Нормированные производные этой функции можно найти, согласно теореме 3.1, по формуле (3.3)

$$F_{k,w} = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} U_{i+1, \xi+1} \cdot V_{k-i, w-\xi} \quad (3.77)$$

Введем функцию $\Phi = U_{i+1, \xi+1} \cdot V_{k-i, w-\xi}$ и допустим, что эта функция зависит от переменной z : $\Phi(z) = U_{i+1, \xi+1}(z) \cdot V_{k-i, w-\xi}(z)$. Тогда для функции произведения двух сомножителей, зависящих от одной переменной, ее нормированные производные можно найти по формуле Лейбница-Коши

$$\Phi_s = \sum_{\eta=0}^{s-1} (U_{i+1, \xi+1})_{\eta+1} \cdot (V_{k-i, w-\xi})_{s-\eta} = \sum_{\eta=0}^{s-1} U_{i+1, \xi+1, \eta+1} \cdot V_{k-i, w-\xi, s-\eta}.$$

Подставляя найденное выражение в формулу (3.77), получаем формулу (3.76), что требовалось доказать.

Теорема 3.11. Заданы аналитические трехмерные функции

$$U(x, y, z), V(x, y, z), W(x, y, z), \dots, R(x, y, z), S(x, y, z)$$

и для всех функций найдены нормированные трехмерные производные. Тогда нормированные аналитические производные функции произведения

$$F(x, y, z) = U(x, y, z) \cdot V(x, y, z) \cdot W(x, y, z) \cdots R(x, y, z) \cdot S(x, y, z)$$

определяются по следующей рекуррентной формуле

$$\begin{aligned} F_{k,w,s} &= U \odot V \odot W \odot \dots \odot R \odot S = \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{v=0}^{w-1} \sum_{\zeta=0}^{s-1} \sum_{q=0}^l \sum_{v=0}^v \sum_{\rho=0}^{\zeta} \cdots \sum_{i=0}^j \sum_{\xi=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} \sum_{r=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\varsigma} \sum_{\chi=0}^{\lambda} U_{r+1, \varepsilon+1, \lambda+1} \cdot V_{i+1-r, \varsigma+1-\varepsilon, \lambda+1-\chi} \times \\ &\quad \times W_{j+1-i, \xi+1-\xi, \eta+1} \cdots R_{l+1-q, v+1-v, \zeta+1-\rho} \cdot S_{k-l, w-v, s-\zeta} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для трехмерной функции двух сомножителей $H(x, y, z) = U(x, y, z) \cdot V(x, y, z)$ аналитические производные определяются по рекуррентной формуле (3.76)

$$H_{k,w,s} = U \odot V = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{\varepsilon=0}^{w-1} \sum_{\chi=0}^{s-1} U_{r+1, \varepsilon+1, \chi+1} \cdot V_{k-r, w-\varepsilon, s-\chi} \quad (3.79)$$

Для функции с тремя сомножителями

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z) &= U(x, y, z) \cdot V(x, y, z) \cdot W(x, y, z) = (U(x, y, z) \cdot V(x, y, z)) \cdot W(x, y, z) = \\ &= H(x, y, z) \cdot W(x, y, z) \end{aligned}$$

используем ту же рекуррентную формулу (3.79) для других обозначений

$$\Psi_{k,w,s} = H \odot W = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\varsigma=0}^{w-1} \sum_{\lambda=0}^{s-1} H_{i+1, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot W_{k-i, w-\varsigma, s-\lambda} \quad (3.80)$$

По трехмерной рекуррентной формуле (3.79) находим

$$H_{i+1, \varsigma+1, \lambda+1} = U \odot V = \sum_{r=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\varsigma} \sum_{\chi=0}^{\lambda} U_{r+1, \varepsilon+1, \chi+1} \cdot V_{i+1-r, \varsigma+1-\varepsilon, \lambda+1-\chi}$$

и, подставляя $H_{i+1, \varsigma+1, \lambda+1}$ в формулу (3.80), получаем трехмерную рекуррентную формулу функции трех сомножителей

$$\begin{aligned} \Psi_{k,w,s} &= U \odot V \odot W = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\varsigma=0}^{w-1} \sum_{\lambda=0}^{s-1} \sum_{r=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\varsigma} \sum_{\chi=0}^{\lambda} (U_{r+1, \varepsilon+1, \chi+1} \cdot V_{i+1-r, \varsigma+1-\varepsilon, \lambda+1-\chi}) \cdot W_{k-i, w-\varsigma, s-\lambda} \end{aligned} \quad (3.81)$$

По аналогии для функции с четырьмя сомножителями

$$\Pi(x, y, z) = (U(x, y, z) \cdot V(x, y, z) \cdot W(x, y, z)) \cdot P(x, y, z) = \Psi(x, y, z) \cdot P(x, y, z),$$

запишем трехмерную рекуррентную формулу

$$\begin{aligned} \Pi_{k,w,s} &= U \odot V \odot W \odot P = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \sum_{i=0}^j \sum_{\xi=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} \sum_{r=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\varsigma} \sum_{\chi=0}^{\lambda} ((U_{r+1, \varepsilon+1, \chi+1} \cdot V_{i+1-r, \varsigma+1-\varepsilon, \lambda+1-\chi}) \times \\ &\quad \times W_{j+1-i, \xi+1-\xi, \eta+1-\lambda}) \cdot P_{k-j, w-\xi, s-\eta} \end{aligned}$$

Полагаем, что для функции общего вида

$$\Phi(x, y, z) = U(x, y, z) \cdot V(x, y, z) \cdot W(x, y, z) \cdots R(x, y, z)$$

трехмерная рекуррентная формула имеет структуру, аналогичную формулам (3.79) , (3.80)

$$\begin{aligned} \Phi_{k,w,s} &= U \odot V \odot W \odot \dots \odot R = \\ &= \sum_{q=0}^{k-1} \sum_{v=0}^{w-1} \sum_{\rho=0}^{s-1} \sum_{h=0}^q \sum_{\sigma=0}^v \sum_{\tau=0}^{\rho} \dots \sum_{i=0}^j \sum_{\xi=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} \sum_{r=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\varsigma} \sum_{\chi=0}^{\lambda} U_{r+1, \varepsilon+1, \lambda+1} \cdot V_{i+1-r, \varsigma+1-\varepsilon, \lambda+1-\chi} \times \\ &\quad \times W_{j+1-i, \xi+1-\xi, \eta+1-\lambda} \dots R_{k-q, w-v, s-\rho} \end{aligned} \quad (3.82)$$

Добавим в функцию еще один сомножитель

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= (U(x, y, z) \cdot V(x, y, z) \cdot W(x, y, z) \dots R(x, y, z)) \cdot S(x, y, z) = \\ &= \Phi(x, y, z) \cdot S(x, y, z) \end{aligned}$$

и докажем, что структура трехмерной рекуррентной формулы остается прежней. Применим формулу (3.76) в других обозначениях.

$$F_{k,w,s} = \Phi \odot S = \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{v=0}^{w-1} \sum_{\zeta=0}^{s-1} \Phi_{l+1, v+1, \zeta+1} \cdot S_{k-l, w-v, s-\zeta}.$$

Из формулы (3.82) находим

$$\begin{aligned} \Phi_{l+1, v+1, \zeta+1} &= \sum_{q=0}^l \sum_{v=0}^v \sum_{\rho=0}^{\zeta} \dots \sum_{i=0}^j \sum_{\xi=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} \sum_{r=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\varsigma} \sum_{\chi=0}^{\lambda} U_{r+1, \varepsilon+1, \lambda+1} \times \\ &\quad \times V_{i+1-r, \varsigma+1-\varepsilon, \lambda+1-\chi} \cdot W_{j+1-i, \xi+1-\xi, \eta+1-\lambda} \dots R_{l+1-q, v+1-v, \zeta+1-\rho} \end{aligned}$$

Подставляя найденное выражение в $F_{k,w,s}$, получаем формулу (3.78), что требовалось доказать.

Теорема 3.12. Заданы аналитические трехмерные функции

$$U(x, y, z), V(x, y, z), W(x, y, z), P(x, y, z)$$

и для всех функций найдены нормированные трехмерные производные. Тогда нормированные аналитические производные трехмерной функции произведения сомножителей, включающих функции или их производные, также определяются по трехмерным рекуррентным формулам.

Для функции произведения сомножителей

$$F(x, y, z) = \frac{dU(x, y, z)}{dx} \cdot V(x, y, z) \cdot W(x, y, z) \cdot P(x, y, z) \quad (3.83)$$

трехмерные аналитические производные определяются по следующей рекуррентной формуле:

$$\begin{aligned} F_{k,w,s} &= U \odot V \odot W \odot P = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \sum_{i=0}^j \sum_{\xi=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} \sum_{r=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\varsigma} \sum_{\chi=0}^{\lambda} (((r+1)U_{r+2, \varepsilon+1, \chi+1} \cdot V_{i+1-r, \varsigma+1-\varepsilon, \lambda+1-\chi}) \times \\ &\quad \times W_{j+1-i, \xi+1-\xi, \eta+1-\lambda}) \cdot P_{k-j, w-\xi, s-\eta}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Для функции произведения сомножителей

$$F(x, y, z) = \frac{dU(x, y, z)}{dx} \cdot \frac{dV(x, y, z)}{dx} \cdot W(x, y, z) \cdot P(x, y, z) \quad (3.85)$$

производные определяются по следующей рекуррентной формуле:

$$F_{k,w,s} = U \odot V \odot W \odot P =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \sum_{i=0}^j \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} \sum_{r=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\varsigma} \sum_{\chi=0}^{\lambda} (((r+1)(i+1-r) \cdot U_{r+2, \varepsilon+1, \chi+1} \times$$

$$\times V_{i+2-r, \varsigma+1-\varepsilon, \lambda+1-\chi}) \cdot W_{j+1-i, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda}) \cdot P_{k-j, w-\xi, s-\eta} \quad (3.86)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим функцию (3.83) как двумерную функцию переменных x и y

$$F(x, y) = \frac{dU(x, y)}{dx} \cdot V(x, y) \cdot W(x, y) \cdot P(x, y)$$

и запишем для нее двумерную рекуррентную формулу (3.8, раздел 3.1)

$$F_{k,w} = U \odot V \odot W \odot P =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{i=0}^j \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{r=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\varsigma} (r+1) U_{r+2, \varepsilon+1} \cdot V_{i+1-r, \varsigma+1-\varepsilon} \cdot W_{j+1-i, \xi+1-\varsigma} \cdot P_{k-j, w-\xi}$$

Полагаем, что все составляющие двумерной рекуррентной формулы являются функциями третьей переменной z

$$F_{k,w}(z) = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{i=0}^j \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{r=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\varsigma} (r+1) \cdot U_{r+2, \varepsilon+1}(z) \cdot V_{i+1-r, \varsigma+1-\varepsilon}(z) \cdot W_{j+1-i, \xi+1-\varsigma}(z) \times$$

$$\times P_{k-j, w-\xi}(z)$$

Введем функцию

$$\Phi(z) = U_{r+2, \varepsilon+1}(z) \cdot V_{i+1-r, \varsigma+1-\varepsilon}(z) \cdot W_{j+1-i, \xi+1-\varsigma}(z) \cdot P_{k-j, w-\xi}(z)$$

и построим для нее одномерную рекуррентную формулу (1.11, раздел 1.1)

$$\Phi_s = \sum_{\eta=0}^{s-1} \sum_{\lambda=0}^{\eta} \sum_{\chi=0}^{\lambda} (U_{r+2, \varepsilon+1})_{\chi+1} (V_{i+1-r, \varsigma+1-\varepsilon})_{\lambda+1-\chi} (W_{j+1-i, \xi+1-\varsigma})_{\eta+1-\lambda} (P_{k-j, w-\xi})_{s-\eta}$$

Подставляя Φ_s в формулу $F_{k,w}$, получаем трехмерную рекуррентную формулу (3.84).

Представим функцию (3.85) как двумерную функцию переменным x и y

$$F(x, y) = \frac{dU(x, y)}{dx} \cdot \frac{dV(x, y)}{dx} \cdot W(x, y) \cdot P(x, y)$$

и запишем для нее двумерную рекуррентную формулу (3.10)

$$F_{k,w} = U \odot V \odot W \odot P =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{i=0}^j \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{r=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\varsigma} (r+1) \cdot (i+1-r) \cdot U_{r+2, \varepsilon+1} \cdot V_{i+2-r, \varsigma+1-\varepsilon} \cdot W_{j+1-i, \xi+1-\varsigma} \cdot P_{k-j, w-\xi}$$

Повторяя те же преобразования для этой рекуррентной формулы, получаем трехмерную формулу (3.86), что требовалось доказать.

Трехмерные рекуррентные формулы для частных случаев функций вида (3.83), (3.85) приведены в табл.3.10.

Таблица 3.10

Функция $F(x,y,z)$	Двумерная рекуррентная формула $F_{k,w,s}$
$\frac{dU(x,y,z)}{dx} \cdot V(x,y,z)$	$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} (i+1) \cdot U_{i+2, \xi+1, \eta+1} \cdot V_{k-i, w-\xi, s-\eta}$
$\frac{dU(x,y,z)}{dx} \cdot V(x,y,z) \times$ $\times W(x,y,z)$	$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \sum_{r=0}^i \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} (r+1) U_{r+2, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot V_{i+1-r, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda} \times$ $\times W_{k-i, w-\xi, s-\eta}$
$\frac{dU(x)}{dx} \cdot \frac{dV(x)}{dx}$	$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} (i+1)(k-i) \cdot U_{i+2, \xi+1, \eta+1} \cdot V_{k+1-i, w-\xi, s-\eta}$
$\frac{dU(x,y,z)}{dx} \cdot \frac{dV(x,y,z)}{dx} \times$ $\times W(x,y,z)$	$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \sum_{r=0}^i \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} (r+1)(i+1-r) \cdot U_{r+2, \varsigma+1, \lambda+1} \times$ $\times V_{i+2-r, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda} \cdot W_{k-i, w-\xi, s-\eta}$

Трехмерные функции вида (3.83) , (3.85) , содержащие четыре и больше сомножителей, имеют несколько равнозначных рекуррентных формул. Действительно, представим двумерную функцию (3.83) переменных x и y следующим образом

$$F(x,y) = \left(\frac{dU(x,y)}{dx} \cdot V(x,y) \right) \cdot (W(x,y) \cdot P(x,y)) = \Phi(x,y) \cdot \Psi(x,y) .$$

Тогда двумерная рекуррентная формула имеет вид

$$F_{k,w} = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \left(\sum_{r=0}^i \sum_{\varsigma=0}^{\xi} (r+1) U_{r+2, \varsigma+1} V_{i+1-r, \xi+1-\varsigma} \right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{k-1-i} \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} W_{r+1, \varsigma+1} P_{k-i-r, w-\xi-\varsigma} \right)$$

Преобразуя согласно теореме 3.12 двумерную рекуррентную формулу в трехмерную, получаем трехмерную формулу, отличную от формулы (3.84)

$$F_{k,w,s} = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \left(\sum_{r=0}^i \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} (r+1) \cdot U_{r+2, \lambda+1} \cdot V_{i+1-r, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda} \right) \times$$

$$\times \left(\sum_{r=0}^{k-1-i} \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} \sum_{\lambda=0}^{s-1-\eta} W_{r+1, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot P_{k-i-r, w-\xi-\varsigma, s-\eta-\lambda} \right).$$

Теорема 3.13. Заданы трехмерные функции $U(x,y,z)$, $V(x,y,z)$, $W(x,y,z)$ и найдены их нормированные производные. Введем трехмерную функцию $F(U(x,y,z), V(x,y,z), W(x,y,z))$, для которой некоторым способом найдена двумерная рекуррентная формула по переменным x и y

$$F_{k,w} = U \odot V \odot W \odot R = \sum_{\xi=0}^{w-1} \left(G_{v(k), \xi+1} + \sum_l \sum_{\varsigma=0}^{\xi} U_{a(l,k), \varsigma+1} \cdot V_{\beta(l,k), \xi+1-\varsigma} \right) \times$$

$$\times \left(P_{\tau(r,k), w-\xi} + \sum_r \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} W_{\gamma(r,k), \varsigma+1} \cdot R_{\sigma(r,k), w-\xi-\varsigma} \right) \quad (3.87)$$

Тогда трехмерная рекуррентная формула имеет следующий вид

$$F_{k,w,s} = U \odot V \odot W \odot R =$$

$$= \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} (G_{v(k), \xi+1, \eta+1} + \sum_l \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} (U_{\alpha(l,k), \varsigma+1, \lambda+1} \cdot V_{\beta(l,k), \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda})) \times$$

$$\times (P_{\tau(r,k), w-\xi, s-\eta} + \sum_r \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} \sum_{\lambda=0}^{s-1-\eta} (W_{\gamma(r,k), \varsigma+1, \lambda+1} R_{\sigma(r,k), w-\xi-\varsigma, s-\eta-\lambda}))$$
(3.88)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим рекуррентную формулу (3.87) как функцию переменной z

$$F_{k,w}(z) = \sum_{\xi=0}^{w-1} (G_{v(k), \xi+1}(z) + \sum_l \sum_{\varsigma=0}^{\xi} U_{\alpha(l,k), \varsigma+1}(z) \cdot V_{\beta(l,k), \xi+1-\varsigma}(z)) \cdot (P_{\tau(r,k), w-\xi}(z) +$$

$$+ \sum_r \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} W_{\gamma(r,k), \varsigma+1}(z) \cdot R_{\sigma(r,k), w-\xi-\varsigma}(z)) = H_{v(l,k), \sigma(w, \xi)}(z) \cdot L_{p(r,k), \theta(w, \xi)}(z)$$
(3.89)

По одномерной рекуррентной формуле определяем

$$(F_{k,w})_s = H \odot L = \sum_{\eta=0}^{s-1} (H_{v(l,k), \sigma(w, \xi)}_{\eta+1} \cdot (L_{p(r,k), \theta(w, \xi)})_{s-\eta})$$
3.90

Производные каждого сомножителя определяются по той же одномерной формуле

$$(H_{v(l,k), \sigma(w, \xi)})_{\eta+1} = (G_{v(k), \xi+1})_{\eta+1} +$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{\eta} (\sum_l \sum_{\varsigma=0}^{\xi} (U_{\alpha(l,k), \varsigma+1})_{\lambda+1} \cdot (V_{\beta(l,k), \xi+1-\varsigma})_{\eta+1-\lambda});$$

$$(L_{p(r,k), \theta(w, \xi)})_{s-\eta} = (P_{\tau(r,k), w-\xi})_{s-\eta} +$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{s-1-\eta} (\sum_r \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} (W_{\gamma(r,k), \varsigma+1})_{\lambda+1} \cdot (R_{\chi(r,k), w-\xi-\varsigma})_{s-\eta-\lambda})$$

Подставляя найденные выражения в формулу (3.90), получаем формулу (3.88), что требовалось доказать.

Определение. Трехмерным p -дифференцированием назовем процесс многократного применения трехмерной рекуррентной формулы $F_{k,w,s}$ для последовательности значений индексов $k = 2, 3, \dots$; $w = 2, 3, \dots$; $s = 2, 3, \dots$.

Пример 3.13

Зададим трехмерные функции, представленные двумерными матрицами вида (3.75) при смещении $x_0 = y_0 = z_0 = 0$:

$$1) \quad U(x, y, z) = U_1(x, y) \cdot z^0 + U_2(x, y) \cdot z^1 + U_3(x, y) \cdot z^2,$$

где
$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) $V(x, y, z) = V_1(x, y) \cdot z^0 + V_2(x, y) \cdot z^1 + V_3(x, y) \cdot z^2$,

где
$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \quad V_2 = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad V_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Введем трехмерную функцию произведения сомножителей

$$F(x, y, z) = U(x, y, z) \cdot U(x, y, z) \cdot V(x, y, z)$$

и вычислим нормированные трехмерные производные функции для $x = y = z = 0$.

Нормированные производные трехмерной функции $F(x, y, z)$ вычисляем по рекуррентной формуле (3.81). Первая матрица трехмерного p -дифференцирования вида (3.75)

$$F_1 = \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \\ y^5 \\ y^6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -4 & -12 & -3 & -8 & 0 \\ 1 & -4 & -7 & -5 & -4 & 0 & 6 \\ -2 & -12 & -5 & -10 & 0 & 12 & 0 \\ -1 & -3 & -4 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ -1 & -8 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

совпадает с результатом двумерного p -дифференцирования функции

$$F(x, y, 0) = U(x, y, 0) \cdot U(x, y, 0) \cdot V(x, y, 0),$$

выполненного по рекуррентной формуле (3.3, раздел 3.1). Ввиду симметрии функции $F(x, y, z)$ тот же результат дифференцирования получаем для двумерных функций $F(0, y, z)$, $F(x, 0, z)$.

Окончательный результат трехмерного p -дифференцирования представим в виде матриц (3.75)

$$F(x, y, z) = F_1(x, y) \cdot z^0 + F_2(x, y) \cdot z^1 + F_3(x, y) \cdot z^2 + F_4(x, y) \cdot z^3 + F_5(x, y) \cdot z^4 + \\ + F_6(x, y) \cdot z^5 + F_7(x, y) \cdot z^6 + \dots$$

где ненулевые матрицы равны (матрицы $F_8(x, y)$, $F_9(x, y)$, ... – нулевые):

$$F_2 = \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \\ y^5 \\ y^6 \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 & -4 & -12 & -3 & -8 & 0 \\ -4 & -6 & -34 & -8 & -34 & 0 & 0 \\ -4 & -34 & -11 & -48 & 0 & 12 & 0 \\ -12 & -8 & -48 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ -3 & -34 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad F_3 = \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \\ y^5 \\ y^6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -7 & -5 & -4 & 0 & 6 \\ -4 & -34 & -11 & -48 & 0 & 12 & 0 \\ -7 & -11 & -45 & 0 & 42 & 0 & 0 \\ -5 & -48 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 42 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
F_4 &= \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \\ y^5 \\ y^6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -2 & -12 & -5 & -10 & 0 & 12 & 0 \\ -12 & -8 & -48 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ -5 & -48 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}; & F_5 &= \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \\ y^5 \\ y^6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ -3 & -34 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 42 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, \\
F_6 &= \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \\ y^5 \\ y^6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -8 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}; & F_7 &= \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \\ y^5 \\ y^6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}
\end{aligned}$$

Представим полученный матричный результат в алгебраической форме

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= 1 - x + x^2 - 2x^3 - x^4 - x^5 - x^6 - y + y^2 - 2y^3 - y^4 - y^5 - y^6 - 4xy - 4x^2y - \\
&- 12x^3y - 3x^4y - 8x^5y - 4xy^2 - 7x^2y^2 - 5x^3y^2 - 4x^4y^2 + 6x^6y^2 - 12xy^3 - 5x^2y^3 - \\
&- 10x^3y^3 + 12x^5y^3 - 3xy^4 - 4x^2y^4 + 18x^4y^4 - 8xy^5 + 12x^3y^5 + 6x^2y^6 + (-1 - 4x - 4x^2 - \\
&- 12x^3 - 3x^4 - 8x^5 - 4y - 4y^2 - 12y^3 - 3y^4 - 8y^5 - 6xy - 34x^2y - 8x^3y - 34x^4y - \\
&- 34xy^2 - 11x^2y^2 - 48x^3y^2 + 12x^5y^2 - 8xy^3 - 48x^2y^3 + 24x^4y^3 - 34xy^4 + 24x^3y^4 + \\
&+ 12x^2y^5) \cdot z + (1 - 4x - 7x^2 - 5x^3 - 4x^4 + 6x^6 - 4y - 7y^2 - 5y^3 - 4y^4 + 6y^6 - 34xy - \\
&- 11x^2y - 48x^3y + 12x^5y - 11xy^2 - 45x^2y^2 + 42x^4y^2 - 48xy^3 + 48x^3y^3 + 42x^2y^4 + \\
&+ 12xy^5) \cdot z^2 + (-2 - 12x - 5x^2 - 10x^3 + 12x^5 - 12y - 5y^2 - 10y^3 + 12y^5 - 8xy - 48x^2y + \\
&+ 24x^4y - 48xy^2 + 48x^3y^2 + 48x^2y^3 + 24xy^4)z^3 + (-1 - 3x - 4x^2 + 18x^4 - 3y - 4y^2 + \\
&+ 18y^4 - 34xy + 24x^3y + 42x^2y^2 + 24x^2y^3) \cdot z^4 + (-1 - 8x + 12x^3 - 8y + 12y^3 + \\
&+ 12x^2y + 12xy^2) \cdot z^5 + (-1 + 6x^2 + 6y^2) \cdot z^6
\end{aligned}$$

Лемма 3.8. Задана трехмерная функция $F(D(x, y, z))$, для которой известны нормированные производные внутренней функции:

$$\begin{aligned}
\boxed{z^0} & \quad x^0 \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3 \quad \dots \quad \boxed{z^1} \quad x^0 \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3 \quad \dots \\
D_1 &= \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ \vdots \end{matrix} \begin{bmatrix} D_{1,1,1} & D_{2,1,1} & D_{3,1,1} & D_{4,1,1} & \dots \\ D_{1,2,1} & D_{2,2,1} & D_{3,2,1} & D_{4,2,1} & \dots \\ D_{1,3,1} & D_{2,3,1} & D_{3,3,1} & D_{4,3,1} & \dots \\ D_{1,4,1} & D_{2,4,1} & D_{3,4,1} & D_{4,4,1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}; & D_2 &= \begin{matrix} \begin{bmatrix} D_{1,1,2} & D_{2,1,2} & D_{3,1,2} & D_{4,1,2} & \dots \\ D_{1,2,2} & D_{2,2,2} & D_{3,2,2} & D_{4,2,2} & \dots \\ D_{1,3,2} & D_{2,3,2} & D_{3,3,2} & D_{4,3,2} & \dots \\ D_{1,4,2} & D_{2,4,2} & D_{3,4,2} & D_{4,4,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix} \dots
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Тогда для расчета нормированных трехмерных производных $F_{k,w,s}$, как правило, требуется предварительный расчет двумерных производных функции по двум переменным: x и y при z^0 ; x и z при y^0 ; y и z при x^0

$$\begin{array}{c}
 \boxed{z^0} \quad x^0 \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3 \quad \dots \quad \boxed{y^0} \quad x^0 \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3 \quad \dots \\
 \begin{array}{c} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ \vdots \end{array} \begin{bmatrix} F_{1,1,1} & F_{2,1,1} & F_{3,1,1} & F_{4,1,1} & \dots \\ F_{1,2,1} & F_{2,2,1} & F_{3,2,1} & F_{4,2,1} & \dots \\ F_{1,3,1} & F_{2,3,1} & F_{3,3,1} & F_{4,3,1} & \dots \\ F_{1,4,1} & F_{2,4,1} & F_{3,4,1} & F_{4,4,1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{c} z^0 \\ z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ \vdots \end{array} \begin{bmatrix} F_{1,1,1} & F_{2,1,1} & F_{3,1,1} & F_{4,1,1} & \dots \\ F_{1,1,2} & F_{2,1,2} & F_{3,1,2} & F_{4,1,2} & \dots \\ F_{1,1,3} & F_{2,1,3} & F_{3,1,3} & F_{4,1,3} & \dots \\ F_{1,1,4} & F_{2,1,4} & F_{3,1,4} & F_{4,1,4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}; \dots \\
 \boxed{x^0} \quad y^0 \quad y^1 \quad y^2 \quad y^3 \quad \dots \\
 \begin{array}{c} z^0 \\ z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ \vdots \end{array} \begin{bmatrix} F_{1,1,1} & F_{1,2,1} & F_{1,3,1} & F_{1,4,1} & \dots \\ F_{1,1,2} & F_{1,2,2} & F_{1,3,2} & F_{1,4,2} & \dots \\ F_{1,1,3} & F_{1,2,3} & F_{1,3,3} & F_{1,4,3} & \dots \\ F_{1,1,4} & F_{1,2,4} & F_{1,3,4} & F_{1,4,4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.
 \end{array}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Индекс производной, равный 1, означает отсутствие переменной, и расчеты нормированных производных выполняются для двух других индексов, которые не равны 1 и принимают значения 2, 3, ...

Применим трехмерную рекуррентную формулу функции, имеющую структуру

$$F_{k,w,s} = \Xi(D_{1,1,1}, D_{2,1,1}, \dots, D_{k,w,1}, \dots, D_{k,1,s}, \dots, D_{1,w,s}, \dots, D_{k,w,s}, \dots, F_{1,1,1}, \dots, F_{k-1,w-1,1}, \dots, F_{k,w-1,1}, \dots, F_{k-1,w,1}, \dots, F_{k-1,1,s-1}, \dots, F_{k,w,s-1}, \dots, F_{k-1,w-1,s-1})$$

где $F_{1,1,1} = F(D_{1,1,1})$. Изменяя индексы 2, 3, ..., k; 2, 3, ..., w, получаем:

$$\begin{aligned}
 F_{2,2,2} &= \Xi(D_{1,1,1}, D_{2,1,1}, D_{1,2,1}, D_{2,2,1}, D_{1,1,2}, D_{2,1,2}, D_{1,2,2}, D_{2,2,2}, \\
 &\quad F_{1,1,1}, F_{2,1,1}, F_{1,2,1}, F_{2,2,1}, F_{1,1,2}, F_{2,1,2}, F_{1,2,2}); \\
 F_{2,3,2} &= \Xi(D_{1,1,1}, D_{2,1,1}, D_{1,2,1}, D_{2,2,1}, D_{1,1,2}, D_{2,1,2}, D_{1,2,2}, D_{2,2,2}, D_{1,3,1}, D_{2,3,1}, D_{1,3,2}, \\
 &\quad D_{2,3,2}, F_{1,1,1}, F_{2,1,1}, F_{1,2,1}, F_{2,2,1}, F_{1,1,2}, F_{2,1,2}, F_{1,2,2}, F_{2,2,2}, F_{1,3,1}, F_{2,3,1}, F_{1,3,2}); \\
 F_{3,2,2} &= \Xi(D_{1,1,1}, D_{2,1,1}, D_{1,2,1}, D_{2,2,1}, D_{1,1,2}, D_{2,1,2}, D_{1,2,2}, D_{2,2,2}, D_{3,1,1}, D_{3,2,1}, D_{3,1,2}, \\
 &\quad D_{3,2,2}, F_{1,1,1}, F_{2,1,1}, F_{1,2,1}, F_{2,2,1}, F_{1,1,2}, F_{2,1,2}, F_{1,2,2}, F_{2,2,2}, F_{3,1,1}, F_{3,2,1}, F_{3,1,2}); \\
 F_{2,2,3} &= \Xi(D_{1,1,1}, D_{2,1,1}, D_{1,2,1}, D_{2,2,1}, D_{1,1,2}, D_{2,1,2}, D_{1,2,2}, D_{2,2,2}, D_{1,1,3}, D_{1,2,3}, D_{2,1,3}, \\
 &\quad D_{2,2,3}, F_{1,1,1}, F_{2,1,1}, F_{1,2,1}, F_{2,2,1}, F_{1,1,2}, F_{2,1,2}, F_{1,2,2}, F_{2,2,2}, F_{1,1,3}, F_{1,2,3}, F_{2,1,3}); \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

откуда видно, что в начале процесса появляются неопределенные производные

$$F_{1,1,1}, F_{2,1,1}, F_{1,2,1}, F_{2,2,1}, F_{1,1,2}, F_{2,1,2}, F_{1,2,2}, F_{1,3,1}, \\ F_{2,3,1}, F_{1,3,2}, F_{3,1,1}, F_{3,2,1}, F_{3,1,2}, F_{1,1,3}, F_{1,2,3}, F_{2,1,3}, \dots$$

для значений переменных x^0, y^0, z^0 , что требовалось доказать.

Для большинства трехмерных рекуррентных формул лемма 3.8 необходима, и предварительное двумерное рекуррентное дифференцирование функции является основой для реализации трехмерного p -дифференцирования. Но как видно из рекуррентной формулы (3.78) и примера 3.13, трехмерная функция произведения сомножителей является исключением из леммы 3.8 и не требует предварительного двумерного p -дифференцирования. Для таких функций включение в вычислительный процесс леммы дублирует некоторые результаты, не вызывая нарушения процесса.

Трехмерные рекуррентные формулы функций получены в теоремах 3.12, 3.13 в результате преобразования двумерных рекуррентных формул в трехмерные. Пусть задана трехмерная функция $F(U(x, y, z), V(x, y, z), \dots)$, для которой необходимо найти нормированные производные. Тогда трехмерная рекуррентная формула функции находится как конечный результат последовательного процесса преобразования двумерных рекуррентных формул для переменных x и y .

При дифференцировании функции $F(U(x, y, z), V(x, y, z), \dots)$ можно выбрать любой порядок следования переменных, в частности, сначала дифференцировать по двум переменным x и y , сохранив третью переменную z как параметр. Тогда для заданной трехмерной функции сначала строим соответствующую двумерную функцию $F(U(x, y), V(x, y), \dots)$, имеющую рекуррентную формулу, и по этой формуле находим ее нормированные производные

$$F_{k,w} = \Xi(F_{1,1}, F_{2,1}, F_{1,2}, \dots, F_{k-2,w-2}, F_{k-2,w-1}, F_{k-1,w-2}, \dots, F_{k-1,w-1}, \\ U_{1,1}, U_{2,1}, U_{1,2}, \dots, U_{k-2,w-2}, U_{k-1,w-1}, U_{k-1,w}, \dots, U_{k,w-1}, U_{k,w}, \\ V_{1,1}, V_{2,1}, V_{1,2}, \dots, V_{k-2,w-2}, V_{k-1,w-1}, V_{k-1,w}, \dots, V_{k,w-1}, V_{k,w}),$$

где $F_{1,1}, F_{2,1}, F_{1,2}, \dots, F_{k-2,w-2}, F_{k-2,w-1}, F_{k-1,w-2}, \dots, F_{k-1,w-1},$

$U_{1,1}, \dots, U_{k-1,w}, \dots, U_{k,w-1}, U_{k,w}, V_{1,1}, \dots, V_{k-1,w}, V_{k,w-1}, V_{k,w}$ – функции, зависящие от параметра z . Найденная двумерная рекуррентная формула превращается в функцию одной переменной z

$$F_{k,w}(z) = \Xi(F_{1,1}(z), \dots, F_{k-2,w-1}(z), F_{k-1,w-2}(z), F_{k-1,w-1}(z), U_{1,1}(z), \dots, \\ \dots, U_{k-1,w}(z), U_{k,w-1}(z), U_{k,w}(z), V_{1,1}(z), \dots, V_{k-1,w}(z), V_{k,w-1}(z), V_{k,w}(z))$$

и полученную двумерную формулу можно дифференцировать по новой

переменной z . Нормированные производные новой функции одной переменной можно найти по соответствующим одномерным рекуррентным формулам. Подставляя одномерные рекуррентные формулы в $F_{k,w}$, получаем трехмерные формулы $F_{k,w,s}$. Трехмерные рекуррентные формулы внутренних функций $U(x,y,z)$, $V(x,y,z)$, необходимые для расчета, находятся с помощью такого же процесса последовательного преобразования из соответствующих двумерных формул.

Трехмерные рекуррентные формулы, полученные с использованием рекуррентных формул (3.76), (3.81), (3.82), (3.84), (3.86) и формул табл.3.10, приведены в табл. П.28 – П.32.

Пример 3.14.

1. Задана трехмерная функция $F(x,y,z) = \exp(D(x,y,z))$, в которой внутренняя функция $D(x,y,z)$ представлена в виде матриц (3.75) при смещении $x_0 = y_0 = z_0 = 0$:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.92)$$

Для начала процесса расчета трехмерных производных заданной функции выполним двумерное p -дифференцирование по формуле (3.3)

$$F_1 = F(x,y,0) = \begin{matrix} & \boxed{z^0} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 7,3891 & 0 & 7,3891 & 0 & 3,6954 \\ 0 & 7,3891 & 0 & 7,3891 & 0 \\ 7,3891 & 0 & 11,084 & 0 & 7,3891 \\ 0 & 7,3891 & 0 & 8,6206 & 0 \\ 3,6945 & 0 & 7,3891 & 0 & 5,8497 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (3.93)$$

Ввиду симметрии функции $F(x,y,z)$ результаты дифференцирования для двумерных функций $F(x,y,0)$, $F(0,y,z)$, $F(x,0,z)$ совпадают и могут быть записаны в матрицы F_2 , F_3 , F_4 , F_5 . Нормированные производные трехмерной функции $F(x,y,z)$ для $x = y = z = 0$ вычисляем по рекуррентной формуле (табл. П.30) и представляем результат в виде матриц (3.75)

$$F(x,y,z) = F_1(x,y) \cdot z^0 + F_2(x,y) \cdot z^1 + F_3(x,y) \cdot z^2 + F_4(x,y) \cdot z^3 + F_5(x,y) \cdot z^4,$$

где матрицы равны:

$$F_2 = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 7,3891 & 0 & 7,3891 & 0 \\ 7,3891 & 0 & 14,778 & 0 & 11,084 \\ 0 & 14,778 & 0 & 18,473 & 0 \\ 7,3891 & 0 & 18,473 & 0 & 16,010 \\ 0 & 11,084 & 0 & 16,010 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad F_3 = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 7,3891 & 0 & 11,084 & 0 & 7,3891 \\ 0 & 14,778 & 0 & 18,473 & 0 \\ 11,084 & 0 & 25,862 & 0 & 22,167 \\ 0 & 18,473 & 0 & 27,093 & 0 \\ 7,3891 & 0 & 22,167 & 0 & 21,859 \end{bmatrix} \end{matrix};$$

$$F_4 = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 7,3891 & 0 & 8,6206 & 0 \\ 7,3891 & 0 & 18,473 & 0 & 16,010 \\ 0 & 18,473 & 0 & 27,093 & 0 \\ 8,6206 & 0 & 27,093 & 0 & 27,093 \\ 0 & 16,010 & 0 & 27,093 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}; F_5 = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3,6945 & 0 & 7,3891 & 0 & 5,8497 \\ 0 & 11,084 & 0 & 16,010 & 0 \\ 7,3891 & 0 & 22,167 & 0 & 21,859 \\ 0 & 16,010 & 0 & 27,093 & 0 \\ 5,8497 & 0 & 21,859 & 0 & 24,476 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

2. Задана трехмерная функция $F(x, y, z) = \ln D(x, y, z)$, в которой внутренняя функция представлена в виде матриц (3.92).

Для начала процесса расчета трехмерных производных функции выполним двумерное p -дифференцирование по формуле (3.3)

$$F_1 = F(x, y, 0) = \begin{matrix} \boxed{z^0} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,69315 & 0 & 0,5 & 0 & -0,125 \\ 0 & 0,5 & 0 & -0,25 & 0 \\ 0,5 & 0 & -0,375 & 0 & 0,25 \\ 0 & -0,25 & 0 & 0,29167 & 0 \\ -0,125 & 0 & 0,25 & 0 & -0,29688 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (3.94)$$

Ввиду симметрии функции $F(x, y, z)$ результаты дифференцирования для двумерных функций $F(x, y, 0)$, $F(0, y, z)$, $F(x, 0, z)$ совпадают и могут быть записаны в матрицы F_2 , F_3 , F_4 , F_5 .. Нормированные производные трехмерной функции $F(x, y, z)$ для $x = y = z = 0$ вычисляем по рекуррентной формуле (табл. П.28) и представляем результат в виде матриц (3.75)

$$F(x, y, z) = F_1(x, y) \cdot z^0 + F_2(x, y) \cdot z^1 + F_3(x, y) \cdot z^2 + F_4(x, y) \cdot z^3 + F_5(x, y) \cdot z^4,$$

где матрицы равны:

$$F_2 = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0 & -0,25 & 0 \\ 0,5 & 0 & -0,5 & 0 & 0,375 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0,625 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0,625 & 0 & -0,8125 \\ 0 & 0,375 & 0 & -0,8125 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}; F_3 = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & -0,375 & 0 & 0,25 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0,625 & 0 \\ -0,375 & 0 & 0,875 & 0 & -1,125 \\ 0 & 0,625 & 0 & -1,375 & 0 \\ 0,25 & 0 & -1,125 & 0 & 2,2188 \end{bmatrix} \end{matrix};$$

$$F_4 = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & -0,25 & 0 & -0,29167 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0,625 & 0 & -0,8125 \\ 0 & 0,625 & 0 & -1,375 & 0 \\ -0,29167 & 0 & -1,375 & 0 & 2,75 \\ 0 & -0,8125 & 0 & 2,75 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}; F_5 = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -0,125 & 0 & 0,25 & 0 & -0,29688 \\ 0 & 0,375 & 0 & -0,8125 & 0 \\ 0,25 & 0 & -1,125 & 0 & 2,2188 \\ 0 & -0,8125 & 0 & 2,75 & 0 \\ -0,29688 & 0 & 2,2188 & 0 & -6,2109 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Теорема 3.14. Задана трехмерная функция деления

$$F(x, y, z) = \frac{U(x, y, z)}{V(x, y, z)}. \quad (3.95)$$

Тогда нормированные производные заданной функции определяются по трехмерной рекуррентной формуле

$$F_{k,w,s} = U \circledast V = \frac{1}{V_{1,1,1}} \left(U_{k,w,s} - \sum_{\eta=0}^{s-2} F_{k,w,\eta+1} \cdot V_{1,1,s-\eta} - \right. \\ \left. - \sum_{\eta=0}^{s-1} \left(\sum_{\xi=0}^{w-2} F_{k,\xi+1,\eta+1} \cdot V_{1,w-\xi,s-\eta} + \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{i=0}^{k-2} F_{i+1,\xi+1,\eta+1} \cdot V_{k-i,w-\xi,s-\eta} \right) \right) \quad (3.96)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем заданную функцию как функцию одной переменной x в виде уравнения $F(x) \cdot V(x) = U(x)$, и применим для расчета нормированных производных формулу Лейбница-Коши

$$\sum_{i=0}^{k-1} F_{i+1} \cdot V_{k-i} = U_k$$

Предполагаем, что рекуррентное уравнение зависит от второй переменной y

$$\sum_{i=0}^{k-1} F_{i+1}(y) \cdot V_{k-i}(y) = U_k(y)$$

Применяя к уравнению формулу Лейбница-Коши, получаем двумерное рекуррентное уравнение

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} F_{i+1,\xi+1} \cdot V_{k-i,w-\xi} = U_{k,w}$$

Предполагаем, что это уравнение зависит от третьей переменной z

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} F_{i+1,\xi+1}(z) \cdot V_{k-i,w-\xi}(z) = U_{k,w}(z)$$

Применяя еще раз формулу Лейбница-Коши, получаем трехмерное рекуррентное уравнение

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} F_{i+1,\xi+1,\eta+1} \cdot V_{k-i,w-\xi,s-\eta} = U_{k,w,s}$$

Для перехода от рекуррентного уравнения к трехмерной рекуррентной формуле необходимо из сумм выделить некоторые слагаемые: из первой суммы слагаемое для $i = k - 1$, из второй суммы слагаемое для $\xi = w - 1$, из третьей суммы слагаемое для $\eta = s - 1$. Тогда в преобразованном трехмерном рекуррентном уравнении появляется слагаемое $F_{k,w,s} \cdot V_{1,1,1}$, откуда следует формула (3.96), что требовалось доказать.

Пример 3.15.

Зададим трехмерную функцию

$$F(x,y,z) = \frac{U(x,y,z)}{V(x,y,z)} = \frac{\exp(D(x,y,z))}{\ln D(x,y,z)},$$

в которой внутренняя функция $D(x,y,z)$ представлена в виде матриц (3.92).

Нормированные трехмерные производные внутренних функций $U(x,y,z)$, $V(x,y,z)$ для $x = y = z = 0$ вычислены в примере 3.14 и представлены

в виде матриц (3.75). Нормированные производные трехмерной функции $F(x,y,z)$ вычисляем по рекуррентной формуле деления (3.96). Первая матрица деления

$$F_1 = F(x, y, 0) = \begin{matrix} & \boxed{z^0} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 10,660 & 0 & 2,9705 & 0 & 5,1097 \\ 0 & 2,9705 & 0 & 10,219 & 0 \\ 2,9705 & 0 & 15,329 & 0 & -12,086 \\ 0 & 10,219 & 0 & -14,1 & 0 \\ 5,1097 & 0 & -12,086 & 0 & 54,728 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

совпадает с результатом двумерного p -дифференцирования функции

$$F(x, y, 0) = \frac{U(x, y, 0)}{V(x, y, 0)} = \frac{\exp(D(x, y, 0))}{\ln D(x, y, 0)} \quad ..$$

Ввиду симметрии функции $F(x,y,z)$ тот же результат двумерного p -дифференцирования получаем для функций $F(0,y,z)$, $F(x,0,z)$

$$F(0, y, z) = \frac{\exp(D(0, y, z))}{\ln D(0, y, z)}; \quad F(x, 0, z) = \frac{\exp(D(x, 0, z))}{\ln D(x, 0, z)}.$$

Трехмерная функция деления (3.95) является исключением из леммы 3.8 и, подобно трехмерной функции умножения сомножителей, не требует предварительного двумерного p -дифференцирования.

Окончательный результат представлен в виде матриц (3.75)

$$F(x, y, z) = F_1(x, y) \cdot z^0 + F_2(x, y) \cdot z^1 + F_3(x, y) \cdot z^2 + F_4(x, y) \cdot z^3 + F_5(x, y) \cdot z^4,$$

где матрицы равны:

$$\begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ F_2 = \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2,9705 & 0 & 10,219 & 0 \\ 2,9705 & 0 & 20,439 & 0 & -18,129 \\ 0 & 20,439 & 0 & -30,215 & 0 \\ 10,219 & 0 & -30,215 & 0 & 149,78 \\ 0 & -18,129 & 0 & 149,78 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ F_3 = & \begin{bmatrix} 2,9705 & 0 & 15,329 & 0 & -12,086 \\ 0 & 20,439 & 0 & -30,215 & 0 \\ 15,329 & 0 & -42,301 & 0 & 207,39 \\ 0 & -30,215 & 0 & 253,48 & 0 \\ -12,086 & 0 & 207,39 & 0 & -954,43 \end{bmatrix} \end{matrix}; \\ \\ \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ F_4 = \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 10,219 & 0 & -14,1 & 0 \\ 10,219 & 0 & -30,215 & 0 & 149,78 \\ 0 & -30,215 & 0 & 253,48 & 0 \\ -14,1 & 0 & 253,48 & 0 & -1183,0 \\ 0 & 149,78 & 0 & -1183,0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ F_5 = & \begin{bmatrix} 5,1097 & 0 & -12,086 & 0 & 54,728 \\ 0 & -18,129 & 0 & 149,78 & 0 \\ -12,086 & 0 & 207,39 & 0 & -954,43 \\ 0 & 149,78 & 0 & -1183,0 & 0 \\ 54,728 & 0 & -954,43 & 0 & 6494,7 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

При большом количестве внутренних функций в составной функции в процессе численного расчета трехмерных производных можно использовать прием разделения составной функции на частичные функции (части).

Рассмотрим трехмерную составную функцию

$$F(x, y, z) = v(\eta(| \rho(v(| \varsigma(\psi(\phi(D(x, y, z))))))))), \quad (3.97)$$

для функции которой $D(x,y,z)$ известны численные нормированные производные для $x=y=z=0$, представленные в виде двумерных матриц (3.75)

$$D(x, y, z) = D_1(x, y) \cdot z^0 + D_2(x, y) \cdot z^1 + D_3(x, y) \cdot z^2 + \dots + D_n(x, y) \cdot z^{n-1} \quad (3.98)$$

Разделим функцию (3.97) на части (они условно показаны в выражении), каждая из которых может быть составной функцией:

$$\begin{aligned} L(x, y, z) &= \zeta(\psi(\varphi(D(x, y, z)))) ; P(x, y, z) = \rho(v(L(x, y, z))) ; \\ F(x, y, z) &= v(\eta(P(x, y, z))) \end{aligned} \quad (3.99)$$

Тогда численный расчет трехмерных производных заданной функции выполняется для каждой части отдельно, и частичные функции (3.97) обрабатываются справа (от $D(x, y, z)$) налево (к $F(x, y, z)$).

Частичную составную функцию $L(x, y, z) = \zeta(\psi(\varphi(D(x, y, z))))$ можно, в свою очередь, разделить на части, которые включают одну внутреннюю функцию или несколько таких функций из (3.97):

$$H(x, y, z) = \psi(\varphi(D(x, y, z))) ; L(x, y, z) = \zeta(H(x, y, z)) .$$

Критерий разделения на части – каждая частичная функция должна иметь свою трехмерную рекуррентную формулу $\Xi\psi\varphi$, $\Xi\zeta$, $\Xi\rho v$, $\Xi v\eta$, ...

Процесс трехмерного p -дифференцирования начинается в частичной функции справа, которая содержит внутреннюю функции $D(x, y, z)$ с известными трехмерными производными, записанными в виде численных двумерных матриц $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n$. Количество вычисляемых трехмерных производных l не связано с n и определяется решаемыми задачами.

Представим процесс расчета трехмерных производных частичных функций (3.99) в виде схемы.

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} z^0 & z^1 & z^2 & \dots & z^{n-1} \end{matrix} & \begin{matrix} z^0 & z^1 & z^2 & \dots & z^{l-1} \end{matrix} \\ D &= \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & D_3 & \dots & D_n \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{формула } \Xi\psi\varphi]{\text{трехмерная рекуррентная}} H = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & \dots & H_l \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \begin{matrix} z^0 & z^1 & z^2 & \dots & z^{l-1} \end{matrix} & \begin{matrix} z^0 & z^1 & z^2 & \dots & z^{l-1} \end{matrix} \\ \rightarrow H &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & \dots & H_l \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{формула } \Xi\zeta]{\text{трехмерная рекуррентная}} L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & \dots & L_l \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \begin{matrix} z^0 & z^1 & z^2 & \dots & z^{l-1} \end{matrix} & \begin{matrix} z^0 & z^1 & z^2 & \dots & z^{l-1} \end{matrix} \\ \rightarrow L &= \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & \dots & L_l \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{формула } \Xi\rho v]{\text{трехмерная рекуррентная}} P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_l \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \begin{matrix} z^0 & z^1 & z^2 & \dots & z^{l-1} \end{matrix} & \begin{matrix} z^0 & z^1 & z^2 & \dots & z^{l-1} \end{matrix} \\ \rightarrow P &= \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & \dots & P_l \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{формула } \Xi v\eta]{\text{трехмерная рекуррентная}} F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \dots & F_l \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Для контроля точности численного расчета используем тождественные трехмерные функции $T(x, y, z)$, которые имеют рекуррентные формулы ΞT . По определению тождественные функции должны обеспечить тождественное рекуррентное преобразование численных производных

$$F_{k,w,s} = \Xi T(F_{1,1,1}, F_{2,1,1}, F_{1,2,1}, F_{1,1,2}, \dots, F_{k-1,w,s}, F_{k,w-1,s}, F_{k,w,s-1}, F_{k,w,s})$$

В практике численных расчетов вследствие ошибок тождество нарушается

$$K_{k,w,s} = \Xi_T(F_{1,1,1}, F_{2,1,1}, F_{1,2,1}, F_{1,1,2}, \dots, F_{k-1,w,s}, F_{k,w-1,s}, F_{k,w,s-1}, F_{k,w,s})$$

и по отклонению численных производных функции контроля $K(x,y,z)$ от производных контролируемой функции $F(x,y,z)$ можно оценивать точность и численную устойчивость процесса.

Функции контроля добавляют к заданной функции (3.97) свои внутренние функции слева, увеличивая трудоемкость процесса, как плату за возможность контроля. Представим процесс контроля в виде схемы.

$$\begin{array}{ccccccc} z^0 & z^1 & z^2 & \dots & z^{l-1} & & z^0 & z^1 & z^2 & \dots & z^{l-1} \\ F = [F_1 & F_2 & F_3 & \dots & F_l] \xrightarrow[\text{формула } \Xi_T]{\text{трехмерная рекуррентная}} K = [K_1 & K_2 & K_3 & \dots & K_l] \rightarrow |F_i, K_i| \end{array}$$

Пример 3.16.

Зададим трехмерную составную функцию

$$F(x, y, z) = \arcsin(\exp(\arctg D(x, y, z))) ,$$

в которой известны численные производные внутренней функции $D(x,y,z)$ для смещения $x_0 = y_0 = z_0 = 0$:

$$D_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Для расчета численных нормированных производных $F(x,y,z)$ разделим заданную функцию на две части:

$$H(x, y, z) = \exp(\arctg D(x, y, z)) ; \quad F(x, y, z) = \arcsin(H(x, y, z)) ,$$

которые имеют свои трехмерные рекуррентные формулы.

Для начала процесса расчета трехмерных производных функции $H(x,y,z)$ выполним двумерное p -дифференцирование функции $H(x,y,0)$ по формуле (3.3, раздел 3.1)

$$H_1 = H(x, y, 0) = \begin{array}{c} \boxed{z^0} \\ y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{array} \begin{array}{ccccc} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0,45594 & 0,22797 & 0,39895 & 0,44644 & 0,53312 \\ 0,22797 & 0,56992 & 0,99736 & 1,4770 & 1,7816 \\ 0,39895 & 0,99736 & 2,0588 & 3,0550 & 3,5773 \\ 0,44644 & 1,4770 & 3,0550 & 4,4290 & 3,7439 \\ 0,53312 & 1,7816 & 3,5773 & 3,7439 & -2,0017 \end{array} \right] \end{array} .$$

Ввиду симметрии функции $H(x,y,z)$ результаты дифференцирования для двумерных функций $H(x,y,0)$, $H(0,y,z)$, $H(x,0,z)$ совпадают и могут быть записаны в матрицы H_2 , H_3 , H_4 , H_5 . Частичная функция $Hx, y, z) = \exp(\arctg D(x, y, z))$, включающая две внутренние функции, имеет свою трехмерную рекуррентную формулу (табл. П.31), по которой вычисляем нормированные производные функции $H(x,y,z)$ для $x = y = z = 0$. Результат расчета представляем в виде матриц (3.75)

$$H(x, y, z) = H_1(x, y) \cdot z^0 + H_2(x, y) \cdot z^1 + H_3(x, y) \cdot z^2 + H_4(x, y) \cdot z^3 + H_5(x, y) \cdot z^4$$

где матрицы равны:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{array}{c} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,22797 & 0,56992 & 0,99736 & 1,4770 & 1,7816 \\ 0,56992 & 1,6528 & 3,4623 & 5,2884 & 6,1946 \\ 0,99736 & 3,4623 & 7,3271 & 10,658 & 8,6256 \\ 1,4770 & 5,2884 & 10,658 & 10,597 & -9,6480 \\ 1,7816 & 6,1946 & 8,6256 & -9,6480 & -86,298 \end{bmatrix} \end{array} & ; & \begin{array}{ccccc} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{array}{c} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,39895 & 0,99736 & 2,0588 & 3,0550 & 3,5773 \\ 0,99736 & 3,4623 & 7,3271 & 10,658 & 8,6256 \\ 2,0588 & 7,3271 & 14,767 & 14,415 & -14,699 \\ 3,0550 & 10,658 & 14,415 & -19,718 & -160,43 \\ 3,5773 & 8,6256 & -14,699 & -160,43 & -588,73 \end{bmatrix} \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{array}{c} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,44644 & 1,4770 & 3,0550 & 4,4290 & 3,7439 \\ 1,4770 & 5,2884 & 10,658 & 10,597 & -9,6480 \\ 3,0550 & 10,658 & 14,415 & -19,718 & -160,43 \\ 4,4290 & 10,597 & -19,718 & -206,65 & -754,97 \\ 3,7439 & -9,6480 & -160,43 & -754,97 & -2180,1 \end{bmatrix} \end{array} & ; & \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{array}{c} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,53312 & 1,7816 & 3,5773 & 3,7439 & -2,0017 \\ 1,7816 & 6,1946 & 8,6256 & -9,6480 & -86,298 \\ 3,5773 & 8,6256 & -14,699 & -160,43 & -588,73 \\ 3,7439 & -9,6480 & -160,43 & -754,97 & -2180,1 \\ -2,0017 & -86,298 & -588,73 & -2180,1 & -5073,1 \end{bmatrix} \end{array} \end{array} \end{array}$$

Расчет численных производных второй частичной функции $F(x, y, z) = \arcsin(H(x, y, z))$ отличается от расчета предыдущей функции $H(x, y, z)$ только обозначениями. Для начала процесса расчета трехмерных производных функции необходимо, согласно лемме 3.8, выполнить двумерное p -дифференцирование по формуле (3.3, раздел 3.1)

$$F_1 = F(x, y, 0) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boxed{z^0} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{array}{c} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,47343 & 0,25614 & 0,46505 & 0,56543 & 0,74375 \\ 0,25614 & 0,67396 & 1,2785 & 2,1144 & 3,0606 \\ 0,46505 & 1,2785 & 2,9501 & 5,3104 & 8,5923 \\ 0,56543 & 2,1144 & 5,3104 & 10,767 & 19,076 \\ 0,74375 & 3,0606 & 8,5923 & 19,076 & 38,061 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}.$$

Ввиду симметрии функции $F(x, y, z)$ результаты дифференцирования для двумерных функций $F(x, y, 0)$, $F(0, y, z)$, $F(x, 0, z)$ совпадают и могут быть записаны в матрицы F_2 , F_3 , F_4 , F_5 . Нормированные производные трехмерной функции $F(x, y, z)$ для $x = y = z = 0$ вычисляем по рекуррентной формуле (табл. П.32) и представляем результат в виде (3.75)

$$F(x, y, z) = F_1(x, y) \cdot z^0 + F_2(x, y) \cdot z^1 + F_3(x, y) \cdot z^2 + F_4(x, y) \cdot z^3 + F_5(x, y) \cdot z^4,$$

где матрицы равны:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{array}{c} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,25614 & 0,67396 & 1,2785 & 2,1144 & 3,0606 \\ 0,67396 & 2,1391 & 5,0396 & 9,3670 & 15,378 \\ 1,2785 & 5,0396 & 13,056 & 27,064 & 48,895 \\ 2,1144 & 9,3670 & 27,064 & 61,782 & 126,20 \\ 3,0606 & 15,378 & 48,895 & 126,20 & 301,63 \end{bmatrix} \end{array} & ; & \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{array}{c} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,46505 & 1,2785 & 2,9501 & 5,3104 & 8,5923 \\ 1,2785 & 5,0396 & 13,056 & 27,064 & 48,895 \\ 2,9501 & 13,056 & 37,939 & 87,037 & 178,83 \\ 5,3104 & 27,064 & 87,037 & 227,17 & 549,29 \\ 8,5923 & 48,895 & 178,83 & 549,29 & 1609,1 \end{bmatrix} \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{array}{c} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,56543 & 2,1144 & 5,3104 & 10,767 & 19,076 \\ 2,1144 & 9,3670 & 27,064 & 61,782 & 126,20 \\ 5,3104 & 27,064 & 87,037 & 227,17 & 549,29 \\ 10,767 & 61,782 & 227,17 & 701,57 & 2065,1 \\ 19,076 & 126,20 & 549,29 & 2065,1 & 7286,1 \end{bmatrix} \end{array} & ; & \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{array}{c} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,74375 & 3,0606 & 8,5923 & 19,076 & 38,061 \\ 3,0606 & 15,378 & 48,895 & 126,20 & 301,63 \\ 8,5923 & 48,895 & 178,83 & 549,29 & 1609,1 \\ 19,076 & 126,20 & 549,29 & 2065,1 & 7286,1 \\ 38,061 & 301,63 & 1609,1 & 7286,1 & 29437,1 \end{bmatrix} \end{array} \end{array} \end{array}$$

Для контроля точности расчета конкретного примера используем два способа:

1) Проверка симметрии трехмерной функции $F(x,y,z)$, для чего проверим последнюю из вычисленных матриц результата, которая имеет наихудшую точность

$$F_5 = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,74375 & 3,060616646233215 & 8,592251153931906 & 19,07593651358767 & 38,06139873192588 \\ 3,060616646233215 & 15,378 & 48,89507406174142 & 126,2046262573995 & 301,6294707978534 \\ 8,592251153931906 & 48,89507406174142 & 178,83 & 549,2863319569350 & 1609,082781832996 \\ 19,07593651358767 & 126,2046262573996 & 549,2863319569349 & 2065,1 & 7286,119545030680 \\ 38,06139873192588 & 301,6294707978535 & 1609,082781832998 & 7286,119545030745 & 29437,1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

2) Укороченная тождественная функция контроля

$$K(x, y, z) = \sin F(x, y, z) = \sin(\arcsin(H(x, y, z))) = H(x, y, z) .$$

Используя трехмерное рекуррентное уравнение функции $\sin F(x,y,z)$ (табл. П.32), находим численные производные функции контроля $K(x,y,z)$ и сравниваем с численными производными частичной функции $H(x,y,z)$. Выполним сравнение последних пяти столбцов каждой матрицы H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 :

$$\begin{matrix} H_1: x^4, z^0 & H_2: x^4, z^1 & H_3: x^4, z^2 & H_4: x^4, z^3 & H_5: x^4, z^4 \\ \begin{bmatrix} 0,5331151546013863 & 1,781601981023118 & 3,577303611179626 & 3,743852624539460 & -2,001652360381858 \\ 1,781601981023118 & 6,194643742414439 & 8,625645879049571 & -9,648031226692813 & -86,29828620357728 \\ 3,577303611179626 & 8,625645879049575 & -14,69864304334871 & -160,4317290739254 & -588,7256027790860 \\ 3,743852624539460 & -9,648031226692810 & -160,4317290739254 & -754,9657721111665 & -2180,121456300335 \\ -2,001652360381858 & -86,29828620357729 & -588,7256027790860 & -2180,121456300335 & -5073,089839063602 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

с пятью столбцами соответствующих матриц контроля K_1, K_2, K_3, K_4, K_5

$$\begin{matrix} K_1: x^4, z^0 & K_2: x^4, z^1 & K_3: x^4, z^2 & K_4: x^4, z^3 & K_5: x^4, z^4 \\ \begin{bmatrix} 0,5331151546013865 & 1,781601981023116 & 3,577303611179629 & 3,743852624539427 & -2,001652360381766 \\ 1,781601981023116 & 6,194643742414438 & 8,625645879049573 & -9,648031226692826 & -86,29828620357763 \\ 3,577303611179629 & 8,625645879049635 & -14,69864304334865 & -160,4317290739271 & -588,7256027790781 \\ 3,743852624539427 & -9,648031226692575 & -160,4317290739263 & -754,9657721111520 & -2180,121456300380 \\ -2,001652360381766 & -86,29828620357851 & -588,7256027790882 & -2180,121456300371 & -5073,089839063587 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Сравниваемые числа отличаются только двумя последними цифрами, и матрицы F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 содержат не менее 13 верных значащих цифр.

Для оценки численной устойчивости трехмерного рекуррентного дифференцирования увеличим количество вычисляемых производных и размеры вычисляемых двумерных матриц вида (3.75)

$$H(x, y, z) = H_1(x, y) \cdot z^0 + H_2(x, y) \cdot z^1 + H_3(x, y) \cdot z^2 + \dots + H_l(x, y) \cdot z^{l-1},$$

где матрицы имеют размеры $l \times l$.

Для контроля точности выбираем последний элемент матрицы H_l и в таблице сравниваем с последним элементом матрицы контроля K_l .

Для наибольшей размерности двумерных матриц 10×10 выполним более детальное сравнение последних двумерных матриц H_{10} и K_{10} , для чего приведем полностью последние столбцы этих матриц.

Таблица сравнения

Размеры $l \times l$	$H_l : x^{l-1}, y^{l-1}, z^{l-1}$	$K_l : x^{l-1}, y^{l-1}, z^{l-1}$
5×5	-5,073089839063602e3	-5,073089839063587e3
6×6	9,787917771129972e4	9,787917771132197e4
7×7	2,669819059469380e6	2,669819059469155e6
8×8	-7,100240471485353e7	-7,100240471490037e7
9×9	-1,625122244109375e9	-1,625122244101107e9
10×10	6,122056577604037e10	6,122056577609805e10

Учитывая, что накопление погрешностей в расчете элементов матриц идет от начала процесса к его концу, можно сделать вывод, что все 1000 вычисленных трехмерных производных имеют не менее десяти верных значащих цифр (табл.3.11).

Таблица 3.11

Размеры 10×10	$H_{10} : x^9, z^9$	$K_{10} : x^9, z^9$
y^0	1,637621374004696e4	1,637621374005052e4
y^1	1,205290837649050e5	1,205290837647774e5
y^2	-6,067905430556681e5	-6,067905430556808e5
y^3	-1,376697213934971e7	-1,376697213935809e7
y^4	-1,015951747467809e8	-1,015951747467982e8
y^5	-4,474021152394396e8	-4,474021152389177e8
y^6	-1,195506911231822e9	-1,195506911230288e9
y^7	-8,503797111260251e8	-8,503797111281897e8
y^8	9,776319683599175e9	9,776319683745607e9
y^9	6,122056577604037e10	6,122056577609805e10

Пример 3.17.

Зададим трехмерную функцию

$$F(x, y, z) = \frac{U(D(x, y, z))}{V(D(x, y, z))} = \frac{\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(D(x, y, z))))))}{\sqrt[3]{\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(D(x, y, z))))}} ,$$

для которой необходимо выполнить p -дифференцирование и вычислить трехмерные нормированные производные. Внутренний трехмерный полином при смещении $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ равен:

$$D(x, y, z) = (1 - x - y - 6xy - x^2 - y^2 + 6x^2y^2)z^0 + (-1 - 6x - 6y)z^1 + (-1 + 6x^2 + 6y^2)z^2 = D_1(x, y) \cdot z^0 + D_2(x, y) \cdot z^1 + D_3(x, y) \cdot z^2$$

Представим двумерные полиномы в виде матриц (3.91):

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \quad D_2 = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Этап 1.

Составная функция $U(D(x,y,z))$ включает 6 внутренних трехмерных функций и для численной реализации требует вызова двух трехмерных прямых рекуррентных уравнений для $\sin^2 D$, $\ln D$ (табл. П.32, П.28). Результатом является трехмерный полином $U(x,y,z)$, записанный через двумерные полиномы

$$U(x,y,z) = U_1(x,y) \cdot z^0 + U_2(x,y) \cdot z^1 + U_3(x,y) \cdot z^2 + U_4(x,y) \cdot z^3 + U_5(x,y) \cdot z^4$$

В свою очередь, двумерные полиномы представлены в виде матриц (3.91):

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} & U_1: & & U_2: & \\ & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -0,37889 & 9,6951 & -73,702 & 218,71 & -1299,8 \\ 9,6951 & -108,62 & -11,044 & -1240,1 & 6641,5 \\ -73,702 & -11,044 & -1273,3 & 4,0742e3 & -5,8370e4 \\ 218,71 & -1240,1 & 4,0742e3 & -6,0074e4 & 3,0426e5 \\ -1299,8 & 6641,5 & -5,8370e4 & 3,0426e5 & -3,2007e6 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 9,6951 & -108,62 & -11,044 & -1240,1 & 6641,5 \\ -108,62 & -689,26 & 1,5286e3 & -2,2567e4 & 9,3985e4 \\ -11,044 & 1,5286e3 & -3,8912e4 & 2,1234e5 & -2,3127e6 \\ -1240,1 & -2,2567e4 & 2,1234e5 & -2,9456e6 & 2,1808e7 \\ 6641,5 & 9,3985e4 & -2,3127e6 & 2,1808e7 & -2,2947e8 \end{bmatrix} ; \\ & \begin{matrix} & U_3: & & U_4: & \\ & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -73,702 & -11,044 & -1273,3 & 4,0742e3 & -5,8370e4 \\ -11,044 & 1,5286e3 & -3,8912e4 & 2,1234e5 & -2,3127e6 \\ -1273,3 & -3,8912e4 & 3,1819e5 & -4,3362e6 & 3,0239e7 \\ 4,0742e3 & 2,1234e5 & -4,3362e6 & 3,3422e7 & -3,3429e8 \\ -5,8370e4 & -2,3127e6 & 3,0239e7 & -3,3429e8 & 2,2820e9 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 218,71 & 1,2401e3 & 4,0742e3 & -6,0074e4 & 3,0426e5 \\ -1,2401e3 & -2,2567e4 & 2,1234e5 & -2,9456e6 & 2,1808e7 \\ 4,0742e3 & 2,1234e5 & -4,3362e6 & 3,3422e7 & -3,3429e8 \\ -6,0074e4 & -2,9456e6 & 3,3422e7 & -3,4599e8 & 1,8266e9 \\ 3,0426e5 & 2,1808e7 & -3,3429e8 & 1,8266e9 & -8,8987e9 \end{bmatrix} \\ & U_5 = \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -1,2998e3 & 6,6415e3 & -5,8370e4 & 3,0426e5 & -3,2007e6 \\ 6,6415e3 & 9,3985e4 & -2,3127e6 & 2,1808e7 & -2,2947e8 \\ -5,8370e4 & -2,3127e6 & 3,0239e7 & -3,3429e8 & 2,2820e9 \\ 3,0426e5 & 2,1808e7 & -3,3429e8 & 1,8266e9 & -8,8987e9 \\ -3,2007e6 & -2,2947e8 & 2,2820e9 & -8,8987e9 & -1,6732e11 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Этап 2.

Составная функция $V(D(x,y,z))$ включает 5 внутренних трехмерных функций и для численной реализации прямого p -дифференцирования требует вызова трех трехмерных рекуррентных уравнений (формул) для $\sin^2 D$, $\ln D$, D^m (табл. П.32, П.28). Результатом является трехмерный полином $V(x,y,z)$, записанный через двумерные полиномы

$$V(x,y,z) = V_1(x,y) \cdot z^0 + V_2(x,y) \cdot z^1 + V_3(x,y) \cdot z^2 + V_4(x,y) \cdot z^3 + V_5(x,y) \cdot z^4$$

В свою очередь, двумерные полиномы представлены в виде матриц (3.91):

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} & V_1: & & V_2: & \\ & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -1,2941 & 1,4216 & 1,6802 & 1,7021 & 4,0232 \\ 1,4216 & 9,0470 & 7,1749 & 32,381 & 62,815 \\ 1,6802 & 7,1749 & 52,322 & 211,20 & 470,55 \\ 1,7021 & 32,381 & 211,20 & 766,21 & 3,1730e3 \\ 4,0232 & 62,815 & 470,55 & 3,1730e3 & 1,7084e4 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1,4216 & 9,0470 & 7,1749 & 32,381 & 62,815 \\ 9,0470 & 16,418 & 137,99 & 460,40 & 1,0505e3 \\ 7,1749 & 137,99 & 848,95 & 2,8172e3 & 1,1609e4 \\ 32,381 & 460,40 & 2,8172e3 & 1,6896e4 & 8,7197e4 \\ 62,815 & 1,0505e3 & 1,1609e4 & 8,7197e4 & 4,5620e5 \end{bmatrix} ; \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
V_3: \\
\begin{array}{ccccc}
x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4
\end{array} \\
\begin{array}{l}
y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4
\end{array}
\begin{bmatrix}
1,6802 & 7,1749 & 52,322 & 211,20 & 470,55 \\
7,1749 & 137,99 & 848,95 & 2,8172e3 & 1,1609e4 \\
52,322 & 848,95 & 4,7706e3 & 2,8069e4 & 1,4158e5 \\
211,20 & 2,8172e3 & 2,8069e4 & 2,0937e5 & 1,0512e6 \\
470,55 & 1,1609e4 & 1,4158e5 & 1,0512e6 & 6,9129e6
\end{bmatrix}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
V_4: \\
\begin{array}{ccccc}
x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4
\end{array} \\
\begin{array}{l}
y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4
\end{array}
\begin{bmatrix}
1,7021 & 32,381 & 211,20 & 766,21 & 3,1730e3 \\
32,381 & 460,40 & 2,8172e3 & 1,6896e4 & 8,7197e4 \\
211,20 & 2,8172e3 & 2,8069e4 & 2,0937e5 & 1,0512e6 \\
766,21 & 1,6896e4 & 2,0937e5 & 1,5163e6 & 9,8502e6 \\
3,1730e3 & 8,7197e4 & 1,0512e6 & 9,8502e6 & 7,5774e7
\end{bmatrix}
\end{array}$$

$$V_5 = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4
\end{array} \\
\begin{array}{l}
y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4
\end{array}
\begin{bmatrix}
4,0232 & 62,815 & 470,55 & 3,1730e3 & 1,7084e4 \\
62,815 & 1,0505e3 & 1,1609e4 & 8,7197e4 & 4,5620e5 \\
470,55 & 1,1609e4 & 1,4158e5 & 1,0512e6 & 6,9129e6 \\
3,1730e3 & 8,7197e4 & 1,0512e6 & 9,8502e6 & 7,5774e7 \\
1,7084e4 & 4,5620e5 & 6,9129e6 & 7,5774e7 & 6,1795e8
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Этап 3.

Рекуррентное трехмерное деление функций $F(x, y, z) = \frac{U(x, y, z)}{V(x, y, z)}$ выполняется по формуле (3.96). Результатом является трехмерный полином $F(x, y, z)$, записанный через двумерные полиномы

$$F(x, y, z) = F_1(x, y) \cdot z^0 + F_2(x, y) \cdot z^1 + F_3(x, y) \cdot z^2 + F_4(x, y) \cdot z^3 + F_5(x, y) \cdot z^4$$

В свою очередь, двумерные полиномы представлены в виде матриц (3.91):

$$\begin{array}{c}
F_1: \\
\begin{array}{ccccc}
x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4
\end{array} \\
\begin{array}{l}
y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4
\end{array}
\begin{bmatrix}
0,29279 & -7,1703 & 49,456 & -123,60 & 924,30 \\
-7,1703 & 70,231 & 82,205 & 1,3079e3 & -3,2583e3 \\
49,456 & 82,205 & 1,7163e3 & 1,0021e3 & 5,7577e4 \\
-123,60 & 1,3079e3 & 1,0021e3 & 6,7752e4 & -5,5951e4 \\
924,30 & -3,2583e3 & 5,7577e4 & -5,5951e4 & 3,1778e6
\end{bmatrix}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
F_2: \\
\begin{array}{ccccc}
x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4
\end{array} \\
\begin{array}{l}
y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4
\end{array}
\begin{bmatrix}
-7,1703 & 70,231 & 82,205 & 1,3079e3 & -3,2583e3 \\
70,231 & 617,42 & 957,34 & 2,2930e4 & -2,2450e4 \\
82,205 & 957,34 & 4,0329e4 & -4,7107e4 & 2,0816e6 \\
1,3079e3 & 2,2930e4 & -4,7107e4 & 2,7659e6 & -9,9136e6 \\
-3,2583e3 & -2,2450e4 & 2,0816e6 & -9,9136e6 & 1,9108e8
\end{bmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
F_3: \\
\begin{array}{ccccc}
x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4
\end{array} \\
\begin{array}{l}
y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4
\end{array}
\begin{bmatrix}
49,456 & 82,205 & 1,7163e3 & 1,0021e3 & 5,7577e4 \\
82,205 & 957,34 & 4,0329e4 & -4,7107e4 & 2,0816e6 \\
1,7163e3 & 4,0329e4 & -6,0207e4 & 4,2224e6 & -1,2912e7 \\
1,0021e3 & -4,7107e4 & 4,2224e6 & -1,1705e7 & 3,0968e8 \\
5,7577e4 & 2,0816e6 & -1,2912e7 & 3,0968e8 & -9,0907e8
\end{bmatrix}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
F_4: \\
\begin{array}{ccccc}
x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4
\end{array} \\
\begin{array}{l}
y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4
\end{array}
\begin{bmatrix}
-123,60 & 1,3079e3 & 1,0021e3 & 6,7752e4 & -5,5951e4 \\
1,3079e3 & 2,2930e4 & -4,7107e4 & 2,7659e6 & -9,9136e6 \\
1,0021e3 & -4,7107e4 & 4,2224e6 & -1,1705e7 & 3,0968e8 \\
6,7752e4 & 2,7659e6 & -1,1705e7 & 3,5338e8 & -3,3639e8 \\
-5,5951e4 & -9,9136e6 & 3,0968e8 & -3,3639e8 & 1,5040e10
\end{bmatrix}
\end{array}$$

$$F_5 = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4
\end{array} \\
\begin{array}{l}
y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4
\end{array}
\begin{bmatrix}
924,30 & -3,2583e3 & 5,7577e4 & -5,5951e4 & 3,1778e6 \\
-3,2583e3 & -2,2450e4 & 2,0816e6 & -9,9136e6 & 1,9108e8 \\
5,7577e4 & 2,0816e6 & -1,2912e7 & 3,0968e8 & -9,0907e8 \\
-5,5951e4 & -9,9136e6 & 3,0968e8 & -3,3639e8 & 1,5040e10 \\
3,1778e6 & 1,9108e8 & -9,0907e8 & 1,5040e10 & 1,9712e11
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Теорема 3.15. Задан двумерный полином

$$D(x, y) = d_{1,1} + d_{2,1}x + d_{1,2}y + d_{2,2}xy + d_{3,1}x^2 + d_{1,3}y^2 + \dots + d_{\mu,\nu}x^{\mu-1}y^{\nu-1} \quad (3.100)$$

который запишем в виде двумерной матрицы численных коэффициентов

$$D = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & \dots \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{2,1} & d_{3,1} & d_{4,1} & \dots \\ d_{1,2} & d_{2,2} & d_{3,2} & d_{4,2} & \dots \\ d_{1,3} & d_{2,3} & d_{3,3} & d_{4,3} & \dots \\ d_{1,4} & d_{2,4} & d_{3,4} & d_{4,4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix} . \quad (3.101)$$

Тогда численные коэффициенты смещенного двумерного полинома $D(x + x_0, y + y_0)$ определяются по матричным формулам

$$D_{\mu-i}^{(j,1)} = D_{\mu-i}^{(j,1)} + x_0 \cdot D_{\mu+1-i}^{(j,1)} , \quad (j = 1, \dots, \mu ; \quad (i = 0, \dots, r ; \quad r = 0, \dots, \mu - 1)) \quad (3.102a)$$

$$D_{v-i}^{(1,j)} = D_{v-i}^{(1,j)} + y_0 \cdot D_{v+1-i}^{(1,j)} , \quad (j = 1, \dots, v ; \quad (i = 0, \dots, r ; \quad r = 0, \dots, v - 1)) \quad (3.102b)$$

где $D^{(j,1)}$, $D^{(1,j)}$ – соответственно j – я строка и j – й столбец матрицы (3.101).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Представим двумерный полином (3.100) по степеням переменной y

$$\begin{aligned} D(x, y) &= (d_{1,1} + d_{2,1}x + d_{3,1}x^2 + d_{4,1}x^3 + \dots + d_{\mu,1}x^{\mu-1}) \cdot y^0 + \\ &+ (d_{1,2} + d_{2,2}x + d_{3,2}x^2 + d_{4,2}x^3 + \dots + d_{\mu,2}x^{\mu-1}) \cdot y^1 + \\ &\vdots \\ &+ (d_{1,v} + d_{2,v}x + d_{3,v}x^2 + d_{4,v}x^3 + \dots + d_{\mu,v}x^{\mu-1}) \cdot y^{v-1} = \\ &= H_1(x) \cdot y^0 + H_2(x) \cdot y^1 + \dots + H_v(x) \cdot y^{v-1} \end{aligned}$$

и получаем одномерные полиномы $H_1(x)$, $H_2(x)$, ..., $H_v(x)$ переменной x . Выполним одномерное смещение полиномов $H_1(x + x_0)$, $H_2(x + x_0)$, ..., $H_v(x + x_0)$ (3.103) , для чего преобразуем их коэффициенты по одномерной формуле (1.27, раздел 1.2)

$$\begin{aligned} H(x, y) &= D(x + x_0, y) = (d_{1,1} + d_{2,1}(x + x_0) + d_{3,1}(x + x_0)^2 + \dots + d_{\mu,1}(x + x_0)^{\mu-1})y^0 + \\ &\vdots \\ &+ (d_{1,v} + d_{2,v}(x + x_0) + d_{3,v}(x + x_0)^2 + \dots + d_{\mu,v}(x + x_0)^{\mu-1}) \cdot y^{v-1} = \\ &= (h_{1,1} + h_{2,1}x + h_{3,1}x^2 + h_{4,1}x^3 + \dots + h_{\mu,1}x^{\mu-1}) \cdot y^0 + \\ &\vdots \\ &+ (h_{1,v} + h_{2,v}x + h_{3,v}x^2 + h_{4,v}x^3 + \dots + h_{\mu,v}x^{\mu-1}) \cdot y^{v-1} \end{aligned} \quad (3.103a)$$

Формулы одномерного смещения преобразуют строки матрицы (3.101) , откуда следует формула (3.102a).

Представим преобразованный таким способом двумерный полином $H(x, y)$ по степеням переменной x

$$\begin{aligned}
H(x, y) = D(x + x_0, y) &= (h_{1,1} + h_{1,2}y + h_{1,3}y^2 + h_{1,4}y^3 + \dots + h_{1,v}y^{v-1}) \cdot x^0 + \\
&+ (h_{2,1} + h_{2,2}y + h_{2,3}y^2 + h_{2,4}y^3 + \dots + h_{2,v}y^{v-1}) \cdot x^1 + \\
&\vdots \\
&+ (h_{\mu,1} + h_{\mu,2}y + h_{\mu,3}y^2 + h_{\mu,4}y^3 + \dots + h_{\mu,v}y^{v-1}) \cdot x^{\mu-1} = \\
&= S_1(y) \cdot x^0 + S_2(y) \cdot x^1 + \dots + S_{\mu}(y) \cdot x^{\mu-1}
\end{aligned}$$

и получаем одномерные полиномы $S_1(y)$, $S_2(y)$, ..., $S_{\mu}(y)$ переменной y .

Выполним одномерное смещение этих полиномов $S_1(y + y_0)$, $S_2(y + y_0)$, ..., $S_{\mu}(y + y_0)$, для чего преобразуем их коэффициенты по одномерной формуле (1.27, раздел 1.2)

$$\begin{aligned}
S(x, y) = D(x + x_0, y + y_0) &= (h_{1,1} + h_{1,2}(y + y_0) + h_{1,3}(y + y_0)^2 + \dots \\
&+ h_{1,v}(y + y_0)^{v-1})x^0 + (h_{2,1} + h_{2,2}(y + y_0) + h_{2,3}(y + y_0)^2 + \dots + h_{2,v}(y + y_0)^{v-1})x^1 + \\
&\vdots \\
&+ (h_{\mu,1} + h_{\mu,2}(y + y_0) + h_{\mu,3}(y + y_0)^2 + h_{\mu,4}(y + y_0)^3 + \dots + h_{\mu,v}(y + y_0)^{v-1}) \cdot x^{\mu-1} = \\
&= (s_{1,1} + s_{1,2}y + s_{1,3}y^2 + s_{1,4}y^3 + \dots + s_{1,v}y^{v-1}) \cdot x^0 + \\
&+ (s_{2,1} + s_{2,2}y + s_{2,3}y^2 + s_{2,4}y^3 + \dots + s_{2,v}y^{v-1}) \cdot x^1 + \\
&\vdots \\
&+ (s_{\mu,1} + s_{\mu,2}y + s_{\mu,3}y^2 + s_{\mu,4}y^3 + \dots + s_{\mu,v}y^{v-1}) \cdot x^{\mu-1}
\end{aligned} \tag{3.1036}$$

Те же формулы одномерного смещения (1.27) по переменной y теперь преобразуют столбцы матрицы $H(x, y)$. Возвращаясь к обозначению матрицы $D(x, y)$, получаем формулы (3.102б) преобразования ее столбцов, что требовалось доказать.

Определение. Двумерную матрицу вида (3.101), преобразованную по формулам (3.102), назовем *смещенной*.

Теорема 3.16. Задан трехмерный полином

$$\begin{aligned}
D(x, y, z) &= (d_{1,1,1} + d_{2,1,1}x + d_{1,2,1}y + d_{2,2,1}xy + d_{3,1,1}x^2 + \dots + d_{\mu,v,1}x^{\mu-1}y^{v-1}) \cdot z^0 + \\
&+ (d_{1,1,2} + d_{2,1,2}x + d_{1,2,2}y + d_{2,2,2}xy + d_{3,1,2}x^2 + d_{1,3,2}y^2 + \dots + d_{\mu,v,2}x^{\mu-1}y^{v-1}) \cdot z^1 + \\
&\vdots \\
&+ (d_{1,1,v} + d_{2,1,v}x + d_{1,2,v}y + d_{2,2,v}xy + d_{3,1,v}x^2 + d_{1,3,v}y^2 + \dots + d_{\mu,v,v}x^{\mu-1}y^{v-1})z^{v-1} = \\
&= D_1(x, y) \cdot z^0 + D_2(x, y) \cdot z^1 + D_3(x, y) \cdot z^2 + \dots + D_v(x, y) \cdot z^{v-1},
\end{aligned} \tag{3.104}$$

в котором двумерные полиномы представлены в виде матриц (3.91).

Тогда смещение трехмерного полинома $D(x + x_0, y + y_0, z + z_0)$

выполняется по матричной формуле

$$D_{v-i} = D_{v-i} + z_0 \cdot D_{v+1-i}, \quad ((i = 0, \dots, r); \quad r = 0, \dots, v-1) \quad (3.105)$$

где $D_1, D_2, \dots, D_v$ – смещенные двумерные матрицы вида (3.91), для которых предварительно выполнено смещение $x + x_0, y + y_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для трехмерного полинома

$$\begin{aligned} D(x, y, z) &= (d_{0,1,1} + d_{0,2,1}x + d_{0,1,2}y + d_{0,2,2}xy + \dots + d_{\mu,v,1}x^{\mu-1}y^{v-1}) \cdot z^0 + \\ &\quad \vdots \\ &+ (d_{0,1,v} + d_{0,2,v}x + d_{0,1,2}y + d_{0,2,2}xy + d_{0,3,1}x^2 + \dots + d_{\mu,v,v}x^{\mu-1}y^{v-1})z^{v-1} = \\ &= D_{01}(x, y) \cdot z^0 + D_{02}(x, y) \cdot z^1 + D_{03}(x, y) \cdot z^2 + \dots + D_{0v}(x, y) \cdot z^{v-1} \end{aligned}$$

с несмещенными двумерными матрицами $D_{01}, D_{02}, \dots, D_{0v}$ выполним смещение $x + x_0, y + y_0$ по формулам (3.103).

$$\begin{aligned} D(x + x_0, y + y_0, z) &= (d_{0,1,1} + d_{0,2,1}(x + x_0) + d_{0,1,2}(y + y_0) + d_{0,2,2}(x + x_0)(y + y_0) + \\ &\quad + d_{0,3,1}(x + x_0)^2 + d_{0,1,3}(y + y_0)^2 + \dots + d_{\mu,v,1}(x + x_0)^{\mu-1} \cdot (y + y_0)^{v-1}) \cdot z^0 + \\ &\quad \vdots \\ &+ (d_{0,1,v} + d_{0,2,v}(x + x_0) + d_{0,1,2}y + d_{0,2,2}(x + x_0)(y + y_0) + d_{0,3,1}(x + x_0)^2 + \\ &\quad + d_{0,1,3}(y + y_0)^2 + \dots + d_{\mu,v,v}(x + x_0)^{\mu-1} \cdot (y + y_0)^{v-1}) \cdot z^{v-1} = \\ &= (d_{1,1,1} + d_{2,1,1}x + d_{1,2,1}y + d_{2,2,1}xy + d_{3,1,1}x^2 + d_{1,3,1}y^2 + \dots + d_{\mu,v,1}x^{\mu-1} \cdot y^{v-1}) \cdot z^0 + \\ &\quad \vdots \\ &+ (d_{1,1,v} + d_{2,1,v}x + d_{1,2,v}y + d_{2,2,v}xy + d_{3,1,v}x^2 + d_{1,3,v}y^2 + \dots + d_{\mu,v,v}x^{\mu-1} \cdot y^{v-1}) \cdot z^{v-1} = \\ &= D_1(x, y) \cdot z^0 + D_2(x, y) \cdot z^1 + D_3(x, y) \cdot z^2 + \dots + D_v(x, y) \cdot z^{v-1} \end{aligned}$$

Зададим смещение полинома по переменной z

$$\begin{aligned} D(x + x_0, y + y_0, z + z_0) &= D_1(x, y) + D_2(x, y) \cdot (z + z_0) + D_3(x, y) \cdot (z + z_0)^2 + \\ &\quad \dots + D_v(x, y) \cdot (z + z_0)^{v-1} = (D_1(x, y) + D_2(x, y) \cdot z_0 + \dots + D_v(x, y) \cdot z_0^{v-1}) + \dots \end{aligned}$$

Представим двумерные полиномы $D_1(x, y), D_2(x, y), D_3(x, y), \dots, D_v(x, y)$ в виде матриц коэффициентов (3.91) $D_1, D_2, D_3, \dots, D_v$ для различных степеней переменной z . Тогда алгебраическое преобразование двумерных полиномов для различных степеней переменной z превращается в матричное преобразование:

$$\begin{aligned} \text{для } \boxed{z^0} \quad D_1 &= D_1 + D_2 \cdot z_0 + \dots + D_v \cdot z_0^{v-1}; \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

$$\text{для } \boxed{z^{v-2}} \quad D_{v-1} = D_{v-1} + D_v \cdot z_0;$$

$$\text{для } \boxed{z^{v-1}} \quad D_v = D_v$$

Это матричное преобразование повторяет скалярное преобразование одномерного полинома переменной z при его смещении $z + z_0$. Отсюда следует, что скалярную формулу преобразования одномерного смещенного полинома надо заменить матричным аналогом (3.105), что требовалось доказать.

Все описанные приемы смещения применим в последующих примерах.

Пример 3.18.

Зададим трехмерный полином в алгебраическом виде при смещении $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

$$\begin{aligned} D(x, y, z) = & (1 + 2x + x^2 - x^3 + x^4 + 2y + y^2 - y^3 + y^4 + 2xy + 2x^3y + x^2y^2 - \\ & - xy^3 - x^3y^3 + x^4y^4) \cdot z^0 + (2 + 2x - x^3 + 2y - y^3 - xy + x^2y^2 - x^3y^3 + x^4y^4) \cdot z^1 + \\ & + (1 + x^2 + y^2 - xy + x^2y^2 - x^3y^3 + x^4y^4) \cdot z^2 + (-1 + 2x - x^3 + 2y - y^3 - xy + \\ & + x^2y^2 - x^3y^3 + x^4y^4) \cdot z^3 + (1 + x^4 + y^4 - xy + x^2y^2 - x^3y^3 + x^4y^4) \cdot z^4 = \\ & = D_1(x, y) \cdot z^0 + D_2(x, y) \cdot z^1 + D_3(x, y) \cdot z^2 + D_4(x, y) \cdot z^3 + D_5(x, y) \cdot z^4 \end{aligned}$$

и представим в виде двумерных матриц (3.91):

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \boxed{z^0} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \boxed{z^1} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \boxed{z^2} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ D_1 = \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D_2 = \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D_3 = \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ \begin{matrix} \boxed{z^3} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \boxed{z^4} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ D_4 = \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D_5 = \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Выполним трехмерное смещение $x_0 = y_0 = z_0 = -1$ и представим результат в виде двумерных матриц (3.91):

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \boxed{z^0} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \boxed{z^1} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ D_1 = \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 16 & -21 & 21 & -12 & 3 \\ -15 & 16 & -23 & 15 & -4 \\ 12 & -14 & 28 & -21 & 6 \\ -9 & 12 & -21 & 15 & -4 \\ 3 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix}; \quad D_2 = \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -27 & 20 & -22 & 18 & -6 \\ 20 & -20 & 34 & -26 & 8 \\ -22 & 34 & -56 & 42 & -12 \\ 18 & -26 & 42 & -30 & 8 \\ -6 & 8 & -12 & 8 & -2 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{Z^2} \end{array} \begin{array}{ccccc} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{Z^3} \end{array} \begin{array}{ccccc} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{array} \begin{array}{c} \boxed{Z^4} \end{array} \begin{array}{ccccc} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{array}$$

$$D_3 = \begin{array}{c} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{array} \begin{bmatrix} 30 & -31 & 44 & -33 & 10 \\ -31 & 40 & -68 & 52 & -16 \\ 44 & -68 & 112 & -84 & 24 \\ -33 & 52 & -84 & 60 & -16 \\ 10 & -16 & 24 & -16 & 4 \end{bmatrix}; D_4 = \begin{bmatrix} -15 & 21 & -33 & 24 & -7 \\ 21 & -30 & 51 & -39 & 12 \\ -33 & 51 & -84 & 63 & -18 \\ 24 & -39 & 63 & -45 & 12 \\ -7 & 12 & -18 & 12 & -3 \end{bmatrix}; D_5 = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 10 & -7 & 2 \\ -6 & 10 & -17 & 13 & -4 \\ 10 & -17 & 28 & -21 & 6 \\ -7 & 13 & -21 & 15 & -4 \\ 2 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Пример 3.19.

Зададим трехмерную функцию

$$F = \frac{U(D(x, y, z))}{V(S(x, y, z))} = \frac{\sqrt[5]{\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[15]{e^{(\ln(\sin^2 D(x, y, z))})^2}}\right)\right)^2} \cdot A(x, y, z)}{\operatorname{arctg}\left(\ln \sqrt{\arcsin(\ln \sqrt{S(x, y, z)})^2}\right)^2},$$

для которой необходимо выполнить p -дифференцирование и вычислить трехмерные нормированные производные. Запишем внутренний трехмерный полином для смещения $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

$$D(x, y, z) = (1 - x - y - 6xy - x^2 - y^2 + 6x^2y^2)z^0 + (-1 - 6x - 6y)z^1 + (-1 + 6x^2 + 6y^2)z^2 = D_1(x, y) \cdot z^0 + D_2(x, y) \cdot z^1 + D_3(x, y) \cdot z^2$$

и представим его двумерные полиномы в виде матриц (3.91):

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}; D_2 = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; D_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Внутренний трехмерный полином $A(x, y, z)$ при смещении $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ равен:

$$A(x, y, z) = (5 + 4x + 4y + xy + 3x^2 + 3y^2 + x^2y^2) \cdot z^0 + (4 + x + y) \cdot z^1 + (3 + x^2 + y^2) \cdot z^2 = A_1(x, y) \cdot z^0 + A_2(x, y) \cdot z^1 + A_3(x, y) \cdot z^2$$

Представим его двумерные полиномы в виде матриц (3.91):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Внутренний полином $S(x, y, z)$ при смещении $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

$$S(x, y, z) = (2 - x - y - 6xy - x^2 - y^2 + 6x^2y^2) \cdot z^0 + (-1 - 6x - 6y) \cdot z^1 + (-1 + 6x^2 + 6y^2) \cdot z^2 = S_1(x, y) \cdot z^0 + S_2(x, y) \cdot z^1 + S_3(x, y) \cdot z^2$$

также представим в виде матриц (3.91):

$$S_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}; S_2 = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Этап 1.

Составная функция $U(D(x,y,z))$ содержит 10 внутренних функций, и для реализации трехмерного прямого рекуррентного дифференцирования потребуется последовательное обращение к рекуррентным уравнениям (формулам) (табл. П.28 – П.32), выполняющим следующие этапы расчета:

$$\begin{aligned} C(x, y, z) &= \sin D(x, y, z) \rightarrow E(x, y, z) = (C(x, y, z))^2 \rightarrow L(x, y, z) = \ln E(x, y, z) \rightarrow \\ &\rightarrow N(x, y, z) = (L(x, y, z))^2 \rightarrow H(x, y, z) = \exp N(x, y, z) \rightarrow \\ &\rightarrow P(x, y, z) = \sqrt[15]{H(x, y, z)} \rightarrow R(x, y, z) = \frac{1}{U(x, y, z)} \rightarrow T(x, y, z) = \arctg R(x, y, z) \rightarrow \\ &\rightarrow W(x, y, z) = (T(x, y, z))^2 \rightarrow Z(x, y, z) = \sqrt[5]{W(x, y, z)} \rightarrow U = \frac{Z(x, y, z)}{A(x, y, z)} \end{aligned}$$

Результатом p -дифференцирования является трехмерный полином $U(x,y,z)$, записанный через двумерные полиномы

$$U(x, y, z) = U_1(x, y) \cdot z^0 + U_2(x, y) \cdot z^1 + U_3(x, y) \cdot z^2 + U_4(x, y) \cdot z^3 + U_5(x, y) \cdot z^4$$

Двумерные полиномы представлены в виде матриц (3.91):

$$\begin{aligned} &U_1: \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ &\begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,19121 & -0,14771 & -0,001144 & 0,060808 & -0,10661 \\ -0,14771 & 0,16736 & -0,16664 & -0,46814 & -0,45862 \\ -0,001144 & -0,16664 & -0,70292 & -1,9665 & -5,2609 \\ 0,060808 & -0,46814 & -1,9665 & -8,6332 & -25,089 \\ -0,10661 & -0,45862 & -5,2609 & -25,089 & -98,787 \end{bmatrix}; \\ &U_2: \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ &\begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -0,14771 & 0,16736 & -0,16664 & -0,46814 & -0,45862 \\ 0,16736 & 0,68233 & -1,4080 & -4,4221 & -11,874 \\ -0,16664 & -1,4080 & -8,7742 & -33,277 & -92,580 \\ -0,46814 & -4,4221 & -33,277 & -143,54 & -536,83 \\ -0,45862 & -11,874 & -92,580 & -536,83 & -2,3592e3 \end{bmatrix}; \\ &U_3: \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ &\begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -0,001144 & -0,16664 & -0,70292 & -1,9665 & -5,2609 \\ -0,16664 & -1,4081 & -8,7742 & -33,277 & -92,580 \\ -0,70292 & -8,7742 & -57,577 & -242,92 & -891,60 \\ -1,9665 & -33,277 & -242,92 & -1,3412e3 & -5,6588e3 \\ -5,2609 & -92,580 & -891,60 & -5,6588e3 & -2,8496e4 \end{bmatrix}; \\ &U_4: \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ &\begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,060808 & -0,46814 & -1,9665 & -8,6332 & -25,089 \\ -0,46814 & -4,4221 & -33,277 & -143,54 & -536,83 \\ -1,9665 & -33,277 & -242,92 & -1,3412e3 & -5,6588e3 \\ -8,6332 & -143,54 & -1,3412e3 & -8,3173e3 & -4,1368e4 \\ -25,089 & -536,83 & -5,6588e3 & -4,1368e4 & -2,2869e5 \end{bmatrix}; \\ &U_5 = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ &\begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -0,10661 & -0,45862 & -5,2609 & -25,089 & -98,787 \\ -0,45862 & -11,874 & -92,580 & -536,83 & -2,3592e3 \\ -5,2609 & -92,580 & -891,60 & -5,6588e3 & 2,8496e4 \\ -25,089 & -536,83 & -5,6588e3 & -4,1368e4 & -2,2869e5 \\ -98,787 & -2,3592e3 & 2,8496e4 & -2,2869e5 & -1,4180e6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Этап 2.

Составная функция $V(S(x,y,z))$ содержит 9 внутренних функций, и для реализации трехмерного прямого рекуррентного дифференцирования потребуется последовательное обращение к рекуррентным уравнениям (формулам) (табл. П.28 – П.32), выполняющим следующие этапы расчета:

$$C(x, y, z) = \sqrt{S(x, y, z)} \rightarrow E(x, y, z) = \ln C(x, y, z) \rightarrow L(x, y, z) = (E(x, y, z))^2 \rightarrow \\ \rightarrow H(x, y, z) = \arcsin L(x, y, z) \rightarrow G(x, y, z) = \sqrt{H(x, y, z)} \rightarrow \\ \rightarrow P(x, y, z) = \ln G(x, y, z) \rightarrow T(x, y, z) = (P(x, y, z))^2 \rightarrow W(x, y, z) = \arctg T(x, y, z)$$

Результатом p -дифференцирования является трехмерный полином $V(x, y, z)$, записанный через двумерные полиномы

$$V(x, y, z) = V_1(x, y) \cdot z^0 + V_2(x, y) \cdot z^1 + V_3(x, y) \cdot z^2 + V_4(x, y) \cdot z^3 + V_5(x, y) \cdot z^4$$

Двумерные полиномы представлены в виде матриц (3.91):

$$\begin{matrix} V_1: & & V_2: \\ \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} & & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1,3512 & 0,29114 & 0,18672 & -0,19305 & -0,05197 \\ 0,29114 & 1,5380 & -1,4145 & -0,85385 & 0,78190 \\ 0,18672 & -1,4145 & -5,0213 & 4,0347 & 4,1433 \\ -0,19305 & -0,85385 & 4,0347 & 13,267 & -1,6574 \\ -0,05197 & 0,78190 & 4,1433 & -1,6574 & -25,013 \end{bmatrix} & ; & \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,29114 & 1,5380 & -1,4145 & -0,85385 & 0,78190 \\ 1,5380 & -3,6643 & -7,1948 & 6,0238 & 6,7138 \\ -1,4145 & -7,1948 & 12,494 & 29,858 & 4,6485 \\ -0,85385 & 6,0238 & 29,858 & 6,4225 & -67,562 \\ 0,78190 & 6,7138 & 4,6485 & -67,562 & -14,023 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} V_3: & & V_4: \\ \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} & & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,18672 & -1,4145 & -5,0213 & 4,0347 & 4,1433 \\ -1,4145 & -7,1948 & 12,494 & 29,858 & 4,6485 \\ -5,0213 & 12,494 & 43,622 & 20,044 & -93,887 \\ 4,0347 & 29,858 & 20,044 & -128,21 & -12,912 \\ 4,1433 & 4,6485 & -93,887 & -12,912 & 3,4441e3 \end{bmatrix} & ; & \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -0,19305 & -0,85385 & 4,03472 & 13,267 & -1,6574 \\ -0,85385 & 6,0238 & 29,858 & 6,4225 & -67,562 \\ 4,0347 & 29,858 & 20,044 & -128,21 & -12,912 \\ 13,267 & 6,4225 & -128,21 & -47,803 & 4,8906e3 \\ -1,6574 & -67,562 & -12,912 & 4,8906e3 & 2,4457e4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$V_5 = \begin{matrix} \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -0,05197 & 0,78190 & 4,1433 & -1,6574 & -25,013 \\ 0,78190 & 6,7138 & 4,6485 & -67,562 & -14,023 \\ 4,1433 & 4,6485 & -93,887 & -12,912 & 3,4441e3 \\ -1,6574 & -67,562 & -12,912 & 4,8906e3 & 2,4457e4 \\ -25,013 & -14,023 & 3,4441e3 & 2,4457e4 & 8,6935e4 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Этап 3.

Рекуррентное трехмерное деление функций $F(x, y, z) = \frac{U(x, y, z)}{V(x, y, z)}$ выполняется по

формуле (3.96). Результатом является трехмерный полином $F(x, y, z)$, записанный через двумерные полиномы:

$$F(x, y, z) = F_1(x, y) \cdot z^0 + F_2(x, y) \cdot z^1 + F_3(x, y) \cdot z^2 + F_4(x, y) \cdot z^3 + F_5(x, y) \cdot z^4$$

Двумерные полиномы представлены в виде матриц (3.91):

$$\begin{matrix} F_1: & & F_2: \\ \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} & & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,13411 & -0,13821 & 0,010178 & 0,081067 & -0,11236 \\ -0,13821 & 0,030769 & 0,18465 & -0,49922 & -0,48048 \\ 0,010178 & 0,18465 & -0,42862 & -2,4593 & -2,1734 \\ 0,081067 & -0,49922 & -2,4593 & -4,6579 & -12,275 \\ -0,11236 & -0,48048 & -2,1734 & -12,275 & -68,853 \end{bmatrix} & & \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -0,13821 & 0,030769 & 0,18465 & -0,49922 & -0,48048 \\ 0,030769 & 31,076 & -1,2245 & -4,7612 & -5,2661 \\ 0,18465 & -1,2245 & -9,7546 & -17,256 & -51,136 \\ -0,49922 & -4,7612 & -17,256 & -74,957 & -371,83 \\ -0,48048 & -5,2661 & -51,136 & -371,83 & -1,6792e3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
& & F_3: & & \\
& x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\
y^0 & \begin{bmatrix} 0,010178 & 0,18465 & -0,42862 & -2,4593 & -2,1734 \end{bmatrix} \\
y^1 & \begin{bmatrix} 0,18465 & -1,2245 & -9,7546 & -17,256 & -51,136 \end{bmatrix} \\
y^2 & \begin{bmatrix} -0,42862 & -9,7546 & -29,834 & -130,94 & -613,89 \end{bmatrix} \\
y^3 & \begin{bmatrix} -2,4593 & -17,256 & -130,94 & -923,66 & -3,7560e3 \end{bmatrix} \\
y^4 & \begin{bmatrix} -2,1734 & -51,136 & -613,89 & -3,7560e3 & -1,8036e4 \end{bmatrix}
\end{array}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
& & F_4: & & \\
& x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\
\begin{bmatrix} 0,08107 & -0,4992 & -2,4593 & -4,0579 & -12,275 \\ -0,4992 & -4,7612 & -17,256 & -74,957 & -371,83 \\ -2,4593 & -17,256 & -130,94 & -923,66 & -3,7560e3 \\ -4,0579 & -74,957 & -923,66 & -5,5140e3 & -2,6212e4 \\ -12,275 & -371,83 & -3,756e3 & -2,6212e4 & -1,4624e5 \end{bmatrix}
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

$$F_5 = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
& x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\
y^0 & \begin{bmatrix} -0,11236 & -0,48048 & -2,1734 & -12,275 & -68,853 \\ -0,48048 & -5,2661 & -51,136 & -371,83 & -1,5792e3 \\ -2,1734 & -51,136 & -613,80 & -3,7560e3 & -1,8036e4 \\ -12,275 & -371,83 & -3,7560e3 & -2,6212e4 & -1,4624e5 \\ -68,853 & -1,5792e3 & -1,8036e4 & -1,4624e5 & -9,1258e5 \end{bmatrix}
\end{array}
\end{array}$$

Выполним контроль точности численных расчетов трехмерных производных, для чего преобразуем заданную функцию деления в функцию произведения сомножителей

$$K(x, y, z) = F(x, y, z) \cdot V(x, y, z)$$

и используем трехмерное рекуррентное умножение по формуле (3.76). Для контроля сравним двумерные матрицы вида (3.91) трехмерных функций $U(x, y, z)$, $K(x, y, z)$: U_1 , U_2 , U_3 , U_4 , U_5 и K_1 , K_2 , K_3 , K_4 , K_5 . В табл.3.12 приведены последние столбцы двумерных матриц этих функций. Контроль точности показывает, что в двумерных матрицах F_1 , F_2 , F_3 , F_4 , F_5 результаты содержат 12 верных значащих цифр.

Изменим точку расчета численных трехмерных производных заданной функции, для чего применим смещение переменных $x_0 = y_0 = z_0 = -0,05$. Используя формулы двумерного и трехмерного смещения (3.102) и (3.105), получаем новые численные коэффициенты исходных полиномов, записанные в виде двумерных матриц (3.75):

$$\begin{array}{l}
D_1 = \begin{bmatrix} 1,0976 & -0,303 & -0,97 \\ -0,303 & -5,94 & -0,6 \\ -0,97 & -0,6 & 6 \end{bmatrix}; \quad D_2 = \begin{bmatrix} -0,303 & -5,94 & -0,6 \\ -5,94 & 0 & 0 \\ -0,6 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D_3 = \begin{bmatrix} -0,97 & -0,6 & 6 \\ -0,6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
A_1 = \begin{bmatrix} 4,43 & 3,5995 & 3,005 \\ 3,5995 & 1,01 & -0,1 \\ 3,005 & -0,1 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3,5995 & 1,01 & -0,1 \\ 1,01 & 0 & 0 \\ -0,1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3,005 & -0,1 & 1 \\ -0,1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
S_1 = \begin{bmatrix} 2,0976 & -0,303 & -0,97 \\ -0,303 & -5,94 & -0,6 \\ -0,97 & -0,6 & 6 \end{bmatrix}; \quad S_2 = \begin{bmatrix} -0,303 & -5,94 & -0,6 \\ -5,94 & 0 & 0 \\ -0,6 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S_3 = \begin{bmatrix} -0,97 & -0,6 & 6 \\ -0,6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{array}$$

Таблица 3.12

	$U_1 : x^4 ; z^0$	$K_1 : x^4 ; z^0$
y^0	-0,1066065112319468	-0,1066065112319468
y^1	-0,4584228270040727	-0,4584228270040727
y^2	-5,260919117150065	-5,260919117150065
y^3	-25,08937152421429	-25,08937152421429
y^4	-98,78686637096500	-98,78686637096499
	$U_2 : x^4 ; z^1$	$K_2 : x^4 ; z^1$
y^0	-0,4584228270040727	-0,4584228270040727
y^1	-11,87389726361107	-11,87389726361107
y^2	-92,57997410400914	-92,57997410400913
y^3	-536,8267837800882	-536,8267837800888
y^4	-2,359157322627148e3	-2,359157322627148e3
	$U_3 : x^4 ; z^2$	$K_3 : x^4 ; z^2$
y^0	-5,260919117150065	-5,260919117150065
y^1	-92,57997410400914	-92,57997410400972
y^2	-891,6032040002932	-891,6032040002933
y^3	-5,658768367807636e3	-5,658768367807636e3
y^4	-2,849648747768573e4	-2,849648747768573e4
	$U_4 : x^4 ; z^3$	$K_4 : x^4 ; z^3$
y^0	-25,08937152421429	-25,08937152421429
y^1	-536,8267837800882	-536,8267837800754
y^2	-5,658768367807636e3	-5,658768367807676e3
y^3	-4,136847805293443e4	-4,136847805293443e4
y^4	-2,286862220202094e5	-2,286862220202093e5
	$U_5 : x^4 ; z^4$	$K_5 : x^4 ; z^4$
y^0	-98,78686637096500	-98,78686637096499
y^1	-2,359157322627148e3	-2,359157322627263e3
y^2	-2,849648747768573e4	-2,849648747768451e4
y^3	-2,286862220202094e5	-2,286862220202195e5
y^4	-1,418015807183793e6	-1,418015807183792e6

В результате p -дифференцирования трехмерной смещенной функции получены нормированные трехмерные производные, вычисленные в новой точке, координаты которой определяет смещение : $x_0 = -0,05$; $y_0 = -0,05$; $z_0 = -0,05$. Запишем трехмерную функцию в виде трехмерного полинома

$$F(x, y, z) = F_1(x, y)z^0 + F_2(x, y) \cdot z^1 + F_3(x, y) \cdot z^2 + F_4(x, y) \cdot z^3 + F_5(x, y) \cdot z^4$$
двумерные полиномы которого, представленные в виде двумерных матриц (3.91) , содержат вычисленные трехмерные производные:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ 0,15490 & -0,13732 & -0,028586 & 0,12612 & -0,071106 \\ -0,13732 & -0,033598 & 0,22707 & -0,089765 & -0,22080 \\ -0,028586 & 0,22707 & -0,45872 & -1,2103 & -1,1654 \\ 0,12612 & -0,089765 & -1,2103 & -3,4818 & 3,3518 \\ -0,071106 & -0,22080 & -1,1654 & 3,3518 & 0,048841 \end{bmatrix}; \\
F_2 &= \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ -0,13732 & -0,033598 & 0,22707 & -0,089765 & -0,22080 \\ -0,033598 & 0,36042 & 0,67185 & -2,0998 & -2,33241 \\ 0,22707 & 0,67185 & -4,7017 & -10,369 & 8,2134 \\ -0,089765 & -2,0998 & -10,369 & 14,651 & -26,858 \\ -0,22080 & -2,3324 & 8,2134 & -26,858 & -153,42 \end{bmatrix}; \\
F_3 &= \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ -0,028586 & 0,22707 & 0,45872 & -1,2103 & -1,1654 \\ 0,22707 & 0,67185 & -4,7017 & -10,369 & 8,2134 \\ 0,45872 & -4,7017 & -17,350 & 21,228 & -55,403 \\ -1,2103 & -10,369 & 21,228 & -93,758 & -326,37 \\ -1,1654 & 8,2134 & -55,403 & -326,37 & -1,4123e3 \end{bmatrix}; \\
F_4 &= \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ 0,12612 & -0,089765 & -1,2103 & -3,4818 & 3,3518 \\ -0,089765 & -2,0998 & -10,369 & 14,651 & -26,858 \\ -1,2103 & -10,369 & 21,228 & -93,758 & -326,37 \\ -3,4818 & 14,651 & -93,758 & -464,12 & 2,1519e3 \\ 3,3518 & -26,858 & -326,37 & -2,1519e3 & -4,4717e3 \end{bmatrix}; \\
F_5 &= \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{matrix} \begin{bmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ -0,071106 & -0,22080 & -1,1654 & 3,3518 & 0,048841 \\ -0,22080 & -2,3324 & 8,2134 & -26,858 & -153,42 \\ -1,1654 & 8,2134 & -55,403 & -326,37 & -1,4123e3 \\ 3,3518 & -26,858 & -326,37 & -2,1513e3 & -4,4717e3 \\ 0,048841 & -153,42 & -1,4123e3 & -4,4717e3 & -3,7193e4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Двумерное и трехмерное численное рекуррентное дифференцирование показывают возможности многомерного дифференцирования. С увеличением размерности растет сложность рекуррентных уравнений, и, несмотря на это, вывод многомерных уравнений практически возможен.

Решение многомерных задач ставит серьезные проблемы.

1. Для фиксированной точности арифметических операций при увеличении размерности задачи уменьшается количество точно вычисленных производных по каждой переменной. Для одномерных функций точно вычислялись 20 – 25 производных; для двумерных функций сохраняется точный расчет такого же общего количества производных, и из них только 4 – 5 производных относятся к каждой переменной в отдельности, а остальные описывают взаимосвязь двух переменных и т. д.

2. Быстрый рост количество производных создает поток информации, который необходимо запоминать, представлять в удобной форме и эффективно обрабатывать.

ГЛАВА 4. Матричное рекуррентное дифференциальное исчисление (матричное p -дифференцирование)

Раздел 4.1. Матричные модели многомерных функций

Для практических приложений сложные функции заменяются более простыми функциями – моделями (аппроксимирующими, степенными и т. п. [27]).

Линейная модель

Для функции двух переменных $F(x, y)$ нормированные первые производные представлялись в виде таблицы

$$F = \begin{matrix} & x^0 & x^1 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} & \cdots \\ f_{12} & & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \end{matrix},$$

в которой по строкам записывались производные переменной x и по столбцам – переменной y . В матричной форме записи это создает некоторые неудобства – производные первой переменной x записываются по строкам, а порядок производных меняются по столбцам; для второй переменной y – наоборот.

Линейная модель для двух переменных имеет вид [41]

$$F(x, y) = f_{11} + f_{21}x + f_{12}y$$

Для расчета по одной переменной (x или y) перейдем к одномерным обозначениям

$$f_1 = f_{11}; \quad f_2 = \begin{cases} f_{21} & \text{для } x \\ f_{12} & \text{для } y \end{cases}.$$

Для многомерной функции $F(D(x_1, \dots, x_n))$ с переменными $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ частично сохраним те же обозначения, но с указанием номера переменной

$$F = f_1 + X^t H_1 = f_1 + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2^{(1)} \\ f_2^{(2)} \\ \vdots \\ f_2^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

где t – индекс транспонирования матрицы; нижний индекс обозначает порядок производной, а верхний индекс – номер переменной $f_2^{(i)} = \frac{dF}{dx_i}$. В табл.4.1, 4.2

для некоторых функций приведены рекуррентные формулы расчета коэффициентов $f_2^{(k)}$. Формулы применимы для аналитического и численного рекуррентного дифференцирования. Для линейной модели численный расчет функции в заданной точке $x_{01}, x_{02}, x_{03}, \dots, x_{0n}$ превращается в многократный расчет $F(D(x_k))$ ($k = 1, \dots, n$) по рекуррентным численным формулам (табл.4.1, 4.2). В случае аналитического p -дифференцирования функции

1производных определяются во всем интервале изменения переменных x_1 , ..., x_K , x_{K+1} , ... , x_n .

Таблица 4.1

Функция F	Коэффициенты рекуррентной формулы	
	f_1	f_2
D^m	d_1^m	$m \cdot f_1 \cdot d_2 / d_1$
$\ln D$	$\ln d_1$	d_2 / d_1
$(\ln D)^m$	$(\ln d_1)^m$	$m \cdot f_1 \cdot d_2 / (d_1 \cdot \ln d_1)$
e^D	e^{d_1}	$f_1 \cdot d_2$
e^{-D}	e^{-d_1}	$-f_1 \cdot d_2$
$C^m \cdot e^D$	$c_1^m \cdot e^{d_1}$	$f_1 \cdot (m \cdot c_2 + c_1 \cdot d_2) / c_1$
$\sin D, \cos D$	$\sin d_1, \cos d_1$	$d_2 \cdot \sqrt{1 - f_1^2}$
$(\sin D)^m$	$(\sin d_1)^m$	$m \cdot d_2 \cdot f_1 \cdot \sqrt{1 / \sin^2 d_1 - 1}$
$(\cos D)^m$	$(\cos d_1)^m$	$m \cdot d_2 \cdot f_1 / \sqrt{1 / \sin^2 d_1 - 1}$
$\arcsin D$	$\arcsin d_1$	$d_2 / \sqrt{1 - d_1^2}$
$\arccos D$	$\arccos d_1$	$-d_2 / \sqrt{1 - d_1^2}$
$(\arcsin D)^m$	$(\arcsin d_1)^m$	$m \cdot f_1 \cdot d_2 / (\sqrt{1 - d_1^2} \cdot \arcsin d_1)$
$(\arccos D)^m$	$(\arccos d_1)^m$	$-m \cdot f_1 \cdot d_2 / (\sqrt{1 - d_1^2} \cdot \arccos d_1)$
$\operatorname{tg} D$	$\operatorname{tg} d_1$	$2 f_1 \cdot d_2 / \sin 2d_1$
$\operatorname{ctg} D$	$\operatorname{ctg} d_1$	$-f_1 \cdot d_2 / \sin 2d_1$
$(\operatorname{tg} D)^m$	$(\operatorname{tg} d_1)^m$	$2m \cdot f_1 \cdot d_2 / \sin 2d_1$
$(\operatorname{ctg} D)^m$	$(\operatorname{ctg} d_1)^m$	$-2m \cdot f_1 \cdot d_2 / \sin 2d_1$
$\operatorname{arctg} D$	$\operatorname{arctg} d_1$	$d_2 / (1 + d_1^2)$
$\operatorname{arcctg} D$	$\operatorname{arcctg} d_1$	$-d_2 / (1 + d_1^2)$
$(\operatorname{arctg} D)^m$	$(\operatorname{arctg} d_1)^m$	$m \cdot f_1 \cdot d_2 / ((1 + d_1^2) \cdot \operatorname{arctg} d_1)$
$(\operatorname{arcctg} D)^m$	$(\operatorname{arcctg} d_1)^m$	$-m \cdot f_1 \cdot d_2 / ((1 + d_1^2) \cdot \operatorname{arcctg} d_1)$
$e^{\arcsin D}$	$e^{\arcsin d_1}$	$f_1 \cdot d_2 / \sqrt{1 - d_1^2}$
$e^{\arccos D}$	$e^{\arccos d_1}$	$-f_1 \cdot d_2 / \sqrt{1 - d_1^2}$
$e^{\operatorname{tg} D}$	$e^{\operatorname{tg} d_1}$	$-f_1 \cdot d_2 / (\sin^2 d_1 - 1)$
$e^{\operatorname{ctg} D}$	$e^{\operatorname{ctg} d_1}$	$-f_1 \cdot d_2 / \sin^2 d_1$

Таблица 4.2

Функция F	Коэффициенты рекуррентной формулы	
	f_1	f_2
$e^{\operatorname{arctg} D}$	$e^{\operatorname{arctg} d_1}$	$f_1 \cdot d_2 / (1 + d_1^2)$
$e^{\operatorname{arctctg} D}$	$e^{\operatorname{arctctg} d_1}$	$-f_1 \cdot d_2 / (1 + d_1^2)$
$\ln(\sin D)$	$\ln(\sin d_1)$	$d_2 \cdot \sqrt{1 / \sin^2 d_1 - 1}$
$\ln(\cos D)$	$\ln(\cos d_1)$	$-d_2 / \sqrt{1 / \sin^2 d_1 - 1}$
$\ln(\operatorname{tg} D)$	$\ln(\operatorname{tg} d_1)$	$2d_2 / \sin 2d_1$
$\ln(\operatorname{ctg} D)$	$\ln(\operatorname{ctg} d_1)$	$-2d_2 / \sin 2d_1$
$\sin(\ln D)$	$\sin(\ln d_1)$	$d_2 \cdot \sqrt{1 - f_1^2} / d_1$
$\cos(\ln D)$	$\cos(\ln d_1)$	$-d_2 \cdot \sqrt{1 - f_1^2} / d_1$
$\ln(\ln D)$	$\ln(\ln d_1)$	$d_2 / (d_1 \cdot \ln d_1)$

Пример 4.1.

Рассмотрим расчет первых производных функции двух переменных

$$F(x, y) = \ln(\sin^2 D(x, y)) ,$$

где $D(x, y) = d_{11} + d_{21}x + d_{12}y = 1 + 2x + 3y$. Для этого необходимо составить маршрут расчета

$$S(x, y) = \sin D(x, y) \rightarrow M(x, y) = (S(x, y))^2 \rightarrow F(x, y) = \ln M(x, y)$$

Решим аналитическую задачу p -дифференцирования функции.

Аргумент $D(x, y)$ имеет вид

$$D_1(x, y) = d_{11} + d_{21}x + d_{12}y; \quad D_2 = \begin{cases} \frac{dD}{dx} = d_{21} & \text{для } x \\ \frac{dD}{dy} = d_{12} & \text{для } y \end{cases}.$$

Реализуем поэтапно маршрут расчета по формулам (табл.4.1, 4.2).

Этап 1.

$$S(x, y) = \sin D(x, y);$$

$$S_1(x, y) = \sin D_1(x, y); \quad S_2(x, y) = D_2 \sqrt{1 - (S_1(x, y))^2} = D_2 \cdot \cos D_1(x, y)$$

Этап 2.

$$M(x, y) = (S(x, y))^2 = (\sin D(x, y))^2;$$

$$M_1(x, y) = (S_1(x, y))^2 = (\sin D_1(x, y))^2;$$

$$M_2(x, y) = \frac{2M_1(x, y) \cdot S_2(x, y)}{S_1(x, y)} = D_2 \cdot \sin(2D_1(x, y)).$$

Этап 3.

$$F(x, y) = \ln(M(x, y));$$

$$F_1(x, y) = \ln(M_1(x, y)) = \ln(\sin^2 D_1(x, y));$$

$$F_2(x, y) = \frac{M_2(x, y)}{M_1(x, y)} = 2D_2 \cdot \operatorname{ctg} D_1(x, y).$$

В результате p -дифференцирования получаем аналитические выражения:

$$F(x, y) = \ln(\sin^2(d_{11} + d_{21}x + d_{12}y));$$

$$\frac{dF}{dx} = 2d_{21} \cdot \operatorname{ctg}(d_{11} + d_{21}x + d_{12}y); \quad \frac{dF}{dy} = 2d_{12} \cdot \operatorname{ctg}(d_{11} + d_{21}x + d_{12}y);$$

Для численного расчета выбираем значения $x = 0$; $y = 0$. Этапы численного расчета повторяют этапы аналитического расчета, но вместо аналитических выражений в формулы подставляются их численные значения. Эти этапы представлены численными матрицами:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} \\ d_{12} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} 0,84147 & 1,0806 \\ 1,6209 & 0 \end{bmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} 0,70807 & 1,8186 \\ 2,7279 & 0 \end{bmatrix};$$

$$F = \begin{bmatrix} -0,345207492538183 & 2,568370463737323 \\ 3,85255569560598 & 0 \end{bmatrix},$$

в которых приведенные числа содержат все верные значащие цифры. Таким способом, получаем точную линейную численную модель заданной функции

$$F(x, y) = f_{11} + f_{21}x + f_{12}y =$$

$$= -0,345207492538183 + 2,568370463737323x + 3,85255569560598y$$

Для сравнения приведем результаты численного расчета производных способом малых приращений переменных [20]

$$f_{21} = (\ln(\sin^2 d_{11}) - \ln(\sin^2(d_{11} + d_{21} \cdot \Delta))) / \Delta;$$

$$f_{12} = (\ln(\sin^2 d_{11}) - \ln(\sin^2(d_{11} + d_{12} \cdot \Delta))) / \Delta$$

для различных значений Δ :

Δ	f_{21}	f_{12}
10^{-6}	2,5683	3,8525
10^{-8}	2,5683704	3,852555
10^{-10}	2,56837	3,85255

В таблице приведены только верные значащие цифры, которые определяют точность этой линейной модели (5 – 6 значащих цифр).

Квадратичная модель

Для функции двух переменных $F(x, y)$ нормированные первые и вторые производные представлялись в главе 3 в виде двумерной таблицы

$$F = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} & f_{31} \\ f_{12} & f_{22} & \\ f_{13} & & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

в которой по строкам записывались производные переменной x и по столбцам – производные переменной y . Принятая квадратичная модель для двух переменных имеет вид [41]

$$F(x, y) = f_{11} + f_{21}x + f_{12}y + f_{31}x^2 + f_{13}y^2 + f_{22}xy$$

Однако в выражении для нормированных производных есть только один коэффициент смешанной нормированной производной f_{22} , что делает неудобной принятую матричную форму квадратичной модели с матрицей Гессе [41]. В рекуррентном исчислении более удобна другая форма матричной записи

$$F(x, y) = f_{11} + X^t H_1 + X^t H_2 X = f_{11} + [x \ y] \begin{bmatrix} f_{21} \\ f_{12} \end{bmatrix} + [x \ y] \begin{bmatrix} f_{31} & f_{22} \\ 0 & f_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Для многомерной функции $F(D(x_1, \dots, x_n))$ с переменными $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ частично сохраним те же обозначения, но с указанием номера переменной

$$f_{31}^{(1)}, f_{31}^{(2)}, f_{31}^{(3)}, \dots, f_{31}^{(n)}; \quad f_{22}^{(1,2)}, f_{22}^{(1,3)}, f_{22}^{(1,4)}, \dots, f_{22}^{(1,n)}; \dots; f_{22}^{(n-1,n)},$$

где нижние индексы обозначают порядок нормированных производных, а верхние индексы обозначают принятую в матрицах нумерацию строк и столбцов

$$f_{22}^{(i,j)} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}; \quad f_{31}^{(i)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}.$$

Квадратичная модель в матричной форме имеет обычный вид [41], но с другими матрицами

$$F = f_{11} + X^t H_1 + X^t H_2 X, \quad (4.2)$$

где $f_{11} = F(x_{01}, x_{02}, x_{03}, \dots, x_{0n})$; H_1 – матрица линейной модели (4.1); H_2 – верхняя (или по выбору нижняя) треугольная матрица

$$H_1 = \begin{bmatrix} f_2^{(1)} \\ f_2^{(2)} \\ \vdots \\ f_2^{(n)} \end{bmatrix}; \quad H_2 = \begin{bmatrix} f_{31}^{(1)} & f_{22}^{(1,2)} & f_{22}^{(1,3)} & \dots & f_{22}^{(1,n)} \\ 0 & f_{31}^{(2)} & f_{22}^{(2,3)} & \dots & f_{22}^{(2,n)} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & f_{31}^{(n-1)} & f_{22}^{(n-1,n)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f_{31}^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (4.2a)$$

Пример 4.2.

Рассмотрим расчет нормированных производных двумерной функции

$$F(x, y) = \ln(\sin^2 D(x, y)),$$

где двумерный аргумент функции равен

$$D(x, y) = d_{11} + d_{21}x + d_{12}y + d_{31}x^2 + d_{13}y^2 + d_{22}xy = 1 + 2x + 3y + x^2 + y^2 - xy$$

Для решения аналитической задачи p -дифференцирования необходимо установить порядок расчета производных (маршрут):

$$S(x, y) = \sin D(x, y) \rightarrow M(x, y) = (S(x, y))^2 \rightarrow F(x, y) = \ln M(x, y)$$

Аргумент $D(x, y)$ имеет нормированные аналитические производные

$$D_{11}(x, y) = 1 + 2x + 3y + x^2 + y^2 - xy;$$

$$D_{21}(x, y) = 2 + 2x - y; \quad D_{12}(x, y) = 3 + 2y - x;$$

$$D_{13} = 1; \quad D_{31} = 1; \quad D_{22} = -1$$

Аналитическое p -дифференцирование выполняется поэтапно с использованием необходимых развернутых аналитических рекуррентных формул, как частных случаев общих формул (табл. П.25, П.26).

Этап 1.

$$S(x, y) = \sin D(x, y); \quad S_{11}(x, y) = \sin D_{11}(x, y)$$

$$S_{12}(x, y) = D_{12}(x, y) \cdot \sqrt{1 - (S_{11}(x, y))^2}; \quad S_{21}(x, y) = D_{21}(x, y) \cdot \sqrt{1 - (S_{11}(x, y))^2};$$

$$S_{13}(x, y) = \frac{1}{4S_{12}(x, y)} (4D_{12}(x, y) \cdot D_{13} - 2(D_{12}(x, y))^2 S_{11} \cdot S_{12}(x, y) - 4D_{12}(x, y)D_{13}(S_{11}(x, y))^2);$$

$$S_{31}(x, y) = \frac{1}{4S_{21}(x, y)} (4D_{21}(x, y) \cdot D_{31} - 2(D_{21}(x, y))^2 S_{11} \cdot S_{21}(x, y) - 4D_{21}(x, y)D_{31}(S_{11}(x, y))^2);$$

$$S_{22}(x, y) = \frac{1}{S_{21}(x, y)} (D_{21}(x, y) \cdot D_{22} - (D_{21}(x, y))^2 \cdot S_{11} \cdot S_{12}(x, y) - (S_{11}(x, y))^2 D_{21}(x, y) \cdot D_{22});$$

Этап 2.

$$M(x, y) = (S(x, y))^2; \quad M_{11}(x, y) = (S_{11}(x, y))^2$$

$$M_{21}(x, y) = 2S_{11}(x, y) \cdot S_{21}(x, y); \quad M_{12}(x, y) = 2S_{11}(x, y) \cdot S_{12}(x, y);$$

$$M_{31}(x, y) = S_{11}(x, y) \cdot (2S_{11}(x, y) \cdot S_{31}(x, y) + (S_{21}(x, y))^2);$$

$$M_{13}(x, y) = S_{11}(x, y) \cdot (2S_{11}(x, y) \cdot S_{13}(x, y) + (S_{12}(x, y))^2);$$

$$M_{22}(x, y) = \frac{1}{S_{11}(x, y)} (2S_{22}(x, y)M_{11}(x, y) - M_{21}(x, y) \cdot S_{12}(x, y) + 2M_{12}(x, y) \cdot S_{21}(x, y));$$

Этап 3.

$$F(x, y) = \ln M(x, y); \quad f_{11}(x, y) = \ln M_{11}(x, y)$$

$$f_{21}(x, y) = \frac{M_{21}(x, y)}{M_{11}(x, y)}; \quad f_{12}(x, y) = \frac{M_{12}(x, y)}{M_{11}(x, y)};$$

$$f_{31}(x, y) = \frac{1}{2M_{11}(x, y)} (2M_{31}(x, y) - f_{21}(x, y) \cdot M_{21}(x, y));$$

$$f_{13}(x, y) = \frac{1}{2M_{11}(x, y)}(2M_{13}(x, y) - f_{12}(x, y) \cdot M_{12}(x, y));$$

$$f_{22}(x, y) = \frac{1}{M_{11}(x, y)}(M_{22}(x, y) - f_{21}(x, y) \cdot M_{12}(x, y))$$

В результате p -дифференцирования получаем аналитические выражения

$$F(x, y) = \ln(\sin^2(1 + 2x + 3y + x^2 + y^2 - xy));$$

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = f_{21}(x, y); \quad \frac{dF(x, y)}{dy} = f_{12}(x, y);$$

$$\frac{d^2 F(x, y)}{dx^2} = 2f_{31}(x, y); \quad \frac{d^2 F(x, y)}{dy^2} = 2f_{13}(x, y); \quad \frac{d^2 F(x, y)}{dxdy} = f_{22}(x, y) \quad ,$$

которые можно оставить в компактной форме или подставить предыдущие формулы и получить развернутые аналитические выражения нормированных производных. Аналитические выражения производных приведены в табл.4.3.

Для численного расчета выбираем точку $x = 0$; $y = 0$. Численный расчет должен подчеркнуть главную черту рекуррентного исчисления – рекуррентные формулы для аналитического и численного расчета одни и те же. Этапы численного расчета повторяют этапы аналитического расчета, но вместо аналитических выражений в формулы подставляются их численные значения.

Эти этапы представлены численными матрицами:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & 0 \\ d_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} 0,84147 & 1,0806 & -1,1426 \\ 1,6209 & -5,5891 & 0 \\ -3,2463 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$M = \begin{bmatrix} 0,70807 & 1,8186 & -0,75529 \\ 2,7279 & -5,9031 & 0 \\ -2,8360 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} -0,34520 & 2,5683 & -4,3649 \\ 3,8525 & -18,232 & 0 \\ -11,426 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Таким способом получаем точную численную квадратичную модель заданной функции

$$\begin{aligned} F(x, y) &= f_{11} + f_{21}x + f_{12}y + f_{31}x^2 + f_{13}y^2 + f_{22}xy = \\ &= -0,345207492538183 + 2,568370463737323x + 3,85255569560598y - \\ &\quad -4,3649464778809x^2 - 11,4263611150678y^2 - 18,2315803611173xy \end{aligned}$$

в которой все приведенные значащие цифры являются верными.

Пример 4.3.

Зададим многомерный аргумент функции

$$\begin{aligned} D(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= 1 + 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 + \\ &\quad + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + x_5^2 - \\ &\quad - x_1x_2 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - x_1^2x_2^2 - x_1x_3 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 - x_1^2x_3^2 - \\ &\quad - x_1x_4 + x_1^2x_4 + x_1x_4^2 - x_1^2x_4^2 - x_1x_5 + x_1^2x_5 + x_1x_5^2 - x_1^2x_5^2 + \\ &\quad + x_2x_3 + x_2x_3^2 - x_2^2x_3^2 - x_2x_4 + x_2^2x_4 + x_2x_4^2 - x_2^2x_4^2 - \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$-3x_2x_5 - x_2^2x_5 - x_2x_5^2 - x_2^2x_5^2 + 2x_3x_4 + x_3^2x_4 + x_3^2x_4^2 - \\ -2x_3x_5 + x_3x_5^2 + x_3^2x_5^2 + 3x_4x_5 + x_4^2x_5 - x_4x_5^2 + x_4^2x_5^2$$

Таблица 4.3

Функция $F(x,y)$	Начальные значения	Развернутые аналитические рекуррентные формулы нормированных производных
$\sin D(x,y)$	$f_{11} = \sin D_{11}$	$f_{12}(x,y) = D_{12}\sqrt{1-f_{11}}; f_{21}(x,y) = D_{21}\sqrt{1-f_{11}};$ $f_{13}(x,y) = (4D_{12} \cdot D_{13} - 2(D_{12})^2 f_{11} \cdot f_{12} - 4D_{12} \cdot D_{13}(f_{11})^2)/(4f_{12});$ $f_{31}(x,y) = (4D_{21} \cdot D_{31} - 2(D_{21})^2 f_{11} \cdot f_{21} - 4D_{21} \cdot D_{31}(f_{11})^2)/(4f_{21});$ $f_{14}(x,y) = ((1-f_{11}^2) \cdot (6D_{12} \cdot D_{14} + 4D_{13}^2) - 2D_{12}^2 f_{11} \cdot f_{13} -$ $-4f_{13}^2 - (D_{12} \cdot f_{12})^2 - 8D_{12} \cdot D_{13} \cdot f_{11} \cdot f_{12})/(6f_{12});$ $f_{41}(x,y) = ((1-f_{11}^2) \cdot (6D_{21} \cdot D_{41} + 4D_{31}^2) - 2D_{21}^2 f_{11} f_{31} -$ $-4f_{31}^2 - (D_{21} f_{21})^2 - 8D_{21} \cdot D_{31} \cdot f_{11} \cdot f_{21})/(6f_{21});$ $f_{22}(x,y) = (D_{21} \cdot D_{22} - (D_{21})^2 f_{11} \cdot f_{12} - (f_{11})^2 D_{21} \cdot D_{22})/f_{21};$ $f_{23}(x,y) = ((1-f_{11}^2) \cdot ((D_{22})^2 + 2D_{21} \cdot D_{23}) - 4D_{21} D_{22} f_{11} f_{12} -$ $-f_{22}^2 - D_{21}^2(f_{12}^2 + 2f_{11} f_{13}))/ (2f_{21});$ $f_{32}(x,y) = (4D_{21} D_{32}(1-f_{11}^2) + 4D_{22} D_{31} - 4D_{21} D_{31} f_{11}^2 -$ $-4f_{22} f_{31} - 2D_{21}^2(f_{11} f_{22} + f_{12} f_{21}) - 4D_{21} D_{22} f_{11} f_{21} -$ $-8D_{12} D_{31} f_{11} f_{12})/(4f_{21})$
$(D(x,y))^2$	$f_{11} = D_{11}^2$	$f_{12}(x,y) = 2D_{11} \cdot D_{12}; f_{13}(x,y) = D_{11}(2D_{11} D_{13} + (D_{12})^2);$ $f_{14}(x,y) = (6D_{14} f_{11} + 2D_{12} f_{13} - D_{13} f_{12} + 4D_{13} f_{12} -$ $-2D_{12} f_{13})/(3D_{11});$ $f_{21}(x,y) = 2D_{11} \cdot D_{21}; f_{31}(x,y) = D_{11}(2D_{11} D_{31} + (D_{21})^2);$ $f_{22}(x,y) = (2D_{22} \cdot f_{11} - f_{21} \cdot D_{12} + 2f_{12} \cdot D_{21})/D_{11};$ $f_{23}(x,y) = (2D_{21} \cdot f_{13} - D_{13} \cdot f_{21} + 2D_{23} f_{11} - D_{12} \cdot f_{22} +$ $+2D_{22} f_{12})/D_{11};$ $f_{32}(x,y) = (4D_{31} \cdot f_{12} + D_{22} f_{21} + 4D_{32} f_{11} - 2D_{12} f_{31} +$ $+D_{21} f_{22})/(2D_{11});$ $f_{41}(x,y) = (6D_{41} f_{11} + 2D_{21} f_{31} - D_{31} f_{21} + 4D_{31} f_{21} -$ $-2D_{21} f_{31})/(3D_{11});$
$\ln D(x,y)$	$f_{11} = \ln D_{11}$	$f_{12}(x,y) = D_{12}/D_{11}; f_{13}(x,y) = (2D_{13} - f_{12} D_{12})/(2D_{11});$ $f_{14}(x,y) = (3D_{14} - f_{12} \cdot D_{13} - 2f_{13} \cdot D_{12})/(3D_{11});$ $f_{21}(x,y) = D_{21}/D_{11}; f_{22}(x,y) = (D_{22} - f_{21} \cdot D_{12})/D_{11};$ $f_{23}(x,y) = (D_{23} - f_{21} \cdot D_{13} - f_{22} \cdot D_{12})/D_{11};$ $f_{31}(x,y) = (2D_{31} - f_{21} D_{21})/(2D_{11}); f_{32}(x,y) = (D_{32} - f_{12} \cdot D_{31} -$ $-f_{22} \cdot D_{21})/D_{11}; f_{41}(x,y) = (3D_{41} - f_{21} \cdot D_{31} - 2f_{31} \cdot D_{21})/(3D_{11});$

Для квадратичной модели достаточно разбить все переменные на пары, и описать эти пары двумерными матрицами вида:

$$D = \begin{matrix} & x_i^0 & x_i^1 & x_i^2 \\ \begin{matrix} x_k^0 \\ x_k^1 \\ x_k^2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad (4.4)$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{пара } x_1 \leftrightarrow x_2 & \text{пара } x_1 \leftrightarrow x_3 & \text{пара } x_1 \leftrightarrow x_4 & \text{пара } x_1 \leftrightarrow x_5 & \text{пара } x_2 \leftrightarrow x_3 \\ D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}; D_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; D_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \text{пара } x_2 \leftrightarrow x_4 & \text{пара } x_2 \leftrightarrow x_5 & \text{пара } x_3 \leftrightarrow x_4 & \text{пара } x_3 \leftrightarrow x_5 & \text{пара } x_4 \leftrightarrow x_5 \\ D_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}; D_7 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}; D_8 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; D_9 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; D_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Зададим двумерную функцию

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \ln(\sin^2 D(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) \quad (4.5)$$

и для численного расчета выбираем точку $x_{01} = x_{02} = x_{03} = x_{04} = x_{05} = 0$. После расчета для всех матриц $D_1 - D_{10}$, соответствующих различным парам переменных, получаем квадратичную модель

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = f_{11} + X^t H_1 + X^t H_2 X,$$

$$\text{где } f_{11} = -0,345207492538183; \quad H_1 = \begin{bmatrix} 2,568370463737323 \\ 2,568370463737323 \\ 3,85255569560598 \\ 1,28418523186866 \\ 1,28418523186866 \end{bmatrix} \quad (4.6a)$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} -4,3649464778809 & -12,5824486513678 & -18,2315803611173 & -6,93331694161822 & -6,93331694161822 \\ 0 & -4,3649464778809 & -15,66320989738 & -8,21750217348689 & -9,50168740535555 \\ 0 & 0 & -11,4263611150678 & -5,905327100887 & -11,0420680283616 \\ 0 & 0 & 0 & 1,15608753629993 & 1,0279898407311 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,12809769556873 \end{bmatrix} \quad (4.6b)$$

Приведенные числа в матрицах имеют все верные значащие цифры. Квадратичная модель многомерной функции является точной и может успешно заменить заданную функцию в многократных расчетах.

Пример 4.4.

Для аргумента функции $D(x_1, \dots, x_5)$ (4.3) и точки расчета $x_{01} = x_{02} = x_{03} = x_{04} = x_{05} = 0$ рассмотрим более сложную функцию

$$F(x_1, \dots, x_5) = \ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2 D(x_1, \dots, x_5)) \dots)) \dots)) \dots)) \dots)) \dots))$$

После расчета для всех матриц $D_1 - D_{10}$, соответствующих различным парам переменных (пример 4.3), получаем квадратичную модель

$$F(x_1, \dots, x_5) = f_{11} + X^t H_1 + X^t H_2 X,$$

где $f_{11} = -2,46839302517954$; $H_1 = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 6,24555183373646 \\ 6,24555183373646 \\ 9,36832775060469 \\ 3,12277591686823 \\ 3,12277591686823 \end{bmatrix}$;

$$H_2 = 10^6 \cdot \begin{bmatrix} -10,0067681833357 & -20,022904694422 & -30,032795653674 & -10,013013735169 & -10,013013735169 \\ 0 & -10,006768183335 & -30,026550101841 & -10,016136511086 & -10,019259287003 \\ 0 & 0 & -22,519131882401 & -15,008590887045 & -15,021081990712 \\ 0 & 0 & 0 & -2,4962271879794 & -4,9955771518757 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2,4993499638962 \end{bmatrix}$$

Приведенные в матрицах числа имеют все верные значащие цифры, и квадратичная модель многомерной функции является точной.

Теперь изменим точку расчета $x_{01} = x_{02} = x_{03} = x_{04} = x_{05} = -0,05$, и это смещение изменит все двумерные матрицы $D_1 - D_{10}$ примера 4.3, которые получают новые значения.

$\text{пара } x_1 \leftrightarrow x_2$	$\text{пара } x_1 \leftrightarrow x_3$	$\text{пара } x_1 \leftrightarrow x_4$
$D_1 = \begin{bmatrix} 0,80224 & 1,9577 & 0,9475 \\ 1,9577 & -1,21 & 1,1 \\ 0,9475 & 1,1 & -1 \end{bmatrix}$	$D_2 = \begin{bmatrix} 0,75224 & 1,95775 & 0,9475 \\ 2,9577 & -1,21 & 1,1 \\ 0,9475 & 1,1 & -1 \end{bmatrix}$	$D_3 = \begin{bmatrix} 0,85474 & 1,9577 & 0,9475 \\ 0,85775 & -1,21 & 1,1 \\ 1,9475 & 1,1 & -1 \end{bmatrix}$
$\text{пара } x_1 \leftrightarrow x_5$	$\text{пара } x_2 \leftrightarrow x_3$	$\text{пара } x_2 \leftrightarrow x_4$
$D_4 = \begin{bmatrix} 0,85224 & 1,9577 & 0,9475 \\ 0,95775 & -1,21 & 1,1 \\ 0,9475 & 1,1 & -1 \end{bmatrix}$	$D_5 = \begin{bmatrix} 0,75736 & 1,8527 & 0,9975 \\ 2,8552 & 0,89 & 0,1 \\ 0,9475 & 1,1 & -1 \end{bmatrix}$	$D_6 = \begin{bmatrix} 0,85224 & 2,00775 & 0,9475 \\ 0,90775 & -2,21 & 1,1 \\ 1,9475 & 1,1 & -1 \end{bmatrix}$
$\text{пара } x_2 \leftrightarrow x_5$	$\text{пара } x_3 \leftrightarrow x_4$	$\text{пара } x_3 \leftrightarrow x_5$
$D_7 = \begin{bmatrix} 0,84774 & 2,04275 & 1,0475 \\ 1,04275 & -2,81 & -0,9 \\ 1,04275 & -0,9 & -1 \end{bmatrix}$	$D_8 = \begin{bmatrix} 0,81238 & 2,8047 & 0,9525 \\ 0,70224 & 1,91 & 0,9 \\ 2,0025 & -0,1 & 1 \end{bmatrix}$	$D_9 = \begin{bmatrix} 0,79988 & 3,0022 & 1,0025 \\ 1,0047 & -2,09 & -0,1 \\ 0,9525 & 0,9 & 1 \end{bmatrix}$

пара $x_4 \leftrightarrow x_5$

$$D_{10} = \begin{bmatrix} 0,91500 & 0,65225 & 1,9525 \\ 0,74725 & 3,01 & 0,9 \\ 1,0525 & -1,1 & 1 \end{bmatrix}$$

После расчета для всех смещенных матриц $D_1 - D_{10}$, соответствующих различным парам переменных, получаем квадратичную модель с точными численными значениями нормированных производных.

$$F(x_1, \dots, x_5) = f_{11} + X^t H_1 + X^t H_2 X,$$

где

$$f_{11} = -0,74198636393106; \quad H_1 = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 0,6830644424167 \\ -0,5412619106327 \\ -1,955220560294 \\ 7,577548375929 \\ 8,681215828153 \end{bmatrix};$$

$$H_2 = 10^6 \cdot \begin{bmatrix} -2,7294460457941 & -367,61774417765 & -0,17802100776469 & -12,046603144279 & -2,6712877767949 \\ 0 & -0,85266355594808 & -0,12689395942725 & -2,5968538411030 & -0,86947989852359 \\ 0 & 0 & -1,9715429064194 & -0,19511367758051 & -1,3178173361197 \\ 0 & 0 & 0 & -31,261667843636 & -71,646844491394 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -41,048895566504 \end{bmatrix}$$

Найдем квадратичную модель более сложной функции

$$F(x_1, \dots, x_5) = \sqrt[9]{\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2(\ln(\sin^2 D(x_1, \dots, x_5))))))))))$$

в смещенной точке $x_{01} = x_{02} = x_{03} = x_{04} = x_{05} = -0,3475$. После расчета для всех новых смещенных матриц $D_1 - D_{10}$ получаем квадратичную модель с точными численными значениями производных

$$F(x_1, \dots, x_5) = f_{11} + X^t H_1 + X^t H_2 X,$$

где $f_{11} = -0,98601129096989; \quad H_1 = 10^5 \cdot \begin{bmatrix} -34,745345804443 \\ 15,896303698167 \\ -6,4374645446766 \\ -0,057539197300459 \\ -0,038843288521892 \end{bmatrix};$

$$H_2 = 10^{10} \cdot \begin{bmatrix} 2586,2200244084 & -0,60813440501109 & -1,435229422e-4 & -92,055066604325 & 2707,8415842841 \\ 0 & 680,47918567121 & 0,28803601903106 & 2157,9455997108 & 703,22239077069 \\ 0 & 0 & 75,925825472060 & -707,49435311610 & 57,88326716935 \\ 0 & 0 & 0 & 6,145142829e-4 & 8,30135682e-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,80322662e-4 \end{bmatrix}$$

Кубическая модель

Для функции двух переменных $F(x,y)$ нормированные производные представлялись в виде двумерной таблицы

$$F = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} & f_{31} & f_{41} \\ f_{12} & f_{22} & f_{32} & \dots \\ f_{13} & f_{23} & & \\ f_{14} & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

в которой по строкам записывались нормированные производные переменной x и по столбцам – производные переменной y . Кубическая модель с нормированными производными для двух переменных имеет вид

$$F(x,y) = f_{11} + f_{21}x + f_{12}y + f_{31}x^2 + f_{13}y^2 + f_{22}xy + \\ + f_{41}x^3 + f_{14}y^3 + f_{32}x^2y + f_{23}xy^2$$

Представим модель в такой матричной форме :

$$F(x,y) = f_{11} + X^t H_1 + X^t H_2 X + X^t \cdot \text{diag}(X) \cdot H_3 X = \\ = f_{11} + [x \ y] \begin{bmatrix} f_{21} \\ f_{12} \end{bmatrix} + [x \ y] \begin{bmatrix} f_{31} & f_{22} \\ 0 & f_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [x \ y] \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{41} & f_{32} \\ f_{23} & f_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Для многомерной функции $F(D(x_1, \dots, x_n))$ с переменными $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ частично сохраним те же обозначения, но с указанием номеров переменных

$$f_{41}^{(1)}, f_{41}^{(2)}, f_{41}^{(3)}, \dots, f_{41}^{(n)}; \\ f_{32}^{(1,2)}, f_{32}^{(2,1)}, f_{32}^{(1,3)}, f_{32}^{(3,1)}, \dots, f_{32}^{(1,n)}, f_{32}^{(n,1)}; \dots; f_{32}^{(n-1,n)}, f_{32}^{(n,n-1)}$$

где нижние индексы определяют порядок нормированных производных по различным переменным, а верхние индексы – принятую в матрицах нумерацию строк–столбцов $f_{32}^{(i,j)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial x_i^2 \partial x_j}$; $f_{41}^{(i)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial x_i^3}$.

Приведенная кубическая матричная модель для функции двух переменных является полной моделью двумерной функции, но для многомерной функции такая модель может быть только упрощенной моделью, т. к. не содержит смешанной производной трех переменных.

Многомерная упрощенная кубическая модель в матричной форме представлена в виде

$$F = f_{11} + X^t H_1 + X^t H_2 X + X^t \cdot \text{diag}(X) \cdot H_3 X \quad (4.7)$$

где $f_{11} = F(x_{01}, x_{02}, x_{03}, \dots, x_{0n})$;

$$\text{diag}(X) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_n \end{bmatrix} \quad (4.7a)$$

H_1 – матрица линейной модели (4.1); H_2 – треугольная матрица квадратичной модели (4.2); H_3 – квадратная матрица кубической модели

$$H_1 = \begin{bmatrix} f_2^{(1)} \\ f_2^{(2)} \\ \vdots \\ f_2^{(n)} \end{bmatrix}; \quad H_2 = \begin{bmatrix} f_{31}^{(1)} & f_{22}^{(1,2)} & f_{22}^{(1,3)} & \dots & f_{22}^{(1,n)} \\ 0 & f_{31}^{(2)} & f_{22}^{(2,3)} & \dots & f_{22}^{(2,n)} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & f_{31}^{(n-1)} & f_{22}^{(n-1,n)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f_{31}^{(n)} \end{bmatrix}; \quad (4.7б)$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} f_{41}^{(1)} & f_{32}^{(1,2)} & f_{32}^{(1,3)} & \dots & f_{32}^{(1,n-1)} & f_{32}^{(1,n)} \\ f_{32}^{(2,1)} & f_{41}^{(2)} & f_{32}^{(2,3)} & \dots & f_{32}^{(2,n-1)} & f_{32}^{(2,n)} \\ f_{32}^{(3,1)} & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{32}^{(n-1,1)} & f_{32}^{(n-1,2)} & \dots & \dots & f_{41}^{(n-1)} & f_{23}^{(n-1,n)} \\ f_{32}^{(n,1)} & f_{32}^{(n,2)} & \dots & \dots & f_{32}^{(n,n-1)} & f_{41}^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (4.7в)$$

Матричная форма (4.7) реализует принятое правило перехода от двумерного случая к одномерному. В случае одной переменной x производные различного порядка, вычисленные по рекуррентной формуле, образуют строку, и поэтому целесообразно при введении второй переменной y сохранить производные по переменной x в виде строки. Это означает, что в матрицах нормированные производные по переменной x необходимо записывать по строкам, а переменной y – по столбцам. В численных расчетах производные в матричной модели появляются как численные коэффициенты. Тогда номер $(k+1)$ –го столбца матрицы определяет степень переменной x^K , а номер $(k+1)$ –ой строки матрицы – степень переменной y^K .

Для матричных моделей функций с многими переменными $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ составляются пары переменных

$$(x_1 \leftrightarrow x_2), (x_1 \leftrightarrow x_3), \dots, (x_{n-1} \leftrightarrow x_n)$$

и для них формируются двумерные матрицы (4.4) $D_1, D_2, \dots$. В этих матрицах коэффициенты одной переменной, например x_i , записываются по строкам как переменная x , а второй переменной, например x_k , – по столбцам как переменная y . Матричная форма кубической модели (4.7) построена так, чтобы в матрице H_3 коэффициенты $f_{32}^{(i,k)}$ при слагаемом $(x_i^2 \cdot x_k)$ записывались

выше главной диагонали H_3 , а коэффициенты $f_{32}^{(k,i)}$ при слагаемом $(x_k^2 \cdot x_i)$ – ниже главной диагонали H_3

Пример 4.5.

Рассмотрим функцию (4.5) с аргументом $D(x_1, \dots, x_5)$ (4.3) и найдем кубическую модель в точке $x_{01} = x_{02} = x_{03} = x_{04} = x_{05} = 0$. Необходимые для расчета аналитические рекуррентные формулы приведены в табл.4.3. Ввиду сложности аналитических выражений производных выполним только их численный расчет. После расчета для всех матриц $D_1 - D_{10}$ (пример 4.3) получаем упрощенную кубическую модель (4.7) с точными численными значениями нормированных производных

$$F = f_{11} + X^t H_1 + X^t H_2 X + X^t \cdot \text{diag}(X) \cdot H_3 X,$$

где численные матрицы H_1, H_2 уже приведены в примере 4.3 в формулах (4.6);

$$H_3 = \begin{bmatrix} -0,81277736672199 & 15,793248260951 & 20,223213920617 & 11,363282601284 & 11,363282601284 \\ 15,793248260951 & -0,81277736672199 & 7,6407652692501 & 17,012414311034 & 20,093175557046 \\ 36,754142902179 & 19,806747772930 & 7,8489983430937 & -2,1650798445367 & 30,445525182091 \\ -3,5622465754850 & -0,73768072061022 & -17,155628203092 & -5,0445874168711 & -11,025011163869 \\ 2,0868851342645 & 5,1676463802768 & 3,9005180128998 & -10,768815772732 & -2,2200215619963 \end{bmatrix}$$

Построим *полную* кубическую модель для трех переменных, которая должна содержать смешанную производную трех переменных $f_{222} = \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z}$ и соответствующее ей полилинейное слагаемое модели – $f_{222} \cdot x \cdot y \cdot z$.

$$F(x, y, z) = f_{111} + f_{211}x + f_{121}y + f_{112}z + f_{311}x^2 + f_{131}y^2 + f_{113}z^2 + \\ + f_{221}xy + f_{212}xz + f_{122}yz + f_{411}x^3 + f_{141}y^3 + f_{114}z^3 + \\ + f_{321}x^2y + f_{231}xy^2 + f_{312}x^2z + f_{213}xz^2 + f_{132}y^2z + f_{123}yz^2 + f_{222} \cdot x \cdot y \cdot z$$

Представим модель в матричной форме

$$F(x, y, z) = f_{111} + \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{211} \\ f_{121} \\ f_{112} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{311} & f_{221} & f_{212} \\ 0 & f_{131} & f_{122} \\ 0 & 0 & f_{113} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{411} & f_{321} & f_{312} \\ f_{231} & f_{141} & f_{132} \\ f_{213} & f_{123} & f_{114} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + x[y][f_{222}][z].$$

Для многомерной функции $F(D(x_1, \dots, x_n))$ с переменными $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ вполне допустимо сохранение обозначений в матрицах (4.7) H_1, H_2, H_3 .

Действительно, в коэффициентах f_{141} , f_{321} , f_{312} индекс, равный 1, означает отсутствие переменной и фактический переход к прежним обозначениям f_{41} , f_{22} , f_{32} . $f_{222}^{(i,j,r)} = \frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_r}$

Полилинейные слагаемые введем в матричную модель с помощью операций вычеркивания элементов вектора.

Определение. Назовем вектор $X_{i,k,\dots,n-j}$ *укороченным*, если он образуется из вектора X вычеркиванием элементов с номерами

$$i, k, k+1, k+2, \dots, n-j-1, n-j$$

Вычеркивание $(n-1)$ элементов превращает вектор в скаляр.

Полилинейные слагаемые кубической модели многомерной функции можно записать в матричной форме в виде матричной суммы

$$\sum_{k=1}^{n-2} X_{1,\dots,k-1,k+1,\dots,n} \cdot (X_{1,\dots,k,n})^t \cdot M^{(k)} \cdot X_{1,\dots,k+1} \quad (4.8)$$

Лемма 4.1. В матричном выражении (4.8) матрицы $M^{(k)}$ ($k = 1, \dots, n-2$) являются квадратными матрицами, размеры которых изменяются в пределах от (1×1) до $(n-2) \times (n-2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В выражении (4.8) вектор $X_{1,\dots,k-1,k+1,\dots,n}$ является скаляром и не влияет на умножение матриц. Векторы $X_{1,\dots,k,n}$ и $X_{1,\dots,k+1}$ имеют одинаковый размер и включают $(n-k-1)$ элементов. Для квадратной матрицы $M^{(k)}$ умножение трех матриц в сумме (4.8) возможно только при размере матрицы $M^{(k)}$ $(n-k-1) \times (n-k-1)$. При $k = n-2$ размер матрицы $(n-2) \times (n-2)$, а при $k = 1$ матрица превращается в скаляр, что требовалось доказать.

Полная кубическая модель в матричной форме имеет вид

$$F(X) = f_{11\dots 1} + X^t H_1 + X^t H_2 X + X^t \cdot \text{diag}(X) \cdot H_3 X + \sum_{k=1}^{n-2} X_{1,\dots,k-1,k+1,\dots,n} \cdot (X_{1,\dots,k,n})^t \cdot M^{(k)} \cdot X_{1,\dots,k+1} \quad (4.9)$$

где $f_{11\dots 1} = F(x_{01}, x_{02}, x_{03}, \dots, x_{0n})$; H_1 – матрица линейной модели (4.1); H_2 – треугольная матрица квадратичной модели (4.2); H_3 – квадратная матрица кубической модели (4.7); $M^{(k)}$ – верхняя (или по выбору нижняя) треугольная матрица

$$M^{(k)} = \begin{bmatrix} f_{222}^{(k,k+1,k+2)} & f_{222}^{(k,k+1,k+3)} & \dots & f_{222}^{(k,k+1,k+5)} & \dots & f_{222}^{(k,k+1,n)} \\ 0 & f_{222}^{(k,k+2,k+3)} & \dots & f_{222}^{(k,k+2,k+5)} & \dots & f_{222}^{(k,k+2,n)} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & f_{222}^{(k,n-1,n)} \end{bmatrix}$$

$$M^{(n-2)} = [f_{222}^{(n-2,n-1,n)}]$$

Матрица $M^{(k)}$ похожа на матрицу H_2 , и ее треугольная форма для нормированных производных также связана с единственностью каждого коэффициента $f_{222}^{(i,j,r)} = \frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_r}$.

Полная кубическая модель должна включать полилинейные слагаемые вида $x_i x_k x_j$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $k = i+1, i+2, \dots, n$; $j = k+1, k+2, \dots, n$). Для расчета численных коэффициентов этих слагаемых уже недостаточно рассматривать, как в примерах 4.3, 4.4, пары переменных из списка $(x_1 \leftrightarrow x_2)$, $(x_1 \leftrightarrow x_3)$, ..., $(x_{n-1} \leftrightarrow x_n)$ и соответствующие им двумерные матрицы $D_1, D_2, \dots$ аргумента функции D . Теперь необходимо рассматривать «тройки» переменных аргумента

$$(x_1 \leftrightarrow x_2 \leftrightarrow x_3), (x_1 \leftrightarrow x_2 \leftrightarrow x_4), \dots, (x_{n-2} \leftrightarrow x_{n-1} \leftrightarrow x_n)$$

и каждую «тройку» описывать трехмерным выражением (или трехмерной матрицей)

$$\begin{aligned} S(x_i, x_k, x_j) = & s_{111} + s_{211}x_i + s_{121}x_k + s_{112}x_j + s_{311}x_i^2 + s_{131}x_k^2 + s_{113}x_j^2 + \\ & + s_{221}x_i x_k + s_{212}x_i x_j + s_{122}x_k x_j + s_{411}x_i^3 + s_{141}x_k^3 + s_{114}x_j^3 + s_{321}x_i^2 x_k + \\ & + s_{231}x_i x_k^2 + s_{312}x_i^2 x_j + s_{213}x_i x_j^2 + s_{132}x_k^2 x_j + s_{123}x_k x_j^2 + s_{222}x_i x_k x_j \end{aligned}$$

Распишем трехмерное выражение по степеням последней переменной

$$\begin{aligned} S(x_i, x_k, x_j) = & (s_{111} + s_{211}x_i + s_{121}x_k + s_{311}x_i^2 + s_{131}x_k^2 + s_{221}x_i x_k + \\ & + s_{321}x_i^2 x_k + s_{231}x_i x_k^2 + s_{411}x_i^3 + s_{141}x_k^3) \cdot x_j^0 + \\ & + (s_{112} + s_{212}x_i + s_{122}x_k + s_{312}x_i^2 + s_{132}x_k^2 + s_{222}x_i x_k) \cdot x_j + \\ & + (s_{113} + s_{213}x_i + s_{123}x_k) \cdot x_j^2 + s_{114} \cdot x_j^3 \end{aligned}$$

Представим трехмерную матрицу аргумента функции в виде двумерных матриц, записанных по степеням последней переменной, и скорректируем нумерацию коэффициентов двумерных матриц в соответствии с правилом записи в матрицу H_3 . Для этого будем считать переменную x_i первой

переменной (переменная x), переменную x_k – второй (переменная y), а переменную x_j – последней (переменная z)

$$S(x_i, x_k, x_j) = S_1(x_i, x_k)x_j^0 + S_2(x_i, x_k)x_j^1 + S_3(x_i, x_k)x_j^2 + S_4(x_i, x_k)x_j^3$$

где

$$\begin{aligned} S_1 = & \begin{matrix} \boxed{x_j^0} & x_i^0 & x_i^1 & x_i^2 & x_i^3 \\ x_k^0 & \begin{bmatrix} S_{111} & S_{211} & S_{311} & S_{411} \end{bmatrix} \\ x_k^1 & \begin{bmatrix} S_{121} & S_{221} & S_{321} & S_{421} \end{bmatrix} \\ x_k^2 & \begin{bmatrix} S_{131} & S_{231} & S_{331} & S_{431} \end{bmatrix} \\ x_k^3 & \begin{bmatrix} S_{141} & S_{241} & S_{341} & S_{441} \end{bmatrix} \end{matrix}; S_2 = \begin{matrix} \boxed{x_j^1} & x_i^0 & x_i^1 & x_i^2 & x_i^3 \\ x_k^0 & \begin{bmatrix} S_{112} & S_{212} & S_{312} & S_{412} \end{bmatrix} \\ x_k^1 & \begin{bmatrix} S_{122} & S_{222} & S_{322} & S_{422} \end{bmatrix} \\ x_k^2 & \begin{bmatrix} S_{132} & S_{232} & S_{332} & S_{432} \end{bmatrix} \\ x_k^3 & \begin{bmatrix} S_{142} & S_{242} & S_{342} & S_{442} \end{bmatrix} \end{matrix}, \\ S_3 = & \begin{matrix} \boxed{x_j^2} & x_i^0 & x_i^1 & x_i^2 & x_i^3 \\ x_k^0 & \begin{bmatrix} S_{113} & S_{213} & S_{313} & S_{413} \end{bmatrix} \\ x_k^1 & \begin{bmatrix} S_{123} & S_{223} & S_{323} & S_{423} \end{bmatrix} \\ x_k^2 & \begin{bmatrix} S_{133} & S_{233} & S_{333} & S_{433} \end{bmatrix} \\ x_k^3 & \begin{bmatrix} S_{143} & S_{243} & S_{343} & S_{443} \end{bmatrix} \end{matrix}; S_4 = \begin{matrix} \boxed{x_j^3} & x_i^0 & x_i^1 & x_i^2 & x_i^3 \\ x_k^0 & \begin{bmatrix} S_{114} & S_{214} & S_{314} & S_{414} \end{bmatrix} \\ x_k^1 & \begin{bmatrix} S_{124} & S_{224} & S_{324} & S_{424} \end{bmatrix} \\ x_k^2 & \begin{bmatrix} S_{134} & S_{234} & S_{334} & S_{434} \end{bmatrix} \\ x_k^3 & \begin{bmatrix} S_{144} & S_{244} & S_{344} & S_{444} \end{bmatrix} \end{matrix} \end{aligned}$$

Выполняя для заданной функции

$$F(D(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, x_k, x_j, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n))$$

расчет для всех трехмерных матриц

$$S(x_1, x_2, x_3), \dots, S(x_i, x_k, x_j), \dots, S(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n),$$

собираем все коэффициенты

$$f_{222}^{(1,2,3)}, f_{222}^{(i,k,j)}, f_{222}^{(n-2,n-1,n)}$$

и формируем матрицы $M^{(1)}, \dots, M^{(k)}, \dots, M^{(n-2)}$.

Пример 4.6.

Зададим многомерный аргумент функции

$$D(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 3x_1x_2 - 5x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 - 5x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5$$

и выберем точку расчета $X_{01} = (0; 0; 0; 0; 0)$. Представим аргумент функции D численными трехмерными матрицами:

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2, x_3): S_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_2 = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ S(x_1, x_2, x_4) = S(x_1, x_2, x_5): S_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$S(x_1, x_3, x_4) = S(x_1, x_3, x_5) = S(x_2, x_3, x_4) = S(x_2, x_3, x_5):$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$S(x_1, x_4, x_5) = S(x_2, x_4, x_5) = S(x_3, x_4, x_5):$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Изменим точку расчета $X_{02} = (-0,05; -0,05; -0,05; -0,05; -0,05)$ и вычислим смещенные трехмерные матрицы

$$S(x_1, x_2, x_3): S_1 = \begin{bmatrix} 1,825 & 1,3 & 1 \\ 1,3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_2 = \begin{bmatrix} 1,4 & -5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$S(x_1, x_2, x_4) = S(x_1, x_2, x_5): S_1 = \begin{bmatrix} 1,855 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_2 = \begin{bmatrix} 0,8 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$S(x_1, x_3, x_4) = S(x_1, x_3, x_5) = S(x_2, x_3, x_4) = S(x_2, x_3, x_5):$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1,85 & 1,1 & 1 \\ 1,1 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_2 = \begin{bmatrix} 0,8 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$S(x_1, x_4, x_5) = S(x_2, x_4, x_5) = S(x_3, x_4, x_5):$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1,865 & 0,8 & 1 \\ 0,8 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_2 = \begin{bmatrix} 0,8 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Выберем функцию

$$F = \sqrt[5]{\left(\arctg\left(\frac{1}{\sqrt[15]{\exp((\ln(\sin^2 D(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)))^2)}}\right)\right)^2}$$

и построим полную кубическую модель в точке X_{01} .

$$f_{11} = 0,90734; H_1 = \begin{bmatrix} -0,011604 \\ -0,011604 \\ -0,011604 \\ -0,011604 \\ -0,011604 \end{bmatrix}; H_2 = \begin{bmatrix} -0,054863 & -0,051706 & -0,028498 & -0,98123 & -0,98123 \\ 0 & -0,054863 & -0,028498 & -0,98123 & -0,98123 \\ 0 & 0 & -0,054863 & -0,98123 & -0,98123 \\ 0 & 0 & 0 & -0,054863 & -0,98123 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,054863 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} -0,16500 & -0,062392 & 0,11065 & -0,40847 & -0,40847 \\ -0,062392 & -0,16500 & 0,11065 & -0,40847 & -0,40847 \\ 0,11065 & 0,11065 & -0,16500 & -0,40847 & -0,40847 \\ -0,40847 & -0,40847 & -0,40847 & -0,16500 & -0,40847 \\ -0,40847 & -0,40847 & -0,40847 & -0,40847 & -0,16500 \end{bmatrix};$$

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,65389 & -0,38434 & -0,38434 \\ 0 & -0,21130 & -0,21130 \\ 0 & 0 & -0,73041 \end{bmatrix}; M^{(2)} = \begin{bmatrix} -0,21130 & -0,21130 \\ 0 & -0,73041 \end{bmatrix}; M^{(3)} = [-0,73041]$$

Вычисленные нормированные производные во всех матрицах кубической модели имеют не менее 12 верных значащих цифр.

Пересчитаем кубическую модель для точки X_{02} .

$$f_{11} = 0,90788; H_1 = \begin{bmatrix} -0,0028388 \\ -0,0028388 \\ -0,0028388 \\ -0,0028388 \\ -0,0028388 \end{bmatrix}; H_2 = \begin{bmatrix} -0,015474 & -0,025036 & -0,025215 & -0,027400 & -0,027400 \\ 0 & -0,015474 & -0,025215 & -0,027400 & -0,027400 \\ 0 & 0 & -0,015474 & -0,027400 & -0,027400 \\ 0 & 0 & 0 & -0,015474 & -0,027400 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,015474 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} -0,053059 & -0,061068 & -0,022941 & -0,12936 & -0,12936 \\ -0,061068 & -0,053059 & -0,022941 & -0,12936 & -0,12936 \\ -0,022941 & -0,022941 & -0,053059 & -0,12936 & -0,12936 \\ -0,12936 & -0,12936 & -0,12936 & -0,053059 & -0,12936 \\ -0,12936 & -0,12936 & -0,12936 & -0,12936 & -0,053059 \end{bmatrix};$$

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} -0,066856 & -0,19460 & -0,19460 \\ 0 & -0,18662 & -0,18662 \\ 0 & 0 & -0,22891 \end{bmatrix}; M^{(2)} = \begin{bmatrix} -0,18662 & -0,18662 \\ 0 & -0,22891 \end{bmatrix}; M^{(3)} = [-0,22891]$$

Выберем другую многомерную функцию

$$F = \arctg\left(\ln\left(\sqrt{\arcsin(\ln(\sqrt{D(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)}))^2}\right)\right)^2$$

и построим полную кубическую модель в точке X_{01} .

$$f_{11} = 0,84208; H_1 = \begin{bmatrix} -0,29114 \\ -0,29114 \\ -0,29114 \\ -0,29114 \\ -0,29114 \end{bmatrix}; H_2 = \begin{bmatrix} -0,39556 & 0,66409 & 1,2469 & -0,49997 & -0,49997 \\ 0 & -0,39556 & 1,2469 & -0,49997 & -0,49997 \\ 0 & 0 & -0,39556 & -0,49997 & -0,49997 \\ 0 & 0 & 0 & -0,39556 & -0,49997 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,39556 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} -0,22461 & 0,37033 & 0,78799 & -0,46501 & -0,46501 \\ 0,37033 & -0,22461 & 0,78799 & -0,46501 & -0,46501 \\ 0,78799 & 0,78799 & -0,22461 & -0,46501 & -0,46501 \\ -0,46501 & -0,46501 & -0,46501 & -0,22461 & -0,46501 \\ -0,46501 & -0,46501 & -0,46501 & -0,46501 & -0,22461 \end{bmatrix};$$

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 2,6202 & 0,11415 & 0,11415 \\ 0 & 0,53182 & 0,53182 \\ 0 & 0 & -0,72119 \end{bmatrix}; \quad M^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,53182 & 0,53182 \\ 0 & -0,72119 \end{bmatrix}; \quad M^{(3)} = [-0,72119]$$

Вычисленные нормированные производные во всех матрицах кубической модели имеют не менее 12 верных значащих цифр.

Пересчитаем кубическую модель для точки X_{02} .

$$f_{11} = 1,0198; \quad H_1 = \begin{bmatrix} -0,21108 \\ -0,21108 \\ -0,21108 \\ -0,21108 \\ -0,21108 \end{bmatrix}; \quad H_2 = \begin{bmatrix} -0,32628 & 0,59173 & 1,0706 & -0,38871 & -0,38871 \\ 0 & -0,32628 & 1,0706 & -0,38871 & -0,38871 \\ 0 & 0 & -0,32628 & -0,38871 & -0,38871 \\ 0 & 0 & 0 & -0,32628 & -0,38871 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,32628 \end{bmatrix};$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} -0,16529 & 0,33357 & 0,77849 & -0,33980 & -0,33980 \\ 0,33357 & -0,16529 & 0,77849 & -0,33980 & -0,33980 \\ 0,77849 & 0,77849 & -0,16529 & -0,33980 & -0,33980 \\ -0,33980 & -0,33980 & -0,33980 & -0,16529 & -0,33980 \\ -0,33980 & -0,33980 & -0,33980 & -0,33980 & -0,16529 \end{bmatrix};$$

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 3,0170 & -0,0094939 & -0,0094939 \\ 0 & 0,24245 & 0,24245 \\ 0 & 0 & -0,52353 \end{bmatrix}; \quad M^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,24245 & 0,24245 \\ 0 & -0,52353 \end{bmatrix}; \quad M^{(3)} = [-0,52353]$$

Усложним многомерную функцию

$$F = \frac{\sqrt[5]{\left(\arctg\left(\frac{1}{\sqrt[15]{\exp((\ln(\sin^2 D(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)))^2)}}\right)\right)^2}}{\arctg\left(\ln\left(\sqrt{\arcsin(\ln(\sqrt{D(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)})^2)}\right)\right)^2}$$

и построим кубическую модель в точке X_{01} .

$$f_{11} = 1,0775; \quad H_1 = \begin{bmatrix} 0,11646 \\ 0,11646 \\ 0,11646 \\ 0,11646 \\ 0,11646 \end{bmatrix}; \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0,15438 & -0,27352 & -0,50643 & 0,19230 & 0,19230 \\ 0 & 0,15438 & -0,50643 & 0,19230 & 0,19230 \\ 0 & 0 & 0,15438 & 0,19230 & 0,19230 \\ 0 & 0 & 0 & 0,15438 & 0,19230 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,15438 \end{bmatrix};$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0,041717 & -0,25408 & -0,40578 & 0,049305 & 0,049305 \\ -0,25408 & 0,041717 & -0,40578 & 0,049305 & 0,049305 \\ -0,40578 & -0,40578 & 0,041717 & 0,049305 & 0,049305 \\ 0,049305 & 0,049305 & 0,049305 & 0,041717 & 0,049305 \\ 0,049305 & 0,049305 & 0,049305 & 0,049305 & 0,041717 \end{bmatrix};$$

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} -1,1908 & -0,28062 & -0,28062 \\ 0 & -0,43232 & -0,43232 \\ 0 & 0 & 0,022764 \end{bmatrix}; \quad M^{(2)} = \begin{bmatrix} -0,43232 & -0,43232 \\ 0 & 0,022764 \end{bmatrix}; \quad M^{(3)} = [0,022764]$$

Вычисленные нормированные производные во всех матрицах кубической модели имеют не менее 12 верных значащих цифр.

Пересчитаем кубическую модель функции для точки X_{02} .

$$f_{11} = 0,89025; \quad H_1 = \begin{bmatrix} 0,083896 \\ 0,083896 \\ 0,083896 \\ 0,083896 \\ 0,083896 \end{bmatrix}; \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0,13445 & -0,21888 & -0,40464 & 0,16403 & 0,16403 \\ 0 & 0,13445 & -0,40464 & 0,16403 & 0,16403 \\ 0 & 0 & 0,13445 & 0,16403 & 0,16403 \\ 0 & 0 & 0 & 0,13445 & 0,16403 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,13445 \end{bmatrix};$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0,069236 & -0,20947 & -0,43872 & 0,13376 & 0,13376 \\ -0,20947 & 0,069236 & -0,43872 & 0,13376 & 0,13376 \\ -0,43872 & -0,43872 & 0,069236 & 0,13376 & 0,13376 \\ 0,13376 & 0,13376 & 0,13376 & 0,069236 & 0,13376 \\ 0,13376 & 0,13376 & 0,13376 & 0,13376 & 0,069236 \end{bmatrix};$$

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} -1,6750 & -0,074891 & -0,074891 \\ 0 & -0,20952 & -0,20952 \\ 0 & 0 & 0,19356 \end{bmatrix}; \quad M^{(2)} = \begin{bmatrix} -0,20952 & -0,20952 \\ 0 & 0,19356 \end{bmatrix}; \quad M^{(3)} = [0,19356]$$

Обычно в матричных моделях многомерных функций численные значения производных вычислялись интерполяционными методами, вносящими погрешности в эти расчеты. При ошибках в значениях производных применение даже квадратичной модели часто теряло смысл. Поэтому в практике численного анализа в основном использовались линейные модели. Численное рекуррентное дифференцирование является мощным вычислительным инструментом, обеспечивающим высокую точность расчета высших производных функций. Эти преимущества рекуррентного дифференцирования не только возвращают в практику расчета квадратичные модели, но и позволяют повысить качество аппроксимации функции с помощью матричных моделей более высокого порядка, которые ранее не применялись. В данном разделе разработана матричная кубическая модели и показано ее применение на практике.

Раздел 4.2. Матричное обратное рекуррентное дифференцирование

Линейные системы описываются матричным уравнением [19]

$$Y \cdot U = W, \quad (4.10)$$

где Y – матрица коэффициентов; W – вектор; U – вектор решения. Для заданных матриц Y_1 , W_1 уравнение (4.10) имеет матричное решение [19]

$$U_1 = Y_1^{-1} \cdot W_1. \quad (4.11)$$

Матрицы Y , W могут зависеть от некоторого параметра

$$Y(x) = Y_1 + Y_2 x + Y_3 x^2 + \dots; \quad W(x) = W_1 + W_2 x + W_3 x^2 + \dots,$$

где $Y_2, Y_3, \dots; W_2, W_3, \dots$ – нормированные матричные коэффициенты. Для параметра x , независящего от элементов вектора U , при изменении параметра линейность системы (4.10) сохраняется, и изменения параметра влияют на вектор решения U через изменения матриц Y , W . Тогда задача обратного рекуррентного дифференцирования заключается в расчете матриц производных решения уравнения (4.10)

$$U(x) = U_1 + U_2 x + U_3 x^2 + \dots, \quad (4.12)$$

где U_1 – найденное матричное решение (4.11); $U_2, U_3, \dots$ – векторы.

Введем матричную функцию

$$F(x) \equiv W(x) - Y(x) \cdot U(x) = 0,$$

где 0 – нулевая матрица, и для расчета *матричных* производных функции $F(x)$ применим *скалярную* рекуррентную формулу Лейбница-Коши

$$F_k \equiv W_k - \sum_{i=0}^{k-1} Y_{i+1} \cdot U_{k-i} = W_k - Y_1 \cdot U_k - \sum_{i=1}^{k-1} Y_{i+1} \cdot U_{k-i} = 0. \quad (4.13a)$$

Отсюда находим матричную рекуррентную формулу решения

$$U_k = Y_1^{-1} \cdot (W_k - \sum_{i=1}^{k-1} Y_{i+1} \cdot U_{k-i}) = Y_1^{-1} \cdot W_k - \sum_{i=1}^{k-1} Y_1^{-1} \cdot Y_{i+1} \cdot U_{k-i}. \quad (4.13b)$$

Лемма 4.2. Для $Y(x) = Y_1 + Y_2 x$; $W(x) = W_1$ матричная рекуррентная формула решения имеет вид

$$U_k = (-1)^{k-1} \cdot (Y^{-1} \cdot Y_2)^{k-1} \cdot U_1, \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (4.14)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы (4.13b) для значений $k = 2, 3, 4$ получаем

$$U_2 = Y^{-1} \cdot (\cancel{W_2} - Y_2 \cdot U_1) = -(Y^{-1} \cdot Y_2)^1 \cdot U_1;$$

$$U_3 = Y^{-1} \cdot (\cancel{W_3} - Y_2 \cdot U_2 - \cancel{Y_3} \cdot U_1) = (Y^{-1} \cdot Y_2)^2 \cdot U_1;$$

$$U_4 = Y^{-1} \cdot (\cancel{W_4} - Y_2 \cdot U_3 - \cancel{Y_3} \cdot U_2 - \cancel{Y_4} \cdot U_1) = -(Y^{-1} \cdot Y_2)^3 \cdot U_1$$

Полагаем, что лемма доказана для нечетного индекса k , и найдена матричная формула

$$U_k = (Y^{-1} \cdot Y_2)^{k-1} \cdot U_1$$

Докажем лемму для четного индекса $(k + 1)$, для чего запишем матричную рекуррентную формулу (4.13б)

$$U_{k+1} = Y_1^{-1} \cdot (W_{k+1} - \sum_{i=1}^k Y_{i+1} \cdot U_{k+1-i}) = Y_1^{-1} \cdot (\cancel{W_{k+1}} - Y_2 \cdot U_k - \sum_{i=2}^{k-1} \cancel{Y_{i+1}} \cdot U_{k+1-i})$$

Подставляя вектор U_k , находим

$$U_{k+1} = -(Y_1^{-1} \cdot Y_2) \cdot (Y^{-1} \cdot Y_2)^{k-1} \cdot U_1,$$

откуда следует формула (4.14), что требовалось доказать.

В практических приложениях матрица Y_2 обычно содержит мало ненулевых элементов и является слабо заполненной [37–40]. Поэтому рассмотрим некоторые структуры слабо заполненных матриц.

Теорема 4.1. Для $Y(x) = Y_1 + Y_2 x$; $W(x) = W_1$ матрица Y_2 слабо заполнена и включает четыре ненулевых элемента

$$Y_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} \mu & \nu \end{matrix} \\ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \gamma & 0 & \cdots & -\gamma & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & & \cdots & 0 & & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -\gamma & 0 & \cdots & \gamma & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & & \cdots & 0 & & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (4.15)$$

Тогда скалярная формула q -го элемента вектора $(U_2)_q$ имеет вид

$$\begin{aligned} (U_2)_q &= -\gamma \cdot ((U_1)_\mu - (U_1)_\nu) \cdot ((Y^{-1})_{q, \alpha} - (Y^{-1})_{q, \beta}) = \\ &= -\gamma \cdot ((U_1)_\mu - (U_1)_\nu) \cdot (h_{q, \alpha} - h_{q, \beta}), \end{aligned} \quad (4.16)$$

где $q = 1, \dots, n$; $(U_1)_\mu$, $(U_1)_\nu$ – элементы вектора U_1 ;

$h_{q, \alpha} = (Y^{-1})_{q, \alpha}$, $h_{q, \beta} = (Y^{-1})_{q, \beta}$ – элементы обратной матрицы Y^{-1} с указанными номерами строки-столбца.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Развернем обратную матрицу Y^{-1} и обозначим ее элементы

$$Y^{-1} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & \cdots & h_{1,\alpha} & \cdots & h_{1,\beta} & \cdots & h_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{q,1} & \cdots & h_{q,\alpha} & \cdots & h_{q,\beta} & \cdots & h_{q,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{n,1} & \cdots & h_{n,\alpha} & \cdots & h_{n,\beta} & \cdots & h_{n,n} \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Запишем вектор U_2 по матричной рекуррентной формуле (4.14) и выполним операции матричного умножения [27–32]

$$U_2 = -Y^{-1} \cdot Y_2 \cdot U_1 = -Y^{-1} \cdot \begin{matrix} \mu & \nu \\ \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \gamma & 0 & -\gamma & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & -\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ (U_1)_\alpha \\ \vdots \\ (U_1)_\beta \\ \vdots \end{bmatrix} = -Y^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma((U_1)_\mu - (U_1)_\nu) \\ 0 \\ -\gamma((U_1)_\mu - (U_1)_\nu) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}$$

Подставляем обратную матрицу (4.17) и получаем

$$U_2 = - \begin{bmatrix} \dots & h_{1,\alpha} & \dots & h_{1,\beta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & h_{q,\alpha} & \dots & h_{q,\beta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & h_{n,\alpha} & \dots & h_{n,\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma((U_1)_\mu - (U_1)_\nu) \\ 0 \\ -\gamma((U_1)_\mu - (U_1)_\nu) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} = -\gamma((U_1)_\mu - (U_1)_\nu) \cdot \begin{bmatrix} h_{1,\alpha} - h_{1,\beta} \\ \vdots \\ h_{q,\alpha} - h_{q,\beta} \\ \vdots \\ h_{n,\alpha} - h_{n,\beta} \end{bmatrix}$$

откуда следует формула (4.16), что требовалось доказать.

Рассмотрим несколько частных случаев скалярной формулы (4.16):

1) для матрицы Y_2 с двумя ненулевыми элементами:

– два ненулевых элемента в столбце μ матрицы (4.15)

$$(U_2)_q = -\gamma \cdot (U_1)_\mu \cdot (h_{q,\alpha} - h_{q,\beta}) \quad (4.18a)$$

– два ненулевых элемента в строке α матрицы (4.15)

$$(U_2)_q = -\gamma \cdot ((U_1)_\mu - (U_1)_\nu) \cdot h_{q,\alpha} ; \quad (4.18б)$$

2) для симметричной матрицы Y_2

$$\alpha = \mu = a; \quad \beta = \nu = b; \quad (U_2)_q = -\gamma \cdot ((U_1)_a - (U_1)_b) \cdot (h_{q,a} - h_{q,b}) ; \quad (4.18в)$$

3) для симметричной матрицы с комплексным коэффициентом γ

$$\alpha = \mu = a; \quad \beta = \nu = b; \quad \gamma = j\gamma; \\ (U_2)_q = -j\gamma \cdot ((U_1)_a - (U_1)_b) \cdot (h_{q,a} - h_{q,b}). \quad (4.18г)$$

Теорема 4.2. Для $Y(x) = Y_1 + Y_2 x$; $W(x) = W_1$ матрица Y_2 имеет блочную структуру

$$Y_2 = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{p1} & B_{p2} & \dots & B_{pm} \end{bmatrix},$$

в которой каждый блок слабо заполнен и включает четыре ненулевых элемента

$$B_{ir} = \begin{matrix} & \mu_r & & \nu_r \\ \alpha_i & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \gamma_{ir} & 0 & \cdots & -\gamma_{ir} & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & & \cdots & 0 & & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \\ \beta_i & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & -\gamma_{ir} & 0 & \cdots & \gamma_{ir} & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & & \cdots & 0 & & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix} . \quad (4.19)$$

Тогда в расчете вектора U_2 (первых производных) действует принцип суперпозиции, и скалярная формула элемента вектора $(U_2)_q$ имеет вид

$$(U_2)_q = - \sum_{i=1}^p \sum_{r=1}^m \gamma_{ir} ((U_1)_{\mu_i} - (U_1)_{\nu_i}) (h_{q, \alpha_i} - h_{q, \beta_i}) , \quad (4.20)$$

где $q = 1, \dots, n$; $(U_1)_{\mu_i}$, $(U_1)_{\nu_i}$ – элементы вектора U_1 ; $h_{q, \alpha_i} = (Y^{-1})_{q, \alpha_i}$, $h_{q, \beta_i} = (Y^{-1})_{q, \beta_i}$ – элементы обратной матрицы Y^{-1} с указанными номерами строки-столбца.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала для упрощения выражений без потери общности примем структуру блока (4.19)

$$B_{ir} = \begin{matrix} & \mu_r & & \nu_r \\ \alpha_i & \begin{bmatrix} \gamma_{ir} & 0 & \cdots & 0 & -\gamma_{ir} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \beta_i & \begin{bmatrix} -\gamma_{ir} & 0 & \cdots & 0 & \gamma_{ir} \end{bmatrix} \end{matrix} ,$$

где α_i , β_i , μ_r , ν_r - определяют положение блока в блочной матрице Y_2 . Из матричной рекуррентной формулы (4.14) вектор равен $U_2 = -Y^{-1} \cdot Y_2 \cdot U_1$. Для матричного умножения $Y_2 \cdot U_1$ разобьем вектор U_1 на соответствующие блоки [28, 35]

$$U_1 = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_r \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix}; \quad V_r = \begin{bmatrix} (U_1)_{\mu_r} \\ \vdots \\ (U_1)_{\nu_r} \end{bmatrix}.$$

Выполним матричное умножение $Y_2 \cdot U_1$ и найдем i – й элемент вектора результата

$$(Y_2 \cdot U_1)_i = B_{i,1} \cdot V_1 + \dots + B_{i,m} \cdot V_m ;$$

$$(Y_2 \cdot U_1)_i = \begin{matrix} \mu_1 & \nu_1 & & \mu_m & \nu_m \\ \alpha_i \begin{bmatrix} \gamma_{i1} & \dots & \gamma_{i1} \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} & & & \begin{bmatrix} \gamma_{i,m} & \dots & \gamma_{i,m} \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \\ \beta_i \begin{bmatrix} \gamma_{i1} & \dots & \gamma_{i1} \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} & & & \begin{bmatrix} \gamma_{i,m} & \dots & \gamma_{i,m} \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} (U_1)_{\mu_1} \\ \vdots \\ (U_1)_{\nu_1} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \gamma_{i,m} & \dots & \gamma_{i,m} \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (U_1)_{\mu_m} \\ \vdots \\ (U_1)_{\nu_m} \end{bmatrix} .$$

В матричном выражении показано умножение только i – го блока и, перенося эту операцию на все блоки, находим

$$U_2 = -Y^{-1} \cdot Y \cdot U_1 = - \begin{bmatrix} \dots & h_{1,\alpha_i} & \dots & h_{1,\beta_i} & \dots \\ \dots & h_{2,\alpha_i} & \dots & h_{2,\beta_i} & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \dots & h_{n,\alpha_i} & \dots & h_{n,\beta_i} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \sum_{r=1}^m \gamma_{ir} ((U_1)_{\mu_r} - (U_1)_{\nu_r}) \alpha_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sum_{r=1}^m \gamma_{ir} ((U_1)_{\mu_r} - (U_1)_{\nu_r}) \beta_i \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Умножая все блоки, получаем формулу (4.20), что требовалось доказать.

Пример 4.8.

Укажем в матрице Y параметры, которые отклоняются от своих номинальных значений x_0, y_0, z_0 . Остальные параметры остаются постоянными и в матрице не указываются

$$Y = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & x+x_0 & -(x+x_0) & \dots & -(x+x_0)(y+y_0)(z+z_0) & (x+x_0)(y+y_0)(z+z_0) & \dots \\ \dots & -(x+x_0) & x+x_0 & \dots & (x+x_0)(y+y_0)(z+z_0) & -(x+x_0)(y+y_0)(z+z_0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & & \dots & y+y_0 & & -(y+y_0) & \dots \\ \dots & & \dots & -(y+y_0) & & y+y_0 & \dots \\ & & & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

По параметрам x, y, z расчет надо провести отдельно для каждого параметра с разными матрицами $Y_{2x} = \frac{dY}{dx}$; $Y_{2y} = \frac{dY}{dy}$; $Y_{2z} = \frac{dY}{dz}$. Однако только матрица Y_{2z} имеет структуру (4.15) с 4 ненулевыми элементами и для нее непосредственно применима формула (4.186) с $\gamma = -x_0 \cdot y_0$, а две другие матрицы Y_{2x}, Y_{2y} имеют структуры, в которых по 8 ненулевых элементов. Для расчета первых производных

можно применить *принцип суперпозиции* и разбить матрицу Y_2 , имеющую 8 ненулевых элементов, на две матрицы по 4 ненулевых элемента, провести отдельно расчет для каждой из них и объединить формулы результатов. Таким образом, матрица Y_{2x} разбивается на две матрицы: матрица с $\gamma = 1$ и координатами ненулевых элементов в строках (a, b) и столбцах (a, b) (расчет по формуле (4.18б)) и матрица с $\gamma = -y_0 \cdot z_0$ и координатами ненулевых элементов в строках (a, b) и столбцах (c, d) (расчет по формуле (4.18б)). Матрица Y_{2y} также разбивается на две матрицы: матрица с $\gamma = 1$ и координатами ненулевых элементов в строках (c, d) и столбцах (c, d) (расчет по формуле (4.18б) с заменой $a = c, b = d$) и матрица с $\gamma = -x_0 \cdot z_0$ и координатами ненулевых элементов в строках (a, b) и столбцах (c, d) (расчет по формуле (4.16) с заменой $\alpha = a, \beta = b, \mu = c, \nu = d$).

По принципу суперпозиции объединяем отдельные формулы (4.18) и получаем полные формулы скалярных производных для q -го элемента вектора решения:

$$\begin{aligned}\frac{dU_q}{dx} &= -((U_1)_a - (U_1)_b) \cdot (h_{q,a} - h_{q,b}) + y_0 z_0 \cdot ((U_1)_c - (U_1)_d) \cdot (h_{q,a} - h_{q,b}); \\ \frac{dU_q}{dy} &= -((U_1)_c - (U_1)_d) \cdot (h_{q,c} - h_{q,d}) + x_0 z_0 \cdot ((U_1)_c - (U_1)_d) \cdot (h_{q,a} - h_{q,b}); \\ \frac{dU_q}{dz} &= x_0 y_0 \cdot ((U_1)_c - (U_1)_d) \cdot (h_{q,a} - h_{q,b})\end{aligned}$$

Для формулы (4.16) смещение переменной $x + x_0$ не меняет формулу и изменяет только результаты расчета вследствие изменения матрицы $Y = Y_1 + x_0 Y_2$.

Теорема 4.3. Для матриц

$$W(x) = W_1; Y(x) = Y_1 + Y_2 x + Y_3 x^2 + Y_4 x^3 + \dots$$

все матрицы Y_i ($i = 2, 3, 4, \dots$) слабо заполнены и имеют одинаковую структуру, включающую четыре ненулевых элемента

$$Y_i = \begin{matrix} & \mu & & \nu & & & & \\ \alpha & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \gamma_i & 0 & \cdots & -\gamma_i & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & & \cdots & 0 & & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} & & \\ \beta & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & -\gamma_i & 0 & \cdots & \gamma_i & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & & \cdots & 0 & & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} & & \end{matrix} \quad (4.21)$$

Тогда смещение переменной $x + x_0$ не меняет скалярную формулу (4.16)

$$(U_2)_q = -\gamma \cdot ((U_1)_\mu - (U_1)_\nu) \cdot ((Y^{-1})_{q, \alpha} - (Y^{-1})_{q, \beta}),$$

изменяя в ней только коэффициент γ

$$\gamma = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \gamma_{i+2} \cdot x_0^i \quad (4.21a)$$

Доказательство. Смещение переменной $x + x_0$ изменяет матрицу

$$Y(x + x_0) = Y_1 + Y_2(x + x_0) + Y_3(x + x_0)^2 + Y_4(x + x_0)^3 + \dots,$$

и по формуле бинома Ньютона [1,12] для матричных выражений получаем

$$Y(x + x_0) = (Y_1 + Y_2 \cdot x_0 + Y_3 \cdot x_0^2 + Y_4 \cdot x_0^3 + \dots) + \\ + (Y_2 + 2Y_3 \cdot x_0 + 3Y_4 \cdot x_0^2 + \dots) \cdot x + \dots = Y_{1md} + Y_{2md}x + \dots$$

Согласно формулам (4.11) и (4.13),

$$U_{1md} = (Y_{1md})^{-1} \cdot W_1; \quad U_2 = -(Y_{1md})^{-1} \cdot Y_{2md} \cdot U_{1md}.$$

Для упрощения записи обозначая $(Y_{1md})^{-1} = Y^{-1}$; $U_{1md} = U_1$ и подставляя Y_{2md} , получаем

$$U_2 = -Y^{-1} \cdot Y_2 \cdot U_1 - 2x_0 \cdot Y^{-1} \cdot Y_3 \cdot U_1 - 3x_0^2 \cdot Y^{-1} \cdot Y_4 \cdot U_1 - \dots$$

Учитывая одинаковую структуру матриц (4.21) и повторяя выводы теоремы 4.1 для каждого матричного выражения $Y^{-1} \cdot Y_i \cdot U_1$, получаем

$$(U_2)_q = -\gamma_2 \cdot ((U_1)_\mu - (U_1)_\nu) \cdot (h_{q,\alpha} - h_{q,\beta}) - 2x_0 \cdot \gamma_3 \cdot ((U_1)_\mu - (U_1)_\nu) \cdot (h_{q,\alpha} - h_{q,\beta}) - \\ - 3x_0^2 \cdot \gamma_4 \cdot ((U_1)_\mu - (U_1)_\nu) \cdot (h_{q,\alpha} - h_{q,\beta}) - \dots = \\ = -(\gamma_2 + 2x_0 \cdot \gamma_3 + 3x_0^2 \cdot \gamma_4 + \dots) \cdot ((U_1)_\mu - (U_1)_\nu) \cdot (h_{q,\alpha} - h_{q,\beta})$$

откуда следует формула (4.21a), что требовалось доказать.

Теорема 4.4. Для $Y(x) = Y_1 + Y_2x$; $W(x) = W_1$ матрица Y_2 слабо заполнена и включает четыре ненулевых элемента

$$Y_2 = \begin{matrix} & \mu & & \nu & \\ \alpha & \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \gamma & 0 & \dots & -\gamma & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & & \dots & 0 & & \dots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} & \\ \beta & \begin{bmatrix} 0 & \dots & -\gamma & 0 & \dots & \gamma & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & & \dots & 0 & & \dots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} & \end{matrix}.$$

Тогда матричная формула вектора U_k

$$U_k = -Y^{-1} \cdot Y_2 \cdot U_{k-1}, \quad (4.22)$$

имеет компактную скалярную формулу q -го элемента вектора U_k

$$(U_k)_q = -\gamma \cdot ((U_{k-1})_\mu - (U_{k-1})_\nu) \cdot (h_{q,\alpha} - h_{q,\beta}) \quad (4.23)$$

или развернутую скалярную формулу

$$(U_k)_q = (-1)^{k-1} \gamma^{k-1} \cdot ((U_1)_\mu - (U_1)_\nu) \cdot (h_{\mu, \alpha} - h_{\mu, \beta} - h_{\nu, \alpha} + h_{\nu, \beta})^{k-2} \times (h_{q, \alpha} - h_{q, \beta}) \quad (4.24)$$

где $k = 2, 3, \dots$; $q = 1, \dots, n$; $(U_1)_\mu$, $(U_1)_\nu$ – элементы вектора U_1 ; $h_{\mu, \alpha}$, $h_{\mu, \beta}$, $h_{\nu, \alpha}$, $h_{\nu, \beta}$, $h_{q, \alpha}$, $h_{q, \beta}$ – элементы обратной матрицы Y^{-1} с указанными номерами строки-столбца.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы (4.13) для значений $k = 2, 3, 4$ получаем:

$$U_2 = Y^{-1} \cdot (\cancel{X_2} - Y_2 \cdot U_1) = -Y^{-1} \cdot Y_2 \cdot U_1;$$

$$U_3 = Y^{-1} \cdot (\cancel{X_3} - Y_2 \cdot U_2 - \cancel{X_3} \cdot U_1) = -Y^{-1} \cdot Y_2 \cdot U_2;$$

$$U_4 = Y^{-1} \cdot (\cancel{X_4} - Y_2 \cdot U_3 - \cancel{X_3} \cdot U_2 - \cancel{X_4} \cdot U_1) = -Y^{-1} \cdot Y_2 \cdot U_3$$

Повторяя доказательство леммы 4.1, получаем формулу (4.22).

Матричное выражение вектора $U_2 = -Y^{-1} \cdot Y_2 \cdot U_1$ имеет q – й скалярный элемент, определяемый формулой (4.16)

$$(U_2)_q = -\gamma \cdot ((U_1)_\mu - (U_1)_\nu) \cdot (h_{q, \alpha} - h_{q, \beta}).$$

Тогда скалярные формулы элементов векторов, имеющих матричные выражения $U_3 = -Y^{-1} \cdot Y_2 \cdot U_2$; $U_4 = -Y^{-1} \cdot Y_2 \cdot U_3$; ... , должны отличаться только индексами

$$(U_3)_q = -\gamma \cdot ((U_2)_\mu - (U_2)_\nu) \cdot (h_{q, \alpha} - h_{q, \beta});$$

$$(U_4)_q = -\gamma \cdot ((U_3)_\mu - (U_3)_\nu) \cdot (h_{q, \alpha} - h_{q, \beta});$$

⋮

$$(U_k)_q = -\gamma \cdot ((U_{k-1})_\mu - (U_{k-1})_\nu) \cdot (h_{q, \alpha} - h_{q, \beta})$$

откуда следует формула (4.23).

Найдем скалярные выражения для $(U_2)_\mu$, $(U_2)_\nu$ из формулы $(U_2)_q$, полагая $q = \mu$ и $q = \nu$

$$(U_2)_\mu = -\gamma \cdot ((U_1)_\mu - (U_1)_\nu) \cdot (h_{\mu, \alpha} - h_{\mu, \beta}); \quad (U_2)_\nu = -\gamma \cdot ((U_1)_\mu - (U_1)_\nu) \cdot (h_{\nu, \alpha} - h_{\nu, \beta})$$

и подставляем эти выражения в $(U_3)_q$

$$\begin{aligned} (U_3)_q &= -\gamma \cdot ((-\gamma \cdot ((U_1)_\mu - (U_1)_\nu) \cdot (h_{\mu, \alpha} - h_{\mu, \beta})) - \\ &\quad - (-\gamma \cdot ((U_1)_\mu - (U_1)_\nu) \cdot (h_{\nu, \alpha} - h_{\nu, \beta})) \cdot (h_{q, \alpha} - h_{q, \beta}) = \\ &= \gamma^2 \cdot ((U_1)_\mu - (U_1)_\nu) \cdot (h_{\mu, \alpha} - h_{\mu, \beta} - h_{\nu, \alpha} + h_{\nu, \beta}) \cdot (h_{q, \alpha} - h_{q, \beta}) \end{aligned}$$

Выполним аналогичные операции с $(U_4)_q$ и найдем

$$(U_4)_q = -\gamma^3 \cdot ((U_1)_\mu - (U_1)_\nu) \cdot (h_{\mu, \alpha} - h_{\mu, \beta} - h_{\nu, \alpha} + h_{\nu, \beta})^2 \cdot (h_{q, \alpha} - h_{q, \beta}).$$

Полагаем, что теорема доказана для нечетного индекса k , и найдена скалярная формула

$$(U_k)_q = \gamma^{k-1} \cdot ((U_1)_\mu - (U_1)_v) \cdot (h_{\mu, \alpha} - h_{\mu, \beta} - h_{v, \alpha} + h_{v, \beta})^{k-2} \cdot (h_{q, \alpha} - h_{q, \beta}) .$$

Докажем теорему для четного индекса $(k + 1)$, для чего применим формулу (4.23)

$$(U_{k+1})_q = -\gamma \cdot ((U_k)_\mu - (U_k)_v) \cdot (h_{q, \alpha} - h_{q, \beta}) .$$

Найдем скалярные выражения для $(U_k)_\mu$, $(U_k)_v$ из формулы $(U_k)_q$, полагая $q = \mu$ и $q = v$

$$(U_k)_\mu = \gamma^{k-1} \cdot ((U_1)_\mu - (U_1)_v) \cdot (h_{\mu, \alpha} - h_{\mu, \beta} - h_{v, \alpha} + h_{v, \beta})^{k-2} \cdot (h_{\mu, \alpha} - h_{\mu, \beta}) ;$$

$$(U_k)_v = \gamma^{k-1} \cdot ((U_1)_\mu - (U_1)_v) \cdot (h_{\mu, \alpha} - h_{\mu, \beta} - h_{v, \alpha} + h_{v, \beta})^{k-2} \cdot (h_{v, \alpha} - h_{v, \beta}) .$$

Подставляем найденные выражения в формулу $(U_{k+1})_q$ и получаем

$$\begin{aligned} (U_{k+1})_q &= -\gamma \left((+\gamma^{k-1} ((U_1)_\mu - (U_1)_v) \cdot (h_{\mu, \alpha} - h_{\mu, \beta} - h_{v, \alpha} + h_{v, \beta})^{k-2} (h_{\mu, \alpha} - h_{\mu, \beta})) - \right. \\ &\quad \left. - (\gamma^{k-1} ((U_1)_\mu - (U_1)_v) \cdot (h_{\mu, \alpha} - h_{\mu, \beta} - h_{v, \alpha} + h_{v, \beta})^{k-2} \cdot (h_{v, \alpha} - h_{v, \beta})) (h_{q, \alpha} - h_{q, \beta}) \right) = \\ &= -\gamma^k \cdot ((U_1)_\mu - (U_1)_v) \cdot (h_{\mu, \alpha} - h_{\mu, \beta} - h_{v, \alpha} + h_{v, \beta})^{k-2} \cdot (h_{\mu, \alpha} - h_{\mu, \beta} - h_{v, \alpha} + h_{v, \beta}) \times \\ &\quad \times (h_{q, \alpha} - h_{q, \beta}) , \end{aligned}$$

откуда следует формула (4.24) , что требовалось доказать.

Лемма 4.3. Для $Y(x) = Y_1 + Y_2 x$; $W(x) = W_1$ матрица Y_2 слабо заполнена и включает четыре ненулевых элемента с координатами (4.15) . Тогда допустимые пределы изменения параметра x от номинального значения x_0 определяются формулой

$$\delta x = \frac{1}{\left| \gamma \cdot (h_{\mu, \alpha} - h_{\mu, \beta} - h_{v, \alpha} + h_{v, \beta}) \right|} , \quad (4.25)$$

где $h_{\mu, \alpha}$, $h_{\mu, \beta}$, $h_{v, \alpha}$, $h_{v, \beta}$ – элементы обратной матрицы Y^{-1} с указанными номерами строки–столбца.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Допустимые пределы отклонения параметра x от номинального значения x_0 , принятого в расчете матрицы Y_1 , можно

определить по критерию Даламбера $\delta x = \left| \frac{(U_{k-1})_q}{(U_k)_q} \right|$. Подставим эти значения из

формулы (4.24) и сократим сомножители

$$\delta x = \left| \frac{\cancel{\gamma^{k-2}} \cancel{((U_1)_\mu - (U_1)_v)} \cancel{(h_{\mu, \alpha} - h_{\mu, \beta} - h_{v, \alpha} + h_{v, \beta})^{k-3}} \cancel{(h_{q, \alpha} - h_{q, \beta})}}{\gamma \cdot \cancel{\gamma^{k-2}} \cancel{((U_1)_\mu - (U_1)_v)} \cancel{(h_{\mu, \alpha} - h_{\mu, \beta} - h_{v, \alpha} + h_{v, \beta})^{k-2}} \cancel{(h_{q, \alpha} - h_{q, \beta})}} \right| ,$$

откуда следует формула (4.25) , что требовалось доказать.

Пример 4.9.

Зададим матрицы для $x_0 = 15$; $\gamma = -1$; $\alpha = 1$, $\beta = 3$; $\mu = 1$; $v = 2$;

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 12-x_0 & -20+x_0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1+x_0 & -x_0 & -3,8 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & -15 & -4,875 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & -15 & 0,25 \end{bmatrix}; W_1 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; Y_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Расчет по формуле (4.22) дает результат :

$$U(x) = U_1 + U_2 x + U_3 x^2 + U_4 x^3,$$

где

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0,0081784 \\ 0,0040892 \\ -0,14498 \\ -0,12082 \\ -1,0999 \\ -0,99987 \\ 5,9992 \end{bmatrix}; U_2 = \begin{bmatrix} -5,7766e-4 \\ -2,8883e-4 \\ -9,1209e-4 \\ -7,6008e-4 \\ -6,9193e-3 \\ -6,2903e-3 \\ 3,7742e-2 \end{bmatrix}; U_3 = \begin{bmatrix} 4,0801e-5 \\ 2,0401e-5 \\ 6,4423e-5 \\ 5,3686e-5 \\ 4,8873e-4 \\ 4,4430e-4 \\ -2,6658e-3 \end{bmatrix}; U_4 = \begin{bmatrix} -2,8819e-6 \\ -1,4409e-6 \\ -4,5503e-6 \\ -3,7919e-6 \\ -3,4520e-5 \\ -3,1382e-5 \\ 1,8829e-4 \end{bmatrix}.$$

Определим допустимые пределы изменения параметра x :

$$h_{11}=0,081784; h_{13}=0,22305; h_{21}=0,040892; h_{23}=0,11152;$$

$$\delta x = \frac{1}{|h_{11} - h_{13} - h_{21} + h_{23}|} = 14,158; \quad x = x_0 \pm \delta x = 15 \pm 14,158.$$

Пример 4.10.

1. Сохраняя матрицы Y_1 , W_1 из примера 4.9, заменим матрицу Y_2 на комплексную матрицу с двумя ненулевыми блоками B_{11} , B_{22} :

$$\dot{\gamma}_{11}=0,5j, \alpha_1=1, \beta_1=4, \mu_1=1, v_1=4; \dot{\gamma}_{22}=-j, \alpha_2=5, \beta_2=7, \mu_2=5, v_2=4.$$

$$\dot{Y}_2 = \begin{bmatrix} 0,5j & 0 & 0 & -0,5j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5j & 0 & 0 & 0,5j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -j & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j & -j & 0 \end{bmatrix}.$$

Расчет по формуле (4.22) дает результат :

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 x + \dot{U}_3 x^2 + \dot{U}_4 x^3 + \dot{U}_5 x^4 + \dot{U}_6 x^5 + \dot{U}_7 x^6 + \dot{U}_8 x^7 + \dot{U}_9 x^8 + \dot{U}_{10} x^9,$$

где

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \begin{bmatrix} 0,0081784 \\ 0,0040892 \\ -0,14498 \\ -0,12082 \\ -1,0999 \\ -0,99987 \\ 5,9992 \end{bmatrix}; \dot{U}_2 = \begin{bmatrix} -0,011269j \\ -0,0056346j \\ 0,12648j \\ 0,11077j \\ 1,0177j \\ 0,92569j \\ -5,1542j \end{bmatrix}; \dot{U}_3 = \begin{bmatrix} -0,010662 \\ -0,0053309 \\ 0,11966 \\ 0,10480 \\ 0,95721 \\ 0,87019 \\ -4,8509 \end{bmatrix}; \dot{U}_4 = \begin{bmatrix} 0,010087j \\ 0,0050435j \\ -0,11321j \\ -0,099153j \\ 0,90392j \\ -0,82174j \\ 4,5824j \end{bmatrix}; \dot{U}_5 = \begin{bmatrix} 0,0095433 \\ 0,0047717 \\ -0,10711 \\ -0,093809 \\ -0,85472 \\ -0,77702 \\ 4,3334 \end{bmatrix}; \\ \dot{U}_6 &= \begin{bmatrix} -0,009028j \\ -0,004514j \\ 0,10133j \\ 0,088752j \\ 0,80852j \\ 0,73502j \\ -4,0993j \end{bmatrix}; \dot{U}_7 = \begin{bmatrix} -0,008542 \\ -0,004271 \\ 0,095873 \\ 0,083968 \\ 0,76490 \\ 0,69537 \\ -3,8782 \end{bmatrix}; \dot{U}_8 = \begin{bmatrix} 0,0080818j \\ 0,0040409j \\ -0,090705j \\ -0,079442j \\ -0,72366j \\ -0,65788j \\ 3,6691j \end{bmatrix}; \dot{U}_9 = \begin{bmatrix} 0,0076461 \\ 0,0038231 \\ -0,085816 \\ -0,075160 \\ -0,68465 \\ -0,62241 \\ 3,4713 \end{bmatrix}; \dot{U}_{10} = \begin{bmatrix} -0,007234j \\ -0,003617j \\ 0,081190j \\ 0,071108j \\ 0,64775j \\ 0,58886j \\ -3,2842j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Сохраняя матрицы Y_1 , W_1 из примера 4.9, изменим матрицу Y_2 и добавим матрицу Y_3

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; Y_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Расчет по формуле (4.136) дает результат :

$$U(x) = U_1 + U_2x + U_3x^2 + U_4x^3 + U_5x^4 + U_6x^5 + U_7x^6 + U_8x^7 + U_9x^8 + U_{10}x^9$$

где

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0,0081784 \\ 0,0040892 \\ -0,14498 \\ -0,12082 \\ -1,0999 \\ -0,99987 \\ 5,9992 \end{bmatrix}; U_2 = \begin{bmatrix} -0,011269 \\ -0,0056346 \\ 0,12648 \\ 0,11077 \\ 1,0177 \\ 0,92569 \\ -5,1542 \end{bmatrix}; U_3 = \begin{bmatrix} -0,026077 \\ -0,013039 \\ 0,13558 \\ 0,11694 \\ -0,25616 \\ -0,23398 \\ 6,4227 \end{bmatrix}; U_4 = \begin{bmatrix} 0,04556 \\ 0,02278 \\ -0,36727 \\ -0,31984 \\ -1,3484 \\ -1,2242 \\ 2,5135 \end{bmatrix}; U_5 = \begin{bmatrix} -0,01460 \\ -0,0073001 \\ 0,079176 \\ 0,074720 \\ 1,3997 \\ 1,2760 \\ -6,9102 \end{bmatrix}$$

$$U_6 = \begin{bmatrix} -0,066866 \\ -0,033433 \\ 0,61182 \\ 0,52709 \\ 1,3022 \\ 1,1776 \\ 0,17127 \end{bmatrix}; U_7 = \begin{bmatrix} 0,081939 \\ 0,04097 \\ -0,71773 \\ -0,62726 \\ -3,9989 \\ -3,6334 \\ 15,219 \end{bmatrix}; U_8 = \begin{bmatrix} 0,050816 \\ 0,025408 \\ -0,47898 \\ -0,40516 \\ 1,3437 \\ 1,2307 \\ -15,085 \end{bmatrix}; U_9 = \begin{bmatrix} -0,020374 \\ -0,10187 \\ 1,7827 \\ 1,5466 \\ 6,1524 \\ 5,5819 \\ -13,305 \end{bmatrix}; U_{10} = \begin{bmatrix} 0,094983 \\ 0,047491 \\ -0,75476 \\ -0,67449 \\ -8,1729 \\ -7,4369 \\ 40,044 \end{bmatrix}.$$

В случаях, не совпадающих с рассмотренными, необходимо применить численный расчет по общей рекуррентной формуле (4.13б).

Рассмотрим двумерное матричное уравнение (4.10)

$$Y(x, y) \cdot U(x, y) = W(x, y),$$

где

$$Y(x, y) = Y_{1,1} + Y_{2,1}x + Y_{1,2}y + Y_{2,2}xy + Y_{3,1}x^2 + Y_{1,3}y^2 + Y_{3,2}x^2y + Y_{2,3}xy^2 + \dots;$$

$$W(x, y) = W_{1,1} + W_{2,1}x + W_{1,2}y + W_{2,2}xy + W_{3,1}x^2 + W_{1,3}y^2 + W_{3,2}x^2y + W_{2,3}xy^2 + \dots;$$

В отличие от предыдущих разделов каждая переменная имеет свои матрицы, и индексация существенного значения не имеет. В данном разделе сохраняется прежняя индексация, при которой первой переменной x соответствует первый индекс $Y_{2,1}$, $Y_{3,1}$, ... и т. д.

Тогда матричное решение уравнения зависит от переменных x, y

$$U(x, y) = U_{1,1} + U_{2,1}x + U_{1,2}y + U_{2,2}xy + U_{3,1}x^2 + U_{1,3}y^2 + U_{3,2}x^2y + U_{2,3}xy^2 + \dots$$

Для вывода двумерного матричного рекуррентного уравнения представим одномерное матричное уравнение (4.13а) как функцию второй переменной y

$$F_k(y) \equiv W_k(y) - Y_1(y) \cdot U_k(y) - \sum_{i=1}^{k-1} Y_{i+1}(y) \cdot U_{k-i}(y) = 0,$$

откуда получаем рекуррентное двумерное матричное уравнение

$$F_{k,w} \equiv W_{k,w} - \sum_{\xi=0}^{w-1} Y_{1,\xi+1} \cdot U_{k,w-\xi} - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} Y_{i+1,\xi+1} \cdot U_{k-i,w-\xi} = 0. \quad (4.26a)$$

Решая матричное уравнение, находим матричную рекуррентную формулу

$$U_{k,w} = (Y_{1,1})^{-1} W_{k,w} - \sum_{\xi=1}^{w-1} (Y_{1,1})^{-1} Y_{1,\xi+1} U_{k,w-\xi} - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} (Y_{1,1})^{-1} Y_{i+1,\xi+1} U_{k-i,w-\xi} \quad (4.26b)$$

Для $w = 1$ формула (4.26)

$$U_{k,1} = (Y_{1,1})^{-1} \cdot W_{k,1} - \sum_{i=1}^{k-1} (Y_{1,1})^{-1} \cdot Y_{i+1,1} \cdot U_{k-i,1}$$

повторяет формулу (4.13б) (индекс 1 означает отсутствие второй переменной). Для частного случая $k = w = 2$

$$U_{2,2} = (Y_{1,1})^{-1} \cdot W_{2,2} - (Y_{1,1})^{-1} \cdot Y_{1,2} \cdot U_{2,1} - (Y_{1,1})^{-1} \cdot Y_{2,1} \cdot U_{1,2} - (Y_{1,1})^{-1} \cdot Y_{2,2} \cdot U_{1,1} \quad (4.26в)$$

Теорема 4.5. Для $Y(x, y) = Y_{1,1} + Y_{2,1}x + Y_{1,2}y$; $W(x, y) = W_{1,1}$ матрицы $Y_{2,1}$, $Y_{1,2}$ слабо заполнены и включают по четыре ненулевых элемента

$$Y_{2,1} = \begin{matrix} & \mu & & \nu & & & & \\ \alpha & \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \gamma_x & 0 & \dots & -\gamma_x & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & & \dots & 0 & & \dots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \beta & \begin{bmatrix} 0 & \dots & -\gamma_x & 0 & \dots & \gamma_x & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & & \dots & 0 & & \dots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix}; Y_{1,2} = \begin{matrix} & \eta & & \lambda & & & & \\ \sigma & \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \gamma_y & 0 & \dots & -\gamma_y & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & & \dots & 0 & & \dots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \tau & \begin{bmatrix} 0 & \dots & -\gamma_y & 0 & \dots & \gamma_y & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & & \dots & 0 & & \dots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix}$$

Тогда матричная формула вектора $U_{2,2}$ имеет вид

$$U_{2,2} = (Y_{1,1})^{-1} \cdot Y_{2,1} \cdot (Y_{1,1})^{-1} \cdot Y_{1,2} \cdot U_{1,1} + (Y_{1,1})^{-1} \cdot Y_{1,2} \cdot (Y_{1,1})^{-1} \cdot Y_{2,1} \cdot U_{1,1}, (4.27)$$

и скалярная формула q -го элемента вектора $U_{2,2}$ равна

$$(U_{2,2})_q = \gamma_x \cdot \gamma_y \cdot (((U_{1,1})_\eta - (U_{1,1})_\lambda) \cdot (h_{\mu, \sigma} - h_{\mu, \tau} - h_{\nu, \sigma} + h_{\nu, \tau}) \cdot (h_{q, \alpha} - h_{q, \beta}) + \\ + ((U_{1,1})_\mu - (U_{1,1})_\nu) \cdot (h_{\eta, \alpha} - h_{\eta, \beta} - h_{\lambda, \alpha} + h_{\lambda, \beta}) \cdot (h_{q, \sigma} - h_{q, \tau})) \quad (4.28)$$

где $q = 1, \dots, n$; $(U_{1,1})_\mu$, $(U_{1,1})_\nu$, $(U_{1,1})_\eta$, $(U_{1,1})_\lambda$ – элементы вектора $U_{1,1}$; $h_{\mu, \alpha}$, $h_{\mu, \beta}$, $h_{\nu, \alpha}$, $h_{\nu, \beta}$, $h_{q, \alpha}$, $h_{q, \beta}$, – элементы обратной матрицы Y^{-1} .

Доказательство. Из матричной формулы (4.26в) для $Y_{2,2} = 0$; $W_{2,2} = 0$ (0 – нулевая матрица) получаем

$$U_{2,2} = -(Y_{1,1})^{-1} Y_{1,2} \cdot U_{2,1} - (Y_{1,1})^{-1} Y_{2,1} \cdot U_{1,2}$$

Преобразуем одномерную матричную формулу (4.22) для $k = 2$ в двумерные формулы

$$U_{2,1} = -(Y_{1,1})^{-1} Y_{2,1} \cdot U_{1,1}; \quad U_{1,2} = -(Y_{1,1})^{-1} Y_{1,2} \cdot U_{1,1}$$

и подставим в формулу $U_{2,2}$

$$U_{2,2} = (Y_{1,1})^{-1} Y_{1,2} \cdot (Y_{1,1})^{-1} Y_{2,1} \cdot U_{1,1} + (Y_{1,1})^{-1} Y_{2,1} \cdot (Y_{1,1})^{-1} Y_{1,2} \cdot U_{1,1},$$

откуда следует формула (4.27).

Повторяем формулы (4.16) из теоремы 4.1 для двумерного случая и, обозначая $S_x = (Y_{1,1})^{-1} \cdot Y_{2,1} \cdot U_{1,1}$; $S_y = (Y_{1,1})^{-1} \cdot Y_{1,2} \cdot U_{1,1}$, получаем

$$S_x = \gamma_x ((U_{1,1})_\mu - (U_{1,1})_\nu) \cdot \begin{bmatrix} h_{1,\alpha} - h_{1,\beta} \\ \vdots \\ h_{q,\alpha} - h_{q,\beta} \\ \vdots \\ h_{n,\alpha} - h_{n,\beta} \end{bmatrix}; \quad S_y = \gamma_y ((U_{1,1})_\eta - (U_{1,1})_\lambda) \cdot \begin{bmatrix} h_{1,\sigma} - h_{1,\tau} \\ \vdots \\ h_{q,\sigma} - h_{q,\tau} \\ \vdots \\ h_{n,\sigma} - h_{n,\tau} \end{bmatrix}$$

Найдем из этих выражений скалярные разности элементов векторов:

$$(Sx)_{\eta} - (Sx)_{\lambda} = \gamma_x((U_{1,1})_{\mu} - (U_{1,1})_{\nu}) \cdot (h_{\eta, \alpha} - h_{\eta, \beta} - h_{\lambda, \alpha} + h_{\lambda, \beta});$$

$$(Sy)_{\mu} - (Sy)_{\nu} = \gamma_y((U_{1,1})_{\eta} - (U_{1,1})_{\lambda}) \cdot (h_{\mu, \sigma} - h_{\mu, \tau} - h_{\nu, \sigma} + h_{\nu, \tau})$$

и запишем матричные слагаемые вектора $U_{2,2}$ в новых обозначениях:

$$(Y_{1,1})^{-1} \cdot Y_{1,2} \cdot (Y_{1,1})^{-1} \cdot Y_{2,1} \cdot U_{1,1} = (Y_{1,1})^{-1} \cdot Y_{1,2} \cdot Sx = \gamma_y((Sx)_{\eta} - (Sx)_{\lambda}) \cdot \begin{bmatrix} h_{1,\sigma} - h_{1,\tau} \\ \vdots \\ h_{q,\sigma} - h_{q,\tau} \\ \vdots \\ h_{n,\sigma} - h_{n,\tau} \end{bmatrix}$$

$$(Y_{1,1})^{-1} Y_{2,1} \cdot (Y_{1,1})^{-1} \cdot Y_{1,2} \cdot U_{1,1} = (Y_{1,1})^{-1} \cdot Y_{2,1} \cdot Sy = \gamma_x((Sy)_{\mu} - (Sy)_{\nu}) \cdot \begin{bmatrix} h_{1,\alpha} - h_{1,\beta} \\ \vdots \\ h_{q,\alpha} - h_{q,\beta} \\ \vdots \\ h_{n,\alpha} - h_{n,\beta} \end{bmatrix}.$$

Суммируя два матричных выражения в формуле $U_{2,2}$ и подставляя скалярные разности, получаем для элемента вектора $(U_{2,2})_q$ формулу (4.28), что требовалось доказать.

Пример 4.11.

Зададим матрицы

$$Y_{1,1} = \begin{bmatrix} -3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & -15 & -3,8 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & -15 & -4,875 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & -15 & 0,25 \end{bmatrix}; W_{1,1} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; Y_{2,2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

и остальные матрицы возьмем из примера 4.10 (п.2): $Y_{2,1}=Y_{1,2}=Y_2$; $Y_{3,1}=Y_{1,3}=Y_3$.

Построим матричную двумерную квадратичную модель, применяя формулу (4.266) для $k = 1, 2, 3$; $w = 1, 2, 3$

$$U(x, y) = U_{1,1} + U_{2,1}x + U_{1,2}y + U_{3,1}x^2 + U_{1,3}y^2 + U_{2,2}xy,$$

где

$$U_{1,1} = \begin{bmatrix} 0,0081784 \\ 0,0040892 \\ -0,14498 \\ -0,12082 \\ -1,0999 \\ -0,99987 \\ 5,9992 \end{bmatrix}; U_{2,1} = U_{1,2} = \begin{bmatrix} -0,011269 \\ -0,0056346 \\ 0,12648 \\ 0,11077 \\ 1,0177 \\ 0,92569 \\ -5,1542 \end{bmatrix}; U_{3,1} = U_{1,3} = \begin{bmatrix} -0,026077 \\ -0,013039 \\ 0,13558 \\ 0,11694 \\ -0,25616 \\ -0,23398 \\ 6,4227 \end{bmatrix}; U_{2,2} = \begin{bmatrix} -0,023753 \\ -0,011877 \\ 0,26659 \\ 0,23349 \\ 0,64155 \\ 0,58323 \\ -4,6399 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим трехмерное матричное уравнение (4.10)

$$Y(x, y, z) \cdot U(x, y, z) = W(x, y, z) ,$$

где

$$Y(x, y, z) = Y_{1,1,1} + Y_{2,1,1}x + Y_{1,2,1}y + Y_{1,1,2}z + Y_{2,2,1}xy + Y_{2,1,2}xz + Y_{1,2,2}yz + \\ + Y_{3,1,1}x^2 + Y_{1,3,1}y^2 + Y_{1,1,3}z^2 + Y_{3,2,1}x^2y + \dots + Y_{4,1,1}x^3 + Y_{1,4,1}y^3 + Y_{1,1,4}z^3 + Y_{2,2,2}xyz \\ W(x, y, z) = W_{1,1,1} + W_{2,1,1}x + W_{1,2,1}y + W_{1,1,2}z + W_{2,2,1}xy + \dots + W_{1,1,4}z^3 + W_{2,2,2}xyz$$

Тогда матричное решение уравнения зависит от переменных x, y, z

$$U(x, y, z) = U_{1,1,1} + U_{2,1,1}x + U_{1,2,1}y + U_{1,1,2}z + U_{2,2,1}xy + \dots + U_{1,1,4}z^3 + U_{2,2,2}xyz$$

Для вывода трехмерного матричного рекуррентного уравнения представим двумерное матричное уравнение (4.26a) как функцию третьей переменной z

$$F_{k,w}(z) \equiv W_{k,w}(z) - \sum_{\xi=0}^{w-1} Y_{1,\xi+1}(z) \cdot U_{k,w-\xi}(z) - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} Y_{i+1,\xi+1}(z) \cdot U_{k-i,w-\xi}(z) = 0$$

откуда получаем трехмерное матричное рекуррентное уравнение

$$F_{k,w,s} \equiv W_{k,w,s} - \sum_{\eta=0}^{s-1} Y_{1,1,\eta+1} \cdot U_{k,w,s-\eta} - \\ - \sum_{\eta=0}^{s-1} \left(\sum_{\xi=1}^{w-1} Y_{1,\xi+1,\eta+1} \cdot U_{k,w-\xi,s-\eta} + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} Y_{i+1,\xi+1,\eta+1} \cdot U_{k-i,w-\xi,s-\eta} \right) = 0$$

Решая уравнение, находим матричную рекуррентную формулу решения

$$U_{k,w,s} = (Y_{1,1,1})^{-1} \cdot \left(W_{k,w,s} - \sum_{\eta=1}^{s-1} Y_{1,1,\eta+1} \cdot U_{k,w,s-\eta} - \right. \\ \left. - \sum_{\eta=0}^{s-1} \left(\sum_{\xi=1}^{w-1} Y_{1,\xi+1,\eta+1} \cdot U_{k,w-\xi,s-\eta} + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} Y_{i+1,\xi+1,\eta+1} \cdot U_{k-i,w-\xi,s-\eta} \right) \right) \quad (4.29)$$

Для $k = w = s = 2$

$$U_{2,2,2} = (Y_{1,1,1})^{-1} \cdot (W_{2,2,2} - Y_{1,1,2} \cdot U_{2,2,1} - Y_{1,2,1} \cdot U_{2,1,2} - Y_{2,1,1} \cdot U_{1,2,2} - \\ - Y_{2,2,1} \cdot U_{1,1,2} - Y_{1,2,2} \cdot U_{2,1,1} - Y_{2,1,2} \cdot U_{1,2,1} - Y_{2,2,2} \cdot U_{1,1,1}) \quad (4.30)$$

Пример 4.12.

Зададим в уравнении (4.10) трехмерную матрицу $Y(x, y, z)$

$$Y(x, y, z) = Y_{1,1,1} + Y_{2,1,1}x + Y_{1,2,1}y + Y_{1,1,2}z + Y_{2,2,1}xy + Y_{2,1,2}xz + Y_{1,2,2}yz + \\ + Y_{3,1,1}x^2 + Y_{1,3,1}y^2 + Y_{1,1,3}z^2 + Y_{4,1,1}x^3 + Y_{1,4,1}y^3 + Y_{1,1,4}z^3 + Y_{2,2,2}xyz$$

где

$$Y_{4,1,1} = Y_{1,4,1} = Y_{1,1,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; Y_{2,2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

остальные матрицы возьмем из примеров 4.10, 4.11 :

$$W_{1,1,1} = W_{1,1}; Y_{1,1,1} = Y_{1,1}; Y_{2,1,1} = Y_{1,2,1} = Y_{1,1,2} = Y_2; Y_{2,2,1} = Y_{2,1,2} = Y_{1,2,2} = Y_{2,2};$$

$$Y_{3,1,1} = Y_{1,3,1} = Y_{1,1,3} = Y_3$$

Построим матричную кубическую численную модель

$$U(x, y, z) = U_{1,1,1} + U_{2,1,1}x + U_{1,2,1}y + U_{1,1,2}z + U_{2,2,1}xy + U_{2,1,2}xz + U_{1,2,2}yz + \\ + U_{3,1,1}x^2 + U_{1,3,1}y^2 + U_{1,1,3}z^2 + U_{4,1,1}x^3 + U_{1,4,1}y^3 + U_{1,1,4}z^3 + \\ + U_{3,2,1}x^2y + U_{2,3,1}xy^2 + U_{3,1,2}x^2z + U_{2,1,3}xz^2 + U_{1,3,2}y^2z + U_{1,2,3}yz^2 + U_{2,2,2}xyz$$

где

$$U_{4,1,1} = \begin{bmatrix} 0,023022 \\ 0,011511 \\ -0,11431 \\ -0,098292 \\ 0,38427 \\ 0,35131 \\ -6,5398 \end{bmatrix}; U_{3,2,1} = \begin{bmatrix} -0,065724 \\ -0,032867 \\ 0,59369 \\ 0,51815 \\ 2,1702 \\ 1,9714 \\ -7,5998 \end{bmatrix}; U_{2,2,2} = \begin{bmatrix} -0,026123 \\ -0,063260 \\ -0,71528 \\ -0,68924 \\ -0,87333 \\ -0,79394 \\ 5,1746 \end{bmatrix};$$

$$U_{1,4,1} = U_{1,1,4} = U_{4,1,1}; U_{2,3,1} = U_{3,1,2} = U_{2,1,3} = U_{1,3,2} = U_{1,2,3} = U_{3,2,1};$$

остальные матрицы совпадают с матрицами примера 4.11 :

$$U_{1,1,1} = U_{1,1}; U_{2,1,1} = U_{1,2,1} = U_{1,1,2} = U_{1,1,4} = U_{2,1};$$

$$U_{3,1,1} = U_{1,3,1} = U_{1,1,3} = U_{3,1}; U_{2,2,1} = U_{2,1,2} = U_{1,2,2} = U_{2,2}$$

Пример показывает, что кубическими моделями можно аппроксимировать не только сложные скалярные многомерные функции, но применить эти модели для матричных выражений и аппроксимировать решения систем уравнений, зависящих от параметров. В таких задачах численные коэффициенты модели заменяются численными матрицами.

Раздел 4.3. Рекуррентная алгебра

Рекуррентное исчисление решает общую алгебраическую задачу операций с многочленами любой размерности (умножение, деление, возведение в степень и т. п.). Соответствующие рекуррентные формулы и уравнения сведены в табл.4.6, 4.7.

Таблица 4.6

Функция	Начал.знач.	Рекуррентные формулы и уравнения
$(D(x))^m$	$f_1 = d_1^m$	$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \cdot (f_{i+2} \cdot d_{k-1-i} - m \cdot d_{i+2} \cdot f_{k-1-i}) = 0$
$(D(x, y))^m$	$f_{1,1} = d_{1,1}^m$	$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \sum_{\xi=0}^{w-1} (f_{i+2, \xi+1} \cdot d_{k-1-i, w-\xi} - m \cdot d_{i+2, \xi+1} \cdot f_{k-1-i, w-\xi}) = 0$
$D(x, y, z)^m$	$f_{1,1,1} = d_{1,1,1}^m$	$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} (f_{i+2, \xi+1, \eta+1} \cdot d_{k-1-i, w-\xi, s-\eta} - m \cdot d_{i+2, \xi+1, \eta+1} \cdot f_{k-1-i, w-\xi, s-\eta}) = 0$
$D(x, y, z, u)^m$	$f_{1,1,1,1} = d_{1,1,1,1}^m$	$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \sum_{\lambda=0}^{p-1} (f_{i+2, \xi+1, \eta+1, \lambda+1} \cdot d_{k-1-i, w-\xi, s-\eta, p-\lambda} - m \cdot d_{i+2, \xi+1, \eta+1, \lambda+1} \cdot f_{k-1-i, w-\xi, s-\eta, p-\lambda}) = 0$
$F = U \odot V$ $n1 \times n2$		$F_{k,w} = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} U_{i+1, \xi+1} \cdot V_{k-i, w-\xi}$
$F = U \odot V$ $n1 \times n2 \times n3$		$F_{k,w,s} = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} U_{i+1, \xi+1, \eta+1} \cdot V_{k-i, w-\xi, s-\eta}$
$F = U \odot V$ $n1 \times n2 \times n3 \times n4$		$F_{k,w,s,p} = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \sum_{\lambda=0}^{p-1} U_{i+1, \xi+1, \eta+1, \lambda+1} \times V_{k-i, w-\xi, s-\eta, p-\lambda}$

Пример 4.14.

1. Вычислим полином

$$F(x) = (2x+1)^3 \cdot (3x^2 - 2x + 2)^2 \cdot (x-1)^4$$

для чего представим его в виде произведения

$$F(x) = F1(x) \cdot F2(x) = (C(x)^{m1} \cdot D(x)^{m2}) \cdot (D1(x))^m;$$

$$m1 = 3; C(x) = 2x + 1; m2 = 2; D(x) = 3x^2 - 2x + 2; m = 4; D1(x) = x - 1.$$

Из табл.4.6 по одномерному рекуррентному уравнению степени полинома находим

$$F2(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

и по одномерной рекуррентной формулы $C^{m1} \cdot D^{m2}$ (табл.4.7) вычисляем

$$F1(x) = 72x^7 + 12x^6 + 38x^5 + 65x^4 + 20x^3 + 16x^2 + 16x + 4.$$

Одномерное произведение функций $F1(x) \cdot F2(x)$ по формуле Лейбница–Коши дает окончательный результат

$$F(x) = 72x^{11} - 276x^{10} + 422x^9 - 303x^8 + 12x^7 + 186x^6 - 150x^5 + 21x^4 + 36x^3 - 24x^2 + 4$$

2. Выберем полином

$$D(x) = 1 + 2x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 - x^{10}$$

и построим функцию полинома

$$F(x) = (D(x))^{C(x)} = (D(x))^{D(x)} =$$

$$= (1 + 2x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 - x^{10})^{1+2x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8-x^9-x^{10}}$$

Для расчета нормированных производных функции применим рекуррентную маршрутную формулу, требующую предварительной реализации прямого рекуррентного уравнения функции $L(x) = \ln D(x)$.

Таблица 4.7

Функция	Начал.знач.	Рекуррентные формулы
$C^{m1} \cdot D^{m2}$	$f_1 = c_1^{m1} d_1^{m2}$	$f_k = \frac{1}{(k-1)c_1 \cdot d_1} (f_{k-1} \cdot (m1 \cdot c_2 \cdot d_1 + m2 \cdot c_1 \cdot d_2) +$ $+ \sum_{i=0}^{k-3} (\sum_{q=0}^{k-2-i} ((q+1)f_{i+1} \cdot (m1 \cdot c_{q+2} \cdot d_{k-1-i-q} +$ $+ m2 \cdot d_{q+2} \cdot c_{k-1-i-q}) - (i+1)f_{i+2} \cdot c_{q+1} \cdot d_{k-1-i-q})))$
$\ln D$	$L_1 = \ln D_1$	$L_k = \frac{1}{(k-1)d_1} ((k-1)d_k - \sum_{q=0}^{k-3} (q+1)L_{q+2} \cdot d_{k-1-q})$
$(D(x))^{C(x)}$	$f_1 = d_1^{c_1}$	$f_k = \frac{1}{(k-1) \cdot d_1} (f_{k-1} \cdot (c_1 \cdot d_2 + c_2 \cdot d_1 \cdot L_1) +$ $+ \sum_{j=0}^{k-3} (-(j+1)f_{j+2} \cdot d_{k-1-j} + f_{j+1} \cdot \sum_{i=0}^{k-2-j} ((i+1) \times$ $\times d_{i+2} \cdot c_{k-1-j-i} + L_{i+1} \cdot \sum_{q=0}^{k-2-j-i} (q+1) \cdot c_{q+2} \cdot d_{k-1-j-i-q})))$
$C(x)\sqrt{D(x)}$	$f_1 = d_1^{\frac{1}{c_1}}$	$f_k = \frac{1}{(k-1) \cdot d_1 \cdot c_1^2} (f_{k-1} \cdot (c_1 \cdot d_2 + c_2 \cdot d_1 \cdot L_1) +$ $+ \sum_{j=0}^{k-3} (-(j+1) \cdot c_1^2 \cdot f_{j+2} \cdot d_{k-1-j} + f_{j+1} \cdot \sum_{i=0}^{k-2-j} ((i+1) \times$ $\times d_{i+2} \cdot c_{k-1-j-i} + L_{i+1} \cdot \sum_{q=0}^{k-2-j-i} (q+1) \cdot c_{q+2} \cdot c_{k-1-j-i-q}) -$ $-(\sum_{i=0}^j (i+1) \cdot f_{i+2} \cdot d_{j+1-i}) \cdot (\sum_{i=0}^{k-2-j} c_{i+1} \cdot c_{k-1-j-i})))$

Результаты расчета производных функции $F(x)$ приведены в табл.4.8.

Таблица 4.8

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
1	2	5	7	9,3333	1,1333e1
F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
9,3000	1,1167e1	7,1937	3,7952	9,9817	-1,9785e1
F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}
1,2083e1	-4,9001e1	-1,5994e1	-9,2339	-1,3849e2	1,74606e2
F_{19}	F_{20}	F_{21}	F_{22}	F_{23}	F_{24}
-3,3189e2	2,8157e2	-7,1205e1	-6,0205e2	1,8170e3	-3,3755e3

3. Выберем полином

$$D(x) = 1 + 2x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 - x^{10}$$

и построим функцию полинома

$$F(x) = {}^{C(x)}\sqrt{D(x)} = {}^{D(x)}\sqrt{D(x)} =$$

$$= (1+2x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8-x^9-x^{10})^{\sqrt{1+2x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8-x^9-x^{10}}}$$

Для расчета нормированных производных функции применим рекуррентную маршрутную формулу (табл. 4.7) . Результаты расчета производных функции $F(x)$ приведены в табл.4.9.

Таблица 4.9

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
1	2	-3	-1	1,2667e1	-2,4667e1
F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
1,1033e1	6,4767e1	-2,0092e2	2,6313e2	8,2266e1	-1,2183e3
F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}
2,9568e3	-3,4222e3	-1,7218e3	1,7410e4	-4,1409e4	4,9839e4
F_{19}	F_{20}	F_{21}	F_{22}	F_{23}	F_{24}
1,4853e4	-2,2553e5	5,7703e5	-7,9287e5	1,1870e5	2,5684e6

4. Зададим двумерные функции

$$D1(x, y) = 1 + 2x + 2y - xy + x^2 + y^2 + x^2y + xy^2 - x^2y^2;$$

$$D2(x, y) = 1 + xy + x^2 + y^2$$

и представим функции в виде двумерных численных матриц

$$D1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad D2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Выполним двумерные алгебраические операции (табл.4.6).

$$F1 = (D1)^2 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 + (4 + 6x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4)y + (6 + 2x + 9x^2 - 4x^3 - x^4)y^2 + (4 + 2x - 4x^2 + 4x^3 - 2x^4)y^3 + (1 + 2x - x^2 - 2x^3 + x^4)y^4;$$

$$F2 = (D2)^3 = 1 + 3x^2 + 3x^4 + x^6 + (3x + 6x^3 + 3x^5)y + (3 + 9x^2 + 6x^4)y^2 + \\ + (6 + 7x^3)y^3 + (3 + 6x^2)y^4 + (3x)y^5 + y^6$$

и представим полученные функции в виде двумерных численных матриц.

$$F1 = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ y^0 & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\ y^1 & \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ y^2 & \begin{bmatrix} 6 & 2 & 9 & -4 & -1 \end{bmatrix} \\ y^3 & \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \\ y^4 & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}; F2 = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\ y^0 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ y^1 & \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 6 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ y^2 & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y^3 & \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y^4 & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y^5 & \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y^6 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Выполним конечную алгебраическую операцию двумерного умножения (табл.4.6)

$$F = F1 \odot F2 = \begin{matrix} & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 & x^7 & x^8 & x^9 & x^{10} \\ y^0 & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 22 & 24 & 22 & 16 & 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\ y^1 & \begin{bmatrix} 4 & 9 & 26 & 44 & 56 & 66 & 52 & 36 & 20 & 5 & 2 \end{bmatrix} \\ y^2 & \begin{bmatrix} 9 & 26 & 72 & 80 & 149 & 84 & 105 & 32 & 18 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ y^3 & \begin{bmatrix} 16 & 44 & 80 & 176 & 98 & 189 & 26 & 54 & -10 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ y^4 & \begin{bmatrix} 22 & 56 & 149 & 98 & 232 & 8 & 96 & -38 & 8 & -8 & 1 \end{bmatrix} \\ y^5 & \begin{bmatrix} 24 & 66 & 84 & 189 & 8 & 120 & -64 & 20 & -18 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ y^6 & \begin{bmatrix} 22 & 52 & 105 & 26 & 96 & -64 & 25 & -26 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y^7 & \begin{bmatrix} 16 & 36 & 32 & 54 & -38 & 20 & -26 & 7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y^8 & \begin{bmatrix} 9 & 20 & 18 & -10 & 8 & -18 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y^9 & \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 & -8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y^{10} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

5. Зададим трехмерные функции

$$D(x, y, z) = (1 + xy + x^2 + y^2)z^0 + (x + y)z^1 + z^2 = D_1(x, y)z^0 + D_2(x, y)z^1 + D_3(x, y)z^2;$$

$$S(x, y, z) = (1 - x - y - 6xy - x^2 - y^2 + 6x^2y^2)z^0 + (-1 - 6x - 6y)z^1 + \\ + (-1 + 6x^2 + 6y^2)z^2 = S_1(x, y)z^0 + S_2(x, y)z^1 + S_3(x, y)z^2$$

где $D_1(x, y)$, $D_2(x, y)$, $D_3(x, y)$; $S_1(x, y)$, $S_2(x, y)$, $S_3(x, y)$ – двумерные численные матрицы по третьей переменной z , равны

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}; S_2 = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Выполним трехмерные алгебраические операции (табл.4.6) возведения полинома в степень

$$L(x, y, z) = (D(x, y, z))^2 = (1 + 2xy + 2x^2 + 2y^2 + 3x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 + x^4 + y^4)z^0 + \\ + (2x + 2y + 4x^2y + 4xy^2 + 2x^3 + 2y^3)z^1 + (2 + 4xy + 3x^2 + 3y^2)z + (2x + 2y)z^3 + z^4$$

и трехмерного умножения

$$F(x, y, z) = L(x, y, z) \odot S(x, y, z) = F_1(x, y)z^0 + F_2(x, y)z^1 + \\ + F_3(x, y)z^2 + F_4(x, y)z^3 + F_5(x, y)z^4 + F_6(x, y)z^5 + F_7(x, y)z^6$$

Результат представим в виде численных двумерных матриц по третьей переменной z

$$\begin{array}{c} \boxed{z^0} \quad x^0 \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4 \quad x^5 \quad x^6 \\ F_1 = y^0 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ y^1 & -1 & -4 & -4 & -12 & -3 & -8 & 0 \\ y^2 & 1 & -4 & -7 & -5 & -4 & 0 & 6 \\ y^3 & -2 & -12 & -5 & -10 & 0 & 12 & 0 \\ y^4 & -1 & -3 & -4 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ y^5 & -1 & -8 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ y^6 & -1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; F_2 = y^0 \begin{bmatrix} -1 & -4 & -4 & -12 & -3 & -8 & 0 \\ y^1 & -4 & -6 & -34 & -8 & -34 & 0 & 0 \\ y^2 & -4 & -34 & -11 & -48 & 0 & 12 & 0 \\ y^3 & -12 & -8 & -48 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ y^4 & -3 & -34 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ y^5 & -8 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ \boxed{z^1} \quad x^0 \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4 \quad x^5 \quad x^6 \\ F_3 = y^0 \begin{bmatrix} 1 & -4 & -7 & -5 & -4 & 0 & 6 \\ y^1 & -4 & -34 & -11 & -48 & 0 & 12 & 0 \\ y^2 & -7 & -11 & -45 & 0 & 42 & 0 & 0 \\ y^3 & -5 & -48 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 \\ y^4 & -4 & 0 & 42 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y^5 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y^6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; F_4 = y^0 \begin{bmatrix} -2 & -12 & -5 & -10 & 0 & 12 & 0 \\ y^1 & -12 & -8 & -48 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ y^2 & -5 & -48 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 \\ y^3 & -10 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y^4 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y^5 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \\ \boxed{z^4} \quad x^0 \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3 \quad \dots \\ F_5 = y^0 \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ y^1 & -3 & -34 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ y^2 & -4 & 0 & 42 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y^3 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y^4 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; F_6 = y^0 \begin{bmatrix} -1 & -8 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y^1 & -8 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y^2 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y^3 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; F_7 = y^0 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 & 0 & \dots \\ y^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ y^2 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ y^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ y^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ y^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ y^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \end{array}$$

(последние столбцы матрицы F_7 – нулевые).

Тождества, доказанные для одной переменной, сохраняют тождественные свойства для многих переменных

$$L(x, y, z, \dots) \equiv P(x, y, z, \dots) .$$

Это свойство можно использовать двояко: для проверки тождественности выражений или для контроля точности многомерных численных расчетов по очевидным тождествам.

Пример 4.15

Рассмотрим трехмерное тождество

$$\frac{\sin S(x, y, z) - \sqrt[3]{\sin S(x, y, z)} + \frac{1}{\sqrt[3]{\sin S(x, y, z)}}}{\sin^2 S(x, y, z) + 1} \equiv \frac{1}{\sin S(x, y, z) + \sqrt[3]{\sin S(x, y, z)}}$$

и проконтролируем точность численных трехмерных расчетов для аргумента

$$S(x, y, z) = 1 - x - y - z - 6xy - 6xz - 6yz - x^2 - y^2 - z^2 + \\ + 6x^2y^2 + 6x^2z^2 + 6y^2z^2 = S_1(x, y)z^0 + S_2(x, y)z^1 + S_3(x, y)z^2 ,$$

где

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \quad S_2 = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Для численного расчета составим порядок расчета (маршруты) левой части L и правой части P тождества, определяющих порядок следования трехмерных операций (табл. П.29 – П.32)

$$L : A = \sin S \rightarrow B = \sqrt[3]{A} \rightarrow C = \frac{1}{B} \rightarrow H = A - B + C \rightarrow F = A^2 \rightarrow L = \frac{H}{F + 1}$$

$$P : F = A + B \rightarrow P = \frac{1}{F}$$

Результаты представим в виде трехмерных функций левой и правой частей тождества

$$L(x, y, z) = L_1(x, y)z^0 + L_2(x, y)z^1 + L_3(x, y)z^2 + L_4(x, y)z^3 + L_5(x, y)z^4;$$

$$P(x, y, z) = P_1(x, y)z^0 + P_2(x, y)z^1 + P_3(x, y)z^2 + P_4(x, y)z^3 + P_5(x, y)z^4 .$$

В случае тождества должны совпадать соответствующие численные двумерные матрицы

$$L_1 \equiv P_1 ; \quad L_2 \equiv P_2 ; \quad L_3 \equiv P_3 ; \quad L_4 \equiv P_4 ; \quad L_5 \equiv P_5 ,$$

но вследствие ошибок расчета совпадение будет неполным. Приведем последние численные матрицы, сохраняя в них только совпадающие значащие цифры в ответе для L_k, P_k ($k = 4, 5$).

$$L_4 \approx P_4 = \begin{bmatrix} 0,772839559351 & 8,75484854687 & 41,9260606011 & 160,361687728 & 493,8666071156 \\ 8,75484854687 & 98,2300704460 & 643,466673150 & 2778,53111495 & 9663,14141961 \\ 41,9260606011 & 643,466673150 & 4669,84289872 & 23828,4616001 & 96339,8438821 \\ 160,361687728 & 2778,53111495 & 23828,4816001 & 140846,079467 & 669398,646065 \\ 493,866607115 & 9663,14141961 & 96339,8438821 & 669398,646065 & 3596362,68015 \end{bmatrix};$$

$$L_5 \approx P_5 = \begin{bmatrix} 1,03696023631 & 14,4775580854 & 105,272306325 & 493,866607115 & 1794,84010369 \\ 14,4775580854 & 238,011776330 & 1832,30662557 & 9663,14141961 & 40282,9639535 \\ 105,272306325 & 1832,30662557 & 16031,9902261 & 96339,843882 & 462707,36424 \\ 493,866607115 & 9663,14141961 & 96339,843882 & 669398,646065 & 3596362,680158 \\ 1794,84010369 & 40282,9639535 & 462707,36424 & 3596362,680158 & 21709965,8231 \end{bmatrix}$$

В приведенных матрицах совпадают 12 значащих цифр; в других матрицах L_k, P_k ($k = 1, 2, 3$) точность совпадения еще выше.

Алгебраическая задача возведения полинома в степень стала классической с тех пор, когда получила решение в виде бинома Ньютона [1, 11, 12]. Покажем, что поставленная задача имеет полное рекуррентное решение для полиномов любой сложности.

Лемма 4.5. Коэффициенты двучленного полинома (двучлена, бинома) $(u + v)^m$ вычисляются по одномерной рекуррентной формуле

$$F_k = \frac{m-k+2}{k-1} F_{k-1}, \quad (4.31)$$

где $F_1 = 1$; $k = 2, \dots, m+1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим бином в следующем виде

$$(u + v)^m = v^m \left(\frac{u}{v} + 1\right)^m = v^m (x + 1)^m = v^m (d_1 + d_2 x)^m = v^m (D(x))^m$$

откуда следуют условия

$$d_k = 1 \quad (k \leq 2); \quad d_k = 0 \quad (k > 2). \quad (4.32)$$

Представим одномерное рекуррентное уравнение возведения полинома в степень (табл.4.6) в виде двух сумм

$$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) F_{i+2} \cdot d_{k-1-i} - m \cdot \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) d_{i+2} \cdot F_{k-1-i} = 0. \quad (4.33)$$

Согласно условиям (4.32), в суммах должны выполняться неравенства

$$1) \quad k-i-1 \leq 2, \quad k-3 \leq i; \quad 2) \quad i+2 \leq 2, \quad i \leq 0,$$

и уравнение (4.33) принимает вид

$$\sum_{i=k-3}^{k-2} (i+1) F_{i+2} \cdot d_{k-1-i} - m \cdot \sum_{i=0}^0 (i+1) d_{i+2} \cdot F_{k-1-i} = 0.$$

Отсюда находим

$$F_k = \frac{1}{d_1} \frac{m-k+2}{k-1} F_{k-1} \cdot d_2 . \quad (4.34)$$

С учетом условий (4.32) получаем формулу (4.31) , что требовалось доказать.

Теорема 4.6. Коэффициенты трехчленного полинома (трехчлена, trinomial) $(g+u+v)^m$ вычисляются по двумерной рекуррентной формуле

$$F_{k,w} = \frac{m-k+2}{k-1} F_{k-1,w} - F_{k,w-1} , \quad (4.35)$$

где $k, w = 2, \dots, m+1$; $F_{1,w}$, $F_{k,1}$ являются коэффициентами бинома $(x+1)^m$ и вычисляются по одномерной рекуррентной формуле (4.31) .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим трехчлен в следующем виде

$$\begin{aligned} (g+u+v)^m &= v^m \left(\frac{g}{v} + \frac{u}{v} + 1 \right)^m = v^m (x+y+1)^m = v^m (d_{1,1} + d_{2,1}x + d_{1,2}y)^m = \\ &= v^m \cdot D(x, y)^m \end{aligned}$$

откуда следуют условия

$$d_{k,w} = 1 \quad (k \leq 2; w \leq 2) ; \quad d_{k,w} = 0 \quad (k > 2; w > 2) . \quad (4.36)$$

Представим двумерное рекуррентное уравнение степени (табл.4.6) в виде нескольких сумм

$$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \left(\sum_{\xi=0}^{w-1} F_{i+2, \xi+1} \cdot d_{k-1-i, w-\xi} - m \cdot \sum_{\xi=0}^{w-1} d_{i+2, \xi+1} \cdot F_{k-1-i, w-\xi} \right) = 0 . \quad (4.37)$$

Согласно условиям (4.36) в суммах должны выполняться неравенства

$$1) \quad w - \xi \leq 2 , \quad w - 2 \leq \xi ; \quad 2) \quad \xi + 1 \leq 2 , \quad \xi \leq 1 ,$$

и рекуррентное уравнение (4.37) принимает вид

$$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \left(\sum_{\xi=w-2}^{w-1} F_{i+2, \xi+1} \cdot d_{k-1-i, w-\xi} - m \cdot \sum_{\xi=0}^1 d_{i+2, \xi+1} \cdot F_{k-1-i, w-\xi} \right) = 0$$

или, после преобразования сумм,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) F_{i+2, w-1} \cdot d_{k-1-i, 2} + \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) F_{i+2, w} \cdot d_{k-1-i, 1} - \\ - m \cdot \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) F_{k-1-i, w} \cdot d_{i+2, 1} - m \cdot \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) F_{k-1-i, w-1} \cdot d_{i+2, 2} = 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Согласно условиям (4.36), в суммах должны выполняться неравенства:

- 1) для $w=2$ $k-i-1 \leq 1$, $k-2 \leq i$; 2) для $w=1$ $k-i-1 \leq 2$, $k-3 \leq i$;
- 3) для $w=1$ $i+2 \leq 2$, $i \leq 0$; 4) для $w=2$ $i+2 \leq 1$, $i \leq -1$,

и рекуррентное уравнение (4.38) принимает вид

$$\sum_{i=k-2}^{k-2} (i+1) F_{i+2, w-1} \cdot d_{k-1-i, 2} + \sum_{i=k-3}^{k-2} (i+1) F_{i+2, w} \cdot d_{k-1-i, 1} -$$

$$-m \cdot \sum_{i=0}^0 (i+1) F_{k-1-i, w} \cdot d_{i+2, 1} = 0 .$$

Раскрывая суммы, находим

$$F_{k, w} = \frac{1}{d_{1,1}} \left(\frac{m-k+2}{k-1} F_{k-1, w} \cdot d_{2,1} - F_{k, w-1} \cdot d_{1,2} \right) . \quad (4.39)$$

С учетом условия (4.36) получаем формулу (4.35) , что требовалось доказать.

Теорема 4.7. Коэффициенты четырехчленного полинома (четырёхчлена, quadrinomial) $(g + h + u + v)^m$ вычисляются по трехмерной рекуррентной формуле

$$F_{k, w, s} = \frac{m-k+2}{k-1} F_{k-1, w, s} - F_{k, w-1, s} - F_{k, w, s-1} , \quad (4.40)$$

где $k, w, s = 2, \dots, m+1$; $F_{k, w, 1}$, $F_{k, 1, s}$, $F_{1, w, s}$ являются коэффициентами полинома $(x + y + 1)^m$ и вычисляются по двумерной рекуррентной формуле (4.35) .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим четырехчленный полином в следующем виде

$$\begin{aligned} (g + h + u + v)^m &= v^m \cdot \left(\frac{g}{v} + \frac{h}{v} + \frac{u}{v} + 1 \right)^m = v^m \cdot (x + y + z + 1)^m = \\ &= v^m \cdot (d_{1,1,1} + d_{2,1,1}x + d_{1,2,1}y + d_{1,1,2}z)^m = v^m \cdot D(x, y, z)^m \end{aligned}$$

откуда следуют условия:

$$d_{k, w, s} = 1 \quad (k \leq 2; w \leq 2; s \leq 2) ; \quad d_{k, w, s} = 0 \quad (k > 2; w > 2; s > 2) \quad (4.41)$$

Представим трехмерное рекуррентное уравнение возведения полинома в степень (табл.4.6) в виде нескольких сумм

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \sum_{\xi=0}^{w-1} \left(\sum_{\eta=0}^{s-1} F_{i+2, \xi+1, \eta+1} \cdot d_{k-1-i, w-\xi, s-\eta} - \right. \\ \left. - m \cdot \sum_{\eta=0}^{s-1} F_{k-1-i, w-\xi, s-\eta} \cdot d_{i+2, \xi+1, \eta+1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Согласно условиям (4.41), в суммах должны выполняться неравенства:

$$1) \quad s - \eta \leq 2 , \quad s - 2 \leq \eta ; \quad 2) \quad \eta + 1 \leq 2 , \quad \eta \leq 1 ,$$

и рекуррентное уравнение (4.42) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \sum_{\xi=0}^{w-1} \left(\sum_{\eta=s-2}^{s-1} F_{i+2, \xi+1, \eta+1} \cdot d_{k-1-i, w-\xi, s-\eta} - \right. \\ \left. - m \cdot \sum_{\eta=0}^1 F_{k-1-i, w-\xi, s-\eta} \cdot d_{i+2, \xi+1, \eta+1} \right) = 0 \end{aligned}$$

или, после преобразования сумм,

$$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \left(\sum_{\xi=0}^{w-1} F_{i+2, \xi+1, s-1} \cdot d_{k-1-i, w-\xi, 2} + \sum_{\xi=0}^{w-1} F_{i+2, \xi+1, s} \cdot d_{k-1-i, w-\xi, 1} - \right. \\ \left. - m \cdot \sum_{\xi=0}^{w-1} F_{k-1-i, w-\xi, s} \cdot d_{i+2, \xi+1, 1} - m \cdot \sum_{\xi=0}^{w-1} F_{k-1-i, w-\xi, s-1} \cdot d_{i+2, \xi+1, 2} \right) = 0 \quad (4.43)$$

Согласно условиям (4.41), в суммах должны выполняться неравенства:

- 1) для $s = 2$ $w - \xi \leq 1$, $w - 1 \leq \xi$; 2) для $s = 1$ $w - \xi \leq 2$, $w - 2 \leq \xi$;
- 3) для $s = 1$ $\xi + 1 \leq 2$, $\xi \leq 1$; 4) для $s = 2$ $\xi + 1 \leq 1$, $\xi \leq 0$,

и рекуррентное уравнение (4.43) принимает вид

$$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \left(\sum_{\xi=w-1}^{w-1} F_{i+2, \xi+1, s-1} \cdot d_{k-1-i, w-\xi, 2} + \sum_{\xi=w-2}^{w-1} F_{i+2, \xi+1, s} \cdot d_{k-1-i, w-\xi, 1} - \right. \\ \left. - m \cdot \sum_{\xi=0}^1 F_{k-1-i, w-\xi, s} \cdot d_{i+2, \xi+1, 1} - m \cdot \sum_{\xi=0}^0 F_{k-1-i, w-\xi, s-1} \cdot d_{i+2, \xi+1, 2} \right) = 0$$

Раскрывая суммы, получаем

$$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) F_{i+2, w, s-1} \cdot d_{k-1-i, 1, 2} + \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) F_{i+2, w-1, s} \cdot d_{k-1-i, 2, 1} + \\ + \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) F_{i+2, w, s} \cdot d_{k-1-i, 1, 1} - m \cdot \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) F_{k-1-i, w, s} \cdot d_{i+2, 1, 1} - \\ - m \cdot \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) F_{k-1-i, w-1, s} \cdot d_{i+2, 2, 1} - m \cdot \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) F_{k-1-i, w, s-1} \cdot d_{i+2, 1, 2} = 0$$

Согласно условиям (4.41), в суммах должны выполняться неравенства:

- 1) для $s = 2$ $k - i - 1 \leq 1$, $k - 2 \leq i$; 2) для $w = 2$ $k - i - 1 \leq 1$, $k - 2 \leq i$;
- 3) для $s, w = 1$ $k - i - 1 \leq 2$, $k - 3 \leq i$; 4) для $s, w = 1$ $i + 2 \leq 2$, $i \leq 0$;
- 5) для $w = 2$ $i + 2 \leq 1$, $i \leq -1$; 6) для $s = 2$ $i + 2 \leq 1$, $i \leq -1$,

и рекуррентное уравнение принимает вид

$$\sum_{i=k-2}^{k-2} (i+1) F_{i+2, w, s-1} \cdot d_{k-1-i, 1, 2} + \sum_{i=k-2}^{k-2} (i+1) F_{i+2, w-1, s} \cdot d_{k-1-i, 2, 1} + \\ + \sum_{i=k-3}^{k-2} (i+1) F_{i+2, w, s} \cdot d_{k-1-i, 1, 1} - m \cdot \sum_{i=0}^0 (i+1) F_{k-1-i, w, s} \cdot d_{i+2, 1, 1} = 0$$

Раскрывая суммы, находим

$$F_{k, w, s} = \frac{1}{d_{1,1,1}} \left(\frac{m - k + 2}{k - 1} F_{k-1, w, s} \cdot d_{2,1,1} - F_{k, w-1, s} \cdot d_{1,2,1} - F_{k, w, s-1} \cdot d_{1,1,2} \right) \quad (4.44)$$

С учетом (4.41) получаем рекуррентную формулу (4.40), что требовалось доказать.

Теорема 4.8. Коэффициенты пятичленного полинома (пятичлена, pentanomial) $(g + h + q + v + w)^m$ вычисляются по четырехмерной рекуррентной формуле

$$F_{k,w,s,p} = \frac{m-k+2}{k-1} F_{k-1,w,s,p} - F_{k,w-1,s,p} - F_{k,w,s-1,p} - F_{k,w,s,p-1} \quad (4.45)$$

где $k, w, s, p = 2, \dots, m+1$; $F_{k,w,s,1}$, $F_{k,w,1,p}$, $F_{k,1,s,p}$, $F_{1,w,s,p}$ являются коэффициентами функции $(x + y + z + 1)^m$ и вычисляются по трехмерной рекуррентной формуле (4.40).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим пятичленный полином в следующем виде

$$\begin{aligned} (g + h + q + v + w)^m &= w^m \left(\frac{g}{w} + \frac{h}{w} + \frac{q}{w} + \frac{v}{w} + 1 \right)^m = w^m (x + y + z + u + 1)^m = \\ &= w^m (d_{1,1,1,1} + d_{2,1,1,1}x + d_{1,2,1,1}y + d_{1,1,2,1}z + d_{1,1,1,2}u)^m = w^m \cdot D(x, y, z, u)^m \end{aligned}$$

откуда следуют условия:

$$\begin{aligned} d_{k,w,s,p} &= 1 \quad (k \leq 2; w \leq 2; s \leq 2; p \leq 2); \\ d_{k,w,s,p} &= 0 \quad (k > 2; w > 2; s > 2; p \leq 2). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Представим четырехмерное рекуррентное уравнение степени (табл.4.6) в виде нескольких сумм

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \left(\sum_{\lambda=0}^{p-1} F_{i+2, \xi+1, \eta+1, \lambda+1} \cdot d_{k-1-i, w-\xi, s-\eta, p-\lambda} - \right. \\ \left. - m \cdot \sum_{\lambda=0}^{p-1} F_{k-1-i, w-\xi, s-\eta, p-\lambda} \cdot d_{i+2, \xi+1, \eta+1, \lambda+1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Согласно условиям (4.46), в суммах должны выполняться неравенства:

$$1) \quad p - \lambda \leq 2, \quad p - 2 \leq \lambda; \quad 2) \quad \lambda + 1 \leq 2, \quad \lambda \leq 1,$$

и рекуррентное уравнение (4.47) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \left(\sum_{\lambda=p-2}^{p-1} F_{i+2, \xi+1, \eta+1, \lambda+1} \cdot d_{k-1-i, w-\xi, s-\eta, p-\lambda} - \right. \\ \left. - m \cdot \sum_{\lambda=0}^1 F_{k-1-i, w-\xi, s-\eta, p-\lambda} \cdot d_{i+2, \xi+1, \eta+1, \lambda+1} \right) = 0 \end{aligned}$$

или, после преобразования сумм,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \sum_{\xi=0}^{w-1} \left(\sum_{\eta=0}^{s-1} F_{i+2, \xi+1, \eta+1, p-1} \cdot d_{k-1-i, w-\xi, s-\eta, 2} + \right. \\ \left. + \sum_{\eta=0}^{s-1} F_{i+2, \xi+1, \eta+1, p} \cdot d_{k-1-i, w-\xi, s-\eta, 1} - m \cdot \sum_{\eta=0}^{s-1} F_{k-1-i, w-\xi, s-\eta, p} \times \right. \\ \left. \times d_{i+2, \xi+1, \eta+1, 1} - m \cdot \sum_{\eta=0}^{s-1} F_{k-1-i, w-\xi, s-\eta, p-1} \cdot d_{i+2, \xi+1, \eta+1, 2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Условия (4.46), накладываемые на индексы $d_{k,w,s,p}$, становятся конкретными:

- 1) для $p=2$ $s-\eta \leq 1$, $s-1 \leq \eta$; 2) для $p=1$ $s-\eta \leq 2$, $s-2 \leq \eta$;
 3) для $p=1$ $\eta+1 \leq 2$, $\eta \leq 1$; 4) для $p=2$ $\eta+1 \leq 1$, $\eta \leq 0$

Тогда в рекуррентном уравнении изменяются пределы сумм

$$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \sum_{\xi=0}^{w-1} \left(\sum_{\eta=s-1}^{s-1} F_{i+2, \xi+1, \eta+1, p-1} \cdot d_{k-1-i, w-\xi, s-\eta, 2} + \right. \\
+ \sum_{\eta=s-2}^{s-1} F_{i+2, \xi+1, \eta+1, p} \cdot d_{k-1-i, w-\xi, s-\eta, 1} - m \cdot \sum_{\eta=0}^1 F_{k-1-i, w-\xi, s-\eta, p} \cdot d_{i+2, \xi+1, \eta+1, 1} - \\
\left. - m \cdot \sum_{\eta=0}^0 F_{k-1-i, w-\xi, s-\eta, p-1} \cdot d_{i+2, \xi+1, \eta+1, 2} \right) = 0$$

Раскрывая суммы, получаем

$$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \left(\sum_{\xi=0}^{w-1} F_{i+2, \xi+1, s, p-1} d_{k-1-i, w-\xi, 1, 2} + \sum_{\xi=0}^{w-1} F_{i+2, \xi+1, s-1, p} d_{k-1-i, w-\xi, 2, 1} + \right. \\
+ \sum_{\xi=0}^{w-1} F_{i+2, \xi+1, s, p} \cdot d_{k-1-i, w-\xi, 1, 1} - m \cdot \sum_{\xi=0}^{w-1} F_{k-1-i, w-\xi, s, p} \cdot d_{i+2, \xi+1, 1, 1} - \\
\left. - m \sum_{\xi=0}^{w-1} F_{k-1-i, w-\xi, s-1, p} d_{i+2, \xi+1, 2, 1} - m \sum_{\xi=0}^{w-1} F_{k-1-i, w-\xi, s, p-1} d_{i+2, \xi+1, 1, 2} \right) = 0$$

Условия, накладываемые на индексы, изменяются:

- 1) для $p=2$ $w-\xi \leq 1$, $w-1 \leq \xi$; 2) для $s=2$ $w-\xi \leq 1$, $w-1 \leq \xi$;
 3) для $p, s=1$ $w-\xi \leq 2$, $w-2 \leq \xi$; 4) для $p, s=1$ $\xi+1 \leq 2$, $\xi \leq 1$;
 5) для $s=2$ $\xi+1 \leq 1$, $\xi \leq 0$; 6) для $p=2$ $\xi+1 \leq 1$, $\xi \leq 0$.

Тогда в рекуррентном уравнении надо изменить пределы сумм

$$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \left(\sum_{\xi=w-1}^{w-1} F_{i+2, \xi+1, s, p-1} \cdot d_{k-1-i, w-\xi, 1, 2} + \sum_{\xi=w-1}^{w-1} F_{i+2, \xi+1, s-1, p} \times \right. \\
\times d_{k-1-i, w-\xi, 2, 1} + \sum_{\xi=w-2}^{w-1} F_{i+2, \xi+1, s, p} d_{k-1-i, w-\xi, 1, 1} - m \sum_{\xi=0}^1 F_{k-1-i, w-\xi, s, p} d_{i+2, \xi+1, 1, 1} - \\
\left. - m \sum_{\xi=0}^0 F_{k-1-i, w-\xi, s-1, p} d_{i+2, \xi+1, 2, 1} - m \sum_{\xi=0}^0 F_{k-1-i, w-\xi, s, p-1} d_{i+2, \xi+1, 1, 2} \right) = 0$$

Раскрывая суммы, получаем

$$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) F_{i+2, w, s, p-1} \cdot d_{k-1-i, 1, 1, 2} + \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) F_{i+2, w, s-1, p} \cdot d_{k-1-i, 1, 2, 1} + \\
+ \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) F_{i+2, w-1, s, p} \cdot d_{k-1-i, 2, 1, 1} + \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) F_{i+2, w, s, p} \cdot d_{k-1-i, 1, 1, 1} -$$

$$\begin{aligned}
& -m \cdot \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) F_{k-1-i, w, s, p} \cdot d_{i+2, 1, 1, 1} - m \cdot \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) F_{k-1-i, w-1, s, p} \cdot d_{i+2, 2, 1, 1} - \\
& -m \cdot \sum_{i=0}^{k-2} F_{k-1-i, w, s-1, p} \cdot d_{i+2, 1, 2, 1} - m \cdot \sum_{i=0}^{k-2} F_{k-1-i, w, s, p-1} \cdot d_{i+2, 1, 1, 2} = 0
\end{aligned}$$

Условия, накладываемые на индексы, также изменяются:

- 1) для $p=2$ $k-1-i \leq 1$, $k-2 \leq i$; 2) для $s=2$ $k-1-i \leq 1$, $k-2 \leq i$;
- 3) для $w=2$ $k-1-i \leq 1$, $k-2 \leq i$; 4) для $p, s, w=1$ $k-1-i \leq 2$, $k-3 \leq i$;
- 5) для $p, s, w=1$ $i+2 \leq 2$, $i \leq 0$; 6) для $w=2$ $i+2 \leq 1$, $i \leq -1$;
- 7) для $s=2$ $i+2 \leq 1$, $i \leq -1$; 8) для $p=2$ $i+2 \leq 1$, $i \leq -1$.

Окончательно подставляя пределы сумм, получаем рекуррентную формулу

$$\begin{aligned}
& (k-1) F_{k, w, s, p-1} d_{1, 1, 1, 2} + (k-1) F_{k, w, s-1, p} d_{1, 1, 2, 1} + (k-1) F_{k, w-1, s, p} d_{1, 2, 1, 1} + \\
& + (k-2) F_{k-1, w, s, p} d_{2, 1, 1, 1} + (k-1) F_{k, w, s, p} d_{1, 1, 1, 1} - m \cdot F_{k-1, w, s, p} d_{2, 1, 1, 1} = 0
\end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned}
F_{k, w, s, p} = & \frac{1}{d_{1, 1, 1, 1}} \left(\frac{m-k+2}{k-1} d_{2, 1, 1, 1} \cdot F_{k-1, w, s, p} - \right. \\
& \left. - d_{1, 2, 1, 1} \cdot F_{k, w-1, s, p} - d_{1, 1, 2, 1} \cdot F_{k, w, s-1, p} - d_{1, 1, 1, 2} \cdot F_{k, w, s, p-1} \right)
\end{aligned} \quad (4.48)$$

С учетом условий (4.46) получаем рекуррентную формулу (4.48), что требовалось доказать.

Теорема 4.9. Коэффициенты многочлена (multinomial) вида $(g+h+q+\dots+u+v)^m$ вычисляются по многомерной рекуррентной формуле

$$\begin{aligned}
F_{k, w, s, \dots, p, t} = & \frac{m-k+2}{k-1} F_{k-1, w, s, \dots, p, t} - F_{k, w-1, s, \dots, p, t} - \\
& - F_{k, w, s-1, \dots, p, t} - \dots - F_{k, w, s, \dots, p-1, t} - F_{k, w, s, \dots, p, t-1},
\end{aligned} \quad (4.49)$$

где $k, w, s, \dots, p, t = 2, \dots, m+1$; $F_{k, w, s, \dots, p, 1}$, $F_{k, w, s, \dots, 1, t}$, $F_{k, w, 1, \dots, p, t}$, ..., $F_{1, 1, 1, \dots, p, t}$ являются коэффициентами функции размерности на единицу меньше $(x+y+\dots+z+1)^m$ и вычисляются по рекуррентной формуле этого многочлена.

Доказательство. Представим многочлен в следующем виде

$$\begin{aligned}
(g+h+\dots+u+v)^m &= v^m \cdot \left(\frac{g}{v} + \frac{h}{v} + \dots + \frac{u}{v} + 1 \right)^m = v^m \cdot (x+y+\dots+z+1)^m = \\
&= v^m \cdot (d_{1, 1, 1, \dots, 1} + d_{2, 1, 1, \dots, 1} x + d_{1, 2, 1, \dots, 1} y + \dots + d_{1, 1, \dots, 1, 2} z)^m = v^m \cdot (D(x, y, \dots, z))^m
\end{aligned}$$

В дальнейшем доказательство аналогично доказательству теорем 4.7, 4.8, и формула (4.49) следует по аналогии из рекуррентных формул (4.40), (4.45)

Пример 4.16.

Коэффициенты бинома Ньютона, вычисленные для различных значений степени m , формируют треугольник Паскаля (табл.4.10).

Рассмотрим трехчленный полином (трехчлен) для различных степеней

$$(g + u + v)^m = v^m \cdot \left(\frac{g}{v} + \frac{u}{v} + 1\right)^m = v^m \cdot (x + y + 1)^m.$$

Значения коэффициентов трехчлена для некоторых значений m , приведенные в табл.4.11– 4.16, показывают их связь с треугольником Паскаля (табл.4.10).

Таблица 4.10

m	Коэффициенты бинома										
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Таблица 4.11 ($m = 3$)

Степени	x^0	x^1	x^2	x^3
y^0	1	3	3	1
y^1	3	6	3	
y^2	3	3		
y^3	1			

Таблица 4.12 ($m = 4$)

Степени	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4
y^0	1	4	6	4	1
y^1	4	12	12	4	
y^2	6	12	6		
y^3	4	4			
y^4	1				

Таблица 4.13 ($m = 5$)

Степени	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5
y^0	1	5	10	10	5	1
y^1	5	20	30	20	5	
y^2	10	30	30	10		
y^3	10	20	10			
y^4	5	5				
y^5	1					

Таблица 4.14 ($m = 6$)

Степени	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
y^0	1	6	15	20	15	6	1
y^1	6	30	60	60	30	6	
y^2	15	60	90	60	15		
y^3	20	60	60	20			
y^4	15	30	15				
y^5	6	6					
y^6	1						

Таблица 4.15 ($m = 8$)

Степени	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
y^0	1	8	28	56	70	56	28	8	1
y^1	8	56	168	280	280	168	56	8	
y^2	28	168	420	560	420	168	28		
y^3	56	280	560	560	280	56			
y^4	70	280	420	280	70				
y^5	56	168	168	56					
y^6	28	56	28						
y^7	8	8							
y^8	1								

Таблица 4.16 ($m = 10$)

Степени	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
y^0	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
y^1	10	90	360	840	1260	1260	840	360	90	10	
y^2	45	360	1260	2520	3150	2520	1260	360	45		
y^3	120	840	2520	4200	4200	2520	840	120			
y^4	210	1260	3150	4200	3150	1260	210				
y^5	252	1260	2520	2520	1260	252					
y^6	210	840	1260	840	210						
y^7	120	360	360	120							
y^8	45	90	45								
y^9	10	10									
y^{10}	1										

Табл. 4.11 – 4.16 показывают, что коэффициенты трехчлена образуют треугольники с ориентацией, отличной от треугольника Паскаля (табл.4.10), и стороны треугольника трехчлена для выбранного m формируются соответствующей строкой треугольника Паскаля с номером m .

Запишем аналитическое выражение трехчлена для $m = 6$, используя рекуррентную формулу (4.35)

$$\begin{aligned}
 (g + u + v)^6 = & v^6 + 6gv^5 + 15g^2v^4 + 20g^3v^3 + 15g^4v^2 + 6g^5v + g^6 + \\
 & + 6uv^5 + 15u^2v^4 + 20u^3v^3 + 15u^4v^2 + 6u^5v + u^6 + \\
 & + 6gu^5 + 15g^2u^4 + 20g^3u^3 + 15g^4u^2 + 6g^5u + \\
 & + g(30uv^4 + 60u^2v^3 + 60u^3v^2 + 30u^4v) + \\
 & + g^2(60uv^3 + 90u^2v^2 + 60u^3v) + g^3(60uv^2 + 60u^2v) + g^4(uv)
 \end{aligned}$$

Пример 4.17.

Найдем коэффициенты разложения четырехчленного полинома (четырёхчлена)

$$(g + h + u + v)^m = v^m \cdot \left(\frac{g}{v} + \frac{h}{v} + \frac{u}{v} + 1\right)^m = v^m \cdot (x + y + z + 1)^m.$$

Для $m = 4$ рекуррентная формула (4.40) дает результат

$$\begin{aligned}
(x+y+z+1)^4 = & 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 + 4y + 12xy + 12x^2y + 4x^3y + \\
& + 6y^2 + 12xy^2 + 6x^2y^2 + 4y^3 + 4xy^3 + y^4 + \\
& + (4 + 12x + 12x^2 + 4x^3 + 12y + 24xy + 12x^2y + 12y^2 + 12xy^2 + 4y^3)z + \\
& + (6 + 12x + 6x^2 + 12y + 12xy + 6y^2)z^2 + (4 + 4x + 4y)z^3 + z^4.
\end{aligned}$$

После постановок $x = \frac{g}{v}$; $y = \frac{h}{v}$; $z = \frac{u}{v}$ получаем

$$\begin{aligned}
(g+h+u+v)^4 = & 4gh^3 + 6g^2h^2 + 4g^3h + 4gu^3 + 6g^2u^2 + 4g^3u + \\
& + 4gv^3 + 6g^2v^2 + 4g^3v + 4hu^3 + 6h^2u^2 + 4h^3u + 4hv^3 + 6h^2v^2 + 4h^3v + \\
& + 4uv^3 + 6u^2v^2 + 4u^3v + g^4 + h^4 + u^4 + v^4 + \\
& + g(12hu^2 + 12h^2u + 12hv^2 + 12h^2v + 12uv^2 + 12u^2v + 12huv) + \\
& + g^2(12hu + 12hv + 12uv) + h(12uv^2 + 12u^2v) + h^2(12uv)
\end{aligned}$$

В четырехчленной формуле коэффициенты разложения полинома образуют трехмерную матрицу – пространственную фигуру, три стороны которой лежат в координатных плоскостях. Эту фигуру можно получить из куба, построенного в начале координат в положительном октанте декартовой системы. Для этого на верхней грани куба надо провести диагональ, не пересекающую координатные оси, и отсечь ненужную нижнюю часть куба наклонной плоскостью, проходящей через построенную диагональ и начало координат. Полученная фигура в верхней части куба образована четырьмя треугольниками, два из которых лежат в координатных плоскостях, третий треугольник лежит на верхней грани куба параллельно координатной плоскости, а четвертый треугольник – наклонный. Главное, что все четыре числовых треугольника пространственной фигуры образованы одним плоским двумерным треугольником, вычисленным для заданного m (табл.4.11–4.16). Так, в последнем примере все стороны фигуры для $m = 4$ образованы одним треугольником (табл.4.12) в разных пространственных ориентациях.

Геометрия алгебраического многочлена :

Для заданного m соответствующая строка треугольника Паскаля образует три стороны плоского треугольника трехчленного многочлена. Плоские треугольники образуют четыре грани трехмерной фигуры четырехчленного многочлена. Трехмерные фигуры образуют грани четырехмерной фигуры пятичленного многочлена и т. д.

Рассмотрим алгебраическую задачу возведения многочлена в степень со смещением переменных. В многочлене вида $(x+y+z+\dots+u+v)^m$ переменные $x, y, z, \dots, u, v$ могут получать приращения $x+x_0, y+y_0, z+z_0, \dots, u+u_0, v+v_0$, изменяющие численные значения коэффициентов разложения многочлена по степеням переменных.

Необходимо решить более общую задачу вида

$(x + x_0 + y + y_0 + z + z_0 + \dots + u + u_0 + v + v_0)^m = L_1 x^m + L_2 x^{m-1} y + \dots + L_{v-1} u v^{m-1} + L_v v^m$
 вычисляя коэффициенты разложения многочлена в произвольной точке
 вещественного пространства $x_0, y_0, z_0, \dots, u_0, v_0$.

Лемма 4.6. Коэффициенты бинома вида $(x + q_0)^m$ вычисляются по
 одномерной рекуррентной формуле

$$F_k = \frac{1}{q_0} \cdot \frac{m - k + 2}{k - 1} F_{k-1}, \quad (4.50)$$

где $k = 2, \dots, m+1$; $F_1 = q_0^m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о совпадает с доказательством леммы 4.5, в формуле
 которой (4.34) вместо $d_1 = 1$ необходимо подставить $d_1 = q_0$.

Теорема 4.10. Коэффициенты двучлена со смещением (смещенного бинома)

$$F(x + x_0, y + y_0) = (x + x_0 + y + y_0)^m$$

вычисляются по двумерной рекуррентной формуле

$$F_{k,w} = \frac{1}{q_0} \left(\frac{m - k + 2}{k - 1} F_{k-1,w} - F_{k,w-1} \right) = \frac{1}{x_0 + y_0} \left(\frac{m - k + 2}{k - 1} F_{k-1,w} - F_{k,w-1} \right) \quad (4.51)$$

где $k, w = 2, \dots, m + 1$; $F_{1,1} = (x_0 + y_0)^m$; $F_{1,w}$, $F_{k,1}$ являются
 коэффициентами бинома $(x + x_0 + y_0)^m$ и вычисляются по одномерной
 рекуррентной формуле (4.50) для значения $q_0 = x_0 + y_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о совпадает с доказательством теоремы 4.6, в
 формуле которой (4.39) вместо $d_{1,1} = 1$ необходимо поставить $d_{1,1} = x_0 + y_0$.

Теорема 4.11.. Коэффициенты смещенного трехчлена

$$F(x + x_0, y + y_0, z + z_0) = (x + x_0 + y + y_0 + z + z_0)^m$$

вычисляются по трехмерной рекуррентной формуле

$$F_{k,w,s} = \frac{1}{x_0 + y_0 + z_0} \cdot \left(\frac{m - k + 2}{k - 1} F_{k-1,w,s} - F_{k,w-1,s} - F_{k,w,s-1} \right) \quad (4.52)$$

где $k, w, s = 2, \dots, m + 1$; $F_{1,1,1} = (x_0 + y_0 + z_0)^m$; $F_{k,w,1}$, $F_{k,1,s}$, $F_{1,w,s}$
 являются коэффициентами смещенного бинома $(x + y + x_0 + y_0 + z_0)^m$ и
 вычисляются по двумерной рекуррентной формуле (4.51) для значения
 $q_0 = x_0 + y_0 + z_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о совпадает с доказательством теоремы 4.7, в
 формуле которой (4.44) вместо $d_{1,1,1} = 1$ необходимо поставить
 $d_{1,1,1} = x_0 + y_0 + z_0$.

Теорема 4.12. Коэффициенты многочлена со смещением вида

$$F(x + x_0, y + y_0, z + z_0, \dots, u + u_0, v + v_0) = (x + x_0 + y + y_0 + z + z_0 + \dots + u + u_0 + v + v_0)^m$$

вычисляются по многомерной рекуррентной формуле

$$F_{k,w,s,\dots,p,t} = \frac{1}{x_0 + y_0 + z_0 + \dots + u_0 + v_0} \cdot \left(\frac{m-k+2}{k-1} \cdot F_{k-1,w,s,\dots,p,t} - \right. \\ \left. - F_{k,w-1,s,\dots,p,t} - F_{k,w,s-1,\dots,p,t} - \dots - F_{k,w,s,\dots,p-1,t} - F_{k,w,s,\dots,p,t-1} \right) \quad (4.53)$$

где $k, w, s, \dots, p, t = 2, \dots, m+1$; $F_{k,w,s,\dots,p,1}$, $F_{k,w,s,\dots,1,t}$, $F_{k,w,1,\dots,p,t}$, ..., $F_{1,1,1,\dots,p,t}$ являются коэффициентами многочлена с размерностью на единицу меньше $(x + y + z + \dots + u + x_0 + y_0 + z_0 + \dots + u_0 + v_0)^m$ и вычисляются по рекуррентной формуле этого смещенного многочлена.

Доказательство аналогично доказательствам теорем 4.10, 4.11.

Пример 4.18.

Определим коэффициенты разложения трехчлена $(x + y + z)^m$ в точке $x_0 = -1$; $y_0 = -1$; $z_0 = 1$. Изменение точки разложения означает, что переменные трехчлена получают приращение $x + x_0$, $y + y_0$, $z + z_0$, и необходимо определить коэффициенты смещенного трехчлена $(x + y + z + x_0 + y_0 + z_0)^m$. Для смещенного трехчлена при $m = 4$ по формуле (4.34) получаем

$$(x - 1 + y - 1 + z + 1)^4 = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 - 4y + 12xy - 12x^2y + 4x^3y + \\ + 6y^2 - 12xy^2 + 6x^2y^2 - 4y^3 + 4xy^3 + y^4 + \\ + (-4 + 12x - 12x^2 + 4x^3 + 12y - 24xy + 12x^2y - 12y^2 + 12xy^2 + 4y^3)z + \\ + (6 - 12x + 6x^2 - 12y + 12xy + 6y^2)z^2 + (-4 + 4x + 4y)z^3 + z^4$$

Изменим точку расчета коэффициентов разложения многочлена, выбрав $x_0 = -1$; $y_0 = -1$; $z_0 = -1$. Для одномерного бинома $(x + q_0)^4$ находим $q_0 = x_0 + y_0 + z_0 = -3$ и вычисляем значения коэффициентов по формуле (4.50)

$$f(x) = 81 - 108x + 54x^2 - 12x^3 + x^4.$$

Результаты расчета коэффициентов бинома $(x + y + x_0 + y_0 + z_0)^4$ по формуле (4.51) со значением $q_0 = x_0 + y_0 + z_0$ представлен в виде треугольника (табл.4.17).

Коэффициенты одномерного бинома образуют две стороны треугольника (табл.4.17), а третью сторону образует строка (табл.4.10, $m = 4$) треугольника Паскаля, как в несмещенном биноме (табл. 4.13).

Таблица 4.17

Степени	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4
y^0	81	-108	54	-12	1
y^1	-108	108	-36	4	
y^2	54	-36	6		
y^3	-12	4			
y^4	1				

Коэффициенты смещенного трехчлена $(x + y + z + x_0 + y_0 + z_0)^4$, вычисленные

по формуле (4.52), образуют пространственную фигуру, подобную описанной ранее фигуре несмещенного трехчлена. Три стороны фигуры образуют треугольники (табл.4.17), а четвертая наклонная сторона образуется треугольником несмещенного трехчлена (табл.4.12).

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} (x-1+y-1+z-1)^4 = & 81 - 108x + 54x^2 - 12x^3 + x^4 - 108y + 108xy - \\ & - 36x^2y + 4x^3y + 54y^2 - 36xy^2 + 6x^2y^2 - 12y^3 + 4xy^3 + y^4 + \\ & + (-108 + 108x - 36x^2 + 4x^3 + 108y - 72xy + 12x^2y - 36y^2 + 12x^2y^2 + 4y^3)z + \\ & + (54 - 36x + 6x^2 - 36y + 12xy + 6y^2)z^2 + (-12 + 4x + 4y)z^3 + z^4 \end{aligned}$$

Пример 4.19.

Определим коэффициенты разложения трехчлена $(x+y+z)^m$ в точке $x_0 = -1$; $y_0 = -1$; $z_0 = -1$ для $m = 5$. Изменение точки разложения означает, что переменные трехчлена получают приращение $x + x_0$, $y + y_0$, $z + z_0$, и необходимо определить коэффициенты смещенного трехчлена $(x+y+z+x_0+y_0+z_0)^m$.

Расчет начинаем с одномерного бинома $(x+q_0)^5$, в котором $q_0 = x_0 + y_0 + z_0 = -3$, и вычисляем значения коэффициентов по формуле (4.50)

$$f(x) = -243 + 405x - 270x^2 + 90x^3 - 15x^4 + x^5.$$

Результаты расчета коэффициентов двумерного бинома $(x+y+x_0+y_0+z_0)^5$ по формуле (4.51) со значением $q_0 = x_0 + y_0 + z_0$ представлен в виде треугольника (табл. 4.18).

Коэффициенты одномерного бинома $(x+q_0)^5$ образуют две стороны треугольника (табл.4.18), а третью сторону образует строка (табл. 4.10, $m = 5$) треугольника Паскаля, как в несмещенном двумерном биноме (табл. 4.13).

Таблица 4.18

Степени	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5
y^0	-243	405	-270	90	-15	1
y^1	405	-540	270	-60	5	
y^2	-270	270	-90	10		
y^3	90	-60	10			
y^4	-15	5				
y^5	1					

Расчет коэффициентов смещенного трехчлена по формуле (4.52) дает окончательный результат

$$\begin{aligned} (x-1+y-1+z-1)^5 = & -243 + 405x - 270x^2 + 90x^3 - 15x^4 + x^5 + \\ & + 405y - 540xy + 270x^2y - 60x^3y + 5x^4y - 270y^2 + 270xy^2 - \\ & - 90x^2y^2 + 10x^3y^2 + 90y^3 - 60xy^3 + 10x^2y^3 - 15y^4 + 5xy^4 + y^5 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(405 - 540x + 270x^2 - 60x^3 + 5x^4 - 540y + 540xy - 180x^2y + \\
& + 20x^3y + 270y^2 - 180xy^2 + 30x^2y^2 - 60y^3 + 20xy^3 + 5y^4)z + \\
& + (-270 + 270x - 90x^2 + 10x^3 + 270y - 180xy + 30x^2y - 90y^2 + 30xy^2 + 10y^3)z^2 + \\
& + (90 - 60x + 10x^2 - 60y + 20xy + 10y^2)z^3 + (-15 + 5x + 5y)z^4 + z^5
\end{aligned}$$

Коэффициенты смещенного трехчлена $(x + y + z + x_0 + y_0 + z_0)^5$ образуют пространственную фигуру, подобную описанной ранее фигуре несмещенного трехчлена. Три стороны фигуры образуют треугольники (табл.4.18), а четвертая наклонная сторона образуется треугольником несмещенного трехчлена (табл.4.13).

Геометрия алгебраического смещенного многочлена :

В плоском треугольнике смещенного двучленного многочлена две стороны образует одномерный бином и третью наклонную сторону образует строка треугольника Паскаля для заданного t . В трехмерной пространственной фигуре смещенного трехчленного многочлена три стороны образуют треугольники смещенного двучлена, а четвертую наклонную сторону образует треугольник несмещенного двучлена и т.д.

Введем в матричную алгебру [28 – 35] новую операцию численного обращения пространственных матриц – *реверсирование матриц*. Реверсирование, в отличие от обычного обращения матрицы – инвертирования [28–35], связано с производными и отражает, в некотором смысле, дифференциальные свойства. Обозначим для матрицы R ее численную реверсивную матрицу $R^{[-1]}$. Реверсирование численной матрицы выполняется с помощью рекуррентных формул (табл.4.19), которые являются частными случаями многомерных рекуррентных формул, приведенных в табл.4.6.

Лемма 4.7. Реверсивной единичной матрицей (*реверсивной единицей*) будем считать пространственную матрицу

$$E_{i,j,r,\dots} = \begin{cases} 1, & i = j = r = \dots \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases},$$

имеющую следующее свойство:

$$U \odot E = E \odot U = U,$$

где $U \odot E$; $E \odot U$ – многомерные рекуррентные формулы (табл.4.19).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем из определения реверсивной единичной матрицы

$$E_{1,1,\dots,1} = 1; E_{k,1,\dots,1} = E_{1,k,1,\dots,1} = E_{1,1,k,1,\dots,1} = \dots = E_{1,\dots,1,k} = E_{1,k,w,s,\dots,p} = \dots = 0$$

Таблица 4.19

Функция	Начал. значения.	Рекуррентные формулы и уравнения
$R^{[-1]}$ $n1 \times n2$	$R_{1,1}^{[-1]} = \frac{1}{R_{1,1}}$	$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \sum_{\xi=0}^{w-1} (R_{i+2, \xi+1}^{[-1]} R_{k-1-i, w-\xi} + R_{i+2, \xi+1} R_{k-1-i, w-\xi}^{[-1]}) = 0$
$R^{[-1]}$ $n1 \times n2 \times n3$	$R_{1,1,1}^{[-1]} = \frac{1}{R_{1,1,1}}$	$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} (R_{i+2, \xi+1, \eta+1}^{[-1]} \cdot R_{k-1-i, w-\xi, s-\eta} + R_{i+2, \xi+1, \eta+1} \cdot R_{k-1-i, w-\xi, s-\eta}^{[-1]}) = 0$
$R^{[-1]}$ $n1 \times n2 \times$ $\times n3 \times n4$	$R_{1,1,1,1}^{[-1]} = \frac{1}{R_{1,1,1,1}}$	$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \sum_{\lambda=0}^{p-1} (R_{i+2, \xi+1, \eta+1, \lambda+1}^{[-1]} R_{k-1-i, w-\xi, s-\eta, p-\lambda} + R_{i+2, \xi+1, \eta+1, \lambda+1} \cdot R_{k-1-i, w-\xi, s-\eta, p-\lambda}^{[-1]}) = 0$
$F = U \odot V$ $n1 \times n2$		$F_{k,w} = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} U_{i+1, \xi+1} \cdot V_{k-i, w-\xi}$
$F = U \odot V$ $n1 \times n2 \times n3$		$F_{k,w,s} = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} U_{i+1, \xi+1, \eta+1} \cdot V_{k-i, w-\xi, s-\eta}$
$F = U \odot V$ $n1 \times n2 \times$ $\times n3 \times n4$		$F_{k,w,s,p} = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \sum_{\lambda=0}^{p-1} U_{i+1, \xi+1, \eta+1, \lambda+1} \times$ $\times V_{k-i, w-\xi, s-\eta, p-\lambda}$
$F = U \odot V$ $n1 \times n2 \times \dots \times nv$		$F_{k,w,s,\dots,p} = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \dots \sum_{\lambda=0}^{p-1} U_{i+1, \xi+1, \eta+1, \dots, \lambda+1} \times$ $\times V_{k-i, w-\xi, s-\eta, \dots, p-\lambda}$
$F = U \otimes V$ $n1 \times n2 \times n3$		$U_{k,w} - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} F_{i+1, \xi+1} \cdot V_{k-i, w-\xi} = 0$
$F = U \otimes V$ $n1 \times n2 \times n3$		$U_{k,w,s} - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} F_{i+1, \xi+1, \eta+1} \cdot V_{k-i, w-\xi, s-\eta} = 0$
$F = U \otimes V$ $n1 \times n2 \times n3 \times n4$		$U_{k,w,s,p} - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \sum_{\lambda=0}^{p-1} F_{i+1, \xi+1, \eta+1, \lambda+1} \times$ $\times V_{k-i, w-\xi, s-\eta, p-\lambda} = 0$
$F = U \otimes V$ $n1 \times n2 \times \dots \times nv$		$U_{k,w,s,\dots,p} - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \dots \sum_{\lambda=0}^{p-1} F_{i+1, \xi+1, \eta+1, \dots, \lambda+1} \times$ $\times V_{k-i, w-\xi, s-\eta, \dots, p-\lambda} = 0$

и выполним действия в многомерных формулах (табл.4.19) $F = U \odot E$ и $F = E \odot U$

$$F_{i,j,r,\dots,l} = U_{1,1,1,\dots,1} E_{i,j,r,\dots,l} + U_{1,1,1,\dots,2} E_{i,j,r,\dots,l-1} + \dots + U_{i,j,r,\dots,l} E_{1,1,1,\dots,1} = U_{i,j,r,\dots,l};$$

$$F_{i,j,r,\dots,l} = E_{1,1,1,\dots,1} U_{i,j,r,\dots,l} + E_{1,1,1,\dots,2} U_{i,j,r,\dots,l-1} + \dots + E_{i,j,r,\dots,l} U_{1,1,1,\dots,1} = U_{i,j,r,\dots,l}$$

Изменяя индексы пространственной матрицы $i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, w$; $r = 1, 2, \dots, s$; $l = 1, 2, \dots, p$, получаем в двух формулах одинаковый результат – $F = U$, что требовалось доказать.

Теорема 4.13. Пространственные матрицы R и $R^{[-1]}$ являются взаимно реверсивными, если

$$R \odot R^{[-1]} = R^{[-1]} \odot R = E, \quad (4.54)$$

и реверсивную матрицу $R^{[-1]}$ можно найти непосредственно из формулы (4.54)

$$R^{[-1]} = E \otimes R$$

где E – реверсивная единичная пространственная матрица; $U \odot V$; $U \otimes V$ – многомерные рекуррентные формулы (табл.4.19).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выражение (4.54) для двумерной реверсивной матрицы $R^{[-1]}$ можно получить непосредственно из двумерных формул для $R^{[-1]}$ и $R^{[-1]} \odot R$ (табл.4.19). Запишем двумерные формулы для расчета элементов реверсивной матрицы $R^{[-1]}$:

$$R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{1,1} = 1; R_{1,1} \cdot R_{2,1}^{[-1]} = -R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{2,1}; R_{1,1} \cdot R_{1,2}^{[-1]} = -R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{1,2};$$

$$R_{3,1}^{[-1]} \cdot R_{1,1} = -R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{3,1} - R_{2,1}^{[-1]} \cdot R_{2,1}; R_{1,1} \cdot R_{1,3}^{[-1]} = -R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{1,3} - R_{1,2}^{[-1]} \cdot R_{1,2};$$

$$R_{4,1}^{[-1]} \cdot R_{1,1} = -R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{4,1} - R_{2,1}^{[-1]} \cdot R_{3,1} - R_{3,1}^{[-1]} \cdot R_{2,1};$$

$$R_{1,1} \cdot R_{1,4}^{[-1]} = -R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{1,4} - R_{1,2}^{[-1]} \cdot R_{1,3} - R_{1,3}^{[-1]} \cdot R_{1,2};$$

$$R_{2,2}^{[-1]} \cdot R_{1,1} = -R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{2,2} - R_{2,1}^{[-1]} \cdot R_{1,2} - R_{1,2}^{[-1]} \cdot R_{2,1};$$

$$R_{2,3}^{[-1]} \cdot R_{1,1} = -R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{2,3} - R_{2,1}^{[-1]} \cdot R_{1,3} - R_{1,3}^{[-1]} \cdot R_{2,1} - R_{2,2}^{[-1]} \cdot R_{1,2} - R_{1,2}^{[-1]} \cdot R_{2,2};$$

$$R_{3,2}^{[-1]} \cdot R_{1,1} = -R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{3,2} - R_{1,2}^{[-1]} \cdot R_{3,1} - R_{3,1}^{[-1]} \cdot R_{1,2} - R_{2,2}^{[-1]} \cdot R_{2,1} - R_{2,1}^{[-1]} \cdot R_{2,2};$$

$$R_{3,3}^{[-1]} \cdot R_{1,1} = -R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{3,3} - R_{2,1}^{[-1]} \cdot R_{2,3} - R_{1,2}^{[-1]} \cdot R_{3,2} - R_{3,1}^{[-1]} \cdot R_{1,3} - R_{1,3}^{[-1]} \cdot R_{3,1} - \\ - R_{2,2}^{[-1]} \cdot R_{2,2} - R_{2,3}^{[-1]} \cdot R_{2,1} - R_{3,2}^{[-1]} \cdot R_{1,2};$$

⋮

Запишем элементы двумерной матрицы $F = R^{[-1]} \odot R$ (табл.4.19) и подставим в них найденные элементы матрицы $R^{[-1]}$ (подставленные слагаемые записаны в круглых скобках)

$$F_{1,1} = R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{1,1} = 1;$$

$$F_{2,1} = R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{2,1} + (R_{2,1}^{[-1]} \cdot R_{1,1}) = R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{2,1} + (-R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{2,1}) = 0;$$

$$F_{1,2} = R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{1,2} + (R_{1,2}^{[-1]} \cdot R_{1,1}) = R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{1,2} + (-R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{1,2}) = 0;$$

$$F_{3,1} = R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{3,1} + R_{2,1}^{[-1]} \cdot R_{2,1} + (R_{3,1}^{[-1]} \cdot R_{1,1}) = 0;$$

$$\begin{aligned}
F_{1,3} &= R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{1,3} + R_{1,2}^{[-1]} \cdot R_{1,2} + (R_{1,3}^{[-1]} \cdot R_{1,1}) = 0; \\
F_{4,1} &= R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{4,1} + R_{2,1}^{[-1]} \cdot R_{3,1} + R_{3,1}^{[-1]} \cdot R_{2,1} + (R_{4,1}^{[-1]} \cdot R_{1,1}) = 0; \\
F_{1,4} &= R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{1,4} + R_{1,2}^{[-1]} \cdot R_{1,3} + R_{1,3}^{[-1]} \cdot R_{1,2} + (R_{1,4}^{[-1]} \cdot R_{1,1}) = 0; \\
F_{2,2} &= R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{2,2} + R_{1,2}^{[-1]} \cdot R_{2,1} + R_{2,1}^{[-1]} \cdot R_{1,2} + (R_{2,2}^{[-1]} \cdot R_{1,1}) = 0; \\
F_{2,3} &= R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{2,3} + R_{2,1}^{[-1]} \cdot R_{1,3} + R_{1,3}^{[-1]} \cdot R_{2,1} + R_{1,2}^{[-1]} \cdot R_{2,2} + R_{2,2}^{[-1]} \cdot R_{1,2} + (R_{2,3}^{[-1]} \cdot R_{1,1}) = 0; \\
F_{3,2} &= R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{3,2} + R_{1,2}^{[-1]} \cdot R_{3,1} + R_{3,1}^{[-1]} \cdot R_{1,2} + R_{2,1}^{[-1]} \cdot R_{2,2} + R_{2,2}^{[-1]} \cdot R_{2,1} + (R_{3,2}^{[-1]} \cdot R_{1,1}) = 0; \\
F_{3,3} &= R_{1,1}^{[-1]} \cdot R_{3,3} + R_{1,2}^{[-1]} \cdot R_{3,2} + R_{3,2}^{[-1]} \cdot R_{1,2} + R_{1,3}^{[-1]} \cdot R_{3,1} + R_{3,1}^{[-1]} \cdot R_{1,3} + R_{2,2}^{[-1]} \cdot R_{2,2} + \\
&\quad + R_{2,1}^{[-1]} \cdot R_{2,3} + R_{2,3}^{[-1]} \cdot R_{2,1} + (R_{3,3}^{[-1]} \cdot R_{1,1}) = 0; \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Отсюда следует для двумерных матриц соотношение $F = R^{[-1]} \odot R = E$, и из симметрии двумерной формулы $F = R \odot R^{[-1]} = E$.

Найдем элементы реверсивной трехмерной матрицы $R^{[-1]}$ из трехмерного уравнения (табл.4.19), учитывая, что элементы матрицы

$$R_{2,1,1}^{[-1]}, R_{3,1,1}^{[-1]}, R_{1,3,1}^{[-1]}, \dots, R_{2,2,1}^{[-1]}, R_{2,1,2}^{[-1]}, \dots, R_{2,3,1}^{[-1]}, R_{3,2,1}^{[-1]}, \dots, R_{3,3,1}^{[-1]}, R_{3,1,3}^{[-1]}, \dots$$

относятся к рассмотренной двумерной матрице $R^{[-1]}$.

$$\begin{aligned}
R_{2,2,2}^{[-1]} \cdot R_{1,1,1} &= -R_{1,1,1}^{[-1]} \cdot R_{2,2,2} - R_{2,1,1}^{[-1]} \cdot R_{1,2,2} - R_{2,2,1}^{[-1]} \cdot R_{1,1,2} - R_{2,1,2}^{[-1]} \cdot R_{1,2,1} - R_{1,2,2}^{[-1]} \cdot R_{2,1,1} - \\
&\quad - R_{1,1,2}^{[-1]} \cdot R_{2,2,1} - R_{1,2,1}^{[-1]} \cdot R_{2,1,2}; \\
R_{2,2,3}^{[-1]} \cdot R_{1,1,1} &= -R_{1,1,1}^{[-1]} \cdot R_{2,2,3} - R_{1,1,2}^{[-1]} \cdot R_{2,2,2} - R_{1,1,3}^{[-1]} \cdot R_{2,2,1} - R_{1,2,1}^{[-1]} \cdot R_{2,1,3} - R_{1,2,2}^{[-1]} \cdot R_{2,1,2} - \\
&\quad - R_{1,2,3}^{[-1]} \cdot R_{2,1,1} - R_{2,1,1}^{[-1]} \cdot R_{1,2,3} - R_{2,1,2}^{[-1]} \cdot R_{1,2,2} - R_{2,1,3}^{[-1]} \cdot R_{1,2,1} - R_{2,2,1}^{[-1]} \cdot R_{1,1,3} - R_{2,2,2}^{[-1]} \cdot R_{1,1,2}; \\
R_{2,3,2}^{[-1]} \cdot R_{1,1,1} &= -R_{1,1,1}^{[-1]} \cdot R_{2,3,2} - R_{1,2,1}^{[-1]} \cdot R_{2,2,2} - R_{1,3,1}^{[-1]} \cdot R_{2,1,2} - R_{1,1,2}^{[-1]} \cdot R_{2,3,1} - R_{1,2,2}^{[-1]} \cdot R_{2,2,1} - \\
&\quad - R_{1,3,2}^{[-1]} \cdot R_{2,1,1} - R_{2,1,1}^{[-1]} \cdot R_{1,3,2} - R_{2,2,1}^{[-1]} \cdot R_{1,2,2} - R_{2,3,1}^{[-1]} \cdot R_{1,1,2} - R_{2,1,2}^{[-1]} \cdot R_{1,3,1} - R_{2,2,2}^{[-1]} \cdot R_{1,2,1}; \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Подставим эти слагаемые в соответствующие элементы трехмерной матрицы $F = R^{[-1]} \odot R$ (табл.4.16) (подставленные слагаемые записаны в круглых скобках)

$$\begin{aligned}
F_{2,2,2} &= R_{1,1,1}^{[-1]} \cdot R_{2,2,2} + R_{2,1,1}^{[-1]} \cdot R_{1,2,2} + R_{2,2,1}^{[-1]} \cdot R_{1,1,2} + R_{2,1,2}^{[-1]} \cdot R_{1,2,1} + R_{1,2,2}^{[-1]} \cdot R_{2,1,1} + \\
&\quad + R_{1,1,2}^{[-1]} \cdot R_{2,2,1} + R_{1,2,1}^{[-1]} \cdot R_{2,1,2} + (R_{2,2,2}^{[-1]} \cdot R_{1,1,1}) = 0; \\
F_{2,2,3} &= R_{1,1,1}^{[-1]} \cdot R_{2,2,3} + R_{1,1,2}^{[-1]} \cdot R_{2,2,2} + R_{1,1,3}^{[-1]} \cdot R_{2,2,1} + R_{1,2,1}^{[-1]} \cdot R_{2,1,3} + R_{1,2,2}^{[-1]} \cdot R_{2,1,2} + R_{2,2,1}^{[-1]} \cdot R_{1,1,3} + \\
&\quad + R_{1,2,3}^{[-1]} \cdot R_{2,1,1} + R_{2,1,1}^{[-1]} \cdot R_{1,2,3} + R_{2,1,2}^{[-1]} \cdot R_{1,2,2} + R_{2,1,3}^{[-1]} \cdot R_{1,2,1} + R_{2,2,2}^{[-1]} \cdot R_{1,1,2} + (R_{2,2,3}^{[-1]} \cdot R_{1,1,1}) = 0; \\
F_{2,3,2} &= R_{1,1,1}^{[-1]} \cdot R_{2,3,2} + R_{1,2,1}^{[-1]} \cdot R_{2,2,2} + R_{1,3,1}^{[-1]} \cdot R_{2,1,2} + R_{1,1,2}^{[-1]} \cdot R_{2,3,1} + R_{1,2,2}^{[-1]} \cdot R_{2,2,1} + \\
&\quad + R_{1,3,2}^{[-1]} \cdot R_{2,1,1} + R_{2,1,1}^{[-1]} \cdot R_{1,3,2} + R_{2,2,1}^{[-1]} \cdot R_{1,2,2} + R_{2,3,1}^{[-1]} \cdot R_{1,1,2} + R_{2,1,2}^{[-1]} \cdot R_{1,3,1} + \\
&\quad + R_{2,2,2}^{[-1]} \cdot R_{1,2,1} + (R_{2,3,2}^{[-1]} \cdot R_{1,1,1}) = 0; \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Для трехмерной матрицы также получаем $F = R^{[-1]} \odot R = R \odot R^{[-1]} = E$.

Для доказательства в общем виде заменим двумерное рекуррентное уравнение для расчета $R^{[-1]}$ (табл.4.19) на эквивалентное уравнение, выделяя некоторые слагаемые из сумм и сдвигая индексы

$$\sum_{i=1}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} R_{i+1, \xi+1}^{[-1]} \cdot R_{k-i, w-\xi} + \sum_{\xi=0}^{w-1} (R_{1, \xi+1}^{[-1]} \cdot R_{k, w-\xi} + R_{k, \xi+1}^{[-1]} \cdot R_{1, w-\xi}) = 0$$

Преобразуем двумерное рекуррентное уравнение в многомерное пространственное уравнение

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \cdots \sum_{\lambda=0}^{p-1} R_{i+1, \xi+1, \eta+1, \dots, \lambda+1}^{[-1]} \cdot R_{k-i, w-\xi, s-\eta, \dots, p-\lambda} + \\ & + \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \cdots \sum_{\lambda=0}^{p-1} (R_{1, \xi+1, \eta+1, \dots, \lambda+1}^{[-1]} \cdot R_{k, w-\xi, s-\eta, \dots, p-\lambda} + \\ & + R_{k, \xi+1, \eta+1, \dots, \lambda+1}^{[-1]} \cdot R_{1, w-\xi, s-\eta, \dots, p-\lambda}) = 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

Запишем многомерную рекуррентную формулу $F = R^{[-1]} \odot R$ (табл.4.16) в других обозначениях

$$F_{1,1,1,\dots,1} = R_{1,1,1,\dots,1}^{[-1]} \cdot R_{1,1,1,\dots,1} = \frac{1}{R_{1,1,1,\dots,1}} \cdot R_{1,1,1,\dots,1} = 1 ;$$

$$F_{k, w, s, \dots, p} = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \cdots \sum_{\lambda=0}^{p-1} R_{i+1, \xi+1, \eta+1, \dots, \lambda+1}^{[-1]} \cdot R_{k-i, w-\xi, s-\eta, \dots, p-\lambda}$$

В последнем выражении выделим из суммы два слагаемых для $i = 0$ и $i = k - 1$ и получаем

$$\begin{aligned} F_{k, w, s, \dots, p} &= \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \cdots \sum_{\lambda=0}^{p-1} R_{i+1, \xi+1, \eta+1, \dots, \lambda+1}^{[-1]} \cdot R_{k-i, w-\xi, s-\eta, \dots, p-\lambda} + \\ &+ \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \cdots \sum_{\lambda=0}^{p-1} (R_{1, \xi+1, \eta+1, \dots, \lambda+1}^{[-1]} \cdot R_{k, w-\xi, s-\eta, \dots, p-\lambda} + \\ &+ R_{k, \xi+1, \eta+1, \dots, \lambda+1}^{[-1]} \cdot R_{1, w-\xi, s-\eta, \dots, p-\lambda}) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Сравнивая полученное выражение (4.56) с выражением (4.55), приходим к выводу $F_{k, w, s, \dots, p} = 0$, ($k, w, s, \dots, p \geq 2$), что требовалось доказать.

Пример 4.20.

Зададим вспомогательную трехмерную матрицу D

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

и получим из нее вещественную матрицу R размера 5×5 с помощью функции двумерного логарифма $R = \ln D$

$$R = \begin{bmatrix} 0,69315 & 1 & 0 & -0,16667 & 0,125 \\ 1 & -1,5 & 1,5 & -0,75 & 0 \\ 0 & 1,5 & -3,375 & 3,75 & -2,625 \\ -0,16667 & -0,75 & 3,75 & -7,875 & 10,5 \\ 0,125 & 0 & -2,625 & 10,5 & -22,547 \end{bmatrix}.$$

Найдем реверсивную матрицу $R^{[-1]}$ по двумерному уравнению (табл.4.19).

$$R^{[-1]} = \begin{bmatrix} 1,4427 & -2,0814 & 3,0028 & -3,9852 & 4,9888 \\ -2,0814 & 9,1276 & -25,127 & 54,062 & -99,997 \\ 3,0028 & -25,127 & 108,29 & -334,31 & 841,21 \\ -3,9852 & 54,062 & -334,31 & 1395,6 & -4559,8 \\ 4,9888 & -99,997 & 841,21 & -4559,8 & 1,8727e4 \end{bmatrix}$$

Проверим реверсивность матриц R и $R^{[-1]}$, используя двумерную формулу (табл.4.19)

$$R \odot R^{[-1]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8,326e-17 & 5,551e-17 \\ 0 & 0 & -1,332e-15 & 0 & 1,254e-14 \\ 0 & -1,332e-15 & -7,105e-15 & 2,664e-15 & 9,770e-15 \\ 8,326e-17 & 1,776e-15 & 5,862e-14 & 9,237e-14 & 1,421e-13 \\ 5,551e-17 & 1,221e-14 & 1,052e-13 & -4,138e-13 & -2,842e-14 \end{bmatrix} = E$$

Пример 4.21.

Зададим числовую пространственную матрицу размера $5 \times 5 \times 5$ в виде пяти двумерных матриц по последней координате.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; R_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Для расчета реверсивной числовой матрицы применим трехмерное уравнение (табл.4.19) и представим пространственную матрицу результата в виде пяти числовых двумерных матриц по последней координате

$$R_1^{[-1]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}; R_2^{[-1]} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & -11 & 2 \\ 1 & 0 & -11 & 2 & 23 \\ 0 & -3 & 0 & 23 & -10 \end{bmatrix}; R_3^{[-1]} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & -11 \\ 3 & 0 & -21 & 2 & 39 \\ 0 & -11 & 0 & 60 & -10 \\ -2 & 0 & 39 & -9 & -155 \end{bmatrix}$$

$$R_4^{[-1]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -11 & 2 & 23 \\ -1 & -11 & 4 & 60 & -14 \\ -3 & 2 & 60 & -12 & -230 \\ 2 & 23 & -10 & -228 & 68 \end{bmatrix}; R_5^{[-1]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 23 & -10 \\ -2 & 2 & 39 & -15 & -155 \\ 1 & 23 & -14 & -230 & 78 \\ 4 & -10 & -155 & 73 & 999 \end{bmatrix}$$

Для проверки реверсивности пространственных матриц R и $R^{[-1]}$ выполним расчет $R \odot R^{[-1]}$ по трехмерной формуле (табл.4.19). В результате получаем трехмерную матрицу в виде пяти числовых двумерных матриц по последней координате, из которых только первая матрица ненулевая

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и все пять матриц образуют единичную пространственную матрицу E из формулы (4.54).

Рассмотрим преобразование пространственных фигур с помощью реверсирования пространственных матриц. Численная трехмерная матрица может описывать пространственную фигуру, если каждое число матрицы рассматривать как численный коэффициент совокупности переменных. Для простоты описания зададим пространственную фигуру в виде плоских фигур в координатных плоскостях

$$\begin{array}{c} x^0 \quad x^1 \quad x^2 \rightarrow \\ y^0 \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] \\ y^1 \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] \\ y^2 \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] \\ \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x^0 \quad x^1 \quad x^2 \rightarrow \\ z^0 \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & \cdots & b_{n2} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & \cdots & b_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & b_{3n} & \cdots & b_{nn} \end{array} \right] \\ z^1 \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & \cdots & b_{n2} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & \cdots & b_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & b_{3n} & \cdots & b_{nn} \end{array} \right] \\ z^2 \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & \cdots & b_{n2} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & \cdots & b_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & b_{3n} & \cdots & b_{nn} \end{array} \right] \\ \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{c} y^0 \quad y^1 \quad y^2 \rightarrow \\ z^0 \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_{12} & c_{22} & c_{32} & \cdots & c_{n2} \\ b_{13} & c_{23} & c_{33} & \cdots & c_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & c_{2n} & c_{3n} & \cdots & c_{nn} \end{array} \right] \\ z^1 \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_{12} & c_{22} & c_{32} & \cdots & c_{n2} \\ b_{13} & c_{23} & c_{33} & \cdots & c_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & c_{2n} & c_{3n} & \cdots & c_{nn} \end{array} \right] \\ z^2 \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_{12} & c_{22} & c_{32} & \cdots & c_{n2} \\ b_{13} & c_{23} & c_{33} & \cdots & c_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & c_{2n} & c_{3n} & \cdots & c_{nn} \end{array} \right] \\ \downarrow \end{array}$$

Тогда плоские матрицы описывают пространственную фигуру

$$F(x, y, z) = a_{11} + a_{21}x + a_{31}x^2 + a_{12}y + a_{13}y^2 + a_{22}xy + a_{32}x^2y + a_{23}xy^2 + \dots$$

$$\dots + b_{12}z + b_{13}z^2 + b_{22}xz + b_{32}x^2z + b_{23}xz^2 + b_{33}x^2z^2 + \dots$$

$$\dots + c_{22}yz + c_{32}y^2z + c_{23}yz^2 + c_{33}y^2z^2 + \dots$$

Пример 4.22.

1. «Диагональная» пространственная фигура в виде плоских диагональных фигур в координатных плоскостях.

Зададим в координатных плоскостях диагональную структуру двумерных матриц

$$\begin{array}{c} x^0 \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3 \\ y^0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad z^0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y^0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ y^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad z^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ y^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad z^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ y^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad z^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

и представим трехмерную матрицу в виде двумерных матриц по последней координате z .

$$R(x, y, z) = R_1 z^0 + R_2 z^1 + R_3 z^2 + R_4 z^3;$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; R_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Выполним реверсирование трехмерной матрицы по уравнениям (табл.4.19) и получим матрицу в виде двумерных матриц по координате z

$$R^{[-1]}(x, y, z) = R_1^{[-1]} z^0 + R_2^{[-1]} z^1 + R_3^{[-1]} z^2 + R_4^{[-1]} z^3;$$

$$R_1^{[-1]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; R_2^{[-1]} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; R_3^{[-1]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}; R_4^{[-1]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

В координатных плоскостях получим плоские фигуры:

$$\begin{array}{c} x^0 \quad x^1 \quad x^2 \quad x^3 \\ y^0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad z^0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y^0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad z^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y^1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad z^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad z^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

2. Диагональная структура двумерных матриц

Представим трехмерную пространственную матрицу в виде диагональных двумерных матриц по координате z (размер двумерных матриц 10×10)

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Выполним реверсирование трехмерной матрицы по уравнениям (табл.4.19) и получим матрицу в виде двумерных матриц по координате z

$$R^{[-1]}(x, y, z) = R_1^{[-1]}z^0 + R_2^{[-1]}z^1 + R_3^{[-1]}z^2 + R_4^{[-1]}z^3 + R_5^{[-1]}z^4;$$

$$R_1^{[-1]} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; R_2^{[-1]} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; R_3^{[-1]} = R_4^{[-1]} = R_5^{[-1]} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

3. Пространственная матрица «крест»

Представим трехмерную пространственную матрицу в виде диагональных двумерных крестообразных матриц по координате z

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Выполним реверсирование трехмерной матрицы по уравнениям (табл.4.19) и получим матрицу в виде двумерных матриц по координате z

$$R^{[-1]}(x, y, z) = R_1^{[-1]}z^0 + R_2^{[-1]}z^1 + R_3^{[-1]}z^2 + R_4^{[-1]}z^3 + R_5^{[-1]}z^4$$

$$R_1^{[-1]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}; R_2^{[-1]} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}; R_3^{[-1]} = R_4^{[-1]} = R_5^{[-1]} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

4. Верхняя двухленточная пространственная матрица

Представим трехмерную пространственную матрицу в виде ленточных двумерных матриц по координате z (размер двумерных матриц 10×10)

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Выполним реверсирование трехмерной матрицы по уравнениям (табл.4.19) и получим матрицу в виде двумерных матриц по координате z

$$R^{[-1]}(x, y, z) = R_1^{[-1]}z^0 + R_2^{[-1]}z^1 + R_3^{[-1]}z^2 + R_4^{[-1]}z^3 + R_5^{[-1]}z^4;$$

$$R_1^{[-1]} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}; R_2^{[-1]} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}; R_3^{[-1]} = \dots = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

5. Пространственная матрица «верхний треугольник»

Представим трехмерную пространственную матрицу в виде верхне-треугольных двумерных матриц по координате z (размер двумерных матриц 10×10)

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Выполним реверсирование трехмерной матрицы по уравнениям (табл.4.19) и получим матрицу в виде двумерных матриц по координате z

$$R^{[-1]}(x, y, z) = R_1^{[-1]}z^0 + R_2^{[-1]}z^1 + R_3^{[-1]}z^2 + R_4^{[-1]}z^3 + R_5^{[-1]}z^4;$$

$$R_1^{[-1]} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; R_2^{[-1]} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; R_3^{[-1]} = \dots = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

6. Пространственная матрица из единиц

Представим трехмерную пространственную матрицу в виде двумерных матриц по координате z (размер двумерных матриц 10×10), заполненных единицами

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Выполним реверсирование трехмерной матрицы по уравнениям (табл.4.19) и получим матрицу в виде двумерных матриц по последней координате z

$$R^{[-1]}(x, y, z) = R_1^{[-1]}z^0 + R_2^{[-1]}z^1 + R_3^{[-1]}z^2 + R_4^{[-1]}z^3 + R_5^{[-1]}z^4;$$

$$R_1^{[-1]} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; R_2^{[-1]} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}; R_3^{[-1]} = \cdots = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Теорема 4.14. Зададим многомерную пространственную числовую матрицу R с различными размерами $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_s \times n_p$. Тогда существует единственная реверсивная матрица $R^{[-1]}$, имеющая те же размеры $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_s \times n_p$.

Доказательство. Многомерное рекуррентное уравнение для реверсирования матриц имеет вид (табл.4.19)

$$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \cdot \left(\sum_{\xi=0}^{w-1} \cdots \sum_{\eta=0}^{s-1} \sum_{\lambda=0}^{p-1} (R_{i+2, \xi+1, \dots, \eta+1, \lambda+1}^{[-1]} \cdot R_{k-1-i, w-\xi, \dots, s-\eta, p-\lambda} + \right. \quad (4.57)$$

$$\left. + R_{i+2, \xi+1, \dots, \eta+1, \lambda+1} \cdot R_{k-1-i, w-\xi, \dots, s-\eta, p-\lambda}^{[-1]} \right) = 0$$

Ограничим размеры реверсивной матрицы размерами заданной матрицы $n_1, n_2, \dots, n_s, n_p$ и определим пределы изменения индексов матрицы $R^{[-1]}$.

Параметр k , определяющий текущий первый индекс, изменяется в пределах $k = 2, \dots, n_1$ и $i = 0, \dots, n_1 - 2$. Тогда в элементе $R_{i+2, \xi+1, \dots, \eta+1, \lambda+1}$ заданной матрицы первый индекс принимает наибольшее значение при $i = n_1 - 2$, и это значение равно n_1 , а в элементе $R_{k-1-i, w-\xi, \dots, s-\eta, p-\lambda}$ наибольшее значение индекса равно $n_1 - 1$ при $i = 0$. Аналогично определяем, что в элементах реверсивной матрицы $R_{i+2, \xi+1, \dots, \eta+1, \lambda+1}^{[-1]}$, $R_{k-1-i, w-\xi, \dots, s-\eta, p-\lambda}^{[-1]}$ первый индекс принимает наибольшее значение n_1 .

Параметр w , определяющий текущий второй индекс, изменяется в пределах $w = 1, \dots, n_2$ и $\xi = 0, \dots, n_2 - 1$. Тогда в элементе заданной матрицы $R_{k-1-i, w-\xi, \dots, s-\eta, p-\lambda}$ второй индекс принимает наибольшее значение при $\xi = 0$ и $w = n_2$, и это значение равно n_2 , а в элементе $R_{i+2, \xi+1, \dots, \eta+1, \lambda+1}$ второй индекс наибольший при $\xi = w - 1$ и равен n_2 . Аналогично, в элементах реверсивной матрицы $R_{i+2, \xi+1, \dots, \eta+1, \lambda+1}^{[-1]}$, $R_{k-1-i, w-\xi, \dots, s-\eta, p-\lambda}^{[-1]}$ второй индекс имеет наибольшее значение n_2 .

Параметр s , определяющий текущий предпоследний индекс, изменяется в пределах $s = 1, \dots, n_s$ и $\eta = 0, \dots, n_s - 1$. Тогда в элементе заданной матрицы $R_{k-1-i, w-\xi, \dots, s-\eta, p-\lambda}$ индекс принимает наибольшее значение при $\eta = 0$ и $s = n_s$, и это значение равно n_s , а в элементе $R_{i+2, \xi+1, \dots, \eta+1, \lambda+1}$ индекс наибольший при $\eta = s - 1$ и также равен n_s . Аналогично, в элементах

реверсивной матрицы $R_{i+2, \xi+1, \dots, \eta+1, \lambda+1}^{[-1]}$ и $R_{k-1-i, w-\xi, \dots, s-\eta, p-\lambda}^{[-1]}$ индекс имеет наибольшее значение ns .

Наконец, параметр p , определяющий текущий последний индекс, изменяется в пределах $p = 1, \dots, n_p$ и $\lambda = 0, \dots, n_p - 1$. Тогда в элементе заданной матрицы $R_{k-1-i, w-\xi, \dots, s-\eta, p-\lambda}^{[-1]}$ индекс принимает наибольшее значение при $\lambda = 0$ и $p = n_p$, и это значение равно n_p , а в элементе $R_{i+2, \xi+1, \dots, \eta+1, \lambda+1}^{[-1]}$ индекс наибольший при $\lambda = p - 1$ и также равен n_p . Аналогично, в элементах реверсивной матрицы $R_{i+2, \xi+1, \dots, \eta+1, \lambda+1}^{[-1]}$ и $R_{k-1-i, w-\xi, \dots, s-\eta, p-\lambda}^{[-1]}$ индекс имеет наибольшее значение n_p .

Отсюда следует, что матрица $R^{[-1]}$ с размерами $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_s \times n_p$, найденная из рекуррентного уравнения (4.57), существует и, согласно теореме 4.12, удовлетворяет условию реверсивности (4.54).

Единственность такой матрицы вытекает из структуры многомерного рекуррентного уравнения (4.57), у которого не может быть двух различных численных решений, что требовалось доказать.

Пример 4.23.

Зададим вспомогательную трехмерную матрицу D в виде трех двумерных численных матриц по последней координате

$$D_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; D_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и получим из нее пространственную вещественную матрицу R размера $5 \times 5 \times 5$ с помощью функции пространственного логарифма $R = \ln D$. Представим эту матрицу в виде пяти двумерных матриц по последней координате.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0,69315 & 1 & 0 & -0,16667 & 0,125 \\ 1 & -1,5 & 1,5 & -0,75 & 0 \\ 0 & 1,5 & -3,375 & 3,75 & -2,625 \\ -0,16667 & -0,75 & 3,75 & -7,875 & 10,5 \\ 0,125 & 0 & -2,625 & 10,5 & -22,547 \end{bmatrix}; R_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1,5 & 1,5 & -0,75 & 0 \\ -1,5 & 3,5 & -5,5 & 6 & -4,375 \\ 1,5 & -5,5 & 13,25 & -22,125 & 26,75 \\ -0,75 & 6 & -22,125 & 52,125 & -89,063 \\ 0 & -4,375 & 26,75 & -89,063 & 206,19 \end{bmatrix};$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1,5 & -3,375 & 3,75 & -2,625 \\ 1,5 & -5,5 & 13,25 & -22,125 & 26,75 \\ -3,375 & 13,25 & -37,5 & 80,375 & -131,63 \\ 3,75 & -22,125 & 80,375 & -213,5 & 439,06 \\ -2,625 & 26,75 & -131,63 & 439,06 & -1113,4 \end{bmatrix}; R_4 = \begin{bmatrix} -0,1667 & -0,75 & 3,75 & -7,875 & 10,5 \\ -0,75 & 6 & -22,125 & 52,125 & -89,063 \\ 3,75 & -22,125 & 80,375 & -213,5 & 439,06 \\ -7,875 & 52,125 & -213,5 & 651,54 & -1569,6 \\ 10,5 & -89,063 & 439,06 & -1569,6 & 4406,5 \end{bmatrix};$$

$$R_5 = \begin{bmatrix} 0,125 & 0 & -2,625 & 10,5 & -22,547 \\ 0 & -4,375 & 26,75 & -89,063 & 206,19 \\ -2,625 & 26,75 & -131,63 & 439,06 & -1113,4 \\ 10,5 & -89,063 & 439,06 & -1569,6 & 4406,5 \\ -22,547 & 206,19 & -1113,4 & 4406,5 & -1,3808e4 \end{bmatrix}$$

Найдем реверсивную пространственную матрицу $R^{[-1]}$ размера $5 \times 5 \times 5$ по

трехмерному уравнению (табл.4.19) в виде пяти двумерных матриц по последней координате.

$$\begin{aligned}
 R_1^{[-1]} &= \begin{bmatrix} 1,4427 & -2,0814 & 3,0028 & -3,9852 & 4,9888 \\ -2,0814 & 9,1276 & -25,127 & 54,062 & -99,997 \\ 3,0028 & -25,127 & 108,29 & -334,31 & 841,21 \\ -3,9852 & 54,062 & -334,31 & 1395,6 & -4559,8 \\ 4,9888 & -99,997 & 841,21 & -4559,8 & 1,8727e4 \end{bmatrix}; \\
 R_2^{[-1]} &= \begin{bmatrix} -2,0814 & 9,1276 & -25,127 & 54,062 & -99,997 \\ 9,1276 & -60,302 & 236,47 & -700,5 & 1727,3 \\ -25,127 & 236,47 & -1247,1 & 4792,8 & -1,4936e4 \\ 54,062 & -700,5 & 4792,8 & -2,3112e4 & 8,8334e4 \\ -99,997 & 1727,3 & -1,4936e4 & 8,8334e4 & -4,0564e5 \end{bmatrix}; \\
 R_3^{[-1]} &= \begin{bmatrix} 3,0028 & -25,127 & 108,29 & -334,31 & 841,21 \\ -25,127 & 236,47 & -1247,1 & 4792,8 & -1,4936e4 \\ 108,29 & -1247,1 & 8022,0 & -3,7336e4 & 1,3960e5 \\ -334,31 & 4792,8 & -3,7336e4 & 2,0708e5 & -9,1178e5 \\ 841,21 & -1,4936e4 & 1,3960e5 & -9,1178e5 & 4,6675e6 \end{bmatrix}; \\
 R_4^{[-1]} &= \begin{bmatrix} -3,9852 & 54,062 & -334,31 & 1395,6 & -4559,8 \\ 54,062 & -700,5 & 4792,8 & -2,3112e4 & 8,8334e4 \\ -334,31 & 4792,8 & -3,7336e4 & 2,0708e5 & -9,1178e5 \\ 1395,6 & -2,3112e4 & 2,0708e5 & -1,3159e6 & 6,6109e6 \\ -4559,8 & 8,8334e4 & -9,1178e5 & 6,6109e6 & -3,7626e7 \end{bmatrix}; \\
 R_5^{[-1]} &= \begin{bmatrix} 4,9888 & -99,997 & 841,21 & -4559,8 & 1,8727e4 \\ -99,997 & 1727,3 & -1,4936e4 & 8,8334e4 & -4,0564e5 \\ 841,21 & -1,4936e4 & 1,3960e5 & -9,1178e5 & 4,6675e6 \\ -4559,8 & 8,8334e4 & -9,1178e5 & 6,6109e6 & -3,7626e7 \\ 1,8727e4 & -4,0564e5 & 4,6675e6 & -3,7626e7 & 2,3747e8 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Проверим реверсивность пространственных матриц R и $R^{[-1]}$ по свойству реверсивности $R \odot R^{[-1]} = E$, используя трехмерную формулу (табл.4.19). Из пяти двумерных матриц по последней координате приведем только E_1 и E_5 для оценки точности численных расчетов с вещественными матрицами.

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8,3e-17 & 5,5e-17 \\ 0 & 0 & -1,3e-15 & 0 & -1,6e-15 \\ 0 & -1,3e-15 & -7,1e-15 & 2,6e-15 & 9,7e-15 \\ 8,3e-17 & 1,7e-15 & 1,7e-15 & 3,5e-14 & -3,1e-13 \\ 5,5e-17 & 5,1e-15 & -2,2e-14 & -3,5e-13 & -2,8e-14 \end{bmatrix}; \\
 E_5 &= \begin{bmatrix} 5,5e-17 & -1,9e-15 & -8,4e-15 & -3,5e-13 & -2,8e-14 \\ -1,6e-15 & -2,1e-14 & -1,7e-12 & -1,0e-11 & -1,0e-11 \\ 9,7e-15 & 1,2e-12 & -5,4e-13 & -1,2e-10 & 1,5e-10 \\ -3,1e-13 & -9,9e-12 & -1,3e-11 & 9,7e-10 & 4,9e-9 \\ -2,8e-14 & -3,9e-12 & 1,9e-10 & 6,9e-9 & -1,1e-8 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Значения элементов матриц E_2, E_3, E_4 находятся в пределах от 10^{-15} до 10^{-10} .

Теорема 4.15. Зададим многомерную пространственную числовую матрицу R с различными размерами $n1 \times n2 \times \dots \times ns \times np$. Допустим, что размеры реверсивной матрицы могут превышать размеры $n1, n2, \dots, ns, np$. Тогда существует бесконечное семейство реверсивных матриц $\{R_q^{[-1]}\}$, и каждая матрица семейства имеет свойство

$$R \odot R_q^{[-1]} = R_q^{[-1]} \odot R = E_q$$

где E_q – единичная пространственная матрица

$$(Eq)_{i,j,r,\dots} = \begin{cases} 1, & i = j = r = \dots \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases},$$

размеры которой могут превышать размеры $n_1, n_2, \dots, n_s, n_p$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай трехмерной матрицы R с различными размерами $n_1 \times n_2 \times n_3$ и запишем рекуррентное уравнение для расчета реверсивной матрицы (табл.4.16)

$$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} (R^{[-1]}_{i+2, \xi+1, \eta+1} R_{k-1-i, w-\xi, s-\eta} + R_{i+2, \xi+1, \eta+1} R^{[-1]}_{k-1-i, w-\xi, s-\eta}) = 0$$

Выделим из внутренней суммы некоторые слагаемые и предполагаем, что в уравнении $k = n_1$, $w = n_2$, а третий индекс может превышать соответствующий размер заданной матрицы R , а именно: $s = n_3 + 1$. Но тогда из уравнения надо исключить несуществующие элементы матрицы R , которые условно показаны вычеркнутыми.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=1}^{s-2} (R^{[-1]}_{i+2, \xi+1, \eta+1} R_{k-1-i, w-\xi, s-\eta} + R_{i+2, \xi+1, \eta+1} R^{[-1]}_{k-1-i, w-\xi, s-\eta}) + \\ & + \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \sum_{\xi=0}^{w-1} (R^{[-1]}_{i+2, \xi+1, s} R_{k-1-i, w-\xi, 1} + \cancel{R_{i+2, \xi+1, s} R^{[-1]}_{k-1-i, w-\xi, 1}} + \\ & + R^{[-1]}_{i+2, \xi+1, 1} \cancel{R_{k-1-i, w-\xi, s}} + R_{i+2, \xi+1, 1} R^{[-1]}_{k-1-i, w-\xi, s}) = 0 \end{aligned}$$

Преобразованное рекуррентное уравнение содержит ненулевые слагаемые, и при его решении будет найдено численное значение нового элемента $R^{[-1]}_{n_1, n_2, n_3+1}$ реверсивной матрицы. Аналогично можно расширить другие размеры. Отсюда следует, что расширенная матрица $R^{[-1]}$ существует и надо определить ее свойства.

Для доказательства в общем виде используем многомерное рекуррентное уравнение (4.55), измененное для другой формулировки

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \dots \sum_{\eta=0}^{s-1} \sum_{\lambda=0}^{p-1} R^{[-1]}_{i+1, \xi+1, \dots, \eta+1, \lambda+1} \cdot R_{k-i, w-\xi, \dots, s-\eta, p-\lambda} + \sum_{\xi=0}^{w-1} \dots \sum_{\eta=0}^{s-1} \sum_{\lambda=0}^{p-1} (\rightarrow \\ & (R^{[-1]}_{1, \xi+1, \dots, \eta+1, \lambda+1} \cdot R_{k, w-\xi, \dots, s-\eta, p-\lambda} + R^{[-1]}_{k, \xi+1, \dots, \eta+1, \lambda+1} \cdot R_{1, w-\xi, \dots, s-\eta, p-\lambda})) = 0 \end{aligned}$$

Предполагаем, что в уравнении $k = n_1$, $w = n_2$; ...; $s = n_s$, а последний индекс p превысил соответствующий размер заданной матрицы R : $p = n_{p+1}$.

Выделим из сумм рекуррентного уравнения некоторые слагаемые

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \dots \sum_{\eta=0}^{s-1} \sum_{\lambda=1}^{p-2} R^{[-1]}_{i+1, \xi+1, \dots, \eta+1, \lambda+1} \cdot R_{k-i, w-\xi, \dots, s-\eta, p-\lambda} + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \dots \sum_{\eta=0}^{s-1} (\rightarrow \\ & (R^{[-1]}_{i+1, \xi+1, \dots, \eta+1, p} \cdot R_{k-i, w-\xi, \dots, s-\eta, 1} + R^{[-1]}_{i+1, \xi+1, \dots, \eta+1, 1} \cdot \cancel{R_{k-i, w-\xi, \dots, s-\eta, p}})) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\xi=0}^{w-1} \dots \sum_{\eta=0}^{s-1} \sum_{\lambda=1}^{p-2} (R_{1, \xi+1, \dots, \eta+1, p}^{[-1]} \cdot R_{k, w-\xi, \dots, s-\eta, 1} + R_{k, \xi+1, \dots, \eta+1, p}^{[-1]} \cdot R_{1, w-\xi, \dots, s-\eta, 1} + \\ + R_{1, \xi+1, \dots, \eta+1, 1}^{[-1]} \cdot R_{k, w-\xi, \dots, s-\eta, p} + R_{k, \xi+1, \dots, \eta+1, 1}^{[-1]} \cdot R_{1, w-\xi, \dots, s-\eta, p}) = 0$$

и исключим несуществующие элементы матрицы R (перечеркнуты в уравнении). Элементы расширенной матрицы $R^{[-1]}$ с размерами $n_1, n_2, \dots, n_s, n_{p+1}$ определяются из этого преобразованного уравнения

$$\sum_{i=1}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \dots \sum_{\eta=0}^{s-1} \sum_{\lambda=1}^{p-2} R_{i+1, \xi+1, \dots, \eta+1, \lambda+1}^{[-1]} \cdot R_{k-i, w-\xi, \dots, s-\eta, p-\lambda} + \\ + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \dots \sum_{\eta=0}^{s-1} (R_{i+1, \xi+1, \dots, \eta+1, p}^{[-1]} \cdot R_{k-i, w-\xi, \dots, s-\eta, 1} + \\ + \sum_{\xi=0}^{w-1} \dots \sum_{\eta=0}^{s-1} \sum_{\lambda=1}^{p-2} (R_{1, \xi+1, \dots, \eta+1, p}^{[-1]} \cdot R_{k, w-\xi, \dots, s-\eta, 1} + R_{k, \xi+1, \dots, \eta+1, p}^{[-1]} \cdot R_{1, w-\xi, \dots, s-\eta, 1}) = 0 \quad (4.58)$$

Докажем свойство реверсивности расширенной матрицы, для чего запишем многомерную рекуррентную формулу $F = R^{[-1]} \odot R$ (табл.4.16) в других обозначениях: $F_{1,1,\dots,1,1} = R_{1,1,\dots,1,1}^{[-1]} \cdot R_{1,1,\dots,1,1} = \frac{1}{R_{1,1,\dots,1,1}} \cdot R_{1,1,\dots,1,1} = 1$;

$$F_{k, w, \dots, s, p} = R^{[-1]} \odot R = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\xi=0}^{w-1} \dots \sum_{\eta=0}^{s-1} \sum_{\lambda=0}^{p-1} R_{i+1, \xi+1, \dots, \eta+1, \lambda+1}^{[-1]} \times \\ \times R_{k-i, w-\xi, \dots, s-\eta, p-\lambda}$$

В последнем выражении выделим из суммы слагаемые для $i = 0$ и $i = k-1$, а также $\lambda = 0$ и $\lambda = p-1$ и получаем

$$F_{k, w, \dots, s, p} = \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \dots \sum_{\eta=0}^{s-1} \sum_{\lambda=1}^{p-2} R_{i+1, \xi+1, \dots, \eta+1, \lambda+1}^{[-1]} \cdot R_{k-i, w-\xi, \dots, s-\eta, p-\lambda} + \\ + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \dots \sum_{\eta=0}^{s-1} (R_{i+1, \xi+1, \dots, \eta+1, p}^{[-1]} \cdot R_{k-i, w-\xi, \dots, s-\eta, 1} + \\ + R_{i+1, \xi+1, \dots, \eta+1, 1}^{[-1]} \cdot R_{k-i, w-\xi, \dots, s-\eta, p}) + \\ + \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \dots \sum_{\lambda=1}^{p-2} (R_{1, \xi+1, \dots, \eta+1, p}^{[-1]} \cdot R_{k, w-\xi, \dots, s-\eta, 1} + R_{k, \xi+1, \dots, \eta+1, p}^{[-1]} \cdot R_{1, w-\xi, \dots, s-\eta, 1} + \\ + R_{1, \xi+1, \dots, \eta+1, 1}^{[-1]} \cdot R_{k, w-\xi, \dots, s-\eta, p} + R_{k, \xi+1, \dots, \eta+1, 1}^{[-1]} \cdot R_{1, w-\xi, \dots, s-\eta, p})$$

Исключим несуществующие элементы матрицы R , перечеркнутые в выражении, и сравним полученное выражение с уравнением (4.58). Сравнение показывает, что выражение $F_{k, w, \dots, s, p}$ равно левой части уравнения (4.58).

Отсюда следует равенство $F_{k, w, \dots, s, p} = R^{[-1]} \odot R = 0$, доказывающее

реверсивность расширенной матрицы $R^{[-1]}$ согласно формуле (4.54). Аналогично можно расширить матрицу $R^{[-1]}$ по другим индексам в любых пределах, что требовалось доказать.

Пример 4.24.

Зададим трехмерную матрицу R в виде трех двумерных численных матриц по последней координате

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдем пространственную реверсивную матрицу размера $4 \times 4 \times 4$ по уравнению (табл.4.19)

$$R_1^{[-1]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -7 \end{bmatrix}; \quad R_2^{[-1]} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -15 \\ 2 & 0 & -15 & 0 \end{bmatrix};$$

$$R_3^{[-1]} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -15 \\ 3 & 0 & -21 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 88 \end{bmatrix}; \quad R_4^{[-1]} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -7 \\ 2 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 88 \\ -7 & 0 & 88 & 0 \end{bmatrix}.$$

Как видно из результата, реверсивная матрица с размерами больше, чем исходная матрица, существует, и проверка реверсивности $R \odot R^{[-1]} = E$ дает для целых чисел точную матрицу E .

Найдем пространственную реверсивную матрицу размера $5 \times 5 \times 5$ по уравнению (табл.4.19).

$$R_1^{[-1]}: \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & -6 & 0 & 19 \end{bmatrix}; \quad R_2^{[-1]}: \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & -9 \\ 0 & 4 & 0 & -15 & 0 \\ 2 & 0 & -15 & 0 & 52 \\ 0 & -9 & 0 & 52 & 0 \end{bmatrix}; \quad R_3^{[-1]}: \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 0 & -15 & 0 \\ 3 & 0 & -21 & 0 & 72 \\ 0 & -15 & 0 & 88 & 0 \\ -6 & 0 & 72 & 0 & -355 \end{bmatrix};$$

$$R_4^{[-1]} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -7 & 0 \\ 2 & 0 & -15 & 0 & 52 \\ 0 & -15 & 0 & 88 & 0 \\ -7 & 0 & 88 & 0 & -440 \\ 0 & 52 & 0 & -440 & 0 \end{bmatrix}; \quad R_5^{[-1]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & 0 & 19 \\ 0 & -9 & 0 & 52 & 0 \\ -6 & 0 & 72 & 0 & -335 \\ 0 & 52 & 0 & -440 & 0 \\ 19 & 0 & -355 & 0 & 2385 \end{bmatrix}$$

Реверсивная матрица с такими размерами также существует, и проверка реверсивности $R \odot R^{[-1]} = E$ дает для целых чисел точную матрицу E .

В отличие от инвертирования, которое применяется для обращения двумерных матриц, реверсирование применимо для пространственных матриц любой размерности. В реверсировании нет понятия псевдообращения, введенного для неквадратных двумерных матриц [28]. Предложенная матричная операция допускает реверсивное обращение неквадратных двумерных матриц и пространственных матриц, имеющих различные пространственные размеры. В работе показано только одно практическое применение новой матричной операции – «сжатие» матриц. Так, гиперкуб любого размера, заполненный единицами, имеет реверсивную пространственную матрицу, которая «сжимает» гиперкуб до 8 ненулевых элементов. Реверсирование такой реверсивной матрицы вновь разворачивает эти несколько ненулевых элементов в полную исходную матрицу. Возможно, практика расчетов покажет другие применения новой операции пространственной матричной алгебры.

Приложение

Таблица П.1

Функ-ция	Начал. знач.	Рекуррентные уравнения
D^m	$F_1 = (D_1)^m$	$\sum_{q=0}^{k-2} (q+1)(mD_{q+2} \cdot F_{k-1-q} - F_{q+2} \cdot D_{k-1-q}) = 0$
$e^{\pm D}$	$F_1 = e^{D_1}$	$(k-1)F_k \mp (\sum_{q=0}^{k-2} (q+1)D_{q+2}F_{k-1-q}) = 0$
$e^{\sqrt{D}}$	$F_1 = e^{\sqrt{D_1}}$ $F_2 = \frac{D_2 F_1}{2\sqrt{D_1}}$	$\sum_{i=0}^{k-2} (4D_{k-1-i} \cdot (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot F_{q+2} \cdot F_{i+2-q}) -$ $-(\sum_{q=0}^i F_{q+1} \cdot F_{i+1-q})) (\sum_{q=0}^{k-i-2} (q+1)(k-1-i-q)D_{q+2} \cdot D_{k-i-q})) = 0$
e^{D^2}	$F_1 = e^{D_1^2}$ $F_2 = 2D_2 F_1 D_1$	$(k-1)F_k - 2 \cdot (\sum_{i=0}^{k-2} D_{i+1} \cdot (\sum_{q=0}^{k-i-2} (q+1)D_{q+2} \cdot F_{k-1-i-q})) = 0$
e^{D^3}	$F_1 = e^{D_1^3}$ $F_2 = 3D_2 F_1 D_1^2$	$(k-1)F_k - 3 \cdot (\sum_{i=0}^{k-2} (\sum_{q=0}^{k-i-2} (q+1)D_{q+2} \cdot F_{k-1-i-q}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^i D_{q+1} \cdot D_{i+1-q})) = 0$
e^{D^4}	$F_1 = e^{D_1^4}$ $F_2 = 4D_2 F_1 D_1^3$	$(k-1)F_k - 4 \cdot (\sum_{j=0}^{k-2} (\sum_{q=0}^{k-j-2} (q+1)D_{q+2} \cdot F_{k-1-j-q}) \times$ $\times (\sum_{i=0}^j D_{j+1-i} \cdot (\sum_{q=0}^i D_{q+1} \cdot D_{i+1-q}))) = 0$
$e^{\frac{1}{D}}$	$F_1 = e^{\frac{1}{D_1}}$	$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1)(D_{i+2} \cdot F_{k-1-i} + F_{i+2} \cdot (\sum_{q=0}^{k-i-2} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q})) = 0$
$e^{\frac{1}{D^2}}$	$F_1 = e^{\frac{1}{D_1^2}}$ $F_2 = \frac{-2D_2 F_1}{D_1^3}$	$\sum_{j=0}^{k-2} (j+1) \cdot (2D_{j+2} \cdot F_{k-1-j} +$ $+ F_{j+2} \cdot (\sum_{i=0}^{k-j-2} D_{k-1-j-i} \cdot (\sum_{q=0}^i D_{q+1} \cdot D_{i+1-q}))) = 0$
$e^{\frac{1}{D^3}}$	$F_1 = e^{\frac{1}{D_1^3}}$ $F_2 = \frac{-3D_2 F_1}{D_1^4}$	$\sum_{j=0}^{k-2} (j+1) \cdot (3D_{j+2} \cdot F_{k-1-j} + F_{j+2} \times$ $\times (\sum_{i=0}^{k-j-2} (\sum_{q=0}^{k-j-i-2} D_{q+1} \cdot D_{k-1-j-i-q}) \cdot (\sum_{q=0}^i D_{q+1} \cdot D_{i+1-q}))) = 0$

Таблица П.2

Функ	Начал.знач	Рекуррентные уравнения
$m\sqrt{D}$	$F_1 = m\sqrt{D_1}$	$(k-1)(mD_1F_k - F_1D_k) - \sum_{q=1}^{k-2} ((m+1)q - m(k-1))D_{q+1}F_{k-q} = 0$
$\ln D$	$F_1 = \ln D_1$	$\sum_{q=0}^{k-2} (q+1)F_{q+2} \cdot D_{k-1-q} - (k-1)D_k = 0$
$\ln^2 D$	$F_1 = \ln^2 D_1$ $F_2 = \frac{2 \ln D_1}{D_1 / D_2}$	$\sum_{i=0}^{k-2} ((\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot F_{q+2}F_{i+2-q}) \cdot (\sum_{q=0}^{k-2-i} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q}) -$ $-4F_{k-1-i} \cdot (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot D_{q+2} \cdot D_{i+2-q})) = 0$
$\frac{1}{\ln D}$	$F_1 = \frac{1}{\ln D_1}$	$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \cdot (F_{i+2} \cdot D_{k-1-i} + D_{i+2} \cdot (\sum_{q=0}^{k-i-2} F_{q+1} \cdot F_{k-1-i-q})) = 0$
$\sqrt{\ln D}$	$F_1 = \sqrt{\ln D_1}$ $F_2 = \frac{D_2}{2D_1F_1}$	$2 \cdot \sum_{i=0}^{k-2} (D_{k-1-i} \cdot (\sum_{q=0}^i (q+1) \cdot F_{q+2} \cdot F_{i+1-q})) - (k-1)D_k = 0$
$\frac{1}{\sqrt{\ln D}}$	$F_1 = \frac{1}{\sqrt{\ln D_1}}$ $F_2 = \frac{-D_2F_1^3}{2D_1}$	$\sum_{j=0}^{k-2} (j+1) \cdot (2F_{j+2} \cdot D_{k-1-j} +$ $+ D_{j+2} \cdot (\sum_{i=0}^{k-j-2} F_{k-1-j-i} \cdot (\sum_{q=0}^i F_{q+1} \cdot F_{i+1-q}))) = 0$
$\frac{1}{\ln^2 D}$	$F_1 = \frac{1}{\ln^2 D_1}$ $F_2 = \frac{-2D_2}{\ln^3 D_1}$	$\sum_{l=0}^{k-2} ((\sum_{q=0}^l (q+1)(l+1-q) \cdot F_{q+2}F_{l+2-q})(\sum_{q=0}^{k-2-l} D_{q+1} \cdot D_{k-1-l-q}) -$ $-4(k-1-l)D_{k-l}(\sum_{j=0}^l (j+1)D_{j+2}(\sum_{i=0}^{l-j} F_{l+1-j-i}(\sum_{q=0}^i F_{q+1}F_{i+1-q})))) =$ $= 0$
$C \cdot \ln D$	$F_1 = C_1 \ln D_1$	$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \cdot (\sum_{q=0}^{k-i-2} (F_{i+2}C_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q} - D_{i+2} \cdot C_{q+1} \cdot C_{k-1-i-q} -$ $- C_{i+2} \cdot F_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q})) = 0$
$\frac{C}{\ln D}$	$F_1 = \frac{C_1}{\ln D_1}$	$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \cdot (\sum_{q=0}^{k-i-2} (F_{i+2} \cdot C_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q} +$ $+ D_{i+2} \cdot F_{q+1} \cdot F_{k-1-i-q} - C_{i+2} \cdot F_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q})) = 0$

Таблица П.3

Функция	Начал. знач.	Рекуррентные уравнения
$\sin(mD)$ $\cos(mD)$	$F_1 = \sin(mD_1)$ $F_2 = mD_2 \times$ $\quad \times \cos(mD_1)$ $F_1 = \cos(mD_1)$ $F_2 = -mD_2 \times$ $\quad \times \sin(mD_1)$	$\sum_{i=0}^{k-2} ((i+1)(k-1-i)(F_{i+2} \cdot F_{k-i} - m^2 \cdot D_{i+2} \cdot D_{k-i}) +$ $+ m^2 \cdot (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot D_{q+2} \cdot D_{i+2-q}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^{k-i-2} F_{q+1} \cdot F_{k-1-i-q})) = 0$
$\arcsin D$ $\arccos D$	$F_1 = \arcsin D_1$ $F_2 = \frac{D_2}{\sqrt{1-D_1^2}}$ $F_1 = \arccos D_1$ $F_2 = \frac{-D_2}{\sqrt{1-D_1^2}}$	$\sum_{i=0}^{k-2} ((i+1)(k-1-i) \cdot (F_{i+2} \cdot F_{k-i} - D_{i+2} \cdot D_{k-i}) -$ $- (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot F_{q+2} \cdot F_{i+2-q}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^{k-i-2} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q})) = 0$
$\sin^2 mD$ $\cos^2 mD$	$F_1 = \sin^2 mD_1$ $F_2 = mD_2 \times$ $\quad \times \sin(2mD_1)$ $F_1 = \cos^2 mD_1$ $F_2 = -mD_2 \times$ $\quad \times \sin(2mD_1)$	$\sum_{i=0}^{k-2} ((i+1)(k-1-i) \cdot F_{i+2} \cdot F_{k-i} -$ $- 4m^2 \cdot (F_{i+1} - \sum_{q=0}^i F_{q+1} \cdot F_{i+1-q}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^{k-2-i} (q+1)(k-1-i-q) \cdot D_{q+2} \cdot D_{k-i-q})) = 0$
$\arcsin^2 D$ $\arccos^2 D$	$F_1 = \arcsin^2 D_1$ $F_2 = \frac{2D_2 \sqrt{F_1}}{\sqrt{1-D_1^2}}$ $F_1 = \arccos^2 D_1$ $F_2 = \frac{2D_2 \sqrt{F_1}}{-\sqrt{1-D_1^2}}$	$\sum_{i=0}^{k-2} ((i+1)(k-1-i) \cdot F_{i+2} \cdot F_{k-i} - 4F_{k-1-i} \cdot (\sum_{q=0}^i (q+1) \times$ $\times (i+1-q) D_{q+2} \cdot D_{i+2-q}) - (\sum_{q=0}^{k-i-2} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot F_{q+2} \cdot F_{i+2-q})) = 0$
$\sin(\ln D)$ $\cos(\ln D)$	$F_1 = \sin \ln D_1$ $F_2 = \frac{\cos \ln D_1}{D_1 / D_2}$ $F_1 = \cos \ln D_1$ $F_2 = \frac{\sin \ln D_1}{-D_1 / D_2}$	$\sum_{i=0}^{k-2} (-(i+1)(k-1-i) D_{i+2} D_{k-i} + (\sum_{q=0}^{k-i-2} D_{q+1} D_{k-1-i-q}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) F_{q+2} F_{i+2-q}) + (\sum_{q=0}^{k-i-2} F_{q+1} F_{k-1-i-q}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) D_{q+2} \cdot D_{i+2-q})) = 0$

Таблица П.4

Функция	Начал. знач.	Рекуррентные уравнения
$e^{\arcsin D}$	$F_1 = e^{\arcsin D_1}$	$\sum_{i=0}^{k-2} \left(-(i+1)(k-1-i)F_{i+2}F_{k-i} + \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q} \right) \times \right.$ $\times \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q)F_{q+2}F_{i+2-q} \right) + \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} F_{q+1}F_{k-1-i-q} \right) \times$ $\left. \times \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q)D_{q+2} \cdot D_{i+2-q} \right) \right) = 0$
$e^{\arccos D}$	$F_1 = e^{\arccos D_1}$ $F_2 = \frac{-F_1 D_2}{\sqrt{1-D_1^2}}$	
$\operatorname{arctg} D$	$F_1 = \operatorname{arctg} D_1$ $F_2 = \frac{D_2}{1+D_1^2}$	$(k-1) \cdot (F_k - D_k) + \sum_{i=0}^{k-2} (i+1)F_{i+2} \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-2-i} D_{q+1} \times \right.$ $\left. \times D_{k-1-i-q} \right) = 0$
$\operatorname{arctg} D$	$F_1 = \operatorname{arctg} D_1$ $F_2 = \frac{-D_2}{1+D_1^2}$	$(k-1) \cdot (F_k + D_k) + \sum_{i=0}^{k-2} (i+1)F_{i+2} \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-2-i} D_{q+1} \times \right.$ $\left. \times D_{k-1-i-q} \right) = 0$
$e^{\operatorname{arctg} D}$	$F_1 = e^{\operatorname{arctg} D_1}$ $F_2 = \frac{F_1 D_2}{1+D_1^2}$	$(k-1)F_k + \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \cdot \left(F_{i+2} \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-2-i} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q} \right) - \right.$ $\left. - D_{i+2} \cdot F_{k-1-i} \right) = 0$
$e^{\operatorname{arctg} D}$	$F_1 = e^{\operatorname{arctg} D_1}$ $F_2 = \frac{-F_1 D_2}{1+D_1^2}$	$(k-1)F_k + \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \cdot \left(F_{i+2} \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-2-i} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q} \right) + \right.$ $\left. + D_{i+2} \cdot F_{k-1-i} \right) = 0$
$(\operatorname{arctg} D)^2$	$F_1 = \operatorname{arctg}^2 D_1$ $F_2 = \frac{2D_2 \sqrt{F_1}}{1+D_1^2}$	$\sum_{j=0}^{k-2} \left(((j+1)F_{j+2} + \sum_{i=0}^j (i+1) \cdot F_{i+2} \sum_{q=0}^{j-i} D_{q+1} \cdot D_{j+1-i-q}) \times \right.$ $\times ((k-1-j)F_{k-j} + \sum_{i=0}^{k-2-j} (i+1) \cdot F_{i+2} \sum_{q=0}^{k-2-j-i} D_{k-1-j-i-q} \times$ $\times D_{q+1}) - 4F_{k-1-j} \sum_{q=0}^j (q+1)(j+1-q)D_{q+2} \cdot D_{j+2-q} \Big) = 0$
$(\operatorname{arctg} D)^2$	$F_1 = \operatorname{arctg}^2 D_1$ $F_2 = \frac{-2D_2 \sqrt{F_1}}{1+D_1^2}$	
$e^{\frac{1}{\sqrt{D}}}$	$F_1 = e^{\frac{1}{\sqrt{D_1}}}$ $F_2 = \frac{-\frac{1}{2} F_1 D_2}{D_1 \sqrt{D_1}}$	$\sum_{j=0}^{k-2} \left(4 \cdot \left(\sum_{q=0}^j (q+1)(j+1-q) \cdot F_{q+2} \cdot F_{j+2-q} \right) \times \right.$ $\times \left(\sum_{i=0}^{k-j-2} D_{k-1-j-i} \cdot \left(\sum_{q=0}^i D_{q+1} \cdot D_{i+1-q} \right) \right) - \left(\sum_{q=0}^j F_{q+1} \times \right.$ $\times F_{j+1-q} \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-j-2} (q+1)(k-1-j-q)D_{q+2} \cdot D_{k-j-q} \right) \Big) = 0$

Таблица П.5

Функ- ция	Начальные значения	Рекуррентные формулы
e^D	$F_1 = e^{D_1}$	$F_k = \frac{1}{k-1} \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-2} (q+1) D_{q+2} \cdot F_{k-1-q} \right)$
$e^{\sqrt{D}}$	$F_1 = e^{\sqrt{D_1}}$ $F_2 = \frac{D_2 F_1}{2\sqrt{D_1}}$	$F_k = \frac{1}{8(k-1)D_1 \cdot F_2} \left(2D_2^2 F_1 \cdot F_{k-1} + 2(k-1)F_1^2 D_2 D_k - 4F_2^2 \times \right.$ $\times D_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-3} \left(D_2^2 F_{i+1} \cdot F_{k-1-i} + (i+1)(k-1-i)(F_1^2 D_{i+2} \cdot D_{k-i} - \right.$ $- 4D_1 \cdot F_{i+2} F_{k-i}) - 4D_{k-1-i} \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) F_{q+2} \cdot F_{i+2-q} \right) +$ $\left. + \left(\sum_{q=0}^i F_{q+1} \cdot F_{i+1-q} \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} (q+1)(k-1-i-q) D_{q+2} \cdot D_{k-i-q} \right) \right)$
e^{D^2}	$F_1 = e^{D_1^2}$	$F_k = \frac{2}{k-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-2} D_{i+1} \cdot \sum_{q=0}^{k-i-2} (q+1) D_{q+2} \cdot F_{k-1-i-q} \right)$
e^{D^3}	$F_1 = e^{D_1^3}$	$F_k = \frac{3}{k-1} \left(\sum_{i=0}^{k-2} \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} (q+1) D_{q+2} F_{k-1-i-q} \right) \left(\sum_{q=0}^i D_{q+1} D_{i+1-q} \right) \right)$
$e^{\frac{1}{D}}$	$F_1 = e^{\frac{1}{D_1}}$ $F_2 = \frac{D_2 F_1}{-D_1^2}$	$F_k = \frac{1}{(k-1)D_1^2} \left(-(k-1)F_1 \cdot D_k - \sum_{i=0}^{k-3} (i+1)(D_{i+2} \cdot F_{k-1-i} + \right.$ $\left. + F_{i+2} \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q} \right) \right)$
$e^{\frac{1}{D^2}}$	$F_1 = e^{\frac{1}{D_1^2}}$ $F_2 = \frac{2D_2 F_1}{-D_1^3}$	$F_k = \frac{1}{(k-1)D_1^3} \cdot \left(-2(k-1)F_1 \cdot D_k - \sum_{j=0}^{k-3} (j+1) \cdot \left(2D_{j+2} \times \right. \right.$ $\times F_{k-1-j} + F_{j+2} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-j-2} D_{k-1-j-i} \cdot \left(\sum_{q=0}^i D_{q+1} \cdot D_{i+1-q} \right) \right) \right)$
$C^m \times$ $\times e^{\pm D}$	$F_1 = C_1^m \times$ $\times e^{\pm D_1}$	$F_k = \left((k-1)F_1 \cdot (m \cdot C_k \pm C_1 \cdot D_k) + \sum_{i=0}^{k-3} ((i+1) \times \right.$ $\times (m \cdot C_{i+2} \cdot F_{k-1-i} - C_{k-1-i} \cdot F_{i+2} \pm F_1 \cdot C_{k-1-i} \cdot D_{i+2}) \pm$ $\left. \pm F_{k-1-i} \cdot \sum_{q=0}^i (q+1) C_{i+1-q} \cdot D_{q+2} \right) / ((k-1)C_1)$

Таблица П.6

Функция	Начальные значения	Рекуррентные формулы
$e^{\frac{1}{\sqrt{D}}}$	$F_1 = e^{\frac{1}{\sqrt{D_1}}}$ $F_2 = \frac{-\frac{1}{2}F_1 D_2}{D_1 \sqrt{D_1}}$	$F_k = (-4D_1^3 \cdot \sum_{i=1}^{k-3} (i+1)(k-1-i)F_{i+2} \cdot F_{k-i} -$ $-4 \cdot \sum_{j=0}^{k-3} (\sum_{i=0}^{k-2-j} D_{k-1-j-i} \cdot (\sum_{q=0}^i D_{q+1} \cdot D_{i+1-q})) \times$ $\times (\sum_{q=0}^j (q+1)(j+1-q)F_{q+2} \cdot F_{j+2-q}) + \sum_{i=0}^{k-2} (\sum_{q=0}^i F_{q+1} F_{i+1-q}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^{k-2-i} (q+1)(k-1-i-q)D_{q+2} \cdot D_{k-i-q})) / (8(k-1)D_1^3 \cdot F_2)$
$\frac{C}{e^{D \pm H}}$	$F_1 = \frac{C_1}{e^{D_1 \pm H_1}}$	$F_k = (-\sum_{j=0}^{k-3} (j+1)F_{j+2} \cdot C_{k-1-j} + \sum_{j=0}^{k-2} (F_{k-1-j}((j+1)C_{j+2} -$ $-\sum_{q=0}^j (q+1)D_{q+2} \cdot C_{j+1-q})) + (\sum_{q=0}^{k-2-j} F_{q+1} \cdot F_{k-1-j-q}) \times$ $\times ((j+1)H_{j+2} \mp \sum_{q=0}^j (q+1)D_{q+2} \cdot H_{j+1-q}))) / ((k-1)C_1)$
e^D	$E_1^{(+)} = e^{D_1}$	$E_k^{(+)} = (\sum_{q=0}^{k-2} (q+1)D_{q+2} \cdot E_{k-1-q}^{(+)}) / (k-1)$
e^{-D}	$E_1^{(-)} = e^{-D_1}$	$E_k^{(-)} = (-\sum_{q=0}^{k-2} (q+1)D_{q+2} E_{k-1-q}^{(-)}) / (k-1)$
$\text{sh}D$	$F_1 = \frac{E_1^{(+)} - E_1^{(-)}}{2}$	$F_k = \frac{E_k^{(+)} - E_k^{(-)}}{2}$
$\text{ch}D$	$F_1 = \frac{E_1^{(+)} + E_1^{(-)}}{2}$	$F_k = \frac{E_k^{(+)} + E_k^{(-)}}{2}$
$\frac{C}{\ln D}$	$F_1 = C_1 \ln D_1$ $F_2 = \frac{C_2 F_1}{C_1} - \frac{D_2 F_1^2}{C_1 D_1}$	$F_k = \frac{1}{(k-1)C_1 \cdot D_1} (-(k-1)F_1^2 \cdot D_k + (k-1)F_1 \cdot D_1 \cdot C_k +$ $+ \sum_{i=0}^{k-3} ((i+1)F_1 C_{i+2} \cdot D_{k-1-i} + F_{k-1-i} \sum_{q=0}^i (q+1)C_{q+2} \cdot D_{i+1-q} -$ $-(i+1) \sum_{q=0}^{k-2-i} (C_{q+1} F_{i+2} \cdot D_{k-1-i-q} + D_{i+2} \cdot F_{q+1} \cdot F_{k-1-i-q})))$

Таблица П.7

Функция	Начал.знач	Рекуррентные формулы
$\ln D$	$F_1 = \ln D_1$ $F_2 = D_2 / D_1$	$F_k = \frac{1}{(k-1)D_1} \left((k-1)D_k - \sum_{q=0}^{k-3} (q+1)F_{q+2} \cdot D_{k-1-q} \right)$
$\ln^2 D$	$F_1 = \ln^2 D_1$ $F_2 = \frac{2D_2}{D_1} \times \ln D_1$	$F_k = \frac{1}{2(k-1)D_1^2 \cdot F_2} \left(-D_1^2 \cdot \sum_{i=1}^{k-3} (i+1)(k-1-i) \cdot F_{i+2} \cdot F_{k-i} - \right.$ $- \sum_{i=0}^{k-3} \left(\sum_{q=0}^{k-2-q} D_{q+1} D_{k-1-i-q} \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) F_{q+2} F_{i+2-q} \right) +$ $+ 4 \sum_{i=0}^{k-2} F_{k-1-i} \cdot \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot D_{q+2} \cdot D_{i+2-q} \right) \Bigg)$
$\frac{1}{\ln D}$	$F_1 = \frac{1}{\ln D_1}$ $F_2 = \frac{D_2 F_1^2}{-D_1}$	$F_k = \frac{1}{(k-1)D_1} \cdot \left(-(k-1)F_1^2 \cdot D_k - \sum_{i=0}^{k-3} (i+1)(F_{i+2} \cdot D_{k-1-i} + \right.$ $+ D_{i+2} \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} F_{q+1} \cdot F_{k-1-i-q} \right) \Bigg)$
$\frac{1}{\ln^2 D}$	$F_1 = \frac{1}{(\ln D_1)^2}$ $F_2 = \frac{1}{D_1} \times \frac{-2D_2}{(\ln D_1)^3}$	$F_k = \frac{1}{2(k-1)D_1^2 \cdot F_2} \left(-D_1^2 \cdot \sum_{i=1}^{k-3} (i+1)(k-1-i) \cdot F_{i+2} \cdot F_{k-i} - \right.$ $- \sum_{i=0}^{k-3} \left(\sum_{q=0}^{k-2-i} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q} \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) F_{q+2} \cdot F_{i+2-q} \right) +$ $+ 4 \cdot \sum_{l=0}^{k-2} (k-1-l) D_{k-l} \cdot \left(\sum_{j=0}^l (j+1) D_{j+2} \cdot \left(\sum_{i=0}^{l-j} F_{l+1-j-i} \times \right. \right.$ $\left. \left. \times \left(\sum_{q=0}^i F_{q+1} \cdot F_{i+1-q} \right) \right) \right) \Bigg)$
$\sqrt{\ln D}$	$F_1 = \sqrt{\ln D_1}$ $F_2 = \frac{D_2 / 2}{D_1 F_1}$	$F_k = \frac{1}{2(k-1)D_1 \cdot F_1} \left((k-1)D_k - 2 \sum_{i=0}^{k-3} ((i+1)D_1 \cdot F_{i+2} \cdot F_{k-1-i} + \right.$ $+ D_{k-1-i} \cdot \left(\sum_{q=0}^i (q+1)F_{q+2} \cdot F_{i+1-q} \right) \Bigg)$
$\frac{1}{\sqrt{\ln D}}$	$F_1 = \frac{1}{\sqrt{\ln D_1}}$ $F_2 = \frac{-D_2 F_1^3}{2D_1}$	$F_k = \frac{1}{2(k-1)D_1} \left(-(k-1)F_1^3 \cdot D_k - \sum_{j=0}^{k-3} (j+1)(2F_{j+2} \cdot D_{k-1-j} + \right.$ $+ D_{j+2} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-j-2} F_{k-1-j-i} \cdot \left(\sum_{q=0}^i F_{q+1} \cdot F_{i+1-q} \right) \right) \Bigg)$

Таблица П.8

Функция	Начал.знач.	Рекуррентные формулы
$\sin D$ $\cos D$	$F_1 = \sin D_1$ $F_2 = D_2 \times$ $\times \cos D_1$ $F_1 = \cos D_1$ $F_2 = -D_2 \times$ $\times \sin D_1$	$F_k = \frac{1}{2(k-1)F_2} (2(k-1)(1-F_1^2)D_2 \cdot D_k - 2D_2^2 F_1 \cdot F_{k-1} +$ $+ \sum_{i=1}^{k-3} ((i+1)(k-1-i) \cdot (-F_{i+2} \cdot F_{k-i} + D_{i+2} \cdot D_{k-i} \times$ $\times (1-F_1^2)) - D_2^2 \cdot F_{i+1} \cdot F_{k-1-i} - (\sum_{q=0}^{k-i-2} F_{q+1} \cdot F_{k-1-i-q}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot D_{q+2} \cdot D_{i+2-q})))$
$\arcsin D$ $\arccos D$	$F_1 = \arcsin D_1$ $F_2 = \frac{D_2}{\sqrt{1-D_1^2}}$ $F_1 = \arccos D_1$ $F_2 = \frac{-D_2}{\sqrt{1-D_1^2}}$	$F_k = \frac{1}{2(k-1) \cdot (D_1^2 - 1) \cdot F_2} (-2F_2^2 \cdot D_1 \cdot D_{k-1} -$ $-2(k-1)D_2 \cdot D_k - \sum_{i=1}^{k-3} (F_2^2 \cdot D_{i+1} \cdot D_{k-1-i} +$ $+ (i+1)(k-1-i) \cdot ((D_1^2 - 1)F_{i+2} \cdot F_{k-i} + D_{i+2} \cdot D_{k-i}) +$ $+ (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q)F_{q+2} \cdot F_{i+2-q}) (\sum_{q=0}^{k-i-2} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q})))$
$\operatorname{arctg} D$	$F_1 = \operatorname{arctg} D_1$ $F_2 = \frac{D_2}{1+D_1^2}$	$F_k = \frac{1}{(k-1) \cdot (D_1^2 + 1)} ((k-1)D_k - \sum_{i=0}^{k-3} (i+1)F_{i+2} \times$ $\times (\sum_{q=0}^{k-2-i} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q}))$
$\operatorname{arctg} D$	$F_1 = \operatorname{arctg} D_1$ $F_2 = \frac{-D_2}{1+D_1^2}$	$F_k = (- (1-k)D_k - \sum_{i=0}^{k-3} (i+1)F_{i+2} \cdot (\sum_{q=0}^{k-2-i} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q})) /$ $/ ((k-1) \cdot (D_1^2 + 1))$
$e^{\operatorname{arctg} D}$	$F_1 = e^{\operatorname{arctg} D_1}$ $F_2 = \frac{F_1 D_2}{1+D_1^2}$	$F_k = \frac{1}{(k-1) \cdot (1+D_1^2)} ((k-1)F_1 \cdot D_k +$ $+ \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \cdot (D_{i+2} \cdot F_{k-1-i} - F_{i+2} \cdot (\sum_{q=0}^{k-2-i} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q})))$
$e^{\operatorname{arctg} D}$	$F_1 = e^{\operatorname{arctg} D_1}$ $F_2 = \frac{-F_1 D_2}{1+D_1^2}$	$F_k = \frac{1}{(k-1) \cdot (1+D_1^2)} (-(k-1)F_1 \cdot D_k - \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \times$ $\times (D_{i+2} \cdot F_{k-1-i} + F_{i+2} \cdot (\sum_{q=0}^{k-2-i} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q})))$

Таблица П.9

Функция	Начал.знач.	Рекуррентные формулы
$\sin(mD)$ $\cos(mD)$	$F_1 = \sin(mD_1)$ $F_2 = mD_2 \times$ $\quad \times \cos(mD_1)$ $F_1 = \cos(mD_1)$ $F_2 = -mD_2 \times$ $\quad \times \sin(mD_1)$	$F_k = (2m^2(k-1)D_2 \cdot (1-F_1^2)D_k - 2m^2D_2^2F_1 \cdot F_{k-1} +$ $+ \sum_{i=1}^{k-3} ((i+1)(k-1-i) \cdot (-F_{i+2} \cdot F_{k-i} + m^2 \cdot D_{i+2} \cdot D_{k-i} \times$ $\times (1-F_1^2)) - m^2D_2^2F_{i+1}F_{k-1-i} - m^2 \sum_{q=0}^{k-i-2} F_{q+1}F_{k-1-i-q} \times$ $\times (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot D_{q+2} \cdot D_{i+2-q}))) / (2(k-1) \cdot F_2)$
$\sin^2(mD)$ $\cos^2(mD)$	$F_1 = \sin^2(mD_1)$ $F_2 = mD_2 \times$ $\quad \times \sin(2mD_1)$ $F_1 = \cos^2(mD_1)$ $F_2 = -mD_2 \times$ $\quad \times \sin(2mD_1)$	$F_k = \frac{1}{2(k-1) \cdot F_2} \left(- \sum_{i=1}^{k-3} (i+1)(k-1-i) \cdot F_{i+2} \cdot F_{k-i} + \right.$ $+ 4m^2 \cdot \sum_{i=0}^{k-2} ((F_{i+1} - \sum_{q=0}^i F_{q+1} \cdot F_{i+1-q}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^{k-2-i} (q+1)(k-1-i-q) \cdot D_{q+2} \cdot D_{k-i-q})))$
$\arcsin^2 D$ $\arccos^2 D$	$F_1 = \arcsin^2 D_1$ $F_2 = \frac{2D_2\sqrt{F_1}}{\sqrt{1-D_1^2}}$ $F_1 = \arccos^2 D_1$ $F_2 = \frac{-2D_2\sqrt{F_1}}{\sqrt{1-D_1^2}}$	$F_k = \frac{1}{2(k-1) \cdot (D_1^2 - 1) \cdot F_2} \left(-2F_2^2 \cdot D_1 \cdot D_{k-1} - \right.$ $- 8(k-1)F_1 \cdot D_2 \cdot D_k - 4D_2^2F_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-3} (F_2^2D_{i+1} \cdot D_{k-1-i} +$ $+ (i+1)(k-1-i)((D_1^2 - 1)F_{i+2} \cdot F_{k-i} + 4F_1D_{i+2} \cdot D_{k-i}) +$ $+ (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot F_{q+2} \cdot F_{i+2-q}) \cdot (\sum_{q=0}^{k-i-2} D_{k-1-i-q} \times$ $\times D_{q+1}) + 4F_{k-1-i} \cdot (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot D_{q+2} \cdot D_{i+2-q})))$
$\sin(\ln D)$ $\cos(\ln D)$	$F_1 = \sin(\ln D_1)$ $F_2 = \frac{D_2}{D_1} \times$ $\quad \times \cos(\ln D_1)$ $F_1 = \cos(\ln D_1)$ $F_2 = -\frac{D_2}{D_1} \times$ $\quad \times \sin(\ln D_1)$	$F_k = \frac{1}{2(k-1) \cdot D_1^2 \cdot F_2} \left(-2(k-1)(F_1^2 - 1) \cdot D_2 \cdot D_k - \right.$ $- 2F_2^2D_1 \cdot D_{k-1} - 2D_2^2 \cdot F_1 \cdot F_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-3} (F_2^2 \cdot D_{i+1} \cdot D_{k-1-i} +$ $+ D_2^2F_{i+1} \cdot F_{k-1-i} + (i+1)(k-1-i)((F_1^2 - 1)D_{i+2} \cdot D_{k-i} +$ $+ D_1^2 \cdot F_{i+2} \cdot F_{k-i}) + (\sum_{q=0}^{k-i-2} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot F_{q+2} \cdot F_{i+2-q}) +$ $+ (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q)D_{q+2} \cdot D_{i+2-q}) (\sum_{q=0}^{k-i-2} F_{q+1}F_{k-1-i-q})))$

Таблица П.10

Функция	Начал.знач.	Маршрутные рекуррентные уравнения
$\ln D$	$L_1 = \ln D_1$	$(k-1)D_k - \sum_{q=0}^{k-2} (q+1)L_{q+2} \cdot D_{k-1-q} = 0$
$(\ln D)^m$	$F_1 = (L_1)^m$	$\sum_{i=0}^{k-2} (m \cdot (i+1)D_{i+2} \cdot F_{k-1-i} -$ $-L_{i+1} \cdot \sum_{q=0}^i (q+1)F_{q+2} \cdot D_{k-1-i-q}) = 0$
$\sin^2 D$	$S_1 = \sin^2 D_1$ $H_1 = \sin(2D_1)$ $S_2 = H_1 D_2$	$\sum_{i=0}^{k-2} ((i+1)(k-1-i)S_{i+2}S_{k-i} - 4(S_{i+1} - \sum_{q=0}^i S_{q+1}S_{i+1-q}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^{k-i-2} (q+1)(k-1-i-q) \cdot D_{q+2} \cdot D_{k-i-q})) = 0$
$(\sin D)^m$ $(\cos D)^m$	$F_1 = (\sin D_1)^m$ $F_2 = mF_1 D_2 \times$ $\times \operatorname{ctg} D_1$ $F_1 = \cos^m D_1$ $F_2 = -mF_1 \times$ $\times D_2 \cdot \operatorname{tg} D_1$	$\sum_{j=0}^{k-2} ((\sum_{i=0}^j ((i+1)(j+1-i)F_{i+2}F_{j+2-i} + m^2(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \times$ $\times D_{q+2}D_{i+2-q})(\sum_{q=0}^{j-i} F_{q+1} \cdot F_{j+1-i-q}))) \cdot S_{k-1-j} - m^2(\sum_{q=0}^j (q+1) \times$ $\times (j+1-q) \cdot D_{q+2} \cdot D_{j+2-q}) \cdot (\sum_{q=0}^{k-2-j} F_{q+1} \cdot F_{k-1-j-q})) = 0$
$e^{\operatorname{tg} D}$	$F_1 = e^{\operatorname{tg} D_1}$	$(k-1)F_k - \sum_{q=0}^{k-2} (q+1) \cdot (F_{q+2} \cdot S_{k-1-q} - D_{q+2} \cdot F_{k-1-q}) = 0$
$e^{\operatorname{ctg} D}$	$F_1 = e^{\operatorname{ctg} D_1}$	$\sum_{q=0}^{k-2} (q+1) \cdot (F_{q+2} \cdot S_{k-1-q} + D_{q+2} \cdot F_{k-1-q}) = 0$
$\operatorname{arctg} D$	$T_1 = \operatorname{arctg} D_1$	$(k-1)(T_k - D_k) + \sum_{i=0}^{k-2} (i+1)T_{i+2} (\sum_{q=0}^{k-2-i} D_{q+1} D_{k-1-i-q}) = 0$
$(\operatorname{arctg} D)^m$	$F_1 = (T_1)^m$ $F_2 = \frac{mF_1 \times}{1 + D_1^2}$ $\times D_2 / T_1$	$\sum_{j=0}^{k-2} ((j+1) \cdot (F_{j+2} \cdot T_{k-1-j} - m \cdot D_{j+2} \cdot F_{k-1-j}) +$ $+ T_{k-1-j} \cdot \sum_{i=0}^j (i+1)F_{i+2} \cdot (\sum_{q=0}^{j-i} D_{q+1} \cdot D_{j+1-i-q})) = 0$
$\operatorname{arctg} D$	$C_1 = \operatorname{arctg} D_1$	$(k-1)(C_k + D_k) + \sum_{i=0}^{k-2} (i+1)C_{i+2} (\sum_{q=0}^{k-2-i} D_{q+1} D_{k-1-i-q}) = 0$
$\operatorname{arctg}^m D$	$F_1 = (C_1)^m$ $F_2 = \frac{-m \times}{1 + D_1^2}$ $\times F_1 \cdot D_2 / C_1$	$\sum_{j=0}^{k-2} ((j+1) \cdot (F_{j+2} \cdot C_{k-1-j} + m \cdot D_{j+2} \cdot F_{k-1-j}) +$ $+ C_{k-1-j} \cdot \sum_{i=0}^j (i+1)F_{i+2} \cdot (\sum_{q=0}^{j-i} D_{q+1} \cdot D_{j+1-i-q})) = 0$

Таблица П.11

Функция	Начал. знач.	Маршрутные рекуррентные уравнения
$\sin 2D$	$S_1^{(1)} = \sin 2D_1$ $S_2^{(1)} = 2D_2 \times$ $\times \cos 2D_1$	$\sum_{i=0}^{k-2} ((i+1)(k-1-i) \cdot (S_{i+2}^{(1)} \cdot S_{k-i}^{(1)} - 4D_{i+2} \cdot D_{k-i}) +$ $+ 4 \cdot (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot D_{q+2} \cdot D_{i+2-q}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^{k-i-2} S_{q+1}^{(1)} \cdot S_{k-1-i-q}^{(1)})) = 0$
$\operatorname{tg} D$	$F_1 = \operatorname{tg} D_1$ $F_2 = \frac{2F_1 D_2}{S_1^{(1)}}$	$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \cdot (F_{i+2} \cdot S_{k-1-i}^{(1)} - 2D_{i+2} \cdot F_{k-1-i}) = 0$
$\operatorname{ctg} D$	$F_1 = \operatorname{ctg} D_1$ $F_2 = \frac{2F_1 D_2}{-S_1^{(1)}}$	$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \cdot (F_{i+2} \cdot S_{k-1-i}^{(1)} + 2D_{i+2} \cdot F_{k-1-i}) = 0$
$(\operatorname{tg} D)^m$	$F_1 = (\operatorname{tg} D_1)^m$ $F_2 = \frac{2mF_1 D_2}{S_1^{(1)}}$	$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \cdot (F_{i+2} \cdot S_{k-1-i}^{(1)} - 2mD_{i+2} \cdot F_{k-1-i}) = 0$
$(\operatorname{ctg} D)^m$	$F_1 = (\operatorname{ctg} D_1)^m$ $F_2 = \frac{2mF_1 D_2}{-S_1^{(1)}}$	$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \cdot (F_{i+2} \cdot S_{k-1-i}^{(1)} + 2mD_{i+2} \cdot F_{k-1-i}) = 0$
$\arcsin^2 D$	$R_1 = (\arcsin D_1)^2$ $R_2 = \frac{2D_2 \sqrt{R_1}}{\sqrt{1-D_1^2}}$	$\sum_{i=0}^{k-2} ((i+1)(k-1-i) R_{i+2} \cdot R_{k-i} - 4R_{k-1-i} (\sum_{q=0}^i (q+1) \times$ $\times (i+1-q) D_{q+2} \cdot D_{i+2-q}) - (\sum_{q=0}^{k-i-2} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot R_{q+2} \cdot R_{i+2-q})) = 0$
$\arcsin^m D$ $\arccos^m D$	$F_1 = (\arcsin D_1)^m$ $F_2 = \frac{mF_1 D_2}{\sqrt{1-D_1^2}}$ $F_1 = (\arccos D_1)^m$ $F_2 = \frac{-mF_1 D_2}{\sqrt{1-D_1^2}}$	$\sum_{j=0}^{k-2} (R_{k-1-j} \cdot (\sum_{i=0}^j ((i+1)(j+1-i) \cdot F_{i+2} \cdot F_{j+2-i} -$ $- (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot F_{q+2} \cdot F_{i+2-q}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^{j-i} D_{q+1} \cdot D_{j+1-i-q}))) - m^2 (\sum_{q=0}^j (q+1)(j+1-q) \times$ $\times D_{q+2} \cdot D_{j+2-q}) \cdot (\sum_{q=0}^{k-2-j} F_{q+1} \cdot F_{k-1-j-q})) = 0$

Таблица П.12

Функция	Начал.знач.	Маршрутные рекуррентные формулы
$\ln D$	$L_1 = \ln D_1$	$L_k = \frac{1}{(k-1)D_1} \left((k-1)D_k - \sum_{q=0}^{k-3} (q+1)L_{q+2} \cdot D_{k-1-q} \right)$
$(\ln D)^m$	$F_1 = (L_1)^m$ $F_2 = \frac{mF_1 D_2}{D_1 L_1}$	$F_k = \frac{1}{(k-1)D_1 \cdot L_1} \left(m(k-1)F_1 \cdot D_k + \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \times \right.$ $\left. \times (m \cdot D_{i+2} \cdot F_{k-1-i} - F_{i+2} \cdot \sum_{q=0}^{k-2-i} L_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q}) \right)$
$\sin^2 D$	$S_1 = \sin^2 D_1$ $S_2 = D_2 \times \sin(2D_1)$	$S_k = (8(k-1) \cdot (S_1 - S_1^2) \cdot D_2 \cdot D_k + 4D_2^2 \cdot (1 - 2S_1) \cdot S_{k-1} +$ $+ \sum_{i=1}^{k-3} ((i+1)(k-1-i)(4(S_1 - S_1^2) \cdot D_{i+2} \cdot D_{k-i} - S_{i+2} \cdot S_{k-i}) -$ $- 4D_2^2 \cdot S_{i+1} S_{k-1-i} + 4(S_{i+1} - \sum_{q=0}^i S_{q+1} \cdot S_{i+1-q}) (\sum_{q=0}^{k-i-2} (q+1) \times$ $\times (k-1-i-q) D_{q+2} \cdot D_{k-i-q}))) / (2(k-1)S_2)$
$e^{\text{tg}D}$	$F_1 = e^{\text{tg}D_1}$ $F_2 = \frac{F_1 D_2}{S_1}$	$F_k = \frac{1}{(k-1)(S_1 - 1)} \left(-(k-1)F_1 \cdot D_k - \sum_{q=0}^{k-3} (q+1) \times \right.$ $\left. \times (D_{q+2} \cdot F_{k-1-q} + F_{q+2} \cdot S_{k-1-q}) \right)$
$e^{\text{ctg}D}$	$F_1 = e^{\text{ctg}D_1}$ $F_2 = \frac{F_1 D_2}{-S_1}$	$F_k = \frac{1}{(k-1)S_1} \left(-(k-1)F_1 \cdot D_k - \sum_{q=0}^{k-3} (q+1) \times \right.$ $\left. \times (D_{q+2} \cdot F_{k-1-q} + F_{q+2} \cdot S_{k-1-q}) \right)$
$\text{arctg}D$	$T_1 = \text{arctg}D_1$ $T_2 = \frac{D_2}{D_1^2 + 1}$	$T_k = ((k-1)D_k - \sum_{i=0}^{k-3} (i+1)T_{i+2} \cdot (\sum_{q=0}^{k-2-i} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q})) /$ $/((k-1) \cdot (D_1^2 + 1))$
$(\text{arctg}D)^m$	$F_1 = \text{arctg}^m D_1$ $F_2 = \frac{mF_1 \times D_2}{D_1^2 + 1} \times \frac{D_2}{T_1}$	$F_k = (-(D_1^2 + 1)F_2 \cdot T_{k-1} - 2D_1 \cdot F_2 \cdot T_1 \cdot D_{k-1} + m(D_2 \cdot F_{k-1} +$ $+ (k-1)F_1 \cdot D_k) - \sum_{j=1}^{k-3} (T_1 \cdot F_2 \cdot D_{j+1} \cdot D_{k-1-j} - m \cdot (j+1)D_{j+2} \times$ $\times F_{k-1-j} + (j+1)F_{j+2} \cdot (T_{k-1-j} + T_1 \cdot \sum_{q=0}^{k-2-j} D_{q+1} \cdot D_{k-1-j-q}) +$ $+ T_{k-1-j} \cdot (\sum_{i=0}^j (i+1)F_{i+2} \cdot (\sum_{q=0}^{j-i} D_{q+1} \cdot D_{j+1-i-q})))) /$ $/((k-1) \cdot (D_1^2 + 1) \cdot T_1)$

Таблица П.13

Функция	Начал.знач.	Маршрутные рекуррентные формулы
$\text{arctg}D$	$C_1 = \text{arctg}D_1$ $C_2 = \frac{-D_2}{D_1^2 + 1}$	$C_k = \frac{1}{(k-1) \cdot (D_1^2 + 1)} \cdot \left(-(1-k)D_k - \sum_{i=0}^{k-3} (i+1)C_{i+2} \times \right. \\ \left. \times \left(\sum_{q=0}^{k-2-i} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q} \right) \right)$
$\text{arctg}^m D$	$F_1 =$ $= \text{arctg}^m D_1$ $F_2 = \frac{mF_1 \times}{D_1^2 + 1}$ $\times \frac{-D_2}{C_1}$	$F_k = \left(-(D_1^2 + 1)F_2 \cdot C_{k-1} - 2D_1F_2 \cdot C_1 \cdot D_{k-1} - m(D_2 \cdot F_{k-1} + \right. \\ + (k-1)F_1 \cdot D_k) - \sum_{j=1}^{k-3} \left(C_1 \cdot F_2 \cdot D_{j+1} \cdot D_{k-1-j} + m \cdot (j+1) \times \right. \\ \times D_{j+2} \cdot F_{k-1-j} + (j+1)F_{j+2} \cdot (C_{k-1-j} + C_1 \cdot \sum_{q=0}^{k-2-j} D_{q+1} \times \\ \times D_{k-1-j-q}) + C_{k-1-j} \cdot (\sum_{i=0}^j (i+1)F_{i+2} \cdot (\sum_{q=0}^{j-i} D_{q+1} \times \\ \times D_{j+1-i-q})) \Big) \Big) / ((k-1) \cdot (D_1^2 + 1) \cdot C_1)$
$\sin 2D$	$S_1^{(1)} = \sin 2D_1$ $S_2^{(1)} = D_2 \times$ $\times 2 \cos 2D_1$	$S_k^{(1)} = \left(8(k-1) \cdot (1 - (S_1^{(1)})^2) \cdot D_2 \cdot D_k - 8D_2^2 \cdot S_1^{(1)} \cdot S_{k-1}^{(1)} + \right. \\ + \sum_{i=1}^{k-3} \left((i+1)(k-1-i) \cdot (-S_{i+2}^{(1)} \cdot S_{k-i}^{(1)} + 4(1 - (S_1^{(1)})^2) \cdot D_{i+2} \times \right. \\ \times D_{k-i}) - 4 \cdot D_2^2 \cdot S_{i+1}^{(1)} \cdot S_{k-1-i}^{(1)} - 4 \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} S_{q+1}^{(1)} \cdot S_{k-1-i-q}^{(1)} \right) \times \\ \times \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot D_{q+2} \cdot D_{i+2-q} \right) \Big) \Big) / (2(k-1)S_2^{(1)})$
$\text{tg}D$	$F_1 = \text{tg}D_1$ $F_2 = \frac{2F_1D_2}{S_1^{(1)}}$	$F_k = \left(2(k-1)D_k \cdot F_1 - \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \cdot (F_{i+2} \cdot S_{k-1-i}^{(1)} - \right. \\ \left. - 2D_{i+2} \cdot F_{k-1-i}) \right) / ((k-1)S_1^{(1)})$
$\text{ctg}D$	$F_1 = \text{ctg}D_1$ $F_2 = \frac{2F_1D_2}{-S_1^{(1)}}$	$F_k = \left(-2(k-1)D_k \cdot F_1 - \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \cdot (F_{i+2} \cdot S_{k-1-i}^{(1)} + \right. \\ \left. + 2D_{i+2} \cdot F_{k-1-i}) \right) / ((k-1)S_1^{(1)})$
$(\text{tg}D)^m$	$F_1 = \text{tg}^m D_1$ $F_2 = \frac{2mF_1D_2}{S_1^{(1)}}$	$F_k = \left(2m \cdot (k-1)D_k \cdot F_1 - \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \cdot (F_{i+2} \cdot S_{k-1-i}^{(1)} - \right. \\ \left. - 2m \cdot D_{i+2} \cdot F_{k-1-i}) \right) / ((k-1)S_1^{(1)})$
$(\text{ctg}D)^m$	$F_1 = \text{ctg}^m D_1$ $F_2 = \frac{2mF_1D_2}{-S_1^{(1)}}$	$F_k = \left(-2m \cdot (k-1)D_k \cdot F_1 - \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \cdot (F_{i+2} \cdot S_{k-1-i}^{(1)} + \right. \\ \left. + 2m \cdot D_{i+2} \cdot F_{k-1-i}) \right) / ((k-1)S_1^{(1)})$

Таблица П.14

Функция	Формулы A_k	Обратные рекуррентные формулы B_k
D^m	$A_k = \frac{mF_1}{D_1}$	$B_k = \frac{1}{(k-1)D_1} \left(\sum_{q=0}^{k-3} (q+1) \cdot (mD_{q+2} \cdot F_{k-1-q} - F_{q+2} \cdot D_{k-1-q}) \right)$
$m\sqrt{D}$	$A_k = \frac{F_1}{mD_1}$	$B_k = \frac{1}{m(k-1)D_1} \left(\sum_{q=1}^{k-2} ((m+1)q - m(k-1)) \cdot D_{q+1} \cdot F_{k-q} \right)$
e^D	$A_k = F_1$	$B_k = \frac{1}{k-1} \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-3} (q+1) D_{q+2} \cdot F_{k-1-q} \right)$
$e^{\sqrt{D}}$	$A_k = \frac{F_1}{2\sqrt{D_1}}$ $F_2 = \frac{D_2 F_1}{2\sqrt{D_1}}$	$B_k = \frac{1}{8(k-1)D_1 \cdot F_2} \left(-4F_2^2 \cdot D_{k-1} + 2D_2^2 \cdot F_1 \cdot F_{k-1} + \right.$ $\left. + \sum_{i=1}^{k-3} ((i+1)(k-1-i)(F_1^2 D_{i+2} F_{k-i} - 4D_1 \cdot F_{i+2} F_{k-i}) + D_2^2 \times \right.$ $\left. \times F_{i+1} F_{k-1-i} - 4D_{k-1-i} \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) F_{q+2} \cdot F_{i+2-q} \right) \right) +$ $\left. + \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} (q+1)(k-1-i-q) D_{q+2} \cdot D_{k-i-q} \right) \left(\sum_{q=0}^i F_{q+1} F_{i+1-q} \right) \right)$
e^{D^2}	$A_k = 2D_1 F_1$ $F_2 = 2F_1 D_1 D_2$	$B_k = \frac{2}{k-1} \left(\sum_{i=1}^{k-2} D_{i+1} \cdot \sum_{q=0}^{k-i-2} (q+1) D_{q+2} \cdot F_{k-1-i-q} + \right.$ $\left. + D_1 \cdot \sum_{q=0}^{k-3} (q+1) D_{q+2} \cdot F_{k-1-q} \right)$
e^{D^3}	$A_k = 3D_1^2 F_1$ $F_2 = 3F_1 D_1^2 D_2$	$B_k = \frac{3}{k-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k-2} \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} (q+1) D_{q+2} \cdot F_{k-1-i-q} \right) \times \right.$ $\left. \times \left(\sum_{q=0}^i D_{q+1} \cdot D_{i+1-q} \right) + D_1^2 \cdot \sum_{q=0}^{k-3} (q+1) D_{q+2} \cdot F_{k-1-q} \right)$
e^{D^4}	$A_k = 4D_1^3 F_1$ $F_2 = 4F_1 D_1^3 D_2$	$B_k = \frac{4}{k-1} \left(\sum_{j=1}^{k-2} \left(\sum_{q=0}^{k-j-2} (q+1) D_{q+2} \cdot F_{k-1-j-q} \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^j D_{j+1-i} \times \right. \right.$ $\left. \times \left(\sum_{q=0}^i D_{q+1} \cdot D_{i+1-q} \right) \right) + D_1^3 \cdot \sum_{q=0}^{k-3} (q+1) D_{q+2} \cdot F_{k-1-q} \right)$
$e^{\frac{1}{D}}$	$A_k = -\frac{F_1}{D_1^2}$ $F_2 = -\frac{D_2 F_1}{D_1^2}$	$B_k = \frac{-1}{(k-1)D_1^2} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \cdot (D_{i+2} \cdot F_{k-1-i} + \right.$ $\left. + F_{i+2} \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q} \right) \right)$

Таблица П.15

Функ- ция	Формулы A_k	Обратные рекуррентные формулы B_k
$C^m e^{\pm D}$	$A_k = \pm F_1$ $F_2 = \frac{F_1}{C_1} \times$ $\times (m C_2 \pm$ $\pm C_1 D_2)$	$B_k = \frac{1}{(k-1)C_1} \left((k-1)m F_1 \cdot C_k + \sum_{i=0}^{k-3} ((i+1) \times \right.$ $\times (-F_{i+2} C_{k-1-i} + m \cdot C_{i+2} \cdot F_{k-1-i} \pm F_1 \cdot D_{i+2} \cdot C_{k-1-i}) \pm$ $\left. \pm F_{k-1-i} \cdot \sum_{q=0}^i (q+1) D_{q+2} \cdot C_{i+1-q} \right)$
$e^{\frac{1}{D^2}}$	$A_k = \frac{-2F_1}{D_1^3}$ $F_2 = \frac{2D_2 F_1}{-D_1^3}$	$B_k = \frac{-1}{(k-1)D_1^3} \left(\sum_{j=0}^{k-3} (j+1) \cdot (2D_{j+2} \cdot F_{k-1-j} + \right.$ $\left. + F_{j+2} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-j-2} D_{k-1-j-i} \cdot \left(\sum_{q=0}^i D_{q+1} \cdot D_{i+1-q} \right) \right) \right)$
$e^{\frac{1}{D^3}}$	$A_k = \frac{-3F_1}{D_1^4}$ $F_2 = \frac{3D_2 F_1}{-D_1^4}$	$B_k = \frac{-1}{(k-1)D_1^4} \left(\sum_{j=0}^{k-3} (j+1) \cdot (3D_{j+2} \cdot F_{k-1-j} + \right.$ $\left. + F_{j+2} \sum_{i=0}^{k-j-2} \left(\sum_{q=0}^{k-j-i-2} D_{q+1} \cdot D_{k-1-j-i-q} \right) \left(\sum_{q=0}^i D_{q+1} \cdot D_{i+1-q} \right) \right)$
$e^{\frac{1}{\sqrt{D}}}$	$A_k =$ $= \frac{-F_1 \sqrt{D_1}}{2D_1^2}$ $F_2 = \frac{-F_1 \frac{D_2}{D_1}}{2\sqrt{D_1}}$	$B_k = \frac{1}{8(k-1)D_1^3 \cdot F_2} \left(\sum_{i=1}^{k-3} (i+1)(k-1-i) \cdot (F_1^2 \cdot D_{i+2} \cdot D_{k-i} - \right.$ $- 4 \cdot D_1^3 \cdot F_{i+2} \cdot F_{k-i}) - 4 \cdot \sum_{j=0}^{k-3} \left(\sum_{i=0}^{k-2-j} D_{k-1-j-i} \times \right.$ $\times \left(\sum_{q=0}^i D_{q+1} \cdot D_{i+1-q} \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^j (q+1)(j+1-q) F_{q+2} \cdot F_{j+2-q} \right) +$ $\left. + \sum_{i=1}^{k-2} \left(\sum_{q=0}^i F_{q+1} F_{i+1-q} \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-2-i} (q+1)(k-1-i-q) D_{q+2} D_{k-i-q} \right) \right)$
$\frac{1}{(\ln D)^2}$	$A_k = \frac{2\sqrt{F_1^3}}{-D_1}$ $F_2 = \frac{2D_2}{-D_1} \times$ $\times \sqrt{F_1^3}$	$B_k = \frac{1}{2(k-1)D_1^2 \cdot F_2} \left(\sum_{l=1}^{k-3} (-(l+1)(k-1-l) \cdot D_1^2 \cdot F_{l+2} \cdot F_{k-l} + \right.$ $+ 4(k-1-l) D_{k-l} \left(\sum_{j=0}^l (j+1) D_{j+2} \left(\sum_{i=0}^{l-j} F_{l+1-j-i} \cdot \sum_{q=0}^i F_{q+1} F_{i+1-q} \right) \right) -$ $- \sum_{l=0}^{k-3} \left(\left(\sum_{q=0}^{k-2-l} D_{q+1} \cdot D_{k-1-l-q} \right) \left(\sum_{q=0}^l (q+1)(l+1-q) F_{q+2} \cdot F_{l+2-q} \right) - \right.$ $\left. - 4(l+1) D_2 \cdot D_{l+2} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-2-l} F_{k-1-l-i} \cdot \left(\sum_{q=0}^i F_{q+1} \cdot F_{i+1-q} \right) \right) \right)$

Таблица П.16

Функция	Формулы A_k	Обратные рекуррентные формулы B_k
$\ln D$	$A_k = 1/D_1$ $F_2 = D_2/D_1$	$B_k = \frac{1}{(k-1)D_1} \left(-\sum_{q=0}^{k-3} (q+1)F_{q+2} \cdot D_{k-1-q} \right)$
$\frac{1}{\ln D}$	$A_k = \frac{-F_1^2}{D_1}$ $F_2 = \frac{-D_2 F_1^2}{D_1}$	$B_k = \frac{1}{(k-1)D_1} \cdot \left(-\sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \cdot (F_{i+2} \cdot D_{k-1-i} + \right.$ $\left. + D_{i+2} \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} F_{q+1} \cdot F_{k-1-i-q} \right) \right)$
$C \cdot \ln D$	$A_k = C_1/D_1$ $F_2 = \frac{F_1 C_2}{C_1} + \frac{C_1 D_2}{D_1}$	$B_k = \frac{1}{(k-1)D_1 \cdot C_1} \left((k-1)D_1 \cdot F_1 \cdot C_k + \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \times \right.$ $\times \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} (C_{i+2} \cdot F_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q} + D_{i+2} \cdot C_{q+1} \cdot C_{k-1-i-q} - \right.$ $\left. \left. - F_{i+2} \cdot C_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q} \right) \right)$
$\frac{C}{\ln D}$	$A_k = \frac{-F_1^2}{C_1 D_1}$ $F_2 = \frac{F_1 C_2}{C_1} - \frac{F_1^2 D_2}{C_1 D_1}$	$B_k = \frac{1}{(k-1)D_1 \cdot C_1} \left((k-1)D_1 \cdot F_1 \cdot C_k + \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \times \right.$ $\times \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} (C_{i+2} \cdot F_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q} + D_{i+2} \cdot C_{q+1} \cdot C_{k-1-i-q} - \right.$ $\left. \left. - F_{i+2} \cdot C_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q} \right) \right)$
$(\ln D)^2$	$A_k = \frac{2\sqrt{F_1}}{D_1}$ $F_2 = \frac{2D_2}{D_1} \times \sqrt{F_1}$	$B_k = \left(\sum_{i=1}^{k-3} (i+1)(k-1-i)(4F_1 \cdot D_{i+2} D_{k-i} - D_1^2 F_{i+2} \cdot F_{k-i}) - \right.$ $\left. - \sum_{i=0}^{k-3} \left(\sum_{q=0}^{k-2-q} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q} \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot F_{q+2} \times \right. \right.$ $\left. \times F_{i+2-q} \right) - 4F_{k-1-i} \cdot \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) D_{q+2} \cdot D_{i+2-q} \right) \Big) /$ $\Big/ (2(k-1)D_1^2 \cdot F_2)$
$\sqrt{\ln D}$	$A_k = \frac{1}{2D_1 F_1}$ $F_2 = \frac{D_2}{2D_1 F_1}$	$B_k = \frac{1}{(k-1)D_1 \cdot F_1} \left(-\sum_{i=0}^{k-3} ((i+1)D_1 \cdot F_{i+2} \cdot F_{k-1-i} + \right.$ $\left. + D_{k-1-i} \cdot \left(\sum_{q=0}^i (q+1)F_{q+2} \cdot F_{i+1-q} \right) \right)$
$\frac{1}{\sqrt{\ln D}}$	$A_k = \frac{-F_1^3}{2D_1}$ $F_2 = \frac{-D_2 F_1^3}{2D_1}$	$B_k = \frac{1}{2(k-1)D_1} \left(-\sum_{j=0}^{k-3} (j+1) \cdot (2F_{j+2} D_{k-1-j} + \right.$ $\left. + D_{j+2} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-j-2} F_{k-1-j-i} \cdot \left(\sum_{q=0}^i F_{q+1} F_{i+1-q} \right) \right) \right)$

Таблица П.17

Функция	Формулы A_k	Обратные рекуррентные формулы B_k
$\sin D$ $\cos D$	$A_k = \sqrt{1 - F_1^2}$ $F_1 = \sin D_1$ $F_2 = D_2 \times$ $\times \cos D_1$ $F_1 = \cos D_1$ $F_2 = -D_2 \times$ $\times \sin D_1$	$B_k = \frac{1}{2(k-1)F_2} \left(-2D_2^2 F_1 \cdot F_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-3} ((i+1) \times \right.$ $\times (k-1-i) \cdot (-F_{i+2} \cdot F_{k-i} + D_{i+2} \cdot D_{k-i} \cdot (1 - F_1^2)) -$ $- D_2^2 \cdot F_{i+1} \cdot F_{k-1-i} - \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} F_{q+1} \cdot F_{k-1-i-q} \right) \times$ $\times \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) D_{q+2} \cdot D_{i+2-q} \right) \Big)$
$\arcsin D$ $\arccos D$	$A_k = \frac{1}{\sqrt{1 - D_1^2}}$ $F_1 = \arcsin D_1$ $F_2 = \frac{D_2}{\sqrt{1 - D_1^2}}$ $F_1 = \arccos D_1$ $F_2 = \frac{-D_2}{\sqrt{1 - D_1^2}}$	$B_k = \left(-2F_2^2 D_1 \cdot D_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-3} (F_2^2 D_{i+1} \cdot D_{k-1-i} + \right.$ $+ (i+1)(k-1-i) \cdot ((D_1^2 - 1) F_{i+2} \cdot F_{k-i} + D_{i+2} \cdot D_{k-i}) +$ $+ \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) F_{q+2} \cdot F_{i+2-q} \right) \times$ $\times \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q} \right) \Big) / (2(k-1) \cdot (D_1^2 - 1) \cdot F_2)$
$\operatorname{arctg} D$	$A_k = \frac{1}{1 + D_1^2}$	$B_k = \frac{-1}{(k-1) \cdot (1 + D_1^2)} \left(\sum_{i=0}^{k-3} (i+1) F_{i+2} \left(\sum_{q=0}^{k-2-i} D_{q+1} D_{k-1-i-q} \right) \right)$
$\operatorname{arctg} D$	$A_k = \frac{-1}{1 + D_1^2}$	$B_k = \frac{-1}{(k-1) \cdot (1 + D_1^2)} \left(\sum_{i=0}^{k-3} (i+1) F_{i+2} \left(\sum_{q=0}^{k-2-i} D_{q+1} D_{k-1-i-q} \right) \right)$
$e^{\arcsin D}$ $e^{\arccos D}$	$A_k = \frac{F_1}{\sqrt{1 - D_1^2}}$ $F_1 = e^{\arcsin D_1}$ $F_2 = \frac{F_1 D_2}{\sqrt{1 - D_1^2}}$ $F_1 = e^{\arccos D_1}$ $F_2 = \frac{-F_1 D_2}{\sqrt{1 - D_1^2}}$	$B_k = \frac{1}{2(k-1)(D_1^2 - 1)F_2} \left(-2F_2^2 \cdot D_1 \cdot D_{k-1} - 2D_2^2 \times \right.$ $\times F_1 \cdot F_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-3} ((i+1)(k-1-i) \cdot ((D_1^2 - 1) F_{i+2} \cdot F_{k-i} +$ $+ D_{i+2} D_{k-i} \cdot F_1^2) + D_2^2 \cdot F_{i+1} \cdot F_{k-1-i} +$ $+ F_2^2 D_{i+1} \cdot D_{k-1-i} + \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) F_{q+2} F_{i+2-q} \right) \times$ $\times \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} D_{q+1} D_{k-1-i-q} \right) + \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} F_{q+1} F_{k-1-i-q} \right) \times$ $\times \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) D_{q+2} \cdot D_{i+2-q} \right) \Big)$

Таблица П.18

Функция	Формулы A_k	Обратные рекуррентные формулы B_k
$\sin(mD)$ $\cos(mD)$	$A_k = m\sqrt{1-F_1^2}$ $F_1 = \sin(mD_1)$ $F_2 = mD_2 \times$ $\times \cos(mD_1)$ $F_1 = \cos(mD_1)$ $F_2 = -mD_2 \times$ $\times \sin(mD_1)$	$B_k = \frac{1}{2(k-1) \cdot F_2} \left(-2m^2 \cdot D_2^2 \cdot F_1 \cdot F_{k-1} + \right.$ $\left. + \sum_{i=1}^{k-3} ((i+1)(k-1-i)(-F_{i+2}F_{k-i} + m^2 D_{i+2} D_{k-i} \times \right.$ $\times (1 - F_1^2)) - m^2 D_2^2 \cdot F_{i+1} \cdot F_{k-1-i} - m^2 \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} F_{q+1} \times \right.$ $\times F_{k-1-i-q} \cdot \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot D_{q+2} \cdot D_{i+2-q} \right) \left. \right) \left. \right)$
$\sin^2 D$ $\cos^2 D$	$A_k = 2\sqrt{F_1 - F_1^2}$ $F_1 = \sin^2 D_1$ $F_2 = D_2 \times$ $\times \sin(2D_1)$ $F_1 = \cos^2 D_1$ $F_2 = -D_2 \times$ $\times \sin(2D_1)$	$B_k = \frac{1}{2(k-1)F_2} \cdot (4D_2^2 \cdot (1-2F_1) \cdot F_{k-1} +$ $+ \sum_{i=1}^{k-3} ((i+1)(k-1-i)(4(F_1 - F_1^2)D_{i+2}D_{k-i} - F_{i+2}F_{k-i})$ $- 4D_2^2 \cdot F_{i+1} \cdot F_{k-1-i} + 4(F_{i+1} - \sum_{q=0}^i F_{q+1} \cdot F_{i+1-q}) \times$ $\times \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} (q+1)(k-1-i-q)D_{q+2} \cdot D_{k-i-q} \right) \left. \right)$
$\arcsin^2 D$ $\arccos^2 D$	$A_k = \frac{2\sqrt{F_1}}{\sqrt{1-D_1^2}}$ $F_1 = \arcsin^2 D_1$ $F_2 = \frac{2D_2\sqrt{F_1}}{\sqrt{1-D_1^2}}$ $F_1 = \arccos^2 D_1$ $F_2 = \frac{-2D_2\sqrt{F_1}}{\sqrt{1-D_1^2}}$	$B_k = \frac{1}{2(k-1)(D_1^2-1)F_2} \left(-2F_2^2 D_1 \cdot D_{k-1} - 4D_2^2 F_{k-1} - \right.$ $\left. - \sum_{i=1}^{k-3} (F_2^2 \cdot D_{i+1} \cdot D_{k-1-i} + (i+1)(k-1-i) \cdot ((D_1^2-1) \times \right.$ $\times F_{i+2} \cdot F_{k-i} + 4F_1 \cdot D_{i+2} \cdot D_{k-i}) + \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \times \right.$ $\times F_{q+2} \cdot F_{i+2-q} \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q} \right) +$ $\left. + 4F_{k-1-i} \cdot \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q)D_{q+2} \cdot D_{i+2-q} \right) \right) \left. \right)$
$e^{\operatorname{arctg} D}$	$A_k = \frac{F_1}{1+D_1^2}$ $F_2 = \frac{F_1 D_2}{1+D_1^2}$	$B_k = \frac{1}{(k-1) \cdot (1+D_1^2)} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \cdot (D_{i+2} \cdot F_{k-1-i} - \right.$ $\left. - F_{i+2} \cdot \sum_{q=0}^{k-2-i} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q} \right)$
$e^{\operatorname{arctg} D}$	$A_k = \frac{-F_1}{1+D_1^2}$ $F_2 = \frac{-F_1 D_2}{1+D_1^2}$	$B_k = \frac{1}{(k-1) \cdot (1+D_1^2)} \cdot \left(- \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \cdot (D_{i+2} \cdot F_{k-1-i} + \right.$ $\left. + F_{i+2} \cdot \sum_{q=0}^{k-2-i} D_{q+1} \cdot D_{k-1-i-q} \right)$

Таблица П.19

Функция	Начальные значения	Двумерные рекуррентные уравнения
D^m	$F_{1,1} = (D_{1,1})^m$	$\sum_{q=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} ((q+1) \cdot (F_{q+2, \xi+1} \cdot D_{k-1-q, w-\xi} - m \cdot D_{q+2, \xi+1} \cdot F_{k-1-q, w-\xi})) = 0$
$\ln D$	$F_{1,1} = \ln D_{1,1}$	$\sum_{q=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} ((q+1) \cdot (F_{q+2, \xi+1} \cdot D_{k-1-q, w-\xi}) - (k-1) D_{k, w}) = 0$
$\ln^2 D$	$F_{1,1} = (\ln D_{1,1})^2$	$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} ((\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot \sum_{\varsigma=0}^{\xi} F_{q+2, \varsigma+1} \cdot F_{i+2-q, \xi+1-\varsigma}) \times \\ & \times (\sum_{q=0}^{k-2-i} \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} D_{q+1, \varsigma+1} \cdot D_{k-1-i-q, w-\xi-\varsigma}) - 4 F_{k-1-i, w-\xi} \times \\ & \times (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{q+2, \varsigma+1} \cdot D_{i+2-q, \xi+1-\varsigma})) = 0 \end{aligned}$
$\frac{1}{\ln D}$	$F_{1,1} = \frac{1}{\ln D_{1,1}}$	$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} ((i+1) \cdot (F_{i+2, \xi+1} \cdot D_{k-1-i, w-\xi} + \\ & + D_{i+2, w-\xi} \cdot \sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} F_{q+1, \varsigma+1} \cdot F_{k-1-i-q, \xi+1-\varsigma})) = 0 \end{aligned}$
$\sqrt{\ln D}$	$F_{1,1} = \sqrt{\ln D_{1,1}}$	$\begin{aligned} & 2 \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} D_{k-1-i, w-\xi} \cdot (\sum_{q=0}^i \sum_{\varsigma=0}^{\xi} (q+1) \times \\ & \times F_{q+2, \varsigma+1} \cdot F_{i+1-q, \xi+1-\varsigma}) - (k-1) D_{k, w} = 0 \end{aligned}$
$\frac{1}{\sqrt{\ln D}}$	$F_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{\ln D_{1,1}}}$	$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} (2(i+1) F_{i+2, \xi+1} D_{k-1-i, w-\xi} + (\sum_{q=0}^i \sum_{\varsigma=0}^{\xi} (q+1) D_{q+2, \varsigma+1} \times \\ & \times F_{i+1-q, \xi+1-\varsigma}) (\sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} F_{q+1, \varsigma+1} \cdot F_{k-1-i-q, w-\xi-\varsigma})) = 0 \end{aligned}$
$\frac{C}{\ln D}$	$F_{1,1} = \frac{C_{1,1}}{\ln D_{1,1}}$	$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} ((i+1) \sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} (F_{i+2, w-\xi} C_{q+1, \varsigma+1} \cdot D_{k-1-i-q, \xi+1-\varsigma} - \\ & - C_{i+2, w-\xi} \cdot F_{q+1, \varsigma+1} \cdot D_{k-1-i-q, \xi+1-\varsigma} + \\ & + D_{i+2, w-\xi} \cdot F_{q+1, \varsigma+1} \cdot F_{k-1-i-q, \xi+1-\varsigma})) = 0 \end{aligned}$

Таблица П.20

Функция	Начальные значения	Двумерные рекуррентные уравнения
$e^{\sqrt{D}}$	$F_{1,1} = e^{\sqrt{D_{1,1}}}$	$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \left(4 \sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) D_{k-1-i, w-\xi} \cdot \sum_{\varsigma=0}^{\xi} F_{q+2, \varsigma+1} \times \right.$ $\times F_{i+2-q, \xi+1-\varsigma} - \left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{q+2, \varsigma+1} D_{i+2-q, \xi+1-\varsigma} \right) \times$ $\times \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} F_{q+1, \varsigma+1} \cdot F_{k-1-i-q, w-\xi-\varsigma} \right) \Big) = 0$
$e^{\frac{1}{D}}$	$F_{1,1} = e^{\frac{1}{D_{1,1}}}$	$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} (i+1) \cdot (D_{i+2, \xi+1} \cdot F_{k-1-i, w-\xi} +$ $+ F_{i+2, w-\xi} \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{q+1, \varsigma+1} \cdot D_{k-1-i-q, \xi+1-\varsigma} \right)) = 0$
$e^{\frac{1}{D^2}}$	$F_{1,1} = e^{\frac{1}{(D_{1,1})^2}}$	$\sum_{j=0}^{k-2} (j+1) \cdot \sum_{\xi=0}^{w-1} (2 \cdot D_{j+2, \xi+1} \cdot F_{k-1-j, w-\xi} + F_{j+2, w-\xi} \times$ $\times \left(\sum_{i=0}^{k-j-2} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{k-1-j-i, \xi+1-\varsigma} \left(\sum_{q=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\varsigma} D_{q+1, \varepsilon+1} D_{i+1-q, \varsigma+1-\varepsilon} \right) \right)) = 0$
$e^{\frac{1}{\sqrt{D}}}$	$F_{1,1} = e^{\frac{1}{\sqrt{D_{1,1}}}}$	$\sum_{j=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \left(4 \left(\sum_{i=0}^{k-2-j} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{k-1-j-i, \xi+1-\varsigma} \times \right. \right.$ $\times \sum_{q=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\varsigma} D_{q+1, \varepsilon+1} D_{i+1-q, \varsigma+1-\varepsilon} \Big) \times$ $\times \left(\sum_{i=0}^j (i+1)(j+1-i) \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} F_{i+2, \varsigma+1} \cdot F_{j+2-i, w-\xi-\varsigma} \right) -$ $- \left(\sum_{i=0}^{k-2-j} \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} (i+1)(k-1-j-i) \cdot D_{i+2, \varsigma+1} \cdot D_{k-j-i, w-\xi-\varsigma} \right) \times$ $\times \left(\sum_{i=0}^j \sum_{\varsigma=0}^{\xi} F_{i+1, \varsigma+1} \cdot F_{j+1-i, \xi+1-\varsigma} \right) \Big) = 0$
e^{D^4}	$F_{1,1} = e^{D_{1,1}^4}$	$4 \cdot \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \left(\left(\sum_{q=0}^{k-j-2} (q+1) \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} D_{q+2, \varsigma+1} \cdot F_{k-1-j-q, w-\xi-\varsigma} \right) \times \right.$ $\times \left(\sum_{i=0}^j \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{j+1-i, \xi+1-\varsigma} \cdot \left(\sum_{q=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\varsigma} D_{q+1, \varepsilon+1} \cdot D_{i+1-q, \varsigma+1-\varepsilon} \right) \right) \Big) -$ $-(k-1)F_{k,w} = 0$

Таблица П.21

Функция	Начал. знач.	Двумерные рекуррентные уравнения
$\sin(mD)$	$F_{1,1} = \sin(mD_{1,1})$	$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} ((i+1)(k-1-i) \cdot (F_{i+2, \xi+1} \cdot F_{k-i, w-\xi} - m^2 \cdot D_{i+2, \xi+1} \cdot D_{k-i, w-\xi}) + m^2 \times$
$\cos(mD)$	$F_{1,1} = \cos(mD_{1,1})$	$\times (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{q+2, \varsigma+1} \cdot D_{i+2-q, \xi+1-\varsigma}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} F_{q+1, \varsigma+1} \cdot F_{k-1-i-q, w-\xi-\varsigma})) = 0$
$\arcsin D$	$F_{1,1} = \arcsin D_{1,1}$	$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} ((i+1)(k-1-i) \cdot (F_{i+2, \xi+1} \cdot F_{k-i, w-\xi} - D_{i+2, \xi+1} \times$
$\arccos D$	$F_{1,1} = \arccos D_{1,1}$	$\times D_{k-i, w-\xi}) - (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot \sum_{\varsigma=0}^{\xi} F_{i+2-q, \xi+1-\varsigma} \times$ $\times F_{q+2, \varsigma+1}) (\sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} D_{q+1, \varsigma+1} D_{k-1-i-q, w-\xi-\varsigma})) = 0$
$\sin^2(mD)$	$F_{1,1} = \sin^2(mD_{1,1})$	$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} ((i+1)(k-1-i) \cdot F_{i+2, \xi+1} \cdot F_{k-i, w-\xi} - 4m^2 \times$
$\cos^2(mD)$	$F_{1,1} = \cos^2(mD_{1,1})$	$\times (F_{i+1, w-\xi} - \sum_{q=0}^i \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} F_{q+1, \varsigma+1} \cdot F_{i+1-q, w-\xi-\varsigma}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^{k-2-i} (q+1)(k-1-i-q) \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{q+2, \varsigma+1} D_{k-i-q, \xi+1-\varsigma})) = 0$
$\arcsin^2 D$	$F_{1,1} = (\arcsin D_{1,1})^2$	$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} ((i+1)(k-1-i) F_{i+2, \xi+1} \cdot F_{k-i, w-\xi} - 4 F_{k-1-i, w-\xi} \times$
$\arccos^2 D$	$F_{1,1} = (\arccos D_{1,1})^2$	$\times (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{q+2, \varsigma+1} \cdot D_{i+2-q, \xi+1-\varsigma}) -$ $- (\sum_{q=0}^i \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} (q+1)(i+1-q) \cdot F_{q+2, \varsigma+1} \cdot F_{i+2-q, w-\xi-\varsigma}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^{k-2-i} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{q+1, \varsigma+1} \cdot D_{k-1-i-q, \xi+1-\varsigma})) = 0$

Таблица П.22

Функция	Начал.знач.	Двумерные рекуррентные уравнения
$\arctg D$	$F_{1,1} = \arctg D_{1,1}$	$(k-1) \cdot (F_{k,w} - D_{k,w}) + \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} (i+1) \cdot (F_{i+2,w-\xi} \times$ $\times \sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{q+1,\varsigma+1} \cdot D_{k-1-i-q,\xi+1-\varsigma}) = 0$
$\text{arctg} D$	$F_{1,1} = \text{arctg} D_{1,1}$	$(k-1) \cdot (F_{k,w} + D_{k,w}) + \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} (i+1) \cdot (F_{i+2,w-\xi} \times$ $\times \sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{q+1,\varsigma+1} \cdot D_{k-1-i-q,\xi+1-\varsigma}) = 0$
$e^{\arctg D}$	$F_{1,1} = e^{\arctg D_{1,1}}$	$(k-1) \cdot F_{k,w} + \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} (i+1) \cdot (-D_{i+2,\xi+1} \cdot F_{k-1-i,w-\xi} +$ $+ F_{i+2,w-\xi} \cdot \sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{q+1,\varsigma+1} \cdot D_{k-1-i-q,\xi+1-\varsigma}) = 0$
$e^{\text{arctg} D}$	$F_{1,1} = e^{\text{arctg} D_{1,1}}$	$(k-1) \cdot F_{k,w} + \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} (i+1) \cdot (D_{i+2,\xi+1} \cdot F_{k-1-i,w-\xi} +$ $+ F_{i+2,w-\xi} \cdot \sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{q+1,\varsigma+1} \cdot D_{k-1-i-q,\xi+1-\varsigma}) = 0$
$e^{\arcsin D}$ $e^{\arccos D}$	$F_{1,1} = e^{\arcsin D_{1,1}}$ $F_{1,1} = e^{\arccos D_{1,1}}$	$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} ((i+1)(k-1-i) F_{i+2,\xi+1} F_{k-i,w-\xi} -$ $- (\sum_{q=0}^{k-2-i} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{q+1,\varsigma+1} \cdot D_{k-1-i-q,\xi+1-\varsigma}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} F_{q+2,\varsigma+1} \cdot F_{i+2-q,w-\xi-\varsigma}) -$ $- (\sum_{q=0}^{k-2-i} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} F_{q+1,\varsigma+1} \cdot F_{k-1-i-q,\xi+1-\varsigma}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^i \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} (q+1)(i+1-q) \cdot D_{q+2,\varsigma+1} \cdot D_{i+2-q,w-\xi-\varsigma})) = 0$

Таблица П.23

Функция	Начальные значения	Двумерные рекуррентные формулы
e^D	$F_{1,1} = e^{D_{1,1}}$	$F_{k,w} = \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{q=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} ((q+1) \cdot D_{q+2, \xi+1} \cdot F_{k-1-q, w-\xi})$
$e^{\frac{1}{D}}$	$F_{1,1} = \frac{1}{D_{1,1}} = e^{\frac{1}{D_{1,1}}}$	$F_{k,w} = \frac{1}{(k-1)D_{1,1}^2} \left(-(k-1)F_{1,1} \cdot D_{k,w} - \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \times \right. \\ \times (D_{i+2,1} \cdot F_{k-1-i,w} + F_{i+2,w} \sum_{q=0}^{k-i-2} D_{q+1,1} D_{k-1-i-q,1}) - \\ \left. - \sum_{\xi=1}^{w-1} ((k-1)(F_{1,\xi+1} \cdot D_{k,w-\xi} + F_{k,w-\xi} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{1,\varsigma+1} D_{1,\xi+1-\varsigma}) + \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \cdot (D_{i+2,\xi+1} \cdot F_{k-1-i,w-\xi} + \right. \\ \left. + F_{i+2,w-\xi} \cdot (\sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{q+1,\varsigma+1} \cdot D_{k-1-i-q,\xi+1-\varsigma}))) \right)$
e^{D^2}	$F_{1,1} = e^{(D_{1,1})^2}$	$F_{k,w} = \frac{2}{k-1} \left(\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} (D_{i+1,w-\xi} \times \right. \\ \times \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} (q+1) \cdot \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{q+2,\varsigma+1} \cdot F_{k-1-i-q,\xi+1-\varsigma} \right) \right)$
e^{D^3}	$F_{1,1} = e^{(D_{1,1})^3}$	$F_{k,w} = \frac{3}{k-1} \left(\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \left(\left(\sum_{q=0}^{k-i-2} (q+1) \cdot \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{q+2,\varsigma+1} \times \right. \right. \right. \\ \times \left. \left. F_{k-1-i-q,\xi+1-\varsigma} \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^i \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} D_{q+1,\varsigma+1} \cdot D_{i+1-q,w-\xi-\varsigma} \right) \right) \right)$
e^{D^4}	$F_{1,1} = e^{(D_{1,1})^4}$	$F_{k,w} = \frac{4}{k-1} \left(\sum_{j=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \left(\left(\sum_{q=0}^{k-j-2} (q+1) \times \right. \right. \right. \\ \times \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} D_{q+2,\varsigma+1} \cdot F_{k-1-j-q,w-\xi-\varsigma} \right) \times \\ \times \left(\sum_{i=0}^j \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{j+1-i,\xi+1-\varsigma} \cdot \left(\sum_{q=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\varsigma} D_{q+1,\varepsilon+1} \cdot D_{i+1-q,\varsigma+1-\varepsilon} \right) \right) \right)$

Таблица П.24

Функция	Начальные значения	Двумерные рекуррентные формулы
D^m	$F_{1,1} = (D_{1,1})^m$	$F_{k,w} = \frac{1}{(k-1) \cdot D_{1,1}} \left((k-1)m \cdot F_{1,1} \cdot D_{k,w} - \sum_{q=0}^{k-3} \sum_{\xi=0}^{w-1} (q+1) \times \right.$ $\times (F_{q+2,\xi+1} \cdot D_{k-1-q,w-\xi} - m \cdot D_{q+2,\xi+1} \cdot F_{k-1-q,w-\xi}) -$ $\left. - (k-1) \cdot \sum_{\xi=0}^{w-2} (F_{k,\xi+1} \cdot D_{1,w-\xi} - m \cdot D_{k,\xi+1} \cdot F_{1,w-\xi}) \right)$
$\ln D$	$F_{1,1} = \ln D_{1,1}$	$F_{k,w} = \frac{1}{(k-1)D_{1,1}} \left((k-1)D_{k,w} - (k-1) \sum_{\xi=0}^{w-2} F_{k,\xi+1} \cdot D_{1,w-\xi} - \right.$ $\left. - \sum_{q=0}^{k-3} \sum_{\xi=0}^{w-1} (q+1) \cdot F_{q+2,\xi+1} \cdot D_{k-1-q,w-\xi} \right)$
$\frac{1}{\ln D}$	$F_{1,1} = \frac{1}{\ln D_{1,1}}$	$F_{k,w} = \frac{1}{(k-1) \cdot D_{1,1}} \left(-(k-1) \cdot F_{1,1}^2 \cdot D_{k,w} - \sum_{\xi=1}^{w-1} ((k-1) \times \right.$ $\times (D_{1,\xi+1} \cdot F_{k,w-\xi} + D_{k,w-\xi} \cdot \sum_{\varsigma=0}^{\xi} F_{1,\varsigma+1} \cdot F_{1,\xi+1-\varsigma}) +$ $+ \sum_{i=0}^{k-3} \sum_{\xi=1}^{w-1} (i+1) (F_{i+2,\xi+1} \cdot D_{k-1-i,w-\xi} + D_{i+2,w-\xi} \cdot \sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \rightarrow$ $\rightarrow F_{q+1,\varsigma+1} F_{k-1-i-q,\xi+1-\varsigma})) - \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) (F_{i+2,1} \cdot D_{k-1-i,w} +$ $+ D_{i+2,w} \cdot \sum_{q=0}^{k-i-2} F_{q+1,1} \cdot F_{k-1-i-q,1}))$
$\sqrt{\ln D}$	$F_{1,1} = \sqrt{\ln D_{1,1}}$	$F_{k,w} = \frac{1}{2(k-1)D_{1,1} \cdot F_{1,1}} \left((k-1) \cdot D_{k,w} - 2 \cdot \sum_{\xi=1}^{w-1} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} ((k-1) \times \right.$ $\times F_{k,w-\xi} \cdot D_{1,\varsigma+1} \cdot F_{1,\xi+1-\varsigma} + \sum_{i=0}^{k-3} ((i+1) \cdot F_{i+2,\varsigma+1} \cdot D_{1,w-\xi} \times$ $\times F_{k-1-i,\xi+1-\varsigma} + D_{k-1-i,w-\xi} \sum_{q=0}^i (q+1) F_{q+2,\varsigma+1} F_{i+1-q,\xi+1-\varsigma})) -$ $- 2 \cdot \sum_{i=0}^{k-3} ((i+1) \cdot D_{1,w} \cdot F_{i+2,1} \cdot F_{k-1-i,1} +$ $+ D_{k-1-i,w} \cdot \sum_{q=0}^i (q+1) \cdot F_{q+2,1} \cdot F_{i+1-q,1}))$

Таблица П.25

Функция	Начал.знач.	Двумерные рекуррентные формулы
$\sin D$ $\cos D$	$F_{1,1} = \sin D_{1,1}$ $F_{2,1} = D_{2,1} \times$ $\quad \times \cos D_{1,1}$ $F_{1,1} = \cos D_{1,1}$ $F_{2,1} = D_{2,1} \times$ $\quad \times (-\sin D_{1,1})$	$F_{k,w} = \frac{1}{2(k-1)F_{2,1}} \left(-2(k-1)F_{k,1} \cdot F_{2,w} - \sum_{i=1}^{k-3} (i+1)(k-1-i) \times \right.$ $\times (F_{i+2,1} \cdot F_{k-i,w} + F_{i+2,w} \cdot F_{k-i,1}) - \sum_{i=0}^{k-2} ((i+1)(k-1-i) \times$ $\times \sum_{\xi=1}^{w-2} F_{i+2,\xi+1} F_{k-i,w-\xi} + \sum_{\xi=0}^{w-1} (-(i+1)(k-1-i) \cdot D_{i+2,\xi+1} \times$ $\times D_{k-i,w-\xi} + (\sum_{q=0}^{k-2-i} \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} F_{q+1,\varsigma+1} \cdot F_{k-1-i-q,w-\xi-\varsigma}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^i \sum_{\varsigma=0}^{\xi} (q+1)(i+1-q) \cdot D_{q+2,\varsigma+1} \cdot D_{i+2-q,\xi+1-\varsigma})))$
$\operatorname{arctg} D$ $\operatorname{arctg} D$	$F_{1,1} =$ $= \operatorname{arctg} D_{1,1}$ $t = 1$ $F_{1,1} =$ $= \operatorname{arctg} D_{1,1}$ $t = -1$	$F_{k,w} = \frac{1}{(k-1)(1+D_{1,1}^2)} \left(t \cdot (k-1) D_{k,w} - \sum_{\xi=1}^{w-1} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} ((k-1) \times \right.$ $\times F_{k,w-\xi} \cdot D_{1,\varsigma+1} \cdot D_{1,\xi+1-\varsigma} + \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \cdot F_{i+2,w-\xi} \times$ $\times \sum_{q=0}^{k-i-2} D_{q+1,\varsigma+1} \cdot D_{k-1-i-q,\xi+1-\varsigma}) -$ $- \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) F_{i+2,w} \sum_{q=0}^{k-i-2} D_{q+1,1} \cdot D_{k-1-i-q,1} \Big)$
$e^{\operatorname{arctg} D}$	$F_{1,1} =$ $= e^{\operatorname{arctg} D_{1,1}}$	$F_{k,w} = \frac{1}{(k-1)(1+D_{1,1}^2)} \left((k-1) F_{1,1} \cdot D_{k,w} + \sum_{\xi=1}^{w-1} ((k-1) \times \right.$ $\times (F_{1,\xi+1} \cdot D_{k,w-\xi} - F_{k,w-\xi} \cdot \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{1,\varsigma+1} \cdot D_{1,\xi+1-\varsigma}) +$ $+ \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) (D_{i+2,\xi+1} \cdot F_{k-1-i,w-\xi} - F_{i+2,w-\xi} \times$ $\times \sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{q+1,\varsigma+1} \cdot D_{k-1-i-q,\xi+1-\varsigma}) + \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \times$ $\times (D_{i+2,1} \cdot F_{k-1-i,w} - F_{i+2,w} \cdot \sum_{q=0}^{k-i-2} D_{q+1,1} \cdot D_{k-1-i-q,1}))$

Таблица П.26

Функ.	$A_{k,w}$	Двумерные обратные рекуррентные формулы $B_{k,w}$
D^m	$A_{k,w} = \frac{m \cdot F_{1,1}}{D_{1,1}}$ $F_{1,1} = (D_{1,1})^m$	$B_{k,w} = \frac{1}{(k-1)D_{1,1}} \left(- \sum_{q=0}^{k-3} \sum_{\xi=0}^{w-1} (q+1) \cdot (F_{q+2, \xi+1} \cdot D_{k-1-q, w-\xi} - \right.$ $\left. - m \cdot D_{q+2, \xi+1} \cdot F_{k-1-q, w-\xi}) - \right.$ $\left. - (k-1) \cdot \sum_{\xi=0}^{w-2} (F_{k, \xi+1} \cdot D_{1, w-\xi} - m \cdot D_{k, \xi+1} \cdot F_{1, w-\xi}) \right)$
$\ln D$	$A_{k,w} = \frac{1}{D_{1,1}}$ $F_{1,1} = \ln D_{1,1}$	$B_{k,w} = \frac{1}{(k-1) \cdot D_{1,1}} \left(-(k-1) \cdot \sum_{\xi=0}^{w-2} F_{k, \xi+1} \cdot D_{1, w-\xi} - \right.$ $\left. - \sum_{q=0}^{k-3} \sum_{\xi=0}^{w-1} (q+1) \cdot F_{q+2, \xi+1} \cdot D_{k-1-q, w-\xi} \right)$
$\frac{1}{\ln D}$	$A_{k,w} = \frac{-F_{1,1}^2}{D_{1,1}}$ $F_{1,1} = \frac{1}{\ln D_{1,1}}$	$B_{k,w} = \frac{1}{(k-1)D_{1,1}} \left(- \sum_{\xi=1}^{w-1} ((k-1)(D_{1, \xi+1} \cdot F_{k, w-\xi} + D_{k, w-\xi} \times \right.$ $\times \sum_{\varsigma=0}^{\xi} F_{1, \varsigma+1} \cdot F_{1, \xi+1-\varsigma}) + \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \cdot (F_{i+2, \xi+1} \cdot D_{k-1-i, w-\xi} +$ $+ D_{i+2, w-\xi} \cdot \sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} F_{q+1, \varsigma+1} F_{k-1-i-q, \xi+1-\varsigma}) - \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \times$ $\times (F_{i+2, 1} \cdot D_{k-1-i, w} + D_{i+2, w} \cdot \sum_{q=0}^{k-i-2} F_{q+1, 1} \cdot F_{k-1-i-q, 1})) \right)$
$\sqrt{\ln D}$	$A_{k,w} = \frac{1}{2D_{1,1} \cdot F_{1,1}}$ $F_{1,1} = \sqrt{\ln D_{1,1}}$	$B_{k,w} = \frac{1}{2(k-1)D_{1,1} \cdot F_{1,1}} \left(-2 \sum_{\xi=1}^{w-1} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} ((k-1)F_{k, w-\xi} \cdot D_{1, \varsigma+1} \times \right.$ $\times F_{1, \xi+1-\varsigma} + \sum_{i=0}^{k-3} ((i+1) \cdot F_{i+2, \varsigma+1} \cdot D_{1, w-\xi} \cdot F_{k-1-i, \xi+1-\varsigma} +$ $+ D_{k-1-i, w-\xi} \sum_{q=0}^i (q+1) F_{q+2, \varsigma+1} \cdot F_{i+1-q, \xi+1-\varsigma})) - 2 \sum_{i=0}^{k-3} ((i+1) \times$ $\times D_{1, w} F_{i+2, 1} \cdot F_{k-1-i, w} + D_{k-1-i, w} \sum_{q=0}^i (q+1) F_{q+2, 1} F_{i+1-q, 1})) \right)$
e^D	$A_{k,w} = F_{1,1}$ $F_{1,1} = e^{D_{1,1}}$	$B_{k,w} = \frac{1}{k-1} \cdot ((k-1) \cdot \sum_{\xi=0}^{w-2} D_{k, \xi+1} \cdot F_{1, w-\xi} +$ $+ \sum_{q=0}^{k-3} \sum_{\xi=0}^{w-1} ((q+1) \cdot D_{q+2, \xi+1} \cdot F_{k-1-q, w-\xi}))$

Таблица П.27

Функция	Формулы	Двумерные обратные рекуррентные формулы $B_{k, w}$
$C^{\pm m} e^D$	$F_{1,1} =$ $= C^{\pm m} e^{D_{1,1}}$ $A_{k,w} =$ $= \frac{D_{1,1}^2}{C_{1,1}}$	$B_{k, w} = \frac{1}{(k-1)C_{1,1}} \left((k-1)(2D_{k,1} \cdot D_{1,w} \cdot D_{1,1} - F_{k,1} \cdot C_{1,w} \mp \right.$ $\mp m(F_{1,1}C_{k,w} + C_{k,1}F_{1,w})) + \sum_{\xi=1}^{w-2} (k-1)(D_{k,1} \times$ $\times D_{1,w-\xi} D_{1,\xi+1} - F_{k,\xi+1} \cdot C_{1,w-\xi} \mp m C_{k,\xi+1} \cdot F_{1,w-\xi} +$ $+ D_{k,w-\xi} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{1,\xi+1-\varsigma} \times D_{1,\varsigma+1}) - \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \times$ $\times (F_{i+2,\xi+1} \cdot C_{k-1-i,w-\xi} \pm m \cdot C_{i+2,\xi+1} \cdot F_{k-1-i,w-\xi} -$ $- D_{i+2,w-\xi} \cdot \sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{q+1,\varsigma+1} \cdot D_{k-1-i-q,\xi+1-\varsigma}))$
$\operatorname{arctg} D$ $\operatorname{arctg} D$	$A_{k,w} =$ $= \frac{1}{1+D_{1,1}^2}$ $A_{k,w} =$ $= \frac{-1}{1+D_{1,1}^2}$	$B_{k, w} = \frac{1}{(k-1)(1+D_{1,1}^2)} \left(- \sum_{\xi=1}^{w-1} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} ((k-1)F_{k,w-\xi} \cdot D_{1,\xi+1-\varsigma} \times \right.$ $\times D_{1,\varsigma+1} + \sum_{i=0}^{k-3} (i+1)F_{i+2,w-\xi} \cdot \sum_{q=0}^{k-i-2} D_{k-1-i-q,\xi+1-\varsigma} \times$ $\times D_{q+1,\varsigma+1}) - \sum_{i=0}^{k-3} (i+1)F_{i+2,w} \cdot \sum_{q=0}^{k-i-2} D_{q+1,1} \cdot D_{k-1-i-q,1} \Big)$
$e^{\operatorname{arctg} D}$	$F_{1,1} =$ $= e^{\operatorname{arctg} D_{1,1}}$ $A_{k,w} =$ $= \frac{F_{1,1}}{1+D_{1,1}^2}$	$B_{k, w} = \frac{1}{(k-1) \cdot (1+D_{1,1}^2)} \left(\sum_{\xi=1}^{w-1} ((k-1) \cdot (F_{1,\xi+1} \cdot D_{k,w-\xi} - \right.$ $- F_{k,w-\xi} \cdot \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{1,\varsigma+1} \cdot D_{1,\xi+1-\varsigma}) +$ $+ \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \cdot (D_{i+2,\xi+1} \cdot F_{k-1-i,w-\xi} - F_{i+2,w-\xi} \times$ $\times \sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} D_{q+1,\varsigma+1} \cdot D_{k-1-i-q,\xi+1-\varsigma})) + \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) \times$ $\times (D_{i+2,1} \cdot F_{k-1-i,w} - F_{i+2,w} \cdot \sum_{q=0}^{k-i-2} D_{q+1,1} \cdot D_{k-1-i-q,1}))$

Таблица П.28

Функция	Начальные значения	Трехмерные рекуррентные уравнения и формулы
D^m	$F_{1,1,1} = (D_{1,1,1})^m$	$\sum_{q=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} ((q+1) \cdot (F_{q+2, \xi+1, \eta+1} \cdot D_{k-1-q, w-\xi, s-\eta} - m \cdot D_{q+2, \xi+1, \eta+1} \cdot F_{k-1-q, w-\xi, s-\eta})) = 0$ $F_{k, w, s} = \frac{1}{(k-1) \cdot D_{1,1,1}} \left(m \cdot F_{1,1,1} \cdot D_{k, w, s} - (k-1) \cdot \sum_{\xi=0}^{w-2} (F_{k, \xi+1, s} \times D_{1, w-\xi, 1} - m D_{k, \xi+1, s} \cdot F_{1, w-\xi, 1} + \sum_{\eta=0}^{s-2} (F_{k, \xi+1, \eta+1} D_{1, w-\xi, s-\eta} - m D_{k, \xi+1, \eta+1} \cdot F_{1, w-\xi, s-\eta})) - (k-1) \sum_{\eta=0}^{s-2} (F_{k, w, \eta+1} \cdot D_{1, 1, s-\eta} - m \cdot D_{k, w, \eta+1} \cdot F_{1, 1, s-\eta}) - \sum_{q=0}^{k-3} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} (q+1) \cdot (F_{q+2, \xi+1, \eta+1} \cdot D_{k-1-q, w-\xi, s-\eta} - m \cdot D_{q+2, \xi+1, \eta+1} \cdot F_{k-1-q, w-\xi, s-\eta})) \right)$
$\ln D$	$F_{1,1,1} = \ln D_{1,1,1}$	$\sum_{q=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} ((q+1) \cdot (F_{q+2, \xi+1, \eta+1} \cdot D_{k-1-q, w-\xi, s-\eta}) - (k-1) D_{k, w, s}) = 0$ $F_{k, w, s} = \frac{1}{(k-1) D_{1,1,1}} \left((k-1) D_{k, w, s} - (k-1) \cdot \sum_{\eta=0}^{s-2} F_{k, w, \eta+1} \times \times D_{1, 1, s-\eta} - \sum_{\eta=0}^{s-1} ((k-1) \cdot \sum_{\xi=0}^{w-2} F_{k, \xi+1, \eta+1} \cdot D_{1, w-\xi, s-\eta} + \sum_{q=0}^{k-3} \sum_{\xi=0}^{w-1} (q+1) \cdot F_{q+2, \xi+1, \eta+1} \cdot D_{k-1-q, w-\xi, s-\eta})) \right)$
$C \cdot \ln D$	$F_{1,1,1} = C_{1,1,1} \times \ln D_{1,1,1}$	$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \left(\sum_{q=0}^{k-2-i} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} (i+1) \times \times F_{i+2, w-\xi, s-\eta} \cdot D_{k-1-i-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda} \cdot C_{q+1, \varsigma+1, \lambda+1} - C_{i+2, w-\xi, s-\eta} \cdot F_{q+1, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot D_{k-1-i-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda} - D_{i+2, w-\xi, s-\eta} \cdot C_{q+1, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot C_{k-1-i-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda} \right) = 0$

Таблица П.29

Функция	Начальные значения	Трёхмерные рекуррентные уравнения
$\ln^2 D$	$F_{1,1,1} = \ln D_{1,1,1}^2$	$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \left(\left(\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \cdot \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} F_{q+2, \varsigma+1, \lambda+1} \times \right. \right.$ $\times F_{i+2-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda} \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-2-i} \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} \sum_{\lambda=0}^{s-1-\eta} D_{q+1, \varsigma+1, \lambda+1} \times \right.$ $\times D_{k-1-i-q, w-\xi-\varsigma, s-\eta-\lambda} \Big) - 4 F_{k-1-i, w-\xi, s-\eta} \cdot \left(\sum_{q=0}^i (q+1) \times \right.$ $\times (i+1-q) \cdot \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} D_{q+2, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot D_{i+2-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda} \Big) \Big) = 0$
$\frac{1}{\ln D}$	$F_{1,1,1} = \frac{1}{\ln D_{1,1,1}}$	$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} (i+1) \cdot \left(F_{i+2, \xi+1, \eta+1} \cdot D_{k-1-i, w-\xi, s-\eta} + \right.$ $+ D_{i+2, w-\xi, s-\eta} \cdot \sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} F_{q+1, \varsigma+1, \lambda+1} \times$ $\times F_{k-1-i-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda} \Big) = 0$
$\frac{C}{\ln D}$	$F_{1,1,1} = \frac{C_{1,1,1}}{\ln D_{1,1,1}}$	$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \left(\sum_{q=0}^{k-2-i} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} (i+1) \times \right.$ $\times F_{i+2, w-\xi, s-\eta} \cdot D_{k-1-i-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda} \cdot C_{q+1, \varsigma+1, \lambda+1} -$ $- C_{i+2, w-\xi, s-\eta} F_{q+1, \varsigma+1, \lambda+1} D_{k-1-i-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda} +$ $+ D_{i+2, w-\xi, s-\eta} \cdot F_{q+1, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot F_{k-1-i-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda} \Big) = 0$
$\frac{1}{\sqrt{\ln D}}$	$F_{1,1,1} = \frac{1}{\sqrt{\ln D_{1,1,1}}}$	$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \left(2(i+1) \cdot F_{i+2, \xi+1, \eta+1} \cdot D_{k-1-i, w-\xi, s-\eta} + \right.$ $+ \left(\sum_{q=0}^i (q+1) \cdot \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} D_{q+2, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot F_{i+1-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda} \right) \times$ $\times \left(\sum_{q=0}^{k-2-i} \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} \sum_{\lambda=0}^{s-1-\eta} F_{q+1, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot F_{k-1-i-q, w-\xi-\varsigma, s-\eta-\lambda} \right) \Big) = 0$

Таблица П.30

Функция	Начальные значения	Трёхмерные рекуррентные уравнения и формулы
$\sqrt{\ln D}$	$F_{1,1,1} = \sqrt{\ln D_{1,1,1}}$	$2 \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} D_{k-1-i, w-\xi, s-\eta} \cdot \left(\sum_{q=0}^i \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} (q+1) \times \right. \\ \left. \times F_{q+2, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot F_{i+1-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda} \right) - (k-1) D_{k, w, s} = 0$
e^D	$F_{1,1,1} = e^{D_{1,1,1}}$	$F_{k, w, s} = \left(\sum_{q=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} (q+1) D_{q+2, \xi+1, \eta+1} F_{k-1-q, w-\xi, s-\eta} \right) / (k-1)$
e^{D^2}	$F_{1,1,1} = e^{(D_{1,1,1})^2}$	$F_{k, w, s} = \frac{2}{k-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \left(\sum_{q=0}^{k-2-i} (q+1) \cdot D_{i+1, w-\xi, s-\eta} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} D_{q+2, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot F_{k-1-i-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda} \right) \right) \right)$
e^{D^3}	$F_{1,1,1} = e^{(D_{1,1,1})^3}$	$F_{k, w, s} = \frac{3}{k-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \left(\sum_{q=0}^{k-2-i} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} (q+1) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times D_{q+2, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot F_{k-1-i-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\sum_{q=0}^i \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} \sum_{\lambda=0}^{s-1-\eta} D_{q+1, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot D_{i+1-q, w-\xi-\varsigma, s-\eta-\lambda} \right) \right)$
e^{D^4}	$F_{1,1,1} = e^{D_{1,1,1}^4}$	$F_{k, w, s} = 4 \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} \left(\sum_{i=0}^{k-j-2} (i+1) \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} \sum_{\lambda=0}^{s-1-\eta} D_{i+2, \varsigma+1, \lambda+1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times F_{k-1-j-i, w-\xi-\varsigma, s-\eta-\lambda} \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^j \sum_{\xi=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} D_{j+1-i, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\sum_{q=0}^i \sum_{\varepsilon=0}^{\varsigma} \sum_{\chi=0}^{\lambda} D_{q+1, \varepsilon+1, \chi+1} \cdot D_{i+1-q, \varsigma+1-\varepsilon, \lambda+1-\chi} \right) \right) \right) / (k-1)$
$e^{\frac{1}{D}}$	$F_{1,1,1} = \frac{1}{D_{1,1,1}} = e^{\frac{1}{D_{1,1,1}}}$	$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} (i+1) \cdot \left(D_{i+2, \xi+1, \eta+1} \cdot F_{k-1-i, w-\xi, s-\eta} + \right. \\ \left. + F_{i+2, w-\xi, s-\eta} \cdot \left(\sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} D_{q+1, \varsigma+1, \lambda+1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times D_{k-1-i-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda} \right) \right) = 0$

Таблица П.31

Функция	Начальные значения	Трехмерные рекуррентные уравнения
$e^{\frac{1}{D^2}}$	$F_{1,1,1} = \frac{1}{(D_{1,1,1})^2}$	$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} (2(i+1) \cdot D_{i+2, \xi+1, \eta+1} \cdot F_{k-1-i, w-\xi, s-\eta} +$ $+ (\sum_{q=0}^i (q+1) \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} (F_{q+2, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot D_{i+1-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda})) \times$ $\times (\sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} (\sum_{\lambda=0}^{s-1-\eta} D_{q+1, \varsigma+1, \lambda+1} D_{k-1-i-q, w-\xi-\varsigma, s-\eta-\lambda}))) = 0$
$e^{\sqrt{D}}$	$F_{1,1,1} = \sqrt{D_{1,1,1}}$	$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} (4D_{k-1-i, w-\xi, s-\eta} \cdot (\sum_{q=0}^i \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} (q+1)(i+1-q) \times$ $\times F_{q+2, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot F_{i+2-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda}) - (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \times$ $\times \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} D_{q+2, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot D_{i+2-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda}) \times$ $\times (\sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} (\sum_{\lambda=0}^{s-1-\eta} F_{q+1, \varsigma+1, \lambda+1} F_{k-1-i-q, w-\xi-\varsigma, s-\eta-\lambda}))) = 0$
$C^m e^D$	$F_{1,1,1} = C_{1,1,1} e^{D_{1,1,1}}$	$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} (i+1) \cdot (F_{i+2, \xi+1, \eta+1} \cdot C_{k-1-i, w-\xi, s-\eta} -$ $- m \cdot C_{i+2, \xi+1, \eta+1} \cdot F_{k-1-i, w-\xi, s-\eta} - D_{i+2, w-\xi, s-\eta} \times$ $\times (\sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} D_{q+1, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot D_{k-1-i-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda})) = 0$
$\exp(\arctg D)$	$F_{1,1,1} = \exp(\arctg D_{1,1,1})$	$(k-1) \cdot F_{k, w, s} + \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} (i+1) \cdot (-F_{k-1-i, \xi+1, \eta+1} \times$ $\times D_{i+2, w-\xi, s-\eta} + F_{i+2, w-\xi, s-\eta} \times$ $\times (\sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} D_{q+1, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot D_{k-1-i-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda})) = 0$
$\exp(\operatorname{arctg} D)$	$F_{1,1,1} = \exp(\operatorname{arctg} D_{1,1,1})$	$(k-1) F_{k, w, s} + \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} (i+1) (F_{k-1-i, \xi+1, \eta+1} D_{i+2, w-\xi, s-\eta} +$ $+ F_{i+2, w-\xi, s-\eta} (\sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} D_{q+1, \varsigma+1, \lambda+1} D_{k-1-i-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda})) = 0$

Таблица П.32

Функция	Начальные значения	Трехмерные рекуррентные уравнения
$\sin D$ $\cos D$	$F_{1,1,1} =$ $= \sin D_{1,1,1}$ $F_{1,1,1} =$ $= \cos D_{1,1,1}$	$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} ((i+1)(k-1-i)(F_{i+2, \xi+1, \eta+1} \cdot F_{k-i, w-\xi, s-\eta} -$ $- D_{i+2, \xi+1, \eta+1} \cdot D_{k-i, w-\xi, s-\eta}) + (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \times$ $\times \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} D_{q+2, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot D_{i+2-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda}) \cdot (\sum_{q=0}^{k-i-2} \rightarrow$ $\rightarrow \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} \sum_{\lambda=0}^{s-1-\eta} F_{q+1, \varsigma+1, \lambda+1} F_{k-1-i-q, w-\xi-\varsigma, s-\eta-\lambda})) = 0$
$\arcsin D$ $\arccos D$	$F_{1,1,1} =$ $= \arcsin D_{1,1,1}$ $F_{1,1,1} =$ $= \arccos D_{1,1,1}$	$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} ((i+1)(k-1-i)(F_{i+2, \xi+1, \eta+1} F_{k-i, w-\xi, s-\eta} -$ $- D_{i+2, \xi+1, \eta+1} D_{k-i, w-\xi, s-\eta}) - (\sum_{q=0}^i (q+1)(i+1-q) \times$ $\times \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} F_{q+2, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot F_{i+2-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda}) \cdot (\sum_{q=0}^{k-i-2} \rightarrow$ $\rightarrow \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} \sum_{\lambda=0}^{s-1-\eta} D_{q+1, \varsigma+1, \lambda+1} D_{k-1-i-q, w-\xi-\varsigma, s-\eta-\lambda})) = 0$
$\sin^2 D$ $\cos^2 D$	$F_{1,1,1} =$ $= \sin^2 D_{1,1,1}$ $F_{1,1,1} =$ $= \cos^2 D_{1,1,1}$	$\sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} ((i+1)(k-1-i) F_{i+2, \xi+1, \eta+1} \cdot F_{k-i, w-\xi, s-\eta} -$ $- 4 \cdot (F_{i+1, w-\xi, s-\eta} - \sum_{q=0}^i \sum_{\varsigma=0}^{w-1-\xi} \sum_{\lambda=0}^{s-1-\eta} F_{q+1, \varsigma+1, \lambda+1} \times$ $\times F_{i+1-q, w-\xi-\varsigma, s-\eta-\lambda}) \cdot (\sum_{q=0}^{k-i-2} (q+1)(k-1-i-q) \times$ $\times (\sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} D_{q+2, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot D_{k-i-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda}))) = 0$
$\operatorname{arctg} D$	$F_{1,1,1} =$ $= \operatorname{arctg} D_{1,1,1}$	$(k-1)(F_{k,w,s} - D_{k,w,s}) + \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{\xi=0}^{w-1} \sum_{\eta=0}^{s-1} (i+1) \cdot F_{i+2, w-\xi, s-\eta} \times$ $\times (\sum_{q=0}^{k-i-2} \sum_{\varsigma=0}^{\xi} \sum_{\lambda=0}^{\eta} D_{q+1, \varsigma+1, \lambda+1} \cdot D_{k-1-i-q, \xi+1-\varsigma, \eta+1-\lambda})) = 0$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1 – М.: Наука, 2006. – 608 с.
2. Банах С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1972. – 422 с.
3. Ильин В.А. Математический анализ. – М.: Наука, 1979. – 600 с.
4. Шварц Л. Анализ. – М.: Мир, 1972. – 822 с.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1 – М.: Наука, 1985. - 429 с.
6. Виноградов И.М. Дифференциальное исчисление. – М.: Наука, 1988. – 173 с.
7. Дороговцев А.Я. Математический анализ. – К.: Вища школа, 1985. – 527 с.
8. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – К.: Наукова думка, 1980. – 420 с.
9. Пухов Г.Е. Преобразования Тейлора. – К.: Наукова думка, 1978. – 260 с.
10. Каширский И.С. Рекуррентный анализ. – К.: Политехника, 2012. – 316 с.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
12. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
13. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике. – К.: Наукова думка, 1972. – 744 с.
14. Фильчаков П.Ф. Численные и графические методы прикладной математики. – К.: Наукова думка, 1970. – 768 с.
15. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
16. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 598 с.
17. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. Т.2 – М.: Наука, 1977. – 400 с.
18. Грегори В., Роберт Т., Кришнамурти Е. Безошибочные вычисления: методы и приложения. – М.: Мир, 1988. – 207 с.
19. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматлит, 1960. – 656 с.
20. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1 – М.: Наука, 1966. – 632 с.
21. Хемминг Р.В. Численные методы. – М.: Наука, 1972. – 400 с.
22. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. – М.: Наука, 1961. - 524 с.
23. Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробогатько А.А. Методы вычислений. – К.: Вища школа, 1977. – 406 с.
24. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы. – М.: Просвещение, 1991. - 174 с.

25. Кунцман Ж. Численные методы. – М.: Наука, 1979. – 158 с.
26. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 1987. – 312 с.
27. Лоран П. Ж. Аппроксимация и оптимизация. – М.: Мир, 1975. – 496 с.
28. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.
29. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
30. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
31. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1982. – 269 с.
32. Борович З.И. Определители и матрицы. – М.: Наука, 1988. – 183 с.
33. Воеводкин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 318 с.
34. Райс Д. Матричные вычисления и математическое обеспечение. – М.: Мир, 1984. – 264 с.
35. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. – М.: Наука, 1972. – 232 с.
36. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. – К.: Наукова думка, 1972. – 172 с.
37. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. – М.: Мир, 1977. – 188 с.
38. Брамеллер А., Алан Р., Хэмэм Я. Слабозаполненные матрицы. М.: Энергия, 1979. – 190 с.
39. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. – М.: Мир, 1988. – 412 с.
40. Джордж А., Джозеф Л. Численное решение больших разреженных систем уравнений. – М.: Мир, 1984. – 333 с.
41. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решение нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 440 с.
42. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: Мир, 1969. – 448 с.
43. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 558 с.
44. Островский А.М. Решение уравнений и систем уравнений. – М.: Из-во ин.лит., 1963. – 219 с.
45. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. – М.: Мир, 1986. – 446 с.
46. Аоки М. Введение в методы оптимизации. – М.: Наука, 1977. – 343 с.
47. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
48. Каширский И.С., Трохименко Я.К. Обобщенная оптимизация. – К.: Техника, 1979. – 190 с.
49. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975. – 319 с.
50. Полак Э. Численные методы оптимизации. – М.: Мир, 1974. – 374 с.
51. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983. – 382 с.
52. Трохименко Я.К., Каширский И.С., Ловкий В.К. Проектирование радиотехнических схем. – К.: Техника, 1976. – 268 с.