

Министерство образования и науки Украины  
Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт»

**П. Р. Родин, Н. С. Равская**  
**А. Е. Бабенко, О. А. Боронко**

# **Дисковые пилы с неравномерным шагом**

**Монография**

*Рекомендовано Ученым советом  
Механико-машиностроительного института  
Национального технического университета Украины  
«Киевский политехнический институт»*

Киев  
НТУУ «КПИ»  
2008

УДК 621.93.02

ББК 34.63-5

Д 48

Рекомендовано Ученым советом  
Механико-машиностроительного института  
Национального технического университета Украины  
«Киевский политехнический институт»  
(Протокол №4 от 07 апреля 2008 г.)

Рецензенты:

С. А. Клименко, д-р техн. наук, проф.,  
Институт сверхтвердых материалов им. В. М. Бакуля  
В. Е. Струтинский, д-р техн. наук, проф.,  
Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт»

Ответственный редактор

М. И. Бобыр, д-р техн. наук, проф.,  
Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт»

Д 48

Дисковые пилы с неравномерным шагом [Текст] : монография /  
П. Р. Родин, Н. С. Равская, А. Е. Бабенко, О. А. Боронко. – К.: НТУУ  
«КПИ», 2008. – 216 с. – Библиогр.: с. 215–216. – 100 экз.

ISBN 978-966-622-298-8

Рассмотрены вопросы общей теории проектирования пил с криволинейной формой стружечных канавок и неравномерным шагом, теории формообразования зубьев дисковых пил, разработаны критерии оценивания динамического состояния пил, определения их оптимальных конструкций и условий эксплуатации.

Для специалистов в области проектирования, изготовления и эксплуатации режущего инструмента, технологов-машиностроителей, а также может быть использована аспирантами и студентами машиностроительных специальностей при выполнении курсовых и дипломных проектов.

Розглянуто питання загальної теорії проектування пил з криволінійною формою стружкових канавок та нерівномірним кроком, теорії формоутворення зубів дискових пил, розроблено критерії визначення динамічного стану пил, визначено принципи оптимізації конструкцій та умов експлуатації.

Для спеціалістів у галузі проектування, виготовлення і експлуатації різального інструмента, технологів-машинобудівників, також може бути використана аспірантами та студентами машинобудівних спеціальностей під час виконання курсових та дипломних проектів.

УДК 621.93.02

ББК 34.63-5

ISBN 978-966-622-298-8

© П. Р. Родин, Н. С. Равская,  
А. Е. Бабенко, О. А. Боронко, 2008

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение.....</b>	<b>5</b>
<b>1. Особенности конструкций режущей части дисковых пил и технологий их изготовления .....</b>	<b>7</b>
1.1. Конструктивные элементы и формы профилей зубьев дисковых пил .....	7
1.2. Особенности технологии изготовления дисковых пил .....	11
1.3. Пути совершенствования конструкции режущей части дисковых пил.....	13
<b>2. Профилирование дисковых пил .....</b>	<b>17</b>
2.1. Обобщенный профиль зуба дисковой пилы .....	17
2.2. Профилирование пил с равномерным шагом и прямым зубом .....	19
2.3. Профилирование дисковых пил с неравномерным шагом .....	31
<b>3. Теория формообразования зубьев дисковых пил.....</b>	<b>39</b>
3.1. Закон движения шлифовального круга при обработке зубьев дисковых пил.....	39
3.1.1. Особенности обработки зубьев на станках с числовым программным управлением .....	39
3.1.2. Графическое определение закона движения шлифовального круга при обработке прямолинейного участка профиля детали.....	40
3.1.3. Графическое определение закона движения шлифовального круга при обработке участка профиля детали, ограниченного дугой окружности.....	42
3.1.4. Аналитическое определение закона движения шлифовального круга при обработке прямолинейного участка профиля зуба.....	47
3.1.5. Аналитическое определение закона движения шлифовального круга при обработке участка профиля детали, ограниченного дугой окружности.....	50
3.1.6. Определение закона движения шлифовального круга при обработке профиля пилы .....	53
3.2. Формообразование зубьев пил с неравномерным шагом обкаточными дисковыми фрезами .....	69
3.2.1. Особенности технологии предварительной обработки зубьев пил .....	69
3.2.2. Профилирование обкаточных фрез для обработки прямозубых деталей с неравномерным шагом при взаимноперпендикулярных осях заготовки и инструмента .....	72
3.3. Профилирование обкаточных фрез для обработки прямозубых деталей с неравномерным шагом при наклонных осях заготовки и инструмента.....	80
<b>4. Кинематика и силы резания при отрезке дисковыми пилами.....</b>	<b>85</b>
4.1. Анализ конструкций и схем резания дисковых отрезных пил.....	86
4.2. Число одновременно работающих зубьев при отрезке дисковыми пилами.....	90
4.3. Определение толщины среза при отрезке дисковыми пилами .....	99
4.3.1. Толщина среза при отрезке прямоугольных заготовок .....	99
4.3.2. Толщина среза при отрезке круглых заготовок .....	104

4.4. Силы резания при отрезке дисковыми пилами .....	109
<b>5. Определение собственных частот и собственных форм колебаний</b>	
<b>дисковых пил</b> .....	115
5.1. Вариационная постановка задачи о собственных колебаниях упругих систем .....	115
5.2. Сходимость схем приближенного решения для задач на собственные значения .....	120
5.3. Определения собственных частот и собственных форм колебаний при продольных колебаниях дисковой пилы в своей плоскости .....	123
5.4. Определение собственных частот и собственных форм при изгибных колебаниях дисковых пил .....	126
<b>6. Вынужденные колебания систем с конечным числом степеней свободы</b> .....	129
6.1. Вынужденные гармонические колебания недиссипативных систем .....	129
6.2. Вынужденные гармонические колебания диссипативных систем с конечным числом степеней свободы .....	130
6.3. Колебания недиссипативных систем с конечным числом степеней свободы при кинематическом возбуждении .....	132
6.4. Кинематическое возбуждение поперечных колебаний дисковой пилы .....	135
6.5. Влияние угла наклона зубьев на динамические характеристики фрезы .....	140
<b>7. Автоматизированная система расчета на вибропрочность дисковых пил</b> .....	156
7.1. Основные принципы автоматического построения сетки .....	157
7.2. Результаты решения тестовых и прикладных задач .....	161
7.3. Свободные колебания дисковой пилы в своей плоскости .....	163
7.4. Свободные изгибные колебания дисковой пилы .....	166
<b>8. Экспериментальная проверка методик расчета и их практическое использование</b> .....	173
8.1. Экспериментальная проверка методики расчета собственных частот .....	173
8.2. Экспериментальное исследование поперечных колебаний дисковой пилы .....	175
8.3. Определение параметра динамического состояния дисковой пилы .....	179
8.4. Экспериментальная проверка возможности оценки динамического состояния пил $C_{r \text{ макс}}$ .....	181
8.5. Исследование влияния конструктивных параметров пилы и условий работы на расчетное значение $C_{r \text{ макс}}$ .....	182
8.6. Экспериментальное исследование и промышленное использование пил .....	190
8.6.1. Экспериментальное исследование дисковых пил .....	190
8.6.2. Практическое использование методик расчета при проектировании дисковых пил .....	194
<i>Приложение</i> .....	202
<i>Список литературы</i> .....	215



## ВВЕДЕНИЕ

В машиностроении широкое распространение получила отрезка заготовок дисковыми пилами. Дисковыми пилами производится разрезка металла разнообразных профилей. В настоящее время выпускается широкая номенклатура дисковых пил размером  $D = 20...315$  мм и толщиной  $B = 0,2...6,0$  мм.

Отрезные пилы работают в стесненных условиях, быстро изнашиваются и зачастую ломаются из-за защемления стружки в канавках. Поэтому форма профиля стружечной канавки и её размеры, количество и шаг зубьев имеют большое значение для дисковых пил.

Кроме того, отрезные пилы – одни из наиболее сложных инструментов с точки зрения динамического состояния в процессе отрезки заготовок. Это связано как с их конструкцией и способами закрепления на станке, так и с самим процессом резания, вследствие которого возникают внешние периодические возмущающие силы при ударах зубьев фрезы в момент начала и окончания работы каждого зуба. В связи с тем, что корпус пилы представляет собой тонкий диск с поднутрением, эти периодические возмущающие силы приводят к потере устойчивости пилы и затиранию её по внешнему ободу.

Таким образом, возникает задача создания пил более совершенной конструкции, обеспечивающей как улучшенный срез стружки, так и более высокую устойчивость в процессе работы.

В зависимости от количества зубьев отрезные пилы изготавливаются с мелким, средним и крупным зубом. У пил с мелким зубом профиль стружечной канавки треугольный, с закруглением во впадине. Дисковые пилы с крупным зубом имеют профиль канавки, снабженный ленточкой по задней поверхности. В то же время исследования, а также опыт использования фрез и других инструментов доказывают эффективность криволинейной формы стружечной канавки.

Дисковые пилы, как правило, выполняются с постоянным шагом зубьев. Возможности дисковых пил с неравномерным шагом зубьев и криволинейным профилем стружечных канавок не определены. Исследования ряда инструментов, в том числе и фрез, показывают, что применение неравномерного шага зубьев и криволинейной формы стружечных канавок существенно влияют на вибрации при резании, стойкость инструмента, точность обработки и качество обработанных поверхностей.

Следует учитывать, что изготовление дисковых пил с криволинейным профилем стружечных канавок и неравномерным шагом зубьев стало возможным сравнительно недавно благодаря широкому внедрению в производство станков с числовым программным управлением (ЧПУ), и поэтому их разработка является одним из перспективных направлений совершенствования этого инструмента.

В предлагаемой работе авторы приводят результаты своих исследований по разработке конструкций пил повышенной работоспособности и динамической устойчивости, а также по технологии изготовления их зубьев, определению условий эксплуатации пил. В частности, рассматриваются вопросы общей теории проектирования пил с криволинейной формой стружечных канавок и неравномерным шагом, теории формирования зубьев дисковых пил, разработки теоретических критериев оценки динамического состояния пил, определения их оптимальных конструкций и условий эксплуатации.

Книга предназначена для специалистов в области проектирования, изготовления и эксплуатации режущего инструмента, технологов машиностроителей, а также может быть использована студентами машиностроительных специальностей при выполнении курсовых и дипломных проектов.

# 1. ОСОБЕННОСТИ КОНСТРУКЦИЙ РЕЖУЩЕЙ ЧАСТИ ДИСКОВЫХ ПИЛ И ТЕХНОЛОГИИ ИХ ИЗГОТОВЛЕНИЯ

## 1.1. Конструктивные элементы и формы профилей зубьев дисковых пил

Эффективность процесса отрезки заготовок дисковыми пилами в большой степени зависит от конструкции зуба пилы, определяющейся формой профиля и значениями геометрических параметров [13, 14].

Отрезные пилы имеют большое количество зубьев и несовершенную конструкцию, а именно: две вспомогательных режущих кромки с задними углами  $\alpha_1 = 0$  и вспомогательными углами в плане  $\varphi_1 = 5' \dots 1^\circ$ ; короткую главную режущую кромку. В процессе работы характеризуются неблагоприятными условиями стружкообразования, переменной во времени нагрузкой на зубья инструмента; прерывистостью процесса резания, приводит к возникновению вредных вибраций с большой амплитудой и сравнительно малой частотой [6].

Все это является причиной интенсивного износа и поломок инструмента, которые, как правило, возникают вследствие защемления стружки в канавках. Поэтому для отрезных пил большое значение имеет количество зубьев  $Z$ , форма профиля зуба, размеры зуба и впадины.

Форма профиля зуба и стружечных канавок должны обеспечивать прочность зуба, достаточное пространство для размещения стружки и ее отвода, допускать достаточно большое количество переточек, препятствовать появлению трещин при термической обработке пилы.

Зубья дисковых пил могут иметь различный профиль. Наиболее распространенные профили зубьев приведены на рис. 1.1. В соответствии с ГОСТом 2679-73 устанавливаются три типа формы профиля зуба.

Первый тип (рис. 1.1, а) — с мелким зубом — имеет одноугловую форму профиля. Такая форма применяется для пил диаметром  $D = 20 \dots 315$  мм, толщиной диска  $B = 0,2 \dots 6,0$  мм с  $Z = 32 \dots 200$  и с

$\varphi = 15' \dots 1^\circ$ . В зависимости от диаметра и количества зубьев фрезы радиус закругления впадины зуба колеблется от 0,1 до 0,5 мм, угол  $\theta$  профиля стружечной канавки принимается равным  $60^\circ$ . Передние и задние поверхности плоские. Пилы имеют неоптимальный завышенный задний угол порядка  $60^\circ$ , что снижает прочность и износостойкость режущей части.

Второй тип профиля (рис. 1.1, б) пилы — со средним зубом — аналогичен первому, но трапециевидный и имеет на задней поверхности ленточку, наклоненную под задним углом  $\alpha$ . С таким профилем изготавливаются пилы с  $D = 50 \dots 315$  мм, толщиной диска  $B = 0,2 \dots 6,0$  мм, с  $Z = 24 \dots 100$  и радиусом  $r = 0,2 \dots 2,25$  мм.

У пилы с крупным зубом используется третий тип профиля зуба (рис. 1.1, в) — с ломаной спинкой зуба. Этот профиль по размерам соответствует равнопрочному на изгиб профилю с параболической спинкой, ограниченному криволинейным (радиусным) участком с радиусом  $r$  у дна канавки и радиусным (близким к параболическому) участком спинки с радиусами ( $r \approx 0,5h$ ,  $R \approx 2h$  у фрез с крупным зубом).

Указанные профили могут изготавливаться с ленточкой на задней поверхности, выполненной под углом  $\alpha$ . Зубья пил с ломаным профилем задней поверхности или профили параболической формы обладают большей прочностью, улучшенными условиями размещения стружки в большей по объему впадине. Пилы с крупным зубом применяются при потребности в большей вместимости стружки в стружечных канавках, а также при обработке на нежестких станках и при недостаточной мощности привода станка.

Как правило, в соответствии с существующими стандартами, упомянутые пилы имеют плоскую переднюю поверхность. Вместе с тем многие исследования подтверждают, что при криволинейной передней поверхности, особенно при обработке вязких материалов, работоспособность фрез, к классу которых относятся дисковые пилы, значительно улучшается. В этой связи пилы с криволинейной формой зуба

(рис. 1.1, в) находят все большее распространение. Изготовителями предлагаются самые разнообразные решения: криволинейные передние поверхности могут очерчиваться одним или несколькими радиусными участками, как в сочетании с прямолинейными, так и без таковых.

Однако вопросы профилирования таких пил с различными размерами конструктивных элементов, с требуемыми геометрическими параметрами режущей части проработаны недостаточно [7].

То же касается и проблемы размеров, и положения дуг окружностей, и отрезков прямых, обеспечивающих рациональную форму стружечных канавок с соответствующими сопряжениями отдельных элементов и заданными геометрическими параметрами режущей части. В литературных источниках содержатся грубоприближенные рекомендации или отдельные частные решения рассматриваемой задачи. Так, на рис. 1.2 приведены параметры криволинейного профиля зуба отрезной пилы, составленного из двух дуг окружностей и отрезков прямых.

Рассматриваемый профиль разработан для определенных значений конструктивных элементов и величин передних и задних углов. Кроме того, задача решена приближенно, поскольку наружная окружность пилы заменена прямой линией.

Изготовление профиля зуба пилы на станках с ЧПУ, с учетом зацепностей, приведенных на рис. 1.2, даже при изменении передних и задних углов приводит к искажению профиля по задней поверхности (рис. 1.3), что отрицательно сказывается на стойкости инструмента.

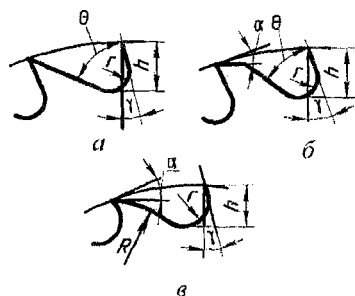


Рис. 1.1. Применяемые профили зубьев пил:

*a* — мелкий зуб; *б* — крупный зуб;  
*в* — зуб криволинейной формы



## 1.2. Особенности технологии изготовления дисковых пил

Специфической операцией при изготовлении дисковых пил является формообразование стружечных канавок.

К основным методам получения стружечных канавок отрезных пил следует отнести фрезерование одноугловыми или двухугловыми фрезами (в зависимости от их формы) и шлифование. Двухугловая фреза обеспечивает лучшее качество обработки поверхности. Как правило, обработка производится методом деления на универсальных станках или специальных автоматах и полуавтоматах.

Обработка стружечных канавок пил может производиться червячными и дисковыми фасонными обкаточными фрезами. Однако несмотря на ряд преимуществ последний способ еще не получил широкого применения на практике. Передний угол  $\gamma$  фрезерованной передней поверхности в целях уменьшения припуска на последующую заточку целесообразно делать большим, чем у готового изделия.

В последние годы все большее распространение получает формообразование стружечных канавок инструментов методом шлифования. Основными преимуществами процесса вышлифовки стружечных канавок являются обеспечение высокой точности и качества поверхностей режущей части инструмента, а также сокращение цикла производства. Широкому применению вышлифовки стружечных канавок способствует создание алмазных и абразивных кругов на специальных связках, что повышает производительность обработки в 3...5 раз по сравнению с фрезерованием. Вышлифовка может быть однократной, когда весь припуск снимается за один проход, или многократной, когда припуск снимается послойно.

При вышлифовке зубьев могут применяться дисковые фасонные круги, профиль которых совпадает с профилем стружечной канавки. В этом случае, аналогично фрезерованию, стружечные канавки обрабатываются по методу деления. Существенным недостатком использования

таких кругов является их профилирование на каждый отдельный типоразмер [10].

Более прогрессивный подход, обеспечивающий высокую производительность и стабильное качество – создание и применение для изготовления и заточки зубьев пил различного профиля станков с ЧПУ, в частности, для этих целей специально разработанны станки фирмы Logosch (Германия).

Кинематическая схема станка включает вращение шлифовального круга вокруг своей оси – главное движение резания. Заготовке сообщается равномерное вращение вокруг собственной оси. Кроме этого, вращающийся шлифовальный круг совершает сложное прямолинейно-поступательное движение, приближаясь либо удаляясь от оси обрабатываемой пилы. Это осуществляется системой числового программного управления. Таким образом, специальный станок с одним, управляемым по программе перемещением способен обеспечить обработку зубьев различного профиля, в т. ч. и для одной пилы.

Анализ геометрических и конструктивных параметров зубьев пил, изготовленных на станках с ЧПУ (независимо от фирмы-изготовителя, кинематики станка и системы управления) показал, что профили зубьев имеют, в большей или меньшей степени, одни и те же дефекты: отклонение выше нормы задних  $\alpha$  и передних  $\gamma$  углов, подрезание профиля зуба на задней поверхности вблизи режущей кромки до 0,02 мм.

Установлено, что причина этих недостатков в упрощенных способах определения и задания конструктивных элементов профиля зуба. Вместе с тем, разработка точных способов профилирования и описания формы зуба ставит задачу определения закона прямолинейно-поступательного движения шлифовального круга, при котором была бы обеспечена заданная форма зуба.

Решение этой задачи зависит от принятой формы профиля шлифовального круга и его воспроизводства в процессе работы путем правки. На станке фирмы Logosch профиль шлифовального круга очерчивается



по дуге окружности, радиус которой выбирается в соответствии с условиями формообразования, меньше наименьшего радиуса закругления профиля стружечной канавки. Это позволяет обрабатывать стружечные канавки с различными размерами конструктивных элементов даже в одной пиле. Для обработки стружечных канавок с различными положительными передними углами  $\gamma$  плоскость возвратно-поступательных перемещений шлифовального круга смещается с оси заготовки. Величина смещения выбирается из расчета обработки фрез с передним углом, меньшим или равным  $30^\circ$ , что полностью перекрывает значения передних углов, рекомендуемых для отрезных пил, предназначенных для обработки различных материалов.

### **1.3. Пути совершенствования конструкций режущей части дисковых пил**

Работоспособность дисковых пил и эффективность отрезки заготовок во многом зависят от конструкции режущей части пилы. Совершенствование конструкций режущей части пил возможно посредством:

- повышения ее износостойкости за счет применения новых инструментальных материалов и покрытий;

- разработки рациональной формы профиля и оптимизации конструктивных и геометрических параметров зубьев в зависимости от конкретных условий обработки;

- применения прогрессивных схем срезания припуска;

- конструирования пил (в частности, зубьев) с улучшенными динамическими характеристиками.

Анализ литературных источников и результатов работы ряда исследователей показал, что проблема повышения эффективности фрезерования, в частности отрезки заготовок, в первую очередь сводится к использованию для режущей части пил новых, более износостойких материалов и покрытий, а также в разработке оптимальных конструкций зуба инструмента.

Процесс отрезки сопровождается пластической деформацией обрабатываемого материала, в результате чего размеры стружки отличаются от размеров срезаемого слоя. По сравнению с размерами срезаемого слоя длина стружки уменьшается, а толщина и ширина увеличиваются. Увеличение ширины стружки незначительно при обработке твердых материалов, но при резании мягких металлов инструментом с малым передним углом она увеличивается более чем в 1,5 раза по сравнению с шириной среза. Стружка трется о боковые поверхности прорезанного паза, пакетируется, а это может привести к поломке инструмента. Для свободного размещения стружки во впадине зуба используются различные схемы срезания припуска, при которых на каждом зубе уменьшается активная длина главной режущей кромки, благодаря чему стружка свободно размещается во впадине т. к. ее ширина в этом случае меньше ширины пропила. Области целесообразного применения различных схем срезания припуска и их преимущества определены в результате исследований, и соответствующие рекомендации приводятся в специальной литературе.

Проблема создания конструкций пил с улучшенными динамическими характеристиками, обеспечивающими как снижение, так и использование вибраций в процессе резания, изучена наиболее слабо.

Явление вибраций при резании известно давно. Проведено значительное количество исследований, связанных с изучением вредных вибраций, ведущих к снижению точности обработки, увеличению шероховатости обработанной поверхности, понижению стойкости инструмента.

Установлено, что большое влияние на работоспособность фрез и устойчивость процесса резания оказывает распределение зубьев по окружности наружного диаметра. Зубья могут распределяться равномерно, с одинаковым угловым шагом, и неравномерно, с неодинаковым угловым шагом между соседними зубьями. Исследования показывают, что виброактивность зоны резания можно существенно изменить, используя фрезы с неравномерным шагом зубьев, и таким образом повы-

снить работоспособность инструмента [11]. Поэтому был разработан ряд мер, направленных на гашение вибраций. Так, например, с целью устранения вредных вибраций, возникающих в процессе фрезерования, было предложено и опробовано применение концевых фрез с неравномерным шагом зубьев. Неравномерность шага зубьев обеспечивает разную толщину среза, снимаемую каждым зубом. В результате создается переменная нагрузка на каждый зуб, изменяется характер контакта зубьев с заготовкой, что приводит к снижению вибраций и более спокойной работе фрезы, в особенности при фрезеровании глубоких пазов.

Наряду с этим было выявлено, что при некоторых условиях процесса резания использовать вибрации инструмента определенной частоты и амплитуды полезно.

Однако физическая природа влияния колебаний на характер протекания процесса резания, износ и стойкость инструмента в полной мере не выяснены, что не позволяет определить области эффективного использования виброрезания и пути гашения вредных колебаний.

Недостаточно исследовано влияние колебаний и их характер во время применения дисковых пил. В частности, не определено влияние на работоспособность неравномерности окружного шага зубьев; не разработаны рекомендации по выбору величин неравномерности окружных шагов; не исследованы особенности процесса резания дисковыми пилами с неравномерным шагом зубьев; не решены задачи определения нагрузки режущей части, изменения количества одновременно работающих зубьев, не рассмотрено динамическое состояние дисковых пил в понятиях теории колебаний.

Особого внимания заслуживает проблема повышения эффективности отрезки круглых заготовок, к которым относятся прутки и трубы. Вопросы отрезки круглых заготовок дисковыми пилами исследованы недостаточно, и их разработка является актуальной. Это обосновано, прежде всего, нестабильностью и неустойчивостью процесса. Резание круглых заготовок происходит при постоянно изменяющемся сечении

среза, в условиях нестабильного режима обработки с постоянно изменяющимся количеством одновременно работающих зубьев, а следовательно, с переменными возмущающими силами. Вместе с тем, как показывает практика, отрезка круглых заготовок (особенно труб) дисковыми пилами является наиболее распространенной и эффективной с точки зрения производительности и качества торцов реза.

Таким образом, приведенный анализ показывает, что наиболее перспективными направлениями в совершенствовании конструкций отрезных пил могут быть:

- разработка пил с криволинейным профилем зуба с рациональными величинами геометрических параметров режущей части;
- создание отрезных пил с неравномерным шагом зубьев, с целесообразными размерами конструктивных элементов.

Для совершенствования этого инструмента требуется:

- решение вопросов профилирования режущей части дисковых пил с неравномерным шагом зубьев и криволинейной формой профиля зубьев;
- определение закона движения шлифовального круга при вышлифовке стружечных канавок и заточке дисковых пил на станках с ЧПУ;
- решение вопросов предварительной обработки зубьев пил с неравномерным шагом;
- исследование динамического состояния дисковой пилы при кинематическом возбуждении изгибных колебаний и определение более эффективного критерия оценки динамического состояния пилы в процессе работы;
- установление влияния конструктивных параметров пилы на критерий оценки ее динамического состояния;
- создание новой конструкции инструмента для отрезки круглых заготовок;
- разработка рекомендаций по выбору конструктивных параметров дисковых пил в зависимости от условий их эксплуатации.

## 2. ПРОФИЛИРОВАНИЕ ДИСКОВЫХ ПИЛ

### 2.1. Обобщенный профиль зуба дисковой пилы

Анализ разнообразных форм профилей стружечных канавок дисковых пил, применяемых в практике, приводит к выводу о целесообразности создания обобщенного профиля зуба, который при определенных значениях его конструктивных параметров превращался бы в тот или иной известный частный профиль зуба пилы.

Выбор формы и размеров стружечных канавок имеет большое значение для дисковых пил, работающих в стесненных условиях. Опыт свидетельствует, что большинство поломок инструмента происходит вследствие защемления, пакетирования стружки в канавках. Форма зуба и, соответственно, стружечной канавки должна: а) обеспечить прочность зубьев; б) гарантировать свободное размещение стружки в канавках и ее отвод; в) препятствовать появлению трещин при термической обработке; г) допускать максимально возможное количество персточек.

Прочность зуба определяется главным образом углом заострения, который должен быть не меньше  $45^\circ$ . Условие свободного размещения стружки в канавках, условия вмести́мости стружки характеризуется коэффициентом вмести́мости  $K$ .

$$K = \frac{F_b}{F_{\text{ср}}},$$

где  $F_b$  — площадь стружечной канавки;  $F_{\text{ср}}$  — площадь продольного сечения среза, рассматриваемого в плоскости перпендикулярной оси пилы.

Анализ показывает, что при отрезке дисковыми пилами коэффициент вмести́мости стружки колеблется от 15 до 50.

При обработке труднообрабатываемых материалов применяется двукратная схема оформления профиля передней поверхности. В этом случае сливная стружка наиболее рационально формируется, размещается в канавке и легко удаляется, что обеспечивает возмож-

ность некоторого увеличения подачи на зуб, снижение шероховатости обработанной поверхности и повышение надежности инструмента.

С целью предотвращения образования трещин при термической обработке профиль стружечной канавки должен быть плавным, без резких переходов.

Рассмотрение применяемых в практике профилей стружечных канавок показывает, что обобщенный профиль стружечной канавки (рис. 2.1) будет ограничен тремя дугами окружностей радиусом  $r_1$ ,  $r_2$  и  $R$ , а также участками прямых линий, размеры которых обозначены  $f_1$  и  $f_2$ .

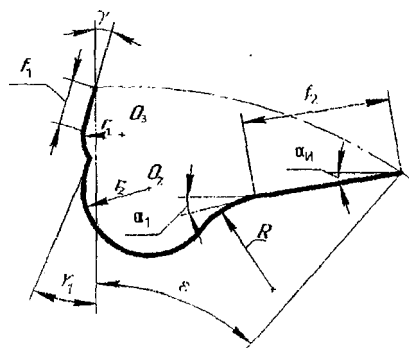


Рис. 2.1. Обобщенный профиль зуба пилы

Прямолинейный участок затылочной поверхности зуба не всегда сопряжен с криволинейным профилем радиуса  $R$ . В этом случае криволинейный участок задается углом  $\alpha_1$  наклона касательной к профилю в точке соприкосновения фаски  $f_2$  и окружности радиусом  $R$ . Если принять радиус  $R = 0$ ,  $r_1 = 0$ , то величина радиуса  $r$  будет небольшой, в пределах 0,1...0,5 мм; при значительной величине инструментального задне-

го угла  $\alpha_n$  обобщенная форма профиля зуба превращается в одноугловую. Если принять  $R = \infty$ ,  $r_1 = 0$ , а  $r_2$  — относительно малое значение, то обобщенная форма профиля превращается в форму профиля канавки отрезной пилы с крупным зубом. При сравнительно малых величинах  $f_1$  и  $f_2$  из обобщенной схемы получаем применяемую в практике отрезную пилу с криволинейным профилем зуба.

## 2.2. Профилирование пил с равномерным шагом и прямым зубом

Рассмотрим определение профиля зуба отрезной пилы с равномерным шагом и прямым зубом.

Примем, что в общем случае профиль зуба (рис. 2.2) ограничен прямолинейными фасками  $f_1 = AC$  и  $f_2 = MB$ , а также тремя окружностями, радиусы которых равны  $r_1$ ,  $r_2$  и  $R$ . Профиль имеет плавные сопряжения в граничных точках  $M$ ,  $T$ ,  $C$ . В точке  $L$  создастся на передней поверхности соответствующий уступ, и можно провести в этой точке две касательные к профилю зуба. Необходимо определить размеры рассматриваемого профиля зуба.

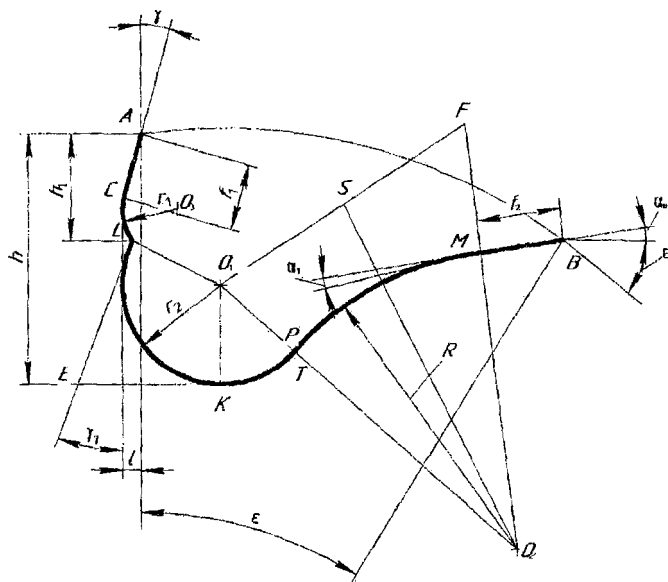


Рис. 2.2. Графическое определение профиля зуба пилы

Исходными, известными данными будем считать:

диаметр пилы –  $D$ , мм;

количество зубьев  $-Z$ ;

передний угол —  $\gamma$ ;

инструментальный задний угол  $-\alpha_n$ ;

угол  $\gamma_1$  наклона касательной к профилю в точке  $L$ ;

положение точки  $L$ , которое задается размерами  $h_1$  и  $l$ ;

высота канавки  $-h$ ;

угол  $\alpha_1$  наклона касательной к профилю в точке  $M$ ;

размер  $AC$  фаски  $f_1$  на передней поверхности;

размер  $BM$  фаски  $f_2$  на задней поверхности.

Так как пила имеет прямые зубья, угол наклона режущих кромок будет равен нулю.

Угловой шаг зубьев равен

$$\varepsilon^\circ = \frac{360^\circ}{Z}.$$

Шаг зубьев по наружной окружности:

$$p = \frac{\pi D}{Z}.$$

Передний угол  $\gamma$  и задний угол  $\alpha_n$  выбирают по соответствующим справочникам, зная материал обрабатываемой заготовки, инструментальный материал и другие составляющие процесса отрезки. Угол  $\gamma_1$  выбирается близким к углу  $\gamma$ . Размеры  $h_1$  и  $l$  колеблются в пределах  $h_1 = (0,1 \dots 0,3)h$  и  $l = (-0,5 \dots +0,5)$  мм.

Высота  $h$  канавки принимается:  $h = (0,3 \dots 0,5)p$ .

Угол  $\alpha_1$  на пилах с крупным зубом принимается равным  $\alpha_1 = (10 \dots 20^\circ)$ , фаски на передней  $f_1$  и на задней  $f_2$  поверхностях выбираются в пределах  $f_1 = (0,00 \dots 0,06)p$ ;  $f_2 = (0,00 \dots 0,09)p$ .

Графическое определение профиля зуба пилы при рассмотренных исходных данных приведено на рис. 2.2.

В выбранном масштабе изображена наружная окружность, радиус которой равен  $0,5D$ , и на ней отмечены граничные точки  $A$  и  $B$  профиля зуба. Расположение точек  $A$  и  $B$  определяется угловым шагом  $\varepsilon^\circ$ . Через



точку  $A$  проводится под углом  $\gamma$  отрезок прямой  $AC$ , длина которого равна  $f_1$ . В соответствии с принятыми размерами  $h_1$  и  $l$ , определяется положение точки  $L$ . Находится центр  $O_3$  окружности радиуса  $r_1$ . Он лежит на перпендикуляре  $O_3C$  к прямой  $AC$ , так как прямая  $AC$  в точке  $C$  касается рассматриваемой окружности  $r_1$ . В то же время, чтобы окружность  $r_1$  проходила через точки  $C$  и  $L$ , она должна располагаться на перпендикуляре, проведенном к отрезку  $CL$  через его середину. Таким образом, находится положение центра  $O_3$ , как точка пересечения двух рассматриваемых прямых, и соответствующий радиус  $r_1$ .

Зная высоту зуба  $h$ , проводим прямую  $EK$ , которая касается профиля зуба. При известном (выбранном) угле  $\gamma_1$  проводится прямая  $LE$ , которая также касается в точке  $L$  профиля зуба. Поэтому центр  $O_x$  должен лежать на биссектрисе  $EO_1$  угла  $LEK$ . С другой стороны окружность радиуса  $r$  должна в точке  $L$  касаться прямой  $LE$ . Для этого необходимо, чтобы центр  $O_1$  лежал на прямой  $O_1L$ , перпендикулярной прямой  $LE$ . В результате пересечения прямых  $EO_1$  и  $LO_1$  находится центр  $O_1$  и радиус  $r = O_1L$  окружности, ограничивающей профиль зуба пилы.

Далее через точку  $B$  проводится прямая  $BM$  так, чтобы образовать требуемый задний угол  $\alpha_n$  в точке  $B$ . По построению инструментальный задний угол оси  $\alpha_n = \alpha - \varepsilon$ . На прямой  $BM$ , которая касается задней поверхности, откладывается размер фаски  $f_2 = BM$ . Через точку  $M$  проводится под углом  $\alpha_1$  прямая  $MP$ , которая в точке  $M$  касается профиля зуба. Для того, чтобы окружность радиуса  $R$  касалась в точке  $M$  прямой  $MP$ , ее центр  $O_2$  должен лежать на прямой  $MO_2$ , перпендикулярной прямой  $MP$ .

Предположим, что из центра  $O_2$  проведена окружность радиусом  $R$ . Эта окружность пройдет через точки  $O_1$  и  $F$ , если расстояние  $FM = R$ . Для того, чтобы окружность прошла через точки  $O_1$  и  $F$ , ее центр должен располагаться на прямой  $SO_2$ , которая проходит через середину отрезка  $O_1F$  ему перпендикулярно. Точка пересечения прямых

Аналитическое определение профиля зуба пилы включает определение радиуса  $r_1$  и положения центра  $O_3$  (рис. 2.3).

Отрезок  $KL = h_1 - f_1 \cos \gamma$ .

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f_1 \sin \gamma - l}{h_1 - f_1 \cos \gamma};$$

$$CL = \frac{h_1 - f_1 \cos \gamma}{\cos \beta} = \frac{f_1 \sin \gamma - l}{\sin \beta}.$$

$$CE = 0,5CL = \frac{h_1 - f_1 \cos \gamma}{2 \cos \beta}.$$
$$\angle E_1CO_3 = 90(\gamma + \beta);$$

$$r_1 = O_3C = \frac{CE}{\sin(\gamma + \beta)}$$

$$r_1 = \frac{h_1 - f_1 \cos \gamma}{2 \cos \beta \sin(\gamma + \beta)}.$$

Положение центра  $O_3$  определяется размерами  $h_0$  и  $l_0$ .

$$l_0 = r_1 \cos \gamma - f_1 \sin \gamma;$$

$$h_0 = f_1 \cos \gamma + r_1 \sin \gamma.$$

22

разом, чтобы его крайняя точка  $A$  (рис. 2.4) лежала на оси  $Y$ . Координаты точки  $A$ :

$$\begin{aligned} X_A &= 0; \\ Y_A &= 0,5D. \end{aligned}$$

Координаты второй крайней точки  $B$  профиля будут:

$$\begin{aligned} X_B &= 0,5D \sin \varepsilon; \\ Y_B &= 0,5D \cos \varepsilon. \end{aligned}$$

Координаты точки  $C$ :

$$\begin{aligned} X_C &= -f_1 \sin \gamma; \\ Y_C &= 0,5D - f_1 \cos \gamma. \end{aligned}$$

Координаты точки  $L$ :

$$\begin{aligned} X_L &= -1; \\ Y_L &= 0,5D - h_1. \end{aligned}$$

Координаты точки  $O_3$  — центра окружности радиуса  $r_1$ :

$$\begin{aligned} X_{O_3} &= r_1 \cos \gamma - f_1 \sin \gamma; \\ Y_{O_3} &= 0,5D - f_1 \cos \gamma - r_1 \sin \gamma. \end{aligned}$$

По построению  $LH = h - h_1$ .

С другой стороны,  $LH = LM + MH = r + r \sin \gamma_1$ .

Следовательно,  $h - h_1 = r(1 + \sin \gamma_1)$ .

Отсюда

$$r = \frac{h - h_1}{1 + \sin \gamma_1}.$$

Координаты центра  $O_1$  окружности радиуса  $r$  будут:

$$\begin{aligned} X_{O_1} &= r \cos \gamma_1 - 1; \\ Y_{O_1} &= 0,5D - h_1 - r \sin \gamma_1. \end{aligned}$$

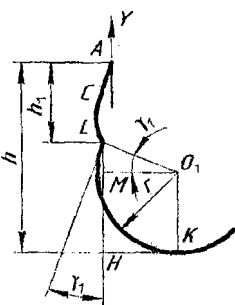


Рис. 2.4. Аналитическое определение профиля зуба пилы на участке  $A-K$

$$Y_M = Y_B - f_2 \sin \alpha_{\text{н}}.$$

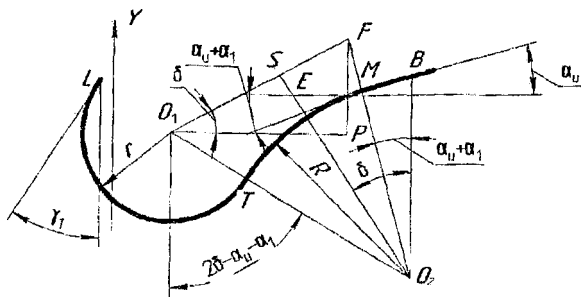


Рис. 2.5. Аналитическое определение профиля зуба пилы на участке  $K-B$

Координаты точки  $F$  при отрезке  $FM=r$  будут:

$$Y_F = Y_M + r \cos(\alpha_n + \alpha_1)$$

ИЛИ

$$Y_F = 0,5D \cos \varepsilon - f_2 \sin \alpha_n + r \cos(\alpha_n + \alpha_1).$$

Вспомогательный угол  $\delta$  определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{Y_F - Y_{Q_1}}{X_F - X_{Q_1}}.$$

Из треугольника  $O_1FR$  получим:

$$FO_1 = \frac{X_F - X_{O_1}}{\cos \delta} = \frac{Y_F - Y_{O_1}}{\sin \delta}.$$

По построению  $O_1S = FS = 0,5FO_1 = \frac{X_F - X_{O_1}}{2 \cos \delta}$ .

Угол  $FO_2S = \delta - \alpha_n - \alpha_1$ .

Из прямоугольного треугольника  $FO_2S$  имеем:

$$FO_2 = R + r = \frac{SF}{\sin(\delta - \alpha_n - \alpha_1)} = \frac{X_F - X_{O_1}}{2 \cos \delta \sin(\delta - \alpha_n - \alpha_1)}.$$

Отсюда

$$R = \frac{X_F - X_{O_1}}{2 \cos \delta \sin(\delta - \alpha_n - \alpha_1)} - r.$$

Координаты центра  $O_2$  будут равны:

$$X_{O_2} = X_M - R \sin(\alpha_n + \alpha_1);$$

$$Y_{O_2} = Y_M - R \cos(\alpha_n + \alpha_1),$$

или

$$X_{O_2} = 0,5D \sin \varepsilon - f_2 \cos \alpha_n - R \sin(\alpha_n + \alpha_1);$$

$$Y_{O_2} = 0,5D \cos \varepsilon - f_2 \sin \alpha_n + R \cos(\alpha_n + \alpha_1).$$

Координаты точки  $T$  сопряжения окружностей  $r$  и  $R$  будут:

$$X_T = X_{O_1} - r \sin(2\delta - \alpha_n - \alpha_1);$$

$$Y_T = Y_{O_1} - r \cos(2\delta - \alpha_n - \alpha_1).$$

Для того, чтобы обработать стружечную канавку пилы без подрезания, необходимо систему  $XY$  вместе с профилем зуба повернуть на угол  $t$  (рис. 2.6).

В этом случае формулы перехода от системы  $XY$  к системе  $X_0Y_0$  будут:

$$X_0 = X \cos t - Y \sin t;$$

$$Y_0 = Y \cos t + X \sin t.$$

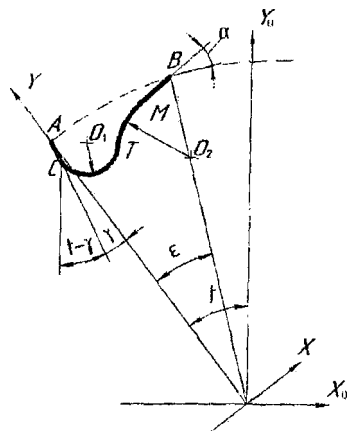


Рис. 2.6. Схема обработки стружечной канавки

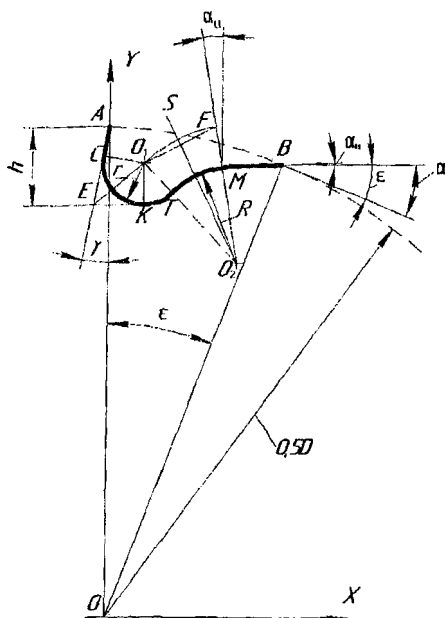


Рис. 2.7. Графическое определение профиля зуба пилы при  $r_1 = 0$

Минимальное значение угла поворота  $t$  в случае, когда  $\gamma \geq \gamma_1$  будет:  $t_{\min} \geq \gamma$ . В случае  $t_{\min} = \gamma$  прямая  $AC$  займет вертикальное положение (см. рис. 2.2).

Если  $\gamma_1 \geq \gamma$  и  $t_{\min} = \gamma_1$ , прямая  $LE$  займет вертикальное положение, параллельное оси  $Y_0$ , и будет обеспечена обработка заданного профиля зуба без его подрезания.

Рассмотрим распространенный частный случай, когда  $r_1 = 0$ ; точки  $C$  и  $L$  совпадают. Угол  $\alpha_1 = 0$ , и в точке  $M$  наблюдается плавное соприкосновение окружности радиуса  $R$  и фаски  $f_2 = MB$ .

Графическое определение профиля зуба пилы для этого частного случая приведено на рис. 2.7.

В выбранном масштабе изображается наружная окружность, радиус которой равен  $0,5D$ , и на ней отмечаются граничные точки  $A$  и  $B$  профиля зуба. Взаиморасположение точек  $A$  и  $B$  определяется углом  $\epsilon$ . Через точку  $A$  проводится под углом  $\gamma$  прямая  $AE$ , которая касается передней поверхности, и на ней откладывается отрезок  $AC = f_1$ .

Через точку  $B$  проводится прямая  $BM$  так, чтобы образовать требуемый задний угол в точке  $B$ .

По построению угол  $\alpha_n = \alpha - \varepsilon$ . На прямой  $BM$ , которая касается задней поверхности, откладывается отрезок  $BM = f_2$ . В соответствии с принятой величиной высоты  $h$  проводится прямая  $EK$ , которая должна касаться профиля зуба. Поэтому окружность радиуса  $r$  необходимо провести так, чтобы она касалась прямых  $KE$  и  $AE$ . Для этого центр  $O_1$  рассматриваемой окружности должен располагаться на биссектрисе  $O_1E$  угла  $AЕК$ . С другой стороны, окружность радиуса  $r$  должна касаться прямой  $AE$  в точке  $C$ . Для этого необходимо, чтобы центр  $O_1$  рассматриваемой окружности лежал на прямой  $CO_1$ , перпендикулярной прямой  $AE$ . В результате пересечения прямых  $CO_1$  и  $EO_1$  находится центр  $O_1$  и радиус  $r = O_1C$  окружности, описывающей переднюю поверхность зуба пилы.

Вторую окружность радиуса  $R$  необходимо провести таким образом, чтобы она касалась в точке  $M$  прямой  $BM$  и плавно сопрягалась с окружностью радиуса  $r$ . Для того, чтобы окружность радиуса  $R$  касалась в точке  $M$  прямой  $BM$ , центр  $O_2$  ее должен лежать на прямой  $FM$ , перпендикулярной прямой  $BM$ .

Представим себе, что из центра  $O_2$  проведена окружность, радиус которой равен  $R + r$ . Эта окружность пройдет через точки  $O_2$  и  $F$ , если расстояние  $FM = r$ . Для того, чтобы окружность прошла через точки  $O_1$  и  $F$ , центр ее должен располагаться на прямой  $SO_2$ , которая проходит через середину отрезка  $O_1F$  ему перпендикулярно. Точка пересечения прямых  $FM$  и  $SO_2$  будет центром окружности, оформляющей затылочную часть зуба, радиус  $R$  которой равен отрезку  $MO_2$ . Соприкосновение окружностей радиусов  $r$  и  $R$  происходит в точке  $T$ . При аналитическом определении профиля зуба пилы выбирается система координат  $XY$ , начало координат которой располагается на оси пилы. Проектируемый профиль зуба располагают таким образом, чтобы его крайняя точка  $A$  лежала на оси  $Y$ . Координаты точки  $A$  будут:  $X_A = 0$ ,  $Y_A = 0,5D$ .



$$Y_B = 0,5D \cos \varepsilon.$$

Отрезок  $BM = f_2$ . Следовательно, координаты точки  $M$  будут:

$$X_M = X_B - f_2 \cos \alpha_u;$$

$$Y_M = Y_B - f_2 \sin \alpha_n.$$

Угол между осью  $Y$  и прямой  $FM$  будет также равен  $\alpha_i$  (углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Учитывая, что отрезок  $FM = r$ , координаты точки  $F$  будут:

$$X_F = X_M - r \sin \alpha_n;$$

$$Y_F = Y_M + r \cos \alpha_H.$$

Так как прямая  $AE$  идет под углом  $\gamma$  и отрезок  $AC = f_1$ , координаты точки  $C$  будут:

$$X_C = -f_1 r \sin \gamma;$$

$$Y_G = 0,5D - f_1 r \cos \gamma.$$

По построению  $CH = h - f_1 r \cos \gamma$ .

С другой стороны,  $CH = HL + CL = r + r \sin \gamma$ .

Таким образом, будем иметь:

$$h - f_1 r \cos \gamma = r + r \sin \gamma.$$

Отсюда  $r = \frac{h - f_1 \cos \gamma}{1 + \sin \gamma}$ .

Тогда координаты точки  $O_1$  будут:

$$X_{O_1} = X_C + r \cos \gamma = r \cos \gamma - f_1 \sin \gamma;$$

$$Y_{O_1} = Y_C - r \sin \gamma = 0,5D - f_1 \cos \gamma - r \sin \gamma.$$

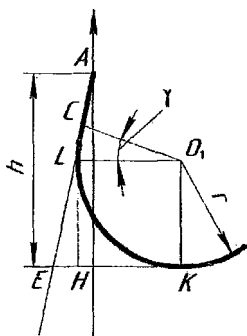


Рис. 2.8. Аналитическое определение профиля зуба пилы на участке  $A-K$  при  $r_1 = 0$



Радиус  $R$  определяется из рис. 2.9.

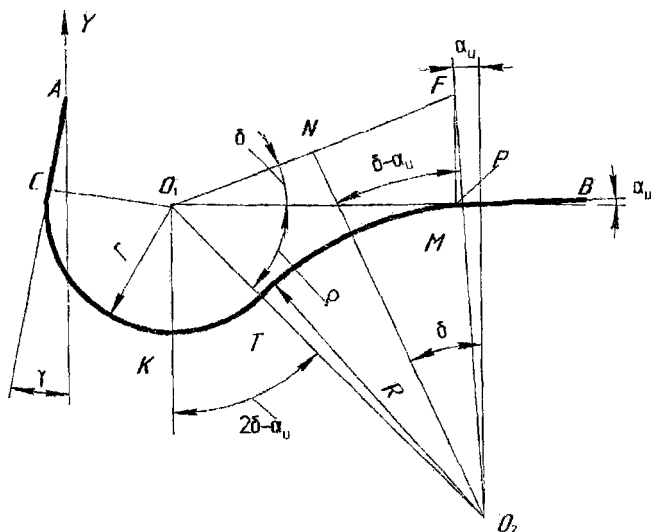


Рис. 2.9. Аналитическое определение профиля зуба пилы на участке  $K-B$  при  $r_1 = 0$

Вспомогательный угол  $\delta$  определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{Y_F - Y_{O_1}}{X_F - X_{O_1}}.$$

Из треугольника  $O_1FR$  имеем:

$$FO_1 = \frac{X_F - X_{O_1}}{\cos \delta} = \frac{Y_F - Y_{O_1}}{\sin \delta}.$$

По построению отрезок  $O_1N = NF = 0,5O_1F$ .

Следовательно,

$$NF = \frac{X_F - X_{O_1}}{2 \cos \delta}.$$

Углы  $FO_1P$  и  $NO_2K$  равны. Это углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Тогда, по построению, угол  $FO_2N = \delta - \alpha_u$ .

Из прямоугольного треугольника  $NFO_2$  имеем:

$$FO_2 = R + r = \frac{NF}{\sin(\delta - \alpha_n)}.$$

Отсюда

$$R = \frac{NF}{\sin(\delta - \alpha_n)} - r = \frac{X_F - X_{O_1}}{2 \cos \delta \sin(\delta - \alpha_n)} - r.$$

Координаты центра  $O_2$  будут равны:

$$X_{O_2} = X_M + R \sin \alpha_n;$$

$$Y_{O_2} = Y_M - R \cos \alpha_n.$$

Координаты точки  $T$  сопряжения окружностей радиусов  $r$  и  $R$  будут:

$$X_T = X_{O_1} + r \sin(2\delta - \alpha_n);$$

$$Y_T = Y_{O_1} - r \cos(2\delta - \alpha_n).$$

В системе координат  $X_O Y_O$  (см. рис. 2.6) координаты точек  $A$ ,  $C$ ,  $T$ ,  $M$ ,  $B$ ,  $O$  и  $O_2$  будут определяться по формулам преобразования координат:

$$X_O = X \cos t - Y \sin t;$$

$$Y_O = Y \cos t + X \sin t.$$

Минимальное значение угла поворота  $t$ , при котором возможна обработка стружечной канавки без подрезания, равно  $t = \gamma$ .

Выведенные для рассмотренного частного случая аналитические зависимости можно получить из общих формул, подставляя в них  $r_1 = 0$ ;  $\alpha_1 = 0$ ;  $h_1 = f_1 \cos \gamma$ ;  $l = f_1 \sin \gamma$ .

## 2.3. Профилирование дисковых пил с неравномерным шагом

Отрезные пилы с неравномерным шагом при переходе от одного зуба к другому имеют различные профили. Рассмотрим задачу определения криволинейных профилей пил с неравномерным шагом зубьев с прямыми канавками, идущими параллельно оси инструмента. Номинальный угловой шаг зубьев будет равен

$$\varepsilon^\circ = \frac{360^\circ}{Z}.$$

Выбирается количество зубьев  $Z_{гр}$  в группе. Определяется количество групп  $\eta = \frac{Z}{Z_{гр}}$ ; число  $\eta$  должно быть целым, поэтому рассчитанное значение  $\eta$  округляется до целого числа; уточняется общее количество зубьев  $Z = \eta Z_{гр}$ . Угол, охватываемый одной группой зубьев, будет равен

$$\varphi = \frac{360^\circ}{\eta}.$$

Принимается соответствующая разбивка по шагу.

Разбивка по шагу может задаваться произвольно коэффициентами  $K_i$ , которые характеризуют значение каждого шага в группе по отношению к номинальному. Так, например, при  $Z_{гр} = 6$  (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Значение коэффициентов  $K_i$  при произвольной разбивке по шагу

$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$K_6$
0,7	0,9	1,3	1,1	0,8	1,2

Обязательным условием при произвольной разбивке по шагу является  $\sum K_i = Z_{гр}$ .

Разбивка по шагу может задаваться и соответствующим законом.

В этом случае принимается величина  $C$  неравномерности шага зубьев. Так, при разбивке по шагу по закону треугольника величина  $C$  принимается в процентах от номинального шага, которая, считаем, колеблется в пределах  $5\% < C < 50\%$ .

Рассмотрим случай определения значений каждого из шагов в группе при их разбивке по треугольнику. Для этого принимаем соответствующее значение  $C$  и находим значение величины  $A$  неравномерности шага соседних зубьев в градусах:

$$\Delta = \frac{C\varepsilon^\circ}{100}.$$

Разбивка по шагу зубьев в группе определяется по табл. 2.2.

Таблица 2.2

Разбивка по шагу зубьев в группе

Номер зуба в группе	1	2	3	4	5	6	7	8	Сумма откло- нений, $\Sigma\Delta$
Разбивка по шагу	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_1 + \Delta$	—	—	—	—	—	—	$\Delta$
	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_1 + \Delta$	$\varepsilon_1 + \Delta$	$\varepsilon_1 + \Delta$	—	—	—	—	$4\Delta$
	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_1 + \Delta$	$\varepsilon_1 + \Delta$	$\varepsilon_1 + \Delta$	$\varepsilon_1 + \Delta$	$\varepsilon_1 + \Delta$	—	—	$9\Delta$
	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_1 + \Delta$	$\varepsilon_1 + \Delta$	$\varepsilon_1 + \Delta$	$\varepsilon_1 + \Delta$	$\varepsilon_1 + \Delta$	$\varepsilon_1 + \Delta$	$\varepsilon_1 + \Delta$	$16\Delta$

Для заданного закона распределения по шагу определяется минимальный угловой шаг  $\varepsilon_1$  и шаг  $P_1$  по наружной окружности.

$$\varepsilon_1 = \frac{\varphi - \Sigma\Delta}{Z_{гр}},$$

где  $\Delta$  — величина отклонения шага между зубьями в группе:

$$P_1 = \frac{\pi D \varepsilon_1}{360^\circ}.$$

В соответствии с принятой разбивкой по шагу рассчитываются шаги  $\varepsilon_i$  и  $P_i$  для всех зубьев в группе. Например, шаг  $\varepsilon_2$  второго зуба в группе будет  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \Delta$ , а шаг  $\varepsilon_3$  третьего зуба в группе равен  $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + 2\Delta = \varepsilon_2 + \Delta$ .

Соответственно определяются для каждого зуба в группе шаги по наружной окружности

$$P_i = \frac{\pi D \varepsilon_i}{360^\circ}.$$

Так, например, для второго зуба

$$P_2 = \frac{\pi D \varepsilon_2}{360^\circ}.$$

При произвольной разбивке по шагу, которая задается коэффициентами  $K_i$ , также определяются значения каждого углового шага в группе и шага по наружной окружности:  $\varepsilon_i = \varepsilon K_i$ , где  $\varepsilon$ ,  $P_i$  — значение  $i$ -го шага в группе соответственно углового и по наружной окружности. Определяются глубины  $h_i = (0,3 \dots 0,5) P_i$ . Для каждого зуба в группе рассчитываются фаски  $f_{1i}$  на передней и задней  $f_{2i}$  плоскостях. Рекомендуемые значения фасок лежат в таких пределах:

$$f_{1i} = (0,00 \dots 0,06) P_i;$$

$$f_{2i} = (0,00 \dots 0,09) P_i.$$

Для каждого зуба в группе рассчитываются радиусы  $r_i$  окружностей, которые оформляют профиль передней поверхности:

$$r_i = \frac{h_i - f_{1i} \cos \gamma}{2 \cos \beta_i \sin(\gamma + \delta)_i};$$

$$\operatorname{tg} \beta_i = \frac{f_{1i} \sin \gamma - l}{h_i - f_{1i} \cos \gamma},$$

где  $h_i$  — принимаем  $(0,1 \dots 0,3) h_i$ .

Координаты центров  $O_{3i}$  окружностей радиуса  $r_{1i}$  для каждого зуба в группе находятся по формулам:

$$X_{O_3} = r_{1i} \cos \gamma - f_{1i} \sin \gamma;$$

$$Y_{O_3} = 0,5D - f_{1i} \cos \gamma - r_{1i} \sin \gamma.$$

Координаты точки  $C$  сопряжения фаски  $f_i$  и окружности радиуса  $r_i$ :

$$X_C = -f_{li} \sin \gamma;$$

$$Y_C = 0,5D - f_{li} \cos \gamma.$$

Для каждого зуба в группе рассчитываются радиусы  $r$  вторых окружностей, которые оформляют профиль передней поверхности:

$$r_i = \frac{h_i - h_{li}}{1 + \sin \gamma_1},$$

где  $\gamma_1$  – угол, характеризующий положение касательной к окружности радиуса  $r_1$ . Величина его, по конструктивным соображениям, выбирается близкой к переднему углу  $\gamma$ .

Координаты центров  $O_{li}$  окружности радиуса  $r$  для каждого зуба в группе будут:

$$X_{O_l} = r_i \cos \gamma_1 - l;$$

$$Y_{O_l} = 0,5D - h_1 - r_i \sin \gamma_1.$$

Координаты точек  $L$  соприкосновения окружностей радиусов  $r$  и  $r_1$  будут:

$$X_{Li} = -l;$$

$$Y_{Li} = 0,5D - h_{li}.$$

Координаты вспомогательных точек  $F_i$  будут равны:

$$X_{Fi} = 0,5D \sin \varepsilon_i - f_{2i} \cos \alpha_n - r_i \sin(\alpha_n + \alpha_1);$$

$$Y_{Fi} = 0,5D \cos \varepsilon_i - f_{2i} \sin \alpha_n + r_i \sin(\alpha_n + \alpha_1).$$

Вспомогательный угол  $\delta_i$  для каждого зуба в группе определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \delta_i = \frac{Y_{Fi} - Y_{O_l}}{X_{Fi} - X_{O_l}}.$$

Для каждого зуба в группе рассчитываются радиусы  $R_i$  профиля спинки зуба

$$R_i = \frac{X_{F_i} - X_{O_i}}{2 \cos \delta_i \sin(\delta_i - \alpha_n - \alpha_1)} - r_i.$$

Координаты центров  $O_{2i}$  окружностей радиуса  $R_i$ :

$$X_{O_{2i}} = 0,5D \sin \varepsilon_i - f_{2i} \cos \alpha_n + R_i \sin(\alpha_n + \alpha_1);$$

$$Y_{O_{2i}} = 0,5D \cos \varepsilon_i - f_{2i} \sin \alpha_n - R_i \cos(\alpha_n + \alpha_1).$$

Координаты точек  $T_i$  сопряжения окружностей  $r_i$  и  $R$  будут:

$$X_{T_i} = r_i \sin(2\delta_i - \alpha_n - \alpha_1) + X_{O_{2i}};$$

$$Y_{T_i} = Y_{O_{2i}} - r_i \cos(2\delta_i - \alpha_n - \alpha_1).$$

Координаты точек  $B_i$  — крайних точек профилей зубьев:

$$X_B = 0,5D \sin \varepsilon_i;$$

$$Y_B = 0,5D \cos \varepsilon_i.$$

Координаты точек  $M_i$  соприкосновения фасок  $F_{2i}$  и окружностей радиусов  $R_i$ :

$$X_{M_i} = 0,5D \sin \varepsilon_i - f_{2i} \cos \alpha_n;$$

$$Y_{M_i} = 0,5D \cos \varepsilon_i - f_{2i} \sin \alpha_n.$$

Вычерчиваются в соответствии с приведенным расчетом профили каждого зуба в группе в своей системе координат  $X_i Y_i$ . Начало координат всех систем  $X_i Y_i$  располагается на оси пилы. Оси  $Y_i$  проходят через начальную точку  $A_i$  профиля зуба.

Для того, чтобы изобразить профили всех зубьев группы в одной системе координат  $X_0 Y_0$ , которая совпадает с системой  $X_i Y_i$  последнего зуба в группе, поступаем следующим образом:

- а) вычерчиваем профиль последнего зуба в группе;
- б) в соответствии с принятым расположением зубьев в группе систему  $X_i Y_i$  в системе  $X_0 Y_0$  поворачиваем вместе с профилями зубьев на

углы  $t_i$  так, чтобы крайняя точка  $B_i$  зуба совпала с крайней точкой  $A_{i-1}$  предыдущего зуба и по формулам преобразования координат определяем профили зубьев группы в системе  $X_0Y_0$ .

Формулы преобразования координат будут:

$$X_O = X_i \cos t_i - Y_i \sin t_i;$$

$$Y_O = Y_i \cos t_i + X_i \sin t_i,$$

где значение угла  $t_i$  рассчитывается по табл. 2.3.

Таблица 2.3

Значение углов  $t_i$  поворота системы  $X_iY_i$  относительно  $X_0Y_0$ .

Но- мер зуба в груп- пе	1	2	3	4	5	6	7	8
Зна- чение углов $t_i$	$t_1 = \varepsilon_1$	$t_2 = 0$	—	—	—	—	—	—
	$t_1 = \varepsilon_1 + t_2$	$t_2 = \varepsilon_2 + t_3$	$t_3 = \varepsilon_3$	$t_4 = 0$	—	—	—	—
	$t_1 = \varepsilon_1 + t_2$	$t_2 = \varepsilon_2 + t_3$	$t_3 = \varepsilon_3 + t_4$	$t_4 = \varepsilon_4 + t_5$	$t_5 = \varepsilon_5$	$t_6 = 0$	—	—
	$t_1 = \varepsilon_1 + t_2$	$t_2 = \varepsilon_2 + t_3$	$t_3 = \varepsilon_3 + t_4$	$t_4 = \varepsilon_4 + t_5$	$t_5 = \varepsilon_5 + t_6$	$t_6 = \varepsilon_6 + t_7$	$t_7 = \varepsilon_7$	$t_8 = 0$

Пример определения углов  $t_i$  поворота системы  $X_iY_i$  относительно системы  $X_0Y_0$  приведен на рис. 2.10.

Рассмотрим распространенный частный случай, когда профиль зуба (рис. 2.11) ограничен фаской  $f_1$  на передней поверхности, фаской на задней поверхности зуба и двумя окружностями, радиусы которых равны  $r$  и  $R$ , и которые плавно соприкасаются друг с другом и с фасками  $f_1$  и  $f_2$ . Порядок расчета профилей зубьев пилы с неравномерным шагом с прямыми зубьями следующий.

Рассчитывают радиусы  $r_i$  окружностей, которые оформляют профиль передней поверхности:

$$r_i = \frac{h_i - f_i \cos \gamma}{1 + \sin \gamma};$$



— координаты центров  $O_i$  окружностей радиуса  $r_i$  для каждого зуба в группе:

$$X_{O_i} = r_i \cos \gamma - f_i \sin \gamma;$$

$$Y_{O_i} = 0,5D - r_i \sin \gamma - f_i \cos \gamma;$$

— координаты крайних точек  $A$  и  $B$  профилей зубьев:

$$X_{A_i} = 0;$$

$$Y_{A_i} = 0,5D;$$

$$X_{B_i} = 0,5D \sin \varepsilon_i;$$

$$Y_{B_i} = 0,5D \cos \varepsilon_i;$$

— координаты точек  $C_i$  сопряжения фасок  $f_i$  и окружностей радиуса  $r_i$ :

$$X_{C_i} = -f_i \sin \gamma;$$

$$Y_{C_i} = 0,5D - f_i \cos \gamma;$$

координаты вспомогательных точек  $F_i$ :

$$X_{F_i} = 0,5D \sin \varepsilon_i - f_{2i} \cos \alpha_{ui} - r_i \sin \alpha_{ui};$$

$$Y_{F_i} = 0,5D \cos \varepsilon_i - f_{2i} \sin \alpha_{ui} + r_i \sin \alpha_{ui};$$

где  $\alpha_{ui} = \alpha - \varepsilon$  — статический задний угол;  
вспомогательные углы  $\delta_i$ :

$$\operatorname{tg} \delta_i = \frac{Y_{F_i} - Y_{O_i}}{X_{F_i} - X_{O_i}}.$$

Рассчитывают радиусы  $R_i$  окружностей, которые оформляют спин-  
у зуба:

$$R_i = \frac{X_{F_i} - X_{O_i}}{2 \cos \delta_i \sin (\delta_i - \alpha_{ui})} - r_i;$$

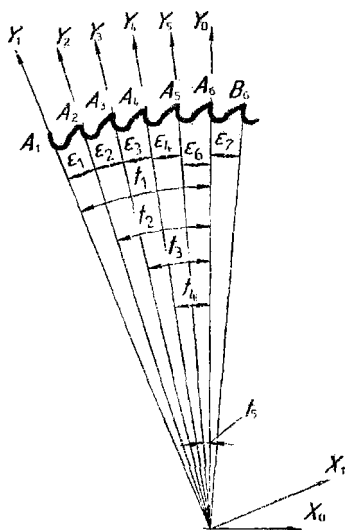
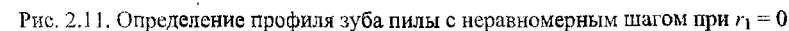


Рис. 2.10. Определение углов  $t_i$  поворота системы  $X_i Y_i$  относительно системы  $X_0 Y_0$


$$X_{O_2i} = 0,5D \sin \varepsilon_i - f_{2i} \cos \alpha_{wi} + R_i \sin \alpha_{wi};$$

$$Y_{O_2 i} = 0,5D \cos \varepsilon_i - f_{2i} \sin \alpha_{ni} - R_i \cos \alpha_{ni};$$

$$X_{Ti} = X_{O_i} + r_i \sin(2\delta_i - \alpha_{ni});$$

$$Y_{Ti} = Y_{O_i} + r_i \cos(2\delta_i - \alpha_{ni});$$

$$X_{M_i} = 0,5D \sin \varepsilon_i - f_{2i} \cos \alpha_{ni};$$

$$Y_{M_i} = 0,5D \cos \varepsilon_i - f_{2i} \sin \alpha_{\text{нн}}.$$

38

### 3. ТЕОРИЯ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ЗУБЬЕВ ДИСКОВЫХ ПИЛ

#### 3.1. Закон движения шлифовального круга при обработке зубьев дисковых пил

##### 3.1.1. Особенности обработки зубьев на станках с числовым программным управлением

Для обработки зубьев дисковых пил все шире используются станки ЧПУ.

В процессе обработки стружечных канавок на станке осуществляются следующие движения (рис. 3.1):

1. Вращение заготовки вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ .
2. Возвратно-поступательные движения шлифовального круга (рис.3.1) по направлению подачи  $S$  и вращение шлифовального круга с угловой скоростью  $\omega_k$ .

Движения вращения заготовки и возвратно-поступательные движения шлифовального круга кинематически связаны через соответствующую систему числового программного управления. Профиль шлифовального круга является дугой окружности радиуса  $r$ .

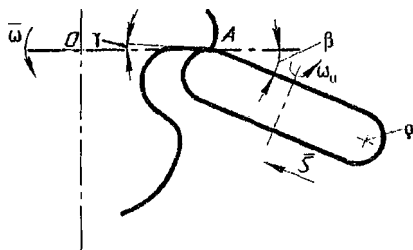


Рис. 3.1. Схема обработки зуба пилы

При обработке угол наклона шлифовального круга  $\beta$  сохраняется постоянным, т. е. возвратно-поступательные перемещения шлифовального круга происходят по одному направлению, соответствующему вектору подачи  $\vec{S}$ .

Угол  $\beta$  обычно принимается равным  $30^\circ$ . Значение угла  $\beta$  зависит от формы обрабатываемого профиля и выбирается так, чтобы выполнялись определенные условия формообразования и при обработке был

воспроизведен заданный профиль детали в соответствии с чертежом. Выполнение условий формообразования зависит также от величины радиуса  $\rho$  профиля шлифовального круга — он должен быть меньше радиуса кривизны профиля стружечной канавки в любой точке.

Минимальное значение угла  $\beta$  должно быть равно переднему углу  $\gamma$  в вершинной точке  $A$  профиля стружечной канавки. Передний угол  $\gamma$  в большинстве случаев выбирается меньше  $30^\circ$ , чем и обосновывается значение угла  $\beta = 30^\circ$ .

В общем случае методика определения перемещения шлифовального круга по направлению подачи  $S$  заключается в нахождении в произвольный момент времени (в зависимости от угла поворота заготовки) положения центров окружности профиля шлифовального круга, при котором происходит формообразование заданного профиля. Для этого строится эквидистанта профиля зуба фрезы на расстоянии, равном радиусу окружности профиля круга, и определяется точка пересечения эквидистанты профиля с прямой, на которой будут располагаться центры окружностей профиля круга при его возвратно-поступательном движении по направлению подачи.

Рассмотрим особенности графического и аналитического определения законов перемещения круга для прямых участков профиля зубьев и участков, очерченных окружностью, как функцию  $L = f(\mu)$ , где  $L$  — перемещение центра профиля круга;  $\mu$  — угол поворота заготовки при обработке зубьев.

### **3.1.2. Графическое определение закона движения шлифовального круга при обработке прямолинейного участка профиля детали**

Графическое определение уравнения движения шлифовального круга при обработке прямолинейного участка профиля стружечной канавки отрезной пилы приведено на рис. 3.2. Изображено начальное положение прямой  $A_0B_0$  профиля стружечной канавки.

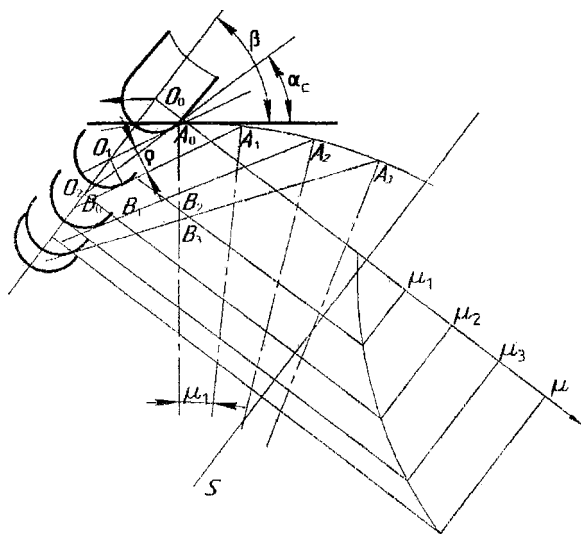


Рис. 3.2. Графическое определение закона движения шлифовального круга при обработке прямолинейного участка зуба пилы

Положение прямой определяется величиной заднего угла  $\alpha_c$ , который считаем заданным. Затем вычерчиваются последовательные положения прямой профиля детали, которые она занимает при дискретном повороте заготовки вокруг ее оси с шагом, равным принятому значению угла  $\mu$ . Последовательные положения прямой профиля детали обозначены  $A_1B_1$ ;  $A_2B_2$ ;  $A_3B_3$ ;  $A_4B_4$ . В каждом последующем положении прямой  $AB$  находим такое положение шлифовального круга, при котором он касается прямой профиля детали, и определяем соответствующее положение центра  $C$  окружности профиля шлифовального круга, при котором он касается прямой профиля детали; затем определяем соответствующее положение центра  $C$  окружности профиля шлифовального круга. Так, например, для того, чтобы найти точку  $C_1$  центра окружности профиля шлифовального круга, при котором происходит касание с прямой  $A_1B_1$ , построение ведется следующим образом.

Проводим прямую, параллельную прямой  $A_1B_1$  на расстоянии ра-

диуса круга  $\rho$  от нее и находим точку  $O$  пересечения этой прямой с прямой  $O_0O_1$ , по которой перемещается центр  $O$  окружности профиля круга при его прямолинейно-поступательном движении. Если считать, что начальное положение круга соответствует точке  $O_0$ , при котором формируется точка  $A_0$ , то для того, чтобы образовать при шлифовании точку  $B_1$  на прямой  $A_1B_1$ , шлифовальный круг от начального положения должен сместиться при поступательном движении  $L$  на величину  $C_0C_1 = L_1$ .

Аналогично точке  $O_1$  находим точки  $O_2, O_3, \dots$ , рассматривая последовательные положения  $A_2B_2; A_3B_3 \dots$  прямой профиля детали. В системе координат  $L - \mu$  вычерчивается график зависимости перемещения  $L$  шлифовального круга от угла поворота  $\mu$  заготовки  $L = f(\mu)$ .

Как следует из выполненного графического решения, график зависимости  $L = f(\mu)$  при обработке прямолинейного участка профиля детали не выражается прямой линией, что необходимо учитывать при наладке станка и составлении программы обработки прямолинейного участка профиля на выбранном оборудовании с ЧПУ.

### **3.1.3. Графическое определение закона движения шлифовального круга при обработке участка профиля пилы, ограниченного дугой окружности**

Графическое определение закона движения шлифовального круга при обработке участка профиля пилы, ограниченного выпуклой дугой окружности, приведено на рис. 3.3.

Изображено начальное положение  $A_0B_0$  дуги окружности радиуса  $R$ , ограничивающей профиль детали. Центром этой окружности является точка  $O_0$ . Считается, что профиль шлифовального круга также ограничен дугой окружности радиуса  $\rho$ . Примем, что в начальный момент времени обрабатывается точка  $A_0$  профиля детали и в этой точке происходит контакт профиля круга и профиля детали. Общая нормаль  $A_0C_0$  к этим сопряженным профилям проводится по радиусу  $O_0A_0$ , и от точки

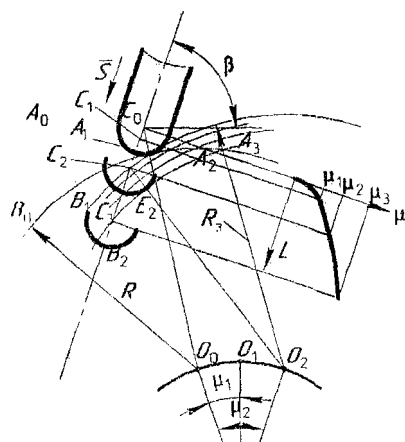


Рис. 3.3. Графическое определение закона движения шлифовального круга при обработке участка профиля пилы, ограниченного выпуклой дугой окружности

$A_0$  откладывается расстояние  $A_0C_0$ , равное  $\rho$ . Таким образом, находится точка  $C_0$  центра окружности профиля шлифовального круга в начальный момент времени.

Положение окружности  $A_0B_0$  определяется положением ее центра  $O_0$  и радиусом  $R$ . При вращении детали вокруг ее оси центр  $O_0$  будет вращаться и описывать окружность  $O_0 O_1 O_2 \dots$

При повороте детали на угол  $\mu_1$  центр  $O_0$  переместится в точку  $O_1$  и профиль детали займет положение  $A_1B_1$ .

При повороте детали на угол  $\mu_2$  центр  $O_0$  переместится в точку  $O_2$  и профиль детали займет положение  $A_2B_2$ . Таким образом, строятся последовательные положения профиля детали при выбранных углах поворота  $\mu$ .

Найдем положение центра  $C_2$  окружности профиля шлифовального круга, при котором наблюдается контакт профиля шлифовального круга с последовательным положением  $A_2B_2$  профиля детали.

Будем считать, что центр  $C_0$  окружности профиля шлифовального круга перемещается по прямой  $C_0C_2$ , положение которой определяется углом  $\beta$ .

Для того, чтобы окружность профиля шлифовального круга радиуса  $\rho$  касалась окружности  $A_2B_2$ , необходимо, чтобы центр  $C_2$  окружности профиля круга располагался на эквидистантной окружности, радиус которой равен  $R + \rho$ . Центром эквидистантной окружности будет точка  $O_2$ . С другой стороны центр  $C_2$  должен располагаться на прямой  $C_0C_2$ . Следовательно, точка  $C_2$  находится как точка пересечения экви-

дистантной окружности радиуса  $R_3 = R + \rho$  и прямой  $C_0C_2$ . Точка  $E_2$  контакта окружности профиля круга и окружности детали  $A_2B_2$  будет располагаться на общей нормали  $O_0C_2$  к сопряженным профилям.

Для того, чтобы сформировать точку  $E_2$ , шлифовальный круг из начального положения должен сместиться на величину  $C_0C_2 = L_2$ , соответствующую повороту детали на угол  $\mu_2$ .

Аналогичным образом находят центры  $C_1C_3\dots$  окружности профиля шлифовального круга при соответствующих положениях профиля  $A_1B_1$ ;  $A_3B_3\dots$  детали и принятых углах поворота  $\mu$ .

Расстояние от начальной точки  $C_0$  до произвольной  $C_i$  будет соответствовать пути  $L$  шлифовального круга при его поступательном движении вдоль прямой  $C_0C_2$ . Зная углы поворота  $\mu$  и соответствующие им поступательные перемещения  $L$ , вычерчиваем график зависимости пути  $L$  шлифовального круга от угла поворота  $\mu$  заготовки  $L = f(\mu)$ .

Приведенное построение показывает, что при обработке профиля детали в форме дуги окружности график зависимости  $L = f(\mu)$  не будет дугой окружности. Касательные к кривой  $L = f(\mu)$  имеют различный наклон к оси  $\mu$ . Поэтому при равномерном вращении заготовки поступательное движение шлифовального круга не будет равномерным.

Графическое определение закона движения шлифовального круга при обработке участка профиля зуба пилы, ограниченного вогнутой дугой окружности, приведено на рис. 3.4.

Изображено начальное положение  $A_0B_0$  дуги окружности радиуса  $R$ , ограничивающей профиль детали. Центром этой окружности является точка  $O_0$ . Выбираем шлифовальный круг, профиль которого ограничен дугой окружности радиуса  $\rho$ . Принимаем, что в начальный момент времени обрабатывается точка  $A_0$ . Точка  $A_0$  будет контактировать с сопряженной точкой профиля инструмента; совпадут касательная и нормали к рассматриваемым профилям. Общая нормаль к профилям пройдет по радиусу  $O_0A_0$ . Центр  $C_0$  окружности профиля шлифовального круга



точка  $A_0$  располагается на этой прямой  $O_0A_0$ . Поэтому от точки  $A_0$  на прямой  $O_0A_0$  откладывается расстояние  $A_0C_0 = \rho$ , и таким образом находится положение центра  $C_0$  окружности профиля шлифовального круга

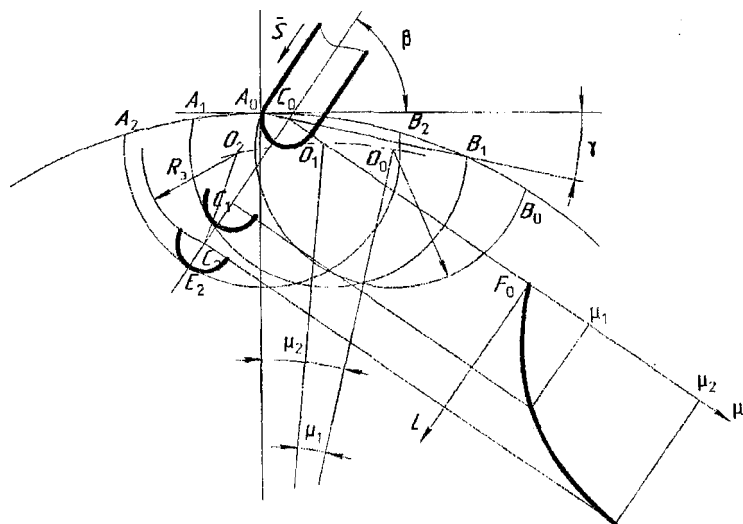


Рис. 3.4. Графическое определение закона движения шлифовального круга при обработке участка профиля зуба пилы, ограниченного вогнутой дугой окружности

в начальный момент времени. При вращении детали вокруг ее оси центр  $O_0$  будет вращаться и описывать окружность  $O_0O_1O_2$ . При повороте детали на угол  $\mu_1$  центр  $O_0$  переместится в точку  $O_1$ , а профиль займет положение  $A_1B_1$ . При повороте детали на угол  $\mu_2$  центр  $O_0$  переместится в точку  $O_2$ , а профиль детали займет положение  $A_2B_2$ . Таким образом, изображаются последовательные положения профиля детали при принятых углах поворота  $\mu$ .

Рассмотрим момент времени, при котором наблюдается контакт профиля шлифовального круга с последовательным положением  $A_2B_2$  профиля детали. Принимаем, что центр  $C_0$  окружности профиля шлифовального круга перемещается по прямой  $C_0C_2$ , положение которой задается углом  $\rho$ , который считаем известным.

Для того, чтобы окружность профиля шлифовального круга радиуса  $\rho$  касалась вогнутого профиля  $A_2B_2$  детали необходимо, чтобы центр  $C_2$  окружности профиля шлифовального круга располагался на окружности, эквидистантной окружности  $A_2B_2$ . Но так как производится обработка вогнутого профиля, эквидистантная окружность должна располагаться внутри окружности  $A_2B_2$ . Радиус  $R_s$  эквидистантной окружности будет равен  $R_s = R - \rho$ . Центром эквидистантной окружности будет точка  $O_2$ . С другой стороны центр  $C_2$  должен лежать на прямой  $C_0C_2$ . Поэтому точка  $C_2$  находится как точка пересечения эквидистантной окружности радиуса  $R_s$  и прямой  $C_0C_2$ . Точка  $E_2$  контакта сопряженных профилей будет располагаться на общей нормали  $O_2C_2$ . Для того, чтобы обработать точку  $E_2$  профиля детали, шлифовальный круг из начального положения должен сместиться на расстояние  $C_0C_2 = L$ , соответствующее повороту детали на угол  $\mu_2$ . Аналогичным образом определяются расстояния  $L$  при повороте детали на принятые углы  $\mu$ . Зная перемещение  $L$  при различных углах поворота  $\mu$ , строим график зависимости пути  $L$  шлифовального круга от угла поворота  $\mu$  заготовки  $L = f(\mu)$ . Если заготовка вокруг своей оси вращается равномерно, то время поворота будет прямо пропорционально углу поворота  $\mu$ . Поэтому график зависимости  $L = f(\mu)$  можно считать графиком зависимости пути от времени.

Как следует из рассматриваемого построения, график зависимости  $L = f(\mu)$  не будет окружностью и при равномерном вращении заготовки поступательное движение шлифовального круга не будет равномерным.

Анализ графического решения показывает, что обработка в соответствии с чертежом полного профиля  $A_0B_0$  детали оказывается невозможной. На определенном участке  $B_0F_0$  не соблюдаются условия формообразования. Поэтому обработка этого участка  $B_0P_0$  согласно чертежу не может быть обеспечена.

### 3.1.4. Аналитическое определение закона движения шлифовального круга при обработке прямолинейного участка профиля зуба пилы

Методика аналитического определения закона движения шлифовального круга при обработке прямолинейного участка профиля детали аналогична методике графического решения рассматриваемой задачи. В системе координат  $XY$  (рис. 3.5) изображается начальное положение прямой профиля детали  $A_0B_0$ . Рассмотрим движение шлифовального круга при формировании прямолинейной поверхности зуба пилы. Положение прямой  $A_0B_0$  задается величиной угла  $\alpha_c$  и координатами точки  $B_0$ . Положение линии центров профиля шлифовального круга при его возвратно-поступательном движении по направлению подачи  $S$  задается прямой  $C$ , расположенной под углом  $\beta$  к оси  $X$ .

На расстоянии радиуса профиля круга проводится эквидистанта профиля  $e_0$ .

Примем, что в начальный момент времени формируется точка  $B_0$ , тогда центром профиля шлифовального круга в момент формирования точки  $B_n$  будет точка  $C_0$  как точка пересечения линий  $C$  и  $e_0$ .

Координатами точки  $C_0$  по построению будут:

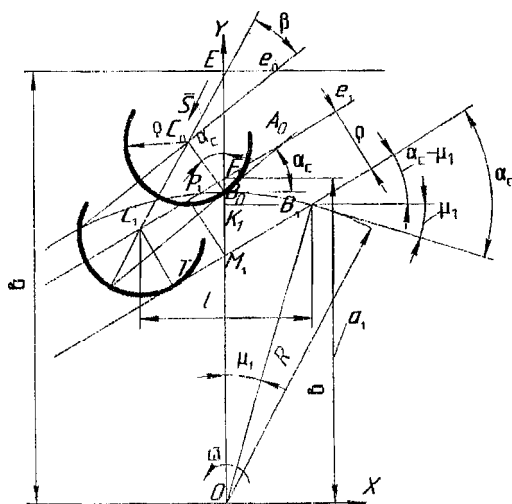


Рис. 3.5. Аналитическое определение закона движения шлифовального круга при обработке прямоугольного участка профиля зуба пилы

$$X_{C_0} = -\rho \sin \alpha_c;$$

$$Y_{C_0} = R + \rho \cos \alpha_c.$$

Произвольное положение прямолинейного профиля  $A_0B_0$  и его эквидистанты пусть будет  $A_1B_1$  и соответственно эквидистанты  $e_1$ .

Тогда произвольное положение центра  $C_1$  окружности (радиуса  $\rho$ ) профиля шлифовального круга при ее касании с  $A_1B_1$  будет точка  $C_1$  — точка пересечения линий  $C$  и  $e_1$ .

Определяются координаты точки  $C_1$  в системе  $XY$ , для чего записываются уравнения эквидистанты  $e_1$  и прямой  $C$ . В результате совместного решения этих уравнений получают координаты точки  $C_1$  ( $X_{C1}Y_{C1}$ ).

Уравнение эквидистанты  $e_1$  будет:

$$Y = X \operatorname{tg}(\alpha_c - \mu) + a_1,$$

где  $a_1 = OF_1$ ;  $F_1$  — точка пересечения оси  $Y$  с прямой  $e_1$ .

По построению:

$$OF_1 = F_1M_1 + OM_1,$$

где  $OM_1 = R \cos \mu - R \sin \mu_1 \operatorname{tg}(\alpha_c - \mu_1)$ ,

а из треугольника  $\Delta F_1P_1M_1$  имеем:

$$F_1M_1 = \frac{\rho}{\cos(\alpha_c - \mu_1)},$$

тогда  $F_1O = a_1 = R[\cos \mu_1 - \sin \mu_1 \operatorname{tg}(\alpha_c - \mu_1)] + \frac{\rho}{\cos(\alpha_c - \mu_1)}$ .

Уравнение прямой  $C$ :

$$Y_1 = X \operatorname{tg} \beta + b,$$

где по построению  $b = EB_0 + R$ .

Из треугольника  $\Delta EC_0B_0$ , по теореме синусов, получим:

$$\frac{\rho}{\cos \beta} = \frac{EB_0}{\sin[90^\circ(\alpha_c - \beta)]} = \frac{EB_0}{\cos(\alpha_c - \beta)},$$

отсюда  $EB_0 = \frac{\rho \cos(\alpha_c - \beta)}{\cos \beta}$ .

Решая совместно два уравнения прямых  $C$  и  $e_1$  получают координаты точки  $C_1$ :

$$\begin{cases} Y = X \operatorname{tg} \beta + b \\ Y = X \operatorname{tg}(\alpha_c - \mu) + a, \end{cases}$$

отсюда

$$X \operatorname{tg} \beta + b = X \operatorname{tg}(\alpha_c - \mu) + a_1;$$

$$X_{c_1} = \frac{a_1 - b}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg}(\alpha_c - \mu_1)};$$

$$Y_{c_1} = X_{c_1} \operatorname{tg} \beta + b = \frac{(a - b) \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg}(\alpha_c - \mu_1)} + b.$$

Таким образом, для того чтобы сформировать точку  $T_1$  на прямой  $l_1 B_1$ , шлифовальному кругу необходимо сместиться вдоль прямой  $C_0 C_1$  от его начального положения на расстояние  $L = C_0 C_1$ . При известных координатах точек  $C_0(X_0 Y_0)$  и  $C_1(X_1 Y_1)$  расстояние  $C_0 C_1$  рассчитывается по формуле:

$$L_1 = C_1 C_0 = \sqrt{(X_{C_0} - X_{C_1})^2 + (Y_{C_0} - Y_{C_1})^2}.$$

В соответствии с рассмотренной методикой при различных значениях угла поворота  $\mu$  рассчитываются пути  $L$  шлифовального круга и строится график зависимости  $L = f(\mu)$ .

Сформированный отрезок  $B_1 T_1$  прямой  $AB$  в соответствии с построением равен:

$$B_1 T_1 = \frac{l - \rho \sin(\alpha_c - \mu_1)}{\cos(\alpha_c - \mu_1)},$$

где

$$l = R \sin \mu_1 + \frac{b - a_1}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha_c}.$$

### 3.1.5. Аналитическое определение закона движения шлифовального круга при обработке участка профиля детали, ограниченного дугой окружности

Рассматривается начальное положение профиля  $D_1$  детали. Радиус профиля детали обозначен  $R$ , радиус закругления шлифовального круга —  $\rho$ . Направление поступательного перемещения шлифовального круга определяется углом  $\beta$  (прямая  $C$ ). Координаты центра  $O_1$  окружности профиля детали  $O_1(X_{O_1} Y_{O_1})$ . На окружности профиля детали в качестве исходной точки  $A_1$ , в которой будет наблюдаться контакт сопряженных профилей в начальный момент времени, выбрана точка пересечения оси  $Y$  с окружностью профиля зуба (рис. 3.6). Если задан радиус  $R$  и положение центра  $O_1(X_{O_1} Y_{O_1})$  профиля детали, то координаты точки  $A_1$  определяются таким образом:

$$\cos \eta_1 = \frac{X_{O_1}}{R}; \quad X_{A_1} = 0; \quad Y_{A_1} = Y_{O_1} + R \sin \eta_1.$$

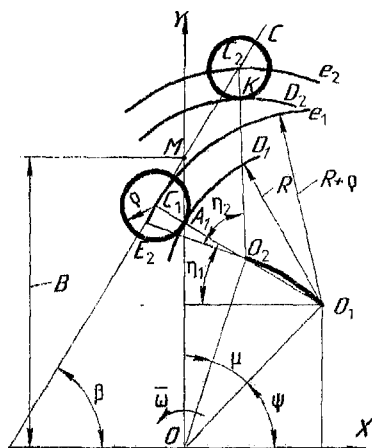


Рис. 3.6. Аналитическое определение закона движения шлифовального круга при обработке профиля зуба, ограниченного дугой окружности

Проводится эквидистанта  $e_1$  профиля, очерченного окружностью радиусом  $R + \rho$ . Точка пересечения прямой  $C$  с эквидистантой  $e_1$  и будет центром профиля (окружности) шлифовального круга  $C_1$ , когда круг будет контактировать с заготовкой в точке  $A_1$ .

Координаты точки  $C_1$  будут:

$$X_{C_1} = -\rho \cos \eta_1; \quad Y_{C_1} = Y_{A_1} + \rho \sin \eta_1.$$

Расстояние  $MC_1 = L_1$  будет:

$$L_1 = \frac{X_{C_1}}{\cos \beta} = \frac{b - Y_{C_1}}{\sin \beta},$$

где по построению

$$b = Y_{C_1} + \rho \cos \eta_1 \operatorname{tg} \beta.$$

При повороте на произвольный угол  $\mu$ , центр  $O_1$  профиля детали переместится в точку  $O_2$ , профиль займет положение  $D_2$ , а его эквидистанта —  $e_2$ .

Определяются координаты точки  $C_2$ .

Для упрощения вычислений проводится прямая  $O_2E_2$ , перпендикулярная  $C_2$ . Тогда координаты точки  $C_2$  по построению будут равны:

$$Y_{C_2} = Y_{E_2} + C_2 E_2 \sin \beta;$$

$$X_{C_2} = X_{E_2} - C_2 E_2 \cos \beta,$$

где  $X_{E_2}, Y_{E_2}$  — координаты точки  $E_2$ .

Зная координаты точки пересечения  $E_2$  прямых  $C$  и  $O_2E_2$ , определяются, решая совместно систему уравнения прямой  $C$  и прямой  $O_2E_2$ .

Уравнение прямой  $O_2E_2$ :

$$Y = Y_{O_2} + (X_2 - X_{O_2}) \operatorname{ctg} \beta$$

или

$$Y = l - X \operatorname{ctg} \beta,$$

где

$$l = Y_{O_2} + X_{O_2} \operatorname{ctg} \beta.$$

Координаты точки  $E_2$  пересечения прямых  $C$  и  $O_2E_2$ :

$$\begin{cases} Y = X \operatorname{tg} \beta + b \\ Y = l - X \operatorname{ctg} \beta \end{cases}$$

Отсюда:

$$X_{E_2} \operatorname{tg} \beta + b = l - X_{E_2} \operatorname{ctg} \beta;$$

$$X_{E_2} = (l - b) \cos \beta \sin \beta;$$

$$Y_{E_2} = X_{E_2} \operatorname{tg} \beta + b = (l - b) \sin^2 \beta + b.$$

Координаты центра  $O_2(X_{O_2}, Y_{O_2})$  рассчитывают в такой последова-

тельности:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{Y_O}{X_O};$$

$$r = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2} = \frac{Y_O}{\sin \psi} = \frac{X_O}{\cos \psi};$$

$$X_{O_2} = r \cos(\psi + \mu) = \frac{Y_O \cos(\psi + \mu)}{\sin \psi} = \frac{X_O \cos(\psi + \mu)}{\cos \mu};$$

$$Y_{O_2} = r \sin(\psi + \mu) = \frac{Y_O \sin(\psi + \mu)}{\sin \psi} = \frac{X_O \sin(\psi + \mu)}{\cos \mu}.$$

Рассматривая треугольник  $\Delta C_2 E_2 O_2$ , получим:

$$\cos \eta_2 = \frac{O_2 E_2}{R + \rho} = \frac{Y_{E_2} - Y_{O_2}}{\cos \beta (R + \rho)};$$

$$C_2 E_2 = (R + \rho) \sin \eta_2.$$

Координаты точки  $C_2$ :

$$Y_{C_2} = Y_{E_2} + C_2 E_2 \sin \beta = (l - b) \sin^2 \beta + b + (R + \rho) \sin \eta_2 \sin \beta;$$

$$X_{C_2} = X_{E_2} - C_2 E_2 \cos \beta = (l - b) \sin \beta \cos \beta - (R + \rho) \sin \eta_2 \cos \beta.$$

Расстояние  $C_1 C_2$  рассчитывается по формуле

$$L_2 = C_1 C_2 = \sqrt{(X_{C_1} - X_{C_2})^2 + (Y_{C_1} - Y_{C_2})^2}.$$

Расстояние  $MC_2 = L_2$ , по построению

$$L_2 = E_2 C_2 - E_2 M = (R + \rho) \sin \eta_2 - (b - l) \sin \beta,$$

где

$$E_2 M = \frac{b - Y_{E_2}}{\sin \beta} = (b - l) \sin \beta.$$

Координаты точки  $K$  контакта профиля круга, радиуса  $\rho$  и профиля детали при рассматриваемом его положении будут:

$$Y_K = Y_{O_2} + R \cos(\beta - \eta_2);$$

$$X_K = X_{O_2} - R \sin(\beta - \eta_2).$$



В соответствии с рассмотренной методикой при различных значениях угла поворота  $\mu$  рассчитываются перемещения  $L$  шлифовального круга и строится график зависимости  $L = f(\mu)$ .

### 3.1.6. Определение закона движения шлифовального круга при обработке профиля пилы

Рассмотрим профиль пилы (рис. 3.7), ограниченный отрезками прямых  $f_1 = AB$  и  $f_2 = PK$  и дугами окружностей  $BM$  радиуса  $r$  и  $MF$  радиуса  $R$ .

В начальный момент положение профиля зуба пилы характеризуется углом  $\beta$ , который считается известным. Крайняя точка  $A$  профиля детали формируется шлифовальным кругом, радиус профиля которого  $\rho$ .

Точка  $C_1$  — центр окружности профиля круга — находится на прямой  $AC_1$  перпендикулярной прямой  $AB$ . Отрезок  $AC_1$  равен радиусу  $\rho$  профиля круга. В процессе обработки заданного профиля детали вращающийся шлифовальный круг совершает возвратно-поступательные движения, параллельные оси  $Y_2$ , заготовка же вращается вокруг своей оси.

В любой момент времени профиль круга касается профиля детали. Исходя из этого положения графически определяется закон прямолинейно-поступательного движения шлифовального круга. Вместо вращения детали заставим вращаться в обратную сторону вокруг оси детали профиль шлифовального круга. Вместе с шлифовальным кругом будем вращать вокруг оси детали, связанные с кругом взаимно-

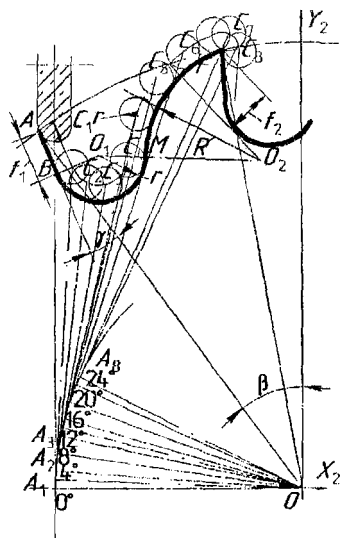


Рис. 3.7. Схема обработки профиля зуба пилы на станке фирмы Lorch

перпендикулярные прямые  $A_1C_1$  и  $A_1O$ . Точка  $A_1$  после поворота на  $4^\circ$  вокруг оси детали займет положение точки  $A_2$ , а точка  $C_1$  займет положение точки  $C_2$ . Расстояние  $A_1C_1$  соответственно изменится и будет равно  $A_2C_2$ . После поворота на  $8^\circ$  точка  $A_1$  займет положение точки  $A_3$ , а точка  $C_1$  переместится в точку  $C_3$ . Положение точки  $C_3$  выбирается таким образом, чтобы окружность профиля шлифовального круга радиуса  $\rho$  касалась профиля детали. Зная величины  $A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, \dots$  строим зависимость от угла поворота заготовки расстояния от оси  $X_2$  до центра  $C_i$  окружности профиля шлифовального круга (рис. 3.8). Таким образом, графически определяется закон движения шлифовального круга при обработке рассматриваемого профиля зуба пилы.

Определяем, при каком угле  $\mu_L$  поворота заготовки будет формироваться крайняя точка  $B$  прямолинейного участка  $AB$  профиля детали (рис. 3.9). В момент контакта нормаль  $BL$  к профилю детали и нормаль к

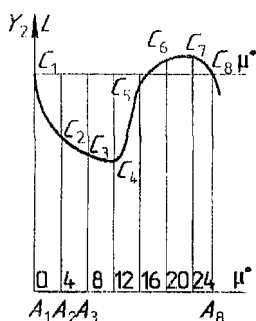


Рис. 3.8. Закон движения шлифовального круга при обработке профиля зуба пилы

окружности профиля шлифовального круга совпадают. Если расстояние  $BL = \rho$ , то точка  $L$  в момент контакта попадет на линию  $C_1C$ , по которой перемещается центр профиля шлифовального круга. Вращая точку  $L$  вокруг оси  $O$  детали до совмещения с прямой  $C_1C$  определяем положение центра  $C$  в тот момент, когда будет формироваться точка  $B$  профиля детали. Угол поворота будет равен при этом  $\mu_L$ . Рассматривая графическое построение, определим методику расчета угла  $\mu_L$ . Расстояние  $a$  от оси  $Y_2$  до прямой  $C_1C$  будет

$$a = 0,5D \sin \beta - \rho \cos(\beta - \gamma) = -X_{2C_1}.$$

Координата  $Y_2$  точки  $C$  будет

$$Y_C = \sqrt{R_L^2 - L^2}.$$



Таким образом, при формировании прямолинейного участка  $AB$  профиля детали угол поворота  $\mu$  колеблется от  $0^\circ$  до  $\mu_L$ .

Будем считать, что прямолинейный участок профиля детали, идущий под углом  $\gamma$  от начального положения, повернулся вокруг оси детали на выбранный угол  $\mu$  и занял положение прямой  $A_1E_1$  (рис. 3.10).

На расстоянии  $\rho$  от прямой  $A_1E_1$  проводим параллельную прямую  $M_1A_0$ . Эта прямая пересекается с прямой  $C_1C_2$  в точке  $C_2$ . Точка  $C_2$  будет центром окружности профиля шлифовального круга, который будет при выбранном  $\mu$  касаться прямой  $A_1E_1$ .

По построению имеем:

$$OE_1 = 0,5D \sin \gamma;$$

$$OM_1 = 0,5D \sin \gamma - \rho.$$

Проектируя линию  $OM_1C_2$  на ось  $X_2$ ,

Рис. 3.10. Определение положения шлифовального круга при формировании произвольной точки прямолинейного участка профиля передней поверхности

получим

$$a = (0,5 \sin \gamma - \rho) \cos(\beta - \gamma + \mu) + M_1C_2 \sin(\beta - \gamma + \mu),$$

отсюда

$$M_1C_1 = \frac{a - (0,5 \sin \gamma - \rho) \cos(\beta - \gamma + \mu)}{\sin(\beta - \gamma + \mu)}.$$

Координата точки  $Y_2$  точки  $C_2$  будет

$$Y_{C_2} = M_1C_1 \cos(\beta - \gamma + \mu) + OM_1 \sin(\beta - \gamma + \mu)$$

$$Y_{C_2} = \frac{\text{acos}(\beta - \gamma + \mu) - 0,5D \sin \gamma + \rho}{\sin(\beta - \gamma + \mu)}.$$

Поступательное перемещение  $L$  круга от его начального положения равно  $C_1C_2$ . Таким образом:

$$L = C_1C_2 = Y_{2C_1} - Y_{C_2}.$$

Расчеты  $L$  ведутся, выбирая угол  $\mu$  в пределах от  $0^\circ$  до величины угла  $\mu_L$ . При угле  $\mu > \mu_L$  будет наблюдаться контакт профиля шлифовального круга с окружностью радиуса  $r$ .

Определим величину поступательного перемещения шлифовального круга при повороте детали вокруг ее оси на выбранный угол  $\mu > \mu_L$ . Изображается (рис. 3.11) начальное положение окружности радиуса  $r$  с центром в точке  $O_1^1$ . При повороте детали на угол  $\mu$  центр  $O_1^1$  также повернется вокруг оси детали на угол  $\mu$  и займет положение  $O_1^2$ . При этом окружности 1 профиля детали займет положение 2. Окружность 2 будет касаться окружности радиуса  $\rho$  в том случае, если центр ее будет лежать на эквидистантной окружности 2, радиус  $R$ , которой равен  $r - \rho$ . Эквидистантная окружность пересекается с прямой  $C_1C_2$  в точке  $C_2$ . Точка  $C_2$  будет центром окружности профиля шлифовального круга радиуса  $\rho$ , которая будет касаться окружности в положении 2 окружности профиля зуба. Расстояние  $C_1C_2$  будет поступательным перемещением  $L$  шлифовального

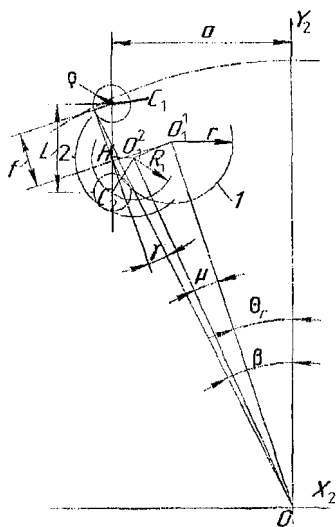


Рис. 3.11. Определение положения профиля шлифовального круга при формировании участка профиля зуба пилы, ограниченного дугой радиуса  $r$

круга от его начального положения до положения 2 окружности профиля зуба.

Рассматривая построение, можем записать:

$$\operatorname{tg} \theta_r = \frac{|\bar{X}_{O1}|}{Y_{O1}},$$

где  $X_{O1}$  и  $Y_{O1}$  — заданные координаты центра  $O_1$  в начальный момент времени.

Радиус  $OO_1^1$  равен

$$OO_1^1 = \frac{Y_{O1}}{\cos \theta_r} = OO_1^2.$$

Тогда координаты центра  $O_1^2$  будут:

$$X_{O2} = -OO_1^2 \sin(\theta_r + \mu) = -\frac{Y_{O1} \sin(\theta_r + \mu)}{\cos \theta_r};$$

$$Y_{O2} = -\frac{Y_{O1} \cos(\theta_r + \mu)}{\cos \theta_r}.$$

Из прямоугольного треугольника  $O_1^2 HC_2$  получим:

$$O_1^2 C_2 = R_3 = r - \rho; \quad HC_2 = \sqrt{(O_1^2 C_2)^2 - (O_1^2 H)^2};$$

$$O_1^2 H = a - |\bar{X}_{O2}|.$$

Следовательно,

$$HC_2 = \sqrt{(r - \rho)^2 - (a - |\bar{X}_{O2}|)^2}.$$

Координата  $Y_2$  точки  $C_2$  будет равна

$$Y_{C2} = Y_{O2} - HC_2 = Y_{O2} - \sqrt{(r - \rho)^2 - (a - |\bar{X}_{O2}|)^2}.$$

Расстояние  $C_1C_2$  будет поступательным перемещением  $L$  шлифовального круга от его начального положения до контакта с последовательным положением 2 окружности профиля детали при ее повороте на угол  $\mu$ :

$$L = Y_{C_1} - Y_{C_2}.$$

Крайней точкой окружности радиуса  $r$  профиля детали будет точка  $M$ , координаты которой считаем заданными  $M(X_M; Y_M)$ . Определим, при каком угле поворота  $\mu$  детали будет формироваться точка  $M$ . Центр  $C_2$  окружности радиуса  $\rho$  профиля шлифовального круга должен располагаться на прямой  $C_1C_2$ , параллельной оси  $Y_2$  (рис. 3.12).

В момент контакта нормаль  $KM = \rho$  к окружности профиля детали должна совпадать с нормалью к окружности профиля круга. Для того, чтобы обеспечить контакт окружности радиуса  $\rho$  в точке  $M$  с окружностью профиля детали, точка  $K$  должна описать окружность  $KC_2$ .

Эта окружность с прямой  $C_1C_2$  пересекается в точке  $C_2$ . Точка  $C_2$  будет центром окружности  $\rho$  профиля шлифовального круга, в тот момент, когда будет формироваться точка  $M$  — крайняя точка профиля детали на окружности радиуса  $r$ . Угол поворота  $\mu_M$  детали будет равен

$$\mu_M = \theta_{C_2} - \theta_L.$$

В соответствии с построением угол  $\delta_0$  равен

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{Y_O - Y_M}{|X_O| - |X_M|},$$

где  $X_O Y_O$  — координаты центра  $O_1^1$ ;  $X_M Y_M$  — координаты крайней точки  $M$ .

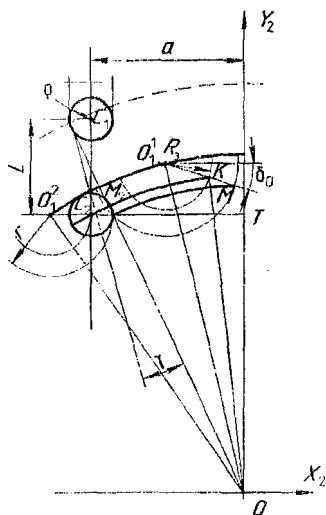


Рис. 3.12. Определение момента контакта профиля шлифовального круга с крайней точкой участка профиля пины, ограниченного окружностью радиуса  $r$

Координаты точки  $K$  будут:

$$X_{K2} = -X_{O1} + (r - \rho) \cos \delta_0;$$

$$Y_{K2} = Y_{O1} - (r - \rho) \sin \delta_0;$$

$$\operatorname{tg} \theta_L = \frac{-X_{K2}}{Y_{K2}}.$$

Радиус  $OK$  равен:

$$OK = \frac{Y_{K2}}{\cos \theta_L};$$

$$\sin \theta_{C2} = \frac{a}{OK} = \frac{a \cos \theta_L}{Y_{K2}}.$$

Угол  $\mu_M$  будет равен  $\mu_M = \theta_{C2} - \theta_L$ .

Таким образом, при формировании дуги окружности радиуса  $r$  угол поворота  $\mu$  колеблется от  $\mu_K$  до  $\mu_M$ .

При угле  $\mu > \mu_M$  будет наблюдаться контакт профиля шлифовального круга с окружностью радиуса  $R$  (рис. 3.13). Определим величину поступательного перемещения шлифовального круга при повороте детали вокруг ее оси на выбранный угол  $\mu_C$ . Координаты начального положения центра  $O_2^1$  окружности радиуса  $R$  будут:  $X_{O2}$  и  $Y_{O2}$ .

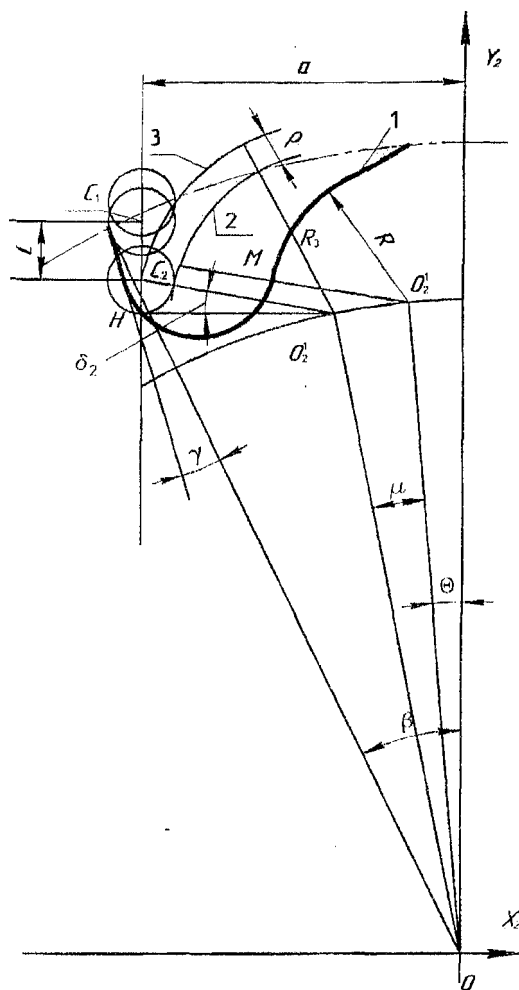


Рис. 3.13. Определение положения профиля шлифовального круга при формировании участка профиля зуба, ограниченного дугой окружности радиуса  $R$



При повороте детали на угол  $\mu$  центр  $O_2^1$  также повернется на угол  $\mu$  и займет положение  $O_2^2$ . При этом окружность 1 профиля детали в начальном положении переместится в положение 2.

Окружность радиуса  $\rho$  будет касаться окружности 2 в том случае, если ее центр лежит на эквидистантной окружности 3. В то же время центр  $C_2$  профиля шлифовального круга должен лежать на прямой  $C_1C_2$ . Поэтому центр  $C_2$  определяется как точка пересечения эквидистантной окружности 3 и прямой  $C_1C_2$ . Точка  $C_2$  будет центром окружности профиля шлифовального круга. Расстояние  $L = C_1C_2$  будет поступательным перемещением шлифовального круга от его начального положения до положения окружности 2 профиля зуба.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{|X_{K2}|}{Y_{K2}};$$

$$OO_2^1 = \frac{Y_{O2}}{\cos \theta}.$$

Координаты последовательного положения центра  $O_2^2$  будут:

$$X_{O2}^1 = -\frac{Y_{O2}}{\cos \theta} \sin(\theta + \mu);$$

$$Y_{O2}^1 = -\frac{Y_{O2}}{\cos \theta} \cos(\theta + \mu).$$

Из прямоугольного треугольника  $O_2^2C_2H$  будем иметь:

$$\cos \delta_2 = \frac{O_2^2H}{O_2^2C_2} = \frac{a - |X_{O2}^1|}{R + \rho};$$

$$\cos \delta_2 = \frac{a - \frac{Y_{O2}}{\cos \theta} \sin(\theta + \mu)}{R + \rho}$$

или

$$HC_2 = (R + \rho) \sin \delta_2.$$

Координата  $Y_2$  точки  $C_2$  будет

$$Y_{C_2} = Y_{O_2}^1 + HC_2 = \frac{Y_{O_2}}{\cos \theta} \cos(\theta + \mu) + (R + \rho) \sin \delta_2.$$

Расстояние  $L = C_1C_2 = Y_{2C_1} - Y_{C_2}$

или

$$L = 0,5D \cos \beta + \rho \sin(\beta - \gamma) - \frac{Y_{O_2}}{\cos \theta} \cos(\theta + \mu) + (R + \rho) \sin \delta_2.$$

Расстояние  $L$  будет поступательным перемещением шлифовального круга от его начального положения до контакта с последовательным положением окружности профиля детали радиуса  $R$ .

Крайней точкой окружности радиуса  $R$  профиля детали будет точка  $F$ , координаты которой считаем заданными:  $F(X_F; Y_F)$ . Определим, при каком угле поворота  $\mu$  детали будет формироваться точка  $F$  (рис. 3.14). В начальный момент для того, чтобы окружность радиуса  $\rho$  касалась в точке  $F$  окружности радиуса  $R$ , необходимо, чтобы ее центр располагался в точке  $H$  на нормали  $HF$  к профилю детали на расстоянии  $\rho = HF$ . При вращении детали точка  $H$  будет описывать окружность, которая с прямой  $C_1C_2$  будет пересекаться в точке  $C_2$ . Точка  $C_2$  будет центром окружности профиля шлифовального круга в тот момент, когда будет формироваться крайняя точка  $F$  профиля детали на окружности радиуса  $R$ . Угол  $HO C_2$  будет искомым углом  $\mu_F$ , при котором наблюдается контакт профиля круга с профилем детали в точке  $F$ .

Координаты точки  $H$  будут:

$$X_H = -[X_F + \rho \sin(\alpha_n + \beta)];$$

$$Y_H = Y_F + \rho \cos(\alpha_n + \beta).$$

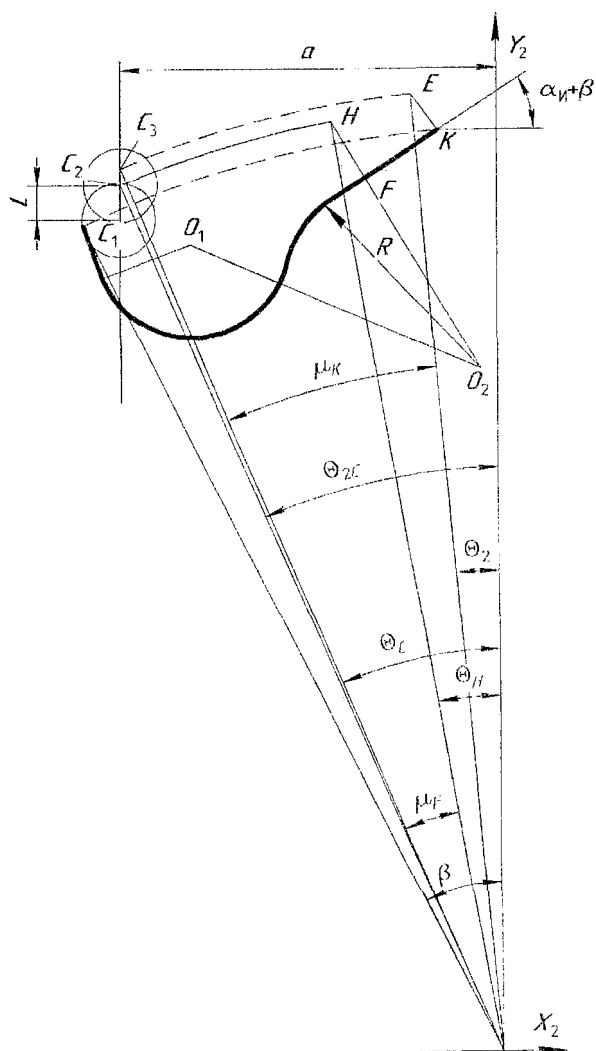


Рис. 3.14. Определение момента контакта профиля шлифовального круга с крайней точкой  $F$  участка профиля зуба, ограниченного окружностью радиуса  $R$

Угол  $\theta$  находится по формуле

$$\operatorname{tg} \theta_H = \frac{|X_H|}{Y_H}.$$

Расстояние  $OH$  будет

$$OH = \frac{Y_K^1}{\cos \theta_H} = OC_2.$$

Угол  $\theta_C$  равен

$$\sin \theta_C = \frac{a}{OH} = \frac{a \cos \theta_H}{Y_H^1}.$$

Угол  $\mu_M$  будет

$$\mu_M = \theta_{C2} - \theta_L.$$

Таким образом, при формировании дуги окружности радиуса  $R$  угол поворота  $\mu$  колеблется от  $\mu_M$  до  $\mu_F$ .

Координата  $Y_2$  точки  $C_2$  будет

$$Y_2 = OC_2 \cos \theta_C = \frac{Y_H \cos \theta_C}{\cos \theta_H}.$$

Расстояние  $C_2C_1$  будет поступательным перемещением шлифовального круга от его начального положения до контакта в точке  $F$  с профилем детали.

$$L = Y_{2C1} - Y_{C1} = 0,5D \cos \beta + \rho \sin(\beta - \gamma) - \frac{Y_H \cos \theta_C}{\cos \theta_H}.$$

При угле поворота детали  $\mu > \mu_F$  будет наблюдаться контакт профиля шлифовального круга с прямолинейным участком  $FK$  профиля детали.

Угол  $\mu_K$  поворота заготовки, при котором будет формироваться крайняя точка  $K$  прямолинейного участка  $FK$  (рис. 3.14) определяется аналогично углу  $\mu_F$ .

Угол  $\mu_K$  будет равен углу  $EOC_3$ .

Координаты точки  $E$  будут:

$$X_E = -X_K - \rho \sin(\alpha_n + \beta);$$

$$Y_E = Y_K + \rho \cos(\alpha_n + \beta).$$

Угол  $\theta_2$  равен

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{X_E}{Y_E}.$$

Радиус  $OE$  будет

$$OE = \frac{Y_E}{\cos \theta_2} = OC_3.$$

Угол  $\theta_{C2}$  будет

$$\sin \theta_{C2} = \frac{a}{OE} = \frac{a \cos \theta_2}{Y_E}.$$

Угол  $\mu_K$ , по построению, будет

$$\mu_K = \theta_{C2} - \theta_2.$$

Координата  $Y_2$  точки  $C_3$  будет

$$Y_2 = OC_3 \cos \theta_{C2} = \frac{Y_E \cos \theta_{C2}}{\cos \theta_2}.$$

Расстояние  $C_3C_1$  будет поступательным перемещением шлифовального круга от его начального положения до контакта в точке  $K$  с профилем детали:

$$L_K = Y_{2C3} - Y_{C3}.$$

Таким образом, при формировании прямолинейного участка  $PK$  профиля детали угол поворота  $\mu$  будет изменяться от  $\mu_F$  до  $\mu_K$ .

Считаем, что прямолинейный участок  $FK_1$  профиля детали от начального положения повернулся вокруг оси детали на угол  $\mu$  и занял положение прямой  $K_2F_2$  (рис. 3.15). На расстоянии  $\rho$  от пря-

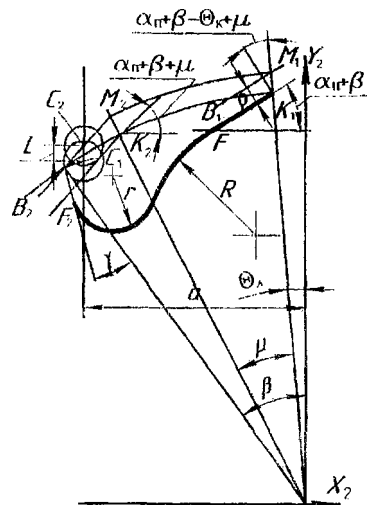


Рис. 3.15. Определение положения профиля шлифовального круга при формировании прямолинейного участка задней поверхности зуба пилы

ной  $FK$  проводим параллельную прямую  $M_1B_1$ , которая после поворота на угол  $\mu$  вокруг оси детали занимает положение прямой  $M_2B_2$ .

Прямая  $M_2B_2$  пересекается с прямой  $C_1C_2$  в точке  $C_2$ . Точка  $C_2$  будет центром окружности профиля шлифовального круга, который при выбранном значении угла  $\mu$  будет касаться рассматриваемого прямолинейного участка профиля детали. В соответствии с рассмотренной методикой графического решения будем иметь:

$$\operatorname{tg} \theta_K = \frac{|X_K|}{Y_K},$$

где  $X_K Y_K$  координаты точки  $K$  профиля детали.

Расстояние  $K_1M_1$  будет равно

$$K_1M_1 = \frac{\rho}{\cos(\alpha_n + \beta - \theta_K)}.$$

Координата  $Y_2$  точки  $M_1$  будет

$$Y_{M_1} = Y_K + \frac{\rho \cos \theta_K}{\cos(\alpha_n + \beta - \theta_K)}.$$

Координата  $Y_2$  точки  $M_2$  будет

$$Y_{M_2} = \frac{Y_{M_1} \cos(\mu + \theta_K)}{\cos \theta_K}.$$

Координата  $Y_2$  точки  $C_2$  будет

$$Y_{C_2} = Y_{M_2} - [a - Y_{M_2} \operatorname{tg}(\mu + \theta_K)] \operatorname{tg}(\alpha_n + \beta + \mu_K).$$

Таким образом, поступательное перемещение  $L$  круга от его начального положения до контакта с прямолинейным участком  $FK_1$  профиля детали будет равно

$$L_K = Y_{2C_1} - Y_{C_2}.$$

После обработки одной впадины зуба шлифовальный круг переводится на обработку следующей впадины зуба.

При этом центр окружности профиля шлифовального круга радиуса  $\rho$  перемещается по дуге окружности  $EPL$  (рис. 3.16). Считаем, что в произвольный момент времени центр окружности профиля шлифовального круга переместился в точку  $P$ . Вращаясь вокруг оси детали, он описывает окружность  $PC_3$ , которая в точке  $C_3$  пересекает прямую  $C_1C_3$ . Точка  $C_3$  будет центром профиля шлифовального круга в тот момент, когда относительно зуба фрезы центр окружности профиля круга будет находиться в точке  $P$ .

Расстояние  $C_1C_3$  будет поступательным перемещением  $L$  круга от его начального положения до рассматриваемого момента. В соответствии с построением, координаты точки  $P$ , положение которой определяется углом  $\delta$ , будут:

$$X_P = |X_K| - \rho \sin \delta;$$

$$Y_P = Y_K + \rho \cos \delta,$$

где  $X_P Y_P$  — координаты крайней точки  $P$  профиля зуба.

Угол  $\theta_P$  определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \theta_P = \frac{|X_P|}{Y_P} = \frac{|X_K| - \rho \sin \delta}{Y_K + \rho \cos \delta}.$$

Радиус точки  $P$ , равный  $OP = OC_3$ , будет

$$OP = \frac{Y_P}{\cos \theta_P} = OC_3, \quad \sin(\mu_P + \theta_P) = \frac{a \cos \theta_P}{Y_P}.$$

Координата  $Y_2$  точки  $C_3$  равна

$$Y_{C_3} = OC_3 \cos(\mu_P + \theta_P) = \frac{Y_P \cos(\mu_P + \theta_P)}{\cos \theta_P}.$$

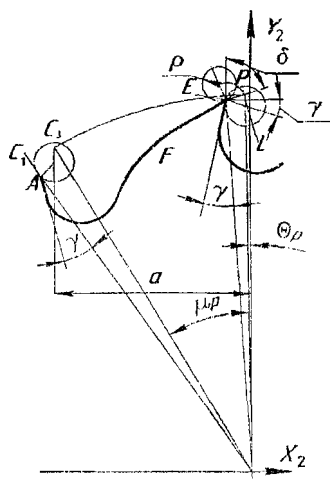


Рис. 3.16. Определение закона движения шлифовального круга при переходе обработки одной впадины зуба к другой

Расстояние  $C_3C_1$  будет равно поступательному перемещению шлифовального круга от его начального положения до рассматриваемого:

$$L = Y_{2C1} - Y_{C3}.$$

Угол  $\delta$  на дуге  $EPL$  меняется от минус  $(\alpha_n + \beta)$  до плюс  $90^\circ + (\gamma - \theta_K)$ , где

$$\operatorname{tg} \theta_K = \frac{|X_K|}{Y_K}.$$

Рассмотрим второй способ обработки профиля зуба отрезной фрезой, когда формирование профиля начинается в точке  $K$  (рис. 3.17) и заканчивается в точке  $A$ . То есть вначале формируется задняя поверхность зуба, а заканчивается процесс обработкой передней поверхности.

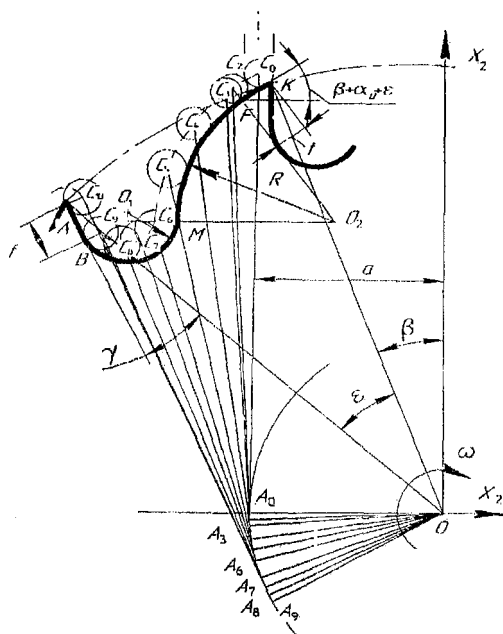


Рис. 3.17. Схема второго способа обработки профиля зуба пилы на станке фирмы Logosh



Графически определим закон прямолинейно-поступательного движения шлифовального круга. Известными считаем начальное положение профиля  $ABMFK$  зуба фрезы (рис. 3.17), углы  $\beta$ ,  $\alpha_n$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon$ ,  $r$ ,  $R$ ,  $\rho$ . Формируется в начальный момент крайняя точка  $K$  профиля детали. Точка  $C_1$  – центр окружности профиля круга – находится на прямой  $KC_1$ , перпендикулярной прямой  $FK$ . Отрезок  $KC_1$  равен радиусу  $\rho$  профиля круга. В процессе обработки вращающийся шлифовальный круг совершает возвратно-поступательные движения параллельно оси  $Y_2$ . Заготовка же вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . В любой момент времени профиль круга касается профиля детали. Вместо вращения детали заставим вращаться в обратную сторону, вокруг оси  $O$  детали, профиль шлифовального круга и взаимно перпендикулярные прямые  $A_0C_1$  и  $A_0O$ , связанные с кругом.

При рассматриваемом вращении прямая  $A_0O$  будет занимать последовательно положения  $A_3O$ ,  $A_6O$ ,  $A_7O \dots$ , а прямая  $A_0C_1$  – положения  $A_3C_4$ ,  $A_6C_7$ ,  $A_7C_8 \dots A_9C_{10}$ . Положение точек  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5 \dots C_{10}$  выбирается таким образом, чтобы окружности профиля шлифовального круга радиуса  $\rho$  касались профиля детали. Расстояния  $L$  вычисляются как разность длин  $A_0C_1 - A_iC_i$ . Таким образом, графически определяется закон движения шлифовального профиля зуба отрезной фрезы.

## 3.2. Формообразование зубьев пил с неравномерным шагом обкаточными дисковыми фрезами

### 3.2.1. Особенности технологии предварительной обработки зубьев пил

Наиболее часто предварительная обработка стружечных канавок пил с неравномерным шагом производится на фрезерных станках с помощью делительных головок методом копирования. При этом для того, чтобы получить неравномерный шаг зубьев при переходе от обработки одной стружечной канавки к смежной, приходится осуществлять пово-

рот заготовки на разные углы вокруг ее оси и соответственно вести фрезерование стружечных канавок с переменной глубиной, что усложняет процесс изготовления инструмента. Для того, чтобы повысить точность обработки по шагу и производительность процесса изготовления рассматриваемых изделий, было предложено применять фасонные обкаточные фрезы с неравномерным шагом зубьев. Фасонные обкаточные фрезы проектируются с небольшим количеством зубьев  $Z_0$ , которое колеблется от 1 до 6. При обработке изделия с количеством зубьев  $Z_1$  обкаточная фреза и заготовка вращаются вокруг своих осей. При повороте фрезы на один зуб заготовка также поворачивается на один зуб. Для однозубой фрезы одному ее обороту соответствует поворот заготовки на  $1/Z_1$  оборота. Для фрезы, имеющей  $Z_0$  зубьев, получим

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{Z_0}{Z_1} = U,$$

где  $\omega_1$  — угловая скорость вращения изделия;  $\omega_0$  — угловая скорость вращения фасонной обкаточной фрезы.

В соответствии с таким равенством углы поворота обкаточной фрезы и изделия связаны зависимостью

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = \frac{Z_0}{Z_1} = U,$$

где  $\varepsilon_1$  — угол поворота изделия за определенный промежуток времени;  $\varepsilon_0$  — угол поворота фасонной обкаточной фрезы, соответствующий повороту изделия на угол  $\varepsilon_1$ .

Кроме вращательных движений, при обработке осуществляется медленное движение подачи: для прямозубых деталей оно будет прямолинейно-поступательным, а для винтовых канавок — винтовым. Движение подачи приводит к скольжению поверхности детали «самой на себя» и не оказывает влияния на характер контактирования исходной инструментальной поверхности и поверхности детали. Рассматриваемые фасонные обкаточные фрезы проектируются на основе исходной

инструментальной поверхности и линейным контактом с поверхностью детали. При определении исходной инструментальной поверхности рассматривается относительное движение инструмента и заготовки без учета движения подачи. Как известно, два взаимосвязанных вращения приводят к винтовому движению. Поверхность детали с прямыми зубьями ограничивается плоскостями, одна из которых является передней плоскостью обрабатываемого инструмента, а вторая — затылочной. С точки зрения работы инструмента, важно обеспечить правильную обработку передней плоскости и получить требуемый передний угол  $\gamma$ . Допускается меньшая точность обработки затылочной плоскости. Поэтому при проектировании фасонных обкаточных фрез можно приблизительно определять профиль фрезы, сопряженной с затылочной плоскостью. Переднюю же плоскость необходимо сформировать точно.

Как было сказано, в любой момент времени передняя плоскость относительно инструмента (фасонной обкаточной фрезы) совершает мгновенное винтовое движение. Известно, что при винтовом движении плоскости характеристикой будет прямая линия. Иными словами, в любой момент времени инструментальная поверхность и передняя плоскость обрабатываемого инструмента будут касаться друг друга по прямой линии — характеристике.

Проектируя фасонные обкаточные фрезы, за режущую кромку, формирующую переднюю плоскость изготавливаемого инструмента, целесообразно принять характеристику. Это упрощает профилирование такого инструмента. Кроме того, геометрически точная обкаточная фасонная фреза в таком случае будет иметь прямолинейную режущую кромку, что упрощает технологию ее изготовления и переточки инструмента в процессе эксплуатации.

Прямолинейная режущая кромка может быть выполнена твердосплавной, что по сравнению с быстрорежущим инструментом позволяет поднять производительность обработки. Как и другие обкаточные инструменты, обкаточные фасонные фрезы обеспечивают высокую

точность по шагу, которая зависит от точности зуборезного станка, на котором производится обработка заготовок. Для того, чтобы получить неравномерный шаг зубьев на обрабатываемом изделии, обкаточная фасонная фреза проектируется также с неравномерным шагом зубьев. Величина неравномерности окружного шага зубьев фасонной обкаточной фрезы зависит от требуемой неравномерности шага зубьев обрабатываемой детали. Будем считать, что окружные шаги зубьев обрабатываемой детали будут равными  $\varepsilon_{11}$ ;  $\varepsilon_{12}$ ;  $\varepsilon_{13}$ ;  $\varepsilon_{14}$ . Тогда окружные шаги фасонной обкаточной фрезы рассчитываются таким образом:

$$\varepsilon_{01} = \frac{\varepsilon_{11}}{U}; \varepsilon_{02} = \frac{\varepsilon_{12}}{U}; \varepsilon_{03} = \frac{\varepsilon_{13}}{U}; \varepsilon_{04} = \frac{\varepsilon_{14}}{U}.$$

### 3.2.2. Профилирование обкаточных фрез для обработки прямозубых деталей с неравномерным шагом при взаимно перпендикулярных осях заготовки и инструмента

Рассмотрим обработку передней плоскости детали (рис. 3.18), положение которой характеризуется передним углом  $\gamma$ . Профиль детали

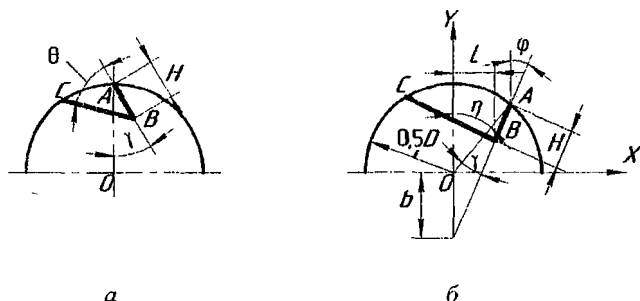


Рис. 3.18. Положение передней плоскости зуба пилы:  
а — исходное; б — повернутое

$ABC$  считаем известным. Для того, чтобы обрабатывать заданную деталь без отклонений от чертежа и выполнить требуемые условия формообразования, повернем деталь вокруг её оси до положения, указанно-

го на рис. 3.18. Положение передней плоскости, профиль которой  $AB$ , в результате поворота идет под углом  $\varphi$ . Угол  $\beta$  поворота детали вокруг ее оси в этом случае равен

$$\beta = \varphi + \gamma.$$

При проектировании фрезы задается угол  $\varphi$  такой величины, чтобы обеспечить благоприятную геометрию режущей части. Обкаточная фасонная фреза проектируется как фреза с затылованным зубом. Как известно, задний угол в нормальном к режущей кромке сечении у фасонной затылованной фрезы в большой степени зависит от угла в плане  $\varphi$ . При малых значениях угла  $\varphi$  задний угол в нормальном сечении близок к нулю. Для того, чтобы на обсах кромках, обрабатывающих участки  $AB$  и  $BC$  профиля, получить одинаковые задние углы, целесообразно проектировать фрезу с симметричным профилем и выбирать угол  $\varphi$ , равный  $0,5 \theta$ . Смещение  $L$  фрезы относительно центра будет равно

$$L = 0,5D \sin(\varphi + \gamma) - H \sin \varphi,$$

где  $D$  — диаметр обрабатываемой заготовки пилы;  $H$  — высота обрабатываемой канавки, измеренная по передней плоскости.

У пилы с неравномерным шагом зубьев изменяются координаты точек  $C$  и  $B$  соответствующих профилей.

Введем систему координат  $XYZ$ , связанную с заготовкой. Ось  $Z$  направим по оси заготовки, ось  $Y$  — по кратчайшему расстоянию между осями заготовки пилы и фасонной обкаточной фрезы. Отрезок  $b$  отскасмый передней плоскостью на оси  $Y$  (рис. 3.18, б), равен:

$$b = \frac{0,5D \sin \gamma}{\sin \varphi}.$$

В системе  $XYZ$  уравнение передней плоскости, профиль которой  $AB$ , будет

$$Y = X \operatorname{ctg} \varphi - \frac{0,5D \sin \gamma}{\sin \varphi}.$$

С фасонной обкаточной фрезой свяжем систему координат  $X_u Y_u Z_u$ . Ось  $X_u$  совпадает с осью вращения инструмента (рис. 3.19). Ось  $Y_u$  совпадает с осью  $Y$ , ось  $Z_u$  проходит параллельно оси  $Z$ . Расстояние между началами систем координат (межосевое расстояние) обозначено  $a_{01}$ .

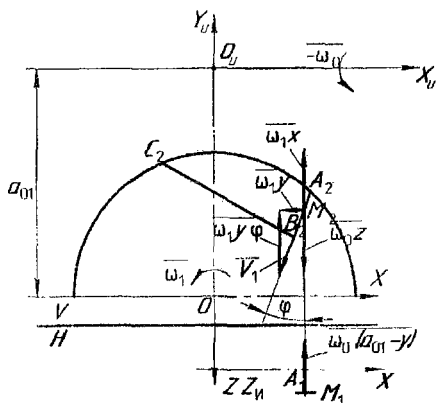


Рис. 3.19. Определение координат точек характеристики

Формулы преобразования координат в этом случае записываются таким образом:

$$\begin{aligned} X_u &= X; \\ Y_u &= Y - a_{01}; \\ Z_u &= Z. \end{aligned}$$

Характеристику на передней плоскости детали определяем, основываясь на следующем положении: в точках характеристики вектор скорости движения передней плоскости относительно инструмента лежит в передней плоскости. При обработке деталь вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\bar{\omega}_1 = \bar{k}\omega_1$ .

На передней плоскости детали рассмотрим произвольную точку  $M$ . Скорость точки  $M$  при вращении с угловой скоростью  $\bar{\omega}_1$  будет

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \bar{k}\omega_1; \\ \bar{V}_{M2} &= \bar{i}(-\omega_1 Y) + \bar{j}\omega_1 X. \end{aligned}$$

Инструмент вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\bar{\omega}_0$ . Для того, чтобы рассмотреть относительное движение передней плоскости, всей системе сообщаем вращение с угловой скоростью  $-\bar{\omega}_0$ . Тогда в результате вращения с угловой скоростью  $-\bar{\omega}_0$  скорость точки  $M$  будет равна

$$\bar{V}_{M2} = -\bar{j}\omega_0 Z - \bar{k}\omega_0 (a_{01} - Y).$$

Составляющая скорости  $-\bar{k}\omega_0(a_{01} - Y)$  лежит в передней плоскости для любой точки  $M$ . Поэтому необходимо, чтобы в точках характеристики лежал в передней плоскости суммарный вектор

$$\bar{V}_\Sigma = \bar{i}(-\omega_1 Y) + \bar{j}\omega_1 X - \bar{j}\omega_0 Z.$$

Вектор  $\bar{i}(-\omega_1 Y)$  разложим на два вектора

$$\bar{i}(-\omega_1 Y) = \bar{V}_1 + \bar{j}(\omega_1 Y \operatorname{ctg} \varphi).$$

Вектор  $\bar{V}_1$  лежит в передней плоскости. Для того, чтобы скорость  $\bar{V}_\Sigma$  относительного движения располагалась в передней плоскости, необходимо, чтобы проекция скорости на ось  $Y$  была в рассматриваемом случае равна нулю.

Следовательно,

$$\omega_1 X + \omega_1 Y \operatorname{ctg} \varphi = \omega_0 Z.$$

Отсюда

$$Z = \frac{\omega_1}{\omega_0} (X + Y \operatorname{ctg} \varphi).$$

Координаты точки характеристики, соответствующей точке  $C$  профиля детали рассчитываются в определенной последовательности (рис. 3.20). Координаты  $X$ ,  $Y$  точки  $C$  будут:

$$X_C = 0,5D \sin(\varphi + \gamma - \varepsilon);$$

$$Y_C = 0,5D \cos(\varphi + \gamma - \varepsilon),$$

где  $\varepsilon$  — угловой шаг зубьев детали.

Координата  $Z_C$  точки  $C$  определяется по уравнению контакта:

$$Z_C = \frac{\omega_1}{\omega_0} (X - Y \operatorname{ctg}(\theta - \varphi)).$$

Координаты точки  $C$  характеристики в системе  $X_n Y_n Z_n$  определяются по формулам преобразования координат. Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  характери-

стик определяют положение передней и задней плоскостей проектируемой фасонной обкаточной фрезы.

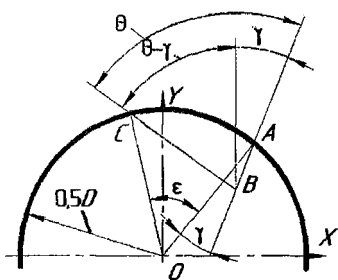


Рис. 3.20. Определение координат характеристики в точке C

Таким образом, в системе координат  $XYZ$ , связанной с заготовкой пилы, координаты точек характеристики в рассматриваемый момент времени для изделий с неравномерным шагом зубьев вычисляются в такой последовательности:

1. Выбирается в пределах профиля  $AB$  координата  $X$ .
2. В соответствии с уравнением передней плоскости рассчитывается координата  $Y$ :

$$Y = X \operatorname{ctg}(\varphi) - \frac{0,5D \sin \gamma}{\sin \varphi}.$$

3. По уравнению контакта определяется координата  $Z$ :

$$Z = \frac{\omega_1}{\omega_0} (X + Y \operatorname{ctg} \varphi).$$

Так как характеристика является прямой, достаточно рассчитать координаты точек  $A$  и  $B$ .

Координаты точки  $A$  характеристики рассчитываются так же, как и для изделий с равномерным шагом зубьев, а именно:

$$X_A = 0,5D \sin(\varphi + \gamma);$$

$$Y_A = 0,5D \cos(\varphi + \gamma).$$

Координата  $Z_A$  рассчитывается по уравнению контакта.

Координаты точки  $B$  рассчитываются следующим образом:

$$X_B = X_A - H_i \sin \varphi;$$

$$Y_B = Y_A - H_i \cos \varphi.$$



Координата  $Z_B$  рассчитывается по уравнению контакта.

Координаты точки  $C$ , соответствующей профилю детали, рассчитываются в такой последовательности:

$$X_C = 0,5D \sin(\varphi + \gamma - \varepsilon_i);$$

$$Y_C = 0,5D \cos(\varphi + \gamma - \varepsilon_i),$$

где  $\varepsilon_i$  — соответствующий профилю детали угловой шаг.

Координата  $Z_C$  точки  $C$  определяется по уравнению контакта:

$$Z_C = \frac{\omega_1}{\omega_2} (X - Y \operatorname{ctg}(\theta - \varphi)).$$

Координаты точек характеристики  $A$ ,  $B$  и  $C$  в системе  $X_n Y_n Z_n$  определяются по формулам преобразования координат.

Так как обрабатывается пила с переменным шагом зубьев, высоты канавок, измеряемые по передней плоскости, будут разными. Соответственно изменяются радиусы зубьев фрезы. На рис. 3.21 изображен профиль  $ABC$  обрабатываемой канавки, высота которой равна  $AB = H_1$ , а угловой шаг равен  $\varepsilon_1$ . Определим высоту канавки  $H_2$  для случая, когда угловой шаг зубьев обрабатываемой детали равен  $\varepsilon_2$ , а профиль которой —  $ALE$ . Так как угол  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$  мал, можно дугу  $CE$  считать равной хорде  $CE$ .

$$CE = R(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = R\Delta\varepsilon,$$

где углы  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  измеряются в радианах.

Примем угол  $ECO = 90^\circ$ . Проведем прямую  $EF$  параллельно  $AB$ . Тогда в треугольнике  $CEF$  угол  $EFC = \theta$ , а угол  $EFC = 90^\circ - (\gamma - \varepsilon_1)$ .

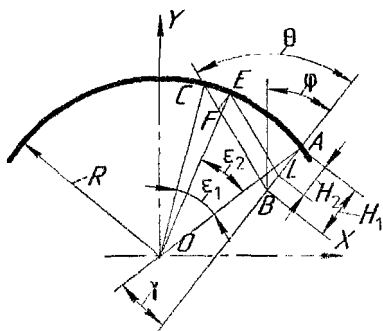


Рис. 3.21. Определение высоты профиля зубьев обкаточной фрезы

По теореме синусов будем иметь

$$\frac{CE}{\sin \theta} = \frac{EF}{\cos(\gamma - \varepsilon_1)}.$$

Отсюда

$$EF = \frac{CE \cos(\gamma - \varepsilon_1)}{\sin \theta} = \frac{R \Delta \varepsilon \cos(\gamma - \varepsilon_1)}{\sin \theta}.$$

По построению  $EF = LB = H_1 - H_2$ .

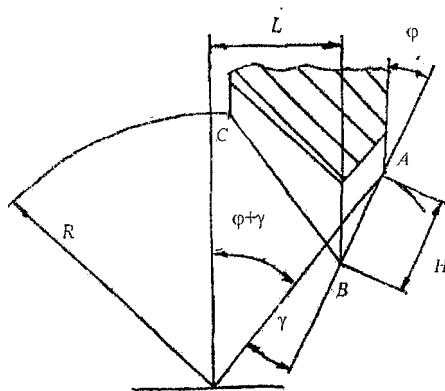
Таким образом, при известной величине  $H_1$  и угловых шагах  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  величина высоты  $H_2$  на смежном зубе будет равна

$$H_2 = H_1 - \frac{R \cos(\gamma - \varepsilon_1)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\sin \theta}.$$

В соответствии с этим соотношением рассчитываются высоты обрабатываемых канавок пилы и радиусы различных зубьев обкаточной фрезы.

Величина изменения радиуса фрезы  $\Delta r$  (смежных её зубьев) будет равна

$$\Delta r_1 = (H_1 - H_2) \cos \varphi = \frac{R \cos(\gamma - \varepsilon_1)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos \varphi}{\sin \theta}.$$



Соответственно для второй пары смежных зубьев будем иметь

$$\Delta r_2 = \frac{R \cos(\gamma - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \cos \varphi}{\sin \theta}.$$

Установка фрезы относительно обрабатываемой заготовки характеризуются размером  $L$  (рис. 3.22).

Рис. 3.22. Установка обкаточной фрезы

Размер  $L$  равен

$$L = R \sin(\varphi + \gamma) - H \sin \varphi.$$

Определим размер  $H$  высоты стружечной канавки обкатываемой пилы (рис. 3.23). Известными величинами будут: радиус  $R$  обрабатываемой пилы, передний угол  $\gamma$ , угол  $\theta$  профиля стружечной канавки и угловой шаг  $\varepsilon$ .

Профиль стружечной канавки будет равен  $ABC$ .

В системе  $XY$  координаты точки  $A$  равны:

$$X_A = 0; Y_A = R.$$

Координаты точки  $C$  будут:

$$X_C = -R \sin \varepsilon;$$

$$Y_C = R \cos \varepsilon.$$

Уравнение прямой  $AB$  будет

$$Y = R - X \operatorname{ctg} \gamma.$$

Координаты точки  $E$  будут:

$$X_E = 0;$$

$$Y_E = Y_C - R \sin \varepsilon \operatorname{ctg}(\theta + \gamma).$$

Уравнение прямой  $CE$

$$Y = Y_E - X \operatorname{ctg}(\theta + \gamma).$$

Совместное решение прямых  $AB$  и  $CE$  определяет координаты точки  $B$ :

$$X_B = \frac{R - Y_E}{\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg}(\theta + \gamma)};$$

$$Y_B = R - \frac{(R - Y_E) \operatorname{ctg} \gamma}{\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg}(\theta + \gamma)} = \frac{Y_E \operatorname{ctg} \gamma - R \operatorname{ctg}(\theta + \gamma)}{\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg}(\theta + \gamma)}.$$

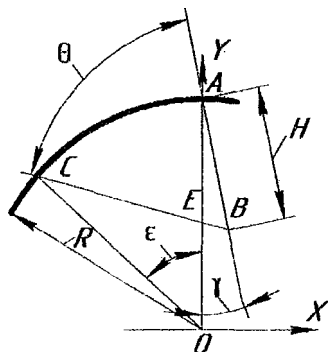


Рис. 3.23. Определение высоты стружечной канавки обрабатываемой пилы

Высота  $H$  стружечной канавки, измеренная по передней поверхности, будет равна:

$$H = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_A - Y_B)^2};$$

$$X_B - X_A = X_B,$$

$$\text{где } Y_A - Y_B = R - \frac{Y_E \operatorname{ctg} \gamma - R \operatorname{ctg}(\theta + \gamma)}{\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg}(\theta + \gamma)} = \frac{(R - Y_E) \operatorname{ctg} \gamma}{\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg}(\theta + \gamma)}.$$

Отсюда

$$H = \sqrt{\left[ \frac{R - Y_E}{\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg}(\theta + \gamma)} \right]^2 + \left[ \frac{(R - Y_E) \operatorname{ctg} \gamma}{\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg}(\theta + \gamma)} \right]^2}.$$

Преобразуя, получим

$$H = \frac{R - Y_E}{\sin \gamma [\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg}(\theta + \gamma)]}.$$

### 3.3. Профилирование обкаточных фрез для обработки прямозубых деталей с неравномерным шагом при наклонных осях заготовки и инструмента

В качестве режущей кромки фасонной обкаточной фрезы при наклонной установке ее оси примем характеристику, определенную при выбранном положении обрабатываемой канавки. С обрабатываемой заготовкой пилы свяжем систему координат  $XYZ$  (рис. 3.24). Ось  $Z$  направим по оси детали, ось  $Y$  – по кратчайшему расстоянию между осями детали и фрезы. Оси  $X$  и  $Y$  располагаются в плоскости, перпендикулярной оси пилы. С проектируемой обкаточной фрезой свяжем систему координат  $X_n Y_n Z_n$ . Ось  $Y_n$  совпадает с осью  $Y$ , ось  $X_n$  идет по оси инст-

румента — оси вращения инструмента с угловой скоростью  $-\bar{\omega}_0$ . Формулы преобразования координат в этом случае записываются таким образом:

$$X_{\text{и}} = X \cos \tau - Z \sin \tau;$$

$$Y_{\text{и}} = Y - a_{01};$$

$$Z_{\text{и}} = Z \cos \tau + X \sin \tau,$$

где  $\tau$  — угол установки оси фрезы.

Определим характеристику на поверхности зуба пилы в момент времени, когда передняя плоскость занимает положение, соответствующее выбранному значению угла  $\varphi$ . Тогда уравнение передней плоскости обрабатываемой детали в системе  $XYZ$  будет

$$Y = X \operatorname{ctg} \varphi - \frac{0,5D \sin \gamma}{\sin \varphi}.$$

На передней плоскости зуба пилы рассмотрим произвольную точку  $M$  с координатами  $XYZ$ . Скорость точки  $M$  при вращении вокруг оси обрабатываемой пилы с угловой скоростью  $\bar{\omega}_1 = \bar{k} \omega_1$  будет

$$\bar{V}_1 = \bar{j}(-\omega_1 Y) + \bar{j} \omega_1 X.$$

Анализируя относительное движение инструмента и заготовки пилы необходимо учитывать, что точка  $M$  участвует также в движении вращения инструмента вокруг его оси. В результате вращения с угло-

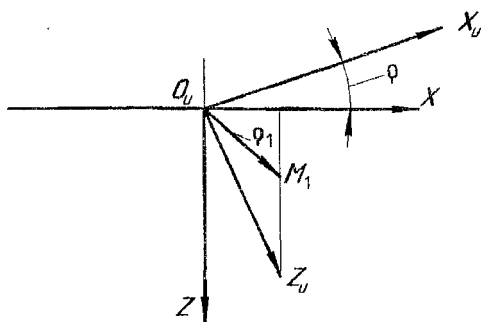
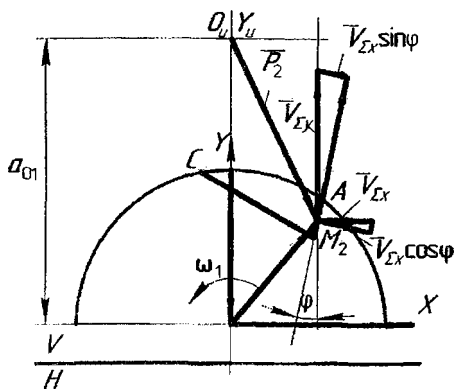


Рис. 3.24. Определение координат точек характеристики в точке  $C$  профиля пилы

вой скоростью  $\bar{\omega}_0$  вокруг оси  $X_n$  скорость точки  $M$  в системе  $X_n Y_n Z_n$  будет равна

$$\bar{V}_2 = [\bar{\omega}_0 \times \bar{P}].$$

В системе  $XYZ$  имеем:

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_0 &= \bar{i} \omega_0 \cos \tau - \bar{k} \omega_0 \sin \tau; \\ \bar{P} &= -\bar{j} a_{01} + \bar{i} X + \bar{j} Y + \bar{k} Z = \bar{i} X + \bar{j} (Y - a_{01}) + \bar{k} Z.\end{aligned}$$

Таким образом, скорость  $\bar{V}_2$  произвольной точки передней плоскости при вращении вокруг оси инструмента будет

$$\bar{V}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_0 \cos \tau & 0 & -\omega_0 \sin \tau \\ X & Y - a_{01} & Z \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определитель, получим

$$\begin{aligned}\bar{V}_2 &= \bar{i} [\omega_0 \sin \tau (Y - a_{01})] - \bar{j} (Z \omega_0 \cos \tau + X \omega_0 \sin \tau) + \\ &+ \bar{k} [\omega_0 \cos \tau (Y - a_{01})].\end{aligned}$$

Составляющая скорости  $\bar{k} [\omega_0 \cos \tau (Y - a_{01})]$  лежит в передней плоскости для любой ее точки. Поэтому при определении характеристики ее можно не учитывать. Таким образом, в точках характеристики необходимо, чтобы следующий суммарный вектор  $\bar{V}_\Sigma$  лежал в передней плоскости.

$$\begin{aligned}\bar{V}_\Sigma &= \bar{i} [\omega_0 \sin \tau (Y - a_{01}) - \omega_1 Y] + \bar{j} (\omega_1 X - Z \omega_0 \cos \tau + X \omega_0 \sin \tau); \\ \bar{V}_\Sigma &= \bar{i} \bar{V}_{\Sigma X} + \bar{j} \bar{V}_{\Sigma Y}.\end{aligned}$$

Каждый из рассматриваемых векторов  $\bar{V}_{\Sigma X}$  и  $\bar{V}_{\Sigma Y}$  разложим на два направления – на нормаль к передней плоскости и направление, лежащее в передней плоскости. Составляющие рассматриваемых векторов, лежащие в передней плоскости, можно при определении характеристики не учитывать. Сумма же составляющих векторов на нормаль к пе-

редней плоскости в точках характеристики должна быть равна нулю. В этом случае векторы скоростей точек характеристики в их относительном движении будут лежать в передней плоскости. Таким образом, будем иметь

$$V_{\Sigma X} \cos \varphi = V_{\Sigma Y} \sin \varphi$$

или

$$[\omega_0 \sin \tau (Y - a_{01}) - \omega_1 Y] \cos \varphi = [\omega_1 X - Z \omega_0 \cos \tau - X \omega_0 \sin \tau] \sin \varphi.$$

Определяя отсюда величину  $Z$ , получим

$$Z = \frac{\omega_1}{\omega_0} \cdot \frac{(X + Y \operatorname{ctg} \varphi)}{\cos \varphi} - \operatorname{tg} \tau \operatorname{ctg} \varphi (Y - a_{01}) - X \operatorname{tg} \tau.$$

При  $\tau = 0$  получаем ранее выведенную при непосредственном анализе этого случая формулу:

$$Z = \frac{\omega_0}{\omega_1} \cdot (X + Y \operatorname{ctg} \varphi).$$

Используя полученное уравнение контакта, определяем характеристику на передней плоскости в системе  $XYZ$ . Последовательность расчета может быть такая.

1. В системе  $XYZ$  определяются координаты двух точек  $A$  и  $B$  профиля:

$$X_A = 0,5D \sin(\varphi + \gamma);$$

$$Y_A = 0,5D \cos(\varphi + \gamma);$$

$$X_B = X_A - H \sin \varphi;$$

$$Y_B = Y_A - H \cos \varphi.$$

2. По уравнению контакта рассчитывается координата  $Z$  точек характеристики:

$$Z_A = \frac{\omega_1}{\omega_0} \cdot \frac{(X_A + Y_A \operatorname{ctg} \varphi)}{\cos \varphi} - \operatorname{tg} \tau \operatorname{ctg} \varphi (Y_A - a_{01}) - X_A \operatorname{tg} \tau;$$

$$Z_B = \frac{\omega_1}{\omega_0} \cdot \frac{(X_B + Y_B \operatorname{ctg} \varphi)}{\cos \varphi} - \operatorname{tg} \tau \operatorname{ctg} \varphi (Y_B - a_{01}) - X_B \operatorname{tg} \tau.$$

Таким образом, координаты двух точек прямолинейной характеристики на передней поверхности в системе  $XYZ$  будут:  $A(X_A Y_A Z_A)$ ;  $B(X_B Y_B Z_B)$ . Координаты точки характеристики, соответствующей точке  $C$  профиля зуба пилы в системе  $XYZ$ , рассчитываются в такой последовательности.

Координаты  $XY$  точки  $C$ :

$$X_C = 0,5D \sin(\varphi + \gamma - \varepsilon);$$

$$Y_C = 0,5D \cos(\varphi + \gamma - \varepsilon),$$

где  $\varepsilon$  — угловой шаг зубьев детали.

Координата  $Z_C$  точки характеристики на затылочной плоскости зуба пилы определяется по уравнению контакта:

$$Z_C = \frac{\omega_1}{\omega_0} \cdot \frac{(X_C + Y_C \operatorname{ctg} \varphi)}{\cos \varphi} - \operatorname{tg} \tau \operatorname{ctg} \varphi (Y_C - a_{01}) - X_C \operatorname{tg} \tau.$$

Определив координаты точек характеристик в системе  $XYZ$  по формулам преобразования координат, рассчитываем координаты точек характеристик в системе  $X_n Y_n Z_n$ :

$$X_n = X \cos \tau - Z \sin \tau;$$

$$Y_n = Y - a_{01};$$

$$Z_n = Z \cos \tau + X \sin \tau.$$

Две точки  $A(X_n Y_n Z_n)$ ,  $B(X_n Y_n Z_n)$  определяют прямолинейную характеристику, которая принимается за режущую кромку фрезы, обрабатывающую переднюю плоскость зуба пилы. Зная режущую кромку  $AB$ , создают на ней рекомендуемые величины передних углов  $\gamma$  и таким путем определяют положение передней плоскости. Так как обработка затылочной плоскости не требуется особо высокой точности, режущую кромку, обрабатывающую затылочную плоскость, проводят через точку  $B$  и проекцию точки  $C$  на переднюю плоскость.



#### 4. КИНЕМАТИКА И СИЛЫ РЕЗАНИЯ ПРИ ОТРЕЗКЕ ДИСКОВЫМИ ПИЛАМИ

Кинематика резания как совокупность движений, которые происходят в процессе резания за время одного рабочего цикла, определяет разнообразные кинематические схемы резания, служит научной основой анализа и синтеза технологических способов формообразования деталей машин и основой определения геометрических параметров режущей части инструментов. Известно, что количественные соотношения движений конкретной кинематической схемы резания определяют вид инструмента, принцип его работы и технологическое назначение. При этом, как результат суммарного действия движений, рассматривают:

- вектор скорости результирующего движения резания как векторную сумму скорости главных движений, движения подачи, осуществляемых механизмами станка;
- траекторию результирующего движения резания и поверхность, на который лежит эта траектория;
- формообразование новых поверхностей как совокупность траекторий результирующего движения резания всех точек лезвия инструмента.

При разработке пил с неравномерным шагом зубьев необходимо провести анализ кинематики резания. Это обусловлено, прежде всего, тем, что при отрезке дисковыми пилами с неравномерным шагом соответственно изменению шага изменяется подача на зуб, что вызывает изменение принципа работы этого инструмента.

Отличием в работе пил с неравномерным шагом зубьев, по сравнению с пилами, имеющими равномерный шаг зубьев, является переменная загрузка режущих кромок зубьев и характер изменения количества одновременно работающих зубьев [12]. Эти отличия вызывают изменения силовых нагрузок на инструмент и его динамических характеристик.

## 4.1. Анализ конструкций и схем резания дисковых отрезных пил

Номинальный шаг зуба  $t$  является основным параметром, который определяет форму и размеры профиля зуба. Он рассчитывается по зависимости

$$t = \frac{\pi D}{Z},$$

где  $D$  — диаметр пилы;  $Z$  — количество зубьев пилы.

Шаг зубьев определяется исходя из условий вместимости стружки во впадине, использования эффективной мощности станка, а также одновременной работе не менее двух зубьев. Условие вместимости стружки характеризуется коэффициентом  $k$ :

$$k = \frac{F_{\text{вп}}}{F_{\text{ср}}} = \frac{F_{\text{вп}}}{F_{\text{ср}}};$$

$$F_{\text{вп}} = \frac{\pi h}{4}; \quad h = [0,422 \dots 0,46(0,65)];$$

$$F_{\text{ср}} = S_z b;$$

$$F_{\text{ср}} = S_z b; \quad k = \frac{\pi h^2}{4 S_z b}; \quad h = \sqrt{\frac{4 S_z b k}{\pi}};$$

$$h = 1,14 \sqrt{S_z b k}; \quad t = (1,545 \dots 2,38).$$

Исследование влияния разнообразных факторов на вместимость стружки при протягивании показало, что размер  $k$  зависит от обрабатываемого материала и толщины среза  $a$ . При увеличении толщины среза коэффициент вместимости растет. Многие исследователи при обработке стали рекомендуют выбирать размер  $k$  при протягивании в пределах  $2 \dots 4,5$ . Тем не менее, процессы размещения стружки при протягивании и фрезеровании существенно отличаются. Это объясняется, главным образом, тем, что скорость фрезерования значительно превышает ско-

рость протягивания. При повышении же скорости резания вследствие уменьшения деформирования стружки радиус округления ее витка при его свободном формировании увеличивается. Поэтому при обработке отрезными пилами коэффициент вместимости стружки колеблется от 15 до 50. На основе производственного опыта количество зубьев  $Z$  определяется при обработке стали по соотношениям:

$$Z = [4 - 6(10)]\sqrt{D} - \text{мелкий зуб};$$

$$Z = [3 - 4(6)]\sqrt{D} - \text{средний зуб};$$

$$Z = [2 - 3]\sqrt{D} - \text{крупный зуб}.$$

Для обработки сплавов алюминия рекомендуется крупный зуб. По известному количеству зубьев определяются (рис. 4.1) размеры профиля  $h = (0,42 \dots 0,46)t$ ; радиус округления впадины  $r = (0,5 \dots 0,6)h$ ; радиус округления спинки зуба  $R = (1,05 \dots 1,1)t$ .

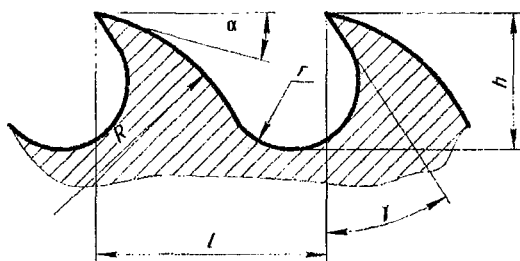


Рис. 4.1. Элементы профиля зуба

Отрезные пилы, как правило, изготавливаются с формами профиля зубьев, показанными на рис. 4.2. Одноугловая форма зуба (рис. 4.2, а), наиболее проста, технологична и обрабатывается угловой фрезой за один проход. Радиус  $r$  округления впадины для разнообразных диаметров отрезных пил колеблется от 0,1 до 0,5 мм.

В пилах с крупным зубом его профиль очерчивается ломаной линией (рис. 4.2, б). В этом случае зуб более прочен; улучшаются условия размещения стружки в большей по объему впадине зуба и поэтому криволинейная форма зуба является более рациональной (рис. 4.2, в).

Различают симметричную и несимметричную схемы отрезки. Схема

отрезки в значительной степени влияет на количество одновременно работающих зубьев и, тем самым, на изменения значений сил резания при отрезке.

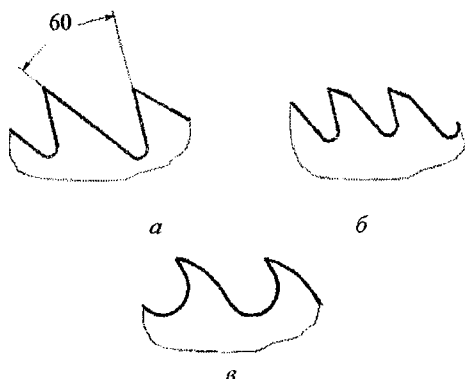


Рис. 4.2. Формы профиля зубьев отрезных пил:

а — одноугловая; б — очерченная ломаной линией; в — криволинейная

Рассмотрим несимметричную схему отрезки (рис. 4.3). Смещение разрезаемой заготовки относительно оси фрезы характеризуется углами  $\psi_1$  и  $\psi_2$ .

В этом случае количество одновременно работающих зубьев  $Z_{\text{одн}}$  определяется таким образом:

— определяется значение угла

$\psi_2$  по формуле

$$\sin \psi_2 = \frac{0,5D - (B + C)}{0,5D} = 1 - \frac{B + C}{0,5D},$$

где  $D$  — диаметр пилы, мм;  $B$  — толщина отрезаемой заготовки, мм;  $C$  — расстояние от нижнего края пилы к заготовке, мм.

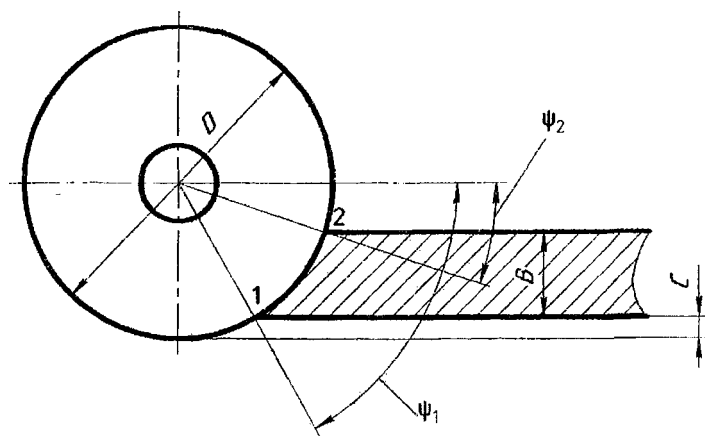


Рис. 4.3. Несимметричная схема отрезки

– определяется значение угла  $\psi_1$ :

$$\sin \psi_1 = \frac{0,5D - C}{0,5D} = 1 - \frac{C}{0,5D};$$

– определяется угловой шаг зубьев при заданном количестве зубьев фрезы  $Z$ :

$$\varepsilon = \frac{360^\circ}{Z};$$

– определяется количество одновременно работающих зубьев:

$$Z_{\text{одн}} = \frac{\psi_1 - \psi_2}{\varepsilon}.$$

При симметричной схеме обработки (рис. 4.4) количество одновременно работающих зубьев определяется по формуле

$$Z_{\text{одн}} = \frac{2\psi_1}{\varepsilon},$$

где  $\sin \psi_1 = \frac{0,5B}{0,5D} = \frac{B}{D}$ .

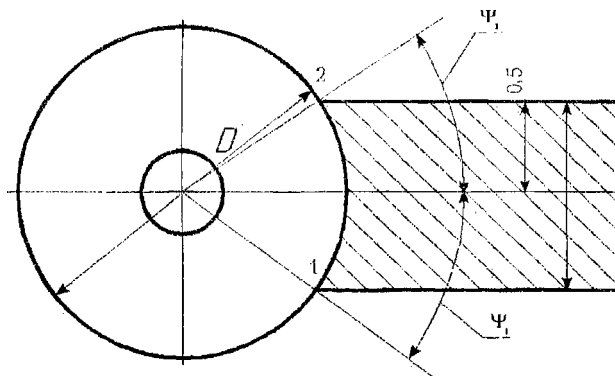


Рис. 4.4. Симметричная схема отрезки

В процессе отрезки количество одновременно работающих зубьев изменяется. В резании принято стремиться к уменьшению количества одновременно работающих зубьев и при этом не допускать, чтобы ко-

личество одновременно работающих зубьев  $Z_{\text{одн}}$  было равным целому числу. При отрезке дисковыми пилами удовлетворить эти требования достаточно трудно. Это связано с толщиной заготовок, формой профиля, схемой отрезки и другими условиями производства. Таким образом, возникает задача исследования количества одновременно работающих зубьев при отрезке дисковыми пилами и его влияния на процесс резания.

#### **4.2. Количество одновременно работающих зубьев при отрезке дисковыми пилами**

Изменение количества одновременно работающих зубьев вызывает колебание усилий резания, что влияет на вибрацию и деформацию инструмента и других элементов технологической системы. В последнее время на производстве все большее применение находят пилы с неравномерным шагом.

Как показывает анализ расчетных значений количества одновременно работающих зубьев пилы с равномерным шагом, при толщине отрезаемой заготовки до 100 мм, при симметричной схеме отрезки оно колеблется на один зуб. В табл. 4.1 и на рис. 4.5 показано изменение количества одновременно работающих зубьев пилы с равномерным шагом зубьев ( $D = 275$  мм,  $Z = 80$ ,  $\varepsilon_n = 4,5^\circ$ ).

В табл. 4.2 приведены расчетные размеры максимального и минимального количества одновременно работающих зубьев и размер  $Z_{\text{max}} - Z_{\text{min}}$  для пилы диаметром 275 мм, с количеством зубьев  $Z = 80$ , номинальным шагом  $t = 4,5^\circ$ , коэффициентом неравномерности, равным 15 %, четырьмя зубьями в группе. Шаги зубьев были равны: 1-й зуб  $\varepsilon_1 = 3,82^\circ$ ; 2-й зуб  $\varepsilon_2 = 3,82^\circ$ ; 3-й зуб  $\varepsilon_3 = 5,18^\circ$ ; 4-й зуб  $\varepsilon_4 = 4,5^\circ$ .

**Изменение количества одновременно работающих зубьев пилы  
с равномерным шагом**

Толщина заготовки $B$ , мм	Количество одновременно работающих зубьев		Изменение количества одновременно работающих зубьев $Z_{\max}-Z_{\min}$
	максимальное, $Z_{\max}$	минимальное, $Z_{\min}$	
1-10,795	1	0	1
10,796	1	1	0
10,797-21,575	2	1	1
21,576	2	2	0
21,577-32,321	3	2	1
32,322	3	3	0
32,323-43,018	4	3	1
43,019	4	4	0
43,02-53,648	5	4	1
53,649	5	5	0
53,65-64,196	6	5	1
64,197	6	6	0
64,198-74,645	7	6	1
74,646	7	7	0
74,647-84,978	8	7	1
84,979	8	8	0
84,98-95,181	9	8	1
95,182	9	9	0
95,183-100	10	9	1

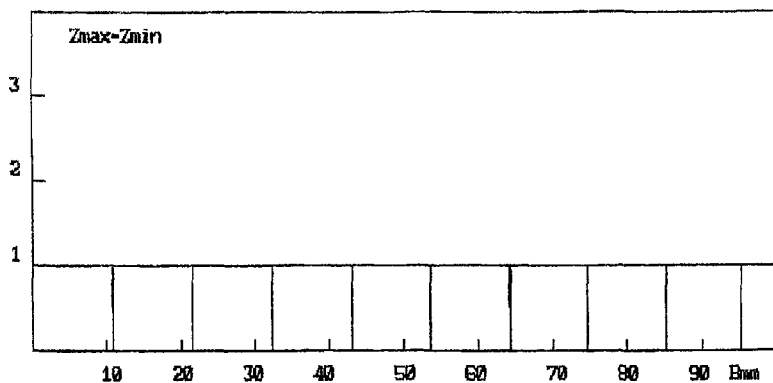


Рис. 4.5. График изменения количества одновременно работающих зубьев при отрезке  
прямоугольных сплошных заготовок пилой с равномерным шагом

$(D = 275 \text{ мм}, Z = 80, \epsilon_n = 4,5^\circ)$

$r_1 = 0,82^{10}$ ,  $r_2 = 0,5^{10}$ . Было принято симметричное расположение разрезаемой заготовки относительно пилы. По данным табл. 4.2 построен график (рис. 4.6) зависимости  $Z_{\max}$ ,  $Z_{\min} = f(B)$ .

В рассматриваемом случае изменение ширины реза  $B$ , количество одновременно работающих зубьев колеблется в пределах одного зуба. В то же время для некоторых значений ширины реза  $B$  количество одновременно работающих зубьев изменяется на два зуба.

Таблица 4.2

**Изменение количества одновременно работающих зубьев пил**  
 $D = 275$ ,  $Z = 80$ ,  $Z_{гр} = 4$ , с коэффициентом неравномерности шага 15 %

Толщина заготовки $B$ , мм	Количество одновременно работающих зубьев		Изменение количества одновременно работающих зубьев $Z_{\max} - Z_{\min}$
	максимальное, $Z_{\max}$	минимальное, $Z_{\min}$	
1-9,188	1	0	1
9,189-12,427	2	0	2
12,428-19,973	2	1	1
19,974-23,202	3	1	2
23,202-30,726	3	2	1
30,727-33,919	4	2	2
33,919-43,018	4	3	1
43,019	4	4	0
43,02-52,071	5	4	1
52,072-55,249	6	4	2
55,25-62,632	6	5	1
62,633-65,784	7	5	2
65,785-73,096	7	6	1
73,097-76,192	8	6	2
76,193-84,978	8	7	1
84,979	8	8	0
84,98-93,671	9	8	1
93,672-96,711	10	8	2
96,712-100	10	9	1



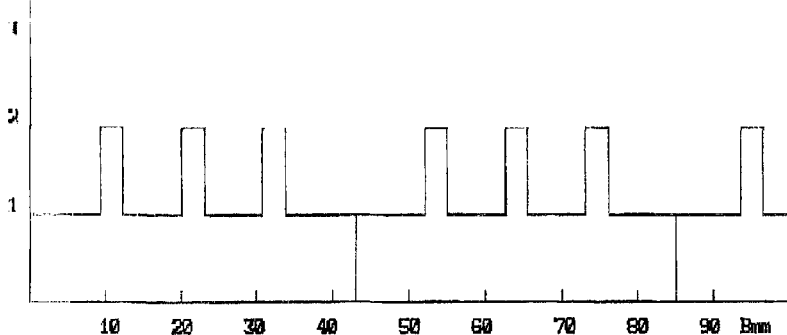


Рис. 4.6. График изменения количества одновременно работающих зубьев при отрезке прямоугольных сплошных заготовок пилой с неравномерным шагом ( $D = 275$  мм;  $Z = 80$ ;  $Z_{гp} = 4$ ;  $\varepsilon_1 = 3,82^\circ$ ;  $\varepsilon_2 = 4,5^\circ$ ;  $\varepsilon_3 = 5,18^\circ$ ;  $\varepsilon_5 = 4,5^\circ$ )

В табл. 4.3 приведены расчетные размеры максимального и минимального количества одновременно работающих зубьев и размер  $Z_{\max} - Z_{\min}$  для пилы с количеством зубьев в группе, равным восьми.

Диаметр пилы — 275 мм, количество зубьев  $Z = 80$ , коэффициент неравномерности шага — 15 %.

Шаги зубьев равны:  $\varepsilon_1 = 3,15^\circ$ ;  $\varepsilon_2 = 3,82^\circ$ ;  $\varepsilon_3 = 4,5^\circ$ ;  $\varepsilon_4 = 5,18^\circ$ ;  $\varepsilon_5 = 5,85^\circ$ ;  $\varepsilon_6 = 5,18^\circ$ ;  $\varepsilon_7 = 4,5^\circ$ ;  $\varepsilon_8 = 3,82^\circ$ ;  $\varepsilon_9 = 3,15^\circ$  и т. д.

Было принято симметричное расположение заготовки относительно пилы. Для рассматриваемого случая по данным табл. 4.3 был построен график (рис. 4.7) зависимости  $Z_{\max} - Z_{\min} = f(B)$ .

Здесь изменение толщины отрезаемой заготовки, количество одновременно работающих зубьев колеблется в пределах двух зубьев. В отдельных случаях, например при  $B = 37$  мм, количество одновременно работающих зубьев изменяется на три зуба. Естественно, такая конструкция пилы нецелесообразна.

**Изменение количества одновременно работающих зубьев пил**  
 **$D = 275, Z = 80, Z_{гр} = 8$ , с коэффициентом неравномерности шага 15 %**

Толщина заготовки $B$ , мм	Количество одновременно работающих зубьев		Колебания количества одновременно работающих зубьев $Z_{\max} - Z_{\min}$
	максимальное, $Z_{\max}$	минимальное, $Z_{\min}$	
1-7,558	1	0	1
7,559-14,032	2	0	2
14,033-16,716	2	1	1
17,717-25,878	3	1	2
25,879-26,429	4	1	3
26,43-36,607	4	1	2
36,607-38,771	5	2	3
38,772-47,279	5	3	2
47,28-49,43	6	3	3
49,431-59,473	6	4	2
59,474-60,012	7	4	3
60,013-68,294	7	5	2
68,295-71,545	7	6	1
71,546-77,736	8	6	2
77,737-84,978	8	7	1
84,979	8	8	0
84,98-92,136	9	8	1
92,137-98,214	10	8	2
98,213-100	10	9	1

В табл. 4.4 приведены расчетные размеры колебания количества одновременно работающих зубьев для пилы с количеством зубьев в группе, равным восьми. Диаметр пилы – 275 мм, количество зубьев  $Z = 80$ , коэффициент неравномерности шага – 5 %.

Шаги зубьев равны:  $\varepsilon_1 = 4,05^\circ$ ;  $\varepsilon_2 = 4,275^\circ$ ;  $\varepsilon_3 = 4,5^\circ$ ;  $\varepsilon_4 = 4,725^\circ$ ;  $\varepsilon_5 = 4,95^\circ$ ;  $\varepsilon_6 = 4,725^\circ$ ;  $\varepsilon_7 = 4,5^\circ$ ;  $\varepsilon_8 = 4,275^\circ$ ;  $\varepsilon_9 = 4,05^\circ$  и т. д.

Было принято симметричное расположение отрезаемой заготовки относительно пилы. Для рассматриваемого случая по данным табл. 4.4 был построен график (рис. 4.7) зависимости  $Z_{\max} - Z_{\min} = f(B)$ .

Изменение количества одновременно работающих зубьев пил  
 $D = 275$ ,  $Z = 80$ ,  $Z_{гр} = 8$ , с коэффициентом неравномерности шага 5 %

Толщина заготовки $B$ , мм	Количество одновременно работающих зубьев		Колебания количества одновременно работающих зубьев $Z_{max} - Z_{min}$
	максимальное, $Z_{max}$	минимальное, $Z_{min}$	
1-9,718	1	0	1
9,719-11,875	2	0	2
11,876-19,961	2	1	1
19,962-23,19	3	1	2
23,191-30,187	3	2	1
30,188-34,454	4	2	2
34,455-40,895	4	3	1
40,896-45,139	5	3	2
45,14-51,54	5	4	1
51,541-55,754	6	4	2
55,755-62,632	6	5	1
62,633-65,76	7	5	2
65,761-73,628	7	6	1
74,629-75,662	8	6	2
75,663-84,978	8	7	1
84,979	8	8	0
84,98-94,168	9	8	1
94,169-96,194	10	8	2
96,195-100	10	9	1

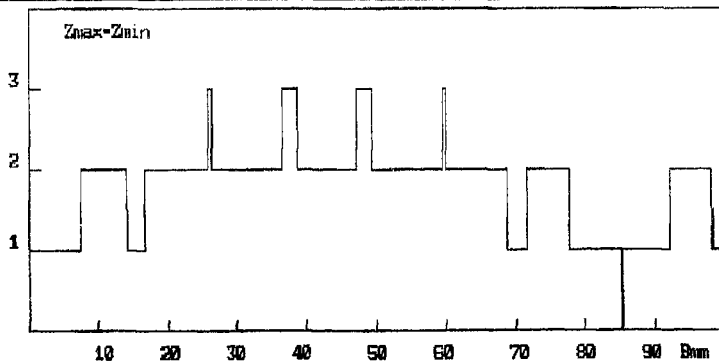


Рис. 4.7. График изменения количества одновременно работающих зубьев при отрезке прямоугольных сплошных заготовок пилой с неравномерным шагом

( $D = 275$  мм,  $Z = 80$ ,  $Z_{гр} = 8$ ,  $\varepsilon_1 = 3,15^\circ$ ;  $\varepsilon_2 = 3,82^\circ$ ;  $\varepsilon_3 = 4,5^\circ$ ;  $\varepsilon_4 = 5,18^\circ$ ;  $\varepsilon_5 = 5,85^\circ$ ;  $\varepsilon_6 = 5,18^\circ$ ;  $\varepsilon_7 = 4,5^\circ$ ;  $\varepsilon_8 = 3,82^\circ$ )

В данном случае изменения толщины прямоугольных разрезаемых заготовок, количество одновременно работающих зубьев изменяется на один зуб, и только при некоторых значениях  $B$  количество одновременно работающих зубьев изменяется на два зуба. Анализ графиков, приведенных на рис. 4.7 и 4.8, показывает, что при увеличении количества зубьев в группе коэффициент неравномерности целесообразно уменьшать.

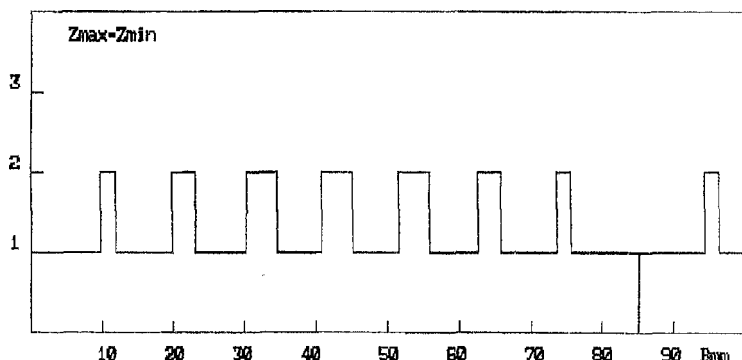
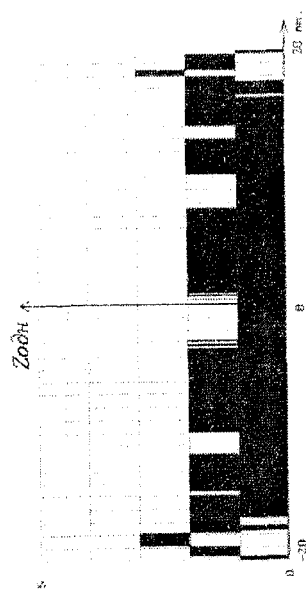


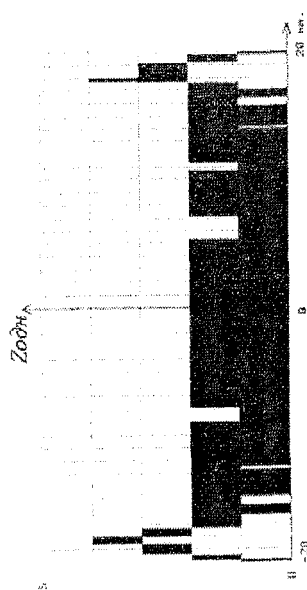
Рис. 4.8. График изменения количества одновременно работающих зубьев при отрезке прямоугольных сплошных заготовок пилой с неравномерным шагом ( $D = 275$  мм;  $Z = 80$ ;  $Z_{гp} = 8$ ;  $\varepsilon_1 = 4,05^\circ$ ;  $\varepsilon_2 = 4,275^\circ$ ;  $\varepsilon_3 = 4,5^\circ$ ;  $\varepsilon_4 = 4,725^\circ$ ;  $\varepsilon_5 = 4,95^\circ$ ;  $\varepsilon_6 = 4,725^\circ$ ;  $\varepsilon_7 = 4,5^\circ$ ;  $\varepsilon_8 = 4,275^\circ$ ).

Необходимо учитывать, что колебание количества одновременно работающих зубьев в пределах двух зубьев наблюдается и у пил с равномерным шагом. Неточность при изготовлении пил вызывает изменение количества одновременно работающих зубьев на два при такой толщине разрезаемой заготовки  $B$ , когда количество одновременно режущих зубьев теоретически остается постоянным.

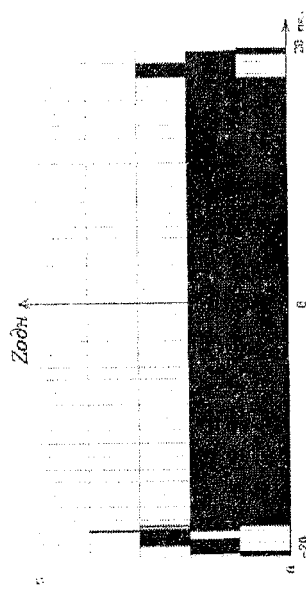
На рис. 4.9 (а, б, в, г) приведены диаграммы изменения количества одновременно работающих зубьев при отрезке прутков диаметром 50 мм пилами диаметром 275 мм с  $Z = 120$ , с равномерным и неравномерным шагом, с подачей  $S_Z = 0,01$  мм/зуб, а также пилами с  $Z = 180$ , с неравномерным шагом и подачами  $S_Z = 0,01$  мм/зуб и  $S_Z = 0,02$  мм/зуб.



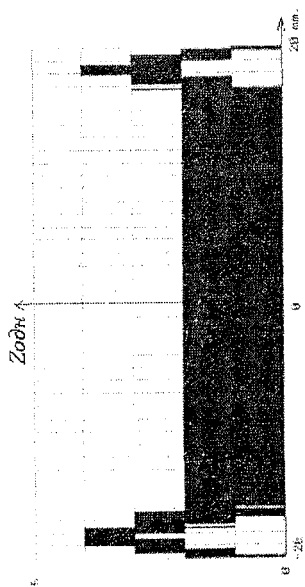
а  $Z=120$   $S_z=0,01$  мм/зуб.



б  $Z=160$   $S_z=0,01$  мм/зуб.

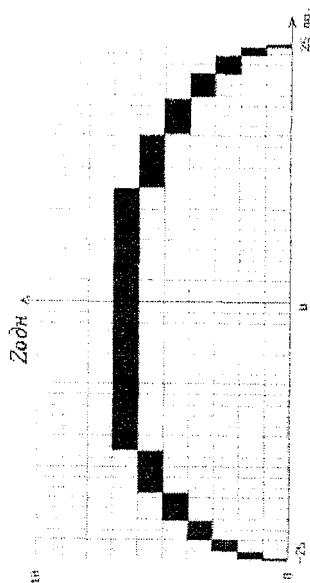


в  $Z=120$   $Z_{zp}=6$   $S_z=0,01$  мм/зуб.  
 $K_1=(0,775 - 0,925 - 1,075 - 1,225 - 1,075 - 0,925)$

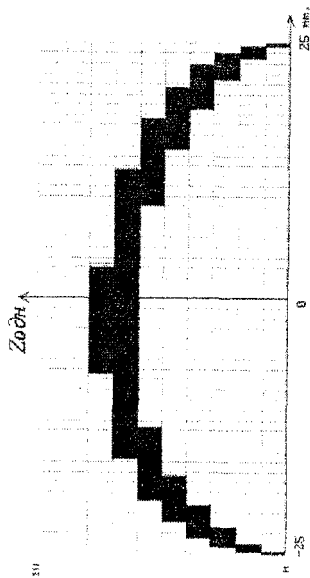


г  $Z=168$   $Z_{zp}=6$   $S_z=0,01$  мм/зуб.  
 $K_1=(0,775 - 0,925 - 1,075 - 1,225 - 1,075 - 0,925)$

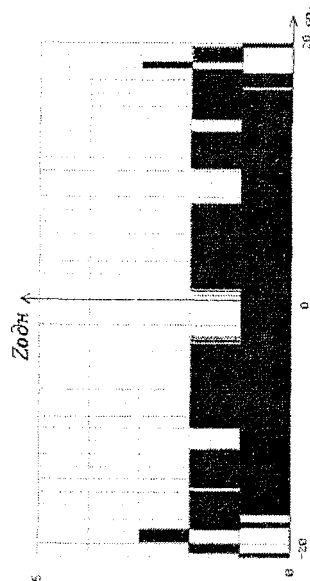
Рис. 4.9. Диаграммы изменения количества одновременно работающих зубьев при отрезке труб диаметром 40×2 мм пилами диаметром 275 мм



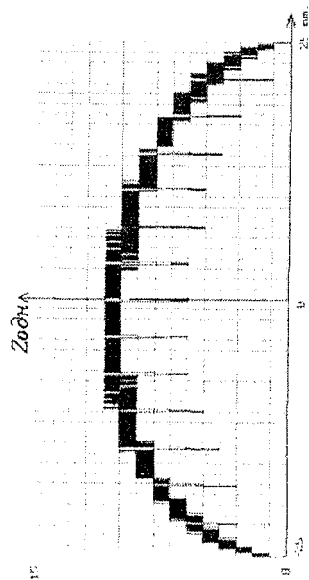
а)  $Z=120$   $S_z=0,01\text{мм/зуб}$



б)  $Z=120$   $Z_{zp}=8$   $S_z=0,01\text{мм/зуб}$   
 $K_i=(0,8 - 0,9 - 1 - 1,1 - 1,2 - 1,1 - 1 - 0,9)$



в)  $Z=180$   $Z_{zp}=8$   $S_z=0,01\text{мм/зуб}$   
 $K_i=(0,8 - 0,9 - 1 - 1,1 - 1,2 - 1,1 - 1 - 0,9)$



г)  $Z=180$   $Z_{zp}=8$   $S_z=0,02\text{мм/зуб}$   
 $K_i=(0,8 - 0,9 - 1 - 1,1 - 1,2 - 1,1 - 1 - 0,9)$

Рис. 4.10. Диаграммы изменения количества одновременно работающих зубьев при отрезке прутков диаметром 50 мм пилами диаметром 275 мм

На рис. 4.10 (а, б, в, г) – диаграммы изменения количества одновременно работающих зубьев при отрезке труб диаметром 40×2 мм пилами с количеством зубьев  $Z = 120$  и  $Z = 168$  как с равномерным, так и с неравномерным шагом.

Анализ диаграмм изменения количества одновременно работающих зубьев, как при отрезке прутков, так и при отрезке труб, показывает, что главным образом на изменение количества одновременно работающих зубьев пилами одного и того же диаметра влияют номинальный шаг и распределение шагов в группе.

### **4.3. Определение толщины среза при отрезке дисковыми пилами**

Известно, что размер толщины среза входит в эмпирические зависимости для определения усилий резания. При фрезеровании он является переменным размером и зависит от ряда параметров. Рассмотрим, каким образом можно определить этот размер для разных профилей заготовок.

#### **4.3.1. Толщина среза при отрезке прямоугольных заготовок**

Толщина среза  $a$  в исследуемый момент времени в анализируемой точке режущей кромки является расстоянием от поверхности резания к внешней поверхности срезаемого слоя заготовки. Толщина среза  $a$  измеряется по нормали к поверхности резания. Внешней поверхностью слоя материала заготовки, который срезается исследуемым зубом при отрезке, будет поверхность резания предыдущего зуба, за которым при вращении пилы идет рассматриваемый зуб. Так как при отрезке дисковыми пилами скорость вращательного движения ощутимо больше скорости движения подачи, то можно считать, что поверхностями резания будут круглые цилиндры, образующиеся при вращении режущей кромки вокруг оси пилы (рис. 4.11, а). Если режущая кромка будет обра-

зующей круглого цилиндра, что характерно для дисковых пил, то нормаль к принятой поверхности резания пройдет по радиусу 0...3. Расстояние 1...2 между двумя поверхностями резания будет равно подаче на зуб  $S_z$ . Считая, что фигура 1...2...3 – прямоугольный треугольник, для толщины среза  $a = 1...3$  получим:

$$a = S_z \cos \varepsilon = S_z \sin \eta.$$

Тем не менее, на реальную форму поверхности резания при отрезке дисковыми пилами влияет как вращение, так и движение подачи. Реальной траекторией исследуемой точки  $B$  режущего зуба будет не окружность, а трохоида. С учетом влияния подачи на форму поверхности резания, определим толщину среза  $a$  (рис. 4.11, б).

В общем случае толщина среза  $a$  может быть определена по формуле

$$a = \frac{(\bar{N} \bar{S})}{|\bar{N}|},$$

где  $|\bar{N}|$  – вектор нормали к поверхности резания;  $\bar{S}$  – вектор подачи, соединяющий исследуемую точку режущей кромки с внешней поверхностью срезаемого слоя по любому направлению.

При отрезке дисковыми пилами за вектор подачи принимается вектор, который идет по направлению подачи, длина которого равна подаче на зуб. В системе  $XYZ$  вектор подачи будет

$$\bar{S} = \bar{i} S_z.$$

Вектор нормали  $\bar{N}$  к поверхности резания равен

$$\bar{N} = (\bar{P} \times \bar{V}_z),$$

где  $\bar{P}$  – вектор по режущей кромке произвольной длины;  $\bar{V}_z$  – вектор скорости движения исследуемой точки режущей кромки.

В системе  $XYZ$  при отрезке дисковыми пилами вектор  $\bar{P} = \bar{j}$ .



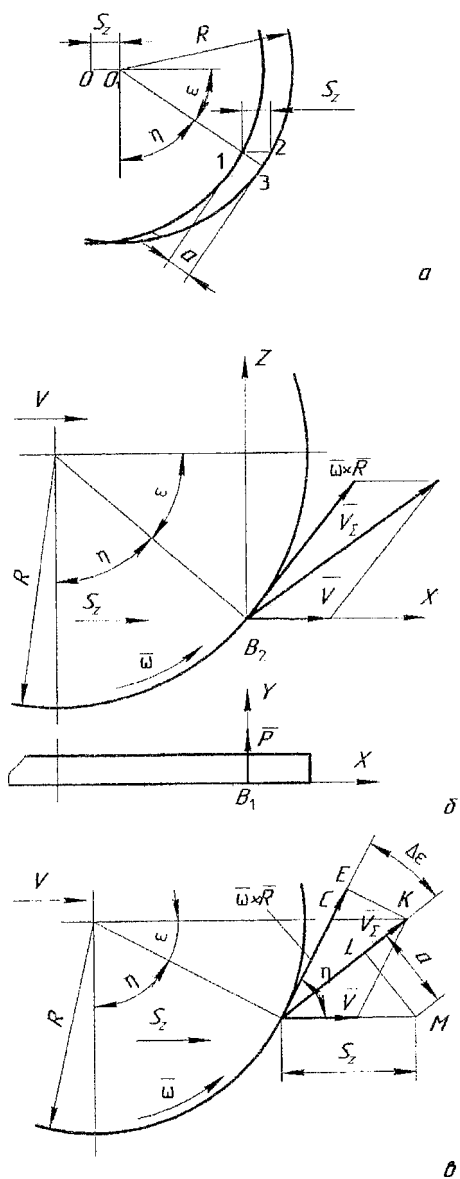


Рис. 4.11. Определение толщин среза при отрезке дисковыми пилами  
 а — схема резания дисковой пилой; б — схема определения подачи на один оборот  $S_0$ ;  
 в — схема определения толщины среза

Вектор  $\bar{V}_\Sigma$  будет геометрической суммой вектора  $\bar{\omega} \times \bar{R}$  вращения точки  $B$  вокруг оси пилы и вектора  $\bar{V}$  поступательного движения подачи. В системе  $XYZ$  вектор  $\bar{V}_\Sigma$  будет равен

$$\bar{V}_\Sigma = \bar{i}(V + \omega R \sin \varepsilon) + \bar{k} \omega R \cos \varepsilon.$$

Вектор нормали к поверхности резания определяется по соотношению

$$\bar{N} = (\bar{P} \times \bar{V}_\Sigma) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ V + \omega R \sin \varepsilon & 0 & \omega R \cos \varepsilon \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определитель, получим:

$$\bar{N} = \bar{i} \omega R \cos \varepsilon - \bar{k} (V + \omega R \sin \varepsilon).$$

Длина вектора  $\bar{N}$  будет равна

$$|\bar{N}| = \sqrt{\omega^2 R^2 \cos^2 \varepsilon + V^2 + \omega^2 R^2 \sin^2 \varepsilon + 2V\omega R \sin \varepsilon},$$

или

$$|\bar{N}| = \sqrt{V^2 + \omega^2 R^2 + 2V\omega R \sin \varepsilon}.$$

Обозначим время одного оборота пилы через  $t$ , тогда будем иметь:

$$S_0 = Vt,$$

где  $S_0$  — подача на оборот пилы.

$$2\pi = \omega t.$$

Отсюда

$$\frac{V}{\omega} = \frac{S_0}{2\pi}.$$

Следовательно

$$V = \frac{S_0 \omega}{2\pi}.$$

Тогда длину вектора  $|\bar{N}|$  можно записать таким образом:

$$|\bar{N}| = \sqrt{\frac{S_0^2 \omega^2}{4\pi^2} + \omega^2 R^2 + \frac{2S_0 \omega}{2\pi} \omega R \sin \varepsilon}$$

или

$$|\bar{N}| = \omega \sqrt{\frac{S_0^2}{4\pi^2} + R^2 + \frac{S_0}{\pi} R \sin \varepsilon};$$

скалярное произведение векторов  $\bar{N}$  и  $\bar{S}$  будет

$$(\bar{N}\bar{S}) = S_z \omega R \cos \varepsilon.$$

Подставляя полученные размеры в формулу для подсчета толщины среза  $a$ , получаем:

$$a = \frac{S_z R \cos \varepsilon}{\sqrt{\frac{S_0^2}{4\pi^2} + R^2 + \frac{S_0}{\pi} R \sin \varepsilon}}.$$

По этому соотношению можно определить толщины среза  $a$  в разные моменты времени при отрезке заготовок дисковыми пилами. Толщину среза  $a$ , с учетом влияния движения подачи на форму поверхности резания, можно определить, зная направление скорости относительного движения исследуемой точки режущей кромки (рис. 4.11, в)

$$\bar{V}_\Sigma = \bar{V} + \bar{\omega} \times \bar{R}.$$

По построению угол между векторами  $\bar{\omega} \times \bar{R}$  и  $\bar{V}$  равен  $\eta$ .

Тогда из треугольника  $KCE$  имеем:

$$CE = V \cos \eta; \quad KE = V \sin \eta.$$

Из треугольника  $BEK$  получим:

$$\operatorname{tg} \Delta \varepsilon = \frac{KE}{BE} = \frac{V \sin \eta}{\omega R + V \cos \eta}.$$

$$\operatorname{tg} \Delta \varepsilon = \frac{S_0 \omega \sin \eta}{2\pi \left( \omega R + \frac{S_0 \omega}{2\pi} \cos \eta \right)}.$$

Из треугольника  $BLM$  получим:

$$LM = a = BM \sin(\eta - \Delta \varepsilon).$$

Следовательно,

$$a = S_z \sin(\eta - \Delta \varepsilon) = S_z \sin[90 - (\varepsilon + \Delta \varepsilon)] = S_z \cos(\varepsilon + \Delta \varepsilon).$$

Таким образом, толщину среза при отрезке дисковыми пилами можно подсчитать по соотношениям:

$$a = S_z \cos(\varepsilon + \Delta \varepsilon),$$

где

$$\operatorname{tg} \Delta \varepsilon = \frac{S_0 \sin \eta}{2\pi R + S_0 \cos \eta}.$$

Сравнение результатов расчета толщины среза по трем указанным формулам для дисковых пил с неравномерным шагом зубьев показало, что они почти одинаковы.

#### 4.3.2. Толщина среза при отрезке круглых заготовок

Определим толщину среза  $a$  в точке  $A$  режущей кромки  $AB$  (се проекции  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ ) (рис. 4.12). Рассмотрим пилу с прямым зубом. Положение режущей кромки будем задавать углом в плане  $\varphi$ . Угол между направлением подачи  $SZ$  и радиусом  $O_2A_2$  обозначим через  $\eta$ . Он характеризует положения исследуемой точки  $A$  режущей кромки в произвольно выбранный момент времени.

В системе  $XYZ$  вектор  $\bar{P}$ , идущий по режущей кромке записывается таким образом:

$$\bar{P} = \bar{i} - \bar{k} \operatorname{ctg} \varphi.$$

Вектор скорости  $\vec{V}$ , идущий по оси  $Y$ , примем равным 1, тогда

$$\vec{V} = \vec{j}.$$

Вектор  $\vec{N}$  к статической поверхности резания

$$\vec{N} = [\vec{P} \times \vec{V}] = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -\operatorname{ctg} \varphi \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Раскрывая определитель, получим:  $\vec{N} = \vec{i} \operatorname{ctg} \varphi + \vec{k}$ .

Модуль вектора  $\vec{N}$  равен

$$[N] = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi}.$$

При отрезке пилами вектором подачи будет вектор  $\vec{S}_z$ , длина которого равна подаче на зуб

$$\vec{S}_z = \vec{j} S_z \sin \eta + \vec{k} S_z \cos \eta.$$

Скалярное произведение векторов  $\vec{N}$  и  $\vec{S}_z$  равно

$$(\vec{N} \vec{S}) = S_z \cos \eta.$$

Подставляя полученные размеры в общую формулу для подсчета толщины среза  $a$ , получим:

$$a = \frac{(\vec{N} \vec{S})}{[N]} = \frac{S_z \cos \eta}{1/\sin \varphi} = S_z \sin \varphi \cos \eta.$$

По этой формуле рассчитывается толщина среза  $a$  в различные моменты времени, которые отвечают углу  $\eta$ .

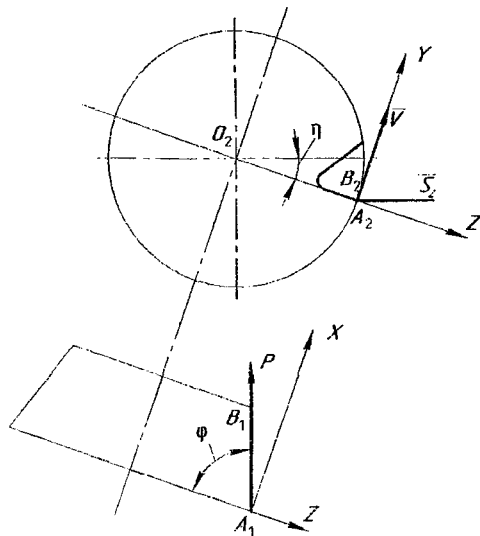


Рис. 4.12. Определение толщины среза

В процессе отрезки угол  $\eta$  изменяется от 0 до  $\psi/2$ , где  $\psi$  угол контакта заготовки с инструментом. В процессе отрезки круглых заготовок  $\psi$  изменяется в зависимости от положения пилы, обусловленной подачей относительно заготовки в исследуемый момент времени. Поэтому значение угла  $\eta$  для круглых заготовок определяется интервалом  $0 \div \psi_{\max}/2$ .

Максимальное значение толщины среза  $a_{\max}$  будет при  $\eta = 0$ , т. е.  $a_{\max} = S_z \sin \varphi$ , а для пил с прямыми зубьями ( $\varphi = 90^\circ$ )  $a_{\max} = S_z$ .

Минимальное значение толщины среза будет при  $\eta = \psi_{\max}/2$ , т. е.

$$a_{\min} = S_z \sin \varphi \cos \psi_{\max}/2,$$

или для пил  $\varphi = 90^\circ$ :

$$a_{\min} = S_z \cos \psi_{\max}/2.$$

Для определения толщины среза в исследуемый произвольный момент времени рассмотрим зависимости для подсчета угла  $\psi$  при отрезке пилами круглых заготовок.

В произвольный момент времени положение пилы относительно заготовки определяется размером  $X$ , что в процессе отрезки колеблется от  $+r$  к  $-r$  (рис. 4.13).

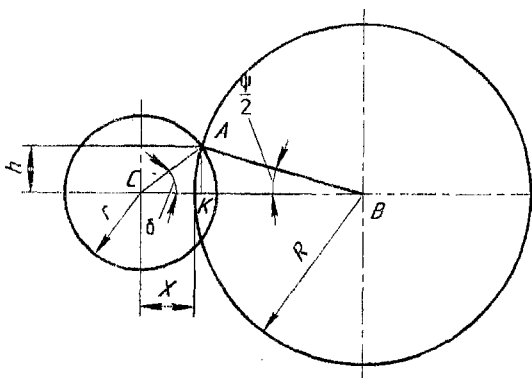


Рис. 4.13. Определение угла контакта пилы с круглой заготовкой

Половина угла контакта  $\psi/2$  определяется из угла  $ABC$  при симметричном расположении пилы относительно заготовки.

Из построения  $AB = R$ ,  $AC = r$  и  $BC = R + X$ , где  $R$  — радиус пилы,  $r$  — радиус заготовки.

По теореме косинусов будем иметь:

$$r^2 = R^2 + (R+x)^2 - 2R(R+x)\cos\psi/2;$$

$$\cos\psi/2 = \frac{R^2 - r^2}{2R(R+x)} + \frac{R+x}{2R} = \frac{(R+r)(R-r)}{2R(R+x)} + \frac{R+x}{2R}.$$

При  $X = r$  получим  $\cos\psi_1/2 = 1$ , т. е.  $\psi_1 = 0$ ; аналогично при  $X = -r - \psi_2 = 0$ .

Максимальное значение угла  $\psi$  будет равно при  $x = \sqrt{R^2 - r^2} - R$ .

При этом значении  $X$  угол  $\psi_{\max}/2$  будет равен

$$\cos\frac{\psi_{\max}}{2} = \frac{R^2 - r^2}{2R[R + \sqrt{R^2 - r^2} - R]} + \frac{R + \sqrt{R^2 - r^2} - R}{2R}.$$

После преобразования получим:

$$\sin\frac{\psi_{\max}}{2} = \frac{r}{R}.$$

Определение значения угла  $\psi$  при отрезке труб и при отрезке прутков аналогично. Однако следует учитывать, что при обработке трубы время резания больше в двух зонах —  $AE$  и  $KM$ . Угол контакта в зоне  $AE$  по построению (рис. 4.14) равен:

$$\psi_1 = \rho_1 - \rho_2.$$

Угол  $\rho_1$  определяется из  $\triangle ABC$  по теореме косинусов:

$$\cos\rho_1 = \frac{R^2 - r_2^2}{2R(R+x)} + \frac{(R+x)}{2R} = \frac{(R+r_2)(R-r_2)}{2R(R+x)} + \frac{R+x}{2R},$$

где  $R$  — радиус пилы;  $r_1$  — внутренний радиус трубы;  $r_2$  — внешний радиус трубы.

Угол  $\rho_2$  также определяется по теореме косинусов из  $\triangle AEC$ :

$$\cos\rho_2 = \frac{R^2 - r_1^2}{2R(R+x)} + \frac{R+x}{2R} = \frac{(R+r_1)(R-r_1)}{2R(R+x)} + \frac{R+x}{2R}.$$

При симметричном расположении заготовки относительно пилы, угол контакта во второй зоне  $KM$  (рис. 4.14) будет тот же  $\psi$ .

При  $X$  больше  $r_1$  зоны контакта  $AE$  и  $KM$  сливаются и полный угол контакта  $\psi_1 = 2\rho_1$ .

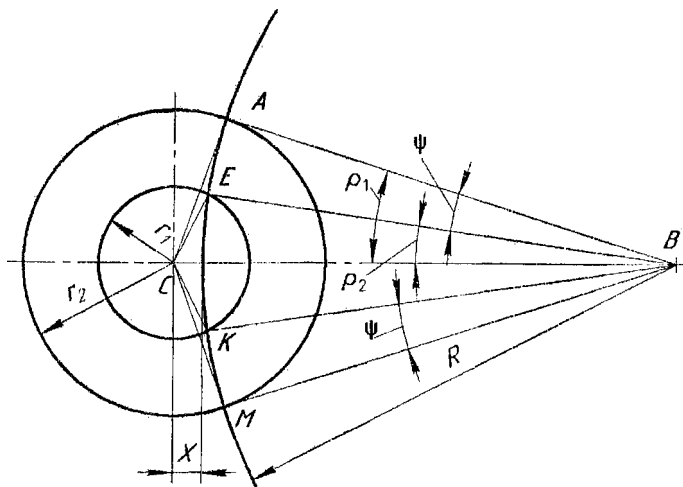


Рис. 4.14. Определение угла контакта пилы с трубой

Аналогичная картина наблюдается при отрицательном значении  $X$ , когда его абсолютный размер больше  $r_1$ .

Рассчитывая толщину среза при отрезке труб нужно учитывать, что угол  $\eta$  колеблется от  $\rho_1$  до  $\rho_2$ . Максимальное значение толщины среза будет при  $\eta = \rho_2$ :  $a_{\min} = S_z \sin \varphi \cos \rho_2$ ; при  $\varphi = 90^\circ$ :  $a_{\max} = S_z \cos \rho_2$ .

Минимальное значение будет при  $\eta = \rho_1$ :  $a_{\min} = S_z \sin \varphi \cos \rho_1$ ; а при  $\varphi = 90^\circ$ :  $a_{\max} = S_z \cos \rho_1$ .

Таким образом, при отрезке заготовок из прутков и труб угол между направлением подачи  $S_z$  и радиусом пилы, что определяет положения вектора скорости  $\bar{V}$ , в процессе отрезки является переменной величиной. Это вызвано изменением в произвольный момент времени угла контакта  $\psi$  заготовки с инструментом, что определяет изменение толщины среза и соответственно сил резания. Особенностью отрезки



заготовок пилами с неравномерным шагом есть еще и изменение подачи  $S_z$ , вызванное разнообразным значением шага, что, в первую очередь, влияет на динамическое состояние инструмента.

#### 4.4. Силы резания при отрезке дисковыми пилами

Рассмотрим усилия составляющих резания, которые возникают при отрезке дисковыми пилами с прямолинейными режущими кромками, в которых угол наклона режущих кромок  $\lambda = 0^\circ$ . Поэтому усилия составляющих резания, направленные вдоль оси инструмента, будут равны нулю. Векторы усилий резания будут располагаться в плоскостях, перпендикулярных оси пилы. Вектор  $\vec{P}_0$  направим по скорости вращения исследуемой точки режущей кромки, т. е. по скорости резания (рис. 4.15, а).

Эта составляющая усилия резания отвечает составляющей усилия  $P_z$  при заточке и ряде иных процессов резания. Вектор  $\vec{P}_r$  направим по радиусу, соединяющему исследуемую точку режущей кромки с осью пилы. Эта составляющая усилия резания отвечает усилию  $P_z$  при точении и ряде других процессов обработки. Соотношение между составляющими усилиями резания  $P_z$  и  $P_y$  может быть разнообразным. Профессор Г. И. Грановский для случая протягивания приводит соотношение  $P_z$  к  $P_y$  в виде  $P_y = 0,98P_z$ .

По данным профессора В. А. Кривоухова соотношение между  $P_z$  и  $P_y = 1:0,45$ .

Профессор С. Н. Филоненко приводит соотношение  $P_y = 0,4P_z$ ; А. М. Вульф —  $P_y = (0,3-0,4)P_z$ ; профессор В. Н. Подурасва —  $P_y = (0,25-0,5)P_z$ . В результате исследований, проведенных в ВНИИ при протягивании материала из стали 45 для разнообразных толщин среза ( $a = 0,02-0,2$  мм) было определено соотношение вида  $P_y = (0,44-0,63)P_z$ .

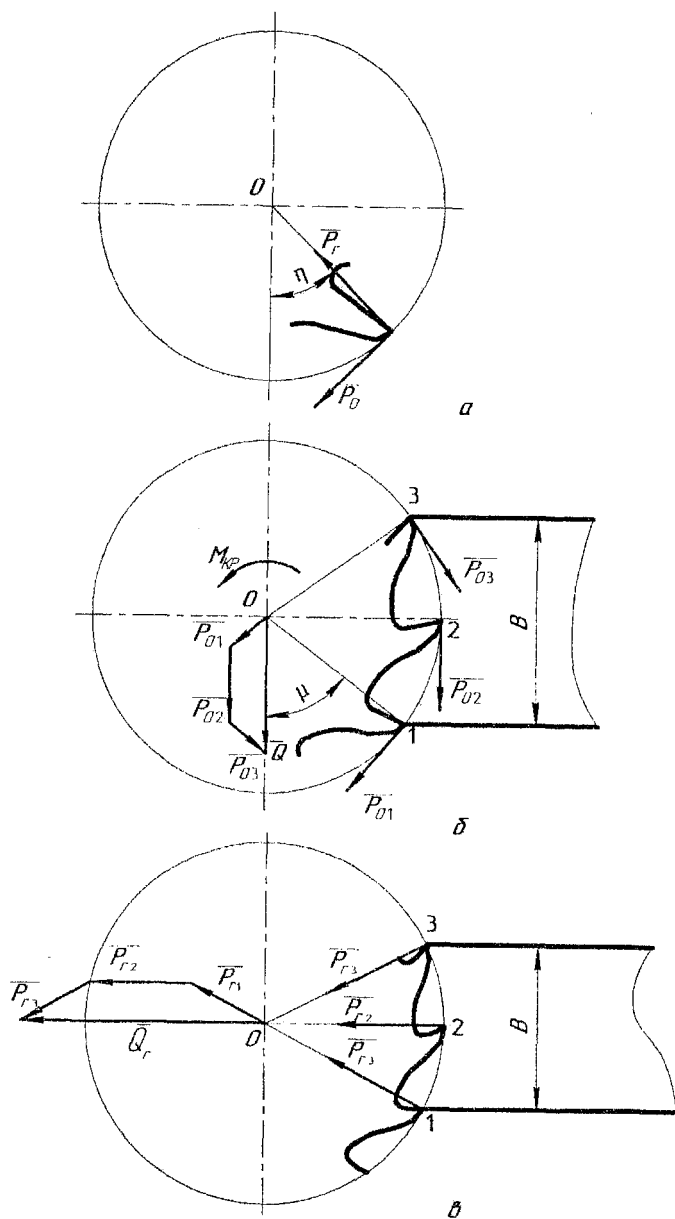


Рис. 4.15. Определение общих усилий резания при отрезке дисковыми пилами

По данным профессоров В. Н. Подураева и А. В. Щеголева соотношение  $P_Y/P_Z$  зависит от толщины среза.

По данным М. Ф. Пронкина, при обработке твердосплавными протяжками соотношение  $P_Y/P_Z$  колеблется в пределах  $P_Y = (0,3 - 0,55)P_Z$ ; при обработке труднообрабатываемых материалов, тем не менее, усилие  $P_Y$  может достигать размера усилия  $P_Z$ , а в некоторых случаях превышать усилие  $P_Z$ . Так, например, при протягивании сплава ВТЗ при  $a = 0,01$  мм усилие  $P_Z = 6,3$  кГс, а  $P_Y = 10,2$  кГс.

По данным профессора В. Н. Подураева соотношение  $P_Y/P_Z$  в зависимости от толщины среза  $a$  изменяется таким образом:

Таблица 4.5

Изменение соотношения  $P_Y/P_Z$  в зависимости от толщины среза

Толщина среза $a$	0,1	0,2	0,33
$P_Y/P_Z$	0,46	0,39	0,3

Так как отрезные дисковые пилы, главным образом, используются при отрезке конструкционных сталей и делают срезы небольших толщин, то можно принять  $P_Y = (0,6 - 0,8)P_Z$ . Усилие  $P_Z$ , в зависимости от толщины среза  $a$ , на единицу длины режущей кромки при разных толщинах среза определяется примерно, по формуле

$$P_Z = C_p a^{0,85}.$$

Для конструкционных сталей размер  $C_p$  колеблется от 250 до 260 мм. Таким образом, при отрезке дисковыми пилами размеры окружного усилия  $P_o$  и радиального усилия  $P_r$  можно определить по формулам:

$$P_o = C_p a^{0,85} b;$$

$$P_r = (0,6 - 0,8)P_o.$$

Окружные усилия  $P_o$ , действующие на различных зубьях, приво-

дится к крутящему моменту  $M_{кр}$  и усилию  $\bar{Q}_0$ , приложенному к оси пилы (рис. 4.15, б). Крутящий момент будет равен:

$$M_{кр} = R \sum P_{oi},$$

где  $P_{oi}$  — окружные усилия одновременно работающих зубьев. Усилие  $\bar{Q}_0$  будет равно геометрической сумме усилий всех одновременно работающих зубьев:

$$\bar{Q}_0 = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots + \bar{P}_k,$$

где  $k$  — число одновременно работающих зубьев.

Радиальные усилия  $P_r$  приводятся к результирующему усилию  $\bar{Q}_r$ , приложенному к оси пилы. Усилие  $\bar{Q}_r$  будет равно геометрической сумме усилий  $P_r$  (рис. 4.15, в) одновременно работающих зубьев. Общее усилие  $\bar{Q}$  одновременно работающих зубьев (рис. 4.16, а) будет равно

$$\bar{Q} = \bar{Q}_0 + \bar{Q}_r.$$

Усилие  $\bar{P}_0$  и  $\bar{P}_r$  каждого зуба можно разложить на вертикальное и горизонтальное направления (рис. 4.16, б). Усилие  $P_{yi}$ , действующего по оси  $Y$ , будет на каждом режущем зубе равно

$$P_{yi} = -P_{oi} \cos \varepsilon + P_{ri} \sin \varepsilon.$$

Горизонтальное усилие  $P_{xi}$ :

$$P_{xi} = -P_{oi} \sin \varepsilon + P_{ri} \cos \varepsilon.$$

Общее усилие от всех одновременно работающих зубьев будет равно:

$$\bar{P}_x = \sum_{i=1}^k \bar{P}_{xi};$$

$$\bar{P}_y = \sum_{i=1}^k \bar{P}_{yi},$$

где  $k$  — количество одновременно работающих зубьев.

Зная усилия  $\bar{P}_x$  и  $\bar{P}_y$ , общее усилие  $\bar{Q}$ , действующие на оправку пилы (рис. 4.16, в), приравняв их, получим:

$$Q = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}.$$

Так как усилие на каждом зубе зависит от угла поворота пилы  $\eta$ , а количество одновременно режущих зубьев не постоянно, то крутящий момент  $M_{кр}$  и усилия  $\bar{Q}$  будут изменяться при работе пилы. Причем усилие  $\bar{Q}$  будет изменяться как по значению, так и по направлению, что, как известно, влияет на виброустойчивость системы. Направление усилия  $\bar{Q}$  в системе  $XU$  будет характеризоваться углом  $\mu$  (рис. 4.16, в), который определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{P_x}{P_y},$$

где  $\bar{P}_x$  и  $\bar{P}_y$  — суммарные усилия от всех одновременно работающих зубьев.

Общее усилие  $\bar{Q}$  может быть подсчитанным таким образом:

$$\bar{Q} = \frac{\bar{P}_x}{\sin \mu} = \frac{\bar{P}_y}{\cos \mu}.$$

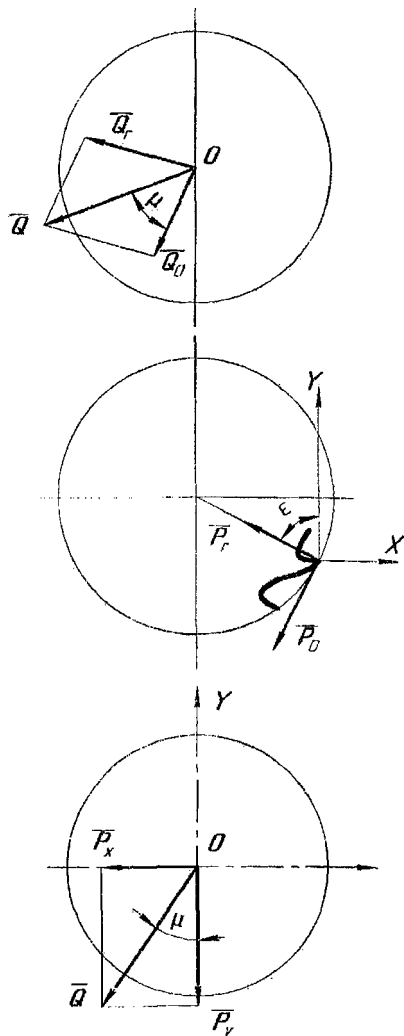


Рис. 4.16. Определение общего усилия, действующего на оправку при отрезке дисковыми пилами

Анализ расчетов силовых характеристик при отрезке дисковыми пилами разнообразных конструкций показывает, что изменения усилий резания, крутящего момента и угла  $\mu$  носят периодический характер при отрезке прямоугольных заготовок, а колебание количества одновременно работающих зубьев в пределах трех и более неблагоприятно сказывается на размере амплитуды колебаний сил резания (амплитуда увеличивается), что, несомненно, неблагоприятно отражается на процессе отрезки.

Таким образом, рассмотрение силовых характеристик процесса отрезки не даст возможности судить однозначно о характере самого процесса. Для полного анализа необходимо воспользоваться методами, применяемыми в теории колебаний, которые позволяют оценивать процесс влияния периодически изменяющихся сил на упругую систему с учетом ее параметров.

## 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И СОБСТВЕННЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ДИСКОВЫХ ПИЛ

### 5.1. Вариационная постановка задачи о собственных колебаниях упругих систем

Одной из важнейших задач при расчете колебаний упругих систем является определение собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний [1]. Аналитическое решение данной проблемы возможно лишь для ограниченного круга задач. Поэтому возникает необходимость численного определения частот и собственных форм колебаний, при этом приходится ограничивать количество определяемых собственных частот и соответствующих им форм колебаний. На практике, как правило, при расчете конструкции или ее элементов, подверженных действию вибрационных нагрузок, необходимо знать до двадцати первых собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний. В целом проблема их нахождения при решении задач о вынужденных колебаниях реальных механических систем весьма трудоемка и требует больших временных затрат, даже при наличии современных ЭВМ. Поэтому задача создания и развития алгоритмов определения собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний упругих систем по-прежнему актуальна.

Дисковые пилы являются сплошными телами.

Из вариационного принципа для нелинейных свободных колебаний следует, что если характеристики движения изменяются периодически с частотой  $\omega$ , то существует функционал

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V L(x, u^k, u_{,i}^k, u_{,i}^k) dV dt,$$

точки стационарности которого соответствуют действительным движениям тела при заданных граничных условиях (например  $u^k = 0$  на  $dV$ ).

Если в качестве промежутка времени взять один период  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , то функционал примет вид

$$\int_{-\frac{\pi V}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \int L(x, u^k, u_{,i}^k, u_{,i}^k) dV dt$$

при условии  $u^k\left(x, -\frac{\pi}{\omega}\right) = u^k\left(x, \frac{\pi}{\omega}\right)$ .

Если сделать замену  $t \rightarrow \Theta$ ,  $\omega t = \Theta$ ,  $-\pi \leq \Theta \leq \pi$ , то получим

$$\int_{-\pi V}^{\pi} \int L(x, u^k, \omega u_{,i}^k, u_{,i}^k) dV d\Theta.$$

Если лагранжиан равен  $L = K - U$ , где  $K \geq 0$  – кинетическая энергия,  $U \geq 0$  – потенциальная энергия и  $K$  – однородная функция второй степени по  $u_{,i}^k$ , то для любого  $\omega > 0$

$$K(x; u^k, \omega u_{,i}^k) = \omega^2 K(x; u^k, u_{,i}^k),$$

причем  $K$  и  $U$  строго выпуклы по совокупности своих аргументов и выполняется условие

$$\int_{-\pi V}^{\pi} \int K(x, u^k, u_{,\Theta}^k) dV d\Theta = A^2,$$

где  $A$  – постоянная, то используя метод неопределенных множителей Лагранжа придём к функционалу

$$I = \int_{-\pi V}^{\pi} \int U dV d\Theta - \lambda \left( \int_{-\pi V}^{\pi} \int K dV d\Theta - A^2 \right),$$

где  $\lambda$  – множитель Лагранжа.



Стационарная точка функционала имеет место при  $\lambda = \omega^2$ .

Если  $q = c \sin(\omega t + \phi)$ , то после интегрирования по времени функционал примет вид

$$I = \int_V \bar{U} dV - \omega^2 \int_V \bar{K} dV,$$

где  $\bar{U}$  и  $\bar{K}$  — квадратичные формы:

$$\bar{U} = B(c, c) = \frac{1}{2} \sum_{S=1}^N \sum_{K=1}^N C_{SK} c_K c_S;$$

$$\bar{K} = K(c, c) = \frac{1}{2} \sum_{S=1}^N \sum_{K=1}^N A_{SK} c_K c_S$$

и являются амплитудами потенциальной и кинетической энергий.

В работе итерационный процесс строится следующим образом:  $\vec{c}^{k+1} = \vec{c}^k + \gamma_i^{k+1} \vec{e}_i$ , где  $\vec{c}^k$  — вектор узловых неизвестных;  $\vec{e}_i$  — единичный вектор в направлении  $\vec{e}_i^k$ ;  $\gamma_i^{k+1}$  — шаг. Функционал в  $k+1$  приближении записывается в виде

$$I^{k+1} = (Bc^{k+1}, c^{k+1}) - (K(\omega_1^{(1)})^2 c^k, c^{k+1}),$$

где  $(\omega^k)^2 = \frac{B(c^k, c^k)}{K(c^k, c^k)}$ , а  $(\omega^k)^2 (Kc^k, e_i) = f_i^k$  — данная величина может быть истолкована как сила инерции, тогда функционал примет вид

$$I^{k+1} = (Bc^k + \gamma_i^{k+1} e_i, c^k + \gamma_i^{k+1} e_i) - [\omega^{(k)}]^2 (Kc^k, c^k + \gamma_i^{k+1} e_i);$$

$$I^{k+1} = (Bc^k, c^k) + 2\gamma_i^{k+1} (Bc^k, e_i) + (\gamma_i^{k+1})^2 (Be_i, e_i) -$$

$$- [\omega^{(k)}]^2 (Kc^k, c^k) - \gamma_i^{k+1} [\omega^{(k)}]^2 (Kc^k, e_i).$$

Приращение функционала на  $k+1$  приближении равно

$$\Delta I^{k+1} = 2\gamma_i^{k+1} (Bc^k, e_i) + (\gamma_i^{k+1})^2 (Be_i, e_i) - \gamma_i^{k+1} [\omega_1^{(k)}]^2 (Kc^k, e_i).$$

Величина шага определяется из условия максимальной скорости уменьшения  $\Delta I^{k+1}$

$$\frac{\partial \Delta I^{k+1}}{\partial \gamma_i^{k+1}} = 0, \quad (5.1)$$

тогда

$$2(Bc^k, e_i) + 2\gamma_i^{k+1}(Be_i, e_i) - [\omega_1^{(k)}]^2 (Kc^k, e_i) = 0.$$

Отсюда величина шага определяется следующим соотношением:

$$\gamma^{k+1} = -\frac{2(Bc^k, e_i) - [\omega_1^{(k)}]^2 (Kc^k, e_i)}{2(Be_i, e_i)}.$$

Таким образом итерационный процесс упрощается и конечная формула для определения шага имеет ту же структуру, что и для статической задачи. Вторая собственная форма колебаний и собственная частота определяются на подпространстве, ортогональном первой собственной форме колебаний. Вектор, ортогональный первой собственной форме колебаний, определяется соотношением

$$\vec{u}^k = \vec{c} - \left[ \sum_{s=1}^N (Kc^k, c^s) \vec{c}^{(s)} \right],$$

где  $\vec{c}^{(1)}$  — нормированный собственный вектор, соответствующий первой собственной частоте. Тогда величина шага при переходе на  $k+1$  приближении запишется

$$\gamma^{k+1} = -\frac{2(Bc^k, e_i) - [\omega_1^{(k)}]^2 (Kc^k, e_i) + [\omega_1^{(k)}]^2 (Kc^l, e_i)(Kc^k, c^{(l)})}{2(Be_i, e_i)}.$$

Аналогично определяется шаг при нахождении высших собственных частот и соответствующих им форм колебаний:

$$\gamma^{k+1} = -\frac{2(Bc^k, e_i) - [\omega_l^{(k)}]^2 (Kc^k, e_i) + \sum_{l=1}^M [\omega_l^{(k)}]^2 (Kc^l, e_i)(Kc^k, c^{(l)})}{2(Be_i, e_i)},$$

где  $[\omega_e]^2$  — квадрат круговой  $l$ -й собственной частоты,  $c^{(l)}$  —  $l$ -я собст-

венная форма колебаний,  $M$  — количество определяемых собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний. Таким образом, решая систему (5.1) и применяя отношение Релея–Ритца определяется необходимое количество собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний.

Для ускорения сходимости итерационного процесса использовался метод неполной релаксации, в котором  $k+1$  — приближение строилось в виде

$$c^{k+1} = c^k + \tau \gamma_i^{k+1} e_i,$$

где  $\tau$  — параметр релаксации. Оптимальный параметр релаксации  $\tau$  выбирается на основании работы [54].

В качестве критерия завершения итерационного процесса использовалось следующее условие:

$$\|\gamma_i^N\| \leq \varepsilon \|\gamma_i^1\|,$$

где  $\varepsilon$  — наперед заданная малая постоянная.

Для реализации предложенного метода были разработаны вычислительные программы определения собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний при продольных, крутильных и изгибных колебаниях стержней, при продольных и изгибных колебаниях пластин, при свободных колебаниях пластинчато-оболочечных конструкций, а также при колебаниях трехмерных тел.

Решение тестовых и практических задач показало, что процесс сходится и позволяет с заданной точностью определить собственные частоты и соответствующие им собственные формы колебаний.

Следует также отметить, что по сравнению с традиционным подходом минимизации отношения Релея–Ритца методом покоординатного спуска для нахождения собственных частот и соответствующих форм колебаний, данный подход позволил в несколько раз уменьшить время решения задач, что весьма существенно при решении реальных задач.

## 5.2. Сходимость схем приближенного решения для задач на собственные значения

Задачи на собственные значения упругих систем можно представить в следующей вариационной форме [8]:

$$\beta_l = \min_{u \in H} I[u] \equiv I[v_l], \quad l = 1, 2, \dots,$$

при условии, что

$$M(u) = 1;$$

$$M(u, v_k) = 0, \quad k = 1, \dots, l-1, l \geq 2,$$

где  $M(u)$  — квадратичный функционал;  $\beta_l$  — квадрат  $l$ -й собственной частоты.

Приближенная задача определения собственных частот записывается в виде

$$\beta_l^h = \min_{u^h \in S} I[u^h] \equiv I[v_l^h], \quad l = 1, 2, \dots, N,$$

при условии, что

$$M(u^h) = 1;$$

$$M(u^h, v_k^h) = 0, \quad k = 1, \dots, l-1, l \geq 2,$$

причем  $S \subset M_L$ .

Для доказательства сходимости введем оператор проектирования  $B$  такой, что  $Bu \in S$ , если  $u \in M_L$ , где  $Bu$  — составляющая вектор-функции  $u$  в пространстве  $S \subset M_L$  относительно энергетического скалярного произведения  $I(u, v)$ ;

$$I(u - Bu, v^h) = 0, \quad \forall v^h \in S.$$

Известно, что

$$I(u - Bu) = \min_{v^h \in S} I(u - v^h).$$

Действительно, пусть  $v^h = Bu + v^h$ , тогда

$$I(u - Bu - v^h) = I(u - Bu) + I(w^h) - 2I(\bar{u} - P\bar{u}, v^h) \geq I(u - Pu)$$

и равенство возможно лишь при  $w^h \equiv 0$ .

Через  $u_l \in S$  обозначим интерполянт для  $u_l \in M$ ; значения узловых параметров для  $u$  и  $u_l$  совпадают. Тогда

$$I(u - Bu) \leq I(u - u_l) \leq D_1 \|u - u_l\|_H^2,$$

где  $\|v\|_M$  — норма в пространстве  $M(\Omega)$ .

Последнее неравенство, как известно, выполняется для всех операторов, рассмотренных выше.

Так как должно выполняться соотношение

$$D_1 \|u\|_M^2 \geq I(u) \geq \gamma_1 \|u\|_H^2, K_1, \gamma_1 > 0,$$

то

$$\|u - Bu\|_M^2 \leq \frac{1}{\gamma_1} I(u - Bu) \leq \frac{D_1}{\gamma_1} \|u - u_l\|_M^2.$$

Оценки же  $\|u - u_l\|_M$  для различных пространств МКЭ известны и имеют вид

$$\|u - u_l\|_M^2 \leq C_1 h^{2(k-m+1)}, C_1 > 0,$$

если  $u \in W_2^{k+1}(\Omega)$ , где  $k$  — степень пространства, аппроксимирующего исходное пространство  $M_L$ ;  $m$  — порядок дифференциального оператора.

Таким образом,

$$I(u - Bu) \leq C_2 h^{2(k-m+1)}, \|u - Bu\|_M \leq C_3 h^{2(k-m+1)}, C_2, C_3 > 0. \quad (5.2)$$

Известно также, что для рассмотренных выше операторов справедлива оценка

$$\|u - Pu\|_0 \leq C_4 h^{k+1}, C_4 > 0,$$

где  $\|v\|_0 = \int_{\Omega} v^2 d\Omega$ .

Для рассмотренных здесь задач на собственные значения можно записать принцип минимакса:

$$\beta_l^h = \min_{S_l \subset S} \left\{ \max_{u^h \in S_l} P(u^h) \right\}, l = 1, 2, \dots, N,$$

$$\beta_l = \min_{S_l \subset S} \left\{ \max_{u \in H} P(u^h) \right\}, l = 1, 2, \dots, \quad (5.3)$$

( $P[u] = I(u) / M(u)$ ). Отсюда следует  $\beta_l \leq \beta_l^h$ .

Для получения оценки сверху введем подпространство  $V_l \in H$ , натянутое на собственные функции  $v_1, v_2, \dots, v_l$  исходной задачи. Через  $K_l = Bv_l$  обозначим подпространство в  $S$ , натянутое на  $Bv_1, Bv_2, \dots, Bv_l$ , и возьмем его в качестве  $S_l$  в (5.3). Введем также множество  $\tau_l$ , единичных элементов в  $K_l$  и примем

$$\tau_l^h = \max |2M(u, u - Bu) - M(u - Bu)|. \quad (5.4)$$

Можно показать [70], что

$$\beta_l^h \leq \frac{\beta_l}{1 - \tau_l^h}, \text{ если } \tau_l^h < 1; \quad (5.5)$$

$$M(u, u - Bu) = \sum_{i=1}^l \frac{C_i}{\beta_i} I(v_i - Bv_i, u - Bu),$$

если  $u \in Z_l$  и  $u_h = \sum_{i=1}^l C_i v_i$ .

Оценим теперь  $\tau_l^h$ , исходя из (5.4). Так как

$$2|M(u, u - Bu)| = 2 \left| \sum_{i=1}^l \frac{C_i}{\beta_i} I(v_i - Bv_i, u - Pu) \right| \leq 2K_1 \|w_l - Pw_l\|_M \|u - Pu\|_M,$$

где  $\left( v_l = \sum_{i=1}^l \frac{C_i}{\beta_i} v_i \mid I(u, v) \leq D_1 \|u\|_M \|v\|_M \right)$

то из (5.2) имеем

$$2|M(u, u - Pu)| \leq C_5 h^{2(k-m+1)}, \quad C_5 > 0,$$

если

$$v_i \in W_2^{k+1}(\Omega), \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Второй член в  $\tau_l^h$  оцениваем так:

$$M(u - Pu) \leq D_1 \|u - Bu\|_0^2 \leq C_6 h^{2k+2}, \quad C_6 > 0, \quad u \in Z_l,$$

т. е. имеет более высокий порядок относительно  $h$ , чем  $M(u, u - Bu)$ .

Поэтому можно записать:

$$\tau_l^h \leq C_7 h^{2(k-m+1)}, \quad C_7 > 0.$$

При достаточно малом значении  $h$  имеем  $\tau_l^h \leq \frac{1}{2}$ , тогда из (5.5) получаем оценку для  $\beta_l^h$  сверху:

$$\beta_l^h \leq \frac{\beta_l}{1 - \tau_l^h} \leq \beta_l (1 + 2\tau_l^h) \leq \beta_l + C_8 h^{2(k-m+1)}, \quad C_8 > 0.$$

Таким образом,

$$\beta_l \leq \beta_l^h \leq \beta_l + C_8 h^{2(k-m+1)}, \quad l \leq l < N,$$

если собственные функции задачи  $v_l \in W_2^{k+1}(\Omega)$ .

### 5.3. Определение собственных частот и собственных форм колебаний при продольных колебаниях дисковых пил в своей плоскости

В тех случаях, когда происходит плоская деформация или плоское напряженное состояние, дисковая пила совершает колебания в своей плоскости.

Выражения для потенциальной и кинетической энергий в данном случае имеют вид

$$U = \frac{Et}{2(1-\mu^2)} \int_{\Omega} \left[ (u_{,x})^2 + (v_{,y})^2 + 2\mu u_{,x} v_{,y} + \frac{1-\mu}{2} (u_{,y} + v_{,x})^2 \right] dx dy;$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{\gamma t}{g} \int_{\Omega} \left[ (u_{,t})^2 + (v_{,t})^2 \right] dx dy,$$

где  $u, v$  — перемещения вдоль координатных осей  $x, y$ ;  $E$  — модуль Юнга,  $t$  — толщина,  $\gamma$  — плотность материала.

Произведем триангуляцию срединной поверхности пилы.

Примем линейную зависимость распределения от  $x, y$  и зададим аппроксимирующие функции перемещений в виде линейных полиномов

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & x_1 & y_1 \\ u_2 & x_2 & y_2 \\ u_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_1 & y_1 \\ 1 & u_2 & y_2 \\ 1 & u_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad \alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & u_3 \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad (5.7)$$

$$\Delta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

$\Delta$  — удвоенная площадь треугольника 1-2-3;  $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$  — определяются аналогично.

Подставив (5.7) в (5.6) получим выражения для аппроксимации перемещений:

$$u(x, y) = d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3,$$

где

$$d_1 = (a_1 + b_1 x + c_1 y); \quad d_2 = (a_2 + b_2 x + c_2 y); \quad d_3 = (a_3 + b_3 x + c_3 y);$$



$$a_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}; b_1 = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix}; c_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix};$$

значения  $a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$  определяются с помощью циклической перестановки индексов узлов.

Функция  $v(x, y)$  зависит от перемещений  $v_1, v_2, v_3$  аналогично, что следует из характера аппроксимации функций:

$$v(x, y) = d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3. \quad (5.7)$$

Тогда потенциальная и кинетическая энергии с учетом (5.6) и (5.7) примут вид

$$U_h = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M D^{11} \left[ B_u^1 + C_u^1 + 2\mu B_u C_u + \frac{1-\mu}{2} (B_v + C_u) \right], \quad (5.8)$$

$$\text{где } D^{11} = \frac{Et}{4(1-\mu^2)}:$$

$$\begin{aligned} B_{,u} &= b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k; \\ C_{,v} &= c_i v_i + c_j v_j + c_k v_k; \\ B_{,v} &= b_i v_i + b_j v_j + b_k v_k; \\ C_{,u} &= c_i u_i + c_j u_j + c_k u_k; \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} T_h &= \frac{1}{12} \frac{\gamma t}{g} \sum_{m=1}^M \{ \Delta (u_i^2 + u_j^2 + u_k^2 + u_i u_j + u_i u_k + u_j u_k + v_i^2 + v_j^2 + v_k^2 + \\ &+ v_i v_j + v_i v_k + v_j v_k) \}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где  $M$  — количество треугольников, с  $i$ -м узлом, т. е. суммирование в (5.9), (5.10) осуществляется по треугольникам, окружающим  $i$ -й узел.

## 5.4. Определение собственных частот и собственных форм при свободных изгибных колебаниях дисковых пил

При выводе уравнений потенциальной и кинетической энергий считается, что справедливы гипотезы Кирхгофа–Лява: (гипотеза прямых нормалей; реализуется линейно изменяющееся по толщине обобщенное плоское линейное состояние, кроме того, считаем, что задача физически и геометрически линейная).

Пусть срединная поверхность пилы расположена в плоскости  $OXY$ , сдвигом и инерцией поворота при изгибных колебаниях пренебрегаем. С учетом изложенного, потенциальная и кинетическая энергии имеют вид

$$U = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} D \left\{ (w_{,xx} + w_{,yy})^2 + 2(1-\mu) \left[ (w_{,xy})^2 - w_{,xx} w_{,yy} \right] \right\} dx dy;$$

$$T = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{\gamma t}{g} \dot{w}^2 dx dy,$$

где  $D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$  – цилиндрическая жесткость пластины;  $E$  – модуль Юнга;  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $t$  – толщина пластины;  $\gamma$  – плотность материала;  $g$  – ускорение свободного падения.

Произведем триангуляцию срединной поверхности  $\Omega$  на конечное количество треугольников  $\Omega_n \bigcup_n \Omega$ . Вершины каждого треугольника

обозначим  $i, j, k$  и произведем их нумерацию против часовой стрелки.

Аппроксимацию прогиба в пределах каждого треугольника зададим в виде неполного кубического полинома:

$$w_h = w_i L_i + w_j L_j + w_k L_k + c_1 L_i^2 L_j + c_2 L_i^2 L_k + c_3 L_j^2 L_i + c_4 L_j^2 L_k + + c_5 L_k^2 L_i + c_6 L_k^2 L_j + 2c_7 L_i L_j L_k.$$

В формуле использованы известные  $L$  координаты [41] и

$$c_1 = w_i - w_j - d_k \varphi_i - a_k \psi_i;$$

$$c_2 = w_i - w_k - d_j \varphi_j - a_j \psi_i;$$

$$c_3 = w_i - w_j - d_k \varphi_j - a_k \psi_j;$$

$$c_4 = w_j - w_k - d_i \varphi_j - a_i \psi_j;$$

$$c_5 = w_k - w_i - d_j \varphi_k - a_j \psi_k;$$

$$c_6 = w_i - w_j - d_i \varphi_k - a_i \psi_k;$$

$$c_7 = \frac{1}{4} \sum_{s=1}^6 c_s,$$

где  $\varphi_i = (w_{i,y})$ ,  $\psi_i = (w_{i,x})$  — углы поворота относительно осей  $OX$  и  $OY$  в  $i$ -м узле.

Коэффициенты  $d_i$  и  $c_i$  соответственно равны:

$$d_i = y_i - y_k; \quad c_i = x_k - x_j.$$

Остальные коэффициенты  $d_j$ ,  $d_k$ ,  $c_j$ ,  $c_k$  определяются с помощью циклической перестановки индексов.

Таким образом, потенциальная энергия имеет вид:

$$U_h = \sum_{m=1}^M \frac{K}{\Delta^3} \left\{ D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_1 D_2 + D_2 D_3 + D_1 D_3 + P_1^2 + \right. \\ \left. + P_2^2 + P_3^2 + P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_1 P_3 + \mu \left[ D_1 (2P_1 + P_2 + P_3) + \right. \right. \\ \left. + D_2 (2P_2 + P_1 + P_3) + D_3 (2P_3 + P_1 + P_2) \right] + 2(1-\mu) \left( N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 + \right. \\ \left. + N_1 N_2 + N_2 N_3 + N_1 N_3 \right) \Big\},$$

где  $K = \frac{Et^3}{576(1-\mu^2)}$ ;  $\Delta$  — площадь треугольника.

$$D_1 = d_j^2 w_k + d_k^2 c_2 + 2(d_i d_j w_i + d_j d_k c_1 + d_i d_k w_j);$$

$$D_2 = d_i^2 w_i + d_k^2 c_3 + 2(d_i d_j w_k + d_j d_k c_1 + d_i d_k c_4);$$

$$D_3 = d_i^2 w_j + d_j^2 C_1 + 2(d_i d_j C_4 + d_j d_k C_3 + d_i d_k C_3);$$

$$P_1 = a_i^2 w_k + a_k^2 c_2 + 2(a_i a_j w_i + a_j a_k c_1 + a_i a_k w_j);$$

$$P_2 = a_i^2 w_i + a_k^2 c_3 + 2(a_i a_j w_k + a_j a_k c_1 + a_i a_k c_4);$$

$$P_3 = a_i^2 w_j + a_j^2 c_1 + 2(a_i a_j c_4 + a_j a_k c_3 + a_i a_k c_3);$$

$$N_1 = d_j a_j w_k + d_k a_k c_2 + (d_i a_j + d_j a_i) w_i + (d_j a_k + d_k a_j) c_4 + (d_k a_i + d_i a_k) w_j;$$

$$N_2 = d_i a_i w_i + d_k a_k c_3 + (d_i a_j + d_j a_i) w_k + (d_j a_k + d_k a_j) c_1 + (d_k a_i + d_i a_k) c_4;$$

$$N_3 = d_i a_i w_j + d_j a_j c_1 + (d_i a_j + d_j a_i) c_4 + (d_j a_k + d_k a_j) c_3 + (d_k a_i + d_i a_k) c_2.$$

Кинетическая энергия соответственно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} T_h = G \sum_{m=1}^M & \left[ w_i (w_i + w_j) + w_j (w_j + w_k) + w_k (w_k + w_i) + \frac{1}{70} (w_i^2 + w_j^2 + \right. \\ & + w_k^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + \left( \frac{1}{5} w_i^2 + \frac{1}{5} w_i w_j + \frac{2}{15} w_i w_k + \frac{1}{5} w_i c_1 + \right. \\ & + \frac{2}{15} w_i c_2 + \frac{1}{15} w_i c_3 + \frac{2}{15} w_i c_4 \Big) + \left( \frac{1}{5} w_k w_i + \frac{2}{15} w_j w_k + \frac{1}{15} w_k^2 + \right. \\ & + \frac{2}{15} c_1 + \frac{1}{5} w_k c_2 + \frac{1}{5} w_k c_3 + \frac{2}{15} w_k c_4 \Big) + w_i \left( \frac{1}{70} w_j + \frac{3}{140} w_k + \frac{1}{140} c_1 + \right. \\ & + \frac{1}{140} c_2 + \frac{1}{210} c_3 + \frac{3}{140} c_4 \Big) + w_j \left( \frac{1}{140} w_k + \frac{1}{210} c_1 + \frac{3}{140} c_2 + \right. \\ & + \frac{1}{140} c_3 + \frac{1}{70} c_4 \Big) + w_k \left( \frac{1}{70} c_1 + \frac{1}{210} c_2 + \frac{1}{140} c_3 + \frac{1}{70} c_4 \Big) + \\ & \left. + c_1 \left( \frac{1}{140} c_2 + \frac{3}{140} c_3 + \frac{1}{70} c_4 \right) + \frac{1}{70} c_2 (c_3 + c_4) + \frac{1}{70} c_2 c_3 c_4 \right], \end{aligned}$$

$$\text{где } G = \frac{\gamma t}{12g}.$$

Первые и вторые производные от потенциальной и кинетической энергий приведены в работе [1].

## 6. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

### 6.1. Вынужденные гармонические колебания недиссипативных систем

Уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$A\ddot{q} + Cq = F_0 \cos \omega t, \quad (6.1)$$

где  $q$  – вектор обобщенных координат;  $A$  и  $C$  – матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов;  $F_0$  – вектор амплитуд внешних вынуждающих сил.

Представляя вектор обобщенных координат в виде  $q = q_0 \cos \omega t$  и подставив его в (6.1), получим:

$$(C - \omega^2 A)q_0 = F_0. \quad (6.2)$$

Представим  $q_0$  в виде:

$$q_0 = V\wp, \quad (6.3)$$

где  $V$  – матрица, составленная по столбцам из собственных форм колебаний;  $\wp$  – матрица-столбец искомых координат.

Введение таких координат с математической точки зрения заключается в преобразовании, которое приводит одновременно к главным осям матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов. В результате происходит расчленение исходной системы на отдельные, независимые друг от друга уравнения.

Подставив (6.3) в (6.2) и умножив на  $V^T$ , получим:

$$V^T C V \wp - \omega^2 V^T A V \wp = V^T F_0. \quad (6.4)$$

В силу того, что собственные векторы нормированы относительно кинетической энергии,

$$V^T A V = E; \quad V^T C V = \omega^2 \beta, \quad (6.5)$$

где  $E$  – единичная матрица;  $\beta$  – диагональная матрица квадратов собственных частот.

Тогда с учетом (6.5) получим выражение для (6.4):

$$\beta_i \varphi_i - \omega^2 \varphi_i = V_i^T F_0; \quad i = 1, \dots, N.$$

Отсюда 
$$\varphi_i = \frac{V_i^T F_0}{(\beta_i)^2 - \omega^2}.$$

## 6.2. Вынужденные гармонические колебания диссипативных систем с конечным числом степеней свободы

Уравнение движения диссипативной системы с конечным числом степеней свободы под действием гармонических сил записывается в виде [5]

$$A\ddot{q} + D\dot{q} + Cq = F_0 \cos \omega t,$$

где  $A$  – матрица инерции;  $C$  – матрица жесткости;  $D$  – матрица коэффициентов демпфирования, которая может рассматриваться как симметричная.

Системы с конечным числом степеней свободы разделяют на системы с полной и неполной диссипацией. Для систем с полной диссипацией амплитуды при резонансных колебаниях становятся конечными, исчезают антирезонансы. В системе с неполной диссипацией возможны случаи бесконечных значений амплитуд при определенных собственных частотах.

Рассмотрим систему с конечным числом степеней свободы при наличии вязкого трения. В этом случае матрица коэффициентов демпфирования пропорциональна матрице квазиупругих коэффициентов:

$$D = \eta C, \tag{6.6}$$

где  $\eta$  – коэффициент, определяемый из соотношения  $\lambda_i = \eta \omega_i$  ( $\lambda_i$  – логарифмический декремент главных колебаний с частотой  $\omega_i$ ).

Тогда с учетом (6.6) уравнение движения с учетом вязкого трения системы с  $N$  — степенями свободы запишется

$$A\ddot{q} + \eta C\dot{q} + Cq = F_0 \cos \omega t. \quad (6.7)$$

Введем преобразование

$$q = f_1 \cos \omega t + f_2 \sin \omega t. \quad (6.8)$$

Подставив (6.8) в уравнение (6.8) получим:

$$\begin{aligned} -\omega^2 A f_1 \cos \omega t - \omega^2 A f_2 \sin \omega t - \omega \eta C f_1 \sin \omega t + -\omega C \eta f_2 \cos \omega t + \\ + C f_1 \cos \omega t + C f_2 \sin \omega t = F_0 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Собрав выражения при  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$ , получим систему, состоящую из двух уравнений:

$$\begin{cases} -\omega^2 A f_1 + \omega \eta C f_2 + C f_1 = F_0 \\ -\omega \eta C f_1 - \omega^2 A f_2 + C f_2 = 0 \end{cases}. \quad (6.9)$$

Введем следующее преобразование:

$$f_1 = V \varphi_1; \quad f_2 = V \varphi_2, \quad (6.10)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  — искомые координаты.

Подставив выражение (6.10) в систему уравнений (6.9) и умножив на  $V^T$ , получим следующее соотношение:

$$\begin{cases} -\omega^2 E \varphi_1 + \omega \eta \beta \varphi_2 + \beta \varphi_1 = V^T F_0 \\ -\omega^2 E \varphi_2 + \omega \eta \beta \varphi_1 + \beta \varphi_2 = 0 \end{cases}. \quad (6.11)$$

Решая систему (6.11) относительно искомых координат, получим:

$$\varphi_1^i = \frac{V_i^T F_0}{\beta_i - \omega^2 + \omega^2 \eta \beta_i / (\beta_i - \omega^2)};$$

$$\varphi_2^i = \frac{\omega \eta \beta_i V_i^T F_0}{(\beta_i - \omega^2) [\beta_i - \omega^2 + \omega^2 \eta \beta_i / (\beta_i - \omega^2)]}.$$

Тогда  $q_i = f_1^i + f_2^i$ .

### 6.3. Колебания недиссипативных систем с конечным числом степеней свободы при кинематическом возбуждении

Рассмотрим случай кинематического возбуждения [62], когда всем точкам системы с конечным числом степеней свободы сообщается одинаковое переносное движение, например по гармоническому закону:

$$q^e = B \cos \omega t, \quad (6.12)$$

где  $q^e$  – вектор обобщенных координат переносного движения;  $B$  – вектор амплитуд переносного движения;  $\omega$  – частота переносного движения.

Тогда относительно системы координат, движущейся по заданному закону, точки упругой конечномерной системы совершают колебания  $q^r$ . За счет относительного движения возникают восстанавливающие силы  $Cq^r$  ( $C$  – матрица коэффициентов жесткости), а за счет абсолютного движения

$$q = q^e + q^r \quad (6.13)$$

возникают силы инерции  $A\ddot{q}$  ( $A$  – матрица коэффициентов инерции).

Сначала рассмотрим колебания без учета рассеяния энергии. Используя матричное уравнение метода перемещений и подставляя в него выражение для сил инерции, получаем

$$A\ddot{q} + Cq^r = 0. \quad (6.14)$$

Уравнение (6.14) с учетом уравнений (6.13) и (6.12) приводит к уравнению колебаний системы соответственно в относительной и абсолютной системах отсчета:

$$A\ddot{q}^r + Cq^r = AB\omega^2 \cos \omega t. \quad (6.15)$$

В результате рассматриваемое кинематическое возбуждение упругой системы приводит к вынужденным колебаниям, где вынуждающей силой является сила инерции переносного движения.



Введем преобразование  $q^r = q_0^r \cos \omega t$ , тогда уравнение (6.15) запишется в виде

$$-\omega^2 A q_0^r + C q_0^r = \omega^2 AB. \quad (6.16)$$

Приведем систему уравнений (6.16) к каноническому (диагональному) виду

По методу главных координат

$$q_0^r = V \wp, \quad (6.17)$$

где  $V$  — матрица, составленная из столбцов ранее найденных форм собственных колебаний;  $\wp$  — матрица-столбец искомых координат. Подставив (6.17) в (6.16) и умножив на  $V^T$ , получим:

$$-\omega^2 V^T A V \wp + V^T C V \wp = V^T A B \omega^2. \quad (6.18)$$

Так как собственные векторы нормированы относительно кинетической энергии, то

$$V^T A V = E; \quad V^T C V = \beta,$$

где  $E$  — единичная матрица;  $\beta$  — диагональная матрица квадратов собственных частот.

Тогда уравнение (6.18) принимает вид относительно главной  $i$ -й координаты:

$$\beta_i \wp_i - \omega^2 \wp_i = \omega^2 V_i^T A B; \quad i = 1 \dots M.$$

Отсюда получаем выражение для главных координат:

$$\wp_i = \frac{\omega^2 V_i^T A B}{\beta_i - \omega^2}, \quad (6.19)$$

тогда

$$q_i^r = V_i \frac{\omega^2 V_i^T A B}{\beta_i - \omega^2} \cos \omega t, \quad (6.20)$$

где  $\beta_i$  — квадрат собственной  $i$ -й частоты.

Рассмотрим случай вязкого внутреннего трения в системе с  $N$  степенями свободы при кинематическом возбуждении.

Уравнение, описывающее колебания, в этом случае принимает вид

$$A\ddot{q}^r + C\eta\dot{q}^r + Cq^r = \omega^2 AB \cos \omega t.$$

Введем замену:

$$q^r = q_0^r \cos(\omega t - \varphi) = q_0 \cos \varphi \cos \omega t - q_0 \sin \varphi \sin \omega t.$$

Обозначим

$$D^{(1)} = q_0 \cos \varphi; D^{(2)} = q_0 \sin \omega t. \quad (6.21)$$

Тогда

$$q^r = D^{(1)} \cos \omega t + D^{(2)} \sin \omega t \quad (6.22)$$

Подставив (6.21) в (6.20) и собрав выражения при  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$ , получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} -\omega^2 AD^{(1)} + \omega b_1 CD^{(2)} + CD^{(1)} = \omega^2 AB \\ -\omega^2 AD^{(2)} - \omega b_1 CD^{(1)} + CD^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (6.23)$$

По методу главных координат введем замену:

$$D^{(1)} = V^{(2)} \wp; D^{(2)} = V^{(2)} \wp. \quad (6.24)$$

С учетом (6.23) система уравнений (6.22) принимает вид

$$\begin{cases} -\omega^2 E \wp_1 + \omega 2\beta \wp_2 + \beta \wp_1 = \omega^2 V^T AB \\ -\omega^2 E \wp_2 + \omega 2\beta \wp_1 + \beta \wp_1 = 0 \end{cases}$$

Из системы уравнений (6.24) получим выражение для искомых координат  $\wp_i^{(1)}$  и  $\wp_i^{(2)}$ :

$$\wp_1^{(i)} = \frac{\omega^2 V^T AB}{\beta - \omega^2 + \frac{\omega^2 \eta \beta_i^2}{\beta_i - \omega^2}}; \wp_2^{(i)} = \frac{\omega^2 \eta \beta_i}{\beta_i - \omega^2} \cdot \frac{\omega^2 V_i^T AB}{\beta_i - \omega^2 + \frac{\omega^2 \eta \beta_i}{\beta_i - \omega^2}}. \quad (6.25)$$

Тогда

$$q_i^r = D_i^{(1)} \cos \omega t + D_i^{(2)} \sin \omega t.$$

Из анализа формулы (6.19) следует, что при гармоническом кинематическом возбуждении устанавливаются колебания системы с частотой кинематического возбуждения по форме колебаний, которая изменяется в зависимости от частоты. При  $\beta_i = \omega^2$  возникает резонанс  $i$ -го порядка (резонанс на  $i$ -й собственной частоте).

В случае кинематического возбуждения с учетом вязкого внутреннего трения, как видно из (6.25), при резонансе нет неограниченного роста амплитуды колебаний.

#### **6.4. Кинематическое возбуждение поперечных колебаний дисковой пилы**

Отрезные пилы являются инструментом, работающим в наиболее сложных, с точки зрения динамического состояния в процессе отрезки заготовок, условиях.

Дисковые пилы, как правило, выполняются с постоянным шагом. Вместе с тем, применение неравномерного шага в различных инструментах, например в развертках, дает положительный эффект.

Процесс отрезки дисковой пилой, как и любой другой процесс резания, сопровождается рядом физико-механических и химических явлений, среди которых динамические явления, характеризующиеся уровнем вибраций и шума, зачастую являются определяющими. Наряду с этим известно, что при некоторых условиях процесса резания полезно использовать вибрации инструмента определенной частоты.

Однако физическая природа влияния колебаний на характер процесса резания, износ и стойкость инструмента в полной мере не выяснены. Это не позволяет определить области эффективного использования виброрезания и пути гашения вредных вибраций.

В процессе резания дисковой пилой возникают внешние периодические возмущающие силы вследствие удара зубьев пилы в моменты начала и окончания процесса резания каждого зуба [2, 4]. Поэтому первичной проблемой является исследование вынужденных колебаний дисковой пилы. Задача касательно вынужденных колебаний может быть решена путем разложения по собственным формам колебаний [5]. Таким образом, приходим вначале к необходимости определения собственных частот и собственных форм колебаний дисковой пилы.

При исследовании динамических характеристик дисковых пил аналитические методы расчета оказываются малоэффективными и поэтому необходимо использовать численные методы.

Найденные собственные частоты (до 20) и собственные формы изгибных колебаний дисковых пил используются при решении задачи о вынужденных колебаниях дисковых пил.

Известно, что в результате погрешности сборки системы «станок-пила-заготовка» и деформирования этой системы наблюдаются смещение и поворот пилы относительно срединной плоскости пилы. Это приводит к изгибу пилы в результате контакта ее боковой поверхности с поверхностью реза.

Благодаря поднутрению пилы этот контакт осуществляется по внешнему ободу, но внешний обод фактически состоит из вершин зубьев, поэтому рассматриваемое взаимодействие выражается в периодическом процессе изгибания пилы в результате ее вращения. Это периодическое взаимодействие фактически является кинематическим возбуждением поперечных колебаний пилы.

Рассматривая модель кинематического возбуждения изгибных колебаний пилы с учетом сил инерции абсолютного перемещения  $w$  и сил упругости относительного перемещения  $w^r$ , можно записать уравнение изгибных колебаний:

$$D\Delta\Delta w^r + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (6.26)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – цилиндрическая жесткость;  $h$  – толщина пины;  $\nu$  –

коэффициент Пуассона;  $\rho$  – удельная плотность;  $w$  – абсолютное перемещение;  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Абсолютное перемещение, перпендикулярное плоскости пины, можно представить в виде суммы переносного и относительного перемещения. Переносным движением в рассматриваемой задаче является смещение плоскости пины относительно реза, а относительным – изгибные колебания:

$$w = w^e + w^r, \quad (6.27)$$

где  $w^e$  – переносное перемещение;  $w^r$  – относительное перемещение.

Тогда с учетом (6.27) уравнение (6.26) запишется так:

$$\Delta\Delta w^r + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (w^r + w^e) = 0, \quad (6.28)$$

так как переносное движение  $w^e$  учитывается только в инерционном операторе. Уравнение (6.28), таким образом, сводится к уравнению вынужденных колебаний дисковой пины:

$$\Delta\Delta w^r + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w^r = -\frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w^e}{\partial t^2}.$$

Поскольку переносное перемещение является периодическим, т. к. оно есть результат взаимного смещения плоскости пины относительно реза и плоскости ее вращения, оно может быть разложено в двойной ряд Фурье – по времени и по собственным формам:

$$w^e = \sum_i \sum_j (C_{ij} W_i \cos p_j t + D_{ij} W_i \sin p_j t),$$

где  $C_{ij}$ ,  $D_{ij}$  – амплитуды гармоник переносного движения;  $W_i$  – собственная форма колебаний дисковой пины.

После подстановки ряда в уравнение изгибных колебаний приходим к следующему виду уравнения:

$$\Delta \Delta w^r + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w^r}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w^e}{\partial t^2} \sum_i \sum_j p_i^2 W_i (C_{ij} \cos p_j t + D_{ij} \sin p_j t),$$

которое можно рассматривать как уравнение вынужденных колебаний.

Поскольку полученное уравнение линейное, то достаточно рассмотреть частное решение, которое наблюдается при действии одной гармоники возбуждающих сил:

$$\Delta \Delta w^r + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w^r}{\partial t^2} = \frac{\rho h}{D} p_i^2 W_i C_{ij} \cos p_j t,$$

где  $C_{ij}$  — амплитуда  $j$ -й гармоники возмущающей силы;  $p_j$  — ее круговая частота.

Общее решение может быть получено как сумма частных. Рассмотрим решение задачи о свободных колебаниях пины:

$$\Delta \Delta w^r + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w^r}{\partial t^2} = 0.$$

Его частное решение имеет вид

$$w^r = W^r(\rho, \varphi) \cos \omega t,$$

где  $W_i(\rho, \varphi)$  — собственные формы колебаний, найденные раньше;  $\omega$  — собственные круговые частоты дисковой фрезы.

Собственные формы удовлетворяют уравнению

$$\Delta \Delta w_i^r(\rho, \varphi) - k^4 w_i^r(\rho, \varphi) = 0, \quad (6.29)$$

где  $k^4 = \frac{\rho h}{D} \omega^2$ .

Частное решение уравнения о вынужденных колебаниях пины с частотой возмущающей силы определяется в виде

$$w_i^r(\rho, \varphi, t) = B_{ij} W_i(\rho, \varphi) \cos p_i t,$$

где  $B_{ij}$  — амплитуда вынужденных колебаний.

Используя уравнение (6.29), получаем:

$$B_{ij} \left( \Delta \Delta W_i^r - \frac{\rho h \omega_i^2}{D} W_i^r \right) = \frac{\rho h}{D} p_i^2 W_i^r C_{ij}.$$

$$\text{Учитывая, что } \Delta \Delta W^r = \frac{\rho h \omega_i^2}{D} W^r,$$

получим:

$$B_{ij} (\omega_i^2 - p_i^2) = C_{ij} p_i^2,$$

или

$$B_{ij} = \frac{C_{ij} p_i^2}{(\omega_i^2 - p_i^2)}, \quad (6.30)$$

откуда следует, что в качестве оценки параметра критерия колебаний пилы можно использовать амплитуду вынужденных колебаний, которая определяется правой частью уравнения (6.30). Данный параметр может быть использован в качестве сравнительной характеристики динамического состояния дисковой пилы в процессе отрезки. С этой целью были определены амплитуды и частоты возмущающих сил, а также собственные частоты и собственные формы колебаний пилы.

При определении амплитуд и частот возмущающих сил было использовано допущение, что вынуждающие силы, изгибающие пилу, пропорциональны силам резания, действующим в плоскости пилы. Предполагалось, что сила, действующая на зуб, постоянна и условно принята за единицу, а общее усилие пропорционально количеству режущих зубьев. При этих допущениях задача сводилась к нахождению этого условного усилия резания за один период, который равен времени прохода через ряд одной группы зубьев. Полученная таким образом

ступенчатая функция, зависящая от времени, раскладывалась в ряд Фурье. Это разложение позволяет определить частоты гармоник и амплитуды гармоник возмущающих сил.

После определения собственных частот и форм дисковой пилы возмущающая сила, которая по предположению приложена к режущим зубьям, раскладывалась в ряд Фурье по собственным формам. В разложении сохранялось 20 членов ряда. Этим полностью определялись амплитуды гармоник возмущающих сил.

## 6.5. Влияние угла наклона зубьев на динамические характеристики фрезы

При исследовании динамических характеристик фрезы предполагается, что колебания являются вынужденными и вызываются ударами зубьев при врезании и выходе из реза [4], а сила резания пропорциональна количеству режущих зубьев. Рассматривается установившийся процесс резания. В процессе резания фреза вращается с угловой скоростью  $p$ , а пластина движется поступательно. Колебания фрезы удобнее рассматривать в системе координат, неподвижной относительно фрезы, поэтому переходим к системе координат, связанной с фрезой. В этой системе координат сила, действующая на фрезу, перемещается по окружности с угловой скоростью  $p$ . Уравнение колебаний фрезы имеет вид

$$D\nabla^4 w(\rho, \varphi, t) = -\gamma h \ddot{w}(\rho, \varphi, t) + q(\rho, \varphi, t), \quad (6.31)$$

где  $\nabla^2$  — оператор Лапласа. Решение уравнения (6.31) может быть представлено в виде ряда Фурье по собственным функциям однородного уравнения, т. е. при условии  $q(\rho, \varphi, t) = 0$ . Если искать решение однородного уравнения в виде  $w(\rho, \varphi, t) = W(\rho, \varphi) \cos \omega t$ , то задача сводится к определению собственных форм:

$$\nabla^4 W(\rho, \varphi) - k^4 W(\rho, \varphi) = 0, \quad (6.32)$$

где  $k^4 = \gamma h \omega^2 / D$ .



Решение этого уравнения можно представить в виде  $W_n(\rho, \varphi) = W_n(\rho) \cos n\varphi$ . Собственные числа определяются из граничных условий на внешнем (свободном) и внутреннем (защемленном) контуре. Спектр собственных частот находим по характеристическим числам  $\omega_{mn}^2 = (Dk_{mn}^4)/(\gamma h)$ .

Задача определения собственных форм и собственных частот может быть решена и другими методами.

Общее решение представим в виде суммы решений, соответствующих характеристическим числам краевой задачи (6.32). В рассматриваемом случае вынужденных колебаний возмущающая сила  $q(\rho, \varphi, t)$  является периодической и может быть разложена в ряд Фурье. Для каждой гармонической составляющей  $q(\rho, \varphi, t) = q(\rho, \varphi) \cos pt$  решение задачи о вынужденных колебаниях может быть представлено в виде

$$W(\rho, \varphi, t) = \cos pt \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(\rho, \varphi) \frac{q_{mn}}{M_{mn}(\omega^2 - p^2)}; \quad (6.33)$$

$$q_{mn} = \int_0^{a/2} \int_0^{2\pi} q(\rho, \varphi) W_{mn}(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi, \quad M_{mn} = \int_0^{a/2} \int_0^{2\pi} W_{mn}^2(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (6.34)$$

Таким образом, решение задачи о вынужденных колебаниях сводится к определению собственных форм, собственных частот колебаний и раскладыванию возмущающих сил на гармонические составляющие, т. е. их раскладыванию в ряд Фурье. Этого можно достичь, разложив в ряд Фурье силу, действующую на один зуб, а результирующую силу, действующую на фрезу, найти как их сумму. В дальнейшем предполагается, что диск имеет единичную толщину.

Рассмотрим вариант прямого зуба. Режущая кромка параллельна оси фрезы (рис 6.1). В этом случае силы приложены к вершинам зубьев и являются сосредоточенными. Координата приложения силы равна угловой координате вершины  $m$ -го зуба  $\alpha_m = 2\pi m/z$ , где  $z$  — количество

зубьев. В дальнейшем в силу конструктивных условий предполагается, что количество зубьев четное. Время действия силы резания листа  $m$ -ым зубом равно времени движения дуги охвата фрезы пластиной  $2\psi = 2\arcsin(h/d)$ .

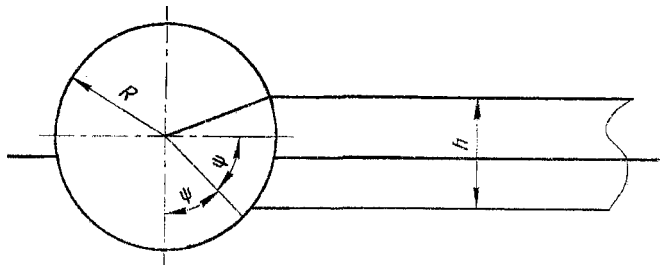


Рис. 6.1. Вариант прямого зуба

Эта дуга скользит по зубу с угловой скоростью  $p$ . При этих предположениях сила, действующая на зуб, может быть представлена в виде

$$q_m(\rho, \varphi, t) = A\delta(\rho - a)\delta(\varphi - \alpha_m)H_m(t),$$

где  $A$  — амплитудная величина силы, действующей на зуб;  $\delta(\varphi - \alpha_m)$  — дельта функция Дирака, определяющая угловую координату точки приложения силы;  $\delta(\rho - a)$  — дельта функция Дирака, определяющая радиальную координату точки приложения силы;  $H_m(t)$  — функция, определяющая время резания;  $a = R$  — внешний радиус фрезы.

Радиальные координаты всех зубьев одинаковы, поэтому силы, действующие на различные зубья, отличаются только как функции времени и их угловых координат. Сила, действующая на зуб, равна амплитудной величине тогда, когда точка с координатами  $(t, \varphi)$  находится в области  $\varphi = \alpha_m, (\alpha_m/p) \leq t \leq (\alpha_m/p + 2\psi/p)$  и ее можно задать в виде произведения функции времени  $f(t)$  показанной на рис.6.2, и дельта функции Дирака  $\delta(\varphi - \alpha_m)$ .

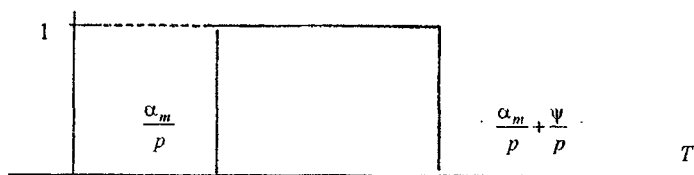


Рис. 6.2. Функция времени  $f(t)$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{\alpha_m}{p}, \\ 1 & \frac{\alpha_m}{p} \leq t \leq \frac{\alpha_m}{p} + \frac{2\psi}{p}, \\ 0 & t > \frac{\alpha_m}{p} + \frac{2\psi}{p}. \end{cases}$$

Чтобы проанализировать силу, действующую на зуб, представим ее в виде двойного ряда Фурье. Поскольку сила, приложенная к зубу, представима в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит от одной переменной, то двойной ряд может быть представлен в виде произведения рядов Фурье каждой из функций в отдельности. Разложение  $f(t)$  в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{\psi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\psi}{n\pi} [\cos n(\alpha_m + \psi) \cos npt + \sin n(\alpha_m + \psi) \sin npt].$$

Для дальнейшей работы ее удобнее представить в виде

$$f(t) = \frac{\psi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\psi}{n\pi} [\cos n\alpha_m \cos n(pt - \psi) + \sin n\alpha_m \sin n(pt - \psi)];$$

$$f(t) = \frac{\psi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\psi}{n\pi} \cos n(pt - \psi - \alpha_m).$$

Координата точки приложения силы действующей на  $m$ -й зуб, представима дельта функцией Дирака  $\delta(\varphi - \alpha_m)$  и может быть разложена в ряд Фурье:

$$F(\varphi) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\cos k\alpha_m \cos k\varphi + \sin k\alpha_m \sin k\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos k(\varphi - \alpha_m).$$

Силу, действующую на  $m$ -й зуб при резании пластинки, как функцию угловой координаты и времени представима в виде

$$A_m = F(\varphi)f(t);$$

$$A_m(t, \varphi) = \frac{\Psi}{2\pi^2} + \frac{\Psi}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (\cos k\alpha_m \cos k\varphi + \sin k\alpha_m \sin k\varphi) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\psi}{n} [\cos n(pt - \psi) \cos k\alpha_m + \sin n(pt - \psi) \sin k\alpha_m] +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\psi}{n} \cos k(\varphi - \alpha_m) \cos n(pt - \psi - \alpha_m).$$

Сила, приложенная к фрезе при резании пластинки, равна сумме

$$\text{сил от всех зубьев } A(\varphi, t) = \sum_{m=1}^z A_m(\varphi, t),$$

$$A(t, \varphi) = \frac{\Psi}{2\pi^2} + \frac{\Psi}{\pi^2} \sum_{m=1}^z \sum_{n=1}^{\infty} (\cos k\alpha_m \cos k\varphi + \sin k\alpha_m \sin k\varphi) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=1}^z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\psi}{n} [\cos n\alpha_m \cos n(pt - \psi) + \sin n\alpha_m \sin n(pt - \psi)] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=1}^z \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\psi}{n} \{ \cos[k(\varphi - \alpha_m) - n(pt - \psi - \alpha_m)] +$$

$$+ \cos[k(\varphi - \alpha_m) + n(pt - \psi - \alpha_m)] \},$$

или

$$A(t, \varphi) = \frac{\Psi}{2\pi^2} + \frac{\Psi}{\pi^2} \sum_{m=1}^z \sum_{n=1}^{\infty} (\cos k\alpha_m \cos k\varphi + \sin k\alpha_m \sin k\varphi) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=1}^z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\psi}{n} [\cos n\alpha_m \cos n(pt - \psi) + \sin n\alpha_m \sin n(pt - \psi)] + \\
& + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=1}^z \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\psi}{n} \{ \cos[n(pt - \psi) - k\varphi - (n - k)\alpha_m] + \\
& + \cos[n(pt - \psi) + k\varphi - (n + k)\alpha_m] \}.
\end{aligned}$$

Меняя порядок суммирования и учитывая, что

$$\sum_{m=1}^z \cos n\alpha_m = \begin{cases} z & \text{при } n \equiv 0(\text{mod } z); \\ 0 & \text{при } n \not\equiv 0(\text{mod } z); \end{cases} \quad \sum_{m=1}^z \sin n\alpha_m = 0,$$

получим

$$\begin{aligned}
A(\varphi, t) &= \frac{\psi}{2\pi^2} z + \frac{\psi}{\pi^2} z \sum_{j=1}^{\infty} \cos jz\varphi + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz\varphi}{n} \cos nz(pt - \psi) + \\
&+ \frac{z}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin(jz + k)\psi}{(jz + k)} \cos[(jz + k)(pt - \psi) - k\varphi] + \\
&+ \frac{z}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(jz - k)\psi}{(jz - k)} \cos[(jz - k)(pt - \psi) + k\varphi].
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Проанализируем силы, возникающие при условии, что зубья фрезы наклонены. Найдем силу, действующую на один зуб. Величина силы, приложенной к зубу, есть функция времени и его координаты. Необходимые для расчета параметры показаны на рис. 6.3.

Как и в предыдущем случае, функцию, определяющую действующую на зуб силу, можно представить в виде произведения функций, одна из которых зависит от времени, а вторая – от расположения режущей кромки:

$$A(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \frac{\alpha_m}{p}, \\ RAp(t - \frac{\alpha_m}{p}) & \text{при } \frac{\alpha_m}{p} \leq t < \frac{\alpha_m}{p} + \frac{S}{Rp}; \\ AS & \text{при } \frac{\alpha_m}{p} + \frac{S}{Rp} \leq t \leq \frac{\alpha_m}{p} + \frac{2\psi}{p}; \\ RAp(\frac{\alpha_m}{p} + \frac{S}{Rp} + \frac{2\psi}{p} - t) & \text{при } \frac{\alpha_m}{p} + \frac{2\psi}{p} < t \leq \frac{\alpha_m}{p} + \frac{S}{Rp} + \frac{2\psi}{p}, \end{cases}$$

где  $p$  – угловая скорость вращения фрезы.

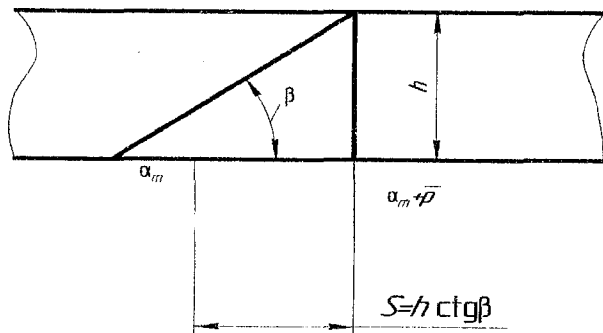


Рис. 6.3. Варианты наклонного зуба

Остальные величины показаны на рис. 6.4.

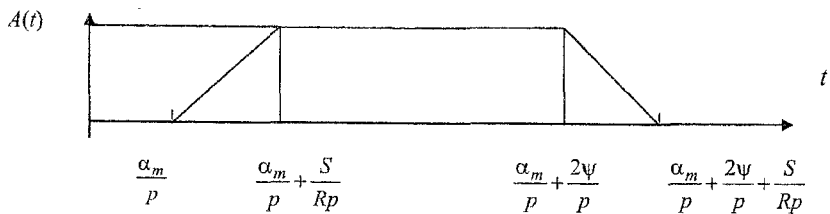


Рис. 6.4. Зависимость силы от параметров фрезы

Разложим функцию  $A(t)$  в ряд Фурье:

$$A(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^{\infty} a_k \cos kpt + b_k \sin kpt,$$

введем обозначения  $\gamma = \frac{S}{R}$ ,

тогда

$$A(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} & t < \frac{\alpha_m}{p}, \\ ApR(t - \frac{\alpha_m}{p}) & \text{при} & \frac{\alpha_m}{p} \leq t < \frac{\alpha_m}{p} + \frac{\gamma}{p}, \\ Ap\gamma & \text{при} & \frac{\alpha_m}{p} + \frac{\gamma}{p} \leq t \leq \frac{\alpha_m}{p} + \frac{2\psi}{p}, \\ ApR(\frac{\alpha_m}{p} + \frac{\gamma}{p} + \frac{2\psi}{p} - t) & \text{при} & \frac{\alpha_m}{p} + \frac{2\psi}{p} < t \leq \frac{\alpha_m}{p} + \frac{\gamma}{p} + \frac{2\psi}{p}, \\ 0 & \text{при} & t > \frac{\alpha_m}{p} + \frac{2\psi}{p} + \frac{\gamma}{p}. \end{cases}$$

Коэффициенты ряда:

$$a_0 = 2AR\gamma\psi \frac{1}{\pi}; \quad a_k = \frac{4AR}{\pi k^2} \sin k\psi \sin k \frac{\gamma}{2} \cos k(\alpha_m + \psi + \frac{\gamma}{2});$$

$$b_k = \frac{4AR}{\pi k^2} \sin k\psi \sin k \frac{\gamma}{2} \sin k(\alpha_m + \psi + \frac{\gamma}{2}).$$

Получаем

$$A(t) = \frac{R}{\pi} \left\{ \gamma\psi + 4 \sum \frac{1}{k^2} \sin k\psi \sin k \frac{\gamma}{2} \left[ \cos k(\alpha_m + \psi + \frac{\gamma}{2}) \cos kpt + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin k(\alpha_m + \psi + \frac{\gamma}{2}) \sin kpt \right] \right\}$$

или

$$A(t) = \frac{R}{\pi} \left\{ \gamma\psi + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin k\psi \sin k \frac{\gamma}{2} \cos k \left[ pt - (\alpha_m + \psi + \frac{\gamma}{2}) \right] \right\}$$

ИЛИ

$$A(t) = \frac{R}{\pi} \left\{ \gamma \psi + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin k \psi \sin k \left[ \frac{\gamma}{2} \left[ \cos k \left( pt - \psi - \frac{\gamma}{2} \right) \cos k \alpha_m + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \sin k \left( pt - \psi - \frac{\gamma}{2} \right) \sin k \alpha_m \right] \right] \right\}.$$

Распределение усилия по длине зуба предполагается равномерным, т. е. его распределение по угловой координате считается не зависящим от времени (рис. 6.5).

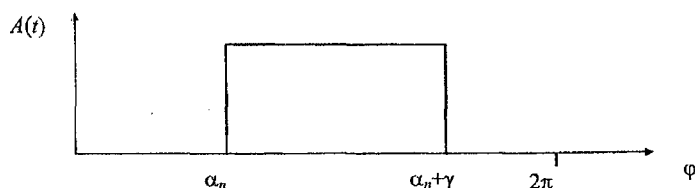


Рис. 6.5. Распределение усилия по длине зуба

$$H(\varphi) = \begin{cases} 0 \dots \varphi < \alpha_m \\ 1 \dots \alpha_m \leq \varphi \leq \alpha_m + \gamma. \\ 0 \dots \alpha_m > \alpha_m + \gamma \end{cases}$$

Разложим функцию  $H(\varphi)$  в ряд Фурье.

$$H(\varphi) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \{ (c_l \cos l \varphi + d_l \sin l \varphi),$$

коэффициенты которого

$$c_l = \frac{2}{\pi l} \sin l \frac{\gamma}{2} \cos l \left( \alpha_m + \frac{\gamma}{2} \right); \quad d_l = \frac{2}{\pi l} \sin l \frac{\gamma}{2} \sin l \left( \alpha_m + \frac{\gamma}{2} \right);$$

$$H(\varphi) = \frac{\gamma}{2\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \sin l \frac{\gamma}{2} \left[ \cos l \left( \alpha_m + \frac{\gamma}{2} \right) \cos l \varphi + \sin l \left( \alpha_m + \frac{\gamma}{2} \right) \sin l \varphi \right].$$



Полученный ряд приводим к виду

$$H(\varphi) = \frac{\gamma}{2\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \sin l \frac{\gamma}{2} \left[ \cos l(\varphi - \frac{\gamma}{2}) \cos l\alpha_m + \sin l(\varphi - \frac{\gamma}{2}) \sin l\alpha_m \right],$$

или для упрощения дальнейших преобразований

$$H(\varphi) = \frac{\gamma}{2\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \sin l \frac{\gamma}{2} \cos l(\varphi - \frac{\gamma}{2} - \alpha_m).$$

Сила, действующая на наклонный зуб, равна

$$P_m(t, \varphi) = A(t)H(\varphi),$$

$$\begin{aligned} P_m(t, \varphi) = \frac{R}{\pi} \left\{ \frac{\gamma^2 \psi}{2\pi} + \frac{2\gamma}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin k\psi \sin k \frac{\gamma}{2} \left[ \cos k(pt - \psi - \frac{\gamma}{2}) \cos k\alpha_m + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin k(pt - \psi - \frac{\gamma}{2}) \sin k\alpha_m \right] + \right. \\ \left. + \frac{2\gamma\psi}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \sin l \frac{\gamma}{2} \left[ \cos l(\varphi - \frac{\gamma}{2}) \cos l\alpha_m + \sin l(\varphi - \frac{\gamma}{2}) \sin l\alpha_m \right] + \right. \\ \left. + \frac{8}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 l} \sin k\psi \sin k \frac{\gamma}{2} \sin l \frac{\gamma}{2} \cos k(pt - \psi - \frac{\gamma}{2} - \alpha_m) \cos l(\varphi - \frac{\gamma}{2} - \alpha_m) \right\}. \end{aligned}$$

Это представимо и в более удобном для дальнейших преобразований виде:

$$\begin{aligned} P_m(t, \varphi) = \frac{R}{\pi} \left\{ \frac{\gamma^2 \psi}{2\pi} + \frac{2\gamma}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin k\psi \sin k \frac{\gamma}{2} \left[ \cos k(pt - \psi - \frac{\gamma}{2}) \cos k\alpha_m + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin k(pt - \psi - \frac{\gamma}{2}) \sin k\alpha_m \right] + \right. \\ \left. + \frac{2\gamma\psi}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \sin l \frac{\gamma}{2} \left[ \cos l(\varphi - \frac{\gamma}{2}) \cos l\alpha_m + \sin l(\varphi - \frac{\gamma}{2}) \sin l\alpha_m \right] + \right\} \end{aligned}$$

$$+\frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2l}\sin k\psi\sin k\frac{\gamma}{2}\sin l\frac{\gamma}{2}\{\cos[k(pt-\psi-\frac{\gamma}{2})-l(\varphi-\frac{\gamma}{2})-(k-l)\alpha_m]-\\ +\cos[k(pt-\psi-\frac{\gamma}{2})+l(\varphi-\frac{\gamma}{2})-(k+l)\alpha_m]\}.$$

При использовании фрезы с наклоненными зубьями могут быть применены два варианта. Первый – все зубья наклонены в одну сторону, второй – угол наклона зубьев меняет знак. При первом варианте силы, вызывающие изгиб фрезы, складываются, при втором – направления сил, перпендикулярных плоскости фрезы, чередуются.

Рассмотрим сначала первый вариант. Сила, действующая на фрезу, равна

$$P(t, \varphi) = \sum_{m=1}^z P_m(t, \varphi);$$

$$P(t, \varphi) = \frac{R}{\pi} \left\{ \frac{\gamma^2 \psi}{2\pi} z + \frac{2\gamma}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 z} \sin kz \psi \sin kz \frac{\gamma}{2} \cos kz (pt - \psi - \frac{\gamma}{2}) + \right. \\ \left. + \frac{2\gamma \psi}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \sin lz \frac{\gamma}{2} \cos lz (\varphi - \frac{\gamma}{2}) + \right. \\ \left. + \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^z \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 l} \sin k \psi \sin k \frac{\gamma}{2} \sin l \frac{\gamma}{2} \cos k (pt - \psi - \frac{\gamma}{2} - \alpha_m) \cos l (\varphi - \frac{\gamma}{2} - \alpha_m) \right\}.$$

Используя аналогичные преобразования, получаем:

$$P(t, \varphi) = \frac{R}{\pi} \left\{ \frac{\gamma^2 \psi}{2\pi} z + \frac{2\gamma}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 z} \sin kz \psi \sin kz \frac{\gamma}{2} \times \cos kz (pt - \psi - \frac{\gamma}{2}) + \right. \\ \left. + \frac{2\gamma \psi}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \sin lz \frac{\gamma}{2} \cos lz (\varphi - \frac{\gamma}{2}) + \right. \\ \left. + \frac{4}{\pi} z \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(jz+l)^2 l} \sin(jz+l)\psi \sin(jz+l)\frac{\gamma}{2} \sin l \frac{\gamma}{2} \times \right. \\ \left. \times \cos[(jz+l)(pt - \psi - \frac{\gamma}{2}) - l(\varphi - \frac{\gamma}{2})] + \right. \quad (6.36)$$

$$+ \frac{4}{\pi} z \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{jz-l>0} \frac{1}{(jz-l)^2 l} \sin(jz-l)\psi \sin(jz-l) \frac{\gamma}{2} \sin l \frac{\gamma}{2} \times \\ \times \cos[(jz-l)(pt-\psi-\frac{\gamma}{2}) + l(\varphi-\frac{\gamma}{2})].$$

Рассмотрим второй вариант – угол наклона чередуется, количество зубьев четное.

Сила, действующая на фрезу, равна

$$P(t, \varphi) = \sum_{m=1}^z (-1)^m P_m(t, \varphi); \\ P(t, \varphi) = \frac{R}{\pi} \left\{ \frac{2\gamma}{\pi} \sum_{m=1}^z (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin k\psi \sin k \frac{\gamma}{2} \left[ \cos k(pt-\psi-\frac{\gamma}{2}) \cos k\alpha_m + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin k(pt-\psi-\frac{\gamma}{2}) \sin k\alpha_m \right] + \right. \\ \left. + \frac{2\gamma\psi}{\pi} \sum_{m=1}^z (-1)^m \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \sin l \frac{\gamma}{2} \left[ \cos l(\varphi-\frac{\gamma}{2}) \cos l\alpha_m + \sin l(\varphi-\frac{\gamma}{2}) \sin l\alpha_m \right] + \right. \\ \left. + \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^z (-1)^m \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 l} \sin k\psi \sin k \frac{\gamma}{2} \sin l \frac{\gamma}{2} \times \right. \\ \left. \times \left[ \cos k(pt-\psi-\frac{\gamma}{2}-\alpha_m) \cos l(\varphi-\frac{\gamma}{2}-\alpha_m) \right] \right\}.$$

Используя соотношения

$$\sum_{m=1}^z (-1)^m \cos n\alpha_m = z \begin{cases} 1 & \text{при } n = \frac{2n+1}{2} z \\ 0 & \text{при } n \neq \frac{2n+1}{2} z \end{cases},$$

где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , получаем:

$$P(t, \varphi) = \frac{R}{\pi} \left\{ \frac{8\gamma}{\pi z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2n)^2} \sin[(\frac{1}{2}+n)z\psi] \sin[(\frac{1}{2}+n)z \frac{\gamma}{2}] \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \cos \left[ \left( \frac{1}{2} + n \right) z \left( pt - \psi - \frac{\gamma}{2} \right) \right] + \\
& + \frac{2\gamma\psi}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)} \sin \left[ (2n+1) z \frac{\gamma}{4} \right] \cos \left[ \left( \frac{1}{2} + n \right) z \left( \varphi - \frac{\gamma}{2} \right) \right] + \\
& + \frac{4}{\pi} z \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) z + l \right]^2 l} \sin \left\{ \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) z + l \right] \psi \right\} \sin \left\{ \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) z + l \right] \frac{\gamma}{2} \right\} \times \\
& \times \sin l \frac{\gamma}{2} \cos \left\{ \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) z + l \right] \left( pt - \psi - \frac{\gamma}{2} \right) - l \left( \varphi - \frac{\gamma}{2} \right) \right\} + \quad (6.39) \\
& + \frac{4}{\pi} z \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) z - l \right]^2 l} \sin \left\{ \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) z - l \right] \psi \right\} \sin \left\{ \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) z - l \right] \frac{\gamma}{2} \right\} \times \\
& \times \sin l \frac{\gamma}{2} \cos \left\{ \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) z - l \right] \left( pt - \psi - \frac{\gamma}{2} \right) + l \left( \varphi - \frac{\gamma}{2} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

В настоящей работе рассматривался ряд типоразмеров дисков дисковых пил, собственные частоты и собственные формы которых определялись путем формирования функционалов с помощью вариационно-сеточного метода и использования метода квазистатистических итераций для их минимизации. Поскольку собственные формы нормированы, то соотношения (6.33), (6.34) принимают вид:

$$W(\rho, \varphi, t) = \cos pt \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(\rho, \varphi) \frac{q_{mn}}{(\omega^2 - p^2)};$$

$$q_{mn} = \int_0^a \int_0^{2\pi} q(\rho, \varphi) W_{mn}(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi;$$

$$M_{mn} = 1.$$

Величины  $q_{mn}$  определяем, используя найденные выше соотношения для различных способов расположения зубьев. Поскольку интен-

сивность нагрузок имеет вид  $q(\rho, \varphi) = \delta(\rho - a)q(\varphi)$  и собственные формы  $W_{mn}(\rho, \varphi) = W_{mn}(\rho) \cos n\varphi$ , то получим:

$$q_{mn} = a W_{mn}(a) \int_0^{2\pi} q(\varphi) \cos n\varphi d\varphi.$$

Используя соотношения (6.35), (6.36), (6.37), находим зависимость амплитуды колебаний как функции собственных форм и частоты возмущающей силы.

*Зубья параллельны оси фрезы:*

1. Постоянная составляющая, не зависящая от времени:

$$\frac{\Psi}{2\pi^2} z + \frac{\Psi}{\pi^2} z \sum_{j=1}^{\infty} \cos jz\varphi.$$

2. Амплитуды осесимметричных гармонических составляющих:

$$\frac{a}{\pi} W_{m0}(a) \frac{\sin nz\psi}{n} \frac{1}{\omega_{m0}^2 - (nzp)^2},$$

где  $m$  — количество окружных узловых линий, диаметральных узловых линий отсутствуют.

3. Амплитуды неосесимметричных гармонических составляющих:

$$\frac{z}{2\pi^2} \frac{\sin(jz+k)\psi}{(jz+k)} \frac{a W_{mk}(a)}{\omega_{mk}^2 - [(jz+k)p]^2},$$

где  $j = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{z}{2\pi^2} \frac{\sin(jz-k)\psi}{(jz-k)} \frac{a W_{mk}(a)}{\omega_{mk}^2 - [(jz-k)p]^2},$$

где  $j = 1, 2, 3, \dots$ , — количество окружных узловых линий,  $jz - k > 0$  — количество диаметральных узловых линий.

*Угол наклона зубьев постоянный:*

1. Постоянная составляющая, не зависящая от времени:

$$\frac{a}{\pi} \left\{ \frac{\Psi \gamma^2}{2\pi} z + \frac{2\Psi \gamma}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \sin lz \frac{\gamma}{2} \cos lz \left( \varphi - \frac{\gamma}{2} \right) \right\}.$$

2. Амплитуды осесимметричных гармонических составляющих:

$$\frac{a}{\pi} \left\{ \frac{2\gamma}{\pi} \frac{1}{k^2 z} \sin kz \psi \sin kz \frac{\gamma}{2} \right\} \frac{aW_{m0}(a)}{\omega_{m0}^2 - (kzp)^2},$$

где  $m$  – количество окружных узловых линий, диаметрально узловые линии отсутствуют.

3. Амплитуды неосесимметричных гармонических составляющих:

$$\frac{4z \sin(jz+k)\psi}{\pi (jz+k)^2 k} \sin(jz+k) \frac{\gamma}{2} \sin lz \frac{\gamma}{2} \frac{aW_{mk}(a)}{\omega_{mk}^2 - [(jz+k)p]^2},$$

где  $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ ;

$$\frac{4z \sin(jz-k)\psi}{\pi (jz-k)^2 k} \sin(jz-k) \frac{\gamma}{2} \sin lz \frac{\gamma}{2} \frac{aW_{mk}(a)}{\omega_{mk}^2 - [(jz-k)p]^2},$$

где  $j = 1, 2, 3, \dots$ , – количество окружных узловых линий,  $jz-k > 0$  – количество диаметральных узловых линий.

Угол наклона зубьев чередуется, количество зубьев четное:

1. Постоянная составляющая, не зависящая от времени:

$$\frac{2\gamma\psi}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)} \sin[(2n+1)z \frac{\gamma}{4}] \cos \left[ \left( \frac{1}{2} + n \right) z \left( \varphi - \frac{\gamma}{2} \right) \right].$$

2. Амплитуды осесимметричных гармонических составляющих:

$$\frac{a}{\pi} \left\{ \frac{8\gamma}{\pi z} \frac{1}{(1+2n)^2} \sin \left[ \left( \frac{1}{2} + n \right) z \psi \right] \sin \left[ \left( \frac{1}{2} + n \right) z \frac{\gamma}{2} \right] \frac{aW_{m0}(a)}{\omega_{m0}^2 - \left[ \left( \frac{1}{2} + n \right) zp \right]^2} \right\},$$

где  $m$  – количество окружных узловых линий, диаметрально узловые линии отсутствуют.

3. Амплитуды неосесимметричных гармонических составляющих:

$$\frac{4}{\pi} z \frac{\sin \left\{ \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) z + l \right] \psi \right\}}{\left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) z + l \right]^2 l} \sin \left\{ \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) z + l \right] \frac{\gamma}{2} \right\} \sin l \frac{\gamma}{2} \times$$

$$\times \frac{aW_{ml}(a)}{\omega_{ml}^2 - \{[(\frac{1}{2} + n)z + l]p\}^2},$$

где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ,

$$\frac{4}{\pi} z \frac{\sin\{[(n + \frac{1}{2})z - l]\psi\}}{[(n + \frac{1}{2})z - l]^2 l} \sin\{[(n + \frac{1}{2})z - l]\frac{\gamma}{2}\} \sin l \frac{\gamma}{2} \times$$

$$\times \frac{aW_{ml}(a)}{\omega_{ml}^2 - \{[(\frac{1}{2} + n)z - l]p\}^2},$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$  — количество окружных узловых линий,  $l = 1, 2, 3, \dots$  — количество диаметральных узловых линий  $(\frac{1}{2} + n)z - l > 0$ .

Анализ полученных результатов приводит к следующим выводам.

1. Постоянная составляющая состоит из двух слагаемых: первое, пропорциональное количеству зубьев, присутствует при прямых зубьях и при зубьях, наклоненных в одну сторону; при зубьях, угол наклона которых чередуется, оно отсутствует. Второе слагаемое представляет собой тригонометрический ряд, коэффициенты которого в случае наклонных зубьев убывают быстрее, чем в случае прямых зубьев. Таким образом, предпочтительным вариантом является знакочередующийся наклон зубьев.

2. Сравнение амплитуд осесимметричных колебаний показывает, что если амплитуды для прямозубой фрезы убывают со скоростью  $1/n$ , то для фрез с наклонным зубом они убывают со скоростью  $1/(n^2 m)$ .

3. Амплитуды несимметричных колебаний для прямозубой фрезы убывают со скоростью  $1/n^2$ , для фрез с наклонным зубом они убывают со скоростью  $1/[(nz)^2 m]$ . К тому же, если угол наклона зубьев чередуется, имеет место сдвиг резонансных частот на  $pz/2$ .

## **7. АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА РАСЧЕТА НА ВИБРОПРОЧНОСТЬ ДИСКОВЫХ ПИЛ**

Реалии сегодняшнего дня требуют от промышленных предприятий все более широкого внедрения компьютерных технологий.

Разработанная автоматизированная система расчета представляет собой пакет прикладных программ (ППП) «МКИ», предназначенный для определения необходимого количества собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний при плоских, изгибных свободных колебаниях дисковых пил. ППП предназначен также для решения задач о вынужденных колебаниях с учетом рассеяния энергии в дисковых пилах, кроме того ППП позволяет решать динамические задачи при кинематическом возбуждении колебаний [1].

ППП «МКИ» – это совокупность двух проблемно ориентированных подсистем: «Свободные колебания» и «Вынужденные колебания». ППП построен по модульному принципу, что позволяет совершенствовать его структуру при помощи сервисных программ, а также видоизменять и дополнительно создавать программы для решения новых задач.

Каждый модуль системы выполняет определенные, логически завершенные действия и записывает результаты своей работы в файлы базы данных. Посредством этих файлов происходит передача данных между модулями системы. Поскольку каждый модуль выполняет логически завершенные действия, то аварийное прерывание работы системы не приводит к разрушению базы данных и расчеты могут быть возобновлены с того модуля, работа которого была прервана.

ППП спроектирован по принципу «черного ящика», при этом для пользователя не обязательна квалификация программиста – требуется только знание инструкции по подготовке исходных данных и понимание выводимых результатов счета. ППП характеризуется высоким уровнем автоматизации и экономичностью с точки зрения памяти ЭВМ.



Он отлаживался и совершенствовался на множестве тестовых и контрольных задач различной сложности.

Математическое обеспечение состоит из программ, реализованных на алгоритмическом языке Фортран-IV и на языках программирования С++ и Фортран-77.

## **7.1. Основные принципы автоматического построения сетки сложных многосвязных областей**

Эффективность предложенного метода решения динамической задачи в значительной степени определяется качеством построения сетки. В работе [1] отмечается, что для двухмерных областей произвольного вида наиболее эффективным является треугольный элемент, так как треугольная сетка удовлетворительно аппроксимирует поверхности любой кривизны, не ограничивает размеры элементов и предопределяет простоту их контроля. Информация о сетке хранится в виде числовых массивов, которые определяют координаты узлов, граничные условия, топологию сетки.

При решении прикладных задач общий объем данных о разбиении сетки измеряется десятками тысяч чисел. В этом причина трудностей при составлении и проверке данных массивов, и, как следствие, возникла задача автоматического построения и оптимизации сетки. С этой целью был разработан ряд алгоритмов, предполагающих различную степень автоматизации входных данных для построения сетки.

Однако при наличии криволинейной границы построение сетки, например триангуляция области, представляет собой нетривиальную математическую задачу, нуждается в тщательном учете специфики задачи и контроле качества сетки. Основные требования к сеткам конечных элементов можно сформулировать следующим образом:

1. Границы элементов должны хорошо аппроксимировать границы

области. Необходимо, чтобы сетка была гуще там, где граница имеет большую кривизну.

2. Элементы не должны быть чрезмерно вытянутыми в одном направлении.

3. Общее количество элементов не должно быть слишком велико (это приводит к большим затратам машинного времени).

Количество элементов должно зависеть от количества собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний, определяемых в процессе решения задачи.

Макроструктура и схема функционирования ППП представлена на рис. 7.1.

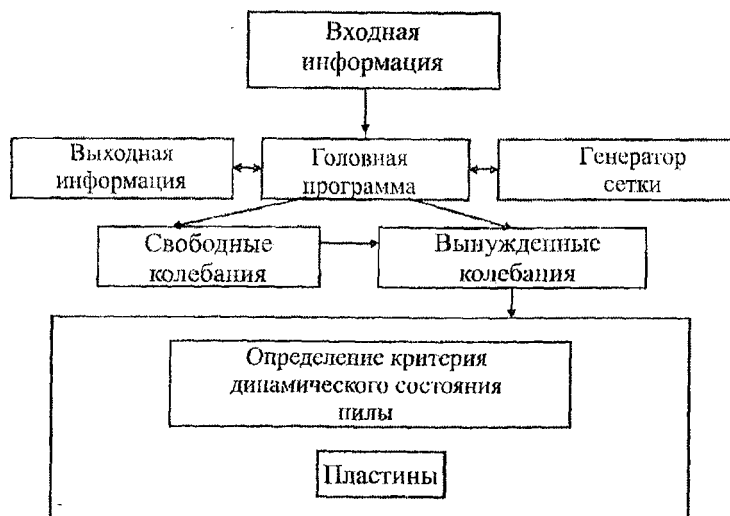


Рис. 7.1. Макроструктура ППП

Функционирование модулей производится по такой схеме:

- ввод исходной информации, анализ ошибок пользователя;
- генерация сетки конечных элементов;
- итерационная процедура решения частной задачи о собственных частотах и соответствующих им собственным формам колебаний;

- определение амплитуд и частот возмущающих сил;
- процедура решения задачи о вынужденных колебаниях;
- определение критерия динамического состояния пилы;
- обработка результатов и вывод необходимых характеристик.

### **Блок ввода исходной информации.**

Задаются информация о геометрии, физико-механических параметрах системы (коэффициент Пуассона, плотность материала, модуль Юнга, модуль упругости II рода, и т. д.), а также задается критерий завершения задачи, который определяет необходимую точность решения задачи.

### **Блок генерации сетки.**

По функциональному назначению подпрограммы, реализующие автоматическую дискретизацию области, можно разделить на несколько групп. *Первая* осуществляет разбивку области по заданному закону, а также формирует информацию о граничных узлах; *вторая*, используя информацию о сформированных граничных узлах, осуществляет автоматическую дискретизацию указанных систем; далее третьей группой производится контрольная печать информационных массивов и визуализация сгенерированной сетки.

**Блок итерационной процедуры решения частной задачи определения собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний.**

При расчете колебаний дисковой пилы наибольший интерес представляют низшие собственные частоты и соответствующие им собственные формы колебаний (до 20), поэтому необходимо решать частную задачу на собственные значения, для решения которой используются итерационные методы.

В данном ППП реализован метод квазистатических итераций с автоматическим определением оптимального параметра релаксации на каждой итерации. Рассматриваемый итерационный алгоритм состоит из четырех основных циклов: первый соответствует текущему приближе-

нию, второй – обходу по узлам сетки, третий – обходу по подобластям, четвертый необходим для построения ортогонального вектора для определения второй и последующих частот. Итерационный процесс решения задачи, при необходимости, может быть разделен на несколько вычислительных этапов, т. к. определение собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний указанных конструкций требует значительных затрат времени. Ввиду того, что вторые производные от максимальных амплитудных значений потенциальной и кинетической энергий, необходимые для вычисления шага  $\gamma^{k+1}$ , являются величинами постоянными и не меняются в ходе итерационного процесса, их значения хранятся в массивах памяти ЭВМ. Такой подход позволяет сократить количество арифметических операций и уменьшить время решения задачи. Если на узел наложена связь в заданном направлении, соответствующие перемещения не вычисляются.

Поэтапное деление итерационного процесса решения задачи сопровождается с записью необходимой промежуточной информации. Таким образом осуществляется оперативное вмешательство в вычислительный процесс при завершении каждого этапа вычислений.

Полученные в результате собственные частоты и соответствующие им нормированные собственные векторы используются для решения задачи о вынужденных колебаниях.

#### **Блок вывода и обработки результатов расчета.**

В результате решения задачи о колебаниях дисковых пил на основе вариационно-ссточных методов получают цифровую информацию, содержащуюся в массивах большой размерности. В качестве основных результатов расчета в разработанной вычислительной системе приняты нормированные собственные векторы и собственные частоты.

Непосредственная обработка данных, полученных в виде таблиц на цифровом печатающем устройстве ЭВМ, не всегда удобна из-за большого объема и недостаточной наглядности результатов. Информацию о собственных нормированных формах колебаний можно привести к бо-

лее наглядному виду, если представить поля значсий в виде цветных изолиний.

В разработанном ППП построение изолиний выполняется с помощью блока графического ввода информации, который позволяет вывести на печатающее устройство ЭВМ картины анализируемых собственных форм колебаний, представленных в пределах рассматриваемой области посредством набора печатных символов, либо осуществить вывод на дисплей в цветной гамме.

## **7.2. Результаты решения тестовых и прикладных задач**

Разработанный ППП отлаживался и совершенствовался на множестве тестовых и прикладных задач.

Расчетами подтверждается достаточная точность полученных результатов на основе предложенного алгоритма и разработанного ППП с экспериментом, аналитическими или другими численными методами.

В качестве тестовых примеров определялись собственные частоты и соответствующие им собственные формы изгибных колебаний квадратной пластинки с различными граничными условиями: в результате триангуляции получено 83 узла, 129 треугольников.

В табл. 7.1–7.3 представлены приведенные собственные частоты квадратной пластинки жестко закрепленной по всем четырём сторонам – по двум смежным и по двум противоположным. Задачи решались с использованием нерегулярной сетки. Количество узлов равнялось 68, количество треугольников 112, погрешность в определении частот не превышала 6%. В табл. 7.4 представлены приведенные собственные частоты пластинки, имеющей форму прямоугольного треугольника, известные аналитические решения, а также данные эксперимента. Количество узлов – 83, треугольников – 129. Погрешность в определении собственных частот не превышала 3 %.

Таблица 7.1

Приведенные собственные частоты квадратной пластинки,  
жестко защемленной по контуру ( $\tilde{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ ;  $NP=121$ ;  $NE=300$ )

Номер частоты	Аналитическое решение	Численное решение	Погрешность, %
1	3,646	3,581	1,2
2	7,437	7,110	4,6
3	7,437	7,181	3,6
4	10,965	10,344	6,0
5	13,393	12,261	6,2
6	13,452	12,641	6,4

Таблица 7.2

Приведенные частоты квадратной пластинки,  
защемленной по двум смежным краям ( $\tilde{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ )

Номер частоты	Аналитическое решение	Численное решение	Погрешность, %
1	6,958	6,921	$5,3 \cdot 10^{-3}$
2	24,081	24,022	$2,5 \cdot 10^{-3}$
3	26,802	26,444	1,4
4	48,054	47,532	1,1
5	63,147	62,781	$5,3 \cdot 10^{-3}$
6	—	65,491	—







Таблица 7.3

Приведенные частоты квадратной пластинки,  
защемленной по двум противоположным краям ( $\tilde{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ )

Номер частоты	Аналитическое решение	Численное решение	Погрешность, %
1	22,184	21,961	2,0
2	26,441	26,382	0,24
3	43,614	43,612	$4,6 \cdot 10^{-3}$
4	61,203	59,981	2,04
5	67,251	66,241	1,5
6	82,163	78,415	4,8

Приведенные частоты квадратной пластинки,  
имеющей форму прямоугольного треугольника

$$(\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}) \quad NP=83, NE=129$$

Номер частоты	Узловые линии	Эксперимент	Разбиение на систему балок	Метод Релея-Ритца	Численное решение
1		4,17	4,35	4,42	4,32
2		16,4	16,8	16,9	16,4
3		23,0	23,0	23,7	23,0
4		39,3	38,9	43,5	39,5
5		53,3	53,6	—	53,4
6		69,9	60,3	—	69,9

### 7.3. Свободные колебания дисковой пилы в своей плоскости

Исследуя динамические характеристики дисковой фрезы, следует определить собственные частоты и собственные формы при ее колебаниях в своей плоскости, что важно при исследовании вынужденных колебаний и ухода от резонанса. Были определены девять собственных частот и девять соответствующих им собственных форм колебаний для

21 типоразмера фрез. В качестве примера приводятся данные по фрезе с внешним диаметром 270 мм. Внутренний диаметр, по которому фреза жестко закреплена, равен 91 мм. Толщина фрезы в этом случае оставалась постоянной и равнялась 2,5 мм, модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, плотность материала  $\gamma = 7,8$  г/см<sup>3</sup>. На рис. 7.2 показана разбивка дисковой фрезы на треугольные подобласти. В результате дискретизации дисковая фреза была разбита на 464 элемента, которым соответствуют 264 узла. В табл. 7.5 приведены значения девяти собственных круговых частот при колебаниях фрезы в своей плоскости.

Таблица 7.5

Собственные частоты фрезы при ее плоских колебаниях

Номер частоты	Значение частоты, Гц
1	24660,6
2	43989,0
3	43989,0
4	69214,8
5	89532,9
6	89532,9
7	94579,8
8	94579,8
9	95474,5

Собственные формы колебаний для рассматриваемого типоразмера дисковой фрезы приведены на рис. 7.1–7.8. Численные расчеты по определению собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний дисковых фрез в своей плоскости показывают, что собственные частоты исследуемых фрез намного выше спектра частот вынужденных колебаний при всем возможном диапазоне режимов работы фрезы. Благодаря этому значительного роста амплитуды колебаний дисковой фрезы при ее плоских вынужденных колебаниях не будет. Поэтому при расчете на динамическую неустойчивость дисковых



фрез необходимо рассматривать вынужденные изгибные колебания дисковых фрез, т. к. жесткость фрезы в поперечном направлении намного меньше, чем в продольном, что ведет к уменьшению значений собственных частот при ее изгибных колебаниях. И в данном случае возможно явление резонанса. Отсюда возникает и задача определения собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний при изгибных колебаниях дисковых фрез.

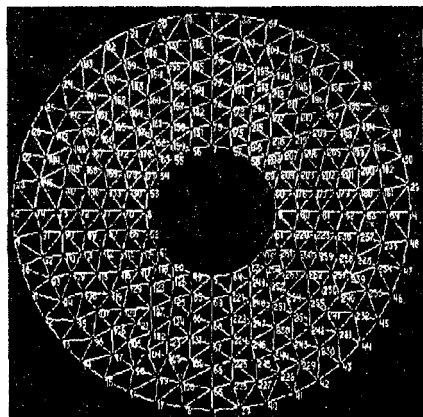


Рис. 7.2. Начальная форма колебания фрезы

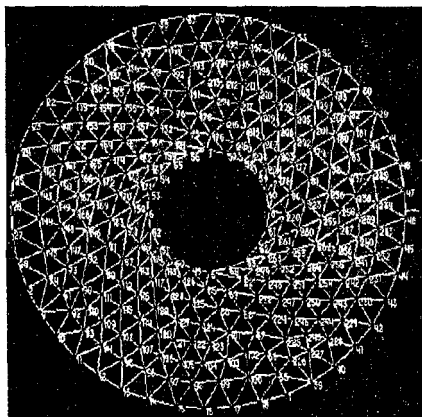


Рис. 7.3. Первая форма колебания фрезы

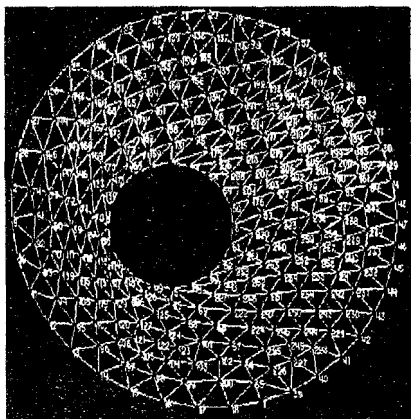


Рис. 7.4. Вторая форма колебания фрезы

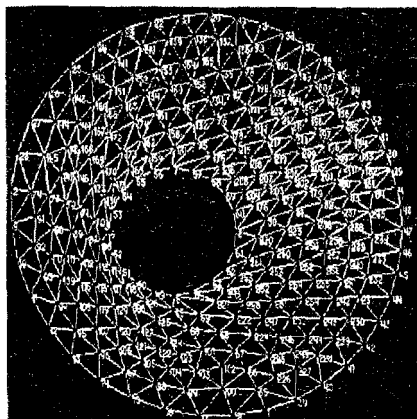


Рис. 7.5. Третья, аналогичная второй, форма колебания фрезы; повернута на  $90^\circ$

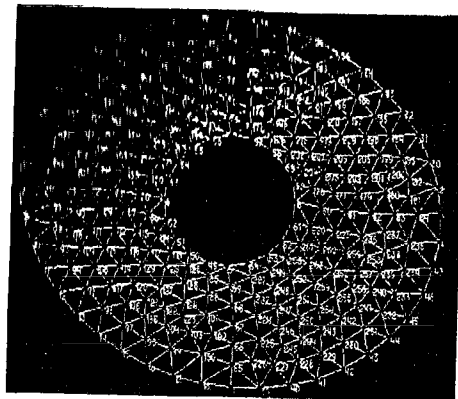


Рис. 7.6. Четвертая форма, пятая  
аналогична и повернута на  $45^\circ$

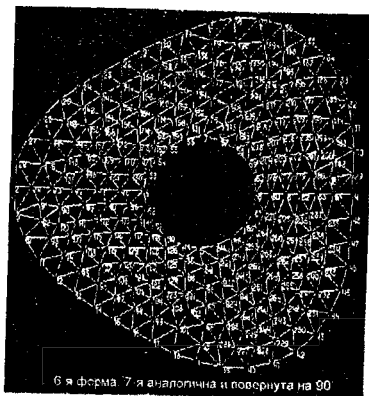


Рис. 7.7. Шестая форма, седьмая  
аналогична и повернута на  $90^\circ$

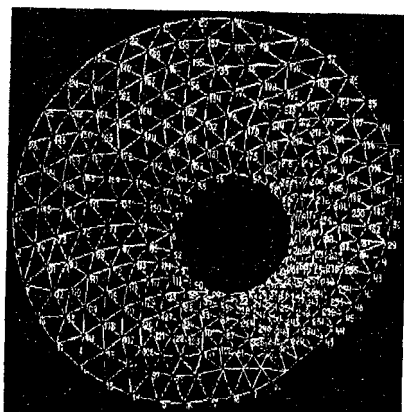


Рис. 7.8. Восьмая форма, девятая  
аналогична и повернута на  $90^\circ$

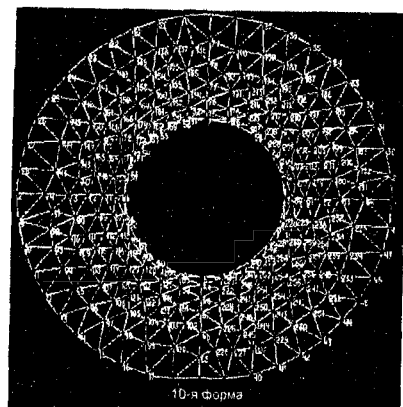


Рис. 7.9. Десятая форма колебания  
фрезы

#### 7.4. Свободные изгибные колебания дисковой пилы

При исследовании поведения дисковой пилы в процессе резания актуальной является проблема, связанная с изучением динамической неустойчивости и, соответственно, с подбором таких параметров пилы и режимов резания, которые позволяют устранить или ослабить нега-

гивный характер этого явления. При работе дисковой пилы возникают внешние возмущающие силы, вызванные контактом зубьев пилы с обрабатываемым изделием. Главный вектор упомянутых вынуждающих сил может быть разложен на продольную и поперечную составляющие относительно плоскости пилы. Так как в поперечном направлении жёсткость пилы гораздо меньше, чем в продольном, то поперечная составляющая главного вектора вынуждающих сил, которая вызывает изгибные колебания, будет оказывать преобладающее влияние на динамическую неустойчивость при работе пилы.

Задача о вынужденных колебаниях механической системы может быть решена на основе разложения по собственным формам колебаний. Основная трудность решения заключается в определении спектра собственных частот и форм колебаний дисковой пилы [9]. Пила рассматривается как кольцевая пластина, жёстко закреплённая по внутреннему контуру. Предполагается, что перемещения удовлетворяют гипотезам Кирхгофа–Лява.

В процессе эксплуатации дисковая пила подвергается перезаточке, в результате чего меняется ее внешний диаметр. Поэтому было рассчитано 39 типоразмеров дисковых пил с фиксированным внутренним диаметром  $d_0$ , равным 91 мм, а внешний диаметр  $d$  принимался: 200 мм, 245 мм, 250 мм, 255 мм, 260 мм, 265 мм, 270 мм, 275 мм, 300 мм, 325 мм, 350 мм, 375 мм, 400 мм, 425 мм, 450 мм, при постоянных толщинах, равных 2,5 мм и 1,8 мм, и переменных толщинах от 1,5 мм до 1,8 мм (так называемые дисковые фрезы с поднутрением). Физико-механические характеристики материала фрезы принимались следующие: модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^6$  МПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ; плотность материала  $\gamma = 0,0078$  г/см<sup>3</sup>, ускорение свободного падения  $g = 981$  см/с<sup>2</sup>.

На рис. 7.2 представлена дискретизация дисковой фрезы на треугольные подобласти (306 узлов и 546 элементов). В приложении при-

ведены значения квадратов двадцати круговых собственных частот для 39 различных типоразмеров дисковых фрез. На рис. 7.2–7.29 представлены собственные формы колебаний для фрезы, имеющей внешний диаметр  $d = 250$  мм и толщину  $h = 2,5$  мм.

Из полученных результатов видно, что разработанный метод позволяет определить спектр собственных частот и форм колебаний, включая кратные частоты и формы. Эти результаты могут быть использованы для решения задачи о вынужденных колебаниях дисковой пилы путём разложения по собственным формам колебаний и исследования области динамической неустойчивости пилы в процессе резания.

Реальные механические колебательные системы, как с распределёнными, так и с дискретными параметрами, являются, по существу, нелинейными динамическими системами, поскольку всегда содержат нелинейные зависимости в закономерностях, определяющих их движение. Для большинства нелинейных систем характерны такие явления, как устойчивые и неустойчивые режимы стационарных колебаний, и состояния, соответствующие так называемым внутренним резонансам. Возникновение этих режимов приводит к явлениям, сопровождающимся энергообменом (перераспределение энергии) между различными формами колебаний. Отметим, что переход энергии от одной формы к другой осуществляется самопроизвольно, без какого-либо внешнего вмешательства. Иными словами, процессом энергопереноса управляет сама упругая система посредством нелинейных связей между её подсистемами. Выявление этих режимов неустойчивости (бифуркаций) имеет решающее значение для исследования колебательного движения реальных механических систем.

При изучении колебаний дисковых пил различных геометрических размеров с помощью разработанного метода, позволяющего определить кратные частоты и соответствующие им формы колебаний, были обнаружены явления энергообмена между формами колебаний, которые

приводят к неустойчивости работы дисковой пилы. Эти явления наблюдаются при отношении внутреннего и внешнего диаметров пилы  $d_0/d = 0,3434$  на первых трёх формах колебаний, а также на пятнадцатой, шестнадцатой и семнадцатой – при  $d_0/d = 0,260$ . Таким образом, используя результаты расчёта можно подобрать режимы резания и параметры пилы, обеспечивающие устойчивое движение пилы.

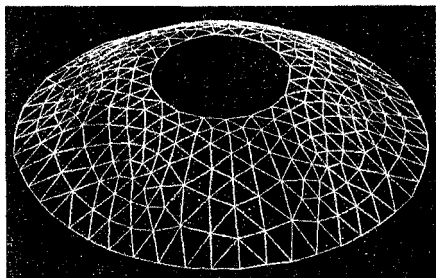


Рис. 7.10. Первая собственная форма колебаний фрезы

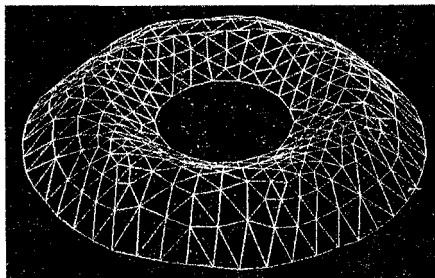


Рис. 7.11. Вторая собственная форма колебаний фрезы

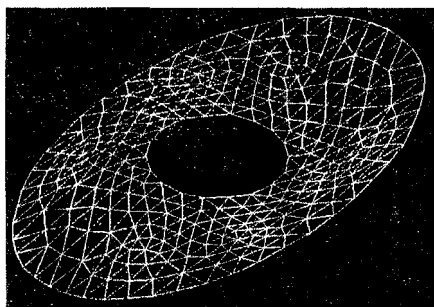


Рис. 7.12. Третья собственная форма колебаний фрезы

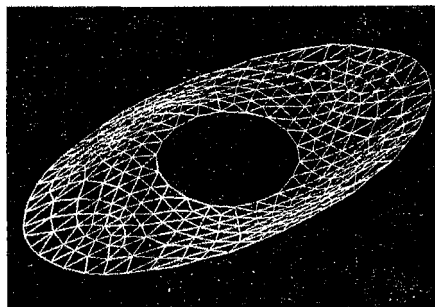


Рис. 7.13. Четвертая собственная форма колебаний фрезы

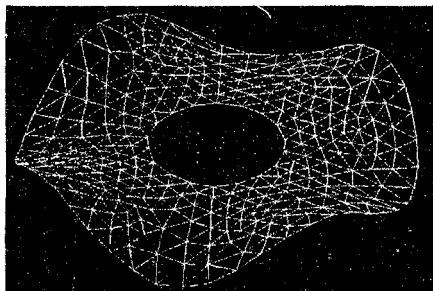


Рис. 7.14. Пятая собственная форма колебаний фрезы

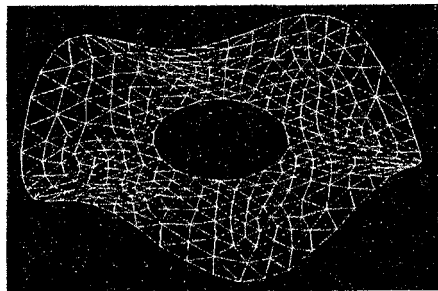


Рис. 7.15. Шестая собственная форма колебаний фрезы

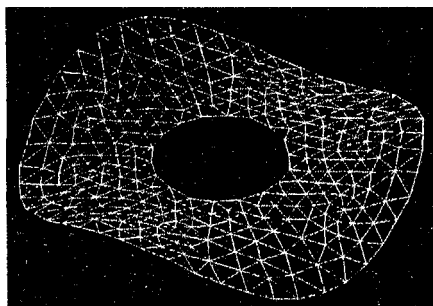


Рис. 7.16. Седьмая собственная форма колебаний фрезы

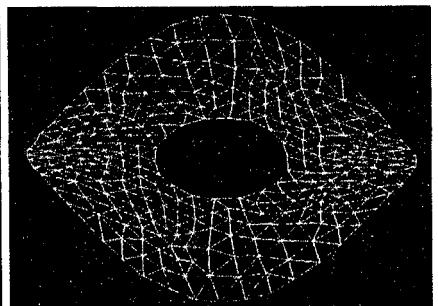


Рис. 7.17. Восьмая собственная форма колебаний фрезы

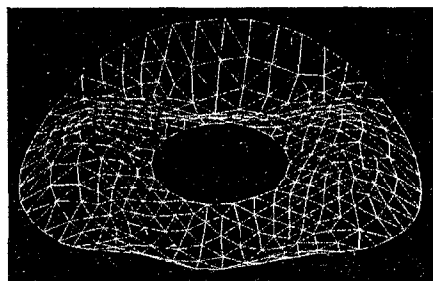


Рис. 7.18. Девятая собственная форма колебаний фрезы

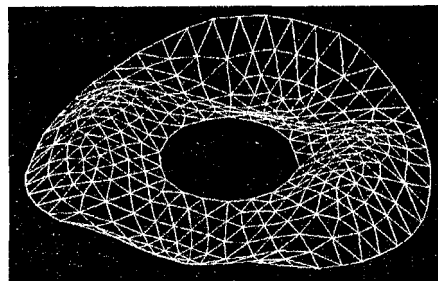


Рис. 7.19. Десятая собственная форма колебаний фрезы

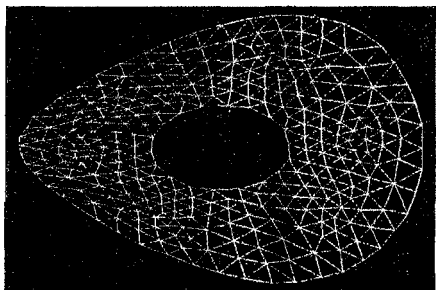


Рис. 7.20. Одиннадцатая собственная форма колебаний фрезы

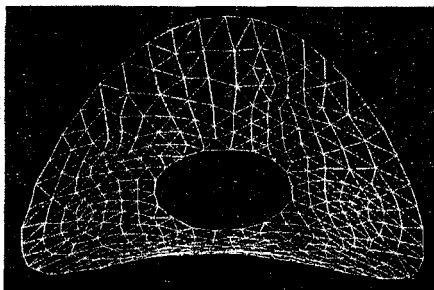


Рис. 7.21. Двенадцатая собственная форма колебаний фрезы

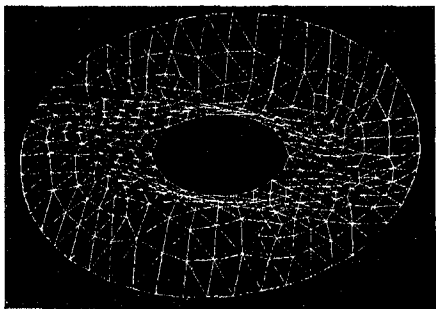


Рис. 7.22. Тринадцатая собственная форма колебаний фрезы

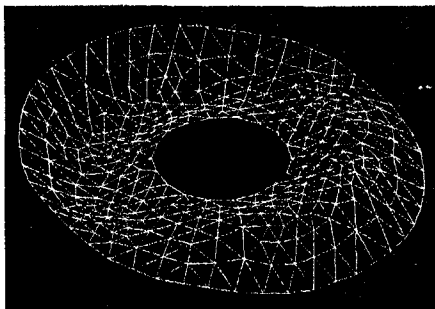


Рис. 7.23. Четырнадцатая собственная форма колебаний фрезы

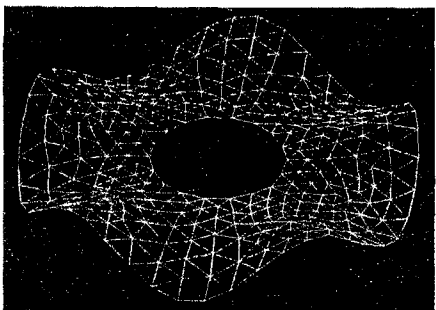


Рис. 7.24. Пятнадцатая собственная форма колебаний фрезы

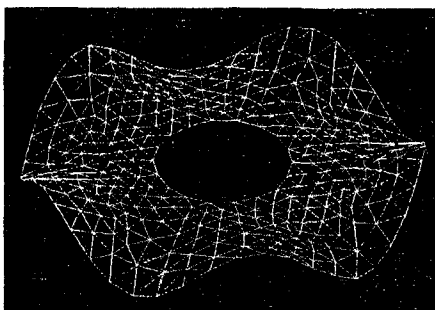


Рис. 7.25. Шестнадцатая собственная форма колебаний фрезы

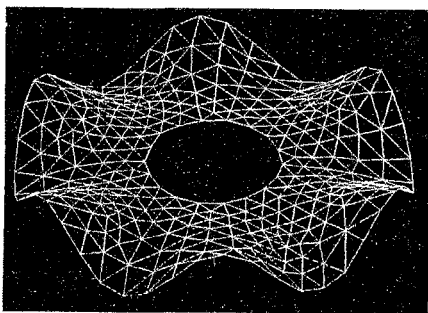


Рис. 7.26. Семнадцатая собственная форма колебаний фрезы

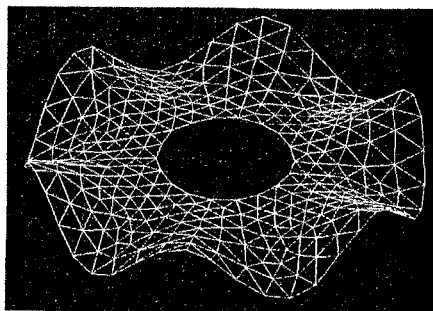


Рис. 7.27. Восемнадцатая собственная форма колебаний фрезы

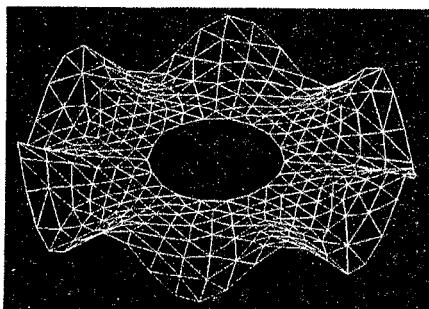


Рис. 7.28. Девятнадцатая собственная форма колебаний фрезы

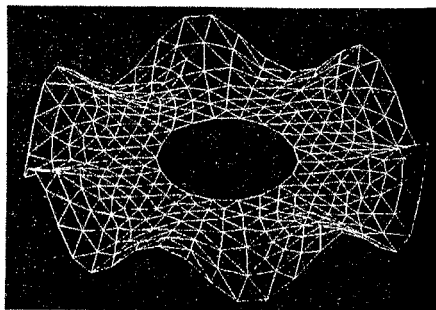


Рис. 7.29. Двадцатая собственная форма колебаний фрезы



## 8. Экспериментальная проверка методик расчета и их практическое использование

В основу системы расчета на вынужденные колебания конструктивных элементов машин и дискового инструмента положены методики расчета собственных частот и соответствующих им собственных форм тех или иных видов колебаний в зависимости от особенностей рассматриваемой конструкции и методик, обеспечивающих решение задач о вынужденных колебаниях при силовом и кинематическом возбуждении колебаний.

### 8.1. Экспериментальная проверка методики расчета собственных частот

Экспериментальная проверка подсистемы «Свободные колебания» проводилась при экспериментальном определении собственных частот дисков отрезных пил [3]. Структурная схема стенда для определения собственных частот представлена на рис. 8.1.

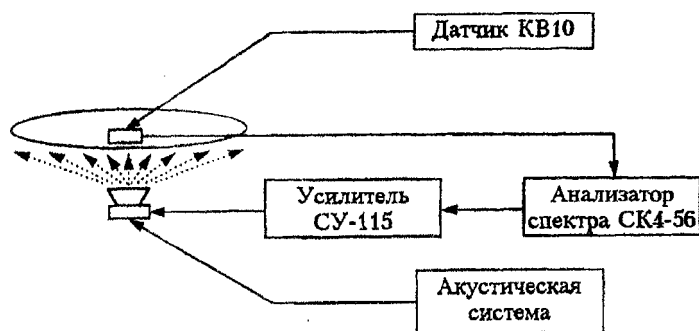


Рис. 8.1. Структурная схема стенда для определения собственных частот диска

Испытательный стенд представляет собой замкнутую систему, состоящую из диска, на который осуществлялось воздействие периодической возмущающей силы, частота которой постепенно увеличивалась. На диске устанавливался датчик, регистрирующий амплитуду колеба-

ний. Он был подключен к анализатору спектра, с супергетеродина которого через усилитель подавался сигнал на акустическую систему, использующуюся в качестве источника возмущающих колебаний. Таким образом, отслеживалось изменение амплитуды при различных частотах в исследуемом частотном промежутке, т. е. определялась амплитудно-частотная характеристика диска. При совпадении частоты собственных колебаний пильного диска с частотой возмущающей силы происходило увеличение амплитуды (резонанс), которое фиксировалось датчиком, а на ЭЛТ анализатора спектра наблюдался всплеск.

Диск пилы был укреплен на специальном кронштейне, аналогично креплению на станке. Датчики КВ 10 крепились на диске с помощью пластичной мастики (рис. 8.2).



Рис. 8.2. Определение собственных частот пильных дисков

Проверка результатов теоретических расчетов собственных частот дисков в диапазоне размеров диаметром 250...450 мм и толщиной диска 2...1,8 мм при диаметрах ступицы диаметром 91 мм и толщине 2 мм подтвердила, что собственные частоты, полученные расчетным путем, имеют отклонения в пределах 10...15 %. Это можно объяснить как некоторой погрешностью метода расчета собственных частот, так и по-

погрешностями измерения геометрических размеров пильных дисков (не учитывалась глубина поднутрения), и погрешностью эксперимента.

Таким образом, экспериментальная проверка методики определения собственных частот дисков показала, что подсистема «Свободные колебания» с достаточной точностью отображает картину при изгибных свободных колебаний пластин, к которым относят диски.

Учитывая, что все модули этой системы разработаны по одним и тем же принципам, то полученные результаты проверки могут быть перенесены на другие модули.

## **8.2. Экспериментальное исследование поперечных колебаний дисковой пилы**

Экспериментальное исследование вынужденных колебаний недиссипативных систем с конечным числом степеней свободы проведены на примере поперечных колебаний дисковой пилы.

Так как при определении амплитуд и частот возмущающих сил допускалось, что вынуждающие силы, изгибающие пилу, пропорциональны силам резания, действующим в плоскости пилы, были произведены синхронные измерения усилий резания и сигналов датчиков вибраций.

В качестве записывающего устройства использовался семиканальный магнитограф модели Н 067. Для измерения вибраций применялись датчики ускорений марки КВ10 (производства Германии) с рабочим диапазоном от 5 Гц до 2000 Гц. Датчики были прокалиброваны с помощью калибровочного устройства КУ-4. Амплитудно-частотная характеристика датчиков соответствовала паспортной. В эксперименте использовалось два датчика, работающих контактным методом. Первый датчик устанавливался на приспособлении, в котором жестко закреплялась заготовка (рис. 8.3).

Второй датчик был установлен в специальном, жестко прикрепленном к передней бабке станка, приспособлении, (рис. 8.4) и с помощью

фторопластовой головки контактировал с торцовой поверхностью пилы с низким коэффициентом трения.

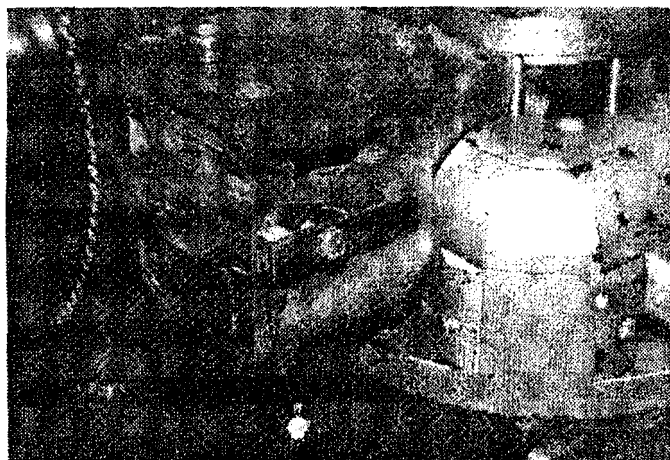


Рис. 8.3. Стенд экспериментальных исследований изгибных колебаний пилы с закрепленным на приспособлении датчиком



Рис. 8.4. Датчик, контактирующий с боковой поверхностью пилы

Конструкция приспособления позволяет устранить влияние торцового биения пилы на запись вибраций.

Сигналы датчиков через согласующее устройство СУ-115, служив-

ные усилителем, поступали на входы магнитографа. После записи сигналы датчиков обрабатывались с помощью анализатора спектра модели СК4-56 с анализирующим диапазоном до 3000 Гц; скорость развёртки была максимальной, а полоса — 3 Гц.

После обработки данные с экрана анализатора спектра выводились на самописец НЗ38-1П.

В качестве датчика для измерения усилий резания использовался динамометр модели УДМ-600. Балансировка моста осуществлялась перед каждым опытом с помощью четырёхканального усилителя ТА-5. Производилось измерение составляющих силы резания  $P_y$  в направлении подачи и вертикальной составляющей  $P_z$ .

Сигналы, поступающие с усилителя ТА-5, записывались на магнитограф. После записи соответствующие составляющие силы резания выводились на бумажную ленту с помощью самописца.

Анализ поперечных колебаний дисковой пилы производили посредством автоматического анализатора с гетеродином, работа которого основана на методе последовательного анализа сигнала.

На рис. 8.5–8.6 приведены результаты экспериментальных исследований дисковой пилы диаметром 275 мм и толщиной 2,5 мм, у которой общее количество зубьев  $Z = 144$ , количество зубьев в группе  $Z_{gp} = 8$ , неравномерность шага зубьев в группе — 10 % при разрезке прямоугольной заготовки толщиной 25 мм, при скорости вращения пилы  $n = 31,5$  об/мин ( $V = 27,2$  м/мин) и подаче на зуб  $S_z = 0,005$  мм/зуб.

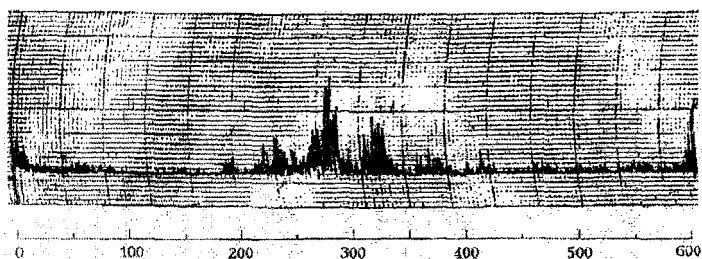


Рис. 8.5. Спектр вибраций пилы

На рис. 8.5 представлен спектр вибраций пилы, а на рис. 8.6 — экспериментальный спектр возмущающей силы, действующей относительно пилы и расчетный спектр возмущающей силы.

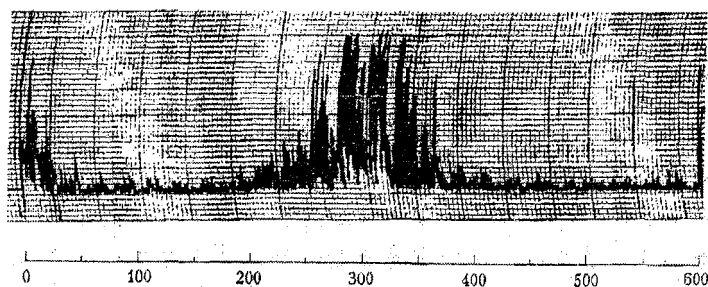


Рис. 8.6. Экспериментальный спектр возмущающей силы

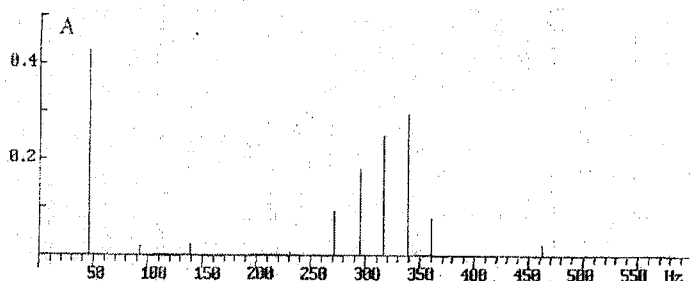


Рис. 8.7. Расчетный спектр возмущающей силы

Анализ полученных экспериментальных спектров вибраций и силы, действующей в плоскости пилы, показывает, что возмущающими силами, вызывающими вибрации в процессе отрезки дисковыми пилами, являются силы, действующие в плоскости пилы. Увеличение вибраций наблюдается в случае, когда одна или несколько гармоник этих сил по этой частоте близки к собственной частоте колебаний пилы. На этой частоте и происходит увеличение амплитуды вибраций (см. рис. 8.5 и 8.6).

Сравнение результатов экспериментального спектра силы, действующей в плоскости пилы, и расчетного спектра возмущающих сил (рис. 8.6 и 8.7) подтверждает предположение об их пропорциональности, и поэтому при определении динамического состояния пилы ис-

пользуются расчетные данные. При сравнении рис. 8.6 и рис. 8.7 обнаруживается соответствие экспериментального спектра расчетному. Из рис. 8.7 видно, что основная гармоническая составляющая вибраций инструмента – около 273 Гц. С целью сокращения количества весьма длительных и дорогостоящих экспериментов определение оптимальной конструкции дисковой отрезной пилы, имеющей улучшенные динамические характеристики, было решено проводить по теоретическому параметру.

### **8.3. Определение параметра динамического состояния дисковой пилы**

Созданная в результате работы автоматизированная система расчета на вибропрочность конструктивных элементов машин может быть широко использована для определения динамического состояния той или иной конструкции и стать основой выбора их конструктивных параметров, обеспечивающих надежность и стабильность работы всей системы.

Одним из примеров является расчет конструктивных параметров пилы с целью обеспечения динамической устойчивости ее диска в процессе отрезки заготовки.

Для решения задачи повышения динамической устойчивости пилы прежде всего необходимо определить параметр, по которому можно было бы сравнивать динамическое состояние различных конструкций пил.

Рассматривая модель кинематического возбуждения дисковой пилы в качестве параметра сравнительной оценки динамического состояния дисковой пилы в процессе отрезки, можно использовать амплитуду вынужденных колебаний [9]:

$$C_r = a_{jk} = \frac{A_{jk} \alpha_k^2}{\lambda_j - \alpha_k^2},$$

где:  $a_{jk}$  – амплитуда вынужденных колебаний;  $A_{jk}$  – амплитуда  $k$ -й

гармоники возмущающей силы;  $\alpha_k$  — круговая частота возмущающей силы;  $\lambda_j$  — квадрат собственных круговых частот.

При использовании данного критерия возникает задача определения вынужденных частот колебаний, на которых достигается максимальное значение параметра. Эта задача решается при рассмотрении некоторых положений теории колебаний.

Известно, что математическим аппаратом исследования колебаний в общем виде является спектральный анализ. В прикладных задачах основным его инструментом являются ряды Фурье, где периодическая функция может быть разложена в тригонометрический ряд.

Оценка скорости убывания амплитуд колебаний, представляющих собой с математической точки зрения коэффициенты ряда Фурье, в общем случае может оцениваться на основании теоремы Кантора. В соответствии с этой теоремой — коэффициенты ряда Фурье стремятся к нулю, а теоремой, утверждающей, что для функций с ограниченным изменением заданных на отрезке  $-\pi < X < \pi$ , — коэффициенты ряда Фурье удовлетворяют соотношению  $|a_n| \leq \frac{V}{\pi n}$ , где  $V$  — изменение функции на отрезке  $(-\pi, \pi)$ .

Поэтому при рассмотрении колебаний пилы следует учитывать влияние тех форм колебаний и частот, которые ухудшают процесс резания. Установлено, что процесс резания ухудшается при контакте боковой поверхности пилы с поверхностью реза. Так как в конструкции пилы присутствует вспомогательный угол в плане  $\phi_1$ , т. е. имеется поднутрение, то касание будет происходить по внешнему ободу диска пилы. Анализ первых пяти собственных форм колебаний пилы показал, что наиболее опасными являются первые три формы, поскольку максимальные амплитуды колебаний на внешнем ободе достигаются на этих формах колебаний. Поэтому при анализе процесса колебаний можно ограничиться определением параметра на этих трех формах колебаний.



Таким образом, для сравнительной оценки динамического состояния пил различных конструкций может быть принято максимальное значение параметра оценки кинематического возбуждения изгибных колебаний  $C_{r \max}$ , выбранное на первых трех собственных формах колебаний.

#### 8.4. Экспериментальная проверка возможности оценки динамического состояния пил по $C_{r \max}$

С целью использования значения  $C_{r \max}$  для оценки пил различных конструкций и определения их рациональных конструктивных параметров, при различных условиях отрезки, были проведены экспериментальные исследования пил с различными значениями  $C_{r \max}$ . Эти исследования проводились в лаборатории кафедры инструментального производства при разработке новых конструкций дисковых пил, а именно — пил с неравномерным шагом в группе. На первом этапе испытания проводились при отрезке труб диаметром  $30 \times 2,2$  мм.

Испытывалось два типа пил (по три пилы каждого типа) диаметром 275 мм, с толщиной диска  $B = 1,8$  мм и  $z = 180$  мм с равномерным и неравномерным шагом. Пила с неравномерным шагом имела по шесть зубьев в группе с неравномерностью угловых шагов  $k = 0,7-0,9-1,3-1,1-0,8-1,2$ , т. е. каждая группа имела следующие угловые шаги: 1,4–1,8–2,6–2,2–1,6 – градусов. В процессе отрезки труб (отрезалось 10 заготовок каждой пилой) фиксировался уровень шума, измерялись толщина ( $h_{31}$  и  $h_{32}$ ) и высота ( $h_b$ ) заусениц, согласно схеме приведенной на рис. 8.8.

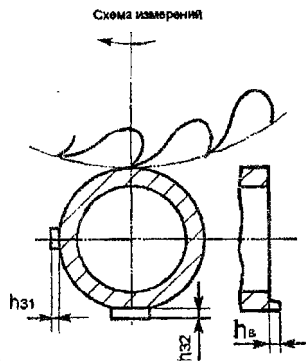


Рис. 8.8. Схема измерений

Условия испытаний и результаты представлены в табл. 8.2.

Условия и результаты испытаний

Тип пилы	Подача на зуб $S_z$ , мм/зуб	Частота вращения $n$ , об/мин	Критерий динамиче- ской ус- тойчиво- сти $C_{r\max}$	Размеры заусениц, мм			Уровень шума, $dB$ (врезание- середина-выход)
				$h_{31}$	$h_{3a}$	$h_e$	
Равно- мерный шаг	0,01	16	79,2	0,15	0,3	0,27	80-84-80
		31,5	59,76	0,11	0,22	0,15	80-90-80
		45	57,6	0,08	0,15	0,12	80-95-80
Неравно- мерный шаг		16	52,36	0,1	0,15	0,15	77-82-77
		31,5	36,2	0,07	0,08	0,07	75-89-75
		45	34,6	0,05	0,03	0,005	75-89-79

Анализ испытаний показывает, что при отрезке пилами с меньшими значениями  $C_{r\max}$  размеры заусениц и уровень шума значительно меньше [26]. Это позволило предположить, что в качестве параметра оценки конструкции пил при проектировании можно использовать значения  $C_{r\max}$ .

Значение  $C_{r\max}$  согласно предложенной методике расчета зависит от диаметра пилы  $D$ , толщины диска  $B$ , общего количества зубьев пилы  $z$ , количества зубьев в группе и углового шага при различных условиях работы пилы – частоты ее вращения  $n$  об/мин, сортамента и размеров заготовки, а также расположения пилы относительно заготовки.

### 8.5. Исследование влияния конструктивных параметров пилы и условий работы на расчетное значение по $C_{r\max}$

Исследования проведены для случая симметричного расположения заготовки относительно пилы. В основу исследований положена методика расчета  $C_{r\max}$ .

Для различных значений диаметров  $D = (200...325)$  мм, с равномерным шагом  $z = 180$  и толщиной диска  $B = 1,8$  мм и  $B = 2,5$  мм в диапазоне скоростей вращения  $n = (10...45)$  об/мин при отрезке труб диаметром  $40 \times 2$  мм рассчитывались значения  $C_{r \max}$ .

В результате анализа расчетных данных установлено, что значение  $C_{r \max}$  для пил с толщиной диска  $B = 1,8$  мм значительно меньше, чем для пил с  $B = 2,5$  мм, и что с увеличением диаметра пилы значение  $C_{r \max}$  снижается.

С увеличением скорости вращения  $C_{r \max}$  также уменьшается. Анализ расчетных значений  $C_{r \max}$  показывает, что для пил с равномерным шагом, толщиной  $B = 2,5$  мм в зависимости от скорости вращения  $(10...15 \text{ об/мин})$  допустимый минимальный диаметр равен  $D = (265...230)$  мм, а для пил с  $B = 1,8$  мм —  $D = (230...210)$  мм.

Исследовано влияние на значения  $C_{r \max}$  наружного диаметра трубы и прутков. Установлено: у одних и тех же пил с равномерным шагом, при одном и том же размере стенки трубы значение  $C_{r \max}$  увеличивается незначительно с увеличением диаметра трубы.

При отрезке прутков характеристики динамического состояния пил постоянно изменяются из-за изменения диаметра заготовки в процессе отрезки. Вместе с тем, как показали теоретические и экспериментальные исследования, наибольшие нагрузки на зуб претерпевает инструмент при прохождении зоны заготовки, равной диаметру прутка.

Поэтому расчеты динамического состояния пил были выполнены для момента прохождения пилы через диаметрально сечение заготовки.

Анализ расчетных значений  $C_{r \max}$  показывает, что динамическое состояние пилы с равномерным шагом одного и того же диаметра с определенным количеством зубьев изменяется в зависимости от диаметра отрезаемой заготовки.

Параллельно на основе расчетных значений  $C_{r \max}$  исследовалось влияние различных конструктивных элементов пил с неравномерным шагом и различными условиями процесса.

Пилы с неравномерным шагом состоят из одинаковых групп зубьев шаг которых неравномерный. В связи с этим возникает задача выбора основных параметров этих групп зубьев, которые бы обеспечили снижение  $C_{r \max}$  в сравнении с пилами, имеющими равномерный шаг.

К основным параметрам группы зубьев с неравномерным шагом относятся количество зубьев в группе  $Z_{гр}$  и значения шагов между зубьями.

Значения шагов в группе определяются соответствующей разбивкой по шагу. Разбивка по шагу может произвольно определяться коэффициентами  $K_i$ , которые выражают отношение каждого шага в группе к номинальному, или задаваться определенным законом распределения и величиной неравномерности  $\Delta$ , выражаемой в процентах относительно к номинальному шагу.

Предварительно исследовалось влияние различных законов и произвольных комбинаций разбивки по шагу на значение  $C_{r \max}$ . В результате было установлено, что при заданном  $Z_{гр}$  значение  $C_{r \max}$  зависит, главным образом, от максимальных и минимальных значений шагов в группе, что позволило принять разбивку шагов по треугольнику.

В табл. 8.3 приведены результаты расчетов значений  $C_{r \max}$  для пил с равномерным и неравномерным шагом  $Z_{гр} = 2; 4; 6$  и 8. Неравномерность шага принималась от 10 до 40 % (0,1...0,4) при разбивке шагов в группе по треугольнику. Расчеты  $C_{r \max}$  проводились при отрезке труб диаметром  $40 \times 2$  мм пилами диаметром 315 мм с количеством зубьев  $Z = 180$  и переточенными до диаметра 275 мм.

Значения  $C_{r \max}$  при отрезке труб диаметром  $40 \times 2$ 

п. объемин	$\Delta/100$	Диаметр пилы $\varnothing 315 \text{ мм}$					Диаметр перфорированной пилы $\varnothing 275 \text{ мм}$				
		Общее количество зубьев в группе - $Z/Z_{\text{гр}}$					Общее количество зубьев в группе - $Z/Z_{\text{гр}}$				
		$Z=180$	180/2	180/4	180/6	176/6	$Z=180$	180/2	180/4	180/6	176/6
2, 25	0	46,68					54,78				
	0,1		46,1	233,94	38,72	25,86		54,1	52,09	45,44	31,93
	0,15		45,38	350,3	29,61	47,22		53,26	48,8	34,74	37,51
	0,2		44,39	466,12	28,85	82,38		52,09	44,31	36,52	34,19
	0,25		43,12	581,26	31,54	125,69		50,6	38,72	39,93	49,71
	0,3		41,58	695,52	31,86	175,81		48,8	33,47	40,33	69,06
	0,4		37,75	920,62	29,1	269,73		44,56	41,69	37,12	119,29
28	0	45,61					51,62				
	0,1		45,05	43,38	37,84	25,24		50,98	49,09	42,82	29,31
	0,15		44,35	40,64	28,93	29,03		50,19	45,98	32,74	34,43
	0,2		43,38	36,89	27,88	26,28		49,09	41,75	33,34	31,17
	0,25		42,14	32,24	30,49	22,59		47,68	36,49	36,45	25,74
	0,3		40,64	26,8	30,79	25,25		45,98	30,33	36,83	28,77
	0,4		36,89	32,82	28,73	28,25		41,75	37,03	51,44	39,3
45	0	44,48					48,49				
	0,1		43,93	42,3	36,9	144,54		47,89	46,11	40,23	26,93
	0,15		43,25	39,63	28,22	215,63		47,15	43,2	30,76	31,54
	0,2		42,3	35,98	26,86	289,96		46,11	39,22	30,38	28,56
	0,25		41,09	31,44	29,39	354,56		44,79	34,28	33,34	24,11
	0,3		39,63	26,13	29,69	421,24		43,2	28,49	39,76	26,94
	0,4		35,98	28,59	32,52	547,42		39,22	33,3	43,0	28,56

Анализ приведенных расчетов  $C_{r \max}$  для пил с неравномерным шагом с  $Z_{\text{гр}} = 2$  в сравнении с пилами, имеющими равномерный шаг, показывает, что при увеличении неравномерности шага критерий  $C_{r \max}$  снижастся. Учитывая, что снижение значения  $C_{r \max}$  незначительно с ростом неравномерности шагов в группе, применение пил с неравномерным шагом, где  $Z_{\text{гр}} = 2$  не представляется целесообразным.

К аналогичному выводу приводит анализ расчетных значений  $C_{r \max}$  при отрезке труб диаметром  $40 \times 2$  с  $Z_{\text{гр}} = 4$ .

С позиций выбора минимального значения  $C_{r \max}$  (табл. 8.1) при отрезке труб пилами с  $Z_{\text{гр}} = 6$  следует принимать неравномерность шага

при разбивке неравномерности шагов по треугольнику  $\Delta = (15...20) \%$ , с  $Z_{гр} = 8 - \Delta = 10 \%$ . При увеличении количества зубьев в группе с неравномерным шагом и значения неравномерности шагов в группе  $\Delta$  с разбивкой по треугольнику увеличивается вероятность поломки одного из зубьев в группе из-за уменьшения окружного шага, а следовательно и размеров канавки.

Однако с увеличением диаметра пилы шаг увеличивается, поэтому для пил диаметром 315 мм и более с  $Z=180$  можно рекомендовать  $Z_{гр} = 6$  с неравномерностью  $\Delta$  до 30 % и  $Z_{гр} = 8$  с  $\Delta \leq 25 \%$ . Вместе с тем, чтобы обеспечить максимальное количество переточек без поломки зубьев следует рекомендовать значения неравномерности шага, рекомендуемые для минимально допустимых диаметров пил.

В табл. 8.4 приведены расчетные значения  $C_{r\max}$  при отрезке прутков пилами диаметром 315 мм, переточенными до диаметра 275 мм,  $Z=120$  и переменной толщиной резца  $B = 1,8...1,5$ .

Для определения области условий работы пилами с неравномерным шагом, размеров отрезасмых заготовок и разработки рекомендаций по переточке таких пил необходимо исследовать влияние различных параметров процесса отрезки на значение  $C_{r\max}$ .

Так сопоставлялись процессы отрезки пилами с неравномерным шагом и пилами, имеющими равномерный шаг. Рассчитывались значения  $C_{r\max}$  для пилы с переменной толщиной диска. В качестве исследуемых величин процесса отрезки приняты параметры, определяющие динамическое состояние пилы: диаметр пилы, количество зубьев, частота вращения пилы, наружный диаметр отрезаемой заготовки и толщина стенки трубы (при отрезке труб). Расчеты производились для условия симметричного расположения заготовки относительно оси пилы.

Значения  $C_{r\max}$  при отрезке прутков  $\varnothing 40$  пилами с  $Z=120$ .

п, об/мин	$\Delta/100$	Диаметр пилы $\varnothing 315\text{мм}$					Диаметр переточенной пилы $\varnothing 275\text{мм}$				
		Количество зубьев в группе - $Z_p$					Количество зубьев в группе - $Z_p$				
		1	2	4	6	8	1	2	4	6	8
22,5	0	23,13					70,06				
	0,1		22,85	22,0	19,2	109,52		69,2	66,84	58,13	39,17
	0,15		24,78	20,62	22,35	186,04		68,13	62,43		40,73
	0,2		32,98	24,37	24,19	286,81		66,64	56,68	55,31	68,99
	0,25		41,12	29,82	23,31	417,1		64,73	49,54	60,48	105,7
	0,3		42,55	34,86	32,84	579,81		46,55	41,18	61,08	148,61
	0,4		65,11	43,43	55,18	1001,36		56,68	48,42	59,61	235,52
28	0	21,88					59,59				
	0,1		21,61	20,82	18,16	26,52		58,86	56,67	49,44	33,31
	0,15		21,28	23,04	21,48	26,84		57,95	53,1	37,8	21,85
	0,2		22,87	30,66	23,26	24,31		64,92	48,21	41,78	23,07
	0,25		28,51	38,24	30,07	28,21		80,97	42,13	45,69	35,34
	0,3		23,12	45,76	42,36	29,72		226,19	35,02	51,91	49,69
	0,4		45,14	60,57	71,18	49,00		128,26	32,03	85,55	78,75
45	0	20,63					51,01				
	0,1		20,38	19,63	45,06	25,86		50,44	48,57	42,37	28,55
	0,15		20,07	22,49	67,4	38,61		49,65	46,39	32,4	19,43
	0,2		19,63	29,93	89,53	51,16		48,57	61,74	32,82	28,02
	0,25		21,24	37,33	111,37	63,44		47,18	76,99	35,88	42,77
	0,3		22,34	44,67	132,84	75,37		68,32	92,13	36,24	59,82
	0,4		33,63	59,13	174,43	97,97		41,31	121,95	29,42	98,64

Анализ расчетных значений  $C_{r\max}$  показывает, что пилы с неравномерным шагом зубьев в группе при определенных диаметрах и скорости вращения пилы имеют значительно меньшие значения  $C_{r\max}$ , чем пилы той же конструкции с равномерным шагом.

Анализ расчетных данных показывает, что наименьшее влияние на  $C_{r\max}$  количества зубьев пилы наблюдается у пил с равномерным шагом и пил с  $Z_{гp} = 6$  и  $\Delta = 15\%$ . Однако следует отметить, что увеличение количества зубьев у этих конструкций пил несколько увеличивает значение  $C_{r\max}$ . Для пилы с  $Z_{гp} = 8$  и  $\Delta = 10\%$  рекомендуемое количество

зубьев для отрезки труб диаметром  $40 \times 2$  мм может быть  $Z = 120$  и  $Z > 160$ , а для пил с  $Z_{гр} = 6$  и  $K_i = 0,7-0,9-1,3-1,1-0,8-1,2-2 = 144$ .

Анализ влияния толщины стенки трубы приводит к выводу, что пилы с равномерным шагом только в очень малом диапазоне толщин, где окружной шаг пилы кратен толщине стенки, превосходит по своим динамическим характеристикам предложенные конструкции для отрезки труб.

В связи с этим следует отметить, что рассматриваемые конструкции пил с неравномерным шагом являются более универсальными.

Анализ расчетных данных позволяет сделать вывод, что в общем случае пилы с неравномерным шагом зубьев имеют свои области скоростей вращения, где их динамические характеристики значительно превосходят характеристики пил с равномерным шагом.

Пила с  $Z = 176$ ,  $Z_{гр} = 8$ ,  $\Delta = 10\%$  с распределением неравномерности шагов по треугольнику ( $K_i = 0,8-0,9-1,0-1,1-1,2-1,1-1,0-0,9$ ) по сравнению с другими конструкциями имеет наиболее широкий диапазон скоростей, где значение  $C_{r\max}$  значительно ниже, чем значения пил с равномерным шагом.

Пилы этой конструкции диаметром 315 мм можно рекомендовать для отрезки заготовок труб диаметром  $40 \times 2$  мм в диапазоне скоростей их вращения  $n = 10 \dots 40$  об/мин, а пилы диаметром 275 мм – в диапазоне  $n > 15$  об/мин. В указанных диапазонах скоростей вращения диска пилы изменение  $n$  не оказывает существенного влияния на значение  $C_{r\max}$ . Пилы с  $Z = 180$ ,  $Z_{гр} = 6$ ,  $\Delta = 15\%$  с распределением неравномерности шагов в группе по треугольнику ( $K_i = 0,775-0,925-1,075-1,225-1,075-0,925$ ) имеют область скоростей вращения пилы, где наблюдаются улучшенные динамические характеристики значительно уже в сравнении с первой конструкцией. Так, пилы диаметром 315 мм показывают меньшие значения  $C_{r\max}$  в диапазоне  $n = 10 \dots 30$  об/мин и  $n > 38$  об/мин, пилы диаметром 275 мм –  $n = 15 \dots 25$  об/мин и  $n > 30$  об/мин. Наиболее чувствительны к



изменению скоростей вращения пилы с  $Z = 180$  и распределением шагов в группе по соотношению  $K_i = 0,7-0,9-1,3-1,1-0,8-1,2$ .

На основании расчетных данных был проведен анализ влияния на значения  $C_{r \max}$  исследуемых конструктивных параметров пил как с равномерным, так и с неравномерным шагом, с  $Z_{1p} = 8$ ,  $\Delta = 10\%$ , с распределением по треугольнику при отрезке прутков диаметром 10...60 мм в диапазоне скоростей вращения пилы от 10 об/мин до 46 об/мин. Этот анализ показал, что влияние исследуемых параметров при отрезке прутков на значения  $C_{r \max}$  носит тот же характер, что и при отрезке труб, но ярче выраженный, так как в диапазоне рассмотренных диаметров прутков происходит более резкое изменение амплитуд возмущающих сил. Степень влияния изменения диаметра пил при переточках определялась диаметром прутка, количеством зубьев и скоростью вращения пилы. В рассмотренном диапазоне диаметров наибольший диаметр пилы с неравномерным шагом для отрезки прутков, как показали исследования, следует выбирать диаметр не более 305 мм.

Каждая из конструкций пил имеет свой диапазон скоростей вращения, где, с точки зрения динамической устойчивости, её работа будет стабильной. Пилы с равномерным шагом, в сравнении с пилами с неравномерным шагом зубьев в группе, при отрезке прутков диаметром 10...60 мм и прямоугольных заготовок имеют преимущества только в случае, если окружной шаг кратен (или близок к этому) толщине отрезаемой заготовки.

Однако при первой же переточке это преимущество теряется. Проведенные исследования показывают, что пилы с неравномерным шагом с точки зрения динамической устойчивости более универсальны.

## 8.6. Экспериментальное исследование и промышленное использование пил

### 8.6.1. Экспериментальное исследование дисковых пил

Чтобы подтвердить возможность использования параметра динамического состояния пил  $C_{r \max}$  для разработки динамически более устойчивых пил и определить характеристики процесса отрезки такими пилами в сравнении со стандартными, в лаборатории кафедры инструментального производства были произведены экспериментальные исследования дисковых пил с различными значениями  $C_{r \max}$ .

Всего в испытаниях участвовало 23 дисковых пилы различных конструкций. Конструктивные и геометрические параметры испытуемых пил приведены в протоколе их измерений.

Экспериментальные исследования проводились при отрезке труб из стали 45 ГОСТ 1050-74 и нержавеющей стали St 1.4301, в составе которой углерода (C) = 0,045%, хрома (Cr) = 17...19 %, прочность на разрыв составляла 620 МПа. В экспериментальных исследованиях при отрезке прутков использовалась сталь 45 ГОСТ 1050-74 и сталь 612Х18Н10Т ГОСТ 5632-72.

При лабораторных испытаниях производилось измерение заусениц и сил резания, измерялись уровень шума прибором ИШВ-1 и шероховатость поверхности профилографом-профилометром модели 202. Измерение заусениц производилось на микроскопе МИМ-306 и на большом универсальном микроскопе.

Для проведения испытаний дисковых пил был оборудован стэнд на базе токарно-винторезного станка 1616. Точность станка, согласно паспортным данным, соответствовала ГОСТ 480-ПЕ (станки токарные и токарно-винторезные. Основные размеры), жесткость соответствовала ГОСТ 18097-72 (Станки токарные и токарно-винторезные. Нормы точности и жесткости). Для закрепления заготовки на суппорте станка устанавливалась динамометрическая головка модели УДМ-600 для изме-

рения сил резания. Измерение составляющих сил резания производилась при установке заготовок в призмах, закрепленных на суппорте станка. Дисковая пила на оправке устанавливалась и жестко закреплялась в шпинделе станка.

Для измерения усилий резания использовался компьютерный комплекс, состоящий из силоизмерительного датчика универсального динамометра УДМ-600, блока сопряжения универсального динамометра УДМ с персональным IBM-совместимым компьютером класса АТ486.

Для подтверждения выдвинутой гипотезы о том, что процесс резания будет более стабильным и устойчивым у пил, конструкция которых имеет лучшие характеристики, были проведены силовые испытания различных конструкций пил при разных скоростях вращения. Учитывая сложную взаимосвязь явлений, сопровождающих процесс резания, силовые характеристики при отрезке той или иной пилой могут дать только косвенную оценку (хуже-лучше) рассматриваемой конструкции пилы.

В результате силовых испытаний установлено, что амплитуда изменения составляющих сил резания при отрезке заготовок с меньшими значениями  $C_{r\max}$  меньше. С уменьшением  $C_{r\max}$  и уменьшением амплитуды сил резания уменьшается уровень шума на 5...10 В [26].

На рис. 8.9 приведены спектры составляющих усилий резания пил с равномерным шагом диаметром 275 мм,  $Z = 180$ ,  $B = 2,5$  мм, при отрезке труб диаметром  $38,3 \times 3,5$  при скорости вращения пилы  $n = 16$  об/мин ( $C_{r\max} = 113$ ) и при  $n = 31,5$  об/мин ( $C_{r\max} = 593$ ) и подаче  $S_z = 0,01$  мм/зуб. Уровень шума для приведенных случаев составил для  $n = 16$  об/мин 83–89–84, а для  $n = 31,5$  об/мин 98–105–98. При испытаниях различных конструкций пил также установлено, что, чем больше биение пилы как радиальное, так и торцевое, тем шире разброс амплитуд изменения составляющих сил резания. Это подтверждает, что расчетный параметр, определяемый кинематическим возбуждением изгибных колебаний пилы, может быть критерием оценивания конструкции с точки зрения её динамических характеристик.

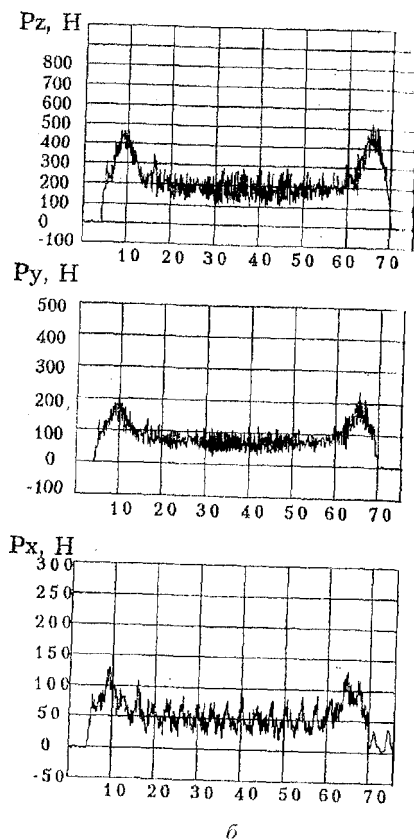
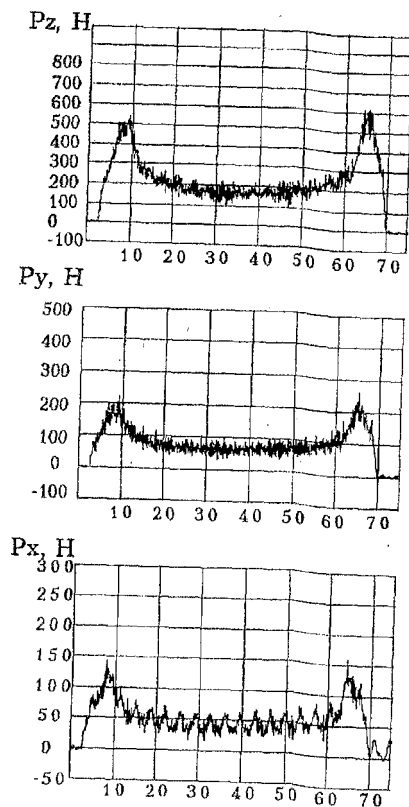
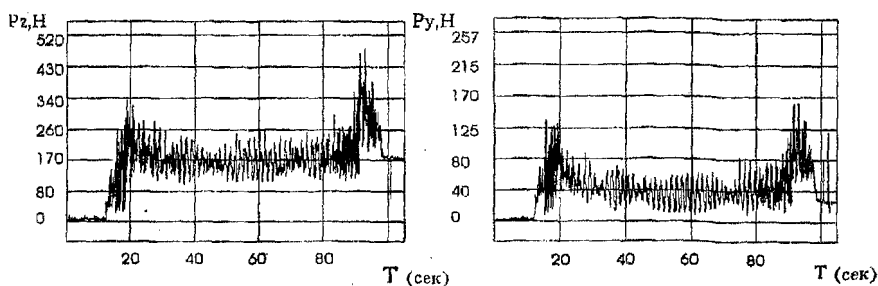
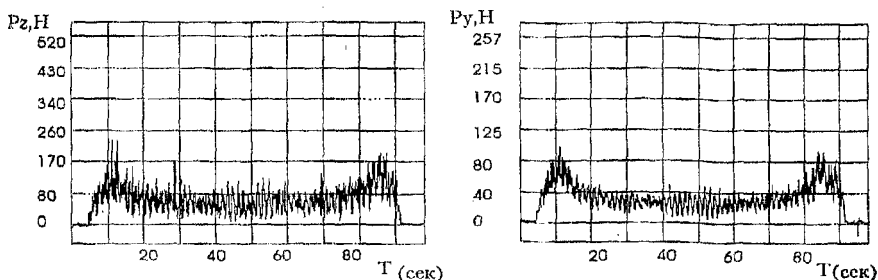


Рис. 8.9. Спектры составляющих силы резания при отрезке  
 трубы диаметром  $38,3 \times 3,5$ ,  $D = 275$ ,  $Z = 180$ :  
 а -  $n = 16$  об/мин,  $C_{r \max} = 113$ ; б -  $n = 31,5$  об/мин,  $C_{r \max} = 593$



а) равномерный шаг,  $C_{r\max} = 46,66$



б

Рис. 8.10. Спектры составляющих силы резания:

а – равномерный шаг,  $C_{r\max} = 46,66$ ; б – неравномерный шаг,  $C_{r\max} = 29,39$

На рис. 8.10 приведен спектр составляющих сил резания  $P_z$  и  $P_y$  при отрезке трубы диаметром  $38 \times 3,4$  с  $n = 31,5$  об/мин,  $S_z = 0,01$  мм/зуб пилой новой конструкции с переменной толщиной диска ( $B = 1,8 \times 1,5$ ),  $Z = 168$  с равномерным шагом ( $C_{r\max} = 46,66$ ) и неравномерным шагом ( $C_{r\max} = 29,39$ ) с  $Z_{тр} = 6$ , неравномерностью и распределением шагов по треугольнику  $\Delta = 15\%$  ( $\epsilon_i = 1,661-1,982-2,303-2,625-2,303-1,962$ ).

Приведенные результаты измерения составляющих усилий резания показывают, что динамические характеристики пил с переменным шагом при определенной скорости превышают те же характеристики пил с равномерным шагом зубьев.

Анализ результатов измерений позволяет сделать вывод о том, что в общем случае уменьшение критерия приводит к уменьшению величины заусениц.

Проведенные силовые испытания при отрезке прутков подтверждают те же выводы, которые получены при отрезке труб.

Результаты измерения заусениц при отрезке прутков диаметром 10 мм, диаметром 25 мм и диаметром 45 мм различными пилами при разных условиях отрезки показали, что при скоростях вращения пилы  $n = 22$  об/мин и  $n = 31$  об/мин размеры заусениц измеряемые на выходе пилы при отрезке заготовки коррелируются со значением  $C_{r\max}$ , максимальным значениям  $C_{r\max}$  соответствуют меньшие размеры заусениц. При вращении пилы с  $n = 45$  об/мин размеры заусениц больше, чем при  $n = 31,5$  об/мин, не смотря на незначительное уменьшение  $C_{r\max}$ . Это может быть объяснено тем, что на процесс отрезки при  $n = 45$  об/мин и образование заусениц, другие явления, сопровождающие процесс резания оказывают более существенное влияние, чем динамическое состояние пилы.

#### **8.6.2. Лабораторно-промышленные испытания пил новой конструкции**

Чтобы подтвердить эффективность применения результатов работы и методик расчета для практического использования на кафедре инструментального производства НТУУ «КПИ» были разработаны новые конструкции дисковых пил повышенной динамической устойчивости.

В основу проектирования таких пил положены методики расчета параметра оценки кинематического возбуждения изгибных колебаний  $C_{r\max}$ .

На динамическое состояние пилы заданного диаметра и толщины для обработки определенной формы и размера заготовки влияет количество зубьев с неравномерным шагом в группе и распределение неравномерности шагов внутри группы. Поэтому при проектировании пил для отрезки труб диаметром от 10 мм до 60 мм с толщиной стенки от 0,1 мм до 10 мм и для прутков и прямоугольных заготовок размером

10...60 мм рассчитывались значения  $C_{r\max}$  для различного количества зубьев в группе ( $Z_{гр} = 4-8$ ) с различным распределением неравномерности шагов внутри группы.

Лучшими конструкциями с точки зрения динамической устойчивости считались пилы с наименьшими значениями  $C_{r\max}$ , выбранными на первых трех собственных формах.

Для отрезки труб наружным диаметром от 10 до 60 мм с толщиной стенки от 0,1 мм до 10 мм рекомендуется использовать пилы с неравномерным шагом зубьев в группе:

- с  $Z_{гр} = 6$ , неравномерностью  $\Delta = 10\%$  и распределением по треугольнику, что соответствует следующему соотношению шагов в группе  $k = 0,775-0,925-1,075-1,225-1,075-0,925$ ;

- с  $Z_{гр} = 6$ , неравномерностью шагов в группе соответствующей соотношению шагов в группе  $k = 0,7-0,9-1,3-1,1-0,8-1,2$ ;

- с  $Z_{гр} = 8$ , неравномерностью  $\Delta = 10\%$  и распределением шагов в группе по треугольнику, что соответствует распределению шагов  $k = 0,8-0,9-1,0-1,1-1,0-0,9$ .

Для отрезки прутков диаметром от 10 до 60 мм рекомендуется применение пил с неравномерным шагом зубьев в группе с  $Z_{гр} = 8$ , неравномерностью  $\Delta = 10\%$  с распределением по треугольнику ( $k = 0,8-0,9-1,0-1,1-1,0-0,9$ ).

Элементы пил приведены на рис. 8.11.

Рекомендуемое количество зубьев определяется толщиной стенки трубы или диаметром заготовки и свойствами отрезаемого материала, и выбирается из условия  $Z \leq 180$  с увеличением размера заготовки и вязкости материала отрезаемой заготовки количество зубьев уменьшается.

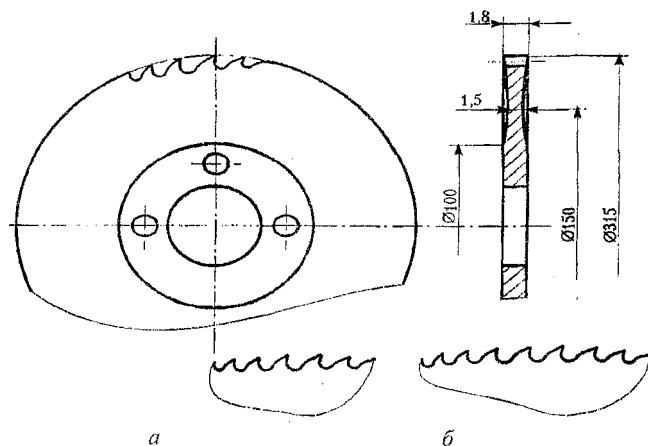


Рис. 8.11. Элементы пилы новой конструкции:  
 а – группа зубьев  $Z_{гр} = 6$ ; (0,775–0,925–1,073–1,225–1,075–0,925);  
 б – группа зубьев  $Z_{гр} = 8$ ; (0,8–0,9–1,0–1,1–1,2–1,1–1,0–0,9)

На значения  $C_{r \max}$  также оказывает влияние диаметр пилы ( $D$ , мм), количество зубьев пилы ( $Z$ ) и частота вращения ( $N$ , об/мин). Количество зубьев пилы выбирается в зависимости от размеров заготовки из условия вместимости отрезки. Рекомендуемые скорости вращения пилы в зависимости от диаметра и количества зубьев пилы приведены в табл. 8.5.

Таблица 8.5

**Рекомендуемые скорости вращения пилы при отрезке труб, прутков и прямолинейных заготовок пилами с неравномерным шагом зубьев**

Профиль заготовки	$Z_{гр}$ , значение шагов в группе	$Z$	$D$ , мм	$n$ , об/мин
Трубы	$Z_{гр} = 6$ $\epsilon_1 = 1,55-1,85-2,15-2,45-2,15-1,85$	180	315	10...30; 38...46
			305	10...34; 42...46
			295	10...36
			285	14...42
			275	16...46



Профиль заготовки	$Z_{гр}$ , значение шагов в группе	$Z$	$D$ , мм	$n$ , об/мин
Трубы	$Z_{гр} = 6$ , $\varepsilon_1 = 1,661-1,982-2,304-$ $-2,625-2,304-1,982$	168	315	14...46
			305	12...36; 44...46
			295	12...40
			285	14... 16; 20...46
			275	16...46
То же	$Z_{гр} = 6$ , $\varepsilon_1 = 1,9375-2,3125-2,6875-$ $-3,0625-2,6875$	144	315	16...38
			305	14...42
			295	16...24; 28...46
			285	18...46
			275	24...46
- " -	$Z_{гр} = 6$ , $\varepsilon_1 = 1,4-1,8-2,6-2,2-1,6-2,4$	180	315	10...14; 20...30; 36...46
			305	14...16; 22...34; 40...46
			295	16...18; 24...38; 44...46
			285	18...22; 28...42
			275	22...24; 30...46
- " -	$Z_{гр} = 6$ , $\varepsilon_1 = 1,5-1,929-2,786-2,357-$ $-1,714-2,571$	168	315	20...34; 40...46
			305	22...36; 44...46
			295	16...20; 26...40
			285	20...22; 30...46
			275	22...24; 32...46
- " -	$Z_{гр} = 6$ , $\varepsilon_1 = 1,75-2,25-3,25-2,75-2-3$	144	315	18...20; 24...40
			305	18...20; 26...44
			295	20...24; 30...46
			285	22...26; 34...46
			275	24...30; 38...46

Профиль заготовки	$Z_{гр}$ , значение шагов в группе	$Z$	$D$ , мм	$n$ , об/мин
Трубы	$Z_{гр} = 8$ , $\epsilon_1 = 11,636-1,841-2,045-2,25-2,455-2,25-2,045-1,841$	176	315	10...42
			305	12...46
			295	12...46
			285	14...46
			275	16...46
То же	$Z_{гр} = 8$ , $\epsilon_1 = 11,714-1,929-2,143-2,357-2,571-2,357-2,143-1,929$	168	315	10...44
			305	12...16; 20...46
			295	14...46
			285	14...20; 24...46
- " -	$Z_{гр} = 8$ , $\epsilon_1 = 12,0-2,25-2,5-2,75-3,0-2,75-2,5-2,25$	144	315	10...26; 30...46
			305	12...46
			295	16...46
			285	16...46
- " -	$Z_{гр} = 8$ , $\epsilon_1 = 12,4-2,7-3,0-3,3-3,6-3,3-3,0-2,7$	120	315	10...20; 24...44
			305	16...44
			295	16...24; 30...44
			285	24...42
- " -	$Z_{гр} = 8$ , $\epsilon_1 = 12,5714-2,8929-3,2143-3,5357-3,8571-3,5357-3,2143-2,8929$	112	315	14...22; 26...34; 38...46
			305	18...38; 42...46
			295	20...28; 32...42
			285	22...46
- " -	$Z_{гр} = 8$ , $\epsilon_1 = 13,0-3,375-3,75-4,125-4,5-4,125-3,75-3,375$	96	315	18...26; 30...40; 44...46
			305	20...44
			295	22...32; 36...46
			285	22...36; 40...46
- " -			275	28...46

Совместно с кафедрой инструментального производства и фирмой Loroach (Германия) на фирме Sholler были проведены в условиях массового производства стойкостного испытания при отрезке заготовок труб диаметром  $40 \times 2$  из нержавеющей стали.

Испытания новых конструкций пил с переменным шагом проводились в сравнении с пилами той же конструкции, имеющими равномерный шаг зубьев.

Испытания проводилось при скорости вращения пилы  $n = 28$  об/мин и подачи на зуб  $Sz = 0,075$  мм/зуб.

Испытывалось две конструкции пил диаметром 310 мм и распределение шагов по треугольнику ( $\epsilon_1 = 1,661-1,982-2,304-2,625-2,304-1,982$ ) и пила диаметром 310 мм с  $Z = 168$  и распределении по шагу соответствующему следующему соотношению между шагами  $k = 0,7-0,9-1,3-1,1-0,8-1,2$  ( $\epsilon_1 = 1,5-1,929-2,786-2,357-1,714-2,571$ ). При скорости вращения  $n = 28$  об/мин значения критерия испытываемых пил незначительно отличались друг от друга и, соответственно, составляли 21,7 и 22,04. Значение критерия пилы с равномерным шагом было 44,19.

В результате испытания установлено, что до затупления фаски износа по задней поверхности  $h_z = 0,6$  мм пилы с равномерным шагом зубьев выполняет 4000 резов, а пилы с неравномерным шагом обеих рассматриваемых конструкций в среднем 6000 резов. По результатам проведенных испытаний пилы с переменным сечением показали повышение стойкости в 1,5 раза в сравнении с пилами той же конструкции, имеющими постоянный шаг.

Наряду со стойкостными испытаниями у пил новой конструкции, как с постоянным шагом зубьев, так и с неравномерным, были произведены измерения уровня шума, шероховатости поверхности реза. В процессе измерений этих параметров фиксировалась нагрузка на приводе пилы.

Измерение этих параметров были проведены также для пил, ранее применявшихся на фирме, диаметрами  $D = 310$  мм, толщиной диска  $B = 2,5$  мм,  $Z = 180$ .

По данным фирмы Sholler использование пил с переменным сечением и равномерным шагом позволило повысить производительности отрезки за счет увеличения подачи в 1,25...1,4 раза. Результаты измерений приведены в табл. 8.6.

Таблица 8.6

Результаты производственных испытаний пил

Пила $\varnothing \times$ толщина $\times$ количество зубьев	Распределение шагов	Шум при рез- ке, дБ	$C_{r, \max}$	Нагрузка на привод пилы, $\Delta$		
				на- чало	сере- дина	ко- нец
$\varnothing 310 \times 1,8 \times 1,5 \times 168$	0,78–0,52–1,08–1,2– –0,8–0,92	92–93	21,74	5,5	4,3	5,9
$\varnothing 310 \times 1,8 \times 1,5 \times 168$	1,2–0,8–1,1–1,3– –0,9–0,7	92–93	22,04	5,3	4,2	5,7
$\varnothing 310 \times 1,8 \times 1,5 \times 168$	Постоянный шаг	93–97	44,19	5,6	4,4	6,3
$\varnothing 310 \times 1,8 \times 1,5 \times 168$	Постоянный шаг	97–103	60,98	6,1	4,4	6,3

Анализ результатов измерения уровня шума и шероховатости поверхности и нагрузки на приводе пилы показывает, что у пил с меньшим значением  $C_{r, \max}$  уровень шума, шероховатость реза и нагрузка на приводе станка меньше. Это является практическим подтверждением выводов и рекомендаций теоретических исследований.

Было проведено промышленное опробование пил новой конструкции на заводе «Генератор». При отрезке прутков диаметром 30 мм из стали 12X18H10T со скоростью вращения пилы  $n = 28$  об/мин и подаче на  $S_z = 0,02$  мм/зуб испытывались пилы диаметром 315 мм,  $B = 1,8 \times 1,5$ ;  $Z = 120$  с неравномерным шагом зубьев с  $Z_{rp} = 8$  и  $\Delta = 10\%$ , с распределением по треугольнику. Испытания проводились в сравнении с пилами диаметром 315 мм,  $B = 1,8 \times 1,5$ ;  $Z = 120$ , имеющими равномерный шаг. Испытывалось по три пилы этих конструкций. В результате испытаний установлено, что пилы новой конструкции при отрезке прутка диаметром 30 мм на указанных режимах показали повы-

шенные стойкости в 1,5...1,8 раза выше. В процессе испытаний отмечено снижение уровня шума и шероховатости.

В настоящее время пилы с неравномерным шагом зубьев, которые проектируются по разработанной в работе методике, широко используются ведущими фирмами при отрезке различного по форме и размерам сортамента.

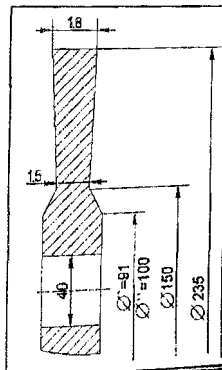
Вместе с ним анализ расчетных значений  $C_{r \max}$  для пил, используемых в мебельной и деревообрабатывающей промышленности, позволяет их рекомендовать для обработки древесностружечных плит, пластика, дерева и других материалов.

Именно это наряду с разработанной технологией твердосплавных пил с неравномерным шагом положено в основу полученной лицензии.

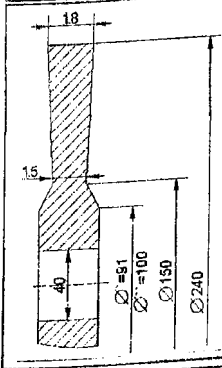
Таким образом, предложенные методики расчета обеспечили создание нового направления, а именно, создание пил с неравномерным шагом повышенной стойкости.

## Квадраты собственных круговых частот для различных типоразмеров пил

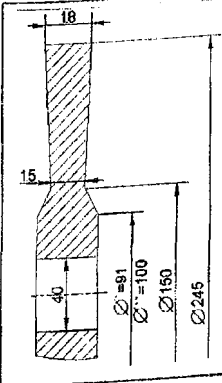
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 235 мм; толщина – 1,8–1,5 мм			
1	0,30376800E+07	11	0,35770700E+08
2	0,30925900E+07	12	0,69321200E+08
3	0,31019600E+07	13	0,70608500E+08
4	0,39099300E+07	14	0,10518700E+09
5	0,39183300E+07	15	0,11142800E+09
6	0,73999700E+07	16	0,11179900E+09
7	0,74072200E+07	17	0,12463713E+09
8	0,16640600E+08	18	0,12485481E+09
9	0,16723500E+08	19	0,13209254E+09
10	0,35770700E+08	20	0,13324379E+09



Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 240 мм; толщина 1,8–1,5 мм			
1	0,26141900E+07	11	0,33052974E+08
2	0,26552400E+07	12	0,63962338E+08
3	0,26634400E+07	13	0,65148732E+08
4	0,33869400E+07	14	0,91740453E+08
5	0,33938900E+07	15	0,97443156E+08
6	0,65908900E+07	16	0,97727445E+08
7	0,65977207E+07	17	0,11523464E+09
8	0,15133564E+08	18	0,11543584E+09
9	0,15210260E+08	19	0,11624031E+09
10	0,32857658E+08	20	0,11720010E+09



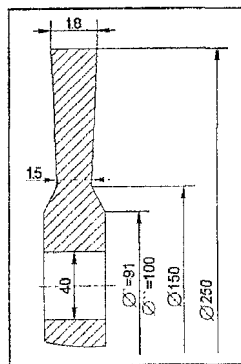
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 245 мм; толщина 1,8–1,5 мм			
1	0,22649300E+07	12	0,30293100E+08
2	0,22949500E+07	13	0,59199500E+08
3	0,23017200E+07	1	0,60294100E+08
4	0,29530200E+07	4	0,80466500E+08
5	0,29590600E+07	15	0,85670600E+08
6	0,59060200E+07	16	0,85910698E+08
7	0,59121400E+07	17	0,10282416E+09
8	0,13828500E+08	18	0,10366250E+09
9	0,13898000E+08	19	0,10683449E+09
10	0,30293100E+08	20	0,10702462E+09



Квадраты собственных круговых частот  
изгибных колебаний дисковой фрезы:

внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 250 мм; толщина – 1,8–1,5 мм

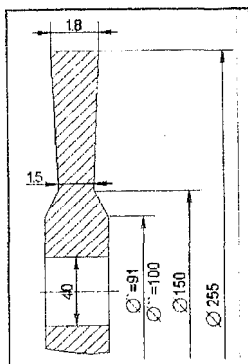
1	0,17226900E+07	11	0,26088694E+08
2	0,17362400E+07	12	0,51030457E+08
3	0,17411100E+07	13	0,51967740E+08
4	0,22745800E+07	14	0,62672204E+08
5	0,22793100E+07	15	0,67031030E+08
6	0,48017600E+07	16	0,67206367E+08
7	0,48074100E+07	17	0,81439972E+08
8	0,11655900E+08	18	0,82084485E+08
9	0,11714296E+08	19	0,92359988E+08
10	0,25938600E+08	20	0,92536284E+08



Квадраты собственных круговых частот  
изгибных колебаний дисковой фрезы:

внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 255 мм; толщина – 1,8–1,5 мм

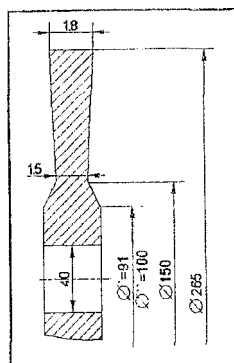
1	0,17226900E+07	11	0,25938600E+08
2	0,17362400E+07	12	0,51030500E+08
3	0,17411100E+07	13	0,51967700E+08
4	0,22745800E+07	14	0,62672200E+08
5	0,22793100E+07	15	0,67031030E+08
6	0,48017600E+07	16	0,67206367E+08
7	0,48074100E+07	17	0,81439972E+08
8	0,11655900E+08	18	0,82084485E+08
9	0,11714300E+08	19	0,92359988E+08
10	0,25938600E+08	20	0,92536284E+08



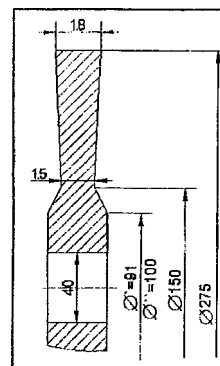
Квадраты собственных круговых частот  
изгибных колебаний дисковой фрезы:

внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 265 мм; толщина – 1,8–1,5 мм

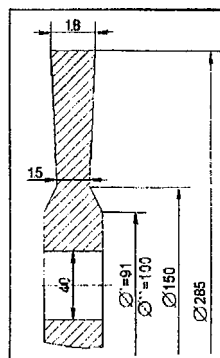
1	0,13339600E+07	11	0,22417200E+08
2	0,13359300E+07	12	0,44340600E+08
3	0,13407100E+07	13	0,45146100E+08
4	0,17832800E+07	14	0,49576600E+08
5	0,17870800E+07	15	0,53262400E+08
6	0,39668600E+07	16	0,53377500E+08
7	0,39728000E+07	17	0,65490300E+08
8	0,99413700E+07	18	0,65972500E+08
9	0,99941300E+07	19	0,80431800E+08
10	0,22417200E+08	20	0,80597500E+08



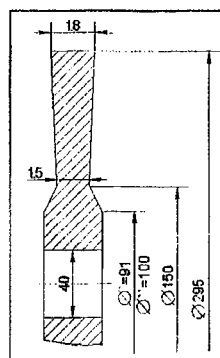
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 275 мм; толщина – 1,8–1,5 мм			
1	0,10423500E+07	11	0,19522000E+08
2	0,10466300E+07	12	0,38776500E+08
3	0,10478700E+07	13	0,39410400E+08
4	0,14185000E+07	14	0,39821096E+08
5	0,14213800E+07	15	0,42882488E+08
6	0,33201800E+07	16	0,42957424E+08
7	0,33258400E+07	17	0,53350860E+08
8	0,85612600E+07	18	0,53716352E+08
9	0,86081600E+07	19	0,70479556E+08
10	0,19522000E+08	20	0,70634410E+08



Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 285 мм; толщина – 1,8–1,5 мм			
1.	0,82468600E+06	11.	0,17120700E+08
2.	0,82797900E+06	12.	0,32218700E+08
3.	0,83478500E+06	13.	0,34143800E+08
4.	0,11442600E+07	14.	0,34763500E+08
5.	0,11463900E+07	15.	0,34943100E+08
6.	0,28129500E+07	16.	0,34996000E+08
7.	0,28176400E+07	17.	0,43977700E+08
8.	0,74385100E+07	18.	0,44262830E+08
9.	0,74789600E+07	19.	0,61958323E+08
10.	0,17120700E+08	20.	0,62174492E+08



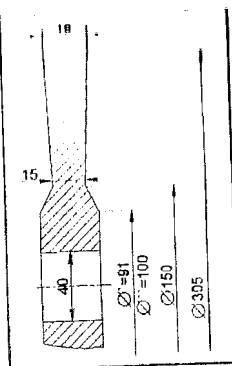
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 295 мм; толщина – 1,8–1,5 мм			
1	0,66095900E+06	11	0,15193216E+08
2	0,66342300E+06	12	0,26435128E+08
3	0,67391400E+06	13	0,28786190E+08
4	0,93515800E+06	14	0,28824765E+08
5	0,93675900E+06	15	0,30216296E+08
6	0,24089800E+07	16	0,30760709E+08
7	0,24131000E+07	17	0,36641043E+08
8	0,65135675E+07	18	0,36866894E+08
9	0,65487079E+07	19	0,52532910E+08
10	0,15109158E+08	20	0,52988148E+08





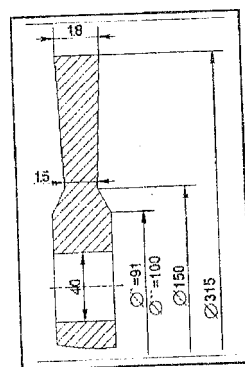
Квадраты собственных круговых частот  
изгибных колебаний дисковой фрезы:  
внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 305 мм; толщина – 1,8–1,5 мм

1	0,53483400E+06	11	0,13404500E+08
2	0,53667000E+06	12	0,21895000E+08
3	0,54948600E+06	13	0,23940400E+08
4	0,77208300E+06	14	0,23968700E+08
5	0,77333500E+06	15	0,26871906E+08
6	0,20808400E+07	16	0,27352013E+08
7	0,20846000E+07	17	0,30814310E+08
8	0,57399000E+07	18	0,30994893E+08
9	0,57706600E+07	19	0,44823560E+08
10	0,13404500E+08	20	0,45190930E+08



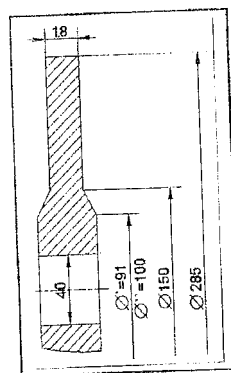
Квадраты собственных круговых частот  
изгибных колебаний дисковой фрезы:  
внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 315 мм;  
толщина – 1,8–1,5 мм

1	0,43675300E+06	11	0,12014536E+08
2	0,43812100E+06	12	0,18292986E+08
3	0,45230800E+06	13	0,20083898E+08
4	0,64362400E+06	14	0,20104599E+08
5	0,64464500E+06	15	0,24005273E+08
6	0,18116400E+07	16	0,24427436E+08
7	0,18150840E+07	17	0,26137026E+08
8	0,50874437E+07	18	0,26282680E+08
9	0,51145524E+07	19	0,38550495E+08
10	0,11949955E+08	20	0,38853361E+08

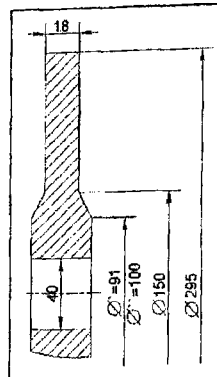


Квадраты собственных круговых частот  
изгибных колебаний дисковой фрезы:  
внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 285 мм; толщина – 1,8 мм

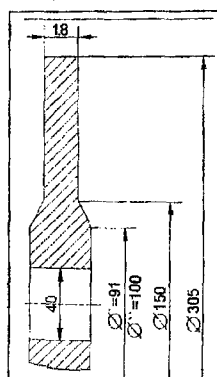
1	0,86941500E+06	11	0,20433173E+08
2	0,87337300E+06	12	0,36017124E+08
3	0,88719600E+06	13	0,39123642E+08
4	0,12540800E+07	14	0,39205073E+08
5	0,12545200E+07	15	0,40229891E+08
6	0,32838800E+07	16	0,40917949E+08
7	0,32905605E+07	17	0,49612863E+08
8	0,88518135E+07	18	0,49993430E+08
9	0,88970320E+07	19	0,71116015E+08
10	0,20323780E+08	20	0,71830036E+08



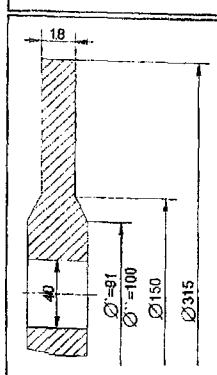
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм, наружный – 295 мм, толщина – 1,8 мм			
1	0,70790500E+06	11	0,17679700E+08
2	0,71128000E+06	12	0,29492600E+08
3	0,72773500E+06	13	0,32149200E+08
4	0,10359300E+07	14	0,32209100E+08
5	0,10363600E+07	15	0,35026300E+08
6	0,28067500E+07	16	0,35619500E+08
7	0,28123700E+07	17	0,41182800E+08
8	0,76711700E+07	18	0,41487700E+08
9	0,77100000E+07	19	0,59892200E+08
10	0,17679700E+08	20	0,60461219E+08



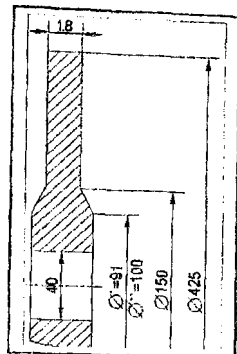
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 305 мм; толщина – 1,8 мм			
1	0,58196000E+06	11	0,15536550E+08
2	0,58485500E+06	12	0,24382404E+08
3	0,60272300E+06	13	0,26669511E+08
4	0,86383800E+06	14	0,26713637E+08
5	0,86422400E+06	15	0,30639936E+08
6	0,24165500E+07	16	0,31152854E+08
7	0,24213100E+07	17	0,34499452E+08
8	0,66852000E+07	18	0,34746096E+08
9	0,67187900E+07	19	0,50859094E+08
10	0,15455460E+08	20	0,51324932E+08



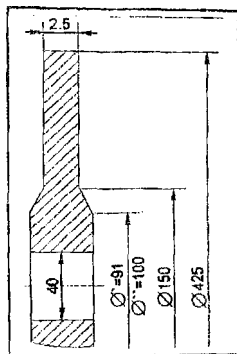
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 315 мм, толщина – 1,8 мм			
1	0,48262200E+06	11	0,13642873E+08
2	0,48511700E+06	12	0,20334154E+08
3	0,50357500E+06	13	0,22314885E+08
4	0,72650200E+06	14	0,22347312E+08
5	0,72687800E+06	15	0,26920640E+08
6	0,20942900E+07	16	0,27362612E+08
7	0,20983708E+07	17	0,29142481E+08
8	0,58556205E+07	18	0,29344035E+08
9	0,58848550E+07	19	0,43520272E+08
10	0,13572466E+08	20	0,43906338E+08



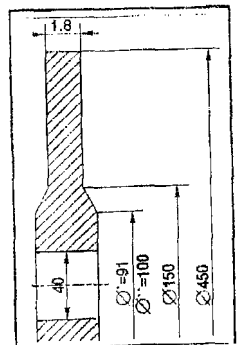
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы, внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 425 мм, толщина – 1,8 мм			
1	0,93092800E+05	11	0,40809700E+07
2	0,93731300E+05	12	0,41584000E+07
3	0,10508300E+06	13	0,46966500E+07
4	0,16132500E+06	14	0,46988900E+07
5	0,16144400E+06	15	0,66761900E+07
6	0,58582300E+06	16	0,67088400E+07
7	0,58713500E+06	17	0,81085600E+07
8	0,17407800E+07	18	0,82493400E+07
9	0,17492200E+07	19	0,11158400E+08
10	0,40809700E+07	20	0,11236159E+08



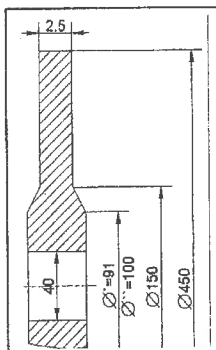
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 425 мм; толщина – 2,5 мм			
1	0,17957700E+06	11	0,78722500E+07
2	0,18080900E+06	12	0,80216100E+07
3	0,20270700E+06	13	0,90599000E+07
4	0,31119700E+06	14	0,90642200E+07
5	0,31142700E+06	15	0,12878500E+08
6	0,11300600E+07	16	0,12941434E+08
7	0,11325900E+07	17	0,15641509E+08
8	0,33579800E+07	18	0,15913080E+08
9	0,33742700E+07	19	0,21524602E+08
10	0,78722500E+07	20	0,21674689E+08



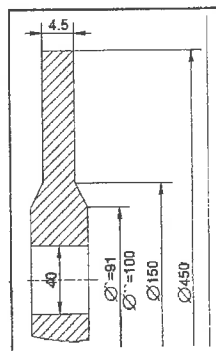
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 450 мм, толщина – 1,8 мм			
1	0,69045000E+05	11	0,00000000E+00
2	0,69539396E+05	12	0,00000000E+00
3	0,79232967E+05	13	0,00000000E+00
4	0,12309396E+06	14	0,00000000E+00
5	0,12319094E+06	15	0,00000000E+00
6	0,46268173E+06	16	0,00000000E+00
7	0,46379344E+06	17	0,00000000E+00
8	0,13835199E+07	18	0,00000000E+00
9	0,13902250E+07	19	0,00000000E+00
10	0,31218733E+07	20	0,00000000E+00



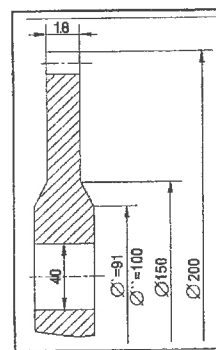
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 450 мм; толщина – 2,5 мм			
1	0,13318900E+06	11	0,60221300E+07
2	0,13414200E+06	12	0,62914600E+07
3	0,15284100E+06	13	0,68353900E+07
4	0,23745000E+06	14	0,68401400E+07
5	0,23763700E+06	15	0,98700222E+07
6	0,89251900E+06	16	0,99157464E+07
7	0,89466300E+06	17	0,12441592E+08
8	0,26688300E+07	18	0,12657908E+08
9	0,26817600E+07	19	0,16814358E+08
10	0,60221300E+07	20	0,16928292E+08



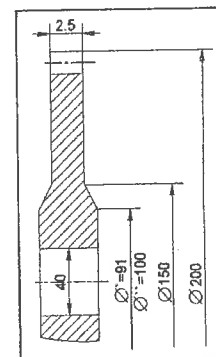
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 450 мм; толщина – 4,5 мм			
1	0,43153100E+06	11	0,19511700E+08
2	0,43462100E+06	12	0,20384300E+08
3	0,49520600E+06	13	0,22146700E+08
4	0,76933700E+06	14	0,22162100E+08
5	0,76994300E+06	15	0,31978900E+08
6	0,28917600E+07	16	0,32127000E+08
7	0,28987100E+07	17	0,40310757E+08
8	0,86470000E+07	18	0,41011623E+08
9	0,86889100E+07	19	0,54478519E+08
10	0,19511700E+08	20	0,54847665E+08



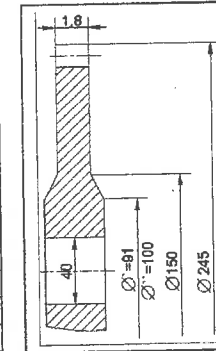
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 200 мм; толщина – 1,8 мм			
1	0,87224900E+07	11	0,89256200E+08
2	0,90202700E+07	12	0,17035700E+09
3	0,90380300E+07	13	0,17346100E+09
4	0,11421200E+08	14	0,30389800E+09
5	0,11419600E+08	15	0,30411700E+09
6	0,20308700E+08	16	0,35758596E+09
7	0,20347200E+08	17	0,37470395E+09
8	0,42939200E+08	18	0,37598610E+09
9	0,43201300E+08	19	0,42874973E+09
10	0,89256200E+08	20	0,43326381E+09



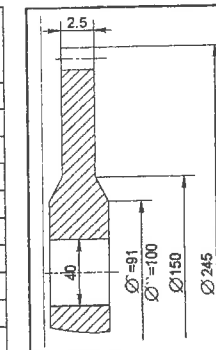
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 200 мм; толщина – 2,5 мм			
1	0,16825800E+08	11	0,17334153E+09
2	0,17400200E+08	12	0,32862119E+09
3	0,17434500E+08	13	0,33460903E+09
4	0,22031700E+08	14	0,58622238E+09
5	0,22028600E+08	15	0,58664485E+09
6	0,39175700E+08	16	0,68978774E+09
7	0,39250100E+08	17	0,72280855E+09
8	0,82830200E+08	18	0,72528182E+09
9	0,83335795E+08	19	0,82706352E+09
10	0,17217632E+09	20	0,83577124E+09



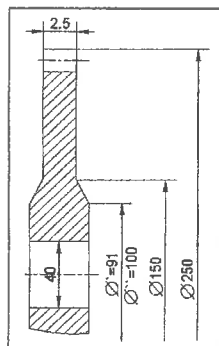
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 245 мм; толщина – 1,8 мм			
1	0,22098000E+07	11	0,37875800E+08
2	0,22276600E+07	12	0,73986513E+08
3	0,22355700E+07	13	0,75279055E+08
4	0,30278200E+07	14	0,90323212E+08
5	0,30282900E+07	15	0,96532876E+08
6	0,67580900E+07	16	0,96822249E+08
7	0,67725400E+07	17	0,11712906E+09
8	0,16830200E+08	18	0,11816669E+09
9	0,16921100E+08	19	0,13336179E+09
10	0,37658441E+08	20	0,13354695E+09



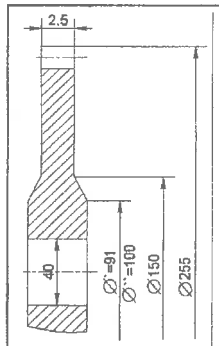
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы, внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 245 мм; толщина – 2,5 мм			
1	0,42627300E+07	11	0,72643600E+08
2	0,42971800E+07	12	0,14272100E+09
3	0,43124500E+07	13	0,14521400E+09
4	0,58406900E+07	14	0,17423500E+09
5	0,58416000E+07	15	0,18621300E+09
6	0,13036400E+08	16	0,18677100E+09
7	0,13064300E+08	17	0,22594340E+09
8	0,32465600E+08	18	0,22794500E+09
9	0,32641000E+08	19	0,25725654E+09
10	0,72643600E+08	20	0,25761371E+09



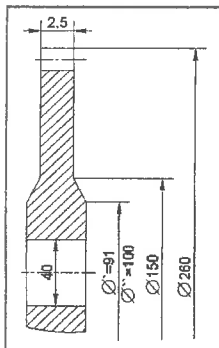
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 250 мм; толщина – 2,5 мм			
1	0,37561500E+07	11	0,66848400E+08
2	0,37738000E+07	12	0,13152200E+09
3	0,37877300E+07	13	0,13380800E+09
4	0,51676600E+07	14	0,15342800E+09
5	0,51700100E+07	15	0,16431800E+09
6	0,11793900E+08	16	0,16479100E+09
7	0,11819200E+08	17	0,20054800E+09
8	0,29741000E+08	18	0,20229300E+09
9	0,29900100E+08	19	0,23714100E+09
10	0,66848400E+08	20	0,23749118E+09



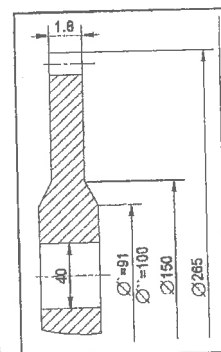
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 255 мм; толщина – 2,5 мм			
1	0,33230000E+07	11	0,61982399E+08
2	0,33271900E+07	12	0,12141187E+09
3	0,33399200E+07	13	0,12350774E+09
4	0,45912006E+07	14	0,13564593E+09
5	0,45921788E+07	15	0,14556542E+09
6	0,10704578E+08	16	0,14596710E+09
7	0,10727323E+08	17	0,17868596E+09
8	0,27309920E+08	18	0,18021282E+09
9	0,27454850E+08	19	0,21896344E+09
10	0,61634010E+08	20	0,21930564E+09



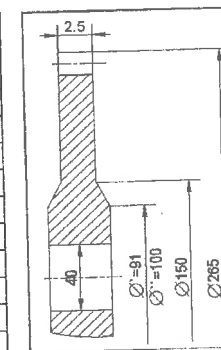
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91; наружный – 260 мм; толщина – 2,5 мм			
1	0,29442900E+07	11	0,56929400E+08
2	0,29508400E+07	12	0,11226100E+09
3	0,29559400E+07	13	0,11417800E+09
4	0,40933900E+07	14	0,12038500E+09
5	0,40943800E+07	15	0,12942700E+09
6	0,97451600E+07	16	0,12976900E+09
7	0,97657500E+07	17	0,15977700E+09
8	0,25133300E+08	18	0,16111792E+09
9	0,25265600E+08	19	0,20250158E+09
10	0,56929400E+08	20	0,20283440E+09



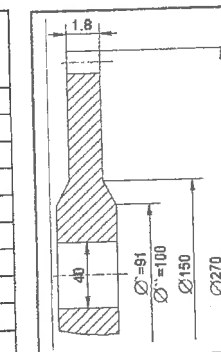
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 265 мм; толщина – 1,8 мм			
1	0,13553700E+07	11	0,27306200E+08
2	0,13609100E+07	12	0,53888500E+08
3	0,13632000E+07	13	0,54761800E+08
4	0,18984500E+07	14	0,55630300E+08
5	0,18989600E+07	15	0,59862900E+08
6	0,46120600E+07	16	0,60014277E+08
7	0,46217500E+07	17	0,74312638E+08
8	0,12015600E+08	18	0,74925161E+08
9	0,12078400E+08	19	0,97232147E+08
10	0,27306200E+08	20	0,97399152E+08



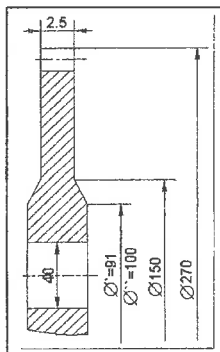
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 265 мм; толщина – 2,5 мм			
1	0,26145300E+07	11	0,52966358E+08
2	0,26252100E+07	12	0,10395153E+09
3	0,26296200E+07	13	0,10563610E+09
4	0,36621300E+07	14	0,10731152E+09
5	0,36631200E+07	15	0,11547619E+09
6	0,88967300E+07	16	0,11576828E+09
7	0,89154100E+07	17	0,14335000E+09
8	0,23178200E+08	18	0,14453156E+09
9	0,23299368E+08	19	0,18756201E+09
10	0,52673989E+08	20	0,18788417E+09



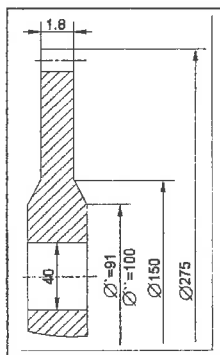
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 270 мм; толщина – 1,8 мм			
1	0,23293400E+07	11	0,48815800E+08
2	0,23391400E+07	12	0,95569000E+08
3	0,23511800E+07	13	0,96518200E+08
4	0,32869400E+07	14	0,98176000E+08
5	0,32879000E+07	15	0,10336600E+09
6	0,81435400E+07	16	0,10361500E+09
7	0,81605200E+07	17	0,12901900E+09
8	0,21416800E+08	18	0,13006400E+09
9	0,21528000E+08	19	0,17397500E+09
10	0,48815800E+08	20	0,17428500E+09



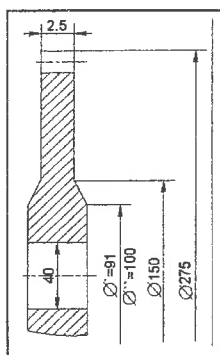
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 270 мм; толщина – 2,5 мм			
1	0,26145300E+07	11	0,52966358E+08
2	0,26252100E+07	12	0,10395153E+09
3	0,26296200E+07	13	0,10563610E+09
4	0,36621300E+07	14	0,10731152E+09
5	0,36631200E+07	15	0,11547619E+09
6	0,88967300E+07	16	0,11576828E+09
7	0,89154100E+07	17	0,14335000E+09
8	0,23178200E+08	18	0,14453156E+09
9	0,23299368E+08	19	0,18756201E+09
10	0,52673989E+08	20	0,18788417E+09



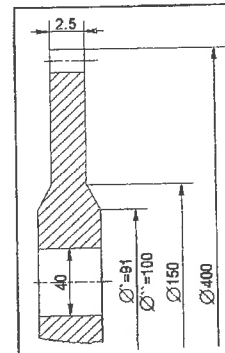
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 275 мм; толщина – 1,8 мм			
1	0,10791600E+07	11	0,23616922E+08
2	0,10838300E+07	12	0,44446538E+08
3	0,10932200E+07	13	0,46445394E+08
4	0,15340700E+07	14	0,47248705E+08
5	0,15345400E+07	15	0,48113154E+08
6	0,38737454E+07	16	0,48223976E+08
7	0,38817579E+07	17	0,60377435E+08
8	0,10277521E+08	18	0,60857493E+08
9	0,10330582E+08	19	0,83761894E+08
10	0,23488638E+08	20	0,83915892E+08



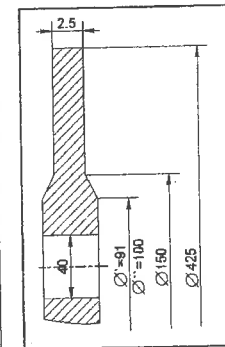
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 275 мм; толщина – 2,5 мм			
1	0,20817100E+07	11	0,45557334E+08
2	0,20907100E+07	12	0,85737920E+08
3	0,21088300E+07	13	0,89593738E+08
4	0,29592400E+07	14	0,91143335E+08
5	0,29601500E+07	15	0,92810869E+08
6	0,74725000E+07	16	0,93024645E+08
7	0,74879600E+07	17	0,11646882E+09
8	0,19825500E+08	18	0,11739485E+09
9	0,19927800E+08	19	0,16157773E+09
10	0,45309873E+08	20	0,16187479E+09



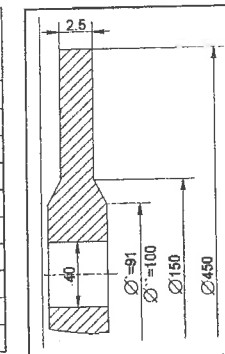
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 400 мм; толщина – 2,5 мм			
1	0,24769900E+06	11	0,10085677E+08
2	0,24931800E+06	12	0,10926068E+08
3	0,27487400E+06	13	0,12273383E+08
4	0,41668300E+06	14	0,12278230E+08
5	0,41697000E+06	15	0,17153396E+08
6	0,14540700E+07	16	0,17242729E+08
7	0,14571200E+07	17	0,19939749E+08
8	0,42859800E+07	18	0,20286280E+08
9	0,43068231E+07	19	0,28070334E+08
10	0,10036873E+08	20	0,28273684E+08



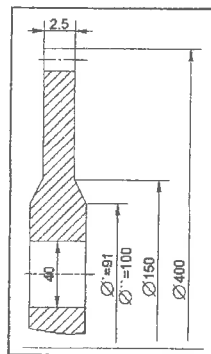
Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 425 мм; толщина – 2,5 мм			
1	0,17957700E+06	11	0,78722500E+07
2	0,18080900E+06	12	0,80216100E+07
3	0,20270700E+06	13	0,90599000E+07
4	0,31119700E+06	14	0,90642200E+07
5	0,31142700E+06	15	0,12878500E+08
6	0,11300600E+07	16	0,12941434E+08
7	0,11325900E+07	17	0,15641509E+08
8	0,33579800E+07	18	0,15913080E+08
9	0,33742700E+07	19	0,21524602E+08
10	0,78722500E+07	20	0,21674689E+08



Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 450 мм; толщина – 2,5 мм			
1	0,13318900E+06	11	0,60221300E+07
2	0,13414200E+06	12	0,62914600E+07
3	0,15284100E+06	13	0,68353900E+07
4	0,23745000E+06	14	0,68401400E+07
5	0,23763700E+06	15	0,98700222E+07
6	0,89251900E+06	16	0,99157464E+07
7	0,89466300E+06	17	0,12441592E+08
8	0,26688300E+07	18	0,12657908E+08
9	0,26817600E+07	19	0,16814358E+08
10	0,60221300E+07	20	0,16928292E+08



Квадраты собственных круговых частот изгибных колебаний дисковой фрезы: внутренний диаметр – 91 мм; наружный – 450 мм; толщина – 4,5 мм			
1	0,43153100E+06	11	0,19511700E+08
2	0,43462100E+06	12	0,20384300E+08
3	0,49520600E+06	13	0,22146700E+08
4	0,76933700E+06	14	0,22162100E+08
5	0,76994300E+06	15	0,31978900E+08
6	0,28917600E+07	16	0,32127000E+08
7	0,28987100E+07	17	0,40310757E+08
8	0,86470000E+07	18	0,41011623E+08
9	0,86889100E+07	19	0,54478519E+08
10	0,19511700E+08	20	0,54847665E+08



## Список использованной литературы

1. Бабенко А. Е. Применение и развитие метода покоординатного спуска в задачах определения напряженно-деформированного состояния при статических и вибрационных нагрузках [для инженерно-технических работников, аспирантов и студентов вузов, специализирующихся в области динамики и прочности машин] [Текст] / А. Е. Бабенко, Н. И. Бобыр, С. Л. Бойко, О. А. Боронко. – К.: Инрес, 2005. – 264 с.: ил. – Библиогр.: с. 225–260. – 700 экз. – ISBN 966-8887-02-6
2. Бабенко А. Е. Вимушені коливання дискової фрези [для инженерно-технических работников, аспирантов и студентов вузов, специализирующихся в области динамики и прочности машин] [Текст] / А. Е. Бабенко, О. О. Боронко, В. С. Петренко // Вісн. Житомирського інженерно-технологічного ін-ту. Вип. 18, 2001. – с. 28–32.
3. Бабенко А. Е. Экспериментальная проверка метода определения собственных частот изгибных колебаний дисковых пил [Текст] / А. Е. Бабенко, Н. С. Равская, О. А. Боронко // Технологические системы. Вып. 5(16), 2002 г. – с. 26–30.
4. Бабенко А. Е. Влияние динамических характеристик дисковых пил на их работоспособность [Текст] / А. Е. Бабенко, Н. С. Равская, О. А. Боронко // Вестник НТУУ «КПИ», вып. 43, К.: 2002 г. – с. 169–171.
5. Василенко Н. В. Теория колебаний [для инженерно-технических работников, аспирантов и студентов вузов, специализирующихся в области динамики и прочности машин] [Текст]: учебное пособие для студентов технических вузов / Н. В. Василенко. – К.: Высш. шк., 1992. – 430 с.: ил. – Библиогр.: с. 424–425. – 1850 экз. – ISBN 5-11-003592-X (в пер.).
6. Васин С. А. Резание материалов. Термо-механический подход к системе взаимосвязей при резании [Текст] / С. А. Васин, А. С. Верещака, В. С. Кушнир. – М.: МГТУ им. М. Э. Баумана, 2001. – 447 с.: ил. – Библиогр.: с. 437–443. – 2000 экз. – ISBN 5-7038-1823-0.
7. Грановский Г. И. Резание материалов [для инженерно-технических работников, аспирантов и студентов вузов, специализирующихся в области динамики и прочности машин]: учеб. для вузов / Г. И. Грановский. – М.: Высш. шк., 1985. – 304 с.: ил. – Библиогр.: с. 298–304. – 80000 экз.
8. Литвинов В. Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложением к механике [для инженерно-технических работников, аспирантов и студентов вузов, специализирующихся в области динамики и прочности машин] [Текст] / В. Г. Литвинов. – М.: Наука, 1987. – 368 с.: ил. – Библиогр.: с. 353–366. – 2200 экз.

9. Равская Н. С. Определение критерия динамического состояния дисковой пилы / Н. С. Равская, А. Е. Бабенко, О. А. Боронко, Р. Лорох // Вестник НТУУ «КПИ», Машиностроение.
10. Равская Н. С. Закон движения шлифовального круга при обработке зубьев отрезных пил [Текст] / Н. С. Равская, Р. Лорох [Текст] // Сб. Резание и инструмент в технологических системах, Харьков, ХГУ, 1997, с. 84–87.
11. Равская Н. С. Особенности проектирования и изготовления дисковых отрезных пил с неравномерным шагом / Н. С. Равская, Р. Лорох [Текст] // Прогресивна техніка і технологія машинобудування, приладобудування і зварювального виробництва. Праці Міжнародної науково-технічної конференції, присвяченої 100-річчю механіко-машинобудівного і 50-річчю зварювального факультетів. Т-1 НТУУ «КПІ», 1998, с.360-364
12. Равская Н. С. Определение числа одновременно работающих зубьев при отрезке круглых заготовок [Текст] / Н. С. Равская, П. Р. Родин, А. В. Семенов, Р. Лорох // Вестник НТУУ «КПИ» Машиностроение № 32, К.: 1997, с. 84–87.
13. Родин П. Р. Металлорежущие инструменты [для инженерно-технических работников, аспирантов и студентов вузов, специализирующихся в области динамики и прочности машин] [Текст] : учеб. для вузов / П. Р. Родин – К.: Вища школа, 1974. – 399 с.: ил. – Библиогр.: с. 396. – 23000 экз.
14. Родин П. Р. Основы проектирования режущих инструментов [для инженерно-технических работников, аспирантов и студентов вузов, специализирующихся в области динамики и прочности машин] [Текст]: учеб. для студентов машиностроительных специальностей / П. Р. Родин – К.: Высш. шк., 1990. – 421 с.: ил. – Библиогр.: с. 421. – 10000 экз.

Наукове видання

**Родін Петро Радіонович**  
**Равська Наталія Сергіївна**  
**Бабенко Андрій Єлисеєвич**  
**Боронко Олег Олександрович**

## **Дискові пили з нерівномірним кроком**

**Монографія**

(Російською мовою)

Редактор-коректор  
*Дудар Т. М.*  
 Комп'ютерна верстка  
*Заволодько В. Ф.*  
 Дизайн обкладинки  
*Гребньова Г. О.*

Темплан 2006 р., поз. 3-1-007

Підп. до друку 22.09.2008. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Папір офс. Гарнітура Times.  
 Спосіб друку – ризографія. Ум. друк. арк. 12,55. Обл.-вид. арк. 20,88. Зам. ~~257~~. Наклад 100 пр.

НТУУ «КПІ» ВПІ ВПК «Політехніка»  
 Свідцтво ДК № 1665 від 28.01.2004 р.  
 03056, Київ, вул. Політехнічна, 14, корп. 15  
 тел./факс (044) 241-68-78