

Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт»  
Механико-машиностроительный институт

**А. Е. БАБЕНКО, Н. И. БОБЫРЬ,  
С. Л. БОЙКО, О. А. БОРОНКО**

**Применение и развитие метода  
покоординатного спуска в задачах  
определения напряженно-  
деформированного состояния  
при статических и вибрационных  
нагрузках**

Киев  
«Инрес»  
2005

Рецензенты:

*В. Г. Пискунов*, заслуженный деятель науки и техники Украины, лауреат гос. премии Украины, зав. каф. Сопротивления материалов и машиноведения Национального транспортного ун-та, д-р техн. наук, проф.

*О. Е. Богинич*, д-р техн. наук, ведущий науч. сотрудник Института проблем прочности НАН Украины

**Бабенко А. Е., Бобырь Н. И., Бойко С. Л., Боронко О. А.**

**П 75** Применение и развитие метода покоординатного спуска в задачах определения напряженно-деформированного состояния при статических и вибрационных нагрузках: Моногр. – К.: Инрес, 2005. – 264 с.

**ISBN 966-8887-02-6**

Монография посвящена развитию универсальных методов решения линейной и нелинейной задач определения напряженно-деформированного состояния сложных пластинчато-оболочечных конструкций, представляющих собою многосвязные кусочногладкие поверхности. В работе использован метод покоординатного спуска, который является устойчивым. Для реализации метода разработаны необходимые функционалы, которые позволили создать простые алгоритмы и программы. Решена задача максимального увеличения скорости сходимости за счет оптимального выбора коэффициента или в общем случае матрицы релаксации. Разработан новый метод определения собственных частот и форм колебаний – метод повышения жесткостей.

Для инженерно-технических работников, аспирантов и студентов вузов, специализирующихся в области динамики и прочности машин.

Монографію присвячено розвитку універсальних методів розв'язку лінійної та нелінійної задач визначення напружено-деформованого стану складних пластинчато-оболонкових конструкцій, які є багатозв'язними кускогладкими поверхнями. В роботі використано метод покоординатного спуску, який є стійким. Для реалізації методу розроблені необхідні функціонали, що дозволили створити прості алгоритми і програми. Вирішено задачу максимального збільшення швидкості збіжності за рахунок оптимального вибору коефіцієнта або в загальному випадку матриці релаксації. Розроблено новий метод визначення власних частот і форм коливань – метод підвищення жорсткостей.

Для інженерно-технічних працівників, аспірантів і студентів вузів, що спеціалізуються в області динаміки і міцності машин.

**УДК 539.3/4**

ISBN 966-8887-02-6

© А. Е. Бабенко, Н. И. Бобырь,  
С. Л. Бойко, О. А. Боронко, 2005



# Введение

Один из основных этапов создания современных машин и приборов это расчет на прочность и определение динамических характеристик, основой которых является решение задачи определения напряженно-деформированного состояния. Современные требования экономической эффективности, снижения материалоемкости и энергоемкости, приводят к возрастанию напряжений. Необходимо также сокращение сроков проектирования и его удешевление. Кроме этих факторов необходимо учитывать, что современные машиностроительные конструкции представляют собой с геометрической точки зрения многосвязные области сложной формы. Эти требования вызывают необходимость использования универсальных и эффективных методов расчета напряжений и деформаций, вызываемых статическими и динамическими нагрузками.

Проделанный анализ современного состояния проблемы определения напряженно-деформированного состояния (НДС) элементов конструкций привел к выводам, что при расчете деталей сложной формы аналитические методы неэффективны и необходимо использовать численные методы. Методы определения НДС должны удовлетворять следующим требованиям: обеспечивать необходимую точность, быть устойчивыми, достаточно универсальными. Кроме этого они должны позволять использовать достаточно распространенные и доступные персональные вычислительные машины при

их ограниченных возможностях по объему памяти и по быстродействию. Наиболее широко распространенными методами в настоящее время являются метод сеток и метод конечных элементов. Но они имеют некоторые недостатки, при использовании метода сеток для геометрически сложных конструкций невозможно использовать равномерную сетку, а неравномерная сетка усложняет структуру разностных операторов и затрудняет автоматизацию расчетов и процесс проектирования. Метод конечных элементов в классической постановке требует формирования матриц жесткости и масс, имеющих для сложных конструкций большую размерность. Их хранение и оперирование с ними требует специальных методов уплотнения и использования внешней памяти ЭВМ, это усложняет алгоритмы и предъявляет достаточно высокие требования к вычислительным машинам.

Указанные причины требуют разработки методов расчета, дающих возможность избежать указанных затруднений или уменьшить их. Рассматриваемая работа направлена на решение этих задач. Анализ показал, что наиболее перспективным является подход, основанный на использовании вариационно-сеточных и итерационных методов. Они обладают преимуществами при решении задач большой размерности и дают возможность решать нелинейные задачи. Поэтому в работе использован метод покоординатного спуска, устойчивый для решаемого класса задач и позволяющий использовать простые алгоритмы.

В работе сформированы в явном виде функционалы, к которым приводят вариационно-сеточные методы, в частности, принцип минимума потенциальной энергии при различных выборах аппроксимации перемещений, используемой для перехода к конечномерной задаче. Сформированы функционалы для плоской задачи при линейной аппроксимации перемещений, для задачи изгиба пластины при аппроксимации перемещений неполным кубическим полиномом на треуголь-

ных подобластях, используемых для покрытия заданной области. При расчете оболочек поверхность оболочки аппроксимировалась плоскими треугольными подобластями, в их пределах нормальные перемещения аппроксимировались как при изгибе, а мембранные, как в плоской задаче. Сформированы функционалы для решения объемной задачи при расчете ступенчато-призматических тел, в которых перемещения аппроксимировались линейно на подобластях в форме треугольных призм. Сформированы функционалы для решения задачи изгиба трехслойных пластин. Для трехслойных пластин использована аппроксимация перемещений неполным кубическим полиномом в тонких несущих слоях и линейная в заполнителе, позволившая поставить краевые условия для каждого несущего слоя в отдельности при минимальном количестве узловых неизвестных.

В работе решена задача определения собственных частот и собственных форм колебаний упругих систем. Так как наибольший интерес представляют ряд нижних частот, то решалась частная задача на собственные значения. Первая собственная частота и первая собственная форма находились методом Релея. Определение более высоких собственных частот и собственных форм осуществлялось двумя методами: классическим — минимизацией отношения Релея-Ритца на подпространстве ортогональном ранее найденным более низким собственным формам, и предложен второй метод — названный методом повышения жесткостей. Этот метод, на основании единственности спектрального разложения линейного оператора, сводит более высокие собственные частоты и собственные формы к первым для отношения типа Релея-Ритца, и эквивалентен, с физической точки зрения, увеличению жесткости системы в направлении степеней свободы ранее найденных форм. Предложенный метод позволяет избежать процесса ортогонализации, который может быть неустойчивым, и уменьшает количество арифметических операций при числен-



ном решении. Сформированы функционалы Релея-Ритца при переходе к конечномерной задаче для плоского напряженно-деформированного состояния, для изгиба тонких пластин и оболочек и для задачи изгиба трехслойных пластин и оболочек.

Решена задача ускорения сходимости метода покоординатного спуска. Известно, что скорость сходимости может быть увеличена путем оптимального выбора коэффициента релаксации. Эта задача была решена только для систем уравнений с трехдиагональной и квазитрехдиагональной матрицей. В работе эта задача рассмотрена в обобщенной постановке, путем использования матрицы релаксации, найдены способы ее построения, при которых итерационный процесс сходится за конечное число итераций. Таким образом, установлена связь метода покоординатного спуска с прямыми методами и, в частности, с методом Гаусса. В частном случае, выбирая матрицу релаксации диагональной с равными членами, приходим к коэффициенту релаксации, задача выбора которого решена путем использования промежуточных данных вычислительного процесса. Разработанный метод выбора коэффициента релаксации распространен на нелинейные задачи. За счет оптимального выбора коэффициента релаксации предложенным способом скорость сходимости повышена в 2-4 раза по сравнению с классическим подходом, когда оптимальный коэффициент постоянен на протяжении всего процесса.

Разработан способ построения сетки для произвольных пластинчато-оболочечных конструкций. Создан пакет прикладных программ. Решен ряд тестовых и прикладных задач. Результаты решения тестовых задач показали, что точность полученных решений удовлетворяет требованиям практики. Решение прикладных задач дало возможность уменьшить количество экспериментальных доводочных работ и оптимизировать конструкции с точки зрения материалоемкости.



## Глава 1

# Анализ задачи исследования напряженно- деформированного состояния

Экспериментальные исследования напряженно-деформированного состояния, в особенности при вибрационных нагрузках, для машиностроительных конструкций достаточно дорогие, трудоёмкие и длительные. Это приводит к необходимости использования расчётных методов. В основу расчёта должны быть положены математические модели, адекватно отражающие реальные физико-механические свойства, закономерности деформирования, реальные условия нагружения и закрепления. Кроме того, при использовании численных методов конечномерные модели также должны отражать указанные выше свойства и, обладая сравнительной простотой, обеспечивать получение достоверных и надёжных результатов.

Построение в замкнутом виде аналитических решений краевых задач статики и динамики возможно лишь для неболь-

шого класса конструкций простой геометрической формы. Поэтому возникает необходимость в использовании численных методов. Применение последних приводит к замене континуальной системы с бесконечным числом степеней свободы дискретной с конечным числом степеней свободы.

Несмотря на достигнутые успехи в развитии численных методов расчёта конструкций, возникают вопросы, связанные с преодолением трудностей вычислительного характера, в особенности для геометрически сложных многосвязных пластинчато-оболочечных конструкций, и конструкций, требующих решения трехмерной задачи, которые ведут к исследованию дискретных систем с большим числом степеней свободы. Это относится, в первую очередь, к методам и алгоритмам, связанным с формированием, хранением и оперированием с матрицами жёсткостей, масс и т. п., так как при решении ряда практических задач матрицы получаются высоких порядков. В связи с этим, возникает необходимость разработки эффективных и экономичных алгоритмов расчёта задач статики и динамики, которые не требуют формирования, хранения и оперирования с матрицами масс и жёсткостей и позволяют решать задачи большой размерности с минимальными вычислительными затратами. Необходимым условием обеспечения высокого качества и сокращения сроков проектирования конструкций является разработка численных методов и алгоритмов, позволяющих выполнить детальный анализ НДС механических систем при возможно более полном учёте их конструктивных особенностей при воздействии статических и вибрационных нагрузок. Эффективное применение численных методов невозможно без создания и внедрения в широкую инженерную практику надёжных и экономичных пакетов прикладных программ (ППП). Поэтому для повышения эффективности вычислительных комплексов требуется решение проблем, связанных с автоматизацией подготовки и организацией входной и удобного представления выходной информации для

пользователя. Это позволяет производить расчёты специалистами, не являющимися профессиональными программистами и автоматизировать процесс расчёта. Кроме того при решении задач численными методами всегда необходима дискретизация области, т.е. построение сетки узлов. Проблема автоматизированного построения сеток имеет особенности при исследовании многосвязных пластинчато-оболочечных конструкций произвольной формы и трехмерных деталей.

В настоящей работе разработан и реализован экономичный метод расчёта объемных деталей и пластинчато-оболочечных систем произвольной формы, находящихся под воздействием статических и вибрационных нагрузок, который сочетает в себе все преимущества вариационно-сеточного подхода, но не требует формирования, хранения и оперирования с матрицами масс и жёсткостей и позволяет решать реальные практические задачи большой размерности, используя только оперативную память ПЭВМ.

## 1.1 Анализ методов расчёта НДС

Методы расчета НДС зависят от того, является ли нагрузка статической или вибрационной. В последнем случае сначала необходимо найти формы колебаний, возбуждаемые нагрузкой, и их амплитуды. Поэтому методы расчета НДС фактически распадаются на соответствующие две ветви. Кроме того различия в методиках имеют место вследствие различий физической размерности пространства, в котором рассматривается конструкция.

К настоящему времени выполнен большой объем исследований по разработке методов и алгоритмов расчета несущих конструкций, которые представляют собой либо массивные трехмерные детали либо пластинчато-оболочечные однослойные и многослойные многосвязные конструкции. Большой вклад в развитие теории и методов расчёта внесли А.Я. Александров,



С.А. Амбарцумян, В.В. Болотин, Л.Э. Брюккер, Г.А. Ванин, А.Т. Василенко, П.М. Варвак, Д.В. Вайнберг, В.В. Васильев, К.З. Галимов, Н.К. Галимов, Р. Галлагер, Э.И. Григолюк, Я.М. Григоренко, А.Н. Гузь, О. Зенкевич, М.А. Ильгамов, С.Н. Кан, Н.А. Кильчевский, В.И. Королёв, Л.М. Куршин, С.Г. Лехницкий, В.Н. Москаленко, Х.М. Муштари, В.И. Мяченков, Ю.В. Немировский, Ю.Н. Новичков, В.В. Новожилов, В.Н. Паймушин, Н.Д. Панкратова, Б.Л. Пелех, В.А. Постнов, А.П. Прусаков, В.Г. Пискунов, А.О. Рассказов, Р.Б. Рикардс, А.Ф. Рябов, Л.А. Розин, А.С. Сахаров, А.В. Саченков, Н.Г.Тамуров, А.Г. Терегулов, Б. Айронс, Дж. Аргирис, Г.А.Терерс, Ф. Скотт, А.П. Хорошун, П.П. Чулков, К.Ли, К.Ло, С. Мау, Дж. Кемпбелл, Р. Клаф, Р. Мелош, Л. Морли, С. Панда, Н. Пейгано, Дж. Рэдди, Р. Спилкер, Ф. Съярле и другие учёные.

Расчет однослойных пластин и оболочек в прикладных задачах чаще всего основывается на гипотезе Кирхгофа-Лява. В современной теории слоистых пластин и оболочек, которая широко представлена в ряде известных монографий [10, 12, 41, 129, 132, 226, 235, 267, 273] и др., обзоров [125, 127, 137, 174, 331] можно выделить два основных подхода к расчёту рассматриваемых конструкций. Первый основывается на использовании уравнений, полученных приведением трёхмерной задачи теории упругости к двумерной [10, 41, 129, 247, 267], второй, в особенности для трехслойных пластин и оболочек, — на применении уравнений трёхмерной теории упругости [9, 314, 110]. Построение решения в трёхмерной постановке для реальных слоистых конструкций связано со значительными математическими трудностями. Поэтому известные решения относятся в основном лишь к частным случаям расчёта двух и трёхслойных конструкций. Задача изгиба трёхслойных свободно опёртых плит симметричного строения по толщине решена Л.Э. Брюккером [53]. При этом заполнитель рассматривается как трёхмерное упругое тело, а тонкие несущие слои



считались мембранными, или жёсткими пластинками, для которых справедливы гипотезы Кирхгофа-Лява. В наиболее общей постановке трехмерная теория слоистых пластин разработана М.Д. Галилеевым [110], который учитывает различные виды граничных условий на верхней и нижней поверхностях пакета, а также различные варианты условий сопряжения слоёв. Однако результаты расчётов получены только для некоторых частных случаев. Напряжённо-деформированное состояние слоистых оболочек исследовано в работах Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко, Н.Д. Панкратовой [67, 133, 134]. Особое внимание уделено сферическим и цилиндрическим оболочкам при некоторых частных граничных условиях, допускающих разделение переменных. Исследования в рамках трёхмерной теории упругости неоднородных сред, в частности, для неоднородного полупространства и слоистых полос, проводились В.С. Никишкиным и Г.С. Шапиро [222], В.П. Плевако [251], Н.А. Шульгой и А.И. Ямковым [353] и другими исследователями. В работе В.Г. Пискунова, В.С. Сипетова и Ш.Ш. Туйметова [249] рассматривалось решение задач статики слоистых ортотропных плит в пространственной постановке с граничными условиями Навье. Исследование НДС однослойных и трёхслойных пластин на основе трёхмерных уравнений теории упругости проводилось Н.Д. Панкратовой и А.А. Мукоедом [233]. Применение трёхмерных уравнений теории упругости для слоистых оболочек относится лишь к отдельным их видам [110, 133, 233]. Расчёт реальных слоистых конструкций с использованием уравнений пространственной теории упругости в сочетании с аналитическими методами, связан с большими сложностями, обусловленными произвольной геометрической формой, различными типами граничных условий, в особенности для многосвязных поверхностей делают такой подход практически нереализуемым. Однако результаты, полученные в работах, основаны на применении аппарата трёхмерной теории упругости к расчёту слоистых конструкций, имеют боль-

шое теоретическое и практическое значение. Они, в первую очередь, дают возможность оценить область применимости различных двумерных теорий.

Необходимость получения достаточно точных и в то же время менее трудоёмких решений для слоистых оболочек и пластин с различными видами граничных условий привела к созданию двумерных теорий, учитывающих трёхмерный характер работы конструкции. Анализ работ этого направления посвящены специальные обзоры С.А. Амбарцумяна [11], Э.И. Григолюка, Ф.А. Когана [125], Э.И. Григолюка, И.Т. Селезова [127], А.А. Дудченко, С.А. Лурье, И.Ф. Образцова [137], а также обзорные разделы в монографиях В.В. Болотина и Ю.Н. Новичкова [41], Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко [132]. Существует два направления в применении гипотез и построении двумерных уравнений теории слоистых конструкций, отмеченные в известном обзоре Э.И. Григолюка и Ф.А. Когана [125]. В первом более общем направлении, для вывода уравнений применяются кинематические гипотезы для каждого отдельного слоя. Количество уравнений при этом зависит от числа слоёв. Во втором – вывод уравнений даётся на основе гипотез, привлекаемых для всего пакета слоёв в целом. Количество получающихся при этом уравнений не зависит от числа слоёв. Следуя установленной терминологии [137], [273], теории первого направления называются дискретно-структурными, а теории второго направления непрерывно-структурными.

Начало первого направления положено теорией трёхслойных конструкций, основанной на гипотезе ломаной линии. Сущность указанной гипотезы заключается в том, что для наружных несущих слоёв принимаются гипотезы Кирхгофа-Лява, а для заполнителя – линейный закон изменения сдвигов по толщине. При этом прямые линии в заполнителе, перпендикулярные к его срединной поверхности до деформации, остаются прямыми и после деформации, но вследствие сдвига заполнителя их перпендикулярность к срединной поверхности



нарушается.

Большой вклад в развитие теории трёхслойных конструкций, основанной на гипотезе ломаной линии внесли Э. Рейснер [331], А.П. Прусаков [261, 262], Э.И. Григолюк [122, 123, 124, 129], Л.Э. Брюккер [52, 53], А.С. Вольмир [106], Л.М. Куршин [8, 174], В.И. Королёв [170], Х.М. Муштари [215], П.П. Чулков [347, 348] и многие другие учёные. Теории и расчёту трёхслойных конструкций посвящены работы А.Я. Александрова, Л.Э. Брюккера, Л.М. Куршина, А.П. Прусакова [6], М.Я. Бородин, В.В. Павлова [6], А.Я. Александрова, Л.М. Куршина [8], А.С. Вольмира [106], Н.А. Алфутова, П.А. Зиновьева, Б.Г. Попова [9], А.Я. Александрова, Р.Е. Лампера, В.Г. Сувернева [276], В.А. Пухлий [263] и др. Детальному обзору исследований по этому вопросу посвящены работы А.Я. Александрова, Л.М. Куршина [8, 174] и Л. Хэбипа [331]. Различают трёхслойные пластины и оболочки с лёгким заполнителем, который не воспринимает продольных усилий [7, 8, 262] и конструкции с жёстким заполнителем, воспринимающим часть этих усилий [124, 274].

Развитию дискретно-структурной теории трёхслойных пластин и оболочек посвящены работы казанских учёных Х.М. Муштари [215, 216], М.А. Ильгамова [145, 146], Н.К. Галимова [111, 112], А.Г. Терегулова [307] и других учёных. В статье [216] строится общая теория трёхслойных оболочек несимметричного строения при постоянстве поперечных сдвигов по толщине заполнителя. Основные соотношения статики получены вариационным методом из энергетического функционала, откуда следуют уравнения равновесия и статические граничные условия для суммарных усилий и моментов. В работе [215] на примере цилиндрического изгиба трёхслойной пластинки доказывается, что гипотеза о постоянстве поперечного сдвига корректна при рассмотрении широкого круга задач изгиба трёхслойных пластин несимметричного строения.

Следует отметить, что подавляющее количество работ, по-

свящённых расчёту трёхслойных пластин и оболочек с использованием гипотезы ломаной линии, относится к конструкциям простой геометрической формы с граничными условиями типа Навье. Применение гипотезы ломаной линии в последствии обобщается для многослойных оболочек и пластин в трудах Э.И. Григолюка и П.П. Чулкова [128, 347], В.В. Болотина, В.Н. Москаленко, Ю.Н. Новичкова [40, 41, 213, 224]. Как следует из [8, 41, 125] теории, основанные на привлечении гипотез для каждого слоя в отдельности (гипотеза ломаной линии) позволяет с высокой степенью точности описать как общее напряжённо-деформированное состояние конструкции, так и деформирование каждого слоя в отдельности. К общему противоречию таких теорий относится нарушение условий контакта слоёв для поперечных касательных напряжений.

Второе направление основано на введении гипотез для всего пакета слоёв в целом. Это направление является обобщением классической теории пластин и оболочек, основанной на введении гипотезы прямой нормали для всего пакета, а также тех или иных подходов к построению уточнённых теорий однородных пластин и оболочек, учитывающих влияние деформаций поперечного сдвига.

Классическая теория многослойных пластин и оболочек получила развитие в ряде работ отечественных и зарубежных авторов [12, 131, 170, 183, 184] и нашла детальное отражение в монографиях С.А. Амбарцумяна [12] и Я.М. Григоренко [131]. Она справедлива для сравнительно тонкостенных систем, у которых различие жёсткостных характеристик слоёв не превышает одного порядка. Широкое применение в теории слоистых оболочек получила модель С.П. Тимошенко. Анализ этого подхода дан в обзорах Л.Я. Айнолы и У.К. Нигула [5], Э.И. Григолюка и И.Т. Селезова [127], А.К. Галиныша [191].

Для многослойных конструкций в рамках непрерывно-структурного подхода получили развитие уточнённые двумерные теории. С.А. Амбарцумян в своих работах, обобщён-



ных в монографии [12], в качестве гипотез для построения уточнённых теорий использует законы распределения поперечных касательных и нормальных напряжений, получаемые в классической теории. Для поперечных касательных напряжений применён закон квадратной параболы. Непрерывно-структурная теория слоистых оболочек и пластин развита в работах А.Ф. Рябова [284, 285], В.Г. Пискунова [243, 244, 247], А.О. Рассказова [264, 267], А.Н. Андреева и Ю.Н. Немировского [14], а также в работах [100, 236]. Другие варианты непрерывно-структурных теорий приведены в работах В.В. Васильева [100], Э.И. Григолюка и Г.М. Куликова [126], В.Н. Паймушина, Ю.Я. Петрушенко и И.Х. Саитова [231], Б.Л. Пелеха [235], В.В. Пикуля [236], А.С. Сахарова, А.Л. Козака, А.В. Гондляха [290, 291], А.Н. Ульяшиной [189] и других отечественных и зарубежных учёных.

Для решения задач о напряжённо-деформированном состоянии слоистых систем находят применение аналитические и численные методы. Среди аналитических методов широкое использование получил метод тригонометрических рядов. Зависимости для расчёта трёхслойных пластин, полученные этим методом, приведены в работах [7, 8, 274]. Метод тригонометрических рядов для статического расчёта многосвязных пластин на основе теории А.Ф. Рябова получил применение в работах Ю.А. Харченко [325, 326].

С целью упрощения решения краевых задач в классической теории анизотропных слоистых оболочек используется метод комплексного преобразования основных уравнений. В статьях [18, 214] получены комплексные уравнения В.В. Новожилова для слоистых ортотропных оболочек. Указанные аналитические методы находят применение к расчёту слоистых пластин и оболочек в случаях, когда дифференциальные уравнения и граничные условия отличаются относительной простотой.

Реальные конструкции имеют сложную форму поверхности, различные граничные условия и нагрузки, ослабление в

виде отверстий и вырезов. Анализ НДС таких конструкций аналитическими методами с учётом конструктивных особенностей практически нереализуем, поэтому приходится применять численные методы и современную вычислительную технику.

## 1.2 Численные методы определения НДС

В настоящее время для расчёта НДС широкое применение получили метод конечных разностей (МКР), вариационно-разностный метод (ВРМ), дифференциально-разностный метод (ДРМ), метод граничных элементов (МГЭ), вариационно-сеточный метод особенно его вариант — метод конечных элементов (МКЭ).

МКР является эффективным методом решения краевых задач. Он позволяет путём замены производных, входящих в дифференциальные уравнения и граничные условия, разностными соотношениями свести решение краевой задачи к решению системы линейных алгебраических уравнений. Математический аппарат метода хорошо разработан. На его основе разработаны алгоритмы, позволяющие рассмотреть широкий класс задач.

Использование МКР для расчёта пластин получило развитие в работе И.А. Цурпала и Н.Г. Тамурова [333]. МКР применялся к расчёту трёхслойных пластин, опёртых и защемлённых по контуру, В.Г. Пискуновым и А.М. Юнусовым [250]. Ю.В. Ситник [348] использовал конечно-разностный метод расчёта трёхслойных балок-стенок с горизонтальным расположением слоёв. МКР также использовали П.М. Варвак, А.Ф. Рябов и В.Г. Пискунов [65], П.В. Боровский [45] и другие исследователи. Однако при применении МКР отмечают определённые трудности, возникающие при использовании нерегулярной сетки и применения конечных разностей высоких порядков. Также следует отметить некоторую сложность



реализации различных вариантов граничных условий для геометрически сложных областей.

В основе ВРМ лежит принцип дискретизации в разностной форме функционала полной потенциальной энергии системы. Минимизация функционала на множестве узлов сеточного аналога континуальной среды объекта приводит к системе алгебраических уравнений, позволяя сохранить особенность метода Рунге – необходимость удовлетворения только кинематическим граничным условиям. В связи с этим проявляются преимущества ВРМ перед МКР при расчёте областей неканонических очертаний со свободными от связей границами. Применение ВРМ в механике пространственных конструкций нашло отражение в работах Д.В. Вайнберга, А.А. Синявского и их соавторов [59, 60].

Вопросам решения задач расчёта массивных деталей и толстых плит в трёхмерной постановке с помощью ВРМ посвящены работы П.М. Варвака, Д.М. Коновалюка и Н.И. Соколовского [64], Д.М. Коновалюка и В.Н. Акимовой [168] и других.

ДРМ основан на дискретизации в разностной форме систем дифференциальных уравнений по одним переменным и сохранении дифференциальной формы по другим. Этот метод в сочетании с методом дискретной ортогонализации С.К. Годунова [116] применялся к расчёту оболочек вращения в работах Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко и их соавторов [35, 67, 68, 131, 132].

В работе А.Г. Бондаря и А.О. Рассказова [44] рассмотрен изгиб слоистых кольцевых секторных пластин симметричного строения с трансверсально-изотропными слоями. Для разрешающей системы дифференциальных уравнений применяется численный метод, основанный на аппроксимации неизвестных функций степенными полиномами в узлах сетки и на использовании интегрирующих и дифференцирующих матриц (ИДМ) в качестве аналогов дифференциальных операторов.

Метод граничных элементов по универсальности уступает

другим методам, но в ряде случаев более эффективен с точки зрения затрат машинного времени. Однако, применение метода граничных элементов для расчета трехмерных тел ограничено в настоящее время сравнительно простыми конструктивными вариантами. Возникают также определенные сложности при решении физически нелинейных задач. Таким образом, возможность его эффективного применения к расчету широкого класса сложных трехмерных конструкций пока мала.

В последнее время широкое распространение получил вариационно-сеточный метод, который является в настоящее время наиболее универсальным методом решения задач механики сплошных сред. Успешное применение его для решения различных задач механики определяется сочетанием преимуществ вариационных и сеточных методов. Использование вариационных постановок задач позволяет ослабить требования к гладкости искомого решения, так как в функционал входят производные более низких порядков, чем в исходные дифференциальные уравнения. Это расширяет класс допустимых функций при построении приближенных решений и дает возможность строить приближенные решения при помощи кусочногладких локализованных функций. Вариационная постановка задач позволяет исключить из специального рассмотрения естественные граничные условия. Со своей стороны, сеточные методы облегчают известные трудности, связанные с выбором базисных функций в вариационных методах. Кроме того, благодаря появляющейся свободе в выборе сеток, узлы можно располагать гуще в тех частях области определения искомого решения, где оно ведет себя более сложно или где интерес представляют локальные детали его поведения. Возможность рационального расположения узлов позволяет достигать требуемой точности при меньшем числе узлов сетки. Эффективность вариационно-сеточного метода слабо зависит от геометрии областей, характера граничных условий, закона изменения свойств среды и внешнего воздействия на



область.

Фактически применение вариационно-сеточного метода восходит к работе А. Хренникоффа [368], предложившего необычную дискретизацию плоской полосы с помощью фермы с идеальными шарнирами. Основная идея получения вариационно-сеточных схем содержится в работе Р. Куранта [362]. Дальнейшая разработка метода была предпринята Дж. Аргирисом [359], М. Тернером, Р. Клафом, Г. Мартином, А. Топпом [376] и Дж. Сингом [377]. Литература, посвященная теории и реализации вариационно-сеточного метода весьма обширна. Укажем только на наиболее полные издания [16, 135, 142, 144, 166, 256, 281-283, 289, 292, 302]. Следует также указать обзоры О. Зенкевича [143] и Д.В. Вайнберга [201]. Исследованию сходимости и устойчивости, получению оценок погрешности различных схем вариационно-сеточного метода посвящены фундаментальные работы С.Г. Михлина [204, 205], Л.В. Канторовича [157], М.А. Красносельского и др. Необходимо также отметить работы Л.А. Оганесяна, В.Я. Ривкинды и Л.А. Руховца [226], Г. Стренга и Дж. Фикса [302], Ф. Съярле [304], Г.И. Марчука и В.И. Агошкова [190, 191], Ф. Фикеры [321] и др.

Необходимо отметить тесную связь вариационно-сеточного метода с классическими методами Ритца и Галёркина, которая позволяет выполнить исследование их сходимости и точности. Широкое распространение получил МКЭ, который является представителем вариационно-сеточных методов. Этому методу посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных авторов [17, 158, 206, 207, 225, 271, 302, 304]. Применение МКЭ к расчёту слоистых пластин и оболочек рассмотрено в работах В.Г. Агапова [3, 4], Е.В. Быкова, Б.Г. Попова [55], В.Н. Бакулина, А.А. Рассохи [24], В.И. Мяченкова [271], Ю.В. Осетинского [230], В.Г. Пискунова [244, 273], А.О. Рассказова [265], Р.Б. Рикардса [279, 280], А.С. Сахарова [207], В.С. Сипетова [294], Дж. Аргириса,

Д. Шарпфа [17], Г. Бартелдса, Х. Оттенса [30], С. Мау, Т. Пиана [198], и других исследователей. Различие в вариантах МКЭ по существу сводится к различию в выборе аппроксимирующих функций.

При использовании МКЭ для расчёта слоистых оболочек в последнее время появилась тенденция к рассмотрению их как трёхмерных тел с привлечением общих соотношений теории упругости. В инженерной практике такой подход в ряде случаев конкурирует с методами, непосредственно основанными на двумерной постановке. Для расчёта слоистых оболочек и пластин с помощью объёмных конечных элементов (КЭ) необходимо осуществить дискретизацию каждого слоя в отдельности. Это сопряжено с большими вычислительными трудностями в случае наличия тонких слоёв, так как выполнение требования о соизмеримости размеров КЭ приводит к решению систем алгебраических уравнений, порядок которых может превосходить возможности современных ЭВМ. К тому же, при расчёте многосвязных слоистых пластин и оболочек, при наличии различного вида ослаблений возникают сложности в построении трёхмерных сеток. В рамках использования трёхмерной теории упругости при построении КЭ отметим работы А.С. Сахарова [207, 291], в которых предложена моментная схема конечных элементов (МСКЭ) и приведены примеры расчёта слоистых оболочек, показывающие её эффективность. Из зарубежных авторов следует отметить работу [198].

Интенсивно развивается подход, реализующий приведение трёхмерной задачи теории упругости к двумерной задаче теории оболочек, что позволило использовать двумерные КЭ. В.А.Постновым и Н.Г.Слезиной [255] предложен прямоугольный КЭ для расчёта оболочек вращения с пятью степенями свободы в узле, основанный на введении гипотезы прямой линии. Изгибным деформациям в узле соответствуют три степени свободы, деформациям сдвига – две. В работе [121] рассмотрен расчёт с помощью МКЭ однородных пластин средней



толщины, для которых выполняются гипотезы Э. Рейснера. Предложенная методика в последствии применена Л.А. Гордоном [120] к расчёту симметричных многослойных пластин, лежащих на упругом основании. Для этих конструкций построены треугольный и прямоугольный КЭ, в каждом узле которых определено по три степени свободы, соответствующих прогибу и независимым от него углам сдвига. Для треугольного КЭ принята линейная аппроксимация прогиба и углов сдвига, для прямоугольного – билинейная. Неоднородная пластина при этом приводится к однородной изотропной пластине эквивалентной жёсткости.

В статье Нараянасвами [218] предложен треугольный КЭ для расчёта пластины с учётом деформации поперечного сдвига, в котором степени свободы, соответствующие изгибным и сдвиговым перемещениям, вводятся в узлах и серединах сторон КЭ. В статьях В.Ф. Снигирёва, М.Ю. Малинина [189, 296] и В.П. Агапова [3, 4] построены КЭ слоистой пластины на основе сдвиговой модели С.П. Тимошенко для пакета слоёв в целом. Изопараметрические треугольные КЭ второго и третьего порядков с шестью и, соответственно, девятью узлами на контуре построены Р.Б. Рикардсом и А.К. Чате [279, 280]. Элементы предназначены для расчета произвольных непологих многослойных оболочек. В качестве основы для построения расчётных зависимостей также принята модель С.П. Тимошенко. В работе Дж. Аргириса и Д. Шарпфа [17] предложен треугольный КЭ, который отличается высоким числом степеней свободы. Учёт поперечного сдвига производится при помощи углов поворота нормали, независимых от нормальных перемещений. Для аппроксимации прогибов приняты алгебраические полиномы пятой степени, для аппроксимации углов поворота — полиномы четвёртой степени. Общее число степеней свободы составляет пятьдесят одну. Численно исследована сходимость КЭ на примерах расчёта трёхслойных пластин с различными условиями на контуре.



В статье Е.В. Быкова и Б.Г. Попова [55] рассмотрен шести-узловой изопараметрический элемент многослойной оболочки, построенный на основе теории С.П. Тимошенко. Количество узловых неизвестных равно пяти. Рассмотренная группа элементов отличается достаточной универсальностью. Однако введение гипотезы прямой для пакета в целом, в случае значительного различия слоёв по своим физическим свойствам, может привести к искажению результатов. Кроме того большинство таких КЭ имеют ограничения в моделировании краевых условий, связанных с деформациями поперечного сдвига на торцах конструкции. В связи с этим получили широкое применение КЭ, основанные на неклассических непрерывных структурных теориях [267, 273], которые учитывают нелинейный закон изменения тангенциальных перемещений по толщине пакета. Такие модели получили развитие в работах В.Г. Пискунова, А.О. Рассказова, В.С. Сипетова, Н.Г. Марченко, В.С. Карпиловского, Н.Г. Харченко [245, 247, 248, 265, 266, 267, 273].

На основе дискретно-континуальной схемы МКЭ [146] в работах [247, 248] были построены прямоугольный и треугольный КЭ нулевой кривизны с двенадцатью степенями свободы в узле, учитывающие деформацию срединной поверхности оболочки при плоском напряжённом состоянии, изгибе, поперечном сдвиге, обжатии, а также изменение нормальных перемещений от непосредственного воздействия внешней нагрузки. Элементы предназначены для расчёта слоистых конструкций с трансверсальноизотропными слоями. В статье А.О. Рассказова [265] изложено построение КЭ многослойной тонкой оболочки, для которой в каждом узле назначено десять степеней свободы: по две, связанных с тангенциальными смещениями и функциями сдвига, независимыми от нормальных перемещений, и по три, связанных с нормальными перемещениями и функциями обжатия. Общее число степеней свободы прямоугольного КЭ составляет сорок. На основе этой теории в рабо-

те [266] построен прямоугольный КЭ с двенадцатью степенями свободы в узле, позволяющий учесть влияние поперечного сдвига, обжатия и кривизны.

Следующая группа КЭ — это специализированные двумерные элементы, предназначенные для расчёта трёхслойных конструкций. В работе Г. Бартелдса и Х. Оттенса [30] рассмотрены два вида треугольных шестиузловых КЭ с изотропными наружными слоями и лёгким заполнителем. Для первого типа КЭ построение матрицы жёсткости основано на законах распределения перемещений в отдельных слоях. Нормальные перемещения принимаются в виде полного алгебраического многочлена третьей степени и выражены через значение прогиба и его производных по направлению координатных осей в вершинах и значение прогиба в центре элемента. Прогибы во всех слоях считаются равными. Углы сдвига заполнителя аппроксимируются многочленами второй степени, коэффициенты в которых определяются через узловые значения этих функций в вершинах и на серединах сторон. Во втором типе рассматриваемых элементов для углов сдвига заполнителя принята та же аппроксимация, а нормальные перемещения аппроксимируются многочленом второй степени. Все три функции перемещений определяются через их значения в узлах и на серединах сторон элемента.

Применению метода конечных элементов к расчёту трёхслойных пластин с лёгким заполнителем посвящены работы Ю.В. Осетинского и В.А. Черепяхина [230]. В основу построения КЭ положены предположения о пренебрежении изгибной жёсткостью несущих слоёв и несжимаемости в поперечном направлении. Рассмотрены вопросы расчёта подкреплённых трёхслойных плит на основе предложенных КЭ. На основе вышеуказанных предположений В.С. Наумовым [219] был построен прямоугольный элемент для расчёта трёхслойных пластин с лёгким заполнителем. Общее число неизвестных в узле равно пяти.



В работе В.Н. Бакушина и В.И. Демидова [28] построен прямоугольный КЭ естественной кривизны с сорока степенями свободы, предназначенный для расчёта трёхслойных цилиндрических оболочек с лёгким заполнителем. Расчётные зависимости основаны на гипотезе ломаной линии. Материал несущих слоёв принят ортотропным. В заполнителе учитывается сдвиг и сжимаемость в радиальном направлении.

Отличительной чертой КЭ, построенных на основе непрерывно-структурных теорий (теория С.П. Тимошенко, различные уточнённые неклассические теории) является то, что количество узловых неизвестных в этих элементах постоянно и не зависит от числа слоёв в пакете. Это позволяет с равными вычислительными затратами рассчитывать конструкции с любым числом слоёв. Однако применение таких КЭ вносит определённую погрешность, связанную с деформированием каждого слоя в отдельности. Построенные на основе дискретно-структурных теорий КЭ, позволяют с высокой точностью описать деформированное состояние как всего пакета, так и каждого из слоёв. Однако число степеней свободы в таких элементах зависит от количества слоёв, поэтому возникают значительные вычислительные трудности при реализации МКЭ на ЭВМ. Этим объясняется малое число публикаций по созданию многослойных КЭ на основе указанных теорий. Ограничено также число работ по разработке специализированных КЭ для расчёта трёхслойных конструкций.

При использовании МКЭ задача сводится к разрешающей системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) высокого порядка. Система линейных алгебраических уравнений может решаться как прямыми, так и итерационными методами. Для систем малой и средней размерности более предпочтительными являются прямые методы. Классическими примерами прямых методов решения СЛАУ являются различные видоизменения метода исключения Гаусса, метод квадратного корня и другие. Итерационные методы имеют преимуще-



ство главным образом для решения систем уравнений большой размерности и нелинейных задач. К таким методам относятся: метод Ричардсона, метод Писмена—Рэчфорда, метод минимальных итераций Ланцоша, методы сопряжённых направлений и другие. Изложение и обзор с различных точек зрения прямых и итерационных методов решения СЛАУ содержится в работах Н.С. Бахвалова [31], В.В. Воеводина [104], В.В. Воеводина, Ю.А. Кузнецова [105], Г.И. Марчука [190], Г.И. Марчука, Ю.А. Кузнецова [192] и др. Несмотря на широкое применение МКЭ необходимо отметить трудности, возникающие при реализации метода на ЭВМ, среди которых основными являются формирование и хранение плотно упакованной матрицы жёсткости. В прикладных задачах порядок матрицы большой и разместить её в оперативной памяти ЭВМ не удаётся. Это требует использования внешней памяти и обмена информацией. При формировании матрицы жёсткости необходима предварительная перенумерация узлов для минимизации ширины ленты, что также приводит к усложнению алгоритма и увеличению времени счёта. Кроме того, чем выше порядок матрицы, тем хуже она обусловлена. Это ведёт к увеличению погрешностей при решении СЛАУ. Решению этих проблем посвящены работы [88, 312, 345]. Исходя из анализа методов расчёта задач статики несущих конструкций можно сделать вывод об актуальности проблемы, посвящённой разработке методов и алгоритмов, сочетающих в себе преимущества вариационно - сеточного подхода, но не требующих формирования, хранения и оперирования с матрицей жёсткости и позволяющих решать задачи больших размерностей, используя только оперативную память ЭВМ.

### **1.3 Анализ методов расчёта колебаний пластинчато-оболочечных конструкций**

К настоящему времени выполнен большой объем исследова-

ний в разработке аналитических и численных методов определения собственных частот и соответствующих им форм колебаний пластинчатых и оболочечных конструкций. Общеизвестны труды А.Я. Александрова, С.А. Амбарцумяна, Н.П. Абовского, И.Б. Бубнова, В.Г. Галеркина, Э.И. Григолюка, И.М. Бабакова, В.В. Болотина, А.С. Вольмира, Я.М. Григоренко, А.Н. Динника, М.А. Ильгамова, С.Н. Кана, С.Г. Михлина, В.Н. Москаленко, В.И. Мяченкова, Ю.Н. Новичкова, Я.Г. Пановко, Е.С. Сорокина, О.Д. Ониашвили, В.А. Постнова, В.С. Гонткевича, И.Я. Амиро, В.А. Заруцкого, А.В. Александрова, Д.В. Вайнберга, А.Л. Гольденвейзера, А.К. Косухина, В.В. Новожилова, Г.С. Писаренко, В.Г. Пискунова, А.П. Прусакова, А.О. Рассказова, А.С. Сахарова, С.П. Тимошенко, В.В. Хильчевского, Н.Н. Шапошникова, Ю.А. Шимановского, Н.А. Шульги, А.М. Черняка, С. Берга, Т. Канта, А. Палазотты, Н. Путчи, Д. Редди, И. Ченга, Д. Уилкинса, И. Янга и др.

Существует большое количество различных аналитических методов расчета пластинчатых и оболочечных конструкций на собственные колебания. В числе первых исследований по вопросам прочности, устойчивости и колебаний указанных систем следует отметить труды И.Г. Бубнова, Б.Г. Галеркина, С.П. Тимошенко, которые создали приближенные методы расчета колебаний стержней и пластин. Из таких методов более эффективными, как показывает опыт, являются вариационные методы Ритца и В.Г. Галеркина [19, 36]. В настоящее время вариационные методы хорошо разработаны в деталях и удобно приспособлены к решению задач на колебания пластинок, кроме работ Релея, Б.Г. Галеркина, Л.С. Лейбенсона, нужно отметить работы С.Г. Михлина [204] и Е.С. Сорокина [299]. В работах Е.С. Сорокина расчеты пластинок на колебания доведены до простых подробно составленных таблиц. Колебания пластинок различной геометрической формы с разными граничными условиями подробно рассмотрены в

работах В.В. Болотина [36], В.С. Гонткевича [119].

Среди существующих методов расчета на колебания пластинок следует выделить методы Релея—Ритца, Эдмана, Вайнштейна, Саусвелла, Игути, метод рядов, которые позволяют успешно решать с достаточной точностью задачи на собственные колебания пластинок. Эдман и Игути рассмотрели свободные колебания прямоугольных пластинок с различными граничными условиями и привели безразмерные частоты в виде таблиц.

Колебания пластинок, имеющих в плане форму параллелограмма, треугольника, трапеции, эллипса, круга подробно рассмотрены в работах Кадамба и Кола, Клейна. Расчет колебаний пластин с различным закреплением на отдельных участках внешнего и внутреннего контуров при наличии отверстий и вырезов рассмотрен в работе М.М. Стратоновой [22], в которой рассмотрены прямоугольные пластины с прямоугольными вырезами, отверстиями, жесткими включениями, со смешанными условиями закрепления на сторонах (например, часть сторон заделана, другая свободна и т.д.). Кроме того, на линиях внутри пластины могут быть наложены дополнительные условия закрепления. Решение задачи о колебаниях пластин в рядах с применением энергетических методов рассмотрено в работах Б.М. Броуде, В.В. Козлякова, Н.С. Кудрина, А.А. Курдюмова, А.С. Лейбензона, А.А. Назарова, В.Н. Новацкого, П.Ф. Новацкого, П.Ф. Пашковича, В.А. Постнова, А.П. Филиппова. Метод перемещений использовался в работах А.В. Александрова, И.П. Абовского, И.Я. Амиро, В.А. Заруцкого, А.Л. Гольденвейзера, А.К. Косухина, В.В. Новожилова, А.М. Черняка.

В настоящее время большое распространение получил асимптотический метод к расчету колебаний пластин, позволяющий исследовать частоты свободных колебаний упругих тел при достаточно высоких волновых числах [181, 188]. Согласно этому методу асимптотическое решение для форм сво-



бодных колебаний выражается в виде суммы внутреннего решения и поправочных решений, которые называются динамическими краевыми эффектами. Для каждой границы тела строят решения, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям и условиям на соответствующей границе. Асимптотический метод применим к решению задач, точное решение которых неизвестно, а также задач, точное решение которых слишком громоздко. Частоты и формы свободных колебаний прямоугольной пластинки, свободной по контуру, были изучены при помощи асимптотического метода Е.П. Кудрявцевым [36]. Он же рассмотрел колебания пластинки, окаймленной упругими ребрами.

Тонкостенные пластинчатые и оболочечные конструкции составляют обширный класс механических объектов, которые используются в современном машино- и приборостроении, в ракетной и космической технике, а также в строительстве. Такие конструкции обычно подвергаются действию динамических нагрузок. Это обуславливает появление циклических напряжений в элементах конструкций и возникновение других сложных процессов, нежелательных с точки зрения прочности и надежности машин.

Для решения вышеуказанного класса задач разработаны различные приближенные методы и подходы. В этом направлении наиболее известны работы С.П. Тимошенко [310], В.В. Болотина [43], В.С. Гонткевича [119], Э.И. Григолюка [130], Н.П. Абовского [1], В.Г. Литвинова [181], В.Г. Пискунова [242], М.В. Никулина [234], И.Я. Амиро [13], В.А. Заруцкого [141], А.А. Малинина [188], С.И. Богомолова [47], Ю.И. Немчинова [221], А.А. Назарова [217], Д.В. Вайнберга [63], А.С. Сахарова [316], А. Rosen [372], Ruhe [374], Wang [379], Cohen [360], Acruggs R.M. [357], Ross [373] и многих других отечественных и зарубежных авторов.

В общем случае количество исследований, посвященных пространственным пластинчато-оболочечным конструкциям,

очень велико. Наибольшее распространение получили приближенные методы Релея, Ритца, Тимошенко и Бубнова-Галеркина. Однако необходимость выбора форм колебаний, истинный характер которых не всегда возможно предугадать, особенно с повышением частот, создает трудности при их применении. Поэтому в последнее время в связи с развитием ЭВМ выполнен обширный объем исследований по разработке численных методов расчета собственных частот пространственных пластинчато-оболочечных конструкций.

С точки зрения решения прикладных задач, связанных с расчетом пластинчатых пространственных и оболочечных конструкций, работающих в условиях вибрации, наибольший интерес представляют вынужденные колебания с учетом имеющихся в системе диссипативных сил.

Большой вклад в изучение рассеивания энергии в элементах конструкций внесли Г.С. Писаренко [237], Н.В. Новиков [223], Н.В. Василенко [70], В.В. Матвеев [195-197], Е.С. Сорокин [299], А.П. Филиппов [320], В.В. Хильчевский [328], А.П. Яковлев [356] и многие другие ученые. В связи с прогрессом в развитии вычислительной техники и появлением мощных ЭВМ к настоящему времени выполнен обширный объем исследований в разработке численных методов и алгоритмов расчета на свободные и вынужденные колебания пластинчатых и оболочечных конструкций, в развитие которых большой вклад внесли А.В. Александров, П.М. Варвак, Д.В. Вайнберг, А.С. Вольмир, Э.И. Григолюк, Я.М. Григоренко, В.И. Мяченков, В.В. Новожилов, В.А. Постнов, А.С. Сахаров, Н.Н. Шапошников, В.П. Ильин, Дж. Аргирис, Б. Айронс, Д. Бушнелл, Р. Галлагер, Л. Герман, Б. Парлетт, Рухе, П. Ланкастер, Д. Уилкинсон, О. Зенкевич, Р. Клаф, Г. Стренг и др.

Численные методы определения собственных частот и форм колебаний оболочек развиваются в настоящее время по следующим направлениям. Первое основано на конечноразностной аппроксимации разрешающих дифференциаль-



ных уравнений (метод конечных разностей), второе — на построении вариационных схем, в частности методе конечных элементов. Однако при применении метода конечных разностей существуют определенные трудности, связанные с использованием нерегулярной сетки, применении конечных разностей высоких порядков, а также при решении динамических задач для физически неоднородных пластин и оболочек переменной толщины. Кроме того возникают затруднения при реализации различных вариантов граничных условий при применении метода к сложным по конфигурации областям. При разработке алгоритмов решения задач на свободные колебания пластинчатых и оболочечных конструкций предпочтение отдается вариационно-сеточному методу, дающему возможность реализации единого подхода к расчету сложных пластинчатых и оболочечных конструкций.

Работы, в которых колебания исследуются на основе общих уравнений теории упругости, в особенности для слоистых систем, немногочисленны. В статье В.Н. Москаленко [212] рассмотрена трёхслойная прямоугольная плита с граничными условиями Навье на боковых гранях. Получены уравнения частот антисимметричных колебаний для двух основных случаев:

- 1) все три слоя считаются трёхмерными телами;
- 2) для несущих крайних слоёв введены предположения о справедливости гипотез Кирхгофа-Лява, а заполнитель считается трёхмерным телом. Автор делает вывод об удовлетворительном совпадении результатов, полученных на основе точного решения и уравнений, основанных на гипотезе ломаной линии в диапазоне, вплоть до длин полуволн порядка толщины пакета.

Колебания двухслойных плит в трёхмерной постановке рассмотрены А.Я. Вискребенцевым и А.И. Холодом [107]. В работе А. Сриниваза, К. Йога, А. Рао [303] приведены результаты точного решения при колебаниях и потере устойчиво-



сти трёхслойной плиты. Исследованию волновых процессов в многослойных средах в рамках трёхмерной теории посвящена монография Н.А. Шульги [352].

Как обычно аналитическое решение задач колебаний на основе трёхмерных уравнений теории упругости позволяет сопоставить приближённые решения с точным и оценить пределы применимости тех или иных гипотез, применяемых в теориях слоистых пластин и оболочек.

Трудности решения трёхмерных задач теории упругости способствовали появлению большого числа работ по развитию двумерных приближённых теорий и решению на их основе соответствующих динамических задач. Исследованию колебаний слоистых пластин на основе дискретно-структурных теорий (гипотеза ломаной линии) посвящены работы [40, 41, 129, 145, 146, 186, 261, 262]. В работах [261, 262] получены уравнения свободных колебаний трёхслойных прямоугольных пластин и стержней с мягким заполнителем. Рассмотрены некоторые частные случаи закрепления концов трёхслойных стержней и бесконечно длинных пластин. Во всех случаях собственной изгибной жёсткостью наружных слоёв пренебрегали.

Вопросам колебаний трёхслойных балок и пластин, в основном прямоугольной формы, посвящены работы А.П. Прусакова [260, 261, 262]. Изгибу и свободным колебаниям ортотропных цилиндрических оболочек с жёстким заполнителем посвящена работа Т.Н. Васициной [101]. Для определения частоты изгибных колебаний свободно опёртой цилиндрической оболочки получено в общем виде уравнение, в котором продольная и окружная инерция масс не учитывалась. А.П. Прусаковым в статье [260] представлены уравнения свободных колебаний пологой ортотропной цилиндрической оболочки с жёстким несжимаемым заполнителем.

Результат исследований Джона Ю. показал, что в трёхслойных пластинах с мягким заполнителем эффект сдвига в несущих слоях, инерция вращения несущих слоёв относительно

но собственных срединных плоскостей и изгибная жёсткость заполнителя имеют пренебрежительно малое влияние. В статье М.А. Ильгамова [146] при помощи вариационного уравнения Лагранжа получены уравнения движения и равновесия несимметричных трёхслойных оболочек с мягким сжимаемым по толщине заполнителем.

Уравнения движения непологой трёхслойной сферической оболочки с несущими ортотропными слоями и жёстким заполнителем исследованы в работах А.Д. Лизарева и Н.Б. Ростаниной [185, 186]. Полагалось, что внутренний слой несжимаем в радиальном направлении и имеют место деформации сдвига, а наружные слои работают как мембраны. Получены решения системы дифференциальных уравнений несимметричных колебаний в присоединённых функциях Лежандра. Рассмотрены три варианта граничных условий: жёстко закреплённая оболочка с шарнирно закреплённым краем, оболочка со свободным краем.

Уравнения колебаний многослойных конструкций на основе дискретно-континуальной теории исследовались в работах В.В. Болотина [40], В.В. Болотина и Ю.Н. Новичкова [41], В.И. Мяченкова [271], Ю.Н. Новичкова [224] и других учёных. Э.И. Григолюк и П.П. Чулков в работе [129] получили общие уравнения равновесия и свободных колебаний тонких трёхслойных непологих оболочек. Приведены выражения для определения собственных частот поперечных колебаний круговых конических оболочек и пологого сферического сегмента с граничными условиями Навье.

Колебания слоистых конструкций на основе различных непрерывноструктурных теорий, в которых вывод уравнений даётся на основе гипотез, привлекаемых для всего пакета слоёв в целом рассмотрены в работах С.А. Амбарцумяна [11, 12], Я.М. Григоренко и Е.И. Беспаловой [208], А.Ф. Рябова [285], В.Г. Пискунова [243], А.О. Рассказова, И.И. Соколовской, Н.А. Шульги [267], С.Н. Кана, В.Л. Ингульцова,



Л.И. Гармаша [114, 115], Л.П. Хорошуна [226] и др.

Независимо от выбора гипотез точные решения получены для шарнирно опёртых конструкций простейших геометрических форм. В связи с этим широкое развитие получили различные приближённые методы исследования колебаний те же, что и для однослойных пластин и оболочек, Релея—Ритца и Бубнова—Галёркина [19, 167], Эдмана, Вайнштейна, Саусвелла, рядов, асимптотические методы, которые позволяют успешно решать с достаточной точностью задачи на собственные значения. Определённое распространение получил метод каллокаций [167, 204], эффективность которого в большей мере зависит от выбора точек каллокаций. В.В. Болотин [40] предложил асимптотический метод исследования собственных колебаний прямоугольных и квадратных пластин, в котором искомое решение представляется в виде суммы порождающего и корректирующего решений. Последние называются динамическими краевыми эффектами. Для каждой границы тела строят решения удовлетворяющие дифференциальным уравнениям и условиям на границе. Погрешность метода тем меньше, чем выше частота. Поэтому он может дополнять вариационные методы, дающие надёжные результаты для низших частот. Асимптотический метод становится неприменим, если не удаётся построить решения динамического краевого эффекта. В работе Г. Шмидта [351] асимптотический метод В.В. Болотина применялся в исследовании колебаний прямоугольных трёхслойных пластинок. В работах Я.М. Григоренко, Е.И. Беспаловой, Т.Н. Килиной [209] с помощью методов разделения переменных и дискретной ортогонализации исследованы задачи свободных колебаний слоистых ортотропных прямоугольных пластин, цилиндрических и сферических оболочек. Произведено сравнение результатов расчёта, полученных в пространственной постановке и в соответствии с теориями Кирхгофа-Лява и С.П. Тимошенко.

При расчёте конструкций, работающих под воздействием



вибрационных нагрузок, значительный интерес представляют вынужденные колебания с учётом рассеяния энергии. Вопросы демпфирования колебаний в слоистых конструкциях впервые рассмотрены применительно к бесконечной полосе с покрытием Х. Оберстом и П. Ленартом [330]. Некоторые частные случаи расчёта слоистых пластин и стержней исследовались в работах Б.Т. Тарковского и В.И. Гельфгафта [306], С. Берта, Р. Френсиса, Р. Дитаранто [32] и других исследователей. В дальнейшем вопросы демпфирования в слоистых материалах получили значительное развитие в работах В.В. Хильчевского, В.Г. Дубенца [330, 136], С.С. Коробки, В.Г. Попова [169].

Несмотря на большие успехи, достигнутые в изучении демпфирующих свойств элементов конструкций, результаты расчёта получены для слоистых конструкций с граничными условиями в виде шарнирного опирания по контуру. Поэтому важной проблемой остаётся разработка эффективных методов расчёта и анализа колебаний сложных слоистых пластинчато-оболочечных конструкций при произвольных условиях закрепления с учётом рассеяния энергии в материалах слоёв.

Методы, применяемые для исследования колебаний слоистых пластин и оболочек в основном те же, что и для однородных. Следует, однако, отметить, что решение конкретных задач для слоистых конструкций, по сравнению с решением аналогичной задачи для однородной конструкции, требует преодоления более сложных математических и вычислительных трудностей [12, 41, 137]. Это объясняется большим числом неизвестных функций в уравнениях и более высоким порядком систем разрешающих уравнений. Существенно усложняется решение для конструкций сложной формы, при граничных условиях, не позволяющих получать решение в виде разложений в ряды по полным известным системам функций с разделёнными переменными. Этим объясняется относительно небольшое количество работ, посвящённых расчёту различного вида слоистых пластин и оболочек с произвольными гра-

ничными условиями. В таких случаях целесообразно использовать численные методы.

Колебания однородных и слоистых пластин, оболочек на основе МКР исследовались в работах П.М. Варвака, П.В. Боровского, В.Г. Пискунова [34], Б.Н. Бублика, Л.В. Мольченко [54], В.М. Антоненко, В.Г. Пискунова, А.Е. Степановой [15], В.Г. Пискунова [246], В.Г. Приказчикова [257], и др. Задачи колебаний пластин и оболочек на основе ВРМ рассмотрены Н.П. Абовским, Д.В. Вайнбергом, С.Я. Гранатом, В.Н. Кислоким, В.И. Савченковым, А.С. Сахаровым [62, 161, 346] и другими авторами.

Среди численных методов особенно интенсивно в последнее время развивается вариационно-сеточный метод, который позволяет осуществлять непосредственный переход к дискретной расчётной модели, естественно формулировать граничные условия и рассматривать конструкции сложной геометрической формы. Применение вариационно-сеточных методов, в частности МКЭ в задачах динамики рассматривалось в работах А.В. Александрова [208], Д.В. Вайнберга [61], В.Н. Кислокого [162], В.П. Кандинова [158], В.Г. Пискунова [243], А.О. Рассказова [267], А.С. Сахарова [207], А.П. Синицина [293], Н.Н. Шапошникова [348], Ж. Деклу [135], О. Зенкевича [142] и др. В настоящее время МКЭ относится к числу наиболее распространённых численных методов расчёта сложных систем. Однако применение стандартной процедуры МКЭ для задач динамики конструкций в ряде случаев приводит к операциям с матрицами масс и жёсткостей больших размерностей, которые не удаётся разместить в оперативной памяти ЭВМ. Это создаёт дополнительные вычислительные трудности и увеличивает время счёта. Таким образом, возникает необходимость разработки методов и алгоритмов решения задач динамики однородных и слоистых пластинчато-оболочечных систем, сочетающих в себе преимущества вариационно-сеточного метода, но не требующих фор-



мирования, хранения и оперирования с матрицами масс и жёсткостей и позволяющих решать реальные практические задачи, используя только оперативную память ЭВМ. Решению этой проблемы посвящены работы [20-26, 83-98, 228].

Эффективное использование численных методов невозможно без создания вычислительных комплексов, ориентированных на современные ЭВМ. В связи с этим целесообразным является разработка пакетов прикладных программ (ППП), позволяющих исследовать напряжённо-деформированное состояние слоистых элементов конструкций, находящихся под воздействием статических и вибрационных нагрузок.

Работы по созданию ППП расчёта задач статики и динамики однослойных и слоистых конструкций ведутся в Центральном НИИ строительных конструкций, Московском институте инженеров транспорта, Ленинградском кораблестроительном институте, Институте механики НАН Украины, НИИАССе, Киевском национальном университете строительства и архитектуры, Киевском национальном транспортном университете, Национальном техническом университете Украины «Киевский политехнический институт» и других организациях.

## 1.4 Анализ методов построения сеток

Совершенствование и развитие вариационно- и проекционно-сеточных методов как наиболее эффективного математического аппарата инженерного проектирования привело к созданию специализированных пакетов прикладных программ для исследования широкого диапазона задач механики. Основным этапом решения указанных задач является переход к конечномерным (дискретным) моделям. Для этого необходима дискретизация исходной области, т.е. разбивка её на конечное число подобластей (конечные элементы), выделение узловых точек, задание координат и связей узлов. Общий объём данных о дискретной модели в реальных



практических задачах измеряется десятками тысяч чисел [2]. Поэтому для производительности расчётов численными методами необходимо решение проблем, связанных с автоматизацией построения различных видов сеток, подготовки исходной и наглядного представления выходной информации.

Учитывая указанные проблемы, был разработан ряд алгоритмов – сеточных генераторов для двумерных [2, 153] и трёхмерных областей [207], предполагающих различную степень автоматизации построения сеток и подготовки исходной информации. Необходимо отметить, что полностью автоматизированные существующие генераторы сеток не всегда возможно использовать для дискретизации областей произвольного вида. Простые схемы построения сетки также не всегда могут в достаточной степени снизить трудозатраты на подготовку исходной информации. Обзор методов построения сеток с плоскими и пространственными ячейками дан в [2, 207].

Рассмотрим основные алгоритмы и методы формирования сетки конечных элементов, наиболее часто применяющиеся при построении конечномерных моделей для плоских областей. Методы построения сеток, известные под названием методов изопараметрических координат, разработаны Дж. Эдгебергом, О. Зенкевичем и Д. Филлипсом. Эти методы предполагают представление расчётной области в виде совокупности подобластей, каждой из которых ставится в соответствие изопараметрический квадратичный элемент. Таким образом, локальные изопараметрические координаты преобразуются в глобальные декартовые. В изопараметрической системе координат может применяться неравномерное разбиение. Это даёт возможность производить сгущение узлов сетки в заданной части исходной области. Если исходная область представляется объединением подобластей, необходимо осуществлять согласование узлов на сопрягаемых границах.

Для построения сеток использовались методы натуральных координат. Эти методы, подобно схемам изопараметрических

координат, требуют применения топологической аналогии исходной области и шаблона с заранее заданной сеткой. Ввиду общности методы изопараметрических и натуральных координат объединены в систему  $i - j$  алгоритмов построения сетки. Для исходной области в качестве сеточных шаблонов обычно применяются квадрат, треугольник, эллипс, круг. Управление плотностью узлов сетки возможно за счет изменения начального разбиения параметра области на участки, а также разбиения исходной области на подобласти.

На использовании шаблонов также основаны методы натягивания регулярной сетки. Впервые эти методы были предложены Х.А. Камелем и Г.К. Эйзенштейном [153]. Для построения сетки выполняется разбиение границ области. Затем для нее строится шаблон, представляющий собой регулярную треугольную сетку с числом граничных узлов, равных числу граничных узлов исходной области. Сеточные шаблоны трансформируются в окружности. После этого граничные узлы шаблона совмещаются с соответствующими граничными узлами области. Далее натянутая сетка подвергается регуляризации. Как показывает опыт [153], полученные сетки регулярны только для выпуклых подобластей, близких к окружностям. При использовании методов натягивания регулярной сетки необходимо предварительное разбиение исходной области на выпуклые подобласти, которые затем аппроксимируются выпуклыми многоугольниками. Для областей сложной формы это является трудоемким процессом, поэтому на практике предварительное разбиение исходной области чаще всего осуществляется вручную.

Методы изопараметрических и натуральных координат, а также методы натягивания сетки, несмотря на различия, основаны на использовании сеточных шаблонов, которые отождествляются с исходной областью. При применении этих методов необходимо осуществить разбиение области на подобласти необходимой формы и задать для них шаблоны. Следова-



тельно, качество сгенерируемой сетки в основном зависит от удачного выбора шаблона и вида подобластей.

Метод условных потенциалов [177] основан на использовании функции плотности элементов на стадии генерации сеток. Область, подлежащая дискретизации, заменяется совокупностью подобластей, границы которых проходят через точки локальных максимумов функции плотности элементов. Для построения сетки требуется вычислить условные длины противоположных сторон подобластей и разбить их на соответствующее число отрезков равной условной длины. Затем производится масштабирование условных длин сторон подобластей таким образом, чтобы их величины были равны единице. Точкам разбиения сторон ставится в соответствие условный потенциал, который выражает масштабированное значение их расстояний от концевых точек сторон. Узлы противоположных сторон соединяются в соответствии с требованием минимума разности потенциалов на концах линий. Сетка образуется в результате соединения узлов, имеющих близкие значения потенциалов. При этом часть узлов может быть не использована.

Метод предварительного нанесения узлов был предложен Дж. Сухарой и Ф. Фукудой и развит Д. Кавендышем. Исходная область дискретизации разбивается на ряд областей с целью нанесения узловых точек в соответствии с заданными законами распределения для каждой подобласти и границы всей области. Далее осуществляется генерация узловых точек на границах области и в выделенных подобластях. После этого происходит формирование треугольных элементов посредством соединения сгенерированных узлов непересекающимися отрезками. В некоторых программных реализациях этого метода предварительное нанесение узлов сетки выполняется вручную. Основным достоинством автоматизированного варианта метода предварительного нанесения узлов является непосредственное использование заданной плотности

распределения узлов в процессе построения сетки. Однако метод требует обязательного контроля взаимного расположения сгенерированных узловых точек, что намного усложняет и замедляет работу алгоритма.

В отличие от упомянутых ранее методов, независимо развитые в работах [3, 32, 316] методы не используют при построении сетки какой-либо регулярной первоосновы или заданного распределения узлов, а основываются на принципе последовательного заполнения области элементами от границы внутрь области. Заполнение происходит таким образом, что граница части области, которая еще не подверглась дискретизации, все время представляет собой непрерывную замкнутую и несамопересекающуюся ломаную — текущую границу сетки. Методы, основанные на указанной процедуре, называются методами выравнивания-выемки [3] или методами сжатия текущей границы. Для двумерных областей произвольного вида наиболее перспективным является треугольный элемент, т.к. треугольная сетка удовлетворительно аппроксимирует поверхности любой кривизны, не накладывает ограничений на размеры элементов и позволяет легче осуществить их контроль [3]. Это предопределило выбор треугольного элемента как базового в методе выравнивания-выемки.

Основная стратегия метода выравнивание-выемка следующая [3, 32]. Плоская многосвязная область представляется в виде непересекающегося объединения односвязных базовых подобластей, граница которых состоит из непересекающегося объединения базовых линий. Базовая линия описывается следующими элементами: прямой, дугой окружности и квадратичной параболой, а элемент в виде прямой может быть образован, если известно положение начального и конечного базовых узлов. Элемент в форме окружности определяют заданием трех базовых узлов, причем средний не обязательно должен совпадать с каким-либо промежуточным узлом, он предназначен для определения координат центра окружности.



Базовый параболический элемент также задается тремя базовыми углами. Для его формирования первый и последний базовые углы соединяются прямой. Разбиение базового параболического элемента осуществляется разбивкой соединяющей прямой и проведением к ней перпендикуляров, которые пересекают параболу в заданных точках. На основании информации о сформированных граничных узлах, полученных путем дискретизации базовых линий, производится автоматическая триангуляция области. Алгоритм метода характеризуется двумя способами формирования треугольных элементов:

- 1) выравниванием, т.е. уменьшением текущей границы;
- 2) выемкой, т.е. построением нового узла текущей границы.

Применение конкретного способа образования треугольного элемента определяется проверкой локальных свойств текущей границы в соответствии с рядом установленных критериев [3]. Трансформация текущей границы сетки производится не последовательно, в заданном направлении обхода, а в окрестности минимального угла между смежными звеньями границы. Для метода выравнивание-выемка не существует жестких ограничений на расположение узлов генерируемой сетки. Завершающим этапом построения сетки является ее геометрическая регуляризация. Для этой цели используется итерационный метод, согласно которому внутренние узлы последовательно совмещаются с центроидами многоугольников, составленных из треугольников их образующих [3]. Наиболее эффективным из распространенных методов построения сетки треугольных элементов является метод выравнивания-выемки, так как он обеспечивает хорошее приближение сетки к оптимуму при сравнительно небольшом объеме вычислений [3]. При использовании этого метода реализуются большие возможности контроля и управления построением элементов при относительно небольшом объеме входных данных.

Рассмотренные выше методы использовались, в основном, для построения сеток плоских областей. Оболочечные си-

стемы являются сложными и широко распространенными конструктивными элементами. Они включают пластинчато-оболочечные конструкции, в том числе и многосвязные. Ввиду недостаточной разработки методов построения сеток применительно к указанным конструкциям затруднено эффективное исследование задач механики оболочек. Кроме того, использование автоматизированных сеточных генераторов позволит значительно повысить эффективность вычислительных комплексов для прочностного расчета оболочек произвольной формы и различного вида пластинчато-оболочечных конструкций. Метод построения сеток способом проецирования заключается в том, что сетка, заданная на плоскости, проецируется на рассматриваемую поверхность. Этот метод применим только в случае пологих или развертывающихся оболочек. Как следует из литературных источников, проблема разработки методов и алгоритмов построения сеток для многосвязных непологих неразвертывающихся поверхностей, а также создания на их основе эффективных сеточных генераторов еще далека до полного завершения и является актуальной. В настоящей работе разработан метод построения сетки треугольных элементов для многосвязных пластинчато-оболочечных областей произвольной формы — комплекс «Оболочка» [85].

## 1.5 Методы нахождения решения

При выборе метода решения задач определения напряженно-деформированного состояния на конечном этапе, задача сводится либо к разрешающей системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), либо к прямой минимизации соответствующего функционала.

Среди методов решения СЛАУ можно выделить прямые и итерационные. Прямые методы теоретически приводят к точному решению за конечное число алгебраических операций.



Однако при практической реализации прямых вычислительных методов возникают трудности вычислительного характера, связанные с размерностью решаемой задачи. Для систем малой и средней размерности более предпочтительны прямые методы. Итерационные методы имеют максимум преимуществ при решении сложных задач большой размерности, для которых в силу ограничений накладываемых на объем рабочей памяти и число арифметических операций, использование прямых методов оказывается весьма затруднительным или менее эффективным. Итерационные методы также применяются для решения задач, включающих системы нелинейных уравнений, а также для решения нестационарных задач.

Чтобы избежать проблем, связанных с формированием матриц и решения СЛАУ, используется подход последовательной минимизации соответствующего функционала, который достигает минимального значения при искомом решении. Для минимизации функционала могут быть использованы многие итерационные методы. К ним относятся различные варианты метода спуска, градиентные методы, методы сопряженных направлений, метод локальных вариаций и другие методы. Из многочисленных работ, посвященных этому вопросу, необходимо отметить работы Л.В. Канторовича [156], М.А. Красносельского [172], С.К. Годунова [117], В.И. Лебедева [180], Ф.Л. Черноусько и В.К. Баничука [337], А.А. Самарского и Е.С. Николаева [287], К. Ланцоша [179], М. Хестена и Е. Штифеля [364], Л. Хейгемана и Д. Янга [327] и другие.

В данной работе для минимизации функционала применяется метод покоординатного спуска (МПС), который отличается устойчивостью, простотой алгоритма и удобством реализации на ЭВМ. Одной из важных проблем применения итерационного метода является скорость сходимости итерационного процесса, которая во многом определяет эффективность метода. Поскольку МПС относится к релаксационным методам, скорость сходимости существенно зависит от выбора па-

раметра релаксации. Из работ, посвященных этому вопросу, необходимо отметить работы А.А. Самарского и Е.С. Николаева [287], Д. Янга [379], Д.К. Фаддеевой [319], Ю.В. Воробьева [108], Р. Варга [378], В. Вазова и Д. Форсайта [58], Л. Хагемана и Р. Келлога [363] и другие. Возможность ускорения сходимости итерационного процесса при использовании параметра релаксации положило начало двадцатилетнему периоду разработок эффективных итерационных алгоритмов. Диссертация Д. Янга в 1950 году содержала решение задачи о выборе параметра релаксации для широкого класса конечноразностных уравнений, матрица СЛАУ которых имеет квазитрехдиагональную структуру. Параметр релаксации выбирался из условия минимизации спектрального радиуса оператора перехода. Важную роль при решении эллиптических задач сыграл итерационный метод переменных направлений, предложенный в 50-х годах Писменом и Речфордом [375]. Однако он оказался экономичным лишь для узкого класса задач. В свете многочисленных попыток исследования метода Писмена-Речфорда следует отметить, что его полное теоретическое обоснование до сих пор отсутствует. В общем случае метод переменных направлений и метод релаксаций требуют приблизительно равное количество итераций. При построении итерационных методов, использующих переменные релаксационные параметры, выделяется метод Ричардсона [327]. Предложен он в 1910 году, однако до недавнего времени не использовался на практике из-за вычислительной неустойчивости. Особое место среди итерационных методов решения конечноразностных эллиптических уравнений занимает предложенный и развитый А.А. Самарским и Е.С. Николаевым в 1964-1977 годах попеременно-треугольный метод [287], который является быстро сходящимся итерационным методом. Обзор и систематизация методов изложены в работах Г.И. Марчука и В.И. Лебедева [193], А.А. Самарского и Е.С. Николаева [91], В.В. Воеводина и Ю.А. Кузнецова [104], Л. Хейгемана и



Л. Янга [327].

Эффективные методы решения нелинейных краевых задач деформационной пластичности предложены в работах И.А. Биргера [37, 38, 39], Д.Л. Быкова [56], Д.Л. Быкова, В.А. Шачнева [57], И.И. Воровича, Ю.П. Красовского [109], Е.Г. Дьяконова [139], А.И. Кошелева [171], В.И. Кузнецова [173], А.А. Ильюшина [148, 149, 150], Б.Е. Победри [252], Ю.П. Подлеснова, В.И. Сакало [253]. При построении проекционно-сеточных схем для краевых задач деформационной пластичности исходная нелинейная задача обычно приводится к системе нелинейных уравнений высокого порядка. Общее рассмотрение и исследование сходимости итерационных методов решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными изложены в работах Л.В. Канторовича, В.И. Крылова [157], А.А. Самарского, Е.С. Николаева [287], Дж. Ортега, В. Рейнболдта [229] и др. Наиболее распространенными методами решения нелинейных систем уравнений деформационной пластичности являются метод упругих решений А.А. Ильюшина и метод переменных параметров упругости, предложенный И.А. Биргером [39]. В последнее время применяется также метод Ньютона и некоторые другие итерационные методы [173, 252, 253, 343]. Оценка скорости сходимости метода упругих решений опубликована в статье И.И. Воровича, Ю.П. Красовского [109]. Доказательство сходимости метода переменных параметров упругости, приведенное в [56], основано на весьма ограничительном предположении о том, что модуль упрочнения материала составляет не менее половины начального модуля упругости. Доказательство сходимости метода переменных параметров упругости при менее жестких ограничениях дано в статье С.Э. Уманского [317]. Следует отметить, что применение методов переменных параметров упругости и упругих решений предполагает решение последовательности вспомогательных линейных задач. Альтернативный подход состоит в объединении процесса линеаризации

и учета физической нелинейности в один итерационный процесс [229]. Этот подход изучен Ю.П. Подлесным и В.И. Сакало [253].

Исходя из приведенного анализа работ по расчету конструкций, находящихся под воздействием статических и вибрационных нагрузок, можно сделать вывод об актуальности следующих задач.

1. Выбор и разработка эффективных методов решения задач статики и динамики для объемных и многосвязных пластинчато-оболочечных конструкций, сочетающих в себе преимущества вариационно-сеточных методов, но не требующих формирования, хранения и оперирования с матрицами масс и жесткостей и позволяющих решать реальные практические задачи большой размерности, используя только оперативную память ЭВМ.

2. Разработка специализированных базисных функций для расчета конструкций, отражающих физический и геометрический характер их напряженно-деформированного состояния, дающих возможность учесть конструктивные особенности.

3. Разработка методов расчета вынужденных колебаний трехслойных пластин и оболочек сложной геометрической формы с учетом рассеяния энергии в материалах несущих слоев и заполнителя.

4. Создание методов и алгоритмов построения сеток для многосвязных поверхностей.



## Глава 2

# Вариационно-сеточные методы определения НДС в статических задачах

Задача определения напряжённо-деформированного состояния конструкций в вариационной формулировке на основе принципа минимума потенциальной энергии может быть сформулирована как задача минимизации квадратичного функционала: найти перемещение  $u$ , которое удовлетворяет условиям

$$u \in V, \quad \Phi(u) = \inf_{v \in V} \Phi(v), \quad (2.0.1)$$

где  $V$  — множество допустимых перемещений. Относительно  $V$  предполагается, что оно является гильбертовым пространством. Элементы, принадлежащие пространству  $V$ , удовлетворяют кинематическим граничным условиям задачи и требованиям гладкости искомого решения. Функция  $\Phi(v)$  представляет потенциальную энергию системы:

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v), \quad (2.0.2)$$

где  $a(v, v)$  — симметричная билинейная форма;  $f(v)$  — линейная форма. Эти формы определены и непрерывны на пространстве  $V$ . С энергетической точки зрения  $\frac{1}{2}a(v, v)$  определяет потенциальную энергию упругой деформации конструкции,  $f(v)$  представляет собой работу внешних сил. Если  $V$  полное пространство, т.е. любая фундаментальная последовательность в нём сходится (к элементу из  $V$ ), билинейная форма  $a(v, v)$  непрерывна

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall u, v \in V, \quad |a(u, v)| \leq \alpha \|u\|_V \|v\|_V, \quad (2.0.3)$$

симметрична

$$a(u, v) = a(v, u), \quad \forall u, v \in V \quad (2.0.4)$$

и коэрцитивна, т.е.

$$\exists \beta > 0; \quad \forall v \in V, \quad \beta \|v\|_V^2 \leq a(v, v), \quad (2.0.5)$$

а линейная форма  $f(v)$  непрерывна, то задача минимизации функционала (2.0.1) имеет единственное решение  $u \in V$  [184]. Здесь  $\|\cdot\|_V$  — норма гильбертова пространства, которая равна

$$\|v\|_V = (v, v)_V^{\frac{1}{2}}; \quad \forall v \in V. \quad (2.0.6)$$

Или задача минимизации имеет эквивалентную формулировку: элемент  $u \in V$  является решением задачи (2.0.1) тогда и только тогда, когда удовлетворяется соотношение

$$a(u, v) = f(v), \quad u \in V, \quad \forall v \in V. \quad (2.0.7)$$

Доказательство единственности решения уравнения (2.0.7) следует из свойств непрерывности  $f(v)$ ; симметричности, непрерывности и коэрцитивности  $a(v, v)$  (теорема Лакса-Мильграма [184]). С физической точки зрения задача (2.0.7) соответствует нахождению функции  $u$ , на которой достигается минимум потенциальной энергии системы. Таким образом, решение вариационной задачи минимизации квадратичного функционала (2.0.1) существует и единственно. Использование вариационной постановки задачи о НДС позволяет



строить приближённые решения при более слабых ограничениях относительно гладкости искомого решения и позволяет исключить из специального рассмотрения естественные граничные условия. Поскольку, как уже отмечалось выше, точное решение аналитическими методами для сложных прикладных задач найти невозможно, используются приближенные методы.

Решение прикладных задач численными методами строится путем сведения исходной континуальной задачи к конечномерной. Для этого бесконечномерное пространство допустимых функций заменяют конечномерным  $V_h \subset V$  и на нём ищут систему перемещений, доставляющую минимум функционалу (2.0.2). Для построения конечномерного пространства  $V_h$  применяется способ, в котором в качестве базисных функций используются функции с конечным малым носителем т.е. такие, каждая из которых только в сравнительно небольшой (порядка шага сетки  $h$ ) окрестности отлична от нуля, а вне её тождественно равна нулю [113]. Для их построения при помощи сетки осуществляется дискретизация области  $\Omega$ , занимаемой телом, на конечное число подобластей  $\Omega_n$ . Для этого разбиения выполняются следующие свойства:

- 1)  $\Omega = \bigcup_{n=1}^N \Omega_n$ ,
- 2)  $\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset; \quad \forall n, m,$
- 3)  $\max_n \text{diam} \Omega_n \leq h,$

где  $\text{diam} \Omega_i = \sup_{x_1, x_2} |x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega_n$  — диаметр области  $\Omega_n$ . На объединении подобластей  $\Omega_n$ , примыкающих к каждому узлу сетки  $\theta_i^n = \bigcup_m \Omega_m$  строится базисная функция с конечным носителем, равным выбранному объединению, представляющая собой многочлен на каждой подобласти  $\Omega_n$ . Все линейно независимые функции такого вида принимаются в качестве базисных.

Преимущество такого выбора базиса заключается в том, что носители его функций гораздо меньше  $\Omega$  и, следовательно, скалярные произведения базисных функций  $(\phi_i, \phi_k)$  будут

ненулевыми, если  $|i-k| \leq M$ , где  $M$  — целое число,  $M \ll N$ ,  $N$  — конечное число подобластей, т.е. только для соседних функций скалярное произведение отлично от нуля. Иными словами — базис «почти ортогонален» [112]. Использование такого базиса приводит к системам с ленточными или разреженными матрицами.

Пусть  $V$  аппроксимируется последовательностью конечномерных пространств  $V_h \subset V$ , которые определяются бесконечной последовательностью параметров,  $h_1, h_2, \dots, h_N$ , такой, что  $h_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Последовательность  $\{V_h\}$  полна в  $V$ , если для любых  $v \in V, \epsilon > 0$  существует  $\hat{h} > 0$  такое, что для всех  $h < \hat{h}$  выполняется соотношение

$$\|v - v_h\|_V = \inf_{u_h \in V_h} \|v - u_h\|_V < \epsilon(h). \quad (2.0.9)$$

Здесь  $\epsilon(h)$  оценка погрешности аппроксимации и  $\epsilon(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Иначе говоря, полнота последовательности  $\{V_h\}$  означает, что всякий элемент  $v \in V$  может быть с любой степенью точности аппроксимирован элементами пространств  $V_h$ . При построении конечномерных пространств  $V_h$  используются кусочнополиномиальные функции, при этом множество  $\Omega$  представляется в виде непересекающегося объединения многоугольников  $\Omega_n$ . Коэффициенты полинома в каждом многоугольнике выбирают таким образом, чтобы обеспечить требуемую гладкость, а также однозначное определение полинома, т.е. из условий, обеспечивающих принадлежность приближенного решения пространству  $V$ . При этом элемент  $v \in V$  аппроксимируется с порядком  $r (r > 0)$ , если найдется такой элемент  $v \in V$ , для которого

$$\|v - v_h\|_V = O(h^r). \quad (2.0.10)$$

Пусть  $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^N$  — система базисных функций,  $i$ -й член которой принимает в  $i$ -ом узле значение, равное единице, а в других узлах сетки обращается в нуль, т.е.

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad (2.0.11)$$



где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Конечным носителем  $\phi_i(x)$  является объединение подобластей, примыкающих к  $i$ -му узлу сетки

$$\text{supp}\phi_i(x) = \cup_{m=1}^M \Omega_m. \quad (2.0.12)$$

Тогда функция  $v_h$  может быть представлена в виде:

$$v_h = \sum_{i=1}^N v_i \phi(x). \quad (2.0.13)$$

Линейная комбинация (2.0.13) восполняет функцию  $v_h \in V_h$  на всю область  $\Omega$  по ее узловым значениям. От выбора сетки и системы базисных функций зависят вид и свойства образующейся вариационно-сеточной схемы для рассматриваемой задачи.

При построении вариационно-сеточных схем функционал потенциальной энергии системы (2.0.2) на конечномерном пространстве допустимых функций  $V_h$  имеет вид:

$$\Phi(v_h) = \frac{1}{2}a(v_h, v_h) - f(v_h); \quad v_h \in V_h, \quad (2.0.14)$$

и вариационная задача (2.0.1) заменяется приближенной

$$u_h \in V_h; \Phi(u_h) = \inf_{v_h \in V_h} \Phi(v_h), \quad (2.0.15)$$

которая также имеет единственное решение. Говорят, что имеет место сходимостъ приближенного решения  $u_h \in V_h$  к точному  $u \in V$ , если выполняется равенство:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0. \quad (2.0.16)$$

Тогда в соответствии с леммой Сеа [184] существует такая, не зависящая от пространства  $V_h$ , постоянная  $C$ , что

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (2.0.17)$$

Следовательно, достаточное условие сходимости состоит в существовании такого семейства подпространств  $V_h$  пространства  $V$ , что для всякого  $u \in V$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V = 0, \quad (2.0.18)$$

где  $C = \frac{M}{\beta}$ . Постоянная  $\beta$  определяется выражением (2.0.5), а  $M$  такое, что

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V. \quad (2.0.19)$$

В случае симметричности билинейной формы имеем:

$$a(u - u_h, u - u_h) = \inf_{v_h \in V_h} a(u - v_h, u - v_h). \quad (2.0.20)$$

Из свойств коэрцитивности и непрерывности билинейной формы следует

$$\|u - u_h\|_V \leq \sqrt{\frac{M}{\beta}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (2.0.21)$$

Из неравенства (2.54) следует, что оценка ошибки  $\|u - u_h\|_V$  сводится к задаче теории аппроксимации [184] — вычислить расстояние

$$d(u, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V, \quad (2.0.22)$$

между функцией  $u \in V$  и подпространством  $V_h \subset V$ .

Таким образом требования сходимости при построении вариационно-сеточных схем состоят в том, чтобы базисные функции обладали свойством полноты, а пространство  $V_h$  являлось подпространством пространства  $V$ , т.е. имело место включение  $V_h \subset V$  (конформные схемы). В этом случае справедлива оценка:

$$\|u - u_h\|_V \leq \sqrt{\frac{M}{\beta}} d(u, V_h) \leq \sqrt{\frac{M}{\beta}} C h^r, \quad (2.0.23)$$

где  $C$  — некоторая постоянная и  $r > 0$ . В зависимости от вида напряженно-деформированного состояния и способов аппроксимации задачу определения НДС можно разделить на ряд задач: плоскую, объемную и задачу расчета пластинок и оболочек.



## 2.1 Плоская упругая и упруго-пластическая задача

Рассматривается пластина, толщиной  $t$ , срединная поверхность  $\Omega$  которой с границей  $\partial\Omega$  расположена в плоскости  $OXY$ . Потенциальная энергия упругой пластины при плоском напряженном состоянии дается выражением:

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{Et}{1-\nu^2} [u_{1,1}^2 + u_{2,2}^2 + \\ & + 2\nu u_{1,1} u_{2,2} + \frac{1}{2} (1-\nu) (u_{1,2} + u_{2,1})^2] d\Omega - \\ & - \int_{\Gamma} (f_1 u_1 + f_2 u_2) d\gamma. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

При решении плоской задачи область, занимаемая телом  $\Omega$ , разбивается на конечное число треугольников  $\Omega_n$  и  $\Omega = \cup_n \Omega_n$ . Вершины каждого треугольника нумеруются против хода часовой стрелки в порядке  $i, j, k$ . Искомые перемещения  $u, v$  в пределах каждого треугольника аппроксимируются линейными функциями координат [142].

$$u_h = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i + c_i)u_i + (a_j + b_j + c_j)u_j + (a_k + b_k + c_k)u_k], \quad (2.1.2)$$

$$v_h = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i + c_i)v_i + (a_j + b_j + c_j)v_j + (a_k + b_k + c_k)v_k], \quad (2.1.3)$$

где  $2\Delta$  – удвоенная площадь треугольника,

$$a_i = x_i y_k - x_k y_i, \quad b_i = y_i - y_k, \quad c_i = x_k - x_j. \quad (2.1.4)$$

Коэффициенты  $a, b, c$  с другими индексами получаются с помощью циклической перестановки индексов.

В результате аппроксимации перемещений приходим к конечномерному функционалу:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{\omega} \frac{Et}{1-\nu^2} \frac{1}{4\Delta} [(b_i u_1^i)^2 + (c_i u_2^i)^2 + 2\nu b_i u_1^i c_i u_2^i + \\ + \frac{1-\nu}{2} (b_i u_2^i + c_i u_1^i)^2] - \sum_i F_k^i u_k^i, \quad (2.1.5)$$

где  $F_k^i$  — приведенные к узлам внешние силы.

Решение упруго-пластической задачи с помощью проекционно-сеточных методов сводится к решению нелинейной системы уравнений, которая методом коррекции упругих параметров на каждом шаге сводится к минимизации квадратичного функционала, т.е., по существу, на каждом отдельном шаге решается упругая задача. При этом процесс коррекции упругих параметров и итерационный вычислительный процесс минимизации объединяются в один.

## 2.2 Изгиб однородных пластин

При изгибе тонких пластин на основе теории Кирхгофа потенциальная энергия определяется соотношением:

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_{\omega} D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] d\omega - \\ - \int_{\omega} F_3 w d\omega - \int_{\Gamma_2} (F_n \frac{\partial w}{\partial n} + F_p w) d\gamma,$$

где  $D = Et^3/12(1-\nu^2)$  — цилиндрическая жесткость пластины. Для построения конечномерного функционала осуществляет-



ся дискретизация срединной плоскости пластины на непересекающееся множество треугольников. Искомой функцией являются перемещения точек срединной поверхности в направлении нормали, которая аппроксимируется неполным кубическим полиномом.

$$w_{0h} = w_1 L_1 + w_2 L_2 + w_3 L_3 + a_1 L_1^2 L_2 + a_2 L_1^2 L_3 + a_3 L_2^2 L_1 + a_4 L_2^2 L_3 + a_5 L_3^2 L_1 + a_6 L_3^2 L_2 + 2a_7 L_1 L_2 L_3, \quad (2.2.1)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= w_1 - w_2 - b_3 \phi_1 - c_3 \psi_1; \\ a_2 &= w_1 - w_3 + b_2 \phi_1 + c_2 \psi_1; \\ a_3 &= w_2 - w_1 + b_3 \phi_2 + c_3 \psi_2; \\ a_4 &= w_2 - w_3 - b_1 \phi_2 - c_1 \psi_2; \\ a_5 &= w_3 - w_1 - b_2 \phi_3 - c_2 \psi_3; \\ a_6 &= w_3 - w_2 + b_1 \phi_3 + c_1 \psi_3; \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

$$a_7 = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^6 a_k.$$

Здесь  $L_{i,i} = 1, 2, 3$  —  $L$  — координаты, определяемые соотношениями:

$$L_i = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y), \quad (2.2.3)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - y_2 x_3; \\ b_1 &= y_2 - y_3; c_1 = x_3 - x_2. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Коэффициенты с другими индексами получаются с помощью круговой перестановки индексов 1, 2, 3. Величина  $\Delta$  равна площади треугольника

$$\Delta = \frac{1}{2} (b_2 c_3 - b_3 c_2). \quad (2.2.5)$$

В выражениях (2.2.1), (2.2.2)  $\phi_i = (\frac{\partial w_0}{\partial y})_i$ ;  $\psi_i = -(\frac{\partial w_0}{\partial x})_i$  — углы поворота нормали несущих слоев соответственно вокруг осей  $x, y$  в  $i$ -ом узле.

Теоретические оценки сходимости показывают, что для сетки треугольников образованных тремя системами эквидистантных параллельных прямых, с уменьшением размеров треугольников решение сходится и ошибка аппроксимации имеет порядок  $O(h)$  [184]. В общем случае сходимость гарантирована в пределе при  $h \rightarrow 0$  [133]. В работе [92] указывается, что в большинстве практических расчетов точность, достигаемая при использовании аппроксимации (2.1.1), оказывается вполне приемлемой.

Используя закон Гука и соотношения Коши, определим напряжения через перемещение точек

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(u_{,x} + \nu v_{,y}) - \frac{Ez}{1-\nu^2}(w_{,xx} + \nu w_{,yy}); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(v_{,y} + \nu u_{,x}) - \frac{Ez}{1-\nu^2}(w_{,yy} + \nu w_{,xx}); \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu^2)}(u_{,y} + v_{,x}) - \frac{Ez}{1+\nu}w_{,xy}; n = 1, 2.\end{aligned}\quad (2.2.6)$$

Здесь индексы  $x, y, z$  при переменных обозначают частные производные. Работа внешних сил и моментов дает линейную форму  $f(v)$

$$\begin{aligned}f(v) &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} q_3 w d\Omega + \int_{\Gamma} (N_{\nu} v_{\nu} + \\ &+ N_t v_t - Q w_0 + M_{\nu} \frac{\partial w_0}{\partial \nu}) d\Gamma.\end{aligned}\quad (2.2.7)$$

Здесь  $q_3$  — интенсивность нормальной нагрузки;  $N_{\nu}$  и  $N_t$  — действующие в срединной плоскости внешние силы, приходящиеся на единицу длины контура  $\Gamma$ , составляющая  $N_{\nu}$  — направлена по нормали к контуру,  $N_t$  — по касательной;  $Q$  —



внешняя поперечная сила;  $M_\nu$  – внешний изгибающий момент, отнесенный к единице длины контура;  $v_\nu$  и  $v_t$  – составляющие тангенциального перемещения по нормали и по касательной к контуру  $\Gamma$ .

Используя приведенные аппроксимирующие функции перемещений в пределах треугольной подобласти и интегрируя по толщине пластины и по площади, получим выражения для конечномерных функционалов потенциальной энергии деформации:

$$U_h = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{j,k=1}^3 \left\{ \frac{Et^3}{576(1-\nu^2)\Delta^3} [(1+\delta_{jk})(Q_j Q_k + S_j S_k + 2\nu Q_j S_j + 2(1-\nu) R_j R_k)] \right\}. \quad (2.2.8)$$

Здесь  $M$  – количество треугольников, окружающих  $i$ -й узел,  $\delta_{jk}$  – символ Кронекера и

$$\begin{aligned} Q_1 &= b_2^2 a_3 + b_3^2 a_5 + 2(b_1 b_2 a_1 + b_2 b_3 a_7 + b_1 b_3 a_2); \\ Q_2 &= b_1^2 a_1 + b_3^2 a_6 + 2(b_1 b_2 a_3 + b_2 b_3 a_4 + b_1 b_3 a_7); \\ Q_3 &= b_1^2 a_2 + b_2^2 a_4 + 2(b_1 b_2 a_7 + b_2 b_3 a_6 + b_1 b_3 a_5); \\ R_1 &= b_2 c_2 a_3 + b_3 c_3 a_5 + p_1 a_1 + p_2 a_7 + p_3 a_2; \\ R_2 &= b_1 c_1 a_1 + b_3 c_3 a_6 + p_1 a_3 + p_2 a_4 + p_3 a_7; \\ R_3 &= b_1 c_1 a_2 + b_2 c_2 a_4 + p_1 a_7 + p_2 a_6 + p_3 a_5; \\ p_1 &= b_1 c_2 + b_2 c_1; p_2 = b_2 c_3 + b_3 c_2; p_3 = b_3 c_1 + b_1 c_3. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Выражения для  $S_i$  получаются из выражений для  $Q_i$  путём замены коэффициентов  $b_i$  на  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Потенциальная энергия есть сумма энергий всех треугольников. Потенциальную энергию каждого треугольника находим в локальной системе координат, а затем переходим к перемещениям в глобальной системе с помощью преобразований  $\hat{v}_k = \alpha_{kj} v_j$  и  $\hat{\phi}_k = \alpha_{kj} \phi_j$ , где  $||\alpha_{kj}||$  – матрица перехода от локальной системы координат к глобальной.

## 2.3 Изгиб однородных оболочек

Для оболочки выбирается криволинейная ортогональная система координат  $\alpha_1, \alpha_2, z$  — где  $\alpha_1 = \text{const}$ ,  $\alpha_2 = \text{const}$  линии главных кривизн срединной поверхности, координата  $z$  отсчитывается по нормали к поверхности,  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  — вектора, касательные к координатным линиям, а  $\vec{e}_3$  — единичный вектор нормали к поверхности. Первая квадратичная форма поверхности имеет вид:

$$ds^2 = A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2. \quad (2.3.1)$$

Здесь  $A_1(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $A_2(\alpha_1, \alpha_2)$  — коэффициенты первой квадратичной формы, связанные с приращениями координат равенствами:

$$ds_1 = A_1 d\alpha_1; \quad ds_2 = A_2 d\alpha_2. \quad (2.3.2)$$

Радиусы главных кривизн  $R_i$  и соответствующие главные кривизны  $k_i = 1/R_i$ ,  $A_i$  и  $k_i$ ,  $i = 1, 2$  удовлетворяют соотношениям Гаусса—Кодацци:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(k_2 A_2) = k_1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}; \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(k_1 A_1) = k_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}; \quad (2.3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} \right) = -k_1 k_2 A_1 A_2.$$

Перемещение точек срединной поверхности характеризуются компонентами  $u, v, w$ , направления которых совпадают, соответственно, с направлениями координатных линий в принятой системе координат  $\alpha_1, \alpha_2, z$ . Предполагается, что механические характеристики и толщина оболочки таковы, что допустимо применение гипотезы Кирхгофа — Лява. В соответствии с принятыми допущениями перемещения точек оболочки имеют вид:

$$\begin{aligned} u(\alpha_1, \alpha_2, z) &= u_0(\alpha_1, \alpha_2) + z\theta_1(\alpha_1, \alpha_2); \\ v(\alpha_1, \alpha_2, z) &= v_0(\alpha_1, \alpha_2) + z\theta_2(\alpha_1, \alpha_2); \end{aligned} \quad (2.3.4)$$



$$w(\alpha_1, \alpha_2, z) = w_0(\alpha_1, \alpha_2),$$

где  $\theta_1, \theta_2$  – углы поворота нормали, соответственно, в плоскостях  $\alpha_1 = \text{const}, \alpha_2 = \text{const}$

$$\theta_1(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_1} + \frac{u_0}{R_1}; \quad (2.3.5)$$

$$\theta_2(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_2} + \frac{v_0}{R_2},$$

где  $u_0, v_0, w_0$ , – компоненты перемещения точек срединной поверхности в направлении координатных линий в принятой системе координат,  $\alpha_1, \alpha_2, z$  – расстояние, измеряемое по нормали к срединной поверхности.

Деформации связаны с перемещениями соответственно [62].

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} v + \\ &\quad + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial z} w; \\ \epsilon_3 &= \frac{\partial w}{\partial z}; \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

$$\gamma_{12} = \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{1}{H_1} u \right) + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{1}{H_2} v \right);$$

$$\gamma_{13} = H_1 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{H_1} u \right) + \frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1};$$

$$H_1 = A_1(1 + k_1 z); \quad H_2 = A_2(1 + k_2 z), \quad n = 1, 2, 3.$$

Здесь  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  – относительные линейные деформации;  $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$  – относительные сдвиги;  $H_1, H_2$  – коэффициенты Ляме.

Напряженное состояние в общем случае характеризуется независимыми компонентами тензора напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12}$ . Здесь  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – нормальные напряжения, действующие на площадках, перпендикулярных, соответственно, направлениям  $\alpha_1, \alpha_2, z$ ;  $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$  – касательные напряжения,

действующие по указанным площадкам. Для линейноупругого материала связь напряжений с деформациями будет подчиняться обобщенному закону Гука, который в случае плоского напряженного состояния можно представить следующим образом [9]:

$$\{\sigma\} = [G]\{\epsilon\}, \quad (2.3.7)$$

где  $\{\sigma\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}\}$  – матрица–столбец компонентов тензора напряжений,  $\{\epsilon\} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_{12}\}$  – матрица–столбец компонентов тензора деформаций,

$$[G] = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ \dots & g_{22} & g_{23} \\ \dots & \dots & g_{33} \end{pmatrix}$$

– матрица упругих коэффициентов. В случае изотропного материала

$$g_{11} = g_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad g_{12} = \frac{E\nu}{1 - \nu^2}, \quad g_{33} = G, \quad (2.3.8)$$

$$g_{13} = g_{23} = 0.$$

С целью приведения трехмерной задачи к двумерной, что уже выполнено для деформаций и перемещений, в теории оболочек вместо компонент тензора напряжений вводятся статически эквивалентные им интегральные характеристики – усилия и моменты.

$$N_1 = D_p(\hat{\epsilon}_1 + \nu\hat{\epsilon}_2);$$

$$N_2 = D_p(\hat{\epsilon}_2 + \nu\hat{\epsilon}_1);$$

$$S = D_p \frac{1 - \nu}{2} \hat{\gamma}_{12}; \quad (2.3.9)$$

$$M_1 = D_u(\kappa_1 + \nu\kappa_2);$$

$$M_2 = D_u(\kappa_2 + \nu\kappa_1);$$

$$H = D_u(1 - \nu)\kappa_{12}.$$



Здесь  $D_p$  и  $D_u$  – жесткость, соответственно, при растяжении (сжатии) и изгибе

$$D_p = \frac{Et}{1 - \nu^2};$$

$$D_u = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (2.3.11)$$

В соответствии с принятыми предположениями находятся напряжения:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{t_1} + \frac{12M_1}{t^3}z;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{t_1} + \frac{12M_2}{t^3}z; \quad (2.3.12)$$

$$\tau_{12} = \frac{S}{t_1} + \frac{12H}{t^3}z.$$

Для перехода к конечномерной задаче срединная поверхность разбивается на базовые подобласти и строится аппроксимация искомых функций. В задачах изгиба тонких однородных оболочек построение аппроксимирующих функций, удовлетворяющих необходимым требованиям, является достаточно сложной задачей. Существующие реализации конформных схем ( $V_h \subset V$ ) связаны с серьезными вычислительными трудностями, поскольку размерность «локальных» пространств оказывается достаточно большой и, следовательно, структура конечномерного пространства  $V_h$  значительно усложняется. Основной источник этих трудностей состоит в требовании непрерывности (согласованности) производных первого порядка на границе соседних подобластей (многоугольников). Построение аппроксимирующих функций, для которых требование гладкости вдоль общей стороны двух соседних многоугольников можно ослабить, приводит к неконформным вариационно-сеточным схемам. В этом случае ищется приближенное решение в пространстве  $V_h$ , которое не содержится в пространстве  $V$ . Нарушение включения  $V_h \subset V$  происходит

в результате использования базисных функций, не принадлежащих классу  $C^1$ , т.е. не являющихся гладкими при переходе между соседними подобластями [184]. Тогда для доказательства сходимости решения используется подход, который заключается в следующем: функционал полной энергии системы представляется в виде суммы вкладов по подобластям, производные в функционале вычисляются не дифференцированием по области, а дифференцированием по каждой подобласти, что позволяет обойти проблему разрыва производных при переходе между соседними подобластями. Сходимость неконформных схем может быть исследована на основе того, стремится ли функционал, полученный в виде суммы по подобластям, к истинному значению при  $h \rightarrow 0$ . Таким образом, требование сходимости для неконформных схем заключается в том, чтобы члены с производными и функцией в функционале стремились к точным значениям на каждой подобласти при  $h \rightarrow 0$ , что гарантирует сходимость в пределе [133]. Практически проверка сходимости неконформных схем осуществляется с помощью кусочного тестирования [92]. Б. Айронс применил этот метод для исследования треугольных и прямоугольных несогласованных элементов в задачах изгиба тонких пластин [92, 184]. В тесте задавались узловые перемещения, соответствующие состоянию постоянной кривизны в пластине. Если решение сходится, то вычисленные компоненты тензора кривизны должны соответствовать постоянной кривизне пластин. Тест был математически обоснован Стренгом [184] как необходимый и достаточный признак сходимости. У Ласко и Лесэна [184] проведено подробное изучение таких несогласованных элементов, как треугольник Зенкевича, треугольник Морли, прямоугольник Адени. Обобщение на случай криволинейных неконформных элементов рассматривалось у Барнхилла и Брауна [184].

Аппроксимируя поверхность оболочки плоскими треугольниками, вершины которых лежат на ней, и используя описанную выше аппроксимацию перемещений, находим потенциаль-



ную энергию деформации каждого треугольника как сумму энергий изгиба и плоского напряженного состояния. Ее выражение в локальной системе координат

$$\begin{aligned} \Phi_h = & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{j,k=1}^3 \left\{ \frac{Eh}{4\Delta(1-\nu^2)} [(b_j u_j b_k u_k + \right. \\ & + c_j v_j c_k v_k + 2\nu b_j u_j c_k v_k) + \frac{1-\nu}{2} (b_j v_j + c_k u_k)^2] + \\ & + \frac{Eh^3}{576(1-\nu^2)\Delta^3} [(1+\delta_{jk})(Q_j Q_k + S_j S_k + \\ & \left. + 2\nu Q_j S_j + 2(1-\nu)R_j R_k)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Потенциальную энергию деформации оболочки находим как сумму энергий всех треугольников.

## 2.4 Трёхслойные пластинчато-оболочечные конструкции

### 2.4.1 Построение вариационно-сеточных схем для слоистых конструкций

Исходя из принятых гипотез для расчета слоистых конструкций, перемещения точек мягких слоев определяются через перемещения и углы поворота тонких жестких слоев, работающих в условиях плоского напряженного состояния и изгиба. При решении задачи о плоском напряженном состоянии несущих слоев построение конечномерных пространств  $V_h \subset V$  и выбор аппроксимирующих функций, удовлетворяющих необходимым требованиям сходимости, не вызывают особых трудностей, так как любая полная кусочнополиномиальная система базисных функций приводит к сходимости. В задачах изгиба тонких жестких несущих слоев, как и в задачах изгиба тонких однородных пластин, построение аппроксимирующих

функций, удовлетворяющих необходимым требованиям, является достаточно сложной проблемой. Существующие реализации конформных схем ( $V_h \subset V$ ) в задачах изгиба тонких жестких несущих слоев совпадают с задачами изгиба тонких однородных пластин и связаны с теми же вычислительными трудностями, поскольку размерность «локальных» пространств оказывается достаточно большой и, следовательно, структура конечномерного пространства  $V_h$  значительно усложняется. Основной источник этих трудностей состоит в требовании непрерывности (согласованности) производных первого порядка на границе соседних подобластей (многоугольников). Построение аппроксимирующих функций, для которых требование гладкости вдоль общей стороны двух соседних многоугольников можно ослабить, приводит к неконформным вариационно-сеточным схемам. В этом случае ищется приближенное решение в пространстве  $V_h$ , которое не содержится в пространстве  $V$ . Нарушение включения  $V_h \subset V$  происходит в результате использования базисных функций, не принадлежащих классу  $C^1$ , т.е. не являющихся гладкими при переходе между соседними подобластями [184]. Тогда для доказательства сходимости решения используется подход, который заключается в следующем. Функционал полной энергии системы представляется в виде суммы вкладов по подобластям. Производные в функционале вычисляются не дифференцированием по области, а дифференцированием по каждой подобласти, что позволяет обойти проблему разрыва производных при переходе между соседними подобластями. Сходимость неконформных схем может быть исследована на основе того, стремится ли функционал, полученный в виде суммы по подобластям, к истинному значению при  $h \rightarrow 0$ . Таким образом требование сходимости для неконформных схем заключается в том, чтобы члены с производными и функцией в функционале стремились к точным значениям на каждой подобласти при  $h \rightarrow 0$ , что гарантирует сходимость в пределе [133]. Практически проверка сходимости неконформных схем осуществ-



ляется с помощью кусочного тестирования [92]. Рассмотрим способ построения вариационно-сеточных схем для трехслойных конструкций с различными видами заполнителей, который легко обобщается на случай слоистых систем с количеством чередующихся мягких и жестких слоев больше трех. Для построения конечномерного пространства  $V_h$  осуществим дискретизацию срединной поверхности трехслойной пластины  $\Omega \in R^2$  на конечное число треугольных подобластей. Пусть 1, 2, 3 – локальная нумерация вершин треугольника против часовой стрелки. При построении вариационно-сеточных схем для трехслойных конструкций используется новый трехслойный треугольный элемент, в котором в отличие от ранее разработанных моделей [2, 3, 14, 25, 129] применяется аппроксимация перемещений, различная по слоям. Это позволяет с высокой точностью описать как общее деформированное состояние трехслойной конструкции, так и деформирование каждого слоя в отдельности, а также дает возможность реализовать различные виды условий на краях каждого слоя. Кроме того, использование предлагаемой аппроксимации позволяет значительно уменьшить размерность «локальных пространств» за счет сокращения количества узловых неизвестных по сравнению с другими аппроксимациями [14, 25]. Для аппроксимации прогиба тонкого несущего слоя в пределах каждой подобласти используем функцию

$$w_{0h} = w_1 L_1 + w_2 L_2 + w_3 L_3 + a_1^{(n)} L_1^2 L_2 + a_2^{(n)} L_1^2 L_3 + a_3^{(n)} L_2^2 L_1 + a_4^{(n)} L_2^2 L_3 + a_5^{(n)} L_3^2 L_1 + a_6^{(n)} L_3^2 L_2 + 2a_7^{(n)} L_1 L_2 L_3, \quad (2.4.1.1)$$

где

$$\begin{aligned} a_1^{(n)} &= w_1^{(n)} - w_2^{(n)} - b_3 \phi_1^{(n)} - c_3 \psi_1^{(n)}; \\ a_2^{(n)} &= w_1^{(n)} - w_3^{(n)} + b_2 \phi_1^{(n)} + c_2 \psi_1^{(n)}; \\ a_3^{(n)} &= w_2^{(n)} - w_1^{(n)} + b_3 \phi_2^{(n)} + c_3 \psi_2^{(n)}; \\ a_4^{(n)} &= w_2^{(n)} - w_3^{(n)} - b_1 \phi_2^{(n)} - c_1 \psi_2^{(n)}; \end{aligned} \quad (2.4.1.2)$$

$$a_5^{(n)} = w_3^{(n)} - w_1^{(n)} - b_2 \phi_3^{(n)} - c_2 \psi_3^{(n)};$$

$$a_6^{(n)} = w_3^{(n)} - w_2^{(n)} + b_1 \phi_3^{(n)} + c_1 \psi_1^{(n)};$$

$$a_7^{(n)} = \frac{1}{4} \sum_{S=1}^6 a_S^{(n)}.$$

Здесь  $L_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  —  $L$ -координаты, определяемые соотношениями:

$$L_i = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y); \quad (2.4.1.3)$$

где

$$a_1 = x_2 y_3 - y_2 x_3; \quad (2.4.1.4)$$

$$b_1 = y_2 - y_3; c_1 = x_3 - x_2.$$

Коэффициенты с другими индексами получаются с помощью круговой перестановки индексов 1, 2, 3. Величина  $\Delta$  равна площади треугольника и может быть вычислена по следующей формуле:

$$\Delta = \frac{1}{2} (b_2 c_3 - b_3 c_2). \quad (2.4.1.5)$$

В выражениях (2.4.1.4), (2.4.1.5)  $\phi_i^{(n)} = (\frac{\partial w_0^{(n)}}{\partial y})_i$ ;  $\psi_i^{(n)} = -(\frac{\partial w_0^{(n)}}{\partial x})_i$  — углы поворота нормали несущих слоев, соответственно вокруг осей  $x$  и  $y$  в  $i$ -ом узле. Индекс  $n$  обозначает номер тонкого несущего слоя. Для трехслойной конструкции  $n = 1, 2$ . Аппроксимация (2.4.1.1) обеспечивает непрерывность перемещений на всем множестве  $\Omega$  и непрерывность углов поворота в узлах. Поскольку при задании  $w_h^{(n)}$  использовано девять независимых коэффициентов, аппроксимация (2.4.1.1) представляет собой неполный кубический полином. Теоретические оценки сходимости показывают, что если сетка треугольников образована тремя системами эквидистантных параллельных прямых, с уменьшением размеров треугольников решение сходится и величина ошибки аппроксимации имеет порядок  $0(h)$  [184]. В общем случае сходимость гарантирована в пределе, т.е. при  $h \rightarrow 0$  [133]. В работе [92] указывается,



что в большинстве практических расчетов точность, достигаемая при использовании аппроксимации (2.4.1.1), оказывается вполне приемлемой. Для мягкого сжимаемого заполнителя используем линейную аппроксимацию прогиба. Тогда поперечные перемещения точек заполнителя выражаются через соответствующие перемещения срединных поверхностей несущих слоев следующим образом:

$$w_h^{(3)} = \frac{1}{2}[(w_1^{(1)} + w_1^{(2)})L_1 + (w_2^{(1)} + w_2^{(2)})L_2 + (w_3^{(1)} + w_3^{(2)})L_3] + \\ + \frac{z}{h_3}[(w_1^{(1)} - w_1^{(2)})L_1 + (w_2^{(1)} - w_2^{(2)})L_2 + (w_3^{(1)} - w_3^{(2)})L_3]. \quad (2.4.1.6)$$

Перемещения точек срединных плоскостей несущих слоев вдоль осей  $x$  и  $y$  зададим в виде линейных полиномов

$$u_{0h}^{(n)} = u_1^{(n)}L_1 + u_2^{(n)}L_2 + u_3^{(n)}L_3; \\ u_{0h}^{(n)} = v_1^{(n)}L_1 + v_2^{(n)}L_2 + v_3^{(n)}L_3. \quad (2.4.1.7)$$

Аппроксимации (2.4.1.6), (2.4.1.7) обеспечивают непрерывность перемещений во всей области  $\Omega$ , а также удовлетворяют всем требованиям сходимости. В качестве узловых неизвестных служат перемещения точек срединных плоскостей несущих слоев и углы поворота нормалей относительно осей  $x, y$ . Число степеней свободы в узле  $\{u_i^{(n)}, v_i^{(n)}, w_i^{(n)}, \phi_i^{(n)}, \psi_i^{(n)}\}$ ,  $n = 1, 2$  равно десяти. Если параметры трехслойной пластины удовлетворяют соотношениям [6, 35, 36]:

$$\frac{h_3}{a} \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} \leq 0,15; \quad (2.4.1.8)$$

$$0,001 \leq \frac{E_z h_3 (1 - \nu_1^2)}{2E_1 h_1 (1 - \nu_3^2)} \leq 1;$$

то заполнитель можно считать несжимаемым в поперечном направлении и соответственно прогибы всех трех слоев равны между собой (легкий заполнитель). В этом случае, прогиб

заполнителя аппроксимируется следующей функцией:

$$w_h^{(3)} = w_1 L_1 + w_2 L_2 + w_3 L_3. \quad (2.4.1.9)$$

Тогда количество неизвестных в узле  $\{u_i^{(n)}, v_i^{(n)}, w_i, \phi_i, \psi_i\}$ ,  $n = 1, 2$  уменьшится до семи.

Для слоистых конструкций с числом слоев более трех, перемещения тонких жестких слоев могут быть также аппроксимированы функциями (2.4.1.1) и (2.4.1.7), а поперечные перемещения точек  $k$ -го мягкого слоя – линейным полиномом, коэффициенты которого выражаются через узловые перемещения и углы поворота окружающих его жестких слоев. Используя разработанный трехслойный треугольник, построим функционалы полной потенциальной энергии на конечномерном пространстве допустимых функций  $V_h$  для трехслойных пластинчато-оболочечных конструкций.

## 2.4.2 Изгиб трехслойных пластин

Перемещения точек заполнителя и несущих слоев характеризуются компонентами  $u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, 3$ , направления которых совпадают, соответственно, с направлениями координатных линий в принятой системе координат  $x_1, x_2, z$ .

Модель деформирования трехслойной пластины основана на кинематическом подходе, в основе которого лежат гипотезы о распределении перемещений по толщине слоев [7, 9, 31]. Механические характеристики и толщины несущих слоев таковы, что допустимо применение гипотезы Кирхгофа—Лява. Обозначим через  $E$  – модуль Юнга,  $G$  – модуль сдвига несущего слоя. Соотнесем их с соответствующими модулями упругости заполнителя [9, 31]

$$E_1^{(3)} \sim E_2^{(3)} \sim \gamma E. \quad (2.4.2.1)$$

Знак « $\sim$ » обозначает, что сравниваемые величины имеют одинаковый порядок. Числа  $\gamma, \phi, \delta$  – устанавливают порядок от-



ношений модулей заполнителя и несущего слоя. Введем параметр

$$\lambda = \frac{t}{l}; t_i \leq t \leq H, \quad (2.4.2.2)$$

где  $t_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  – толщины слоев,  $H$  – полная толщина пакета,  $l$  – характерный размер в плане. Тогда, согласно [31], заполнитель называется легким или мягким, если

$$\gamma < \epsilon; \quad \frac{\lambda^2}{\phi} > \epsilon; \quad \frac{\lambda^4}{\delta} < \epsilon, \quad (2.4.2.3)$$

где  $\epsilon \ll 1$  – некоторое положительное число. Удельная потенциальная энергия деформации такого слоя находится по формуле:

$$\Phi_3 = \frac{1}{2}(\tau_{13}^{(3)} \gamma_{13}^{(3)} + \tau_{23}^{(3)} \gamma_{23}^{(3)}). \quad (2.4.2.4)$$

Заполнитель, параметры которого удовлетворяют условию,

$$\gamma < \epsilon; \quad \frac{\lambda^2}{\phi} > \epsilon; \quad \frac{\lambda^4}{\delta} < \epsilon, \quad (2.4.2.5)$$

называют трансверсально мягким. Плотность потенциальной энергии деформации такого слоя определяется по формуле:

$$\Phi_3 = \frac{1}{2}(\tau_{13}^{(3)} \gamma_{13}^{(3)} + \tau_{23}^{(3)} \gamma_{23}^{(3)} + \sigma_3^{(3)} \epsilon_3^{(3)}). \quad (2.4.2.6)$$

В выражении (2.4.2.4) и (2.4.2.6)  $\tau_{13}, \tau_{23}, \sigma_3, \gamma_{13}, \gamma_{23}, \epsilon_3$  – касательные и нормальные напряжения и деформации, действующие на площадках, перпендикулярных направлению  $OZ$ . Указанные виды заполнителей являются наиболее распространенными в трехслойных конструкциях [5, 6, 7, 65, 167, 169].

Для трансверсально мягкого заполнителя принимается гипотеза о линейном законе изменения касательных и нормальных перемещений по толщине [7, 9, 31]. Она позволяет учесть как деформации сдвига, так и обжатия в заполнителе, а также позволяет выразить перемещения точек заполнителя через

перемещения и углы поворота несущих слоев без введения дополнительных функций. В случае мягкого заполнителя считается, что он выполняет роль связи между несущими слоями и работает в основном на сдвиг без учета обжатия. В этом случае прогибы всех трех слоев равны между собой. Таким образом, прямые линии в заполнителе, перпендикулярные к его срединной поверхности до деформирования, остаются прямыми и после деформирования, но вследствие сдвига заполнителя их перпендикулярность к срединной поверхности нарушается. Иными словами, деформированное состояние трехслойной конструкции удовлетворяет гипотезе ломаной линии. Этим исключается возможность их скольжения по поверхности контакта, и они работают совместно без отрыва. Рассмотренные допущения для трехслойных конструкций с легким и трансверсальномягким заполнителями оказываются приемлемыми для большинства практических расчетов [6, 7, 9, 31, 65, 167, 169].

В соответствии с принятыми допущениями выражения для перемещений точек несущих слоев трехслойной оболочки примут вид:

$$\begin{aligned} u^{(n)} &= u_0^{(n)}(x_1, x_2) + z^{(n)}\theta_1^{(n)}(x_1, x_2); \\ v^{(n)} &= v_0^{(n)}(x_1, x_2) + z^{(n)}\theta_2^{(n)}(x_1, x_2); \\ w^{(n)} &= w_0^{(n)}(x_1, x_2); \quad n = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.4.2.7)$$

где  $\theta_1^{(n)}$  и  $\theta_2^{(n)}$ ,  $n = 1, 2$  – углы поворота нормали в несущих слоях, соответственно, в плоскостях  $\alpha_1 = \text{const}$ ,  $\alpha_2 = \text{const}$  :

$$\begin{aligned} \theta_1^{(n)}(x_1, x_2) &= -\frac{\partial w_0^{(n)}}{\partial x_1}; \\ \theta_2^{(n)}(x_1, x_2) &= -\frac{\partial w_0^{(n)}}{\partial x_2}; \end{aligned} \quad (2.4.2.8)$$

$u_0^{(n)}, v_0^{(n)}, w_0^{(n)}$ ,  $n = 1, 2$  – компоненты перемещения точек срединной поверхности несущих слоев в направлении координатных линий в системе координат  $x_1, x_2, z$ . В уравнениях (2.4.2.8)



$z^{(n)}$ ,  $n = 1, 2$  – расстояние, измеряемое по нормали к срединным поверхностям несущих слоев, причем

$$\begin{aligned} z^{(1)} &= z - \frac{t_3 + t_1}{2}, \\ z^{(2)} &= z + \frac{t_3 + t_2}{2}, \end{aligned} \quad (2.4.2.9)$$

соответственно, для верхнего  $n = 1$  и нижнего  $n = 2$  несущих слоев. Срединная поверхность для каждого несущего слоя выбирается из условия

$$\int_{t(n)} \frac{E_n z^{(n)} dz^{(n)}}{1 - \nu_n^2} = 0, \quad (2.4.2.10)$$

где интегрирование производится по всей толщине слоя. В соответствии с принятыми выше гипотезами перемещения точек заполнителя определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} u^{(3)}(x_1, x_2, z) &= \frac{1}{2}(u_0^{(1)} + u_0^{(2)}) + \frac{1}{4}(t_2\theta_1^{(2)} + t_1\theta_1^{(1)}) + \\ &+ z\left(\frac{1}{t_3}(u_0^{(1)} - u_0^{(2)}) - \frac{1}{2t_3}(t_1\theta_1^{(1)} + t_2\theta_1^{(2)})\right); \\ v^{(3)}(x_1, x_2, z) &= \frac{1}{2}(v_0^{(2)} + v_0^{(2)}) + \frac{1}{4}(t_2\theta_2^{(2)} + t_1\theta_2^{(1)}) + \\ &+ z\left(\frac{1}{t_3}(v_0^{(1)} - v_0^{(2)}) - \frac{1}{2t_3}(t_1\theta_2^{(1)} + t_2\theta_2^{(2)})\right); \\ w^{(3)}(x_1, x_2, z) &= \frac{1}{2}(w_0^{(1)} + w_0^{(2)}) + \frac{z}{t_3}(w_0^{(1)} - w_0^{(2)}). \end{aligned} \quad (2.4.2.11)$$

Потенциальная энергия деформации трехслойной пластины равна сумме потенциальных энергий деформации несущих слоев и заполнителя

$$\Pi = \frac{1}{2}a(v, v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{V(i)} \{\epsilon^{(i)}\}^T \{\sigma^{(i)}\} dV_i. \quad (2.4.2.12)$$

Здесь

$$\{\sigma^{(n)}\} = \{\sigma_x^{(n)}, \sigma_y^{(n)}, \tau_{xy}^{(n)}\}; \{\epsilon^{(n)}\} = \{\epsilon_x^{(n)}, \epsilon_y^{(n)}, \gamma_{xy}^{(n)}\}, n = 1, 2;$$

$$\{\sigma^{(3)}\} = \{\tau_{xz}^{(3)}, \tau_{yz}^{(3)}, \sigma_z^{(3)}\}; \{\epsilon^{(3)}\} = \{\gamma_{xz}^{(3)}, \gamma_{yz}^{(3)}, \epsilon_z^{(3)}\}.$$

Используя закон Гука и соотношения Коши, определим напряжения через перемещения точек слоев

$$\sigma_x^{(n)} = \frac{E_n}{1 - \nu^{(n)2}} (u_{0,x}^{(n)} + \nu^{(n)} v_{0,y}^{(n)}) - \frac{E_n z^{(n)}}{1 - \nu^{(n)2}} (w_{0,xx}^{(n)} + \nu^{(n)} w_{0,yy}^{(n)});$$

$$\sigma_y^{(n)} = \frac{E_n}{1 - \nu^{(n)2}} (v_{0,y}^{(n)} + \nu^{(n)} u_{0,x}^{(n)}) - \frac{E_n z^{(n)}}{1 - \nu^{(n)2}} (w_{0,yy}^{(n)} + \nu^{(n)} w_{0,xx}^{(n)});$$

$$\tau_{xy}^{(n)} = \frac{E_n}{2(1 + \nu^{(n)})} (u_{0,y}^{(n)} + v_{0,x}^{(n)}) - \frac{E_n z^{(n)}}{1 + \nu^{(n)}} w_{0,xy}^{(n)}; \quad n = 1, 2;$$

(2.4.2.13)

$$\tau_{xz}^{(3)} = G_{xz} (u_{,z}^{(3)} + w_{,x}^{(3)});$$

$$\tau_{yz}^{(3)} = G_{yz} (v_{,z}^{(3)} + w_{,y}^{(3)});$$

$$\sigma_z^{(3)} = E_z w_{,z}^{(3)}.$$

Здесь индексы  $x, y, z$  при переменных обозначают частные производные по ним. При определении работы внешней нагрузки принимаем, что внешние силы и моменты приложены только к несущим слоям. Тогда выражение для линейной формы, отражающей работу внешних сил запишется следующим образом:

$$\Phi(v) = \sum_{n=1}^2 \int \int_{\Omega} q_3^{(n)} w_0^{(n)} d\Omega + \int_{\Gamma} (N_{\nu}^{(n)} v_{\nu}^{(n)} +$$

$$+ N_t^{(n)} v_t^{(n)} - Q^{(n)} w_0^{(n)} + M_{\nu}^{(n)} \frac{\partial w_0^{(n)}}{\partial \nu}) d\Gamma. \quad (2.4.2.14)$$

Здесь  $q_3^{(n)}$  — интенсивность нормальной нагрузки, приложенной к  $n$ -му жесткому слою,  $n = 1, 2$ ;  $N_{\nu}^{(n)}$  и  $N_t$  — действующие

в срединной плоскости внешние силы, приходящиеся на единицу длины контура  $\Gamma$   $n$ -го несущего слоя, составляющая  $N_t^{(n)}$  — направлена по нормали к контуру,  $N_t^{(n)}$  — по касательной;  $Q^{(n)}$  — внешняя поперечная сила;  $M_\nu^{(n)}$  — внешний изгибающий момент, отнесенный к единице длины контура;  $v_\nu^{(n)}$  и  $v_t^{(n)}$  — составляющие тангенциального перемещения по нормали и по касательной к контуру  $\Gamma$ .

Используя приведенные выше аппроксимирующие функции перемещений в пределах трехслойной треугольной под-области, а также учитывая интегрирование по толщине слоев и по площади, получим выражения для конечномерных функционалов потенциальной энергии деформации несущих слоев:

$$\begin{aligned} \Phi_h^{(n)} = & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{j,k=1}^3 \left\{ \frac{E_n t_n}{4\Delta(1-\nu^{(n)2})} [(b_j u_j^{(n)} b_k u_k^{(n)} + \right. \\ & + c_j v_j^{(n)} c_k v_k^{(n)} + 2\nu^{(n)} b_j u_j^{(n)} c_k v_k^{(n)}) + \frac{1-\nu^{(n)}}{2} (b_j v_j^{(n)} + c_k u_k^{(n)})^2] + \\ & + \frac{E_n t_n^3}{576(1-\nu^{(n)2})\Delta^3} [(1+\delta_{jk})(Q_j^{(n)} Q_k^{(n)} + S_j^{(n)} S_k^{(n)} + \\ & + 2\nu^{(n)} Q_j^{(n)} S_j^{(n)} + 2(1-\nu^{(n)}) R_j^{(n)} R_k^{(n)})] \}. \end{aligned} \quad (2.4.2.15)$$

Здесь  $M$  — количество треугольников, окружающих  $i$ -й узел,  $\delta_{jk}$  — символ Кронекера и

$$\begin{aligned} Q_1^{(n)} &= b_2^2 a_3^{(n)} + b_3^2 a_5^{(n)} + 2(b_1 b_2 a_1^{(n)} + b_2 b_3 a_7^{(n)} + b_1 b_3 a_2^{(n)}); \\ Q_2^{(n)} &= b_1^2 a_1^{(n)} + b_3^2 a_6^{(n)} + 2(b_1 b_2 a_3^{(n)} + b_2 b_3 a_4^{(n)} + b_1 b_3 a_7^{(n)}); \\ Q_3^{(n)} &= b_1^2 a_2^{(n)} + b_2^2 a_4^{(n)} + 2(b_1 b_2 a_7^{(n)} + b_2 b_3 a_6^{(n)} + b_1 b_3 a_5^{(n)}); \\ R_1^{(n)} &= b_2 c_2 a_3^{(n)} + b_3 c_3 a_5^{(n)} + p_1 a_1^{(n)} + p_2 a_7^{(n)} + p_3 a_2^{(n)}; \\ R_2^{(n)} &= b_1 c_1 a_1^{(n)} + b_3 c_3 a_6^{(n)} + p_1 a_3^{(n)} + p_2 a_4^{(n)} + p_3 a_7^{(n)}; \\ R_3^{(n)} &= b_1 c_1 a_2^{(n)} + b_2 c_2 a_4^{(n)} + p_1 a_7^{(n)} + p_2 a_6^{(n)} + p_3 a_5^{(n)}; \end{aligned} \quad (2.4.2.16)$$



$$p_1 = b_1 c_2 + b_2 c_1; p_2 = b_2 c_3 + b_3 c_2; p_3 = b_3 c_1 + b_1 c_3.$$

Выражения для  $S_i^{(n)}$ , получаются из выражений для  $Q_i^{(n)}$  путём замены коэффициентов  $b_i$  на  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Потенциальная энергия деформации ортотропного сжимаемого заполнителя на конечномерном пространстве допустимых перемещений имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi_h^{(n)} = & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{j,k=1}^3 \left\{ \frac{G_{xz}}{t_3} \left[ \frac{\Delta}{12} (1 + \delta_{jk}) k_j k_k + \right. \right. \\ & + \frac{1}{720\Delta} (D_1 + 2(A_2 B_2 + A_1 B_3 + A_3 B_1) + J(A_j + B_j + 3J)) + \\ & + \frac{t_3^2}{16\Delta} n_j b_j n_k b_k + \frac{1}{60} (k_k (D_2 + 2A_k) + k_1 (B_1 + B_2) + k_2 (B_1 + B_3)) + \\ & + \frac{t_3}{6} n_j b_j k_k + \frac{t_3}{8\Delta} (A_j + B_j + 6J)) + \\ & + \frac{t_3^2}{48\Delta} m_j b_j m_k b_k \left. \right] + \frac{G_{yz}}{t_3} \left[ \frac{\Delta}{12} (1 + \delta_{ij}) l_j l_k + \right. \\ & + \frac{1}{720\Delta} (D_3 + 2(C_2 P_2 + C_1 P_3 + C_3 P_1) + k(C_j + P_j + 3K)) + \\ & + \frac{t_3^2}{16\Delta} n_j c_j n_k c_k + \frac{1}{60} (l_k (D_4 + 2C_k) + l_1 (P_1 + P_2) + \\ & + l_2 (P_1 + P_3) + l_3 (P_2 + P_3)) + \frac{t_3}{6} n_j c_j l_k + \frac{t_3}{8\Delta} (C_i + P_i + 6K)) + \\ & + \frac{t_3^2}{48\Delta} m_j c_j m_k c_k \left. \right] + \frac{Ez\Delta}{12t_3} (1 + \delta_{ij}) m_j m_k \}, \end{aligned} \quad (2.4.2.17)$$

где

$$D_1 = \sum_{j,k=1}^3 [0, 5(1 + \delta_{jk})(A_j A_k + 2B_j B_k) + A_j A_k + 3A_j B_k];$$

$$D_2 = \sum_{j=1}^3 [A_j + B_j + 10J_j];$$

$$D_3 = \sum_{j,k=1}^3 [0,5(1 + \delta_{jk})(C_j C_k + 2P_j P_k) + C_j C_k + 3C_j P_k];$$

$$D_4 = \sum_{j=1}^3 [C_j + P_j + 10K_j];$$

$$k_j = u_j^{(1)} - u_j^{(2)}; l_j = v_j^{(1)} - v_j^{(2)}; n_j = w_j^{(1)} + w_j^{(2)}; j = 1, 2, 3;$$

$$A_1 = \sum_{n=1}^2 h_n (b_1 a_1^{(n)} + b_3 a_2^{(n)});$$

$$A_2 = \sum_{n=1}^2 h_n (b_1 a_3^{(n)} + b_3 a_4^{(n)});$$

$$A_3 = \sum_{n=1}^2 h_n (b_1 a_5^{(n)} + b_2 a_6^{(n)});$$

$$B_1 = \sum_{n=1}^2 h_n (b_1 a_1^{(n)} + b_2 a_3^{(n)} + b_3 a_7^{(n)});$$

$$B_2 = \sum_{n=1}^2 h_n (b_1 a_2^{(n)} + b_2 a_7^{(n)} + b_3 a_5^{(n)});$$

$$B_3 = \sum_{n=1}^2 h_n (b_1 a_7^{(n)} + b_2 a_4^{(n)} + b_3 a_6^{(n)});$$

$$J = \sum_{n=1}^2 \sum_{i=1}^3 h_n b_i w_i^{(n)}.$$

Выражения для коэффициентов  $C_i, P_i, K$  получаются из выражений  $A_i, B_i, J$  путем замены  $b_i$  на  $c_i$ .

Если параметры трехслойной конструкции таковы, что заполнитель можно считать несжимаемым в поперечном направлении, тогда в выражении для конечномерного функционала потенциальной энергии деформации заполнителя (2.4.2.17) исчезнет последнее слагаемое и коэффициенты примут следующие значения:

$$k_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}, l_j = v_j^{(1)} - v_j^{(2)};$$

$$n_j = 2w_j, m_j = 0, j = 1, 2, 3; \quad h' = h_1 + h_2;$$

$$A_1 = h'(b_2 a_1 + b_3 a_2);$$

$$A_2 = h'(b_1 a_3 + b_3 a_4);$$

$$A_3 = h'(b_1 a_5 + b_2 a_6);$$

$$B_1 = h'(b_1 a_1 + b_2 a_3 + b_3 a_7);$$

$$B_2 = h'(b_1 a_2 + b_2 a_7 + b_3 a_6);$$

$$B_3 = h'(b_1 a_7 + b_2 a_4 + b_3 a_6);$$

$$J = h' \sum_{i=1}^3 b_i w_i. \quad (2.4.2.18)$$

С учетом выражений (2.4.2.14), (2.4.2.15) и (2.4.2.17) функционал полной потенциальной энергии  $\Phi(v_h)$  треугольников, окружающих  $i$ -й узел будет равен

$$\Phi(v_h) = \sum_{n=1}^3 U_h^{(n)} - \sum_{n=1}^2 \sum_i F_{x_i}^{(n)} u_i^{(n)} +$$

$$+ F_{y_i}^{(n)} v_i^{(n)} + F_{z_i}^{(n)} w_i^{(n)} + F_{\phi_i}^{(n)} \phi_i^{(n)} + F_{\psi_i}^{(n)} \psi_i^{(n)}, \quad (2.4.2.19)$$

где  $F_x, F_y, F_z, F_\phi, F_\psi$  – приведенные к узлам внешние силы. Мембранные усилия, возникающие в несущих слоях



$N_x^{(n)}, N_y^{(n)}, N_{xy}^{(n)}, n = 1, 2$  в треугольнике, вычисляются по формулам:

$$N_x^{(n)} = \frac{E_n t_n}{2\Delta(1 - \nu^{(n)2})} \sum_{i=1}^3 [b_i u_i^{(n)} + \nu^{(n)} c_i v_i^{(n)}];$$

$$N_y^{(n)} = \frac{E_n t_n}{2\Delta(1 - \nu^{(n)2})} \sum_{i=1}^3 [c_i v_i^{(n)} + \nu^{(n)} b_i u_i^{(n)}];$$

$$N_{xy}^{(n)} = \frac{E_n t_n}{2\Delta(1 - \nu^{(n)2})} \sum_{i=1}^3 [b_i v_i^{(n)} + c_i u_i^{(n)}].$$

Моменты  $M_x^{(n)}, M_y^{(n)}, M_{xy}^{(n)}, n = 1, 2$  в несущих слоях в любой точке треугольника вычисляются по формулам:

$$M_x^{(n)} = \frac{D_n}{2\Delta^2} \sum_{i=1}^3 (Q_i^{(n)} L_i + \nu^{(n)} S_i^{(n)} L_i);$$

$$M_y^{(n)} = \frac{D_n}{2\Delta^2} \sum_{i=1}^3 (S_i^{(n)} L_i + \nu^{(n)} Q_i^{(n)} L_i);$$

$$M_{xy}^{(n)} = \frac{D_n}{2\Delta^2} \sum_{i=1}^3 R_i L_i, \quad (2.4.2.20)$$

где  $D_n = \frac{E_n t_n^3}{12(1 - \nu^{(n)2})}$  — цилиндрическая жесткость  $n$ -го несущего слоя. Из выражений (2.4.2.20) видно, что моменты изменяются внутри треугольника по линейному закону. В работе [92] рекомендуется вычислять значения моментов в центре треугольников и принимать их постоянными внутри каждого треугольника.

$$M_x^{(n)} = \frac{D_n}{6\Delta^2} \sum_{i=1}^3 [Q_i + \nu^{(n)} S_i^{(n)}];$$

$$M_y^{(n)} = \frac{D_n}{6\Delta^2} \sum_{i=1}^3 [S_i + \nu^{(n)} Q_i^{(n)}];$$

$$M_{xy}^{(n)} = \frac{D_n}{6\Delta^2} \sum_{i=1}^3 R_i^{(n)}. \quad (2.4.2.21)$$

Для нахождения напряжений в точке  $n$ -го несущего слоя, отстоящей на расстоянии  $z^{(n)}$  от срединной поверхности трехслойной пластины, используются соотношения:

$$\sigma_x^{(n)} = \frac{N_x^{(n)}}{t_n} + \frac{12M_x^{(n)}}{t_n^3} z^{(n)};$$

$$\sigma_y^{(n)} = \frac{N_y^{(n)}}{t_n} + \frac{12M_y^{(n)}}{t_n^3} z^{(n)};$$

$$\tau_{xy}^{(n)} = \frac{12M_{xy}^{(n)}}{t_n^3} z^{(n)}; \quad (2.4.2.22)$$

$$z^{(1)} = z - \frac{t_3 + t_1}{2}; z^{(2)} = z + \frac{t_3 + t_2}{2}.$$

Напряжения в точках заполнителя в пределах элемента, в соответствии с гипотезой о линейном распределении перемещений по толщине, определяются следующим образом:

$$\tau_{xz}^{(3)} = G_{xz} \left[ \frac{1}{24\Delta t_3} \sum_{i=1}^3 [A_i + B_i + 6J] + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{3t_3} k_i + \frac{1}{4\Delta} n_i b_i + \frac{z}{2t_3\Delta} m_i b_i \right) \right];$$

$$\tau_{yz}^{(3)} = G_{yz} \left[ \frac{1}{24\Delta t_3} \sum_{i=1}^3 [C_i + P_i + 6K] + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{3t_3} l_i + \frac{1}{4\Delta} n_i c_i + \frac{z}{2t_3 \Delta} m_i c_i \right);$$

$$\sigma_z^{(3)} = \frac{E_z}{3t_3} \sum_{i=1}^3 m_i. \quad (2.4.2.23)$$

В случае, если мягкий слой существенно неоднороден по толщине или трехслойная пластина тонкая, а также, если заполнитель легкий, то, в соответствии с рекомендациями работы [31], касательные напряжения могут быть определены по формулам:

$$\tau_{xz}^{(3)} = G_{xz} \left[ \frac{1}{12\Delta t_3} \sum_{i=1}^3 [A_i + B_i + 6J] + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{3t_3} k_i + \frac{1}{4\Delta} n_i b_i \right) \right];$$

$$\tau_{yz}^{(3)} = G_{yz} \left[ \frac{1}{12\Delta t_3} \sum_{i=1}^3 [C_i + P_i + 6K] + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{3t_3} l_i + \frac{1}{4\Delta} n_i c_i \right) \right]. \quad (2.4.2.24)$$

## 2.5 Трехмерные призматические тела

Для аппроксимации перемещений в ступенчато-призматических трехмерных телах часто используется область в форме призм. В данной работе была выбрана трехгранная шестиузловая прямоугольная призма с билинейной аппроксимацией перемещений. Перемещения в пределах каждой призмы имеют вид:

$$u_n(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2)x_3, n = 1, 2, 3. \quad (2.5.1)$$

Функции  $f_1(x_1, x_2)$  и  $f_2(x_1, x_2)$  линейны по  $x_1, x_2$  и

$$u_n(x_1, x_2, x^s) = u^s(x_1, x_2); u_n(x_1, x_2, x^{s+1}) = u^{s+1}(x_1, x_2). \quad (2.5.2)$$



$$f_1(x_1, x_2) = \frac{u_n^s(x_1, x_2)x_3^{s+1} - u_n^{s+1}(x_1, x_2)x_3^s}{x_3^{s+1} - x_3^s};$$

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{u_n^{s+1}(x_1, x_2) - u_n^s(x_1, x_2)}{x_3^{s+1} - x_3^s}. \quad (2.5.3)$$

Таким образом, перемещения в пределах каждой призмы с учетом (2.5.3) выбираются в виде:

$$u_n(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{l} [u_n^s(x_1, x_2)(x_3^{s+1} - x_3) - u_n^{s+1}(x_1, x_2)(x_3^s - x_3)], \quad (2.5.4)$$

где  $l = x_3^{s+1} - x_3^s$  — длина призмы;  $u_n^s(x_1, x_2)$ ,  $u_n^{s+1}(x_1, x_2)$  — перемещения на торцах призмы задаются в виде линейных функций от координат [142].

$$u_n^s = \frac{1}{2\Delta} [(a_1 + b_1x_1 + c_1x_2)u_n^1 +$$

$$+ (a_2 + b_2x_1 + c_2x_2)u_n^2 + (a_3 + b_3x_1 + c_3x_2)u_n^3];$$

$$u_n^{s+1} = \frac{1}{2\Delta} [(a_1 + b_1x_1 + c_1x_2)u_n^4 +$$

$$+ (a_2 + b_2x_1 + c_2x_2)u_n^5 + (a_3 + b_3x_1 + c_3x_2)u_n^6], \quad (2.5.5)$$

где  $\Delta$  — площадь торца призмы (треугольника),

$$a_1 = x_1^2x_2^3 - x_1^3x_2^2; \quad b_1 = x_2^2 - x_2^3; \quad c_1 = x_1^3 - x_1^2.$$

Коэффициенты  $a, b, c$  с другими индексами получаются с помощью круговой перестановки индексов.

Многолетний опыт решения различных задач механики деформируемых твердых тел на основе МКЭ показал, что указанный вариант нередко обладает сравнительно медленной сходимостью, в особенности для оболочек и массивных тел сложных криволинейных форм. Этот факт был отмечен многими авторами [142, 176, 199, 201]. Установлено, что замедленная сходимость характерна для тех случаев, когда выбранная

аппроксимация перемещений не позволяет точно описать смещения конечного элемента как жесткого целого. Различные способы учета свойств жестких смещений элементов, ориентированные на специальные классы задач, изложены в работах [50, 322] и др. Среди них следует отметить идею явного учета жестких смещений Кэнтина [175] путем корректировки матриц жесткости независимо от способа их вывода. Широкое распространение получила методика изопараметрических элементов, предложенная Б.М. Айронсом, О.К. Зенкевичем и другими авторами для решения двумерных и трехмерных задач теории упругости в перемещениях.

Характерной особенностью указанных выше методов является то, что все подходы сосредотачиваются на точном или приближенном учете в матрице жесткости свойств конечных элементов при смещениях его как жесткого целого, оставляя без внимания вопрос о влиянии на точность решений жестких смещений элементарных объемов конечного элемента при его деформации. В то же время это явление может быть существенным при полиномиальной аппроксимации перемещений. В работе [289] показано, что указанные выше явления возникают при выборе аппроксимирующих функций в форме неполных полиномов.

В настоящей работе для учета жестких смещений конечных элементов использовалась моментная схема конечных элементов, разработанная А.С. Сахаровым [289]. Суть которой сводится к отбрасыванию при минимизации некоторых членов разложения деформаций в степенной ряд, реагирующих на жесткие смещения. При этом точные уравнения связи между деформациями и перемещениями заменяют приближенными следующим путем:

- функции перемещений представляют в виде отрезков степенных рядов (принятый закон);

- приближенные выражения для перемещений подставляют в формулы определения деформаций, после чего деформации разлагают в ряд Маклорена;

— предыдущая процедура повторяется для перемещений дополненных до бесконечного степенного ряда (пробный закон перемещений);

— сравнивая выражения для коэффициентов разложения в ряд Маклорена деформаций, полученные на основе принятого и пробного законов перемещений, оставляются в разложении деформаций только совпадающие члены.

Построенные на этих принципах разрешающие уравнения позволяют учесть свойства жестких смещений и удовлетворяют требованиям существования, сходимости и устойчивости решений при неограниченном сгущении сетки.

Таким образом, для принятой аппроксимации перемещений (2.5.4) в соответствии с моментной схемой выражения деформаций имеют вид:

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \frac{1}{2l\Delta} [(b_i u_1^i)(x_3^{s+1} - x_3) - (b_i u_1^{i+3})(x_3^s - x_3)]; \\ \epsilon_{22} &= \frac{1}{2l\Delta} [(c_i u_2^i)(x_3^{s+1} - x_3) - (c_i u_2^{i+3})(x_3^s - x_3)]; \\ \epsilon_{33} &= \frac{1}{l} [L_i u_3^{i+3} - L_i u_3^i], \\ \epsilon_{12} &= \frac{1}{2l\Delta} [(c_i u_1^i + b_i u_2^i)(x_3^{s+1} - x_3) - (c_i u_1^{i+3} + b_i u_2^{i+3})(x_3^s - x_3)]; \\ \epsilon_{23} &= \frac{1}{2} [(c_i u_3^i + c_i u_3^{i+3}) + \frac{1}{3l} \sum_{i=1}^3 [u_2^{i+3} - u_2^i]; \\ \epsilon_{31} &= \frac{1}{2} [(b_i u_3^i + b_i u_3^{i+3}) + \frac{1}{3l} \sum_{i=1}^3 [u_1^{i+3} + u_1^i]; i = 1, 2, 3; \quad (2.5.6)\end{aligned}$$

где  $L_i$  —  $L$ -координаты, определяемые в соответствии с [142].

Рассмотрим трехмерное тело объемом  $\Omega$ , отнесенное к декартовой системе координат  $Ox_1, x_2, x_3$ . На основании принци-



па минимума потенциальной энергии можно получить энергетический функционал [269]:

$$\Phi = \int_{\Omega} \Phi_{\epsilon} d\Omega - \int_{\gamma} (f_1 u_1 + f_2 u_2 + f_3 u_3) d\gamma,$$

где:  $\Phi_{\epsilon}$  – удельная потенциальная энергия деформации (упругий потенциал);  $u_1, u_2, u_3$  – компоненты вектора перемещений;  $f_1, f_2, f_3$  – компоненты вектора нагрузки;  $\gamma$  – поверхность тела, на которой заданы внешние нагрузки.

Для изотропного тела с упругими постоянными  $E, \nu$  удельная потенциальная энергия деформации имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{\epsilon} = & (G + \frac{\lambda}{2})(\epsilon_{11}^2 + \epsilon_{22}^2 + \epsilon_{33}^2) + \lambda(\epsilon_{11}\epsilon_{22} + \\ & + \epsilon_{22}\epsilon_{33} + \epsilon_{33}\epsilon_{11}) + 2G(\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 + \epsilon_{31}^2) - \\ & - \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha T(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}), \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

где  $G$  – модуль упругости при сдвиге;  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  – постоянная Ляме;  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения;  $T$  – изменение температуры в рассматриваемой точке тела.

Осуществляя дискретизацию  $\Omega$  на конечное число треугольных призм  $\Omega = \cup_n \Omega_n$ , принимая во внимание, что приращение  $\lambda_i^{k+1}$  изменяет энергию деформации призм, связанных с  $i$ -м узлом, учитываем вклад в квадратичную форму только от этих элементов. Конечномерный функционал для призм, лежащих в слое между сечениями  $s, s+1$  с учетом (2.5.6), имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi_n = & \frac{1}{2} \sum_{\Omega_m \in \Lambda_{h_i}} \{ A \frac{\Delta l}{3} [ (\frac{b_i u_1^i + b_i u_1^{i+3}}{2\Delta})^2 + (\frac{c_i u_2^i + c_i u_2^{i+3}}{2\Delta})^2 - \\ & - \frac{(b_i u_1^i)(b_i u_1^{i+3}) + (c_i u_2^i)(c_i u_2^{i+3})}{4\Delta^2} ] + \frac{1}{4l^2} [ (\sum_{i=1}^3 (u_3^{i+3} - u_3^i))^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^3 (u_3^{i+3} - u_3^i)^2] + B \frac{2\delta}{3} \left[ \frac{(b_i u_1^i + b_i u_1^{i+3}) * (c_i u_2^i + c_i u_2^{i+3})}{4\delta^2} - \right. \\
& - \frac{1}{2} \frac{b_i u_1^{i+3} c_i u_2^i + b_i u_1^i c_i u_2^{i+3}}{4\delta^2} + \frac{1}{2} \frac{(b_i u_1^i + b_i u_1^{i+3} + c_i u_2^i + c_i u_2^{i+3})}{2\delta} \times \\
& \times \sum_{i=1}^3 (u_3^{i+3} - u_3^i) + C \delta l \left[ \frac{1}{3} \left[ \frac{(c_i u_1^i + c_i u_1^{i+3} + b_i u_2^i + b_i u_2^{i+3})^2}{2\delta} - \right. \right. \\
& - \frac{(c_i u_1^i + b_i u_2^i)(c_i u_1^{i+3} + b_i u_2^{i+3})}{4\delta^2} \left. \right] + \left[ \frac{1}{2} \frac{c_i u_3^i + c_i u_3^{i+3}}{2\delta} + \right. \\
& + \frac{1}{3l} \sum_{i=1}^3 (u_2^{i+3} - u_2^i)^2 + \left[ \frac{1}{2} \frac{(b_i u_3^i + b_i u_3^{i+3})}{2\delta} + \right. \\
& + \frac{1}{3l} \sum_{i=1}^3 (u_1^{i+3} - u_1^{i+3} - u_1^i)^2] - \\
& - D \alpha T [l(b_i u_1^i + b_i u_1^{i+3} + c_i u_2^i + c_i u_2^{i+3}) + \\
& + \frac{2\delta}{3} \sum_{i=1}^3 (u_3^{i+3} - u_3^i)] - \sum_{i=1}^3 F_i^1 u_1^i, \quad (2.5.8)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A &= \frac{(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \quad B = \frac{2E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \\
C &= \frac{E}{2(1 + \nu)}; \quad D = \frac{2E}{(1 - 2\nu)}.
\end{aligned}$$

$F_i^1, i = 1, 2, 3$  — приведенная к узлам обобщенная внешняя нагрузка.

Для реализации метода покоординатного спуска находим выражения первых и вторых производных квадратичного функционала по узловым перемещениям.

$$\frac{\partial \Phi_h}{\partial u_1^1} = \sum_{\Omega_m \in \Lambda_{h_i}} \frac{El}{12(1 + \nu)} \left[ \frac{b_1}{1 - 2\nu} [(1 - \nu) \frac{2b_i u_1^i + b_i u_1^{i+3}}{2\Delta} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +\nu\left(\frac{2c_i u_2^i + c_i u_2^{i+3}}{2\Delta} + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^3 (u_3^{i+3} - u_3^i)\right) + \\
& + \frac{1}{2} \left[ c_1 \left( \frac{2c_i u_1^i + c_i u_1^{i+3} + 2b_i u_2^i + b_i u_2^{i+3}}{2\Delta} \right) - \right. \\
& - \frac{\Delta}{l} \left( \frac{4}{3l} \sum_{i=1}^3 (u_1^{i+3} - u_1^i + \frac{b_i u_2^i + b_i u_2^{i+3}}{\Delta}) \right) - \\
& \left. - \frac{3(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha b_1 \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 (T^i + T^{i+3}) \right] \} - F_1^1; \\
\frac{\partial \Phi_h}{\partial u_2^1} = & \sum_{\Omega_m \in \Lambda_{h_i}} \left\{ \frac{El}{12(1+\nu)} \left[ \frac{c_1}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{2c_i u_2^i + c_i u_2^{i+3}}{2\Delta} + \right. \right. \right. \\
& + \nu \left( \frac{2b_i u_1^i + b_i u_1^{i+3}}{2\Delta} + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^3 (u_3^{i+3} - u_3^i) \right) + \\
& + \frac{1}{2} \left[ b_1 \left( \frac{2c_i u_1^i + c_i u_1^{i+3} + 2b_i u_2^i + b_i u_2^{i+3}}{2\Delta} \right) - \right. \\
& - \frac{\Delta}{l} \left( \frac{4}{3l} \sum_{i=1}^3 (u_1^{i+3} - u_1^i + \frac{(c_i u_3^i + c_i u_3^{i+3})}{\Delta}) \right) - \\
& \left. \left. - \frac{3(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha c_1 \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 (T^i + T^{i+3}) \right] \right] \} - F_2^1; \\
\frac{\partial \Phi_h}{\partial u_3^1} = & \sum_{\Omega_m \in \Lambda_{h_i}} \left\{ \frac{El}{6(1+\nu)} \left[ -\frac{\Delta}{l} \frac{1}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \times \right. \right. \right. \\
& \times \frac{\sum_{i=1}^3 (u_3^{i+3} - u_3^i) + u_3^4 - u_3^1}{2l} + \\
& + \nu \left( \frac{b_i u_1^i + b_i u_1^{i+3} + c_i u_2^i + c_i u_2^{i+3}}{2\Delta} \right) + \frac{3}{4} \left[ b_1 \left( \frac{b_i u_3^i + b_i u_3^{i+3}}{4\Delta} + \right. \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3l} \sum_{i=1}^3 (u_1^{i+3} - u_1^i) + c_1 \left( \frac{(c_i u_3^i + c_i u_3^{i+3})}{4\Delta} + \frac{1}{3l} \sum_{i=1}^3 (u_2^{i+3} - u_2^i) \right) + \\
& + \frac{(2\Delta(1+\nu))}{(1-2\nu)} \alpha \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 (T^i + T^{i+3}) \} - F_3^1; \quad (2.5.9)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_h}{\partial (u_1^1)^2} = \sum_{\Omega_m \in \Lambda_{h_i}} \left\{ \frac{El}{3\Delta(1+\nu)} \left[ \frac{b_1^2}{4} \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} + \frac{1}{2} \left[ \frac{c_1^2}{4} + \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta}{l} \right)^2 \right] \right] \right\};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_h}{\partial (u_2^1)^2} = \sum_{\Omega_m \cup \Lambda_{h_i}} \left\{ \frac{El}{3\Delta(1+\nu)} \left[ \frac{c_1^2}{4} \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} + \frac{1}{2} \left[ \frac{b_1^2}{4} + \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta}{l} \right)^2 \right] \right] \right\};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_h}{\partial (u_3^1)^2} = \sum_{\Omega_m \cup \Lambda_{h_i}} \left\{ \frac{El}{4\Delta(1+\nu)} \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{\Delta}{l} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{b_1^2}{4} + \frac{c_1^2}{4} \right] \right] \right\}.$$

Выражение конечномерного функционала, а также первых и вторых производных по узловым перемещениям для призм, лежащих в слое, ограниченном сечениями  $s-1$ ,  $s$  аналогично.

Определив узловые перемещения и деформации, компоненты тензора напряжений в треугольных призмах находятся по закону Дюамеля – Неймана

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \epsilon_{mm} - \frac{E}{(1-2\nu)} \alpha T,$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  постоянные Ляме. Компоненты тензора деформаций в центре тяжести равны

$$\begin{aligned}
\epsilon_{11} &= \frac{1}{2} [b_i u_1^i + b_i u_1^{i+3}]; \\
\epsilon_{22} &= \frac{1}{2} [c_i u_2^i + c_i u_2^{i+3}]; \\
\epsilon_{33} &= \frac{1}{3l} \sum_{i=1}^3 (u_3^{i+3} - u_3^i); \quad (2.5.10)
\end{aligned}$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2}[c_i u_1^i + b_i u_2^{i+3} + c_i u_1^{i+3} + b_i u_2^{i+3}];$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1}{2}[c_i u_3^i + c_i u_3^{i+3}] + \frac{1}{3l} \sum_{i=1}^3 (u_2^{i+3} - u_2^i);$$

$$\epsilon_{31} = \frac{1}{2}[b_i u_3^i + b_i u_3^{i+3}] + \frac{1}{3l} \sum_{i=1}^3 (u_1^{i+3} - u_1^i), i = 1, 2, 3.$$

В упруго-пластической задаче выражение потенциальной функции деформации записывается в следующем виде:

$$\Phi_\epsilon = \frac{1}{2} K_0 \Theta_0^2 + \int_0^{\epsilon_i} \sigma_i d\epsilon_i, \quad (2.5.11)$$

где  $\Theta_0 = \epsilon_{mm}$  – относительное изменение объема,  $K_0 = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  – объемный модуль упругости;

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}$$

– интенсивность напряжений;

$$\epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + (\epsilon_{22} - \epsilon_{33})^2 + (\epsilon_{33} - \epsilon_{11})^2 + \frac{3}{2}(\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 + \epsilon_{31}^2)}$$

– интенсивность деформаций.

Использование метода покоординатного спуска для минимизации упруго-пластического функционала позволяет естественным образом объединить учет физической нелинейности по методу переменных параметров упругости в рамках деформационной теории пластичности и нахождение текущего приближения квадратичного функционала на каждом шаге.

Таким образом, исходная нелинейная задача сводится к задаче минимизации следующего функционала:

$$\Phi = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} K_0 \Theta_0^2 + \frac{3}{2} G^* \epsilon_i^2 \right) d\Omega - \int_{\gamma} (f_1 u_1 + f_2 u_2 + f_3 u_3) d\gamma, \quad (2.5.12)$$

где

$$G^* = G(\epsilon_i^k) = \frac{f(\epsilon_i^k)}{3\epsilon_i^k}$$

– секущий модуль сдвига.

Выражения первых и вторых производных функционала по узловым перемещениям, необходимые для реализации метода покоординатного спуска, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_h}{\partial u_1^1} = & \sum_{\Omega_m \in \Lambda_{h_i}} \left\{ K_0 \frac{b_1 l}{12} \left[ \frac{2b_i u_1^i + b_i u_1^{i+3} + 2c_i u_2^i + b_i u_2^{i+3}}{2\Delta} + \right. \right. \\ & + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^3 (u_3^{i+3} - u_3^i) \left. \right] + G^* \left[ \frac{l}{12} \left[ \frac{2b_1}{3} \left( \frac{2b_i u_1^i + b_i u_1^{i+3}}{\Delta} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \left( \frac{2c_i u_2^i + c_i u_2^{i+3}}{2\Delta} \right) - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^3 (u_3^{i+3} - u_3^i) \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + c_1 \left( \frac{2c_i u_1^i + c_i u_1^{i+3} + 2b_i u_2^i + b_i u_2^{i+3}}{2\Delta} \right] - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\Delta}{3} \left[ \frac{1}{l} \sum_{i=1}^3 (u_1^{i+3} - u_1^i) + \frac{b_i u_3^i + b_i u_3^{i+3}}{4\Delta} \right] \right] \right\} - F_1^1; \\ \frac{\partial \Phi_h}{\partial u_2^1} = & \sum_{\Omega_m \in \Lambda_{h_i}} \left\{ K_0 \frac{c_1 l}{12} \left[ \frac{2b_i u_1^i + b_i u_1^{i+3} + 2c_i u_1^i + c_i u_2^{i+3}}{2\Delta} + \right. \right. \\ & + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^3 (u_3^{i+3} - u_3^i) \left. \right] + G^* \left[ \frac{l}{12} \left[ \frac{2c_1}{3} \left( \frac{2c_i u_2^i + c_i u_2^{i+3}}{\Delta} - \right. \right. \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{(2b_i u_1^i) + b_i u_1^{i+3}}{2\Delta} - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^3 (u_3^{i+3} - u_3^i) + \\
& + b_1 \left( \frac{(2c_i u_1^i) + c_i u_1^{i+3} + 2b_i u_2^i + b_i u_2^{i+3}}{2\Delta} \right) - \\
& - \frac{\Delta}{3} \left[ \frac{1}{l} \sum_{i=1}^3 (u_2^{i+3} - u_2^i) + \frac{(c_i u_3^i + c_i u_3^{i+3})}{4\Delta} \right] \} - F_2^1; \quad (2.5.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_h}{\partial u_3^1} = & \sum_{\Omega_m \in \Lambda_{h_i}} \left\{ -K_0 \frac{\Delta l}{12} \left[ \frac{b_i u_1^i + b_i u_1^{i+3} + c_i u_2^i + c_i u_2^{i+3}}{\Delta} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{l} [u_3^4 - u_3^1 + \sum_{i=1}^3 (u_3^{i+3} - u_3^i)] + G^* \left[ \frac{l}{4} \left[ b_1 \left( \frac{b_i u_3^i + b_i u_3^{i+3}}{2\Delta} + \right. \right. \right. \\
& + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^3 (u_1^{i+3} - u_1^i) + c_1 \left( \frac{c_i u_3^i + c_i u_3^{i+3}}{2\Delta} + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^3 (u_2^{i+3} - u_2^i) \right) ] - \\
& - \frac{\Delta}{9} \left[ \frac{1}{l} (u_3^4 - u_3^1 + \sum_{i=1}^3 (u_3^{i+3} - u_3^i)) - \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{b_i u_1^i + b_i u_1^{i+3} + c_i u_2^i + c_i u_2^{i+3}}{2\Delta} \right] \right] \right\} - F_3^1;
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_h}{\partial (u_1^1)^2} = \sum_{\Omega_m \cup \Lambda_{h_i}} \left\{ \frac{l}{3\Delta} \left[ (K_0 + \frac{4}{3} G^*) \frac{b_1^2}{4} + G^* \left( \frac{c_1^2}{4} + \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta}{l} \right)^2 \right) \right] \right\};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_h}{\partial (u_2^1)^2} = \sum_{\Omega_m \cup \Lambda_{h_i}} \left\{ \frac{l}{3\Delta} \left[ (K_0 + \frac{4}{3} G^*) \frac{c_1^2}{4} + G^* \left( \frac{b_1^2}{4} + \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta}{l} \right)^2 \right) \right] \right\};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_h}{\partial (u_3^1)^2} = \sum_{\Omega_m \cup \Lambda_{h_i}} \left\{ \frac{l}{3\Delta} \left[ (K_0 + \frac{4}{3} G^*) \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta}{l} \right)^2 \frac{b_1^2}{4} + G^* \frac{3}{4} \left( \frac{b_1^2}{4} + \frac{c_1^2}{4} \right) \right] \right\}.$$

Компоненты тензора напряжений в призме определяются по формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= K_0\Theta_0 + 2G^*(\epsilon_{11} - \frac{1}{3}\Theta_0); \\ \sigma_{22} &= K_0\Theta_0 + 2G^*(\epsilon_{22} - \frac{1}{3}\Theta_0); \\ \sigma_{33} &= K_0\Theta_0 + 2G^*(\epsilon_{33} - \frac{1}{3}\Theta_0); \\ \sigma_{12} &= G^*\epsilon_{12}; \quad \sigma_{23} = G^*\epsilon_{23}; \quad \sigma_{31} = G^*\epsilon_{31}.\end{aligned}\quad (2.5.14)$$

Поскольку для большинства конструкционных материалов влияние деформаций на изменение температуры является малым, то решается несвязанная термоупругая задача. Определение температурного поля сводится к решению задачи теплопроводности. С вариационной точки зрения решение краевой задачи теплопроводности эквивалентно отысканию минимума следующего функционала [292]:

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial x_3} \right)^2 - 2QT \right] d\Omega + \\ &+ \int_{\gamma} \left[ qT + \frac{1}{2}h(T - T_{\infty})^2 \right] d\gamma,\end{aligned}\quad (2.5.15)$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $T = f(x_1, x_2, x_3)$  — функция распределения температуры;  $Q$  — внутренний источник тепла или сток;  $q$  — тепловой поток на части поверхности;  $h$  — коэффициент теплообмена.

Для определения температурного поля вала необходимо решить задачу теплопроводности с граничными условиями первого рода — известно распределение температур на поверхностях бочки вала и охлаждающих каналов. При решении этой задачи функционал сводится к виду

$$\chi = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \lambda \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial x_3} \right)^2 \right] d\Omega; \quad (2.5.16)$$

Осуществим дискретизацию  $\Omega$  на конечное число треугольных призм  $\Omega = U_n \Omega_n$ . Температура в каждой призме задается в виде:

$$T(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{l} [T^s(x_1, x_2)(x_3^{s+1} - x_3) - T^{s+1}(x_1, x_2)(x_3^s - x_3)], \quad (2.5.17)$$

где  $T^s, T^{s+1}$  — распределение температуры на торцах призмы, которое задается в виде линейных функций координат [142]:

$$\begin{aligned} T^s(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\Delta} [(a_1 + b_1x_1 + c_1x_2)T_1 + (a_2 + b_2x_1 + c_2x_2)T_2 + \\ &\quad + (a_3 + b_3x_1 + c_3x_2)T_3]; \\ T^{s+1}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\Delta} [(a_1 + b_1x_1 + c_1x_2)T_4 + (a_2 + b_2x_1 + c_2x_2)T_5 + \\ &\quad + (a_3 + b_3x_1 + c_3x_2)T_6], \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

где  $\Delta, a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, 3$  определяются в соответствии с [142].

Конечномерный функционал теплопроводности для призм в слое между  $s$  и  $s+1$  сечениями имеет вид:

$$\begin{aligned} \chi_n &= \frac{1}{2} \sum_{\Omega_m \cup \Lambda_{h_i}} \lambda \frac{\Delta l}{3} \left\{ \frac{((b_i T_i)^2 + b_i T_i (b_i T_{i+3}) + (b_i T_{i+3}))}{4\Delta^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{((c_i T_i)^2 + c_i T_i (c_i T_{i+3}) + (c_i T_{i+3}))}{4\Delta^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4l^2} [(\sum_{i=1}^3 (T_{i+3} - T_i))^2 + \sum_{i=1}^3 (T_{i+3} - T_i)^2] \right\}. \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

Для реализации метода покоординатного спуска находим выражения первой и второй производных функционала теплопроводности по температуре, которые имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \chi_h}{\partial T_1} = \sum_{\Omega_m \cup \Lambda_{h_i}} \left\{ \lambda \frac{l}{12} [b_1 \frac{(2b_i T_i + b_i T_{i+3})}{2\Delta} + c_1 \frac{(2c_i T_i + c_i T_{i+3})}{2\Delta} + \right.$$



$$+ \frac{\Delta}{l^2} \left[ \sum_{i=1}^3 (T_i - T_{i+3}) + T_1 - T_4 \right] \}; \quad (2.5.20)$$

$$\frac{\partial^2 \chi_h}{\partial T_1^2} = \sum_{\Omega_m \cup \Lambda_{h_i}} \left\{ \lambda \frac{l}{6} \left[ \frac{(b_1^2 + c_1^2)}{2\Delta} + \frac{\delta}{l^2} \right] \right\}, i = 1, 2, 3.$$

Выражение конечномерного функционала теплопроводности, его первой и второй производных по узловой температуре для призм, лежащих в слое, ограниченном сечениями  $s-1$  и  $s$ , аналогичны.

## Глава 3

# Определение собственных частот и собственных форм колебаний

### 3.1 Вариационная постановка задачи о собственных колебаниях

При расчете механических систем, подвергающихся воздействию вибрационных нагрузок, основная трудность заключается в нахождении собственных частот и собственных форм колебаний. Задача определения собственных частот и форм в общем случае сводится к обобщенной задаче на собственные значения, которая состоит в отыскании таких действительных чисел  $\lambda$  и функции  $u \neq 0$ , удовлетворяющей условию:

$$A(u, v) = \lambda B(u, v), \quad \forall : v \in V, \quad (3.1.1)$$

где  $V$  – множество допустимых функций  $v$  и  $A(u, v)$ ,  $B(u, v)$  – семейство билинейных симметричных непрерывных форм. В силу того, что форма  $B(u, v)$  является строго положительной на  $V$ , т.е.

$$B(u, u) > 0, \quad \forall : u \in V, \quad (3.1.2)$$

и равенство нулю имеет место только при  $u = 0$ , все собственные числа задачи (3.1.1) положительны [204]. Они образуют последовательность, сходящуюся к бесконечности:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m < \lambda_{m+1} < \dots \rightarrow \infty. \quad (3.1.3)$$

Каждому собственному числу соответствуют собственные функции  $u_m$ , эти функции образуют ортогональный базис в  $V$ :

$$A(u_m, u_k) = \lambda_m \delta_{mk}; \quad B(u_m, u_k) = \delta_{mk}; \quad m, k > 1. \quad (3.1.4)$$

Рассмотренная выше задача на собственные значения может быть сведена к задаче минимизации отношения Релея–Ритца

$$I : v \in V \rightarrow I(v) = \frac{A(v, v)}{B(v, v)}. \quad (3.1.5)$$

Тогда собственные числа  $\lambda_m$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \inf\{I(v), \quad \forall v \in V\} = I(u_1); \\ \lambda_m &= \inf\{I(v), \quad \forall v \in V, B(v, u_k) = 0; \\ &\quad 1 \leq k \leq m-1\} = I(u_m), \quad m \geq 2. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Так как точное решение задачи на собственные значения в большинстве прикладных задач невозможно, то задача заменяется приближенной: для заданного конечномерного пространства  $V_h$  размерности  $N_h$  найти такие значения «пучка»  $(\lambda_h, u_h) \in R \times V_h$ , что

$$A(u_h, v_h) = \lambda B(u_h, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.1.7)$$

Если  $\phi_{hi}$ ,  $i = 1, \dots, N_h$  – базис в пространстве  $V_h$ , то задача сводится к алгебраической проблеме о собственных значениях в  $R^{N_h}$ :

$$[A_h]\{\hat{u}_h\} = \lambda_h[B_h]\{\hat{u}_h\}. \quad (3.1.8)$$



Матрицы  $[A_h]$  и  $[B_h]$  называются, соответственно, матрицей жесткости и матрицей инерции, а вектор  $\hat{u}_h$  – вектором узловых неизвестных. Величина  $h$  – параметр семейства конечномерных пространств  $V_h$ , характеризующий его размерность и размер подобласти, на которой координатные функции отличны от нуля, в пределе стремящийся к нулю. Коэффициенты симметричных и положительно определенных матриц  $[A_h]$  и  $[B_h]$  определяются базисом

$$a(\phi_{h_i}, \phi_{h_j}), \quad b(\phi_{h_i}, \phi_{h_j}), \quad i, j = 1, \dots, N_h.$$

В силу симметричности и положительной определенности матриц жесткости и инерции, существует  $N_h$  положительных собственных значений:

$$0 < \lambda_{1_h} < \lambda_{2_h} < \dots < \lambda_{N_h} \quad (3.1.9)$$

и, соответственно,  $N_h$  приближенных собственных функций  $u_{m_h}$ ,  $m = 1, 2, \dots, N_h$ , для которых выполняются условия:

$$A(u_{m_h}, v_{k_h}) = \lambda_{m_h} \delta_{mk}, \quad B(u_{m_h}, v_{k_h}) = \delta_{mk}, \quad m, k > 1. \quad (3.1.10)$$

При этом собственные значения характеризуются соотношениями:

$$\begin{aligned} \lambda_{1_h} &= \inf\{I(v_h), \quad \forall v_h \in V_h\} = I(u_{1_h}), \\ \lambda_{m_h} &= \inf\{I(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \quad B(v_{m_h}, u_{k_h}) = 0, \\ &\quad 1 \leq k \leq m-1\} = I(u_{m_h}), \quad m \geq 2. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Если  $V_h$  – семейство конечномерных подпространств в  $V$ , т.е. справедливы включения  $V_h \in V$  можно показать [210], что для всякого целого числа  $k$  имеет место предельное равенство сверху  $\lambda_{m_h} = \lambda_m$ ,  $1 \leq m \leq k$  при условии, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|u_m - v_h\|_V = 0, \quad 1 \leq m \leq k. \quad (3.1.12)$$

При этом порядок ошибки  $\lambda_{m_h} - \lambda_m$  равен квадрату порядка ошибки аппроксимации для  $u_m$ ,  $1 \leq m \leq k$ , а порядок ошибок  $\|u_m - v_h\|_V$  совпадает с порядком ошибки аппроксимации.

В настоящее время существует довольно много методов решения задачи нахождения собственных значений [1, 181, 191, 204, 234]. Условно их можно разделить на три группы:

- связанные с разворачиванием уравнения (3.1.8) в полином с последующим определением его корней;
- основанные на приведении исходной матрицы к диагональному виду с помощью преобразования подобия;
- итерационные, позволяющие получать собственные значения как пределы некоторых числовых последовательностей.

С точки зрения прикладных задач при расчете конструкций наибольший интерес представляет несколько наименьших собственных значений  $\lambda_i$  и соответствующих собственных векторов  $u_i$ , поэтому решается неполная задача о собственных значениях.

Поскольку это нелинейная задача, то естественно использовать итерационные методы. Кроме этого итерационные методы являются оптимальными, так как матрицы жесткости и инерции в прикладных задачах имеют большие порядки, являются ленточными и редко заполненными. Они также дают возможность нахождения решения при относительно малом объеме оперативной памяти ЭВМ, что является важным фактором при использовании персональных ЭВМ при решении сложных прикладных задач. Однако, учитывая это, приходится решать вопросы, связанные с повышением эффективности итерационного процесса.

К этой группе относятся, например, различные видоизменения степенного метода. Повышение эффективности данных алгоритмов требует повышения скорости сходимости. Это возможно путем использования релаксации. При этом возникает задача оптимизации параметра релаксации. Теоретически в общем случае эта задача не решена. В основном выбор параметра релаксации осуществляется на основе численного эксперимента.

Следует отметить, что вычисление минимального собственного числа и соответствующего собственного вектора требует примерно такого же количества итераций, что и решение

системы уравнений с той же матрицей. В работе [319] исследовано применение метода последовательной релаксации для нахождения минимального собственного числа и соответствующего собственного вектора, однако теоретические исследования выбора оптимального параметра релаксации в литературе практически отсутствуют.

Эффективным алгоритмом одновременного вычисления нескольких собственных чисел и собственных векторов для матриц большого порядка является метод итераций в подпространстве [234], являющийся одним из вариантов так называемых ступенчатых методов [147]. Основная идея итерирования подпространства заключается в комбинировании блочных обратных итераций при использовании время от времени сдвигов с аппроксимациями Релея-Ритца на каждом шаге. Одним из недостатков итерирования подпространств является то, что количество неизвестных собственных векторов должно быть выбрано больше, чем число векторов, которые необходимо вычислить в действительности. Увеличение скорости сходимости дает достаточную компенсацию за увеличение количества арифметических операций, но насколько больше необходимо ввести дополнительных векторов, достаточно обоснованного способа нет.

По существу почти каждый известный подход к решению линейных систем приводит к соответствующему итерационному методу для задачи на собственные значения. Так метод последовательной верхней релаксации оказывается очень эффективным для задач, когда треугольное разложение матриц невозможно.

В целом, задача вычисления 3-х — 10-ти собственных частот и соответствующих им собственных форм остается трудоемкой, и вопросы оптимизации алгоритмов являются актуальными. Преимущества итерационных подходов состоят в том, что они не требуют факторизации матриц и применимы к матрицам большой размерности, где факторизация представляется невозможной.

Таким образом, из приведенного выше анализа следует, что



разработка эффективных итерационных методов решения задачи (3.1.8) и повышение эффективности существующих является в настоящее время одной из актуальных задач, связанных с решением прикладных задач на собственные числа.

## 3.2 Колебания пластинчатых систем

Пусть срединная поверхность пластинчатой системы занимает область  $\Omega$ . При расчете собственных частот и собственных форм изгибных колебаний пластинчатой системы предполагается, что деформации изгиба описываются гипотезами Кирхгофа–Лява. Задача о собственных числах и формах колебаний пластинчатой системы в вариационной постановке формулируется, как задача минимизации отношения Релея–Ритца: найти перемещение  $u$ , которое сообщает минимум функционалу

$$\lambda = \min_{u \in V} \frac{P(u)}{T(u)}, \quad (3.2.1)$$

где  $V$  – множество допустимых перемещений. Числитель дроби (3.2.1) с точностью до  $1/2$  равен максимальному во времени значению потенциальной энергии пространственной пластинчатой системы при свободных колебаниях по соответствующей форме. Знаменатель с точностью до  $\lambda^2/2$  равен максимальному во времени значению кинетической энергии. Отношение (3.2.1) служит исходным пунктом для следующих вариационных принципов:

— среди всех возможных значений вектора  $u$  собственными формами колебаний будут те  $u$ , которые сообщают отношению Релея–Ритца стационарные значения;

— вариационный принцип Релея–Ритца – форма колебаний, соответствующая низшей собственной частоте, сообщает отношению (3.2.1) минимальное значение

$$\omega_1^2 = \min_{u \in V} \frac{P(u_1)}{T(u_1)}, \quad (3.2.2)$$

Для определения высших собственных частот и собственных форм служит расширенный принцип Релея: собственная частота  $\omega_k$  удовлетворяет соотношению

$$\omega_k^2 = \min_{u_k \in V_k} \frac{P(u_k)}{T(u_k)}, \quad (3.2.3)$$

где  $V_k$  — подпространство энергетического пространства  $V$ , ортогональное подпространству, базисом которого являются собственные формы  $u_i$  для всех  $i < k$

$$(Bu_i, u_k) = \delta_{ik}. \quad (3.2.4).$$

Вариационные принципы обладают рядом преимуществ по сравнению с другими подходами, в основном теми же, на которые обращалось внимание при рассмотрении статических задач. Поэтому они широко используются при вычислении собственных частот и собственных форм колебаний для прикладных задач с большим числом степеней свободы. В том числе они позволяют строить приближенные решения при помощи кусочно-гладких и, что важно, локальных базисных функций и позволяют исключить из специального рассмотрения естественные граничные условия.

При численном решении задачи (3.2.1) используются вариационно-сеточный метод — бесконечномерное пространство  $V$  заменяется некоторым конечномерным пространством  $V_h \in V$ , и на нем ищется система перемещений, доставляющих минимум отношению Релея-Ритца. Для построения конечномерной задачи искомые функции аппроксимируются базисными функциями с конечным малым носителем [142]. Для этого используются те же методы, что и при решении статических задач, описанных выше. При практическом построении конечномерных пространств наиболее часто используют кусочно-полиномиальные функции, заданные на многоугольниках. Коэффициенты полинома в каждом многоугольнике выбираются таким образом, чтобы обеспечить принадлежность всей функции пространству  $V$ . При этом элемент  $v \in V$  аппроксимируется с порядком  $p$  ( $p > 0$ ), если в  $V_h$  найдется такой элемент

$v_h$ , что

$$\|v - v_h\|_V = O(h^p). \quad (3.2.5)$$

Пусть  $\phi_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, N$  — система базисных функций, где  $i$ -й член принимает в  $i$ -ом узле значение 1, а в остальных узлах сетки обращается в нуль:

$$\phi_i(x) = \delta_{ij}. \quad (3.2.6)$$

Тогда линейная форма

$$v_h = \sum_1^N v_i \phi_i(x), \quad (3.2.7)$$

определяет функцию  $v_h$  всюду в области  $\Omega$  по ее узловым значениям  $v_i$ . От выбора сетки и базисных функций зависят свойства возникающей вариационно-сеточной схемы для данной вариационной задачи. Таким образом, задача (3.1.11) заменяется приближенной

$$\omega_h^2 = \min_{u_h \in V_h} \frac{P(v_h)}{T(v_h)}, \quad (3.2.8)$$

которая, в силу предположения полноты последовательности, сходится при  $h$  стремится к 0 — к решению исходной задачи.

Пусть  $\phi_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, N$  — базис пространства и для  $v_h \in V_h$  справедливо разложение (3.2.7), которое определяет функцию  $v_h$  всюду в области  $\Omega$  по ее узловым значениям,  $v_i$  — компоненты вектора узловых перемещений  $v$ .

Если сформировать функционал

$$F(v_h) = \frac{P(v_h)}{T(v_h)}, \quad v_h \in V_h, \quad (3.2.9)$$

то задача (3.2.9) принимает вид:

$$\omega_h^2 = \min F(v_h), \quad v_h \in V_h. \quad (3.2.10)$$

Учитывая (3.2.10), получим

$$\omega_h^2 = \min F(v), \quad v \in R^N, \quad (3.2.11)$$



где  $R^N$  – пространство  $n$ -мерных векторов, которое определяется следующим образом:  $v \in R^N$  в каждом случае, когда функция  $v_h \in V_h$ . Путем минимизации функционала (3.2.11) на конечномерном пространстве находится приближенное решение. Для этого могут быть использованы различные численные методы.

### 3.3 Сходимость приближенного решения

Во многих практических задачах наиболее важным является первое собственное значение, физически представляющее квадрат первой частоты. Поэтому рассматривается сходимость  $\lambda_1^h$  – первого собственного значения [191] и  $v_1^h$  – соответствующей собственной формы колебаний. Покажем, что наименьшие приближенные собственные числа  $\lambda_1^h$  сходятся к  $\lambda_1$ . Так как  $v_1^h$  сообщает отношению Релея  $I(v_h)$  минимум на энергетическом подпространстве  $V_h$ , то для произвольной функции  $v_h \in V_h$ ,  $\|v\| = 1$  имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda_1^h - \lambda_1 = I(u_1^h) - I(u_1) \leq I(u_h) - I(u_1) = \\ &= [v_h, v_h] - [u_1, u_1] = [u_1 - u_h]^2 + 2[u_h - u_1, u_1] \leq \\ &\leq [u_1 - u_h]^2 + 2[u_h - u_1][u_1] = [u_1 - u_h] + 2\sqrt{\lambda_1}[u_h - u_1] \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

и значит,

$$0 \leq \lambda_1^h - \lambda_1 \leq \inf([u_1 - u_h] + 2\sqrt{\lambda_1}[u_h - u_1]) \rightarrow 0 \quad (3.3.2)$$

при  $h = \max_i |x_i - x_{i-1}| \rightarrow 0$ ,  $v_h \in V_h$  в силу плотности  $V$ .

### 3.4 Метод повышения жесткостей

Как было отмечено, существует большое количество методов решения проблемы собственных значений. Однако, при численной реализации таких методов на ЭВМ, применительно к реальным конструкциям, возникают трудности, связанные,

в первую очередь, с формированием, хранением и выполнением различных операций над глобальными матрицами жесткостей и масс больших размерностей. Например, приведение матриц к диагональному виду, треугольное разложение, различные блочные представления матриц.

В настоящей работе предлагается новый метод определения собственных частот и форм колебаний, основанный на минимизации отношения Релея. Первую частоту находим, как обычно, путем минимизации отношения Релея:

$$\omega_1^2 = \lambda_1 = \inf_{u \in R^N} \frac{(Ku, u)}{(Mu, u)}, \quad (3.4.1)$$

где  $R^N$  — линейное евклидово пространство вещественных векторов;  $(Ku, u)$ ,  $(Mu, u)$  — квадратичные формы, соответствующие амплитудам потенциальной и кинетической энергий системы;  $K$  и  $M$  — линейные самосопряженные положительные операторы.

Для определения более высоких частот и форм во всех ранее известных работах решалась задача минимизации на подпространстве, ортогональном найденным собственным векторам.

Метод, предлагаемый в работе, заключается в том, что для определения следующей частоты к функционалу Релея прибавляется «добавка», определяемая ранее найденными собственными векторами, и образуется новый функционал типа функционала Релея, для которого искомая частота является минимальной. Новый функционал с «добавкой» можно интерпретировать с физической точки зрения, как образование новой механической системы. В этой системе жесткость в направлении ранее определенных собственных векторов увеличивается таким образом, что в направлении искомого собственного вектора жесткость оказывается минимальной, отсюда предложено название — метод повышения жесткостей.

Исследуем метод более детально. Рассмотрим сначала обычную задачу на собственные значения:

$$Au = \lambda u, \quad u \in R^N, \quad (3.4.2)$$

где  $A$  — линейный самосопряженный положительно определенный оператор в  $R^N$ . Поскольку он может быть приведен к диагональному виду и его собственные подпространства взаимно ортогональны, то он является оператором скалярного типа и имеет спектральное разложение [56]:

$$A = \sum_{k=1}^n \lambda_k P_k, \quad (3.4.3)$$

где  $\lambda_k$  — собственные числа;  $P_k$  — соответствующие собственные попарно ортогональные проекторы. Считаем, что собственные числа занумерованы в порядке возрастания. Пусть каким-либо образом найдено минимальное собственное число  $\lambda_1$ . Тогда можно построить новый оператор  $A_1$ :

$$A_1 = \sum_{k=2}^n \lambda_k P_k + c_1 \lambda_1 P_1, \quad (3.4.5)$$

где  $c_1$  — произвольное положительное число, выбранное таким образом, что

$$c_1 \lambda_1 > \lambda_2. \quad (3.4.6)$$

В этом случае у построенного оператора  $A_1$  минимальное собственное число равно  $\lambda_2$ . Используя любой метод, позволяющий находить минимальное число оператора  $A_1$  и соответствующий ему проектор, определяем второе собственное число исходного оператора  $A$ . Этот итерационный процесс может быть повторен столько раз, сколько необходимо найти собственных чисел (или собственных частот).

Рассмотрим обобщенную задачу на собственные значения

$$Ku = \lambda Mu, \quad u \in R^N. \quad (3.4.7)$$

Если свести ее к обычной

$$\tilde{K}v = \lambda v, \quad v \in R^N, \quad (3.4.8)$$

где

$$\tilde{K} = M^{-\frac{1}{2}} K M^{\frac{1}{2}}, \quad v = M^{\frac{1}{2}} u, \quad (3.4.9)$$



то собственный вектор  $\tilde{z}_1$  задачи (3.4.8) определяется следующим образом:

$$\tilde{z}_1 = M^{\frac{1}{2}} z_1. \quad (3.4.10)$$

Соответствующий ему проектор  $\tilde{P}_1$  имеет вид [14]:

$$\tilde{P}_1 = \tilde{z}_1 \tilde{z}_1^* = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \tilde{z}_1 & \tilde{z}_1 \tilde{z}_2 & \dots & \tilde{z}_1 \tilde{z}_n \\ \tilde{z}_2 \tilde{z}_1 & \tilde{z}_2 \tilde{z}_2 & \dots & \tilde{z}_2 \tilde{z}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{z}_n \tilde{z}_1 & \tilde{z}_n \tilde{z}_2 & \dots & \tilde{z}_n \tilde{z}_n \end{pmatrix}, \quad (3.4.11)$$

где  $\tilde{z}_1^*(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \dots, \tilde{z}_n)$  – вектор-строка. Далее, в соответствии с (3.4.5) строим оператор

$$\tilde{K}_1 = \tilde{K} + c\tilde{P}_1, \quad (3.4.12)$$

где  $\tilde{K}_1$  – линейный положительно определенный самосопряженный оператор; коэффициент  $c$  должен заведомо превышать искомое собственное число  $\lambda_2$ . Практически он может быть больше квадрата максимальной из интересующих нас частот. Тогда отношение Релея можно представить в виде:

$$\frac{(\tilde{K}_1 v, v)}{(v, v)} = \frac{(\tilde{K} v, v) + c(\tilde{P}_1 v, v)}{(v, v)}, \quad v \in R^N. \quad (3.4.13)$$

С учетом (3.4.9) и (3.4.11) отношение Релея для определения второго собственного числа и собственного вектора записывается следующим образом:

$$R(u) = \frac{(\tilde{K} u, u) + c(M z_1, u)}{(M u, u)}, \quad v \in R^N. \quad (3.4.14)$$

Аналогично для определения  $l$ -го собственного числа и собственного вектора отношение Релея имеет вид:

$$R(u) = \frac{(\tilde{K} u, u) + c \sum_{k=1}^{l-1} (M z_k, u)}{(M u, u)}, \quad v \in R^N. \quad (3.4.15)$$

Таким образом, определение первой собственной частоты и формы колебаний механической системы сводится к следующей задаче минимизации:

$$\omega_l^2 = \lambda_l = \inf_{u \in R^N} \frac{(\tilde{K}u, u) + c \sum_{k=1}^{l-1} (Mz_k, u)}{(Mu, u)}, \quad v \in R^N. \quad (3.4.16)$$

Из отношения типа Релея (3.4.15) следует, что в процессе вычисления нет необходимости дополнительно строить проекторы, соответствующие найденным собственным векторам, а достаточно хранить в памяти ЭВМ лишь собственные вектора, что существенно упрощает его знаменатель. Это позволяет находить спектр собственных частот и форм с меньшими вычислительными затратами по сравнению с традиционным подходом. Кроме этого, предложенный метод, является, по существу, методом нахождения минимума, что позволяет избежать процесса ортогонализации, который может быть неустойчивым.

### 3.5 Свободные колебания пластин в своей плоскости

Рассмотрим пластину толщиной  $t$ , срединная поверхность  $\Omega$  которой с границей  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$  расположена в плоскости  $OXY$ . Для рассматриваемой задачи амплитудные величины потенциальной и кинетической энергий имеют вид:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \int_{\Omega} [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2 + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \\ + \frac{1-\nu}{2} (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})^2] dx dy; \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{\gamma t}{g} \int_{\Omega} (u^2 + v^2) dx dy, \quad (3.5.2)$$

где  $u, v$  — компоненты перемещений,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\gamma$  — плотность материала,  $g$  — ускорение свободного падения. Осуществим дискретизацию области  $\Omega$  на конечное число треугольников  $\Omega \cup_n \Omega_n$ . Вершины каждого треугольника занумерованы против хода часовой стрелки  $i, j, k$ . Перемещения  $u, v$  в пределах каждого треугольника зададим в виде линейных функций от координат [142]

$$u_h = \frac{1}{2\Delta}[(a_i + b_i + c_i)u_i + (a_j + b_j + c_j)u_j + (a_k + b_k + c_k)u_k]; \quad (3.5.3)$$

$$v_h = \frac{1}{2\Delta}[(a_i + b_i + c_i)v_i + (a_j + b_j + c_j)v_j + (a_k + b_k + c_k)v_k]; \quad (3.5.4)$$

где  $2\Delta$  — удвоенная площадь треугольника,

$$a_i = x_i y_k - x_k y_i; b_i = y_i - y_k; c_i = x_k - x_j. \quad (3.5.6)$$

Коэффициенты  $a, b, c$  с другими индексами получаются с помощью циклической перестановки индексов. Поскольку при приращении  $\lambda_i^{k+1}$  изменяется потенциальная и кинетическая энергии треугольников, связанных с  $i$ -м узлом, учитываем вклад в квадратичные формы только от этих треугольников. Амплитудные величины потенциальной и кинетической энергий с учетом (3.5.3), (3.5.4) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \Pi_h = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \frac{Et}{4\Delta(1-\nu^2)} & [(b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k)^2 + (c_i v_i + c_j v_j + c_k v_k)^2 + \\ & + 2\nu(b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k)(c_i v_i + c_j v_j + c_k v_k) + \\ & + \frac{1-\nu}{2}(b_i v_i + b_j v_j + b_k v_k + c_i u_i + c_j u_j + c_k u_k)]; \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

$$\begin{aligned} T_h = \frac{1}{12} \frac{\gamma t}{g} \Delta \sum_{i=1}^M & (u_i^2 + u_j^2 + u_k^2 + u_i u_j + u_j u_k + u_k u_i + \\ & + v_i^2 + v_j^2 + v_k^2 + v_i v_j + v_j v_k + v_k v_i), \end{aligned} \quad (3.5.8)$$



где  $M$  — количество треугольников, связанных с  $i$ -м узлом, т. е. суммирование осуществляется по треугольникам, окружающим  $i$ -й узел. Первые и вторые производные, необходимые для реализации МПС от потенциальной и кинетической энергий, имеют вид:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = u_i \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i^2} + v_i \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial v_i} + \sum_{m=1}^M \frac{1}{4\Delta} \frac{Et}{(1-\nu^2)} [b_i(b_j u_j + b_k u_k) + \frac{1-\nu}{2} c_i(c_j u_j + c_k u_k + b_j v_j + b_k v_k) + \nu b_i(c_j u_j + c_k v_k)]; \quad (3.5.9)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_i} = v_i \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v_i^2} + u_i \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial v_i} + \sum_{m=1}^M \frac{1}{4\Delta} \frac{Et}{(1-\nu^2)} [c_i(c_j v_j + c_k v_k) + \frac{1-\nu}{2} b_i(c_j u_j + c_k u_k + b_j v_j + b_k v_k) + \nu c_i(b_j u_j + b_k u_k)]; \quad (3.5.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial u_i} = \frac{1}{12} \frac{\gamma t}{g} \Delta \sum_{i=1}^M (2u_i + u_i + u_k); \quad (3.5.11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial v_i} = \frac{1}{12} \frac{\gamma t}{g} \Delta \sum_{i=1}^M (2v_i + v_i + v_k); \quad (3.5.12)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i^2} = \frac{Et}{1-\nu^2} \sum_{m=1}^M \frac{1}{4\Delta} (b_i^2 + \frac{1-\nu}{2} c_i^2); \quad (3.5.13)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial v_i^2} = \frac{Et}{1-\nu^2} \sum_{m=1}^M \frac{1}{4\Delta} (c_i^2 + \frac{1-\nu}{2} b_i^2); \quad (3.5.14)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u_i^2} = \sum_{m=1}^M \frac{1}{6} \frac{\gamma t}{g} \Delta; \quad (3.5.15)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial v_i^2} = \sum_{m=1}^M \frac{1}{6} \frac{\gamma t}{g} \Delta; \quad (3.5.16)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial v_i} = \frac{Et}{1 - \nu^2} \sum_{m=1}^M \frac{1}{4\Delta} \frac{1 + \nu}{2} b_i c_i. \quad (3.5.17)$$

### 3.6 Изгибные колебания пластин

Рассмотрим пластинку толщиной  $t$ , срединная поверхность которой расположена в плоскости  $OXY$ . В классической теории изгиба пластин [310] амплитудные величины потенциальной и кинетической энергий имеют вид:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2(1 + \nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy; \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\gamma t}{g} w^2 dx dy, \quad (3.6.2)$$

где  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  — цилиндрическая жесткость пластины,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $t$  — толщина пластины,  $\gamma$  — плотность материала,  $g$  — ускорение свободного падения.

Осуществим дискретизацию  $\Omega$  на конечное число треугольников  $\Omega_n \cup \Omega$ . Вершины каждого треугольника  $i, j, k$  занумеруем против часовой стрелки. Тогда прогиб в пределах каждого треугольника зададим в виде [142].

$$\begin{aligned} w_k = a_1 L_i + a_2 L_j + a_3 L_k + a_4 L_i^2 L_j + a_5 L_j^2 L_k + a_6 L_j^2 L_i + \\ + a_7 L_j^2 L_k + a_8 L_k^2 L_i + a_9 L_k^2 L_j + a_{10} L_i L_j L_k, \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

где  $L_i, L_j, L_k$  —  $L$ -координаты и

$$a_1 = w_i; a_2 = w_j; a_3 = w_k;$$

$$\begin{aligned}
a_4 &= w_i - w_j - b_k \phi_i - c_k \psi_i; \\
a_5 &= w_i - w_k - b_j \phi_i - c_j \psi_i; \\
a_6 &= w_j - w_i - b_k \phi_j - c_k \psi_j; \\
a_7 &= w_j - w_k - b_i \phi_j - c_i \psi_j; \\
a_8 &= w_k - w_i - b_j \phi_k - c_j \psi_k; \\
a_9 &= w_k - w_j - b_i \phi_k - c_i \psi_k; \\
a_{10} &= \frac{1}{4} \sum_{s=4}^9 a_s,
\end{aligned} \tag{3.6.4}$$

где  $\phi_i = (\frac{\partial w}{\partial y})_i$ ;  $\psi_i = -(\frac{\partial w}{\partial x})_i$  — углы поворота пластины соответственно вокруг осей  $x$  и  $y$  в  $i$ -ом узле,

$$b_i = y_i - y_k; c_i = x_k - x_j. \tag{3.6.5}$$

Аппроксимация (3.6.3) обеспечивает непрерывность углов поворота в узлах. Поскольку при задании  $w_k$  использовано девять независимых коэффициентов  $a_1, \dots, a_9$ , то аппроксимация (3.6.3) представляет собой неполный кубический полином. Амплитудное значение потенциальной энергии треугольников с учетом (3.6.3) имеет вид:

$$\begin{aligned}
\Pi_h &= \sum_{m=1}^M \frac{D}{48\Delta^3} \{ A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_1 + \\
&\quad + B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + B_1 B_2 + B_2 B_3 + B_3 B_1 + \\
&\quad + \nu [2(A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3) + A_1 B_2 + A_2 B_1 + \\
&\quad + A_2 B_3 + A_3 B_2 + A_3 B_1 + A_1 B_3] + \\
&\quad + 2(1 - \nu)(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1) \}, \tag{3.6.6}
\end{aligned}$$

где суммирование осуществляется по всем треугольникам,  $\Delta$  — площадь треугольника и

$$A_1 = b_j^2 a_3 + b_k^2 a_5 + 2(b_i b_j a_1 + b_j b_k a_4 + b_i b_k a_2); \tag{3.6.7}$$



$$A_2 = b_i^2 a_1 + b_k^2 a_6 + 2(b_i b_j a_3 + b_j b_k a_4 + b_i b_k a_7); \quad (3.6.8)$$

$$A_3 = b_i^2 a_2 + b_j^2 a_4 + 2(b_i b_j a_7 + b_j b_k a_6 + b_i b_k a_6); \quad (3.6.9)$$

$$B_1 = c_i^2 a_3 + c_k^2 a_5 + 2(c_i c_j a_1 + c_j c_k a_4 + c_i c_k a_2); \quad (3.6.10)$$

$$B_2 = c_i^2 a_1 + c_k^2 a_6 + 2(c_i c_j a_3 + c_j c_k a_4 + c_i c_k a_7); \quad (3.6.11)$$

$$B_3 = c_i^2 a_2 + c_j^2 a_4 + 2(c_i c_j a_7 + c_j c_k a_6 + c_i c_k a_5); \quad (3.6.12)$$

$$C_1 = b_j c_j a_3 + b_k c_k a_5 + p_1 a_1 + p_2 a_7 + p_3 a_2; \quad (3.6.13)$$

$$C_2 = b_i c_i a_1 + b_k c_k a_6 + p_1 a_3 + p_2 a_4 + p_3 a_7; \quad (3.6.14)$$

$$C_3 = b_i c_i a_2 + b_j c_j a_4 + p_1 a_7 + p_2 a_6 + p_3 a_5; \quad (3.6.15)$$

$$p_1 = b_i c_j + b_j c_i, p_2 = b_j c_k + b_k c_j; \quad (3.6.16)$$

$$p_3 = b_k c_i + b_i c_k. \quad (3.6.17)$$

Амплитудное значение кинетической энергии имеет вид:

$$\begin{aligned} T_h = & \frac{1}{12} \frac{\gamma t}{g} \sum_{m=1}^M \{w_i^2 + w_j^2 + w_k^2 + w_i w_j + w_j w_k + w_i w_k + \\ & + \frac{1}{70} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2) + \\ & + \frac{1}{15} [w_i (3a_1 + 3a_2 + 2a_3 + a_4 + 2a_5 + a_6 + 2a_7) + \\ & + w_j (2a_1 + a_2 + 3a_3 + 3a_4 + a_5 + 2a_6 + 2a_7) + \\ & + w_k (a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 + 3a_5 + 3a_6 + 2a_7)] + \\ & + \frac{1}{420} [a_1 (6a_2 + 9a_3 + 3a_4 + 3a_5 + 2a_6 + 6a_7) + \\ & + a_2 (3a_3 + 2a_4 + 9a_5 + 3a_6 + 6a_7) + a_3 (6a_4 + 2a_5 + 3a_6 + 6a_7) + \\ & + a_4 (3a_5 + 9a_6 + 6a_7) + 6a_5 (a_6 + a_7) + 6a_5 a_6 a_7]\}. \quad (3.6.18) \end{aligned}$$

Первые и вторые производные амплитудных величин, необходимых для реализации алгоритма МПС, от потенциальной и кинетической энергий имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial w_i} = \sum_{m=1}^M \frac{D}{48\Delta^3} \sum_{s=1}^3 \left[ \frac{\partial A_s}{\partial w_i} (R_s + \nu P_s) + \right. \\ \left. + \frac{\partial B_s}{\partial w_i} (P_s + \nu R_s) + 2(1 - \nu) \frac{\partial C_s}{\partial w_i} D_s \right]; \end{aligned} \quad (3.6.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \phi_i} = \sum_{m=1}^M \frac{D}{48\Delta^3} \sum_{s=1}^3 \left[ \frac{\partial A_s}{\partial \phi_i} (R_s + \nu P_s) + \right. \\ \left. + \frac{\partial B_s}{\partial \phi_i} (P_s + \nu R_s) + 2(1 - \nu) \frac{\partial C_s}{\partial \phi_i} D_s \right]; \end{aligned} \quad (3.6.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \psi_i} = \sum_{m=1}^M \frac{D}{48\Delta^3} \sum_{s=1}^3 \left[ \frac{\partial A_s}{\partial \psi_i} (R_s + \nu P_s) + \right. \\ \left. + \frac{\partial B_s}{\partial \psi_i} (P_s + \nu R_s) + 2(1 - \nu) \frac{\partial C_s}{\partial \psi_i} D_s \right]; \end{aligned} \quad (3.6.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \phi_i} = \sum_{m=1}^M \frac{\gamma t}{g} \frac{\Delta}{5040} \{ 12a_2 b_j - 12a_1 b_k + (b_j + b_k) [2a_7 + 98w_i + \\ + 1, 5(a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)] - b_k (6a_2 + 9a_3 + 3a_4 + 3a_5 + 2a_6 + 6a_7) + \\ + 0, 5a_1 (15b_j - 3b_k) + b_j (3a_3 + 2a_4 + 9a_5 + 3a_6 + 6a_7) \}; \end{aligned} \quad (3.6.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \psi_i} = \sum_{m=1}^M \frac{\gamma t}{g} \frac{\Delta}{5040} \{ 12a_2 c_j - 12a_1 b_k + (c_j + c_k) [2a_7 + 98w_i + \\ + 1, 5(a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)] - c_k (6a_2 + 9a_3 + 3a_4 + 3a_5 + 2a_6 + 6a_7) + \\ + 0, 5a_1 (15c_j - 3c_k) + c_j (3a_3 + 2a_4 + 9a_5 + 3a_6 + 6a_7) \}; \end{aligned} \quad (3.6.23)$$

$$\frac{\partial T}{\partial w_i} = \sum_{m=1}^M \frac{\gamma t}{g} \Delta [2w_i + w_j + w_k + \frac{1}{15} (2w_i - w_j - w_k) +$$

$$+ \frac{1}{420}(90a_1 + 90a_2 + 54a_3 + 24a_4 + 54a_5 + 24a_6 + 56a_7)]; \quad (3.6.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial w_i^2} = & \sum_{m=1}^M \frac{D}{48\Delta^3} \sum_{s=1}^3 \left[ \frac{\partial A_s}{\partial w_i} \left( \frac{\partial R_s}{\partial w_i} + \nu \frac{\partial P_s}{\partial w_i} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial B_s}{\partial w_i} \left( \frac{\partial P_s}{\partial w_i} + \nu \frac{\partial R_s}{\partial w_i} \right) + 2(1 - \nu) \frac{\partial C_s}{\partial w_i} D_s; \right] \end{aligned} \quad (3.6.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \phi_i^2} = & \sum_{m=1}^M \frac{D}{48\Delta^3} \sum_{s=1}^3 \left[ \frac{\partial A_s}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial R_s}{\partial \phi_i} + \nu \frac{\partial P_s}{\partial \phi_i} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial B_s}{\partial \phi_i} \left( \frac{\partial P_s}{\partial \phi_i} + \nu \frac{\partial R_s}{\partial \phi_i} \right) + 2(1 - \nu) \frac{\partial C_s}{\partial \phi_i} D_s; \right] \end{aligned} \quad (3.6.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \psi_i^2} = & \sum_{m=1}^M \frac{D}{48\Delta^3} \sum_{s=1}^3 \left[ \frac{\partial A_s}{\partial \psi_i} \left( \frac{\partial R_s}{\partial \psi_i} + \nu \frac{\partial P_s}{\partial \psi_i} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial B_s}{\partial \psi_i} \left( \frac{\partial P_s}{\partial \psi_i} + \nu \frac{\partial R_s}{\partial \psi_i} \right) + 2(1 - \nu) \frac{\partial C_s}{\partial \psi_i} D_s; \right] \end{aligned} \quad (3.6.27)$$

$$\begin{aligned} R_1 = 2A_1 + A_2 + A_3; \quad R_2 = A_1 + 2A_2 + A_3; \\ R_3 = A_1 + A_2 + 2A_3; \end{aligned} \quad (3.6.28)$$

$$\begin{aligned} P_1 = 2B_1 + B_2 + B_3; \quad P_2 = B_1 + 2B_2 + B_3; \\ P_3 = B_1 + B_2 + 2B_3; \end{aligned} \quad (3.6.29)$$

$$\begin{aligned} D_1 = 2C_1 + C_2 + C_3; \quad D_2 = C_1 + 2C_2 + C_3; \\ D_3 = C_1 + C_2 + 2C_3; \end{aligned} \quad (3.6.30)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial w_i^2} = \sum_{m=1}^M \frac{\gamma t}{12g} \Delta \frac{242}{105}; \quad (3.6.31)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \phi_i^2} = \sum_{m=1}^M \frac{\gamma t}{g} \frac{\Delta}{5040} [15(b_j^2 + b_k^2) + \frac{1}{2}(b_j - b_k)^2 - 18b_j b_k]; \quad (3.6.32)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \psi_i^2} = \sum_{m=1}^M \frac{\gamma t}{g} \frac{\Delta}{5040} [15(c_j^2 + c_k^2) + \frac{1}{2}(c_j - c_k)^2 - 18c_j c_k]. \quad (3.6.33)$$



### 3.7 Колебания пластинчато-оболочечных конструкций

Пусть срединная поверхность пространственной системы занимает область  $\Omega$ . Выберем для нее глобальную систему координат  $OXYZ$  и осуществим дискретизацию  $\Omega$  на конечное число треугольников  $\Omega = \cup \Omega_n$ . Введем в рассмотрение локальную систему координат  $ox\hat{y}z$  так, чтобы срединная поверхность каждого треугольника лежала в плоскости  $ox\hat{y}$ . Тогда потенциальная энергия каждого треугольника состоит из независимых между собой энергий плоского напряженного состояния и энергии изгиба. Аналогичную структуру имеет кинетическая энергия. Для аппроксимации перемещений в пределах каждого треугольника воспользуемся ранее приведенными зависимостями в локальных координатах. Перемещение срединной плоскости  $\hat{u}_h$  и  $\hat{v}_h$  зададим в виде линейных зависимостей от координат  $\hat{x}$  и  $\hat{y}$  (3.5.3), (3.5.4) и прогиб  $\hat{w}_h$  — в виде (3.6.1). Тогда потенциальная и кинетическая энергия каждого треугольника  $\Omega_n$  запишутся в локальной системе координат в виде

$$\hat{P}_h(\hat{u}_i, \dots, \hat{\psi}_i) = \hat{P}_h(\hat{u}_i, \hat{v}_i) + \hat{P}_h(\hat{w}_i, \hat{\phi}_i, \hat{\psi}_i), \quad (3.7.1)$$

$$\hat{T}_h(\hat{u}_i, \dots, \hat{\psi}_i) = \hat{T}_h(\hat{u}_i, \hat{v}_i) + \hat{T}_h(\hat{w}_i, \hat{\phi}_i, \hat{\psi}_i), \quad (3.7.2)$$

где узловыми неизвестными являются перемещения  $\hat{u}_i, \hat{v}_i, \hat{w}_i$  в направлении локальных осей  $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i$  и поворота нормали  $\hat{\phi}_i, \hat{\psi}_i$  относительно осей  $\hat{x}_i, \hat{y}_i$  соответственно. Выражение для  $\hat{P}_h, \hat{P}_h, \hat{T}_h, \hat{T}_h$  приведены ранее.

Выбирая в качестве узловых неизвестных перемещения  $u_i, v_i, w_i$ , в направлении глобальных осей  $x, y, z$  и  $\phi_i, \psi_i, \gamma_i$  и углы поворота вокруг осей  $x, y, z$  соответственно, преобразуем их к глобальным координатам. Для этого воспользуемся следующим преобразованием:

$$\hat{u}_i = u_i \cos(\hat{x}, x) + v_i \cos(\hat{x}, y) + w_i \cos(\hat{x}, z),$$

$$\hat{v}_i = u_i \cos(\hat{y}, x) + v_i \cos(\hat{y}, y) + w_i \cos(\hat{y}, z),$$

$$\hat{w}_i = u_i \cos(\hat{z}, x) + v_i \cos(\hat{z}, y) + w_i \cos(\hat{z}, z),$$

$$\hat{\phi}_i = \phi_i \cos(\hat{x}, x) + \psi_i \cos(\hat{x}, y) + \gamma_i \cos(\hat{x}, z),$$

$$\hat{\psi}_i = \phi_i \cos(\hat{y}, x) + \psi_i \cos(\hat{y}, y) + \gamma_i \cos(\hat{y}, z). \quad (3.7.3)$$

Подставляя (3.64) в  $\hat{P}_h(\hat{u}_i, \dots, \hat{\psi}_i)$  и (3.7.3) в  $\hat{T}_h(\hat{u}_i, \dots, \hat{\psi}_i)$ , получим

$$\hat{P}_h(\hat{u}_i, \dots, \hat{\psi}_i) = \hat{P}_h(u_i, v_i, w_i) + \hat{P}_h(u_i, \dots, \gamma_i), \quad (3.7.4)$$

$$\hat{T}_h(\hat{u}_i, \dots, \hat{\psi}_i) = \hat{T}_h(u_i, v_i, w_i) + \hat{T}_h(u_i, \dots, \gamma_i). \quad (3.7.5)$$

Суммируя  $\hat{P}_h(u_i, \dots, \gamma_i)$  и  $\hat{T}_h(u_i, \dots, \gamma_i)$  по всем треугольникам  $\Omega_n$ , получим выражение для потенциальной и кинетической энергий в глобальных координатах.

Определение локальных координат  $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i$  осуществляется аналогично (3.7.5). Если начало локальной и глобальной систем координат совпадают, то

$$\hat{x}_i = x_i \cos(\hat{x}, x) + y_i \cos(\hat{x}, y) + z_i \cos(\hat{x}, z),$$

$$\hat{y}_i = x_i \cos(\hat{y}, x) + y_i \cos(\hat{y}, y) + z_i \cos(\hat{y}, z),$$

$$\hat{z}_i = x_i \cos(\hat{z}, x) + y_i \cos(\hat{z}, y) + z_i \cos(\hat{z}, z). \quad (3.7.6)$$

Поскольку потенциальная и кинетическая энергии треугольника инвариантны относительно положения начала координат, преобразования (3.7.6) всегда достаточны для определения локальных координат в плоскости треугольника. Вычисление направляющих косинусов осуществляется согласно методике работы [142]. Ось  $\hat{x}$  направляется вдоль стороны треугольника  $ij$ , глобальные координаты которой определяются соотношениями

$$x_{ji} = x_j - x_i; y_{ji} = y_j - y_i; z_{ji} = z_j - z_i. \quad (3.7.7)$$

Тогда

$$\cos(\hat{x}, x) = \frac{x_{ji}}{l_{ji}};$$

$$\begin{aligned}\cos(\hat{x}, y) &= \frac{y_{ji}}{l_{ji}}; \\ \cos(\hat{x}, z) &= \frac{z_{ji}}{l_{ji}}; \\ l_{ji} &= (x_{ji}^2 + y_{ji}^2 + z_{ji}^2)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\quad (3.7.8)$$

Поскольку ось  $\hat{z}$  направлена перпендикулярно плоскости треугольника, то в соответствии со свойствами векторного произведения, направление  $\hat{z}$  можно определить как векторное произведение векторов, направленных вдоль сторон треугольника  $ij$  и  $ji$ . Длина соответствующего вектора равна удвоенной площади треугольника. Таким образом,

$$\begin{aligned}2\Delta &= [(y_{ji}z_{ki} - z_{ji}y_{ki})^2 + (z_{ji}x_{ki} - x_{ji}z_{ki})^2 + \\ &+ (x_{ji}y_{ki} - y_{ji}x_{ki})^2]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\quad (3.7.9)$$

Тогда направляющие косинусы оси  $\hat{x}$  определяются соотношением

$$\begin{aligned}\cos(\hat{z}, x) &= \frac{1}{2\Delta}(y_{ji}z_{ki} - z_{ji}y_{ki}); \\ \cos(\hat{z}, y) &= \frac{1}{2\Delta}(z_{ji}x_{ki} - x_{ji}z_{ki}); \\ \cos(\hat{z}, z) &= \frac{1}{2\Delta}(x_{ji}y_{ki} - y_{ji}x_{ki}).\end{aligned}\quad (3.7.10)$$

Направляющие косинусы оси  $\hat{y}$  получаются как направляющие косинусы вектора, перпендикулярного одновременно осям  $\hat{x}$  и  $\hat{z}$

$$\begin{aligned}\cos(\hat{y}, x) &= \cos(\hat{z}, y)\cos(\hat{x}, z) - \cos(\hat{z}, z)\cos(\hat{x}, y), \\ \cos(\hat{y}, y) &= \cos(\hat{z}, z)\cos(\hat{x}, x) - \cos(\hat{z}, x)\cos(\hat{x}, z), \\ \cos(\hat{y}, z) &= \cos(\hat{z}, x)\cos(\hat{x}, y) - \cos(\hat{z}, y)\cos(\hat{x}, x).\end{aligned}\quad (3.7.11)$$

Если все треугольники, окружающие  $i$ -й узел, компланарны, то матрица жесткости и матрица масс становятся вырожденными. Существует несколько способов обойти эти трудности.



Один из них предполагает приближенный метод, в котором система фиктивных коэффициентов жесткости и масс задается для треугольников как компланарных, так и некомпланарных. В этом случае решение задачи находится минимизацией некоторого функционала  $F^\alpha(u_i, \dots, \gamma_i)$  близкого к  $F(u_i, \dots, \gamma_i)$ .

### 3.8 Колебания трехслойных пластин

Выражение амплитуды кинетической энергии трехслойной конструкции имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 \rho_n \int_{V_n} (\partial U^{(n)})^2 + (\partial U^{(n)})^2 + (\partial U^{(n)})^2 dV_n,$$

где  $\rho_n$ ,  $n = 1, 2, 3$  – плотности материалов слоев;  $u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}$  – перемещения точек слоев относительно осей  $x, y, z$ . Тогда функционал приведенной кинетической энергии можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 T^{(n)} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 \rho_n \int_{V_n} (u^{(n)})^2 + (v^{(n)})^2 + (w^{(n)})^2 dV_n. \end{aligned} \quad (3.8.1)$$

Используя гипотезы о линейном распределении перемещений по толщине слоев, а также учитывая принятые аппроксимации перемещений точек несущих слоев и заполнителя в пределах трехслойного треугольника, получим выражение для конечномерных функционалов  $T_h^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Для тонких несущих слоев  $n = 1, 2$  имеем

$$T_h^{(n)} = \frac{1}{12} \rho_n h_n \Delta \sum_{m=1}^M \sum_{i,j=1}^3 \{ (1 + \delta_{ij}) (u_i^{(n)} u_j^{(n)} + v_i^{(n)} v_j^{(n)} +$$

$$\begin{aligned}
& +w_i^{(n)}w_j^{(n)}) + \frac{1}{70} \sum_{i,j=1}^6 \delta_{ij}(a_i^{(n)}a_j^{(n)} + \frac{1}{107}(a_7^{(n)})^2 \frac{1}{15}[w_1^{(n)}(3a_1^{(n)} + \\
& +3a_2^{(n)} + 2a_3^{(n)} + a_4^{(n)} + 2a_5^{(n)} + a_6^{(n)} + 2a_7^{(n)}) + \\
& +w_2^{(n)}(2a_1^{(n)} + a_2^{(n)} + 3a_3^{(n)} + 3a_4^{(n)} + a_5^{(n)} + 2a_6^{(n)} + 2a_7^{(n)}) + \\
& +w_3^{(n)}(a_1^{(n)} + 2a_2^{(n)} + a_3^{(n)} + 2a_4^{(n)} + 3a_5^{(n)} + 3a_6^{(n)} + 2a_7^{(n)})] + \\
& + \frac{1}{420}[a_1^{(n)}(6a_2^{(n)} + 9a_3^{(n)} + 3a_4^{(n)} + 3a_5^{(n)} + 2a_6^{(n)} + 6a_7^{(n)}) + a_2^{(n)}(3a_3^{(n)} + \\
& + 2a_4^{(n)} + 9a_5^{(n)} + 3a_6^{(n)} + 6a_7^{(n)}) + \\
& + a_3^{(n)}(6a_4^{(n)} + 2a_5^{(n)} + 3a_6^{(n)} + 6a_7^{(n)}) + a_4^{(n)}(3a_5^{(n)} + \\
& + 9a_6^{(n)} + 6a_7^{(n)}) + 6a_5^{(n)}(a_6^{(n)} + a_7^{(n)}) + 6a_6^{(n)}a_7^{(n)}] \}. \quad (3.8.2)
\end{aligned}$$

Если принять  $n = 1$ , то получим конечномерный функционал приведенной кинетической энергии для однородной пластины. Для сжимаемого заполнителя функционал  $T_h$  имеет вид:

$$\begin{aligned}
T_h^{(3)} &= \frac{1}{24} \rho_3 h_3 \sum_{m=1}^M \sum_{j,k=1}^3 \Delta(1 + \delta_{jk})(k_j k_k + 3u_j^{(1)} u_k^{(2)}) + \\
& + \frac{1}{20}(k_k(D_2 + 2A_k) + k_1(B_1 + B_2) + k_2(B_1 + B_3) + \\
& + k_3(B_2 + B_3)) + \frac{1}{240\Delta}(D_1 + 2M_1 + J(A_j + B_j + J)) + \\
& + \frac{1}{60\Delta}(k_k(D_2 + 2A_k) + k_1(B_1 + B_2) + k_2(B_1 + B_3) + k_3(B_2 + B_3)) + \\
& + \frac{1}{720\Delta}(D_1 + 2M_1 + J(A_j + B_j + 3J)) + \Delta(1 + \delta_{jk})(l_j l_k + 3v_j^{(1)} v_k^{(2)}) + \\
& + \frac{1}{20}(l_k(D_4 + 2C_k) + l_1(P_1 + P_2) + l_2(P_1 + P_3) + l_3(P_2 + P_3)) + \\
& + \frac{1}{240\Delta}(D_3 + 2N_1 + K(C_j + P_j + K)) + \frac{1}{60\Delta}(l_k(D_4 + 2C_k) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +l_1(P_1 + P_2) + l_2(P_1 + P_3) + l_3(P_2 + P_3)) + \\
& + \frac{1}{720\Delta}(D_3 + 2N_1 + K(C_j + P_j + 3K)) + \\
& + \frac{\Delta}{12}(1 + \delta_{jk})(3n_j n_k + m_j m_k)\}; \quad (3.8.3)
\end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} h_n (b_1 a_1^{(n)} + b_3 a_2^{(n)}); \\
A_2 &= \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} h_n (b_1 a_3^{(n)} + b_3 a_4^{(n)}); \\
A_3 &= \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} h_n (b_1 a_5^{(n)} + b_2 a_6^{(n)}); \\
B_1 &= \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} h_n (b_1 a_1^{(n)} + b_2 a_3^{(n)} + b_3 a_7^{(n)}); \\
B_2 &= \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} h_n (b_1 a_2^{(n)} + b_2 a_7^{(n)} + b_3 a_5^{(n)}); \\
B_3 &= \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} h_n (b_1 a_7^{(n)} + b_2 a_4^{(n)} + b_3 a_7^{(n)}); \\
J &= \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} h_n \sum_{i=1}^3 b_i w_i^{(n)}; \\
C_1 &= \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} h_n (c_1 a_1^{(n)} + c_3 a_2^{(n)}); \quad (3.8.4) \\
C_2 &= \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} h_n (c_1 a_3^{(n)} + c_3 a_4^{(n)});
\end{aligned}$$



$$C_3 = \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} h_n (c_1 a_5^{(n)} + c_3 a_6^{(n)});$$

$$P_1 = \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} h_n (c_1 a_1^{(n)} + c_2 a_3^{(n)} + c_3 a_7^{(n)});$$

$$P_2 = \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} h_n (c_1 a_2^{(n)} + c_2 a_7^{(n)} + c_3 a_5^{(n)});$$

$$K = \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} h_n \sum_{i=1}^3 c_i w_i^{(n)};$$

$$D_1 = \sum_{j,k=1}^3 0,5(1 + \delta_{jk})(A_j A_k + 2B_j B_k) + 2A_j A_k + 3A_j B_k;$$

$$D_2 = \sum_{j=1}^3 A_j + B_j + 10J;$$

$$D_3 = \sum_{j,k=1}^3 0,5(1 + \delta_{jk})(C_j C_k + 2P_j P_k) + 2C_j C_k + 3C_j P_k;$$

$$D_4 = \sum_{j=1}^3 C_i + P_j + 10K; \quad (3.8.5)$$

$$M_1 = A_2 B_2 + A_1 B_3 + A_3 B_1;$$

$$N_1 = C_2 P_2 + C_1 P_3 + C_3 P_1;$$

$$k_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)}; l_i = v_i^{(1)} + v_i^{(2)}, i = 1, 2, 3.$$

Коэффициенты  $k_i, l_i, n_i, m_i$   $i = 1, 2, 3$ , в (3.8.3) и (3.8.5) определяются из выражений (2.4.17) и (2.4.18). Если параметры трехслоя таковы, что заполнитель можно считать несжимаемым в поперечном направлении, то коэффициенты (3.8.4) примут следующие значения:

$$A_1 = h(b_1 a_1 + b_3 a_2);$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= h(b_1 a_3 + b_3 a_4); \\
A_3 &= h(b_1 a_5 + b_2 a_6); \\
B_1 &= h(b_1 a_1 + b_2 a_3 + b_3 a_7); \\
B_2 &= h(b_1 a_2 + b_2 a_7 + b_3 a_5); \\
B_3 &= h(b_1 a_7 + b_2 a_4 + b_3 a_6);
\end{aligned} \tag{3.8.6}$$

$$J = h \sum_{i=1}^3 b_i w_i^{(n)};$$

$$C_1 = h(c_1 a_1 + c_3 a_2);$$

$$C_2 = h(c_1 a_3 + c_3 a_4);$$

$$C_3 = h(c_1 a_5 + c_2 a_6);$$

$$P_1 = h(c_1 a_1 + c_2 a_3 + c_3 a_7);$$

$$P_2 = h(c_1 a_2 + c_2 a_7 + c_3 a_5);$$

$$P_3 = h(c_1 a_7 + c_2 a_4 + c_3 a_6);$$

$$K = h \sum_{i=1}^3 c_i w_i^{(n)};$$

$$h = h_1 - h_2.$$

Коэффициенты  $k_i, l_i, n_i, m_i, A_i, B_i, C_i, P_i, i = 1, 2, 3$  в случае несжимаемого заполнителя определяются из (2.4.18).

### 3.9 Пространственные конструкции

Пусть срединная поверхность трехслойной пластинчато-оболочечной системы занимает область  $\Omega \in R^3$ . Выберем для нее глобальную систему координат  $oxyz$  и осуществим дискретизацию на конечное число треугольных трехслойных подобластей  $\Omega = \cup_N \Omega_N$ . Также, как и при решении задач статики, введем в рассмотрение локальную систему координат  $\hat{o}\hat{x}\hat{y}\hat{z}$

так, чтобы срединная поверхность каждого треугольника лежала в плоскости. Перемещения точек срединных поверхностей несущих слоев и заполнителя в локальных координатах зададим, соответственно, в виде (2.4.7), (2.4.11). Тогда потенциальная и приведенная кинетическая энергия каждого трехслойного треугольника запишется в локальной системе координат в виде:

$$\Pi_h = \sum_{n=1}^3 U_h^{(n)}, \quad T_h = \sum_{n=1}^3 T_h^{(n)}, \quad (3.9.1)$$

где  $\Pi_h^{(n)}$ , и  $T_h^{(n)}$ ,  $n = 1, 2, 3$  — энергии несущих слоев и заполнителя в треугольнике, а узловыми неизвестными являются перемещения точек срединных поверхностей несущих слоев  $u_i^{(n)}, v_i^{(n)}, w_i^{(n)}$  в направлении локальных осей  $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$  и повороты нормали  $\varphi_i^{(n)}, \psi_i^{(n)}$  относительно локальных осей  $\hat{x}, \hat{y}$  соответственно. Выражения для потенциальных и кинетических энергий несущих слоев и заполнителя приведены ранее (2.4.16), (2.4.17). Выбирая в качестве узловых неизвестных перемещения  $u_i^{(n)}, v_i^{(n)}, w_i^{(n)}$  в направлении глобальных осей  $x, y, z$  и повороты  $\varphi_i^{(n)}, \psi_i^{(n)}, \gamma_i^{(n)}$ ,  $n = 1, 2$  относительно этих осей, преобразовываем потенциальную и кинетическую энергии трехслойного треугольника к глобальным координатам. Для этого необходимо воспользоваться преобразованиями системы координат. Тогда

$$\begin{aligned} \Pi_h(\hat{u}_i^{(n)}, \dots, \hat{\psi}_i^{(n)}) &= \Pi_h(u_i^{(n)}, \dots, \gamma_i^{(n)}), \\ T_h(\hat{u}_i^{(n)}, \dots, \hat{\psi}_i^{(n)}) &= T_h(u_i^{(n)}, \dots, \gamma_i^{(n)}). \end{aligned} \quad (3.9.2)$$

Суммируя  $\Pi_h(u_i^{(n)}, \dots, \gamma_i^{(n)})$  и  $T_h(u_i^{(n)}, \dots, \gamma_i^{(n)})$  по всем треугольникам  $\Omega_h$ , получим выражение для потенциальной и приведенной кинетической энергий в глобальных координатах. Определение локальных координат  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  и вычисление направляющих косинусов выполняется как и при статических



нагрузках. Если все треугольники, окружающие  $i$ -й узел, компланарны, то жесткость в направлении  $\gamma_i$  равна нулю и матрицы  $K$  и  $M$  конечномерных функционалов  $\Pi_h$  и  $T_h$  становятся вырожденными. Чтобы избежать указанного эффекта, использовался подход, предложенный в [92], в котором система фиктивных коэффициентов жесткости и масс задается для треугольников как компланарных, так и некомпланарных. Тогда решение задачи определения спектра собственных частот и форм трехслойных пластинчато-оболочечных систем находится путем минимизации некоторого функционала  $R^\alpha(u_i, \dots, \gamma_i)$ , близкого к  $R(u_i, \dots, \gamma_i)$ . При дискретизации пластинчато-оболочечной системы на треугольники фиктивные жесткости вводятся таким образом, чтобы равновесие в локальных координатах не нарушалось. В этом случае потенциальная энергия деформации и приведенная кинетическая энергия для трехслойного треугольника запишутся следующим образом

$$\begin{aligned}\Pi_h^\alpha &= \Pi_h - \frac{1}{2\Delta} \sum_{n=1}^2 \alpha E_n h_n \sum_{i,j=1}^3 \gamma_i^{(n)} \gamma_j^{(n)} (1 - 3\delta_{ij}); \\ T_h^\alpha &= T_h - \frac{1}{2} \Delta^2 \sum_{n=1}^2 \alpha \rho_n h_n \sum_{i,j=1}^3 \gamma_i^{(n)} \gamma_j^{(n)} (1 - 3\delta_{ij}),\end{aligned}\quad (3.9.3)$$

где  $\alpha \geq 0$  некоторый коэффициент. Переходя к глобальным координатам и суммируя по всем треугольникам  $\Omega_n$ , получаем выражения для функционалов  $\Pi_h^\alpha$  и  $T_h^\alpha$  в глобальных координатах. В практических расчетах рекомендуется использовать значение  $\alpha = 0,03$  или ниже [92].

## Глава 4

# Метод покоординатного спуска

Задача определения поля действительных перемещений, как освещалось выше, может быть сведена к минимизации симметричного положительно определенного функционала. Для решения задачи могут использоваться различные методы. Наиболее часто применяется подход, который заключается в использовании необходимого условия минимума функционала. Тогда возникает задача решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) высокого порядка с положительно определенной матрицей

$$K\vec{u} = \vec{f}, \quad u, f \in R^N,$$

т. е. приходим к обычной процедуре метода конечных элементов (МКЭ). Успешная реализация такого подхода связана с проблемой решения СЛАУ высоких порядков. Теоретически прямые методы приводят к точному решению СЛАУ за конечное число арифметических операций. Однако при использовании прямых методов существуют трудности вычислительного характера, связанные главным образом с размерностью решаемой задачи. При формировании матрицы жесткости  $K$  необходима предварительная перенумерация узлов сетки с целью

минимизации ширины ленты, что приводит к усложнению алгоритма. Существуют прикладные задачи, в которых порядок матрицы получается большим и разместить ее в оперативном запоминающем устройстве ЭВМ не удастся. Это требует использования внешних запоминающих устройств, что ведет к увеличению времени решения задачи за счет обмена информацией между устройствами ЭВМ. При решении СЛАУ, вследствие использования ограниченного количества значащих цифр в машинном представлении чисел с плавающей запятой, решение всегда получается неточным, что связано с накоплением ошибок округления. Уменьшение ошибок может быть достигнуто выполнением арифметических операций над числами с двойной точностью, что приводит к увеличению времени счета. При решении практических задач исследуемая область обычно оказывается многосвязной, сложной конфигурации. Для получения достоверного результата в этом случае необходима достаточно мелкая дискретизация. Однако при сгущении сетки увеличивается порядок матрицы и, следовательно, ухудшается ее обусловленность. Это также ведет к увеличению погрешности при решении СЛАУ. Итерационные методы решения применяются, главным образом, для задач большой размерности, для которых использование прямых методов является затруднительным или менее эффективным.

Альтернативным к решению задачи является подход, основанный на минимизации квадратичного функционала, достигающего минимального значения на искомом решении. Для решения задачи минимизации могут использоваться различные варианты метода спуска, методы сопряженных градиентов и др. В настоящей работе для минимизации функционала потенциальной энергии конструкций использовался нестационарный метод покоординатного спуска, применение которого позволяет избежать указанных выше затруднений, связанных с решением СЛАУ [21, 52, 58, 187].



## 4.1 Минимизация функционалов методом покоординатного спуска

При статических нагрузках задача определения поля действительных перемещений, как освещалось выше, может быть сведена к минимизации функционала

$$\Phi(u) = a(u, u) - (f, u). \quad (4.1.1)$$

Переход к конечномерной задаче приводит к минимизации квадратичной формы:

$$\Phi(u_h) = \Phi(\vec{u}) = \frac{1}{2}(K\vec{u}, \vec{u}) - (\vec{f}, \vec{u}), \quad \vec{u}, \vec{f} \in R^N, \quad (4.1.2)$$

где  $K$  — положительно определенная симметричная матрица порядка  $N$  и  $\vec{f}$  — вектор узловой внешней нагрузки размерности  $N$ .

Решение методом покоординатного спуска ищется следующим образом. Пусть  $\vec{v}^k = (v_1^k, \dots, v_N^k)$  вектор узловых перемещений в текущем приближении, тогда последующее приближение строится в виде

$$\vec{v}^{k+1} = \vec{v}^k + \lambda_i^{k+1} \vec{e}_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.1.3)$$

где  $\vec{e}_i$  — единичный вектор в направлении  $v_i^k$ ,  $\lambda_i^{k+1}$  — шаг. Подставляя (4.1.3) в функционал  $\Phi(\vec{v})$  и учитывая, что  $\Phi(\vec{v}^{k+1})$  квадратичная функция, получим

$$\Phi(\vec{v}^{k+1}) = \Phi(\vec{v}^k) + \lambda_i^{k+1} \frac{\partial \Phi}{\partial v_i^k} + \frac{1}{2} (\lambda_i^{k+1})^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v_i^{k2}}. \quad (4.1.4)$$

Функционал на  $R^N$  можно представить в виде:

$$\Phi = \sum_n \Phi_n, \quad (4.1.5)$$

где суммирование осуществляется по всем подобластям. В силу «почти ортогонального базиса» аппроксимирующих функ-

ций можно записать

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_i^k} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial \Phi_m}{\partial v_i^k}; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v_i^{k^2}} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial v_i^{k^2}}. \quad (4.1.6)$$

Тогда при переходе к  $k + 1$ -му приближению функционал получит приращение

$$\Delta \Phi = \lambda_i^{k+1} \sum_{m=1}^M \frac{\partial \Phi_m}{\partial v_i^k} + \frac{1}{2} (\lambda_i^{k+1})^2 \sum_{m=1}^M \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial v_i^{k^2}}. \quad (4.1.7)$$

С физической точки зрения  $\Delta \Phi$  представляет собой изменение потенциальной энергии подобластей, окружающих  $i$ -й узел, в котором компонента  $v_i^k$  получает приращение  $\lambda_i^{k+1}$  при остальных постоянных перемещениях.

Величина  $\lambda_i^{k+1}$  определяется из условия максимума уменьшения функционала:

$$\frac{\partial \Delta \Phi}{\partial \lambda_i^{k+1}} = 0. \quad (4.1.8)$$

Тогда шаг определяется следующим образом:

$$\lambda_i^{k+1} = - \frac{\sum_{m=1}^M \frac{\partial \Phi_m}{\partial v_i^k}}{\sum_{m=1}^M \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial v_i^{k^2}}}. \quad (4.1.9)$$

Подставляя вычисленное  $\lambda_i^{k+1}$  значение в (4.1.3), находим компоненту  $v_i^{k+1}$ , после чего описанная процедура повторяется для следующей компоненты перемещения.

Эффективное применение метода покоординатного спуска во многом зависит от скорости сходимости итерационного процесса. Поскольку приближения покоординатного спуска и метода Гаусса-Зейделя решения СЛАУ совпадают, проблема оптимизации итерационного процесса может быть связана с эквивалентной задачей для релаксационной схемы. Известно

что для ускорения сходимости итерационного процесса можно применять метод неполной релаксации, тогда последующее приближение строится в виде

$$\vec{v}^{k+1} = \vec{v}^k + \beta \lambda_i^{k+1} \vec{e}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.1.10)$$

где  $\beta \in (0, 2)$  — параметр релаксации. Известно, что при  $\beta \in (0, 2)$  итерационный процесс (4.1.10) всегда сходится и максимальная скорость сходимости достигается при некотором  $\beta = \beta_{opt}$ . При  $\beta \in (0, 1)$  имеет место нижняя релаксация, при  $\beta \in (1, 2)$  — верхняя релаксация и при  $\beta = 1$  — полная релаксация. Использование параметра релаксации позволяет существенно повысить скорость сходимости итерационного процесса, практически не увеличивая трудоемкость вычислений при численной реализации. Причем, как показали численные эксперименты, лучший результат достигается при  $\beta > 1$ , т. е. при верхней релаксации.

В общем случае значение параметра релаксации зависит от спектральных характеристик операторов, участвующих в итерационном процессе. Поскольку границы спектров операторов известны в исключительно редких случаях, а их определение — очень трудоемкий процесс, то для определения  $\beta_{opt}$  используются различные априорные оценки либо адаптивные процедуры [195].

Если параметр релаксации не принимается постоянным в вычислениях, а определяется конкретно для каждой итерации, то применение такого параметра релаксации в итерационном процессе (4.1.10) приводит к нестационарному методу покоординатного спуска (НМПС). Тогда  $k + 1$  приближение записывается в следующем виде:

$$\vec{v}^{k+1} = \vec{v}^k + \beta^{k+1} \lambda_i^{k+1} \vec{e}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.1.11)$$

где параметр релаксации определяется из условия максимальной скорости сходимости итерационного процесса на основе информации, полученной в ходе вычислений.

При практической реализации итерационный процесс продолжается до тех пор, пока отношение  $\|\vec{\lambda}^k\|/\|\vec{v}^k\|$  не станет



меньше некоторого, наперед заданного числа  $\epsilon > 0$ . Выбор последнего осуществляется так, чтобы погрешность итерационного процесса была приблизительно равна погрешности аппроксимации перемещений  $O(h^s)$ . Таким образом, принятый критерий останова, записывается следующим образом:

$$\frac{\|\vec{\lambda}^k\|}{\|\vec{v}^k\|} < \epsilon, \quad (4.1.12)$$

где  $\|\vec{\lambda}^k\|$ ,  $\|\vec{v}^k\|$  — нормы векторов приращений и перемещений на  $k$ -ой итерации.

Минимизация отношения Релея-Ритца, необходимая для определения собственных форм и собственных частот колебаний, может осуществляться различными известными итерационными методами. К ним, как рассматривалось выше, относятся различные варианты метода спуска, метод локальных вариаций, градиентные методы, методы сопряженных направлений и другие. В данной работе для минимизации отношения Релея — Ритца также, как и при решении статической задачи, применялся метод покоординатного спуска, отличающийся простотой вычислительной схемы и удобством реализации на ЭВМ.

Отношения Релея-Ритца имеет вид:

$$\Phi(\vec{v}) = \frac{P_h(\vec{v})}{T_h(\vec{v})}; \quad \vec{v} \in R^N, \quad (4.1.13)$$

где

$$P_h(\vec{v}) = \frac{1}{2}(K\vec{v}, \vec{v}); \quad (4.1.14)$$

$$T_h(\vec{v}) = \frac{1}{2}(M\vec{v}, \vec{v}).$$

Функционал  $P_h(\vec{v})$  представляет собой максимальное значение потенциальной энергии деформации системы, а  $T_h(\vec{v})$  представляет собой так называемую приведенную кинетическую энергию системы или, другими словами, с точностью до  $\omega^2$

максимальную кинетическую энергию, т. е.

$$T_{(max)} = \frac{1}{2} \omega^2 T_h(\vec{v}). \quad (4.1.15)$$

Так как, собственные формы колебаний должны удовлетворять граничным условиям, то приходим к задаче минимизации отношения Релея-Ритца с ограничениями. Во многих случаях перемещения задаются в виде фиксированных величин на части границы. Подставляя их в функционал, получим задачу минимизации без ограничений на пространстве меньшей размерности. В методе покоординатного спуска решение задачи минимизации ищется путем последовательных приближений.

Пусть  $u_k$  — вектор искомого решения в текущем приближении. Тогда последующее приближение строится в виде

$$\vec{u}^{k+1} = \vec{u}^k + \beta \lambda_i^{k+1} \vec{e}_i, \quad (4.1.16)$$

где  $\vec{e}_i$  — единичный вектор,  $u_i^k$  — компонента перемещения,  $\lambda_i^k$  — шаг в его направлении,  $\beta$  — параметр релаксации. Тогда при переходе к  $k+1$ -му приближению функционал (4.1.13) принимает вид

$$\Phi(u^{k+1}) = \frac{\Pi(u^k) + 2\lambda_i^{k+1} \frac{\partial \Pi}{\partial u_i^k} + (\lambda_i^{k+1})^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial (u_i^k)^2}}{T(u^k) + 2\lambda_i^{k+1} \frac{\partial T}{\partial u_i^k} + (\lambda_i^{k+1})^2 \frac{\partial^2 T}{\partial (u_i^k)^2}}. \quad (4.1.17)$$

Величина шага  $\lambda_i^{k+1}$  определяется из условия максимального уменьшения функционала (4.1.17):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i^{k+1}} = 0. \quad (4.1.18)$$

В результате получается квадратное уравнение относительно  $\lambda_i^{k+1}$ , которое можно записать в виде:

$$a_i(\lambda_i^{k+1})^2 + b_i \lambda_i^{k+1} + c_i = 0, \quad (4.1.19)$$

где

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\partial^2 T}{\partial u_i^2} \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i^2} \frac{\partial T}{\partial u_i}; \\ b_i &= \Pi \frac{\partial^2 T}{\partial u_i^2} - T \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i^2}; \\ c_i &= \Pi \frac{\partial T}{\partial u_i} - T \frac{\partial \Pi}{\partial u_i}. \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Из двух корней квадратного уравнения (4.1.19) выбирается тот, который придает функционалу меньшее значение. В силу «почти ортогонального» базиса аппроксимирующих функций можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_h}{\partial u_i^k} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial \Pi_{hm}}{\partial u_i^k}; \\ \frac{\partial^2 \Pi_h}{\partial u_i^{k^2}} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial^2 \Pi_{hm}}{\partial u_i^{k^2}}; \\ \frac{\partial T_h}{\partial u_i^k} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial T_{hm}}{\partial u_i^k}; \\ \frac{\partial^2 T_h}{\partial u_i^{k^2}} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial^2 T_{hm}}{\partial u_i^{k^2}}. \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

В (4.1.21) суммирование осуществляется по подобластям, окружающим  $i$ -й узел,  $M$  — количество подобластей, связанных с  $i$ -м узлом. В результате минимизации функционала (4.1.17) находится квадрат первой частоты  $\omega^2$  и соответствующий ей собственный вектор перемещений  $\tilde{u}^{(1)}$ .

Если используется свойство ортогональности собственных подпространств линейного самосопряженного оператора для определения второй и более высоких собственных форм и собственных частот, то вторая частота находится на ортогональном дополнении пространства допустимых перемещений  $u_h$  к



найденному собственному вектору  $\vec{u}^{(1)}$ . Вектор  $\vec{v}$ , ортогональный к  $\vec{u}^{(1)}$ , находится обычным способом. Из произвольного начального приближения вычитаем вектор, параллельный  $\vec{u}^{(1)}$ .

$$\vec{v} = \vec{u} - \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} \vec{u}^{(1)} \right), \quad (4.1.22)$$

где  $\vec{u}^{(1)}$  — нормированный собственный вектор, соответствующий первой частоте [147]. Таким образом, приходим к минимизации функционала:

$$\Phi(u^k) = \frac{\Pi(u^k) - 2\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)}\right)\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} u_i^{(1)}\right) + \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)}\right)^2 \Pi(u^{(1)})}{T(u^k) - 2\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)}\right)^2 T(u^{(1)})}. \quad (4.1.23)$$

Как и в предыдущем случае, получим:

$$\begin{aligned} \Phi(u^{k+1}) = & \frac{\Pi(u^k) - 2\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)}\right)\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} u_i^{(1)}\right) + \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)}\right)^2 \Pi(u^{(1)}) +}{T(u^k) - 2\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)}\right)^2 T(u^{(1)})} + \\ & + \frac{2\lambda_i^{k+1}\left[\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} - \frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}}\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} u_i^{(1)}\right) - \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)}\right)\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} u_i^{(1)}\right] +}{+ 2\lambda_i^{k+1}\left[\frac{\partial T}{\partial u_i} - 2\frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}}\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)}\right) + \right.} \\ & \left. + \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)}\right)\frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}}\Pi(u^{(1)})\right] + (\lambda_i^{k+1})^2\left[\frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i^2} - \frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}}\left(2\frac{\partial \Pi}{\partial u_i^{(1)}} - \frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}}\Pi(u^{(1)})\right)\right] \\ & + \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)}\right)\frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}}T(u^{(1)})\left. + (\lambda_i^{k+1})^2\left[\frac{\partial^2 T}{\partial u_i^2} - 2\left(\frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}}\right)^2 T(u^{(1)})\right]\right] \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

из условия минимума функционала (4.1.24) получаем квадратное уравнение относительно  $\lambda_i^{(k+1)}$ , коэффициенты которого имеют вид:

$$a_i = \left[ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i^2} - 2 \frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}} \frac{\partial \Pi}{\partial u_i^{(1)}} + \frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}} \Pi(u^{(1)}) \right] \times \\ \times \left[ \frac{\partial T}{\partial u_i} - 2 \frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}} \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)} \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)} \frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}} T(u^{(1)}) \right] - \\ - \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial u_i^2} - 2 \left( \frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}} \right)^2 T(u^{(1)}) \right] \times \\ \times \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} - \frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}} \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} u_i^{(1)} \right) - \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)} \right) \frac{\partial \Pi}{\partial u_i^{(1)}} + \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)} \right) \frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}} \Pi(u^{(1)}) \right] \quad (4.1.25)$$

$$b_i = \left[ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i^2} - 2 \frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}} \frac{\partial \Pi}{\partial u_i^{(1)}} + \left( \frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}} \right)^2 \Pi(u^{(1)}) \right] \times [T(u^{(1)}) - 2 \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)} \right)^2 + \\ + \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)} \right)^2 T(u^{(1)})] - \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial u_i^2} - 2 \left( \frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}} \right)^2 T(u^{(1)}) \right] \times \\ \times [\Pi(u^{(1)}) - 2 \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)} \right) \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} u_i^{(1)} \right) + \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)} \right)^2 \Pi(u^{(1)})]; \quad (4.1.26)$$

$$c_i = \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} - \frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}} \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} u_i^{(1)} \right) - \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)} \right) \frac{\partial \Pi}{\partial u_i^{(1)}} + \right. \\ + \left. \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)} \right) \frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}} \Pi(u^{(1)}) \right] \times [T(u^{(1)}) - 2 \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)} \right)^2 + \\ + \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)} \right)^2 T(u^{(1)})] - \left[ \frac{\partial T}{\partial u_i} - 2 \frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}} \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)} \right) + \right. \\ + \left. \frac{\partial T}{\partial u_i^{(1)}} \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)} \right) T(u^{(1)}) \right] \times [\Pi(u^{(1)}) - 2 \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)} \right) \times$$

$$\times \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} u_i^{(1)} \right) + \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial u_i} u_i^{(1)} \right)^2 \Pi(u^{(1)}) \}. \quad (4.1.27)$$

Аналогично находятся последующие частоты и соответствующие им собственные вектора. Решение тестовых задач показало, что значение квадрата частоты сходится быстрее, чем соответствующая собственная форма. Поскольку точность определения последующих частот и собственных форм определяется точностью определения предыдущих собственных форм, то в качестве критерия окончания итерационного процесса выбиралось требование

$$\|\lambda^N\| \leq \epsilon \|\lambda^1\|. \quad (4.1.28)$$

При использовании метода повышения жесткостей для определения 2-й и более высоких собственных частот и собственных функций необходимо решить задачу минимизации функционала типа Релея (3.4.16), полученного методом повышения жесткостей. Функционал (3.4.15) с учетом выражений (3.6.7) можно переписать следующим образом:

$$\Phi(\vec{v})_{\vec{v} \in R^N} = \frac{\Pi_h(\vec{v}) + c \sum_{n=1}^{l-1} \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial T_h}{\partial z_i^{(n)}} v_i \right)^2}{T_h(\vec{v})}. \quad (4.1.29)$$

Функционал (4.1.29) также минимизируется с помощью МПС и  $k+1$ -е приближение имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{v}^{k+1}) = & \frac{\Pi_h(\vec{v}^k) + 2\lambda_i^{k+1} \frac{\partial \Pi_h}{\partial v_i^k} + (\lambda_i^{k+1})^2 \frac{\partial^2 \Pi_h}{\partial v_i^{k2}} +}{T_h(\vec{v}^k) + 2\lambda_i^{k+1} \frac{\partial T_h}{\partial v_i^k} +} \\ & \frac{+ c \sum_{n=1}^{l-1} \left( \lambda_i \frac{\partial T_h}{\partial z_i^{(n)}} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial T_h}{\partial z_i^{(n)}} (v_i^k) \right)^2}{+ (\lambda_i^{k+1})^2 \frac{\partial^2 T_h}{\partial v_i^{k2}}}. \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

Шаг  $\lambda_i^{k+1}$  определяется, как и в предыдущем случае, из условия максимума уменьшения функционала (4.1.30). В ре-



зультате получаем квадратное уравнение, коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
 a_i &= \left( \frac{\partial \Pi_h}{\partial v_i^k} + c \sum_{n=1}^{l-1} \left( \frac{\partial T_h}{\partial z_i^{(n)}} \sum_{i=1}^N \frac{\partial T_h}{\partial z_i^{(n)}} v_i^k \right) \right) \frac{\partial^2 T_h}{\partial v_i^{k^2}} - \\
 &\quad - \left( \frac{\partial^2 \Pi_h}{\partial v_i^{k^2}} + c \sum_{n=1}^{l-1} \left( \frac{\partial T_h}{\partial z_i^{(n)}} \right)^2 \right) \frac{\partial T_h}{\partial v_i^k}; \\
 b_i &= (\Pi_h(\vec{v}^k) + c \sum_{n=1}^{l-1} \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial T_h}{\partial z_i^{(n)}} \right) (v_i^k)^2) \frac{\partial^2 T_h}{\partial v_i^{k^2}} - \\
 &\quad - \left( \frac{\partial^2 \Pi_h}{\partial v_i^2} + c \sum_{n=1}^{l-1} \left( \frac{\partial T_h}{\partial z_i^{(n)}} \right)^2 T_h(\vec{v}_i^k); \right. \quad (4.1.31) \\
 c_i &= (\Pi_h(\vec{v}^k) + c \sum_{n=1}^{l-1} \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial T_h}{\partial z_i^{(n)}} v_i^k \right)^2) \frac{\partial T_h}{\partial v_i^k} - \\
 &\quad - \left( \frac{\partial \Pi_h}{\partial v_i^k} + c \sum_{n=1}^{l-1} \left( \frac{\partial T_h}{\partial z_i^{(n)}} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial T_h}{\partial z_i^{(n)}} v_i^k \right) \right) T_h(\vec{v}^k) \right).
 \end{aligned}$$

Так как точность определения последующих собственных частот и форм зависит от точности определения предыдущих собственных форм, то в качестве критерия останова итерационного процесса выбиралось требование (4.1.28).

При приращении  $\lambda_i^{(k+1)}$  изменяется потенциальная и кинетическая энергии подобластей, связанных с  $i$ -м узлом, поэтому необходимо учитывать вклад в квадратичные формы  $\Pi_h$  и  $T_h$  только от этих подобластей. Функционал  $\Pi_h$  потенциальной энергии деформации трехслойной конструкции на конечномерном пространстве допустимых перемещений равен сумме потенциальных энергий несущих слоев и заполнителя

$$\Pi_h = \sum \Pi_h^{(n)}. \quad (4.1.32)$$

Для трехслойной пластины потенциальная энергия деформации несущих слоев  $\Pi_h^{(n)}$   $n = 1, 2$  и заполнителя  $\Pi_h^{(3)}$  определяются, соответственно, выражениями (2.4.15), (2.4.17). В случае трехслойных пластинчато-оболочечных конструкций  $\Phi_h$  легко определяется из выражений для конечномерного функционала полной потенциальной энергии системы, полученной во второй главе, без учета работы внешних сил.

## 4.2 Максимизация скорости сходимости метода покоординатного спуска

Для любой системы линейных уравнений  $Kx = f$  с неособенной матрицей  $K$  при использовании итерационных методов строится последовательность векторов  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots$  по рекуррентным соотношениям:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + H^{(k)}(f - Kx^{(k-1)}), \quad (4.2.1)$$

где  $H^{(k)}$  некоторая последовательность матриц. Известно, что необходимым и достаточным условием сходимости итерационного процесса является стремление к нулю матрицы:

$$T^{(k)} = (E - H^{(k)}K)(E - H^{(k-1)}K)\dots(E - H^{(1)}K), \quad (4.2.2)$$

для чего достаточно чтобы любая норма этой матрицы стремилась к нулю, поскольку разность между точным решением и приближенным определяется соотношением

$$x^* - x^{(k)} = T^{(k)}(x^* - x^{(0)}), \quad (4.2.3)$$

где  $x^*$  — точное решение,  $x^{(0)}$  — начальное приближение. Необходимое и достаточное условие сходимости может быть сформулировано как требование, чтобы величины собственных чисел матрицы  $T^{(k)}$  были меньше единицы.

В методе покоординатного спуска с использованием релаксации  $k$ -е приближение строится в виде

$$x^{(k)} = (E - BL)^{-1}(E - B - BR)x^{(k-1)} + (E - BL)^{-1}Bf, \quad (4.2.4)$$

или

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - (E - BL)^{-1}BKx^{(k-1)} + (E - BL)^{-1}Bf. \quad (4.2.5)$$

Обычно в общепринятом варианте под  $B$  фактически понимается матрица  $\beta E$ . Это приводит к умножению соответствующих матриц на число  $\beta$ , которое называют параметром релаксации.

Мы расширяем возможности метода, считая, что  $B$  является матрицей и называем такой метод обобщенным покоординатным спуском. В частности, полагая  $B = \beta E$ , приходим к классическому методу покоординатного спуска.

Из предыдущих соотношений следует

$$x^{(k)} - x^{(k-1)} = (E - BL)^{-1}(E - B - BR)(x^{(k)} - x^{(k-1)}), \quad (4.2.6)$$

$$\lambda^{(k)} = (E - BL)^{-1}(E - B - BR)\lambda^{(k-1)}, \quad (4.2.7)$$

где  $\lambda^{(k)}$  шаг. Оператор

$$T = (E - BL)^{-1}(E - B - BR) \quad (4.2.8)$$

обычно называется оператором перехода.

При решении задачи ускорения сходимости метода покоординатного спуска используем классические алгебраические и аналитические подходы. Задача ускорения сходимости может решаться путем оптимального выбора матрицы  $B$ . Она решается двумя принципиально разными путями: первый состоит в том, что элементы матрицы  $B$  выбираются различными в пределах шага (под шагом в таком случае понимается один проход через все неизвестные), а второй в том, что элементы  $B$  постоянны в пределах шага или даже для всех итераций. Так как скорость сходимости определяется величиной наибольшего собственного числа оператора перехода  $T$ , то критерием выбора элементов матрицы релаксации является требование максимально возможного уменьшения наибольшего по модулю собственного числа оператора перехода. Анализ скорости сходимости предпочтительно исследовать, рассматривая задачу в матричном виде. Линейную задачу теории упругости с



помощью вариационного принципа Лагранжа и вариационно-сеточных методов, как уже отмечалось, можно привести к линейной системе  $\hat{K}u = f$ , где  $\hat{K}$  — симметричная положительно определенная матрица жесткости,  $u$  — искомый вектор перемещений,  $f$  — вектор, который определяется граничными условиями.

Если представить  $K$  в виде

$$\hat{K} = \hat{L} + \hat{D} + \hat{L}',$$

где  $\hat{D}$  — диагональная матрица,  $\hat{L}$  — поддиагональная и  $\hat{L}'$  — сопряженная ей наддиагональная, то преобразованием

$$D^{-\frac{1}{2}} \hat{K} D^{-\frac{1}{2}}$$

можно перейти к подобной матрице  $K = L + E + L'$ , которую удобнее анализировать. Тогда оператор перехода примет вид:

$$T = (E + BL)^{-1}(E - B - BL'), \quad (4.2.9)$$

где  $B$  — диагональная матрица. Задача увеличения скорости сходимости состоит в минимизации максимального собственного числа оператора  $T$  или, что эквивалентно, его спектрального радиуса

$$\rho(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Как отмечено выше, задача может решаться двумя путями: первый — элементы диагональной матрицы  $B$  берутся различными и второй — все элементы  $B$  одинаковы. Первый подход фактически не исследован. Относительно второго известно, что итерационный процесс сходится для положительно определенной симметричной матрицы  $K$  при  $B = \beta E$  если  $0 < \beta < 2$  и, что малыми изменениями  $\beta$  можно увеличить скорость сходимости по сравнению с  $\beta = 1$ . Рассмотрим первый подход. Поскольку скорость сходимости растет при уменьшении максимального собственного числа оператора  $T$  или его спектрального радиуса, то оптимальной есть  $B$ , при которой

спектральный радиус оператора перехода или, что равноценно, его максимальное собственное число равно нулю. В этом случае

$$T^n = 0, \quad (4.2.10)$$

при каком то конечном  $n$ , то есть матрица оператора перехода  $T$  является нильпотентной, и итерационный процесс сходится за конечное число итераций. При таком подходе фактически итерационный метод переходит в прямой, но имеет преимущество в том, что увеличение количества итераций более  $n$  – эквивалентно использованию итерационного уточнения решения, полученного прямыми методами с целью уменьшения ошибки, которая имеет место вследствие ограниченной точности машинной арифметики.

Задачу выбора элементов матрицы релаксации  $B$  таким образом, чтобы все собственные числа равнялись нулю, удалось решить в том случае, когда матрица жесткости является трехдиагональной

$$K = \begin{pmatrix} 1 & k_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_{21} & 1 & k_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & k_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{n-1n} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2.11)$$

Обозначим  $C = (E + BL)^{-1}$ . Учитывая, что в исследуемом случае  $(BL)^n = 0$ ,

$$C = E - BL + (BL)^2 + \dots + (-1)^{n-1}(BL)^{n-1}. \quad (4.2.12)$$

Тогда

$$t_{i,j} = c_{i,j}(1 - \beta_j) - c_{i,j-1}k_{j-1,j}\beta_{j-1}. \quad (4.2.13)$$

Находим, что

$$c_{i,j-1} = c_{i,j}k_{j,j-1}\beta_j, \quad (4.2.14)$$

получаем

$$t_{ij} = c_{ij}(1 - \beta_j - \beta_j\beta_{j-1}k_{j,j-1}k_{j-1,j}). \quad (4.2.15)$$

Второй множитель не зависит от номера строки  $i$ , поэтому все элементы  $j$ -го столбца, начиная с лежащего на главной диагонали и ниже, не содержат его. Следовательно можно выбрать  $\beta_1 = 1$  и определить остальные  $\beta_j$  рекуррентным соотношением

$$\beta_j = \frac{1}{1 - \beta_{j-1} k_{jj-1} k_{j-1j}}. \quad (4.2.16)$$

Этим мы приводим матрицу оператора перехода к виду:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -k_{12} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2 k_{23} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta_{n-1} k_{n-1n} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.17)$$

Полученная матрица является нильпотентной

$$T^n = 0,$$

и, поскольку разность между решением и  $n$ -м приближением равна  $T^n x_0$ , где  $x_0$  — начальное приближение, то итерационный процесс сходится к решению не более чем за  $n$  итераций, где  $n$  размерность пространства.

Аналогичный подход решения задачи определения оптимальной матрицы релаксации применим к системам с почти треугольной матрицей

$$K = \begin{pmatrix} 1 & k_{12} & k_{13} & \dots & \dots & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & 1 & k_{23} & \dots & \dots & \dots & k_{2n} \\ 0 & k_{32} & 1 & k_{34} & \dots & \dots & k_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & k_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2.18)$$

В этом случае  $K = L + E + R$ , где  $R$  произвольная верхняя наддиагональная матрица, не равная  $L^T$ . Элементы матрицы оператора перехода, лежащие на диагонали и ниже, можно



представить в виде

$$t_{ij} = c_{ij}(1 - \beta_j) - \sum_{k=1}^{j-1} c_{i,k} k_{k,j} \beta_k. \quad (4.2.19)$$

Из этого представления  $t_{ij}$  можно получить

$$t_{i1} = c_{i1}(1 - \beta_1),$$

$$t_{i2} = c_{i2}(1 - \beta_2 + \beta_1 \beta_2 k_{21} k_{12}),$$

$$t_{i3} = c_{i3}(1 - \beta_3 - \beta_3 \beta_2 \beta_1 k_{32} k_{21} k_{13} + \beta_3 \beta_2 k_{32} k_{23}),$$

.....

$$\begin{aligned} t_{ij} = c_{ij} [ & 1 - \beta_j - (-1)^{j-1} \beta_j k_{j,j-1} \beta_{j-1} k_{j-1,j-2} \beta_{j-2} \dots \beta_1 k_{1,2} \beta_1 k_{1,j} - \\ & - (-1)^{j-2} \beta_j k_{j,j-1} \beta_{j-1} k_{j-1,j-2} \dots \beta_2 k_{2,1} \beta_2 k_{2,j} - \\ & - (-1)^{j-3} \beta_j k_{j,j-1} \beta_{j-1} k_{j-1,j-2} \dots \\ & \dots \beta_3 k_{3,1} \beta_3 k_{3,j} - \dots - (-1) \beta_j k_{j,j-1} \beta_{j-1} k_{j-1,j} ]. \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

На основании полученных соотношений, выбирая

$$\beta_1 = 1,$$

$$\beta_2 = \frac{1}{1 - k_{2,1} k_{1,2}},$$

$$\beta_3 = \frac{1}{1 - \beta_2 \beta_1 k_{3,2} k_{2,1} k_{1,3} + \beta_2 k_{3,2} k_{2,3}},$$

.....

$$\beta_j = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{j-k} \beta_k k_{k,j} k_{j,j-1} \prod_{m=j-k}^{m=j-1} \beta_m k_{m,m-1}}, \quad (4.2.21)$$

приводим матрицу оператора к форме, в которой все диагональные и поддиагональные члены равны нулю. Это значит, что  $T^n = 0$  и итерационный процесс для почти трехдиагональной матрицы сходится к решению не более, чем за  $n$  итераций.

В том случае, если матрица системы, подлежащей решению  $K$ , произвольна, задача нахождения диагональной матрицы релаксации  $B$  может быть сведена к ее определению из условия, что ее характеристическое уравнение имеет вид  $\lambda^n = 0$ . Это, в свою очередь, означает, что инварианты оператора перехода должны равняться нулю. Это приводит к системе  $n$  уравнений  $n$ -го порядка, решение которой является достаточно сложным, и этот путь нерационален с точки зрения нахождения решения исходной системы. В то же время, можно получить один общий результат, относящийся к свойствам диагональной матрицы релаксации при ее оптимальном выборе. Из соотношения

$$T = (E + BL)^{-1}(E - B - BL');$$

$$T = (E + BL)^{-1}[(E + BL) - B(L + E + L')];$$

$$T = E - (E + BL)^{-1}BK,$$

$$|E - T| = |(E + BL)^{-1}BK|;$$

и, учитывая, что и силу нильпотентности,  $|E - T| = 1$  и  $|(E + BL)^{-1}| = 1$ , то  $|BK| = 1$ , и следовательно,

$$\beta_1\beta_2\ldots\beta_n = |K|^{-1}. \quad (4.2.22)$$

Кроме уже приведенных результатов, исследование определения оптимальной матрицы релаксации подсказало, что, если в основу определения матрицы релаксации положить условие нильпотентности оператора перехода и не требовать, чтобы матрица релаксации была диагональной, то оператор перехода может быть выбран таким, чтобы его матрица была верхней наддиагональной, тогда  $T^n = 0$  и ее простейший вид в этом случае

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \epsilon \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.23)$$

В этом случае матрица релаксации легко определяется

$$B = (E - T)(LT + E + R)^{-1}. \quad (4.2.24)$$

При этом матрица  $B$  имеет простую структуру, так как  $B - T$  и  $(LT + E + R)^{-1}$  являются правыми треугольными. Параметр  $\epsilon$  выбирается из условия  $1 - \epsilon k_{1n} \neq 0$ . Это требование вытекает из того, что оператор  $T$  должен быть невырожден. При таком выборе матрицы релаксации  $k + 1$  приближение находится через  $k$ -е

$$x_i^{(k+1)} = -BL\bar{x}^{(k+1)} + (E - B(E + R))\bar{x}^{(k)} + Bf; \quad (4.2.25)$$

$$\bar{x}^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, 0, \dots, 0, 0, 0, 0);$$

$$\bar{x}^{(k)} = (0, 0, 0, 0, \dots, 0, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}),$$

и построенный итерационный процесс сходится за две итерации, где под итерацией понимается обход всех неизвестных в выбранном порядке. На этом пути удастся найти связь между прямыми методами и итерационными. Для этого необходимо выбрать оператор перехода  $T = 0$ . Из этого условия находим

$$B = (T - R)^{-1};$$

$$(E + (E + R)^{-1}L)x = (E + R)^{-1}f.$$

Матрица  $E + (E + R)^{-1}L$  имеет структуру

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \dots & a_{3,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \vdots & \ddots & a_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.2.26)$$

и может быть представлена в виде:

$$(E + R)^{-1}K. \quad (4.2.27)$$

Тогда одна итерация метода покоординатного спуска эквивалентна прямому ходу метода Гаусса, если начать исключение



членов  $x_n$  начиная с  $n - 1$ -го по 1-е уравнение. Таким образом, исследование первого пути ускорения сходимости, который заключается в использовании постоянной матрицы релаксации, определяемой из условия равенства нулю радиуса сходимости, приводит к итерационному методу, который соседствует с прямыми и требует оперирования с членами матрицы жесткости и фактически ее формирования.

Рассмотрим второй метод ускорения сходимости, при котором коэффициент релаксации  $\beta$  есть постоянная величина на протяжении одной итерации. Под одной итерацией понимается проход через все переменные. Из классических работ известно, что при этом методе итерационный процесс сходится, если система уравнений имеет симметричную положительно определенную матрицу при  $0 < \beta < 2$ , и малыми изменениями  $\beta$  относительно 1 можно ускорить скорость сходимости. Но задача нахождения величины  $\beta$ , при которой скорость сходимости наибольшая, не решена. На практике ее определяют экспериментально. Как и в первом способе теоретически задача состоит в том, чтобы найти такое  $\beta$ , при котором максимальное собственное число  $\lambda_{max}$  или спектральный радиус сходимости оператора  $\rho(T)$  был наименьший.

Спектральная задача  $Tw_n = \lambda_n w_n$  эквивалентна задаче

$$[(1 - \beta)E - \beta L^T]w_n = \lambda_n(E + \beta L)w_n.$$

Пусть собственные числа действительны и система собственных функций нормирована. Тогда учитывая, что спектральный радиус

$$\rho(T) = \lambda_{max},$$

получим

$$\rho(T) = \max_n \left| \frac{1 - \beta - \beta(L^T w_n, w_n)}{1 + \beta(L w_n, w_n)} \right|.$$

Используем неравенства

$$\frac{m-1}{2}(w, w) \leq (Lw, w) \leq \frac{M-1}{2}(w, w),$$

где  $m$  и  $M$  — наименьшее и наибольшее собственные числа  $T$ , и исследуем функцию

$$a(\beta, t) = \max \left| \frac{1 - \beta(1+t)}{1 + \beta t} \right|$$

при  $t \in (\frac{m-1}{2}, \frac{M-1}{2})$  и  $\beta \in (0, 2)$ . Эта функция монотонно убывает. Несложный анализ показывает, что

$$a(\beta) = \max \left\{ \left| \frac{2 - \beta(m+1)}{2 + \beta(m-1)} \right|, \left| \frac{2 - \beta(M+1)}{2 + \beta(M-1)} \right| \right\}.$$

Оптимальное  $\beta$  находим из условия минимума  $a(\beta)$ . Так как  $\frac{\partial a(\beta, t)}{\partial t} < 0$ , то минимум  $a(\beta)$  имеет место при

$$\frac{2 - \beta(m+1)}{2 + \beta(m-1)} = \frac{2 - \beta(M+1)}{2 + \beta(M-1)}.$$

Таким образом, доказано, что если собственные числа оператора перехода действительны, то спектральный радиус  $\rho(T)$  является минимальным, а скорость сходимости максимальна при

$$\beta = \frac{2}{1 + \sqrt{Mm}}. \quad (4.2.28)$$

Рассмотрим случай, когда собственные числа — комплексные числа. Представим в виде

$$T = (E + \alpha R)^{-1}(E - \alpha R'),$$

где  $\alpha = 2\beta/(2-\beta) > 0$  и положительно определенные матрицы  $R = \frac{1}{2}E + L$  и  $R' = \frac{1}{2}E + L'$  такие, что  $K = R + R'$ . Из этого представления следует:  $(Ru, u) \geq \frac{m}{2}(u, u)$ . Спектральная задача для оператора представима в виде

$$(E - \alpha R')w_n = \lambda_n(E - \alpha R)w_n,$$

откуда

$$\lambda_n = \frac{1 - \alpha(R'w_n, \bar{w}_n)}{1 + \alpha(Rw_n, \bar{w}_n)},$$

и аналогично

$$\bar{\lambda}_n = \frac{1 - \alpha(R'\bar{w}_n, w_n)}{1 + \alpha(R\bar{w}_n, w_n)}.$$

Тогда

$$|\lambda_n|^2 = \frac{1 - 2\alpha \operatorname{Re}(R'w_n, \bar{w}_n) + \alpha^2 |R'w_n, \bar{w}_n|^2}{1 + 2\alpha \operatorname{Re}(R'w_n, \bar{w}_n) + \alpha^2 |R'w_n, \bar{w}_n|^2}.$$

Пусть  $w_n = x_n + iy_n$ . Введем величину  $t_n$

$$t_n = \operatorname{Re}(R'w_n, \bar{w}_n) = (Rx_n, x_n) + (Ry_n, y_n),$$

тогда  $t_n \geq m/2$ . Таким образом, имеем

$$|(R'w_n, \bar{w}_n)|^2 \leq \|R'w_n\| \|\bar{w}_n\|^2 = |R'w_n|^2,$$

и используя

$$|R'w_n|^2 = (RR'x_n, x_n) + (RR'y_n, y_n) \leq (\Delta/4)[(Kx_n, x_n) + (Ky_n, y_n)],$$

получаем оценку:

$$\rho^2(T) \leq \max \frac{2 - 4\alpha t_n + \alpha^2 \Delta t_n}{2 + 4\alpha t_n + \alpha^2 \Delta t_n}.$$

Находим минимум полученной функции:

$$a(\alpha, t) = \frac{2 - 4\alpha t + \alpha^2 \Delta t}{2 + 4\alpha t + \alpha^2 \Delta t},$$

при условиях  $t \in (m/2, \infty)$ ,  $\frac{\partial a(\alpha, t)}{\partial t} \leq 0$ . Из условия минимума  $\frac{\partial a(\alpha, t)}{\partial \alpha} = 0$  находим  $\alpha = 2/\sqrt{m\Delta}$ , откуда

$$\beta = \frac{2}{1 + \sqrt{m\Delta}}. \quad (4.2.29)$$

Полученная оценка для случая комплексных собственных чисел оператора  $T$ , аналогична полученной для действительных с той разницей, что  $M$  заменяется на  $\Delta$ , о котором известно  $0 \leq \Delta \leq 1$ , но точную его величину найти не удастся.



Этот результат дает, в принципе, возможность определить оптимальное  $\beta$ , но его практическое использование нерационально, потому что требует решения более сложной задачи нахождения границ спектра оператора  $T$ . Потому поиски метода определения оптимального  $\beta$  необходимо было продолжить. Они были продолжены по пути использования промежуточной информации, которая поступает в ходе вычислительного процесса. Приведем эти результаты в порядке их получения.

Проанализируем связь между последовательными приближениями и оператором перехода  $T$ . Для этого воспользуемся соотношением

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} - \beta(E - \beta L)^{-1} K \lambda^{(k)},$$

из которого получим

$$\begin{aligned} \|\lambda^{(k+1)}\|_K^2 &= \|\lambda^{(k)}\|_K^2 - 2\alpha((E + \alpha R)^{-1} K \lambda^{(k)}, K \lambda^{(k)})_2 + \\ &+ \alpha^2 \|K^{1/2}(E + \alpha R)^{-1} K \lambda^{(k)}\|_2^2. \end{aligned}$$

Это можно представить в виде

$$\|\lambda^{(k+1)}\|_K^2 = \|\lambda^{(k)}\|_K^2 - 2\alpha(H\xi^k, \xi^k),$$

где

$$H = K^{\frac{1}{2}}(E + \alpha R')^{-1}(E + \alpha R)^{-1}K^{\frac{1}{2}}$$

— положительно определенный самосопряженный оператор и

$$\alpha = \frac{2\beta}{2 - \beta}, \quad \xi = K^{\frac{1}{2}}\lambda.$$

Вследствие асимптотических свойств итерационного процесса в разложении вектора  $\xi^k$  по ортонормированным собственным векторам оператора  $H$  существует преобладающий коэффициент разложения, соответствующий собственному числу  $\alpha_n(H)$ . Тогда приближенно  $H\xi^k = \lambda_n(H)\xi^k$  откуда следует

$$\lambda_n(H) = \frac{(K\lambda^k, \lambda^k)_2}{(\lambda^k, \lambda^k) + \alpha(K\lambda^k, \lambda^k)_2 + \alpha^2\|R'\lambda^k\|_2^2}.$$

Если  $\{\phi_n\}$  — полная  $K$ -нормированная система собственных векторов обобщенной спектральной задачи, то

$RR^T \phi_n = \lambda_n K \phi_n$ . Тогда вектора  $\lambda^k$  можно разложить по  $\phi_n$

$$\lambda^k = \sum_{n=1}^N \kappa_n^k \phi_n, \quad \kappa_n^k = (K \lambda^k, \phi_n),$$

откуда приближенно

$$\lambda_n(H) \geq \frac{(K \lambda^k, \lambda^k)}{(\lambda^k, \lambda^k) + \alpha(1 + \frac{\alpha \Delta}{4})(K \lambda^k, \lambda^k)_2}.$$

Допустим, что для  $\lambda_n \leq (1/4)\Delta^0$ , где  $\Delta^0 \ll \Delta$ , соответствующие коэффициенты  $\kappa_n^k$  разложения вектора  $\lambda^k$  значительно преобладают. В этом случае целесообразным выбором параметра релаксации есть

$$\beta_k = \frac{2}{1 + \sqrt{\gamma^k}},$$

где

$$\gamma^k = \Delta^0 \frac{(K \lambda^k, \lambda^k)}{(\lambda^k, \lambda^k)},$$

которое обеспечивает наилучшее равномерное подавление выделенных коэффициентов разложения. Так как на сходимость итерационного процесса в большей степени влияют большие собственные числа, то их влияние необходимо подавить в первую очередь. Оценку нижней границы первой «половины спектра» можно получить через среднее геометрическое. Поскольку

$$(\prod_{n=1}^N \lambda_n)^{1/N} = \frac{1}{4} |K^{-1}|,$$

учитывая, что  $\beta \in (0, 2)$  и

$$\prod_{n=1}^N (1 - \lambda_n) = \beta^N |K|$$

при  $\beta = 2$ , имеем  $|K| \leq 1$ , следовательно,  $\|K^{-1}\| \geq 1$ . Тогда  $\Delta^0 \geq 1$ .

Поэтому целесообразной величиной параметра релаксации есть величина

$$\beta^k = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{(K\lambda^k, \lambda^k)}{(\lambda^k, \lambda^k)}}}.$$

Если вернуться к исходной матрице, не нормируя диагональ, получим

$$\beta^k = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{(K\lambda^k, \lambda^k)}{(D\lambda^k, \lambda^k)}}}. \quad (4.2.30)$$

Хотя этот результат получен недостаточно строго, на практике он является достаточно эффективным, поскольку не требует определения границ спектра. Его недостаток заключается в том, что при каждом определении  $\beta$  необходимо находить величину  $(K\lambda, \lambda)$ , которая представляет собой потенциальную энергию деформации, если вектор перемещений равен  $\lambda$ , что требует значительных затрат машинного времени. Это увеличивает время одной итерации, потому практически  $\beta$  определяется не на каждой итерации, а через некоторое количество циклов. Кроме того, этот подход невозможно распространить на тот случай, когда функционал не квадратичный и ему соответствует нелинейная система уравнений.

Следующий шаг в исследовании скорости сходимости и ее увеличении основан на использовании соотношения между средним арифметическим и средним геометрическим собственных чисел. Используем то, что  $n$ -й и  $n+1$ -й шаги связаны соотношением

$$\lambda^{(k+1)} = T\lambda^{(k)},$$

где  $T$  — оператор перехода. Его матрица всегда может быть представлена в виде

$$T = D + H,$$

где  $D$  — диагональная матрица, элементами которой являются собственные числа оператора  $T$ , а  $H$  — нильпотент. Если матрица  $T$  простая, то есть ее можно диагонализировать или



это эквивалентно условию  $H = 0$ . Представляем квадрат нормы шага на  $k + 1$ -м приближении в виде

$$(\lambda^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}) = (T\lambda^{(k)}, T\lambda^{(k)}).$$

Тогда для простой матрицы

$$(\lambda^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}) = (D\lambda^{(k)}, D\lambda^{(k)})$$

или

$$(\lambda^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}) = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \lambda_i^2,$$

где  $\mu_i$  — собственные числа оператора перехода  $T$ , а  $\lambda_i$  — проекции вектора  $\lambda^{(k)}$  на оси координат. Если разделить левую и правую части этого соотношения на  $(\lambda^{(k)}, \lambda^{(k)})$  и ввести величины

$$\alpha_i^2 = \frac{\lambda_i^2}{(\lambda^{(k)}, \lambda^{(k)})},$$

то получим

$$\frac{(\lambda^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)})}{(\lambda^{(k)}, \lambda^{(k)})} = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \alpha_i^2,$$

причем  $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$ . Правая часть этого уравнения представляет собой взвешенное среднее арифметическое квадрата собственных чисел оператора  $T$ , которое в данном случае не превышает квадрата максимального собственного числа.

Таким образом, задачу ускорения сходимости можно сформулировать как задачу минимизации величины

$$p = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \mu_i^2.$$

Это можно выполнить путем минимизации среднего арифметического квадрата собственных чисел  $S = \sum_{i=1}^n \mu_i^2$  оператора  $T$ , потому что  $p < S$ . Для выполнения этой задачи можно воспользоваться соотношением между средним арифметическим и средним геометрическим, в соответствии с которым

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \mu_i^2}$ . И среднее арифметическое достигает минимума, когда оно равно среднему геометрическому. Это имеет место только тогда, когда все квадраты собственных чисел, а значит и их абсолютные величины, будут равны. Так как  $|T^2| = (1 - \beta)^{2n}$ , то верхняя оценка оптимального коэффициента верхней релаксации имеет вид

$$\beta_o = 1 + \frac{|\lambda^{k+1}|}{|\lambda^k|}. \quad (4.2.31)$$

Этот метод определения оптимального коэффициента релаксации на практике является наилучшим потому, что он использует только нормы двух предпоследних шагов, которые являются побочным результатом вычислительного процесса и не требуют дополнительных затрат времени и памяти ЭВМ. Но существенный результат полученного метода определения  $\beta_o$  состоит в том, что он значительно увеличивает скорость сходимости, причем, как показали численные эксперименты, скорость сходимости возрастает в 1,8 – 4 раза даже по сравнению с постоянным оптимальным  $\beta$  определяемым классическим методом через границы спектра оператора перехода. В общем случае, когда оператор перехода не может быть диагонализирован, оценку для оптимального коэффициента релаксации приходится связывать не с суммой квадратов собственных чисел, а с суммой квадратов сингулярных чисел оператора перехода  $T$ , которая является его кроснормой. При этом, как обычно, оценка становится более завышенной и это необходимо учитывать при ее использовании.

Еще одно большое преимущество последнего метода определения  $\beta_o$  состоит в том, что его можно использовать и в том случае, когда функционал, который подлежит минимизации не квадратичный, то есть соответствующая задача является нелинейной. Это имеет место благодаря тому, что на каждом шаге итерационного процесса действительный функционал фактически заменяется приближенным квадратичным.

## Глава 5

# Автоматизированная система расчета

### 5.1 Назначение пакета прикладных программ

Внедрение численных методов в практику инженерных расчетов и развитие ЭВМ привело к созданию значительного числа вычислительных программ и программных комплексов. Эти комплексы отличаются размерностью решаемых задач, степенью автоматизации подготовки исходных данных, диапазоном применимости, идеями, реализованными в программах, и ориентацией на определенные классы ЭВМ. К числу крупных вычислительных систем для расчета на прочность и колебания пространственных пластинчато-оболочечных конструкций, реализующих МКЭ, можно отнести «Прочность-75» [207], «Ли́ра» [273], «Супер» [202], «Композит» [29], «КИ-ПРЕС» [271], за рубежом «NASTRAN», «ASKA», «CORSAR» и другие. Известные крупные конечноэлементные комплексы ориентированы, в основном, на использование мощных ЭВМ с большим объемом оперативной и внешней памяти.

Разработанный пакет прикладных программ (ППП) предназначен для исследования напряженно-деформированного



состояния и динамических характеристик однородных и трехслойных пластинчато-оболочечных конструкций на основе метода покоординатного спуска. ППП спроектирован и реализован для решения сложных прикладных задач статики и динамики большой размерности, причем вся необходимая информация в процессе решения полностью размещается в оперативной памяти ЭВМ. Структура организации и схема функционирования ППП позволяют решать дискретные задачи с большим количеством неизвестных и дает возможность широко использовать персональные компьютеры для решения практических задач статики и динамики. Математическое обеспечение состоит из программ, реализованных на алгоритмическом языке Фортран-IV для ЭВМ серии ЕС и на языках программирования Си++ и Фортран-77 для ПЭВМ.

## 5.2 Методика автоматического построения сетки на произвольных многосвязных поверхностях

В последнее время разработки в области механики оболочек все более ориентируются на создание вычислительных систем для решения широкого круга задач прочности и колебаний оболочечных конструкций. При решении задач численными методами требуется дискретизация исходной поверхности, т.е. построение узловых точек, координат и связей узлов. Общий объем данных о разбиении областей в реальных задачах измеряется десятками тысяч чисел. Поэтому при реализации численных методов на ЭВМ возникают большие трудности в связи с необходимостью формирования и проверки информационных массивов. Как известно, на формирование входных данных и их проверку расходуется значительная часть времени и стоимости решения задач [316]. Наиболее эффективное средство решения проблемы подготовки данных о дискретной модели задачи, необходимой для численной реализации – включение в вычислительные комплексы программ, обеспечи-

вающих автоматическую дискретизацию областей и создание необходимых информационных массивов. Анализ проблемы, связанной с построением сеток для различных областей, дан в главе 1.

Поскольку оболочки и пространственные пластинчатые конструктивные элементы являются геометрически сложными и в то же время очень распространенными, создание автоматического генератора сеток для многосвязных пластинчато-оболочечных конструкций является актуальной задачей. Эффективность сеточного генератора определяется количеством необходимых входных данных и соответствием следующим требованиям:

- 1) осуществление контроля за плотностью узлов в заданных зонах области дискретизации;
- 2) возможность получения элементов, близких к правильным многоугольникам;
- 3) экономичность алгоритма как в отношении машинного времени при численной реализации, так и трудозатрат, связанных с его эксплуатацией.

Как следует из литературных источников, до настоящего времени не существует эффективного сеточного генератора для произвольных оболочечных областей, удовлетворяющего всем вышеуказанным требованиям. Ниже предлагается метод построения сетки треугольных элементов для многосвязных оболочечных областей, реализованный в программном вычислительном комплексе «Оболочка» [85].

Рассмотрим основную идею метода. При подготовке исходных данных оболочечная многосвязная область, подлежащая триангуляции, представляется в виде объединения односвязных базовых подобластей, граница которых состоит из непересекающегося объединения базовых линий, являющихся пространственными кривыми. Простейшим элементом исходной топологической модели служит базовый узел, который определяется порядковым номером и координатами в пространстве.

Процесс построения сетки конечных элементов состоит из

следующих основных этапов.

1. Выделение односвязных базовых оболочечных подобластей.

2. Разбивка границ базовых подобластей согласно заданному закону расположения узлов на пространственных кривых и их числу.

Вычислительные программы, реализующие этот этап, базируются на аналитическом представлении пространственной кривой. В общем случае последняя может быть задана в виде линии пересечения двух поверхностей

$$F(x, y, z) = 0; \quad G(x, y, z) = 0. \quad (5.2.1)$$

Для определения длины дуги пространственной линии запишем уравнения (5.2.1) в параметрической форме. В качестве параметра может быть выбрана любая из координат  $x, y, z$ . Пусть это координата  $x$

$$y = f(x); \quad z = g(x). \quad (5.2.2)$$

Длина дуги

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx, \quad (5.2.3)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – абсциссы начальной и конечной точек дуги. Пространственную линию можно разделить на заданное число частей – базовых элементов, решая уравнение (5.2.3) с переменным верхним пределом интегрирования, который определяет длину дуги базового элемента. Чтобы получить неравностоящие промежуточные узлы, задается множитель  $\hat{\lambda}$ , определяющий отношение длин дуг смежных интервалов.

3. Формирование информации о граничных узлах в соответствии с обходом базовых подобластей против часовой стрелки. На этом этапе создаются массивы, содержащие информацию о координатах граничных узлов и их последовательности при обходе базовых подобластей.



4. На основании информации о сформированных граничных узлах осуществляется автоматическая дискретизация оболочечных областей.

При определении узловых точек на поверхности оболочки по сути используется подход реализующий метод выравнивания-выемки. Основным моментом процесса дискретизации является выбор узла пересечения двух базовых линий и определения его положения на оболочке. Угол между касательными к этим линиям в точке их пересечения должен лежать в пределах  $0 < \alpha < 180^\circ$ . Рассмотрим три точки, расположенные последовательно на текущей границе базовой оболочечной области, с учетом обхода ее против часовой стрелки  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $C(x_2, y_2, z_2)$ ,  $B(x_3, y_3, z_3)$ . Через указанные точки проводится секущая плоскость. Далее происходит трансформирование этого участка границы в соответствии с методом построения сетки внутри подобласти от базовых линий с учетом локальных свойств текущей границы [2]. Следует отметить, что в рассмотренном случае трансформация границы производится в окрестности минимального угла между смежными звеньями текущей границы. Для построения новых узловых точек на поверхности оболочки угол  $AOB$ , образованный смежными отрезками прямых  $OA$  и  $OB$  и лежащий в секущей плоскости, делится на две равные части. На биссектрисе этого угла определяется точка  $(x_4, y_4, z_4)$ , расстояние от которой до вершины угла равно сумме длин смежных отрезков, умноженной на числовой коэффициент, характеризующий необходимую степень сгущения или разрежения сетки:

$$|OC| = \beta(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2}). \quad (5.2.4)$$

Обычно коэффициент  $\beta$  принимается равным 0,5. После этого из точки  $(x_4, y_4, z_4)$  проводится нормаль к поверхности оболочки. Точка пересечения нормали с поверхностью и есть новый узел  $D(x_5, y_5, z_5)$ . Далее формируются два треугольных элемента  $AOD$  и  $OBD$ , узлы которых лежат на поверхности оболочки (рис. 5.2.1).

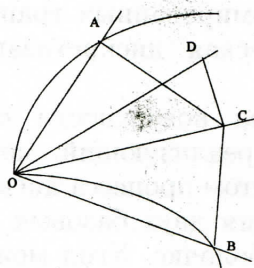


Рис. 5.2.1.  
Определение положения узла  
на поверхности оболочки  
и формирование сетки

Процедура построения сетки основана на последовательном заполнении области элементами от границы. Процесс дискретизации проходит так, чтобы граница еще не триангулированной части области все время представляла собой непрерывную замкнутую и непересекающуюся пространственную линию. Отметим, что указанная процедура построения узловых точек позволяет точно определить их положение на поверхности оболочки, при этом сгенерированная сетка получается высокого качества.

При построении сетки к треугольникам предъявляются следующие требования:

а) если вершинами треугольного элемента являются узлы  $m_1, m_2, m_3$ , то направление обхода треугольника должно осуществляться против часовой стрелки;

б) минимальный угол в треугольнике не должен быть меньше  $\phi = 30^\circ$ ;

в) максимальный угол в треугольнике не должен превышать  $\gamma = 90^\circ$ .

Выполнение этих требований гарантирует отсутствие в построенной сетке сильно вытянутых элементов, наличие которых снижает точность решения задачи. При необходимости можно изменить значение угла  $\phi$  и угла  $\gamma$ . Численные эксперименты показали, что наиболее регулярная сетка получается при  $\gamma = 90^\circ$ . С уменьшением угла  $\gamma$  ( $\gamma < 90^\circ$ ) происходит сгущение сетки внутри подобласти, а с увеличением этого угла ( $\gamma > 90^\circ$ ) – разряжение.

На основании предложенного метода построения сетки треугольных элементов для оболочечных областей был разрабо-

тан сеточный генератор «Оболочка» [49], позволяющий автоматически осуществлять дискретизацию многосвязных сферических, конических, эллиптических, цилиндрических поверхностей и пластинчатых систем, расположенных в пространстве произвольным образом, а также любых конструкций, образованных объединением указанных поверхностей.

### 5.3 Характеристика и макроструктура программного комплекса

Пакет прикладных программ (ППП) предназначен для определения параметров напряженно-деформированного состояния однородных и трехслойных пластинчато-оболочечных конструкций и для определения необходимого количества собственных частот и собственных форм колебаний, а также для решения задач о вынужденных колебаниях с учетом рассеивания энергии в указанных конструкциях.

Пакет прикладных программ представляет собой совокупность трех проблемно ориентированных подсистем: «НДС», «Собственные колебания», «Вынужденные колебания». Каждая подсистема включает в себя четыре блока: «Однородные пластины», «Трехслойные пластины», «Однородные пластинчато-оболочечные конструкции», «Трехслойные пластинчато-оболочечные конструкции».

В основу организации ППП положен модульный принцип, позволяющий, в случае необходимости, всесторонне развивать и совершенствовать вычислительный комплекс при помощи сервисных программ, а также видоизменять созданные подпрограммы.

ППП содержит следующие функциональные блоки:

- 1) блок ввода исходной информации и генерации сетки;
- 2) блок итерационной процедуры решения задач статики и динамики;
- 3) блок обработки и вывода результатов расчета.



При организации ППП каждый из перечисленных блоков представляет собой набор соответствующих программных модулей.



Рис. 5.3.1. Макроструктура ППП

ППП спроектирован по принципу «черного ящика», при этом от пользователя не требуется квалификации программиста, а требуется знание только инструкции по подготовке исходных данных и понимание выводимых результатов. ППП ха-

рактизуется высоким уровнем автоматизации и экономичностью по объему памяти ЭВМ. ППП отлаживался и совершенствовался на большом числе тестовых и контрольных задач различной сложности. Некоторые из них представлены далее. Макроструктура пакета прикладных программ представлена на рис. 5.3.1.

## 5.4 Блок ввода исходной информации и генерации сетки

Для работы ППП требуются входные данные о решаемой задаче, которые можно объединить в следующие основные группы: 1) информация о топологии области; 2) информация о типе задачи; 3) информация о физических параметрах материалов несущих слоев и заполнителя; 4) информация о геометрических характеристиках слоев; 5) информация о кинематических граничных условиях, приложенных нагрузках.

В разработанном ППП для автоматического построения сетки треугольных элементов применительно к многосвязным пластинчато-оболочечным областям использовался сеточный генератор «Оболочка» [49]. Вычислительный комплекс — сеточный генератор «Оболочка» предназначен для автоматического построения сетки треугольников для многосвязных пространственных пластинчато-оболочечных конструкций на основе метода, рассмотренного в п. 5.2.1. Ориентирован на ЭВМ серии ЕС и ПЭВМ. Основной язык программирования для ЕС ЭВМ — «Фортран-IV», C++. В основу организации вычислительного комплекса положен модульный принцип. Процесс генерации сетки разделен на ряд логически завершенных этапов, выполняемых отдельными программными блоками. Это позволяет пользователю осуществлять вмешательство и производить корректировку промежуточных результатов. Вычислениями руководит головная программа, которая обращается к необходимым подпрограммам в соответствующем порядке.

По функциональному назначению подпрограммы, реализу-

ющие автоматическую дискретизацию области можно разделить на несколько групп. Первая группа программ осуществляет разбивку пространственных кривых по заданному закону и формирует информацию о граничных узлах. Вторая группа программ на основании информации о сформированных граничных узлах осуществляет автоматическую триангуляцию оболочечных систем. Третья группа программ осуществляет контрольную печать информационных массивов и визуализацию сгенерированной сетки. Укрупненная блок-схема сеточного генератора «Оболочка» приведена на рис. 5.4.1.

Основными программными блоками комплекса являются:

I. Блок подготовки границ базовых оболочечных под областей, который включает в себя:

- 1) кодировку базовых линий, представляющих собой пространственные кривые, и задание коэффициентов сгущения узлов на базовых линиях;
- 2) деление базовых линий на части;
- 3) формирование последовательности номеров граничных узлов;
- 4) хранение информации о полученных граничных узлах, массивы номеров граничных узлов и их координаты  $x, y, z$ .

II. Блок генерации сетки треугольных элементов, включающий в себя:

- 1) триангуляцию базовых оболочечных под областей;
- 2) формирование информации о дискретной модели оболочки (формирование информационных массивов номеров, координат  $x, y, z$  и связей узлов в элементы).

III. Блок контрольной печати выходной информации и визуализации сгенерированной сетки, который обеспечивает:

- 1) вывод массивов координат узлов сетки;
- 2) вывод массива связей узлов сетки в элементы;
- 3) визуализацию сгенерированной сетки треугольных элементов.



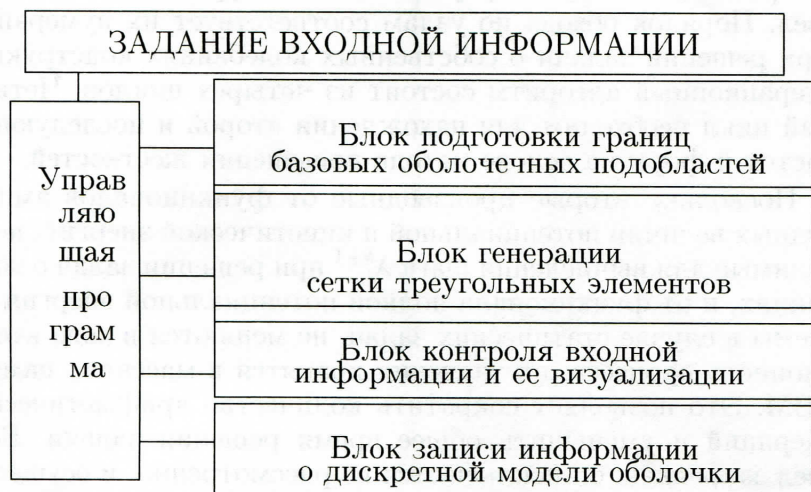


Рис. 5.4.1. Блок-схема  
сеточного генератора «Оболочка»

IV. Блок записи информации о дискретной модели на внешнее запоминающее устройство (ВЗУ).

ППП содержит модули обработки исходной информации и контроля ошибок и переформирования исходных данных.

## 5.5 Блок итерационной процедуры решения задач статики и динамики

Этот блок осуществляет реализацию алгоритма нестандартного метода покоординатного спуска с автоматическим определением параметра релаксации на каждой итерации. Итерационный алгоритм для решения задач о напряженно-деформированном состоянии однородных и трехслойных конструкций состоит из трех основных циклов. Первый цикл соответствует текущему приближению (итерации), второй цикл перебирает все узлы области, а в третьем (внутреннем) цикле

совершается обход по треугольникам, окружающим каждый узел. Порядок обхода по узлам соответствует их нумерации. При решении задачи о собственных колебаниях конструкций итерационный алгоритм состоит из четырех циклов. Четвертый цикл необходим для нахождения второй и последующих частот и форм на основе метода повышения жесткостей.

Поскольку вторые производные от функционалов амплитудных величин потенциальной и кинетической энергий, необходимые для вычисления шага  $\lambda_i^{k+1}$  при решении задач о колебаниях, и от функционала полной потенциальной энергии системы в случае статических задач, не меняются в ходе итерационного процесса, их значения хранятся в массивах памяти ЭВМ. Это позволяет сократить количество арифметических операций и уменьшить общее время решения задачи. Если узел закреплён, он исключается из рассмотрения, и осуществляется автоматический переход к следующему узлу. Если на узел наложена связь в заданном направлении, соответствующее перемещение не вычисляется.

Итерационный процесс решения задач разделен на ряд вычислительных этапов с записью промежуточной информации. Это позволяет пользователю осуществлять вмешательство в вычислительный процесс при завершении каждого этапа вычислений. Последовательными этапами работы блока итерационной процедуры решения задач являются:

- 1) чтение с ВЗУ информации о типе решаемой задачи и начальном приближении для перемещений;
- 2) запись с ВЗУ и вывод на экран дисплея или на печатающее устройство ЭВМ текущего приближения, точности решения задачи и числа итераций;
- 3) окончание итерационного процесса по достижению требуемой точности, либо его продолжение, если требуемая точность не достигнута;
- 4) запись на ВЗУ и вывод на экран дисплея или на печатающее устройство ЭВМ окончательно найденных результатов решения задач статики или нормированных относительно кинетической энергии собственных векторов и собственных ча-

стот заданных колебаний.

Полученные узловые перемещения используются в дальнейшем для определения напряжений, а нормированные собственные вектора — для решения задачи о вынужденных колебаниях.

В результате решения задач о напряженно-деформированном состоянии и колебаниях однородных и трехслойных пластинчато-оболочечных конструкций на основе вариационно-сеточных методов получают цифровую информацию, содержащуюся в массивах большой размерности. В качестве основных результатов расчета в разработанной вычислительной системе приняты узловые перемещения и напряжения в треугольниках, а также нормированные собственные вектора и собственные частоты.

Непосредственная обработка данных, полученных в виде таблиц на цифровом печатающем устройстве ЭВМ не всегда удобна из-за большого объема и недостаточной наглядности полученных результатов. Информацию о напряжениях и собственных формах можно привести к более наглядному виду, если представить поля значений в виде изолиний. В разработанном ППП построение изолиний выполняется с помощью блока графического вывода информации, который позволяет вывести на печатающее устройство ЭВМ картины полей анализируемых функций, представленных в пределах рассматриваемой области с помощью символов, либо осуществить вывод на экран дисплея в цветной гамме, состоящей из девяти цветов.

## 5.6 Тестовые и прикладные задачи

### 5.6.1 Станина каландра 503089

Представляет стальную плиту сложной конструктивной формы переменной толщины. Она является несущим элементом S-образного четырехвалкового каландра. Нагрузки лежат в плоскости плиты. Габаритные размеры станины — 3,8 x 4,2



м, материал – сталь 25Л-11, вес – 19200 кг. Модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

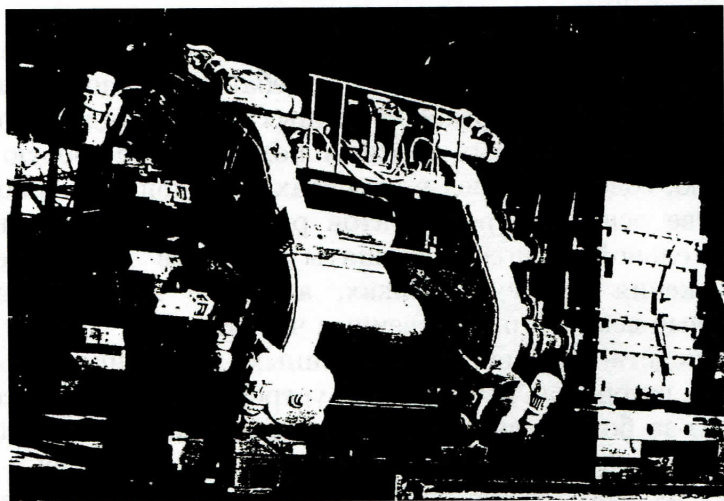


Рис. 5.6.1.1. S-образный четырехвалковый каландр

Расчетная схема показана на рисунке 5.6.1.2. В результате дискретизации получено 2778 узлов и 5243 треугольников, количество неизвестных – 5553. Изолинии напряжений показаны на рисунке. Расчетные напряжения и условия прочности определялись по энергетической теории и теории Писаренко-Лебедева. Анализ НДС установил, что максимальные расчетные напряжения не превышают 40 МПа и имеют местный характер. В то же время существует малонагруженная область, в которой напряжения не превышают 7 МПа.

Результаты расчета показывают, что материалоемкость станины может быть уменьшена более чем на 10% за счет удаления ненагруженной части. На следующем рисунке приведены результаты расчета в виде изолиний поля эквивалентных напряжений.

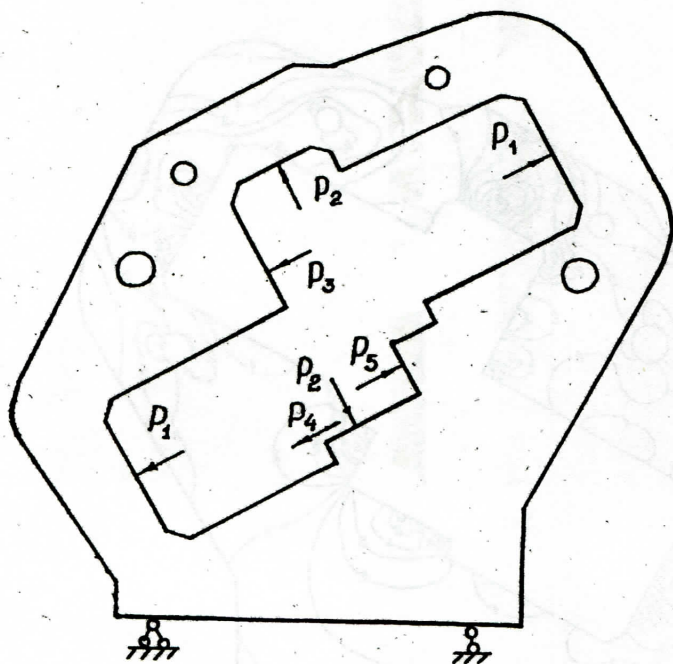


Рис. 5.6.1.2. Расчетная схема станины каландра

$P_1 = 12 \cdot 10^5 \text{ H}$ ,  $P_2 = 10,4 \cdot 10^5 \text{ H}$ ,  $P_3 = 6 \cdot 10^5 \text{ H}$ ,  
 $P_4 = 8 \cdot 10^5 \text{ H}$ ,  $P_5 = 14 \cdot 10^5 \text{ H}$ .

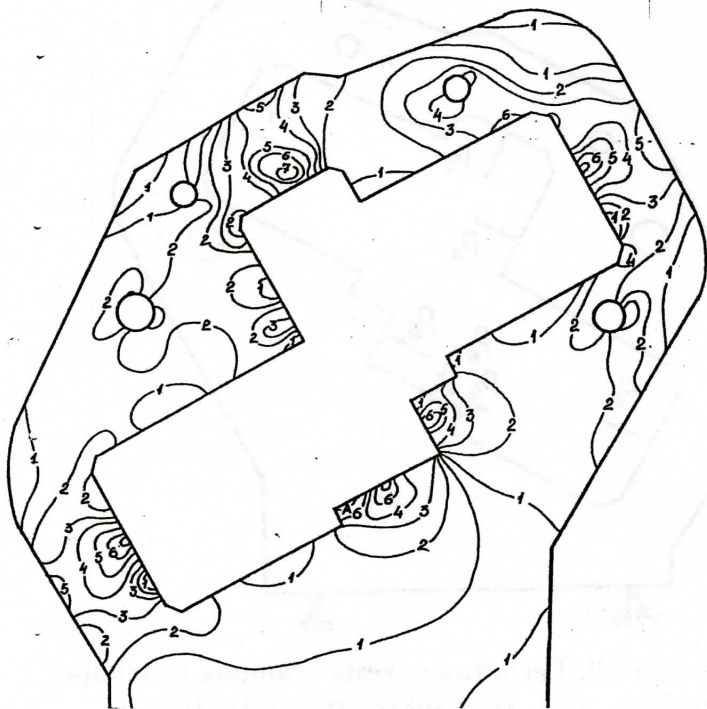


Рис. 5.6.1.3. Станина S-образного каландра.

Изолинии  $\sigma_{ekv}$  (МПа)

- 1) 1,1...3,1; 2) 5,2...7,2; 3) 9,3...11,3;
- 4) 13,3...15,4; 5) 17,4...19,5; 6) 21,5...23,5;
- 7) 25,6...27,6; 8) 29,7...31,7;
- 9) 33,8...35,9; A) 37,9...39,9.



### 5.6.2 Крышка паровой камеры вулканизатора 421222

Представляет собой стальную конструкцию, состоящую из двух цилиндрических оболочек, имеющих плоское днище и подкрепленную кольцевыми и радиальными ребрами жесткости. В центральной части крышки имеется восемь симметрично расположенных цилиндрических стаканов. В рабочем состоянии крышка нагружена внутренним давлением перегретого пара 0,6 МПа и распорным усилием прессформы через восемь вертикальных цилиндрических стаканов.

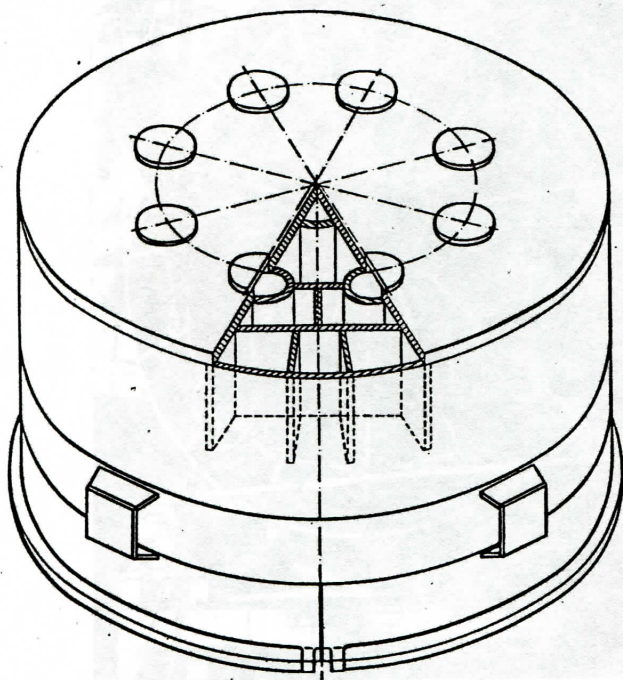


Рис. 5.6.2.1. Крышка паровой камеры вулканизатора

Симметрия конструкции и нагрузки позволяют рассматривать 1/16 часть крышки при следующих условиях: нижний край внешней цилиндрической оболочки жестко зашлемлен, углы поворота вокруг радиуса и касательные перемещения плоского днища вдоль длинного и короткого радиальных ре-

бер жесткости нулевые. Углы поворота вокруг радиуса и касательные перемещения по боковым краям цилиндрических оболочек и кольцевого ребра жесткости также принимались равными нулю.

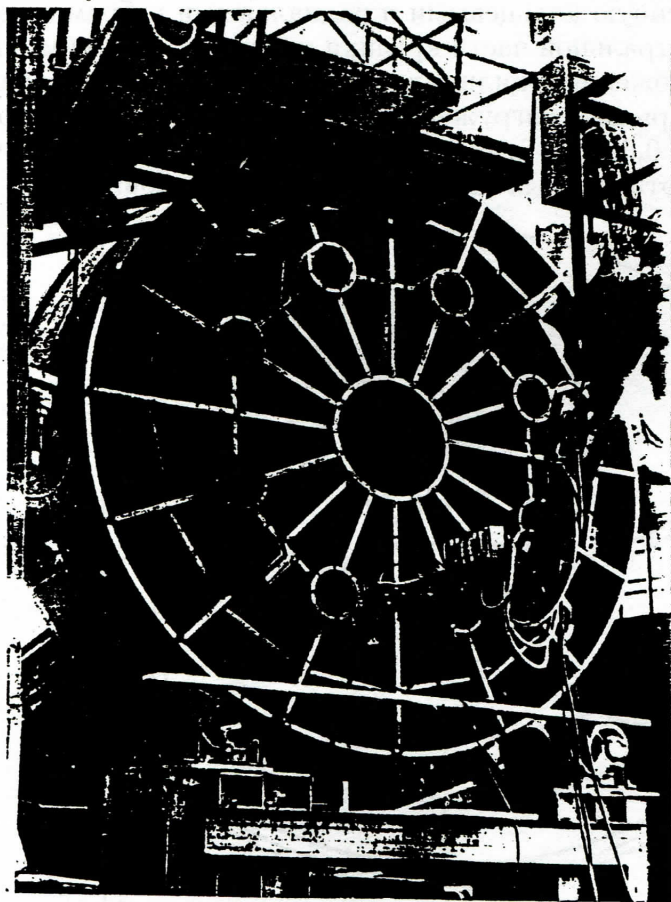


Рис. 5.6.2.2. Крышка вулканизатора

Радиальные ребра жесткости находятся в условиях плоского напряженного состояния. Центр плоского дна перемещается только вертикально в силу симметрии конструкции и нагрузки. Расчетная схема крышки показана на рисунке. Диаметр крышки 3,5 м, величина сосредоточенной силы

$2,8 \cdot 10^5 \text{ Н}$ . В результате дискретизации получено 1180 узлов, 2253 треугольников, 7080 узловых неизвестных. Результаты расчета представлены в виде эпюр эквивалентных напряжений на внутренней и внешней поверхностях крышки.

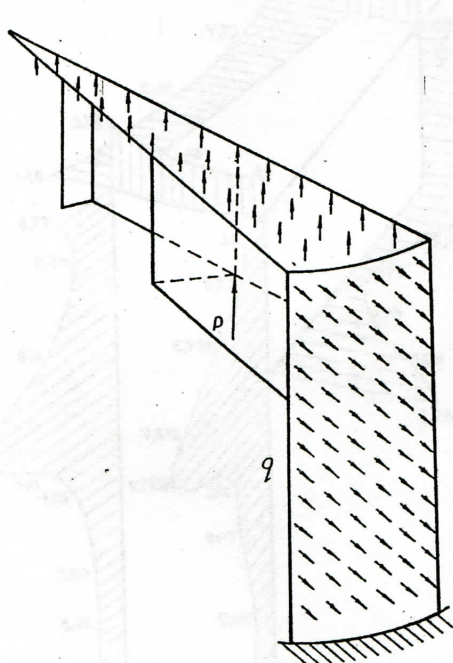


Рис. 5.6.2.3. Расчетная схема крышки паровой камеры вулканизатора

Анализ напряженно-деформированного состояния привел к следующим результатам. Максимальные напряжения имеют место на внутренней поверхности внешней цилиндрической оболочки в области нижнего края радиальных ребер и находятся на уровне предела текучести. Во внутренней цилиндрической оболочке, как и во внешней, максимальные напряжения имеют место в местах сочленения с ребрами и находятся на уровне предела текучести.



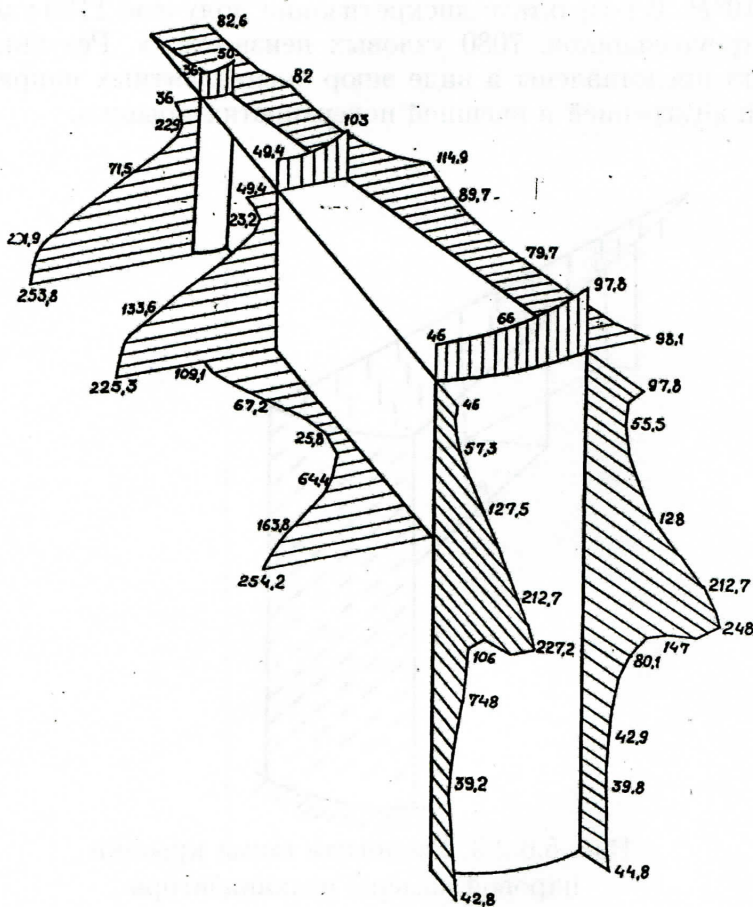


Рис. 5.6.2.4. Эпюры эквивалентных напряжений МПа

Аналогичная ситуация существует и в местах сочленения кольцевого ребра жесткости с коротким радиальным ребром. Напряжения в длинном радиальном ребре жесткости достаточно велики и также достигают предела текучести. Численные результаты сопоставлялись с экспериментальными, полученными в СКТБ Института проблем литья НАН Украины. Сопоставление показало их хорошее совпадение.

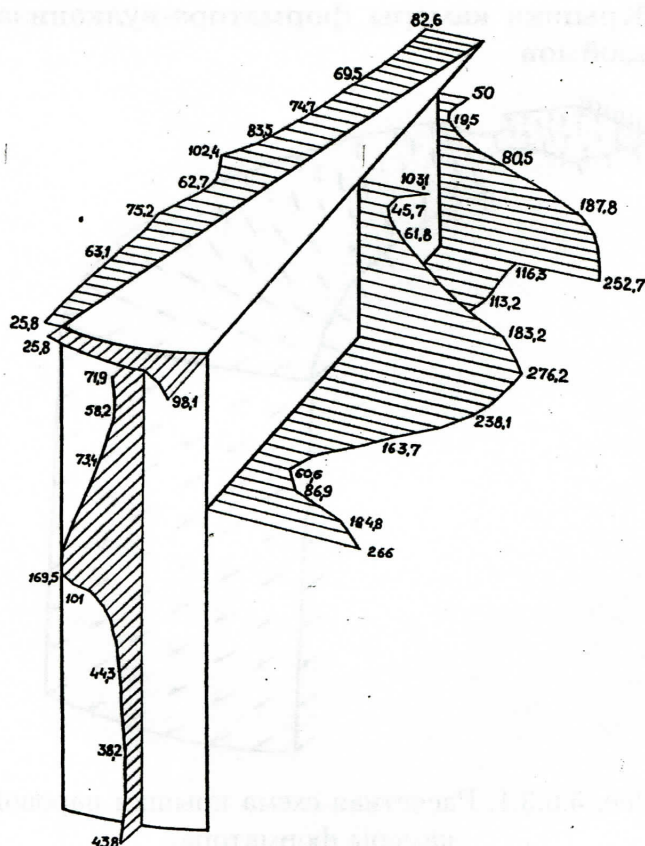


Рис. 5.6.2.5. Эпюры эквивалентных напряжений (МПа)

Таким образом, приходим к следующим выводам:

1) в области концентраторов — местах сочленения ребер жесткости с цилиндрическими оболочками напряжения превышают допускаемые, и необходима конструктивная доработка с целью их уменьшения;

2) уменьшение веса крышки при данной конструкции не представляется возможным.

### 5.6.3 Крышка камеры форматора-вулканизатора 88 дюймов

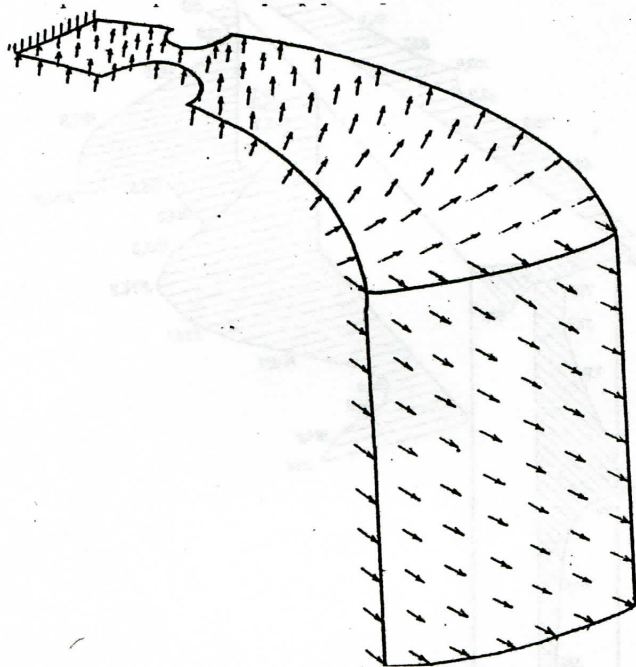


Рис. 5.6.3.1. Расчетная схема крышки паровой камеры форматора

Крышка представляет собой пространственную конструкцию, состоящую из цилиндрической обечайки и сферического дна. В рабочем состоянии крышка нагружена внутренним давлением перегретого пара 0,8 МПа. Симметрия конструкции и нагрузки позволяют рассматривать 1/16 часть крышки при следующих граничных условиях. Углы поворота относительно радиуса и вертикальной оси, а также касательные перемещения по боковым краям цилиндрической оболочки и сферического дна, равны нулю.





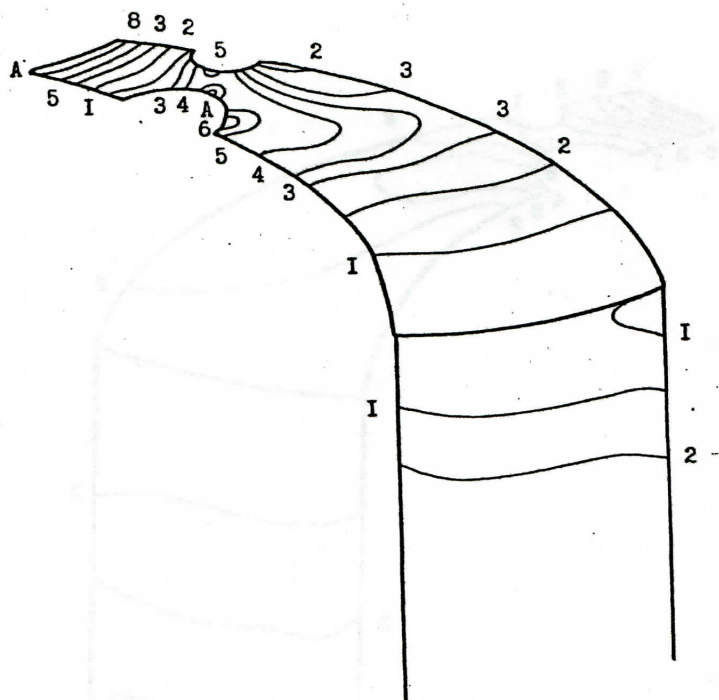


Рис. 5.6.3.3. Эквивалентные напряжения на внешней поверхности крышки паровой камеры форматора-вулканизатора 88" (МПа)

1) 36,1...42,3; 2) 48,6...54,7; 3) 61,1...67,3; 4) 73,5...79,8; 5) 86,0...92,3; 6) 98,5...104,7; 7) 110,9...117,2; 8) 123,4...129,7; 9) 135,9...142,20; А) 148...154.

Анализ НДС показал, что максимальные расчетные напряжения достигают 200 МПа и имеют место на внутренней поверхности сферического днища на линии сопряжения с траверсой. В области отверстий напряжения на внешней поверхности сферического днища локальны и достигают 150 МПа. В цилиндрической обечайке на обеих поверхностях напряжения близки и не превышают 67 МПа, а в области сопряжения цилиндрической обечайки и сферического днища не превышают

47 МПа. Таким образом, материалоемкость конструкции может быть снижена путем некоторого уменьшения толщины цилиндрической обечайки.

#### **5.6.4 Кривошипное колесо форматора-вулканизатора для покрышек типа ФВІ-600-1800-305/635**

Форматор-вулканизатор для покрышек типа ФВІ-600-1800-305/635, индекс 422311, выпускаемый заводом «Большевик» с 1982 года, предназначен для формования и вулканизации покрышек как диагональной, так и радиальной конструкций, в том числе с металлокордным каркасом в секторных прессформах трехфазного действия. Максимальный диаметр вулканизируемой покрышки – 1610 мм.

В форматоре-вулканизаторе для покрышек типа ФВІ-600-1800-305/635 роль замыкающего механизма играет система «траверса-тяга-кривошипные колеса». Крышка паровой камеры машины крепится к траверсе. Кривошипные колеса с помощью двух тяг связаны с траверсой. Запирание паровой камеры производится механизмом вертикального хода. Кривошипные колеса через зубчатые зацепления приводятся в действие червячным редуктором подъема-опускания. Тяги проворачиваются, становятся в вертикальное положение и через траверсу прижимают крышку к основанию. Перегретый пар под давлением 2,8 МПа подается в вулканизируемую покрышку. Максимальное распорное усилие, действующее в паровой камере и передающееся через траверсу и тяги на кривошипные колеса — 6000000 Н. Время вулканизации одной покрышки 1 час 15 мин.

Кривошипное колесо представляет собой трехмерную конструкцию сложной геометрической формы, элементами которой являются две цилиндрические цапфы, переходящие в массивный сектор кусочно-переменной толщины.



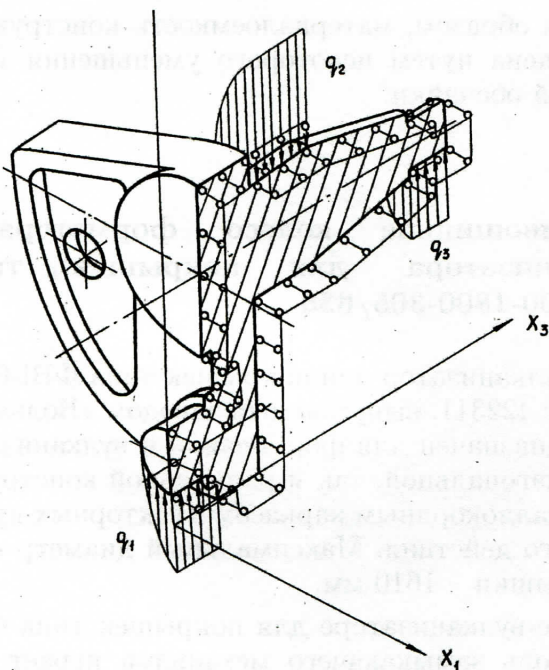


Рис. 5.6.4.1. Расчетная схема кривошипного колеса

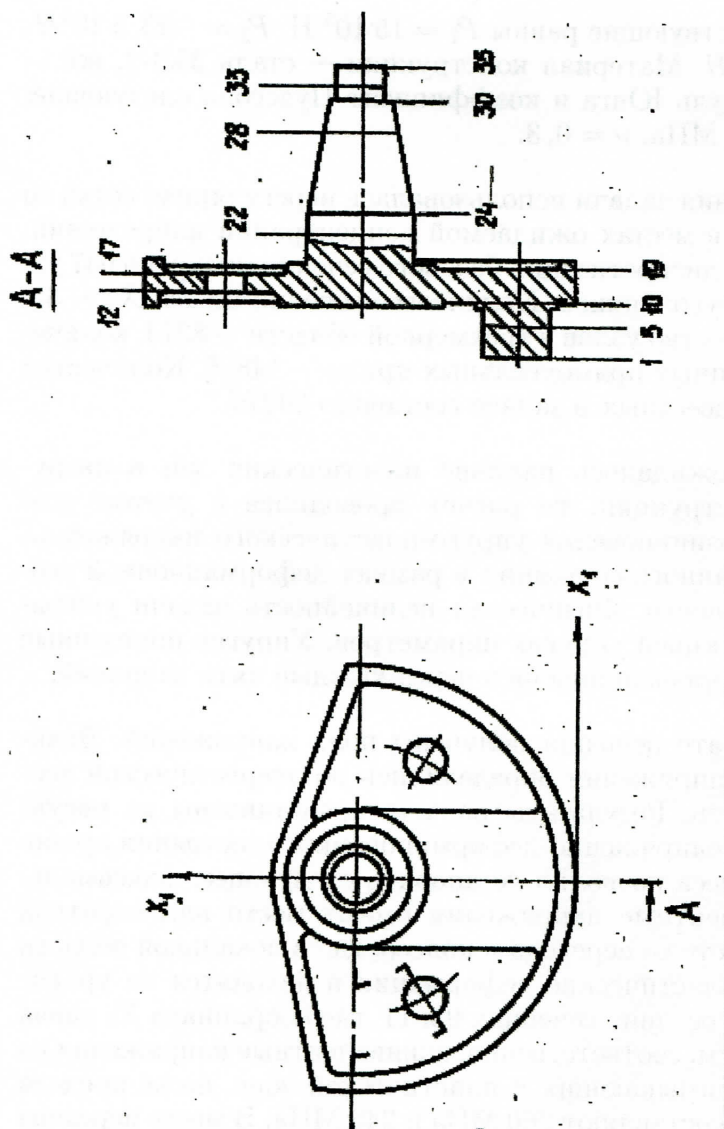
В рабочем положении длинная цапфа находится в станине форматора вулканизатора, где в качестве ее опор служат подшипники скольжения, а короткая – в проушине тяги, на которую действуют растягивающие усилия 3000000 Н. Исходными данными для расчета кривошипного колеса служили геометрические размеры, физико-механические свойства материала, граничные условия и нагрузки. Симметрия конструкции позволяет ограничиться рассмотрением 1/2 части кривошипного колеса при следующих граничных условиях: в сечении, совпадающем с плоскостью симметрии  $X_2OX_3$ , перемещения вдоль оси  $X_1$  задавались нулевыми. Расчетная схема кривошипного колеса показана на рис. 5.6.4.1. Давление на цапфы кривошипного колеса подшипников скольжения заменяли действием распределенных по косинусоидальному закону нагрузок.

Их равнодействующие равны  $P_1 = 15 \cdot 10^5$  Н,  $P_2 = -23,5 \cdot 10^5$  Н,  $P_3 = 8,5 \cdot 10^5$  Н. Материал конструкции — сталь 35Л-2, вес — 1580 кг. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона следующие:  $E = 2,11 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0,3$ .

Для решения задачи использовалась нерегулярная сетка со сгущениями в местах ожидаемой концентрации напряжений. В результате дискретизации базового сечения получено 637 узлов и 979 треугольников. Количество сечений по оси  $X_3$  — 35. Общее количество узлов в трехмерной области — 8374, количество трехгранных прямоугольных призм — 14896. Количество узловых неизвестных в задаче составило 24276.

Так как ожидалось наличие пластических зон в нагруженной конструкции, то расчет проводился с учетом возможности возникновения упруго-пластического напряженно-деформированного состояния в рамках деформационной теории пластичности. Физическая нелинейность задачи учитывалась коррекцией упругих параметров. Упругие постоянные материала корректировались через каждые пять итераций.

В результате решения получены поля напряжений. Эквивалентные напряжения определялись по энергетической теории прочности. Результаты расчета представлены на рисунках. Анализ напряженно-деформированного состояния кривошипного колеса позволил установить следующее: максимальные эквивалентные напряжения имеют место над короткой цапфой в месте ее перехода в колесо, где в локальной области возникают пластические деформации и находятся на уровне 286 МПа. В соседних сечениях 9 и 11, где координата  $X_3$  равна 17 см и 20,4 см, соответственно, эквивалентные напряжения на участках, примыкающих к пластической зоне, ниже предела текучести и составляют 260 МПа и 240 МПа. В месте перехода длинной цапфы в колесо (сечение 19) максимальные эквивалентные напряжения наблюдаются в нижней части стыка и находятся на уровне 120 МПа. Распределение эквивалентных напряжений в самой цапфе носит изгибный характер.

Рис. 5.6.4.2. Расположение сечений по  $x_3$



Основной вклад в величину эквивалентных напряжений вносят напряжения  $\sigma_{33}$ . Уровень эквивалентных напряжений в длинной цапфе ниже, чем в колесе.



Рис. 5.6.4.3. Поле эквивалентных напряжений

$\sigma$  кривошипного колеса, сечение 9 (МПа)

- 1) 7...20; 2) 35...47; 3) 60...73; 4) 86...100
- 5) 115...136; 6) 140...154; 7) 166...180
- 8) 193...206; 9) 220...233; А) 246...259.

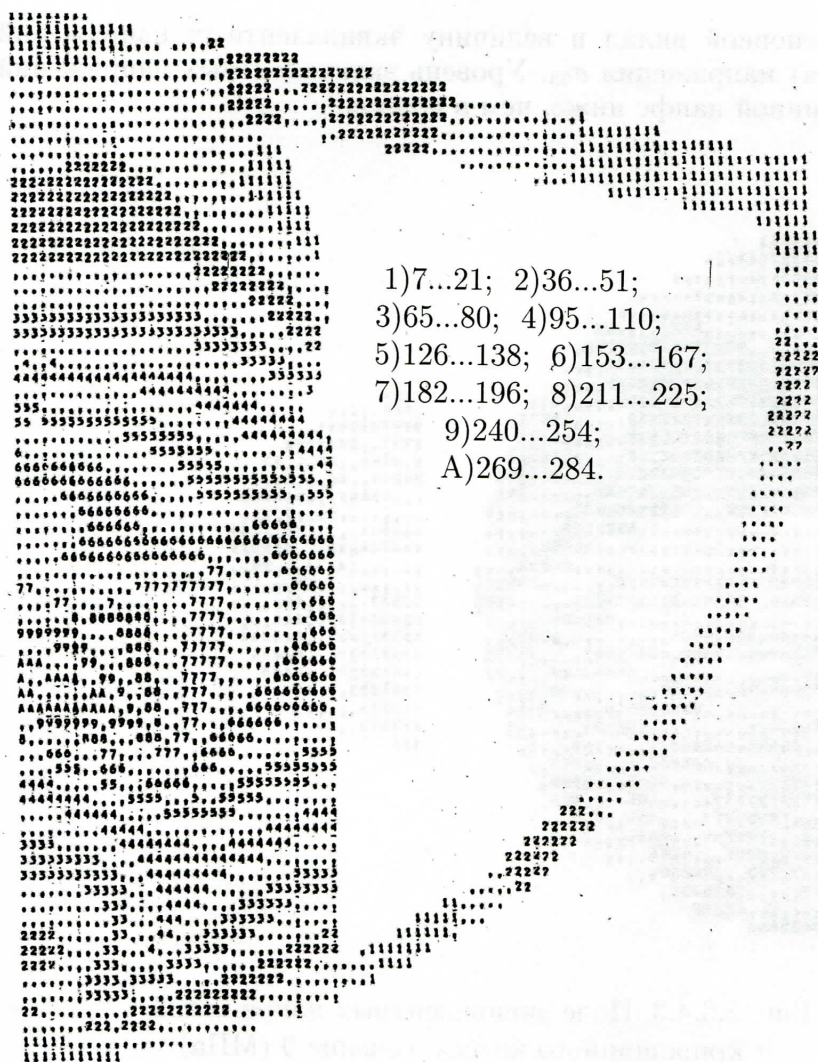


Рис. 5.6.4.4. Поле эквивалентных напряжений  $\sigma$  кривошипного колеса, сечение 10 (МПа)

Возникновение локальной пластической зоны в верхней части стыка короткой цапфы и колеса является следствием кон-

центрации напряжений. Для уменьшения высокого уровня напряжений рекомендовано увеличить диаметр цапфы. В качестве подтверждения достоверности и оценки точности результатов расчета кривошипного колеса использовалась оценка полученного решения, основанная на выполнении краевых условий. Критерием в данном случае является относительное среднеквадратичное отклонение вектора нагрузки, определенного, исходя из полученного решения с использованием краевых условий нагружения конструкции. Эта оценка по существу представляет собой относительное среднеквадратичное отклонение вектора невязки, которое обычно используется как мера точности найденного решения и в определении напряженно-деформированного состояния кривошипного колеса составляет 11%.

### 5.6.5 Напряженно-деформированное состояние гибкого колеса (ГК) волновой передачи

Волновые передачи отличает повышенная податливость обода одного из колес, а именно гибкого колеса, наиболее ответственного и оригинального звена волновой зубчатой передачи. Поэтому определение достоверной картины распределения напряжений в гибком колесе и, как подтверждают многочисленные исследования в его критической области – зубчатом венце, является важной задачей, так как если известно напряженно-деформированное состояние объекта, то срок службы конструкций может быть достаточно достоверно определен с помощью кривых или формул выносливости, учитывающих физико-механические свойства и способ обработки материала, из которого изготовлена конструкция. При этом сведения о напряженном состоянии конструкции в критических зонах должны быть как можно более точными, поскольку даже 20% погрешность при определении напряженно-деформированного состояния может привести к ошибке более чем в 2 раза при оценке срока службы конструкций.

Волновая передача сохраняет работоспособность при раз-



7000.00.00PP), в зависимости от диаметра  $D$  ГК. Угол  $\beta$  выбирается согласно табл. 5.6.5.2 в зависимости от передаточного отношения  $i$  передачи.

Таблица 5.6.5.1

|       |     |     |      |     |      |      |      |
|-------|-----|-----|------|-----|------|------|------|
| $D$   | 50  | 80  | 100  | 125 | 160  | 200  | 250  |
| $k_W$ | 0,8 | 1,1 | 1,15 | 1,2 | 1,27 | 1,35 | 1,44 |

Таблица 5.6.5.2

|         |        |         |            |
|---------|--------|---------|------------|
| $i$     | 60-120 | 120-150 | больше 150 |
| $\beta$ | 25     | 30      | 35         |

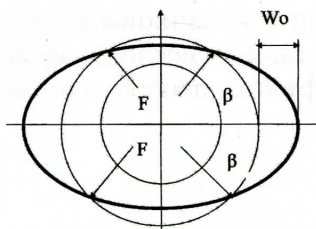


Рис. 5.6.5.1. Форма изгиба гибкого колеса

Распределение нагрузки между зубьями, находящимися в зацеплении, имеет очень большое значение для уточнения геометрического расчета нагруженного волнового зацепления, расчета нагрузочной способности зубьев, КПД и нагрева передачи, а также для расчета обода гибкого колеса и деталей генератора на прочность и жесткость. В теоретическом исследовании исходным является положение о том, что нагрузка на каждую пару контактирующих зубьев гибкого и жесткого колес пропорциональна перемещению точки приложения этой нагрузки, возникающему в результате деформации обоих зубьев пары и обода гибкого колеса (деформация обода жесткого колеса не учитывается). Коэффициентом пропорциональности является жесткость системы: пара зубьев – участок обода гибкого колеса (под зубом). Приводится в общем виде формула для определения нормального усилия, передаваемого каждой парой зубьев в зависимости от зазора (натяга) между ними, жесткости системы и величины нагрузки на передачу. Далее определяются все компоненты, входящие в указанную формулу. Зазоры между зубьями сначала рассматриваются в

ненагруженной передаче (до и после введения кулачка генератора), причем форма кулачка задается в общем виде. Зазоры определяются по головкам зубьев жесткого и гибкого колес. Далее определяются другие перемещения точки контакта зубьев вследствие изгиба, сжатия и сдвига, исходя из равенства энергии деформации работе внешних сил. Для зуба жесткого колеса кроме того учитывается его перемещение вследствие заделки в обод, а для гибкого – вследствие деформации обода. Перемещение обода гибкого колеса определяется исходя из расчета венца гибкого колеса, где это колесо рассматривается как кольцо, лежащее на упругом основании и уравновешенное потоком касательных сил. Для передачи с кулачковым генератором волн на основании экспериментальных исследований, нагрузку можно аппроксимировать графиком, изображенным на рис. 5.6.5.2.

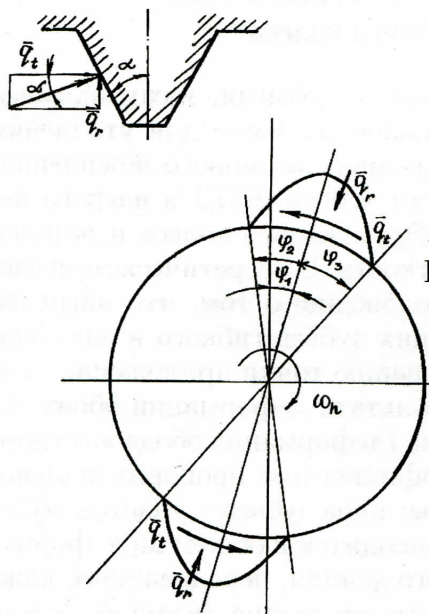


Рис. 5.6.5.2. Распределение нагрузки по гибкому колесу

Где углы  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  определяют размер зоны зацепления, а угол  $\varphi_1$  координирует расположение этой зоны относительно большой оси генератора – оси симметрии нагрузки,  $\tilde{q}_r$  и  $\tilde{q}_n$  – окружная и радиальная составляющие распределенной нагрузки в зацеплении. На участках, ограниченных углами  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ , они аппроксимируются зависимостями

$$\tilde{q}_{r2} = q_{t \max} \cos \frac{\pi}{2\varphi_2} (\varphi - \varphi_1);$$

$$\tilde{q}_{r3} = q_{t \max} \cos \frac{\pi}{2\varphi_3} (\varphi - \varphi_1);$$

$$\tilde{q}_{n2} = q_{t \max} \cos \frac{\pi}{2\varphi_2} (\varphi - \varphi_1) \operatorname{tg} \alpha_{\text{ср}};$$

$$\tilde{q}_{n3} = q_{t \max} \cos \frac{\pi}{2\varphi_3} (\varphi - \varphi_1) \operatorname{tg} \alpha_{\text{ср}},$$

где  $\tilde{q}_r$  – распределенная окружная нагрузка на единицу дуги окружности и ширины зубчатого венца;  $\tilde{q}_n$  – соответствующая радиальная нагрузка;  $\alpha_{\text{ср}}$  – угол профиля зуба. Величина  $\tilde{q}_{t \max}$  связана с моментом нагрузки передачи зависимостью

$$q_{t \max} = \frac{\pi T_2}{[(\varphi_2 + \varphi_3) D^2 b_W]},$$

где  $D$  – диаметр гибкого колеса;  $b_W$  – рабочая ширина зубчатого венца;  $T_2$  – крутящий момент.

На основании экспериментальных исследований для передач с наиболее распространенными значениями  $w_0 = (1 \div 1,4) m$  можно рекомендовать  $\varphi_2 \approx \pi/8$ ,  $\varphi_1 \approx -\pi/12$ .

Действие внешней распределенной нагрузки на венец гибкого колеса моделировалось статически эквивалентными сосредоточенными усилиями, приложенными в узлах сетки дискретизации гибкого колеса. Методика определения сосредоточенных усилий заключалась в следующем.

Рассмотрим элементарный отрезок, полученный в результате дискретизации венца гибкого колеса (рис. 5.6.5.3.). Координаты узлов обозначим через  $(r, \varphi_i)$  и  $(r, \varphi_j)$ . Считалось,



что внешние нагрузки действуют по нормали и касательной к отрезку и аппроксимируются линейными зависимостями от угла  $\varphi$ , то есть

$$q_n(\varphi) = q_n^{(0)} + q_n^{(1)}\varphi; \quad q_\tau(\varphi) = q_\tau^{(0)} + q_\tau^{(1)}\varphi, \quad (5.6.5.1)$$

где  $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_j]$ . Для определения коэффициентов  $q_n^{(0)}$ ,  $q_n^{(1)}$ ,  $q_\tau^{(0)}$ ,  $q_\tau^{(1)}$  запишем (2.6) в виде

$$q_{n_i} = q_n^{(0)} + q_n^{(1)}\varphi_i; \quad q_{n_j} = q_n^{(0)} + q_n^{(1)}\varphi_j; \quad (5.6.5.2)$$

$$q_{\tau_i} = q_\tau^{(0)} + q_\tau^{(1)}\varphi_i; \quad q_{\tau_j} = q_\tau^{(0)} + q_\tau^{(1)}\varphi_j. \quad (5.6.5.3)$$

Вычитая второе уравнение из первого системы (5.6.5.2), получим

$$\begin{aligned} q_{n_i} - q_{n_j} &= q_n^{(1)} \cdot \varphi_i - q_n^{(1)} \cdot \varphi_j; \\ q_{n_i} - q_{n_j} &= q_n^{(1)} (\varphi_i - \varphi_j); \\ q_n^{(1)} &= \frac{q_{n_i} - q_{n_j}}{\varphi_i - \varphi_j}; \end{aligned} \quad (5.6.5.4)$$

Подставляя (5.6.5.4) в первое уравнение системы (5.6.5.2), имеем

$$\begin{aligned} q_{n_i} &= q_n^{(0)} + \frac{q_{n_i} - q_{n_j}}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi_i; \\ q_n^{(0)} &= q_{n_i} - \frac{q_{n_i} - q_{n_j}}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi_i = \\ &= \frac{q_{n_i}\varphi_i - q_{n_j}\varphi_j - q_{n_i}\varphi_i + q_{n_j}\varphi}{\varphi_i - \varphi_j} = \frac{-q_{n_i}\varphi_j + q_{n_j}\varphi_i}{\varphi_i - \varphi_j} = \\ &= \frac{q_{n_j}\varphi_i - q_{n_i}\varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j}; \end{aligned} \quad (5.6.5.5)$$

Для  $q_\tau^{(0)}$  и  $q_\tau^{(1)}$  выкладки ведутся аналогично. Таким образом, коэффициенты  $q_n^{(0)}$ ,  $q_n^{(1)}$ ,  $q_\tau^{(0)}$ ,  $q_\tau^{(1)}$  принимают вид:

$$q_n^{(0)} = \frac{q_{n_j}\varphi_i - q_{n_i}\varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j}; \quad q_n^{(1)} = \frac{q_{n_i} - q_{n_j}}{\varphi_i - \varphi_j};$$

$$q_{\tau}^{(0)} = \frac{q_{\tau j} \varphi_i - q_{\tau i} \varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j}; \quad q_{\tau}^{(1)} = \frac{q_{\tau i} - q_{\tau j}}{\varphi_i - \varphi_j}. \quad (5.6.5.6)$$

Отметим, что сплайн аппроксимация (5.6.5.1), (5.6.5.6) обеспечивает непрерывность распределения внешней нагрузки по всему венцу гибкого колеса. Для нахождения сосредоточенных усилий в узлах дискретизации необходимо определить работу приложенной нагрузки  $\tilde{q}_{\tau_2}, \tilde{q}_{\tau_3}, \tilde{q}_{n_2}, \tilde{q}_{n_3}$  на перемещениях  $u_n$  и  $u_{\tau}$ . Очевидно, что

$$A = \int_{\varphi_i}^{\varphi_j} [q_n(\varphi) u_n(\varphi) + q_{\tau}(\varphi) u_{\tau}(\varphi)] d\varphi, \quad (5.6.5.7)$$

где  $u_n$  – нормальные,  $u_{\tau}$  – касательные перемещения. Поскольку узловыми неизвестными в задаче являются перемещения относительно глобальной системы координат, выразим  $u_n$  и  $u_{\tau}$  через  $u$  и  $v$

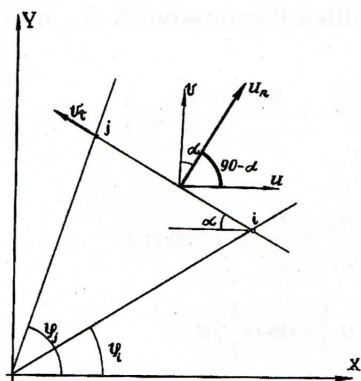


Рис. 5.6.5.3. Отрезок дискретизации

$$u_n = u \sin \alpha + v \cos \alpha; \quad u_{\tau} = v \sin \alpha + u \cos \alpha, \quad (5.6.5.8)$$

где  $\alpha$  – угол между глобальной и локальной системой координат. Закон изменения перемещений в пределах отрезка принимается линейным, то есть

$$u = u_0 + u_1 \varphi; \quad v = v_0 + v_1 \varphi, \quad (5.6.5.9)$$

где  $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_j]$ . Коэффициенты  $u_0, v_0, u_1, v_1$  находим аналогично (5.6.5.6):

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{u_j \varphi_i - u_i \varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j}; & u_1 &= \frac{u_i - u_j}{\varphi_i - \varphi_j}; \\ v_0 &= \frac{v_j \varphi_i - v_i \varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j}; & v_1 &= \frac{v_i - v_j}{\varphi_i - \varphi_j}. \end{aligned} \quad (5.6.5.10)$$

Подставляя (5.6.5.8), (5.6.5.9) в (5.6.5.7) и учитывая (5.6.5.1), имеем

$$\begin{aligned} A &= \int_{\varphi_i}^{\varphi_j} [(q_n^{(0)} + q_n^{(1)} \varphi) (u \sin \alpha + v \cos \alpha) + \\ &+ (q_\tau^{(0)} + q_\tau^{(1)} \varphi) (v \sin \alpha - u \cos \alpha)] d\varphi. \end{aligned} \quad (5.6.5.11)$$

С учетом (5.6.5.6) и (5.6.5.10) представим работу  $A$  как сумму работ нормальных  $A_n$  и касательных напряжений  $A_\tau$ , получим

$$\begin{aligned} A_n &= \int_{\varphi_i}^{\varphi_j} \left\{ \left( \frac{q_{n_j} \varphi_i - q_{n_i} \varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j} + \frac{q_{n_j} - q_{n_i}}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi \right) \times \right. \\ &\times \left[ \left( \frac{u_j \varphi_i - u_i \varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j} + \frac{u_j - u_i}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi \right) \sin \alpha + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{v_j \varphi_i - v_i \varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j} + \frac{v_j - v_i}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi \right) \cos \alpha \right] \Big\} d\varphi; \end{aligned} \quad (5.6.5.12)$$

$$\begin{aligned} A_\tau &= \int_{\varphi_i}^{\varphi_j} \left\{ \left( \frac{q_{\tau_j} \varphi_i - q_{\tau_i} \varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j} + \frac{q_{\tau_j} - q_{\tau_i}}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi \right) \times \right. \\ &\times \left[ \left( \frac{v_j \varphi_i - v_i \varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j} + \frac{v_j - v_i}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi \right) \sin \alpha + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{u_j \varphi_i - u_i \varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j} + \frac{u_j - u_i}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi \right) \cos \alpha \right] \Big\} d\varphi. \end{aligned} \quad (5.6.5.13)$$



Узловые усилия определяются по формулам:

$$\begin{aligned} FX_i &= \frac{\partial A}{\partial u_i}; & FX_j &= \frac{\partial A}{\partial u_j}; \\ FY_i &= \frac{\partial A}{\partial v_i}; & FY_j &= \frac{\partial A}{\partial v_j}, \end{aligned} \quad (5.6.5.14)$$

где  $A = A_n + A_r$ . Продифференцировав и произведя возможные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} FX_i &= \sin \alpha \left[ \frac{q_{nj}\varphi_i - q_{ni}\varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi_j + \right. \\ &+ \frac{1}{2} (\varphi_j + \varphi_i) \left( \frac{q_{ni} - q_{nj}}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi_j - \frac{q_{nj}\varphi_i - q_{ni}\varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j} \right) - \\ &\left. - \frac{1}{3} \frac{q_{ni} - q_{nj}}{\varphi_i - \varphi_j} (\varphi_j^2 + \varphi_j\varphi_i + \varphi_i^2) \right]; \end{aligned} \quad (5.6.5.15)$$

$$\begin{aligned} FX_j &= \sin \alpha \left[ - \frac{q_{nj}\varphi_i - q_{ni}\varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi_i + \right. \\ &+ \frac{1}{2} (\varphi_j + \varphi_i) \left( \frac{q_{nj}\varphi_i - q_{ni}\varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j} - \frac{q_{ni} - q_{nj}}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi_i \right) + \\ &\left. + \frac{1}{3} \frac{q_{ni} - q_{nj}}{\varphi_i - \varphi_j} (\varphi_j^2 + \varphi_j\varphi_i + \varphi_i^2) \right]; \end{aligned} \quad (5.6.5.16)$$

$$FY_i = FX_i \operatorname{ctg} \alpha; \quad FY_j = FX_j \operatorname{ctg} \alpha.$$

Полные усилия в узлах определяем путем суммирования усилий от каждого отрезка, образующего данный узел.

$$\begin{aligned} FX_i &= FX_{iN} + FX_{i(N-1)}; \\ FY_i &= FY_{iN} + FY_{i(N-1)}, \end{aligned}$$

где  $i = 1, 2, \dots, NP$ ;  $N = 1, 2, \dots, (NP - 1)$  — номер отрезка;  $NP$  — число узлов дискретизации.

Расчетная схема гибкого колеса выбиралась в виде гибкого стакана, тонкой цилиндрической оболочки, соединенной со ступицей посредством диафрагмы, как правило плоской, со ступенчатым утолщением в зоне соединения со ступицей. На противоположном от «донышка» торце стакана по периметру нарезается зубчатый венец, причем стенка стакана под венцом выполняется утолщенной. Перед зубчатым венцом от торца остается узкая (в 5 – 10 раз уже зубчатого венца) полоска толщиной, равной толщине стенки стакана в зоне отсутствия зубчатого венца.

При расчетах гибких колес ВЗП, как правило, делается ряд допущений, позволяющих в той или иной степени упростить решение задачи. Необходимость этих допущений обусловлена специфичностью волновых зубчатых передач. В данном случае при выборе математической модели принимались следующие допущения. Утолщенную зону диафрагмы, служащую местом крепления ступицы входного вала, можно не рассматривать, считая границу диафрагмы от данного утолщения жестко заземленной, так как разница в толщине, а следовательно, жесткости существенно отличаются. Учитывая также, что мелко модульность и большое число зубьев не дают возможности строить модель с учетом зубьев на гибком колесе в связи с возникающими вычислительными трудностями, предполагается проведение «размазывания» зубьев венца, то есть толщина гладкого кольца под зубчатым венцом принимается такой, чтобы выполнялось равенство жесткостей его и зубчатого венца при наличии зубьев. При составлении конечно-элементной схемы существенное внимание обращалось на точность воспроизведения реальной геометрии диафрагмы с отверстиями, согласно реального ГК. Данные отверстия служат для увеличения податливости диафрагмы, а также для более полной реализации системы смазки волновой зубчатой передачи.

В качестве исходного рассматривалось гибкое колесо серийной волновой передачи ВЗП-160:

— передаточное отношение  $i = 204$ ;

- число зубьев на ГК  $z = 408$ ;
- число зубьев на ЖК  $z = 410$ ;
- модуль зацепления  $m = 0,4$ ;
- коэффициент смещения исходного контура  $\chi = 4$ ;
- крутящий момент  $T_2 = 100$  ;
- генератор волн деформации – кулачковый;
- гибкое колесо типа «стакан».

Дискретная расчетная модель состояла из треугольных элементов. Точность дискретизации по отношению к реальной конструкции достигается точным заданием координат узлов, лежащих на границе области и густотой сетки. Было выполнено несколько вариантов дискретизации «донышка» с целью оптимизации процесса расчета. На рис. 5.6.5.4 показаны дискретизации «донышка» гибкого колеса ВЗП-160 с различной густотой сетки, что позволило выбрать наименьшую густоту, приемлемую для точности расчета. Естественно, что густота разбиения боковой поверхности ГК выполнялась соответственно частоте разбиения «донышка». Число узлов и треугольников после дискретизации при различной густоте сетки приведено в таб. 5.6.5.3. При дискретизации цилиндрической части гибкого колеса (рис. 5.6.5.5) соблюдалось соответствие границ дискретизации участка расположения зубчатого венца с геометрией его реального расположения.

Таблица 5.6.5.3

| Дискретизация | Кол-во узлов |          |        | Кол-во треугог. |          |        |
|---------------|--------------|----------|--------|-----------------|----------|--------|
|               | Дно          | Оболочка | Колесо | Дно             | Оболочка | Колесо |
| 1             | 280          | 527      | 807    | 464             | 1020     | 1484   |
| 2             | 504          | 1125     | 1629   | 847             | 2200     | 3047   |
| 3             | 689          | 2013     | 2702   | 1212            | 3960     | 5172   |

Это условие позволило предположить, что перемещения, сообщаемые генератором волн, распределяются по всей зоне расположения зубчатого венца, так как ширина кулачкового



генератора волн больше ширины вышеуказанной зоны. Кроме того, на гибкое колесо в результате взаимодействия зубьев гибкого и жесткого колес волновой передачи действуют силы от зацепления, нормальные и касательные к профилю зуба, направление и точка приложения которых зависят от параметров волновой передачи. Воздействие этих сил приводит к возникновению дополнительного изгибающего момента в зубчатом венце гибкого колеса.

В работе использован следующий подход для определения напряженно-деформированного состояния ГК, состоящий из двух этапов. На первом этапе рассчитывается гибкое колесо, как оболочка с учетом вышеуказанных допущений, на втором этапе решается задача определения напряженно-деформированного состояния в зубчатом венце ГК ВЗП как трехмерная задача теории упругости с использованием решений первого этапа в качестве граничных условий. Для уменьшения числа неизвестных и ввиду симметрии гибкого колеса рассматривается половина ГК. Так как перемещения, получаемые ГК от генератора волн деформации, имеют симметричное распределение (рис. 5.6.5.6, *а*), а нагрузка на зубья носит кососимметричный характер (рис. 5.6.5.6, *б*, *в*), то эти задачи решались независимо друг от друга с последующим суммированием ввиду линейности.

Для решения задачи на втором этапе выделялся фрагмент зубчатого венца гибкого колеса между двумя сечениями, проходящими через середины впадин зубьев так, чтобы между ними было три зуба. Такое число зубьев в зоне средней впадины, позволяет свести к минимуму влияние краевых эффектов и повысить точность расчета. Несмотря на малость шага зубчатого венца волновой передачи по сравнению с радиусом делительной окружности, кривизной расчетной модели пренебрегать не будем, но геометрия профиля данной передачи ВЗП-160 по ГОСТ 9587-68 позволяет пренебречь радиусом скругления при переходе боковой поверхности зуба во впадину, а также принять прямолинейность боковой поверхности зуба.

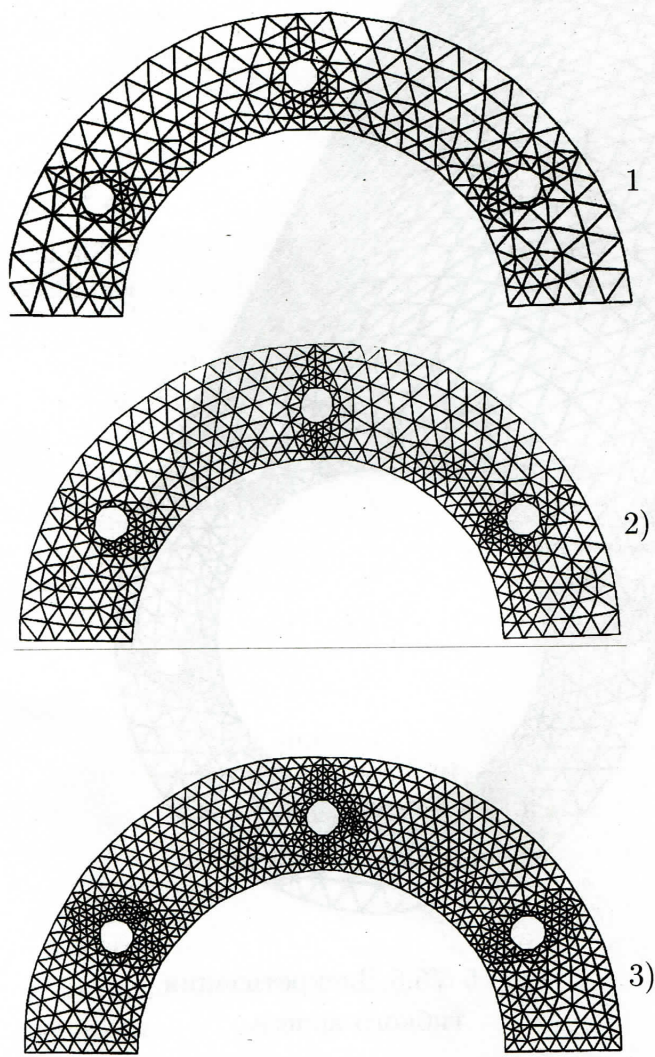


Рис. 5.6.5.4. Дискретизация доньшка 1, 2, 3

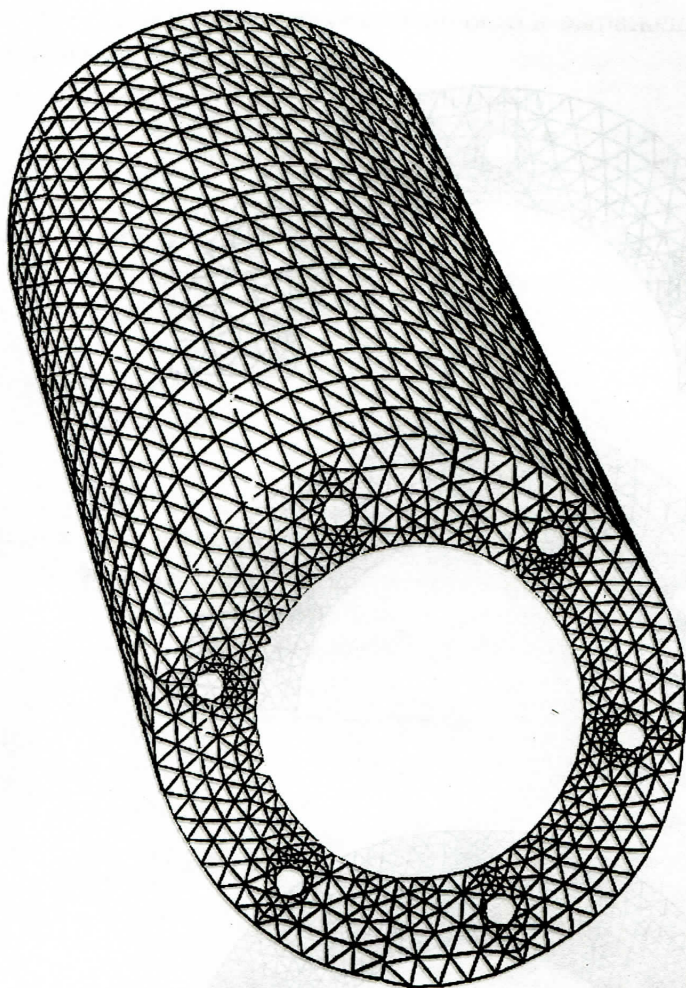
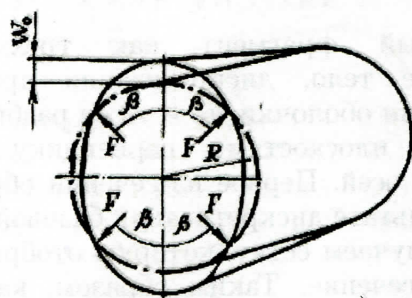
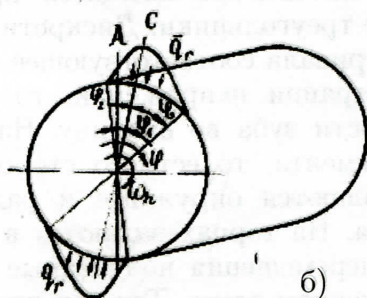


Рис. 5.6.5.5. Дискретизация  
гибкого колеса

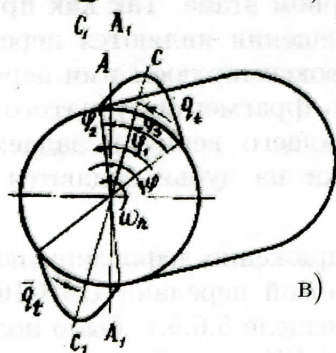




а)



б)



в)

Рис. 5.6.5.6. Расчетная схема  
гибкого колеса а, б, в

Представив вырезанный фрагмент как трехмерное ступенчато-призматическое тело, дискретизация проводилась согласно дискретизации оболочки, то есть он разбивался на конечное число слоев плоскостями, перпендикулярными какой-либо из базовых осей. Первое из сечений образует базовую плоскость. В результате дискретизации базовой плоскости на треугольники получаем сетку, которую отображаем на каждое последующее сечение. Таким образом, каждый слой оказывается разбит на непересекающиеся призмы, в основаниях которых лежат треугольники. Дискретизация базовой плоскости предусматривала соответствующее сгущение в зоне ожидаемой концентрации напряжений, то есть при переходе боковой поверхности зуба во впадину. На нижнем контуре выделенного фрагмента, то есть со стороны взаимодействия ГК с ГВД задаются окружные и радиальные перемещения от генератора. На торцах задаются в качестве граничных перемещений, перемещения полученные при расчете ГК как оболочки на первом этапе. Так как при расчете оболочки получаемые перемещения являются перемещениями срединной линии, то аппроксимируем ими перемещения срединной линии выбранного фрагмента зубчатого венца по ширине ободка, предшествующего венцу и задаем их как граничные условия. Нагрузки на зубья задаются согласно раздела 5.6.5.1

В результате расчета напряженно-деформированного состояния гибкого колеса волновой передачи ВЗП-160 согласно методике, изложенной в разделе 5.6.5.1, было получено на первом этапе, то есть расчете ГК как оболочки, следующее: на рис. 5.6.5.9, 5.6.5.10 показано распределение напряжений в поперечном сечении в зоне, соответствующей расположению зубчатого венца, при изгибе и кручении соответственно. Максимальные напряжения при изгибе составляют порядка 90 МПа на большой оси генератора волн, при кручении порядка 110 МПа по оси, соответствующей максимуму кососимметричной нагрузки. На рис. 5.6.5.10 представлены графики

изменения напряжений в ГК по образующей, проходящей по большой оси генератора волн, и оси максимума нагрузки для изгиба и кручения соответственно. В обоих случаях напряжения на ободке перед зоной зубчатого венца порядка 20 – 30 МПа, в зоне стыковки доньшка и цилиндрической части колеса — порядка 25 – 40 МПа. В месте перехода зоны, соответствующей зубчатому венцу, в цилиндрическую часть гибкого колеса наблюдается скачок напряжений до 140 МПа из-за разности толщин при переходе и возникновении дополнительного изгибающего момента. Данный скачок невозможно отследить никакими другими методами. Картина распределения эквивалентных напряжений в «доньшке» гибкого колеса от изгиба и кручения представлена на рисунке 5.6.5.7.

Исходными данными при расчете зубчатого венца ГК служили конструкция, физико-механические свойства и нагрузки волновой ВЗП-160. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона принимались соответственно  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа и  $\nu = 0,3$ . Номинальный передаваемый момент 100 Нм. Геометрия профиля зубчатого венца и гибкого колеса соответствовала рабочим чертежам. Перемещения, задаваемые генератором волн деформации кулачкового типа, и усилия, возникающие в зацеплении, определялись согласно методике, изложенной в разделе 5.6.5.1. При построении дискретной модели зубчатого венца использовался подход, описанный в 5.6.5.1. В результате дискретизации модели зубчатого венца на треугольники получено на базовой плоскости 1447 узлов и 2721 элемент. Зубчатый венец по образующей разбивался на пять равномерно расположенных сечений таким образом число неизвестных в задаче составило 21705. Подготовку данных и расчет проводили на ЭВМ. Для решения задачи потребовалось 650 итераций. Решение велось поэтапно с записью промежуточной информации об узловых перемещениях на внешнее запоминающее устройство для обеспечения сохранности информации при сбое, и на последующих этапах вычислений эта запись использовалась в качестве начального приближения. В результате расчета были получены поля главных напряжений. Расчетные напряжения



и условия прочности определялись по энергетической теории и теории Г.С. Писаренко и А.А. Лебедева. На рис. 5.6.5.8 представлены поля эквивалентных напряжений в наиболее напряженном сечении зубчатого венца, перпендикулярного к его образующей. Анализ напряженно-деформированного состояния позволил установить следующее: эквивалентные напряжения достигают максимума во впадине зуба зубчатого венца и не превышают 136 МПа, на внутренней стороне гибкого колеса, то есть по нижней кромке зубчатого венца напряжения не превышают 31 МПа, в зоне приложения нагрузки они находятся на уровне 100 МПа. По образующей зубчатого венца, проходящей по впадине зуба распределение напряжений носит слабо выраженный седловидный характер с явной симметрией относительно середины зоны расположения венца.

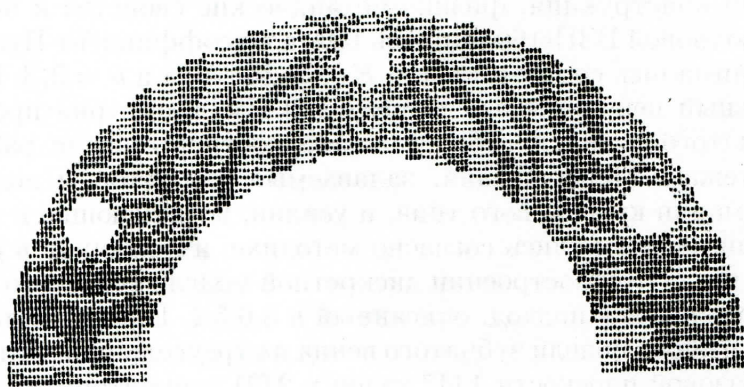


Рис. 5.6.5.7. Поле напряжений  $\sigma_{ekv}$

Качественное распределение напряжений во всех сечениях практически одинаково, количественно первое, пятое и второе, четвертое сечения совпадают по величине. Расхождение в величине эквивалентных напряжений крайних сечений относительно середины находится в пределах 25-30%. Поскольку полученные напряжения не превосходят допускаемых, то очевидно, что ГК ВЗП-160 при нагрузке 1000 Нм на выходном валу, является работоспособным и имеет некоторый запас прочности.



Рис. 5.6.5.8. Поле напряжений

в зоне зубьев

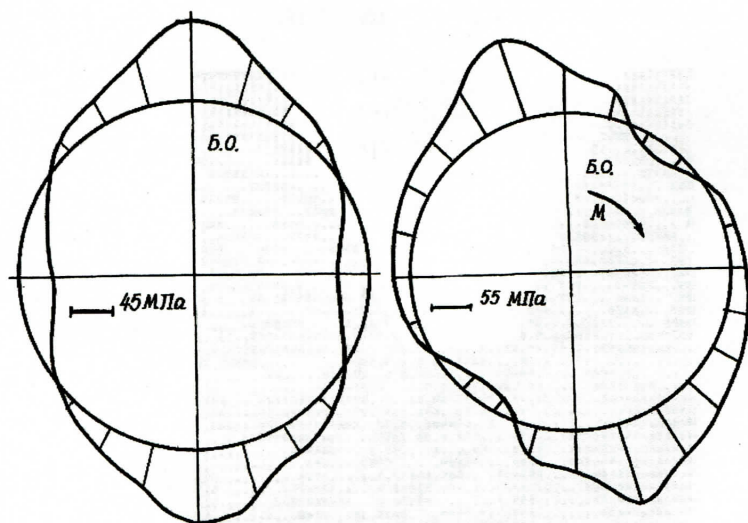


Рис. 5.6.5.9. Поле напряжений в ГК

в зоне зубчатого венца

а) от изгиба;

б) от кручения.

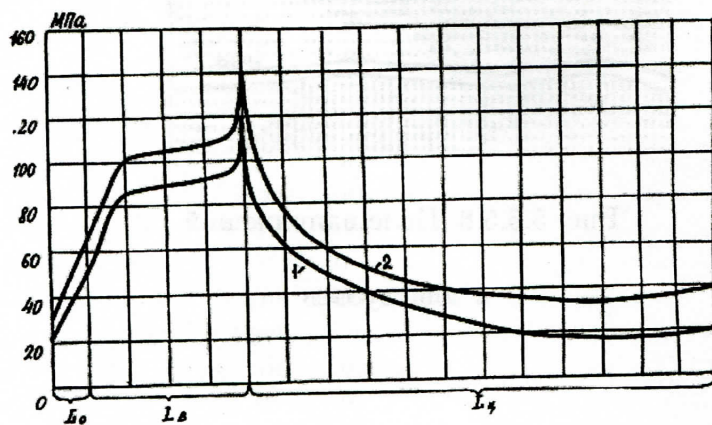


Рис. 5.6.5.10. Поле напряжений в ГК от изгиба



## 5.7 Колебания пластин в своей плоскости

### 5.7.1 Колебания лопатки-пластины

Решена задача о свободных колебаниях лопатки. Расчетной схемой рассматриваемой системы служит пластина сложного очертания (рис. 5.7.1.1), совершающая колебания в своей плоскости.

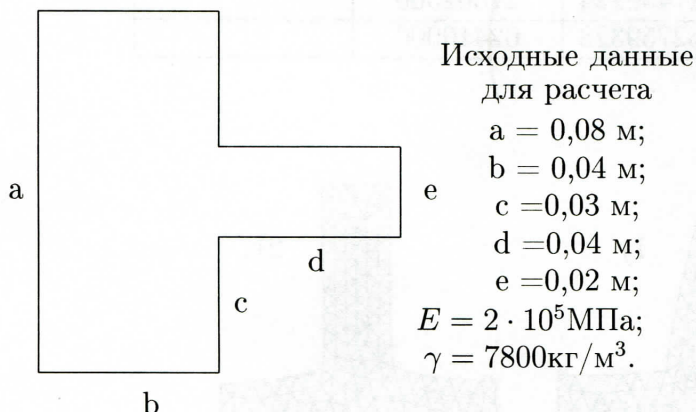


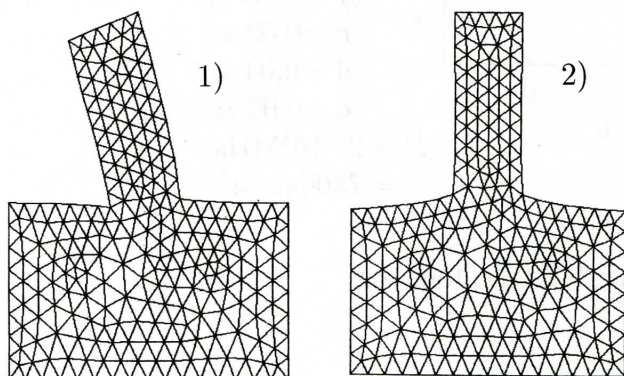
Рис. 5.7.1.1. Лопатка

Для решения использовалась нерегулярная сетка. Для оценки точности собственных частот и экспериментальной проверки сходимости задача о свободных колебаниях лопатки-пластины решалась на трех сетках с количеством узлов соответственно 97, 176 и 294. В результате решения задачи были определены четыре первые собственные частоты и соответствующие им нормированные собственные формы колебаний. Результаты расчета по разработанному алгоритму и по данным, представленным в работе [9], практически совпадают, расхождение не превышало 3%. Наблюдалось лишь незначительное уменьшение частот из-за более полной постановки задачи. С увеличением числа элементов частоты изменя-

лись незначительно. Значения частот конструкции приведены в табл. 5.7.1.1, формы собственных колебаний представлены на рис. 5.7.1.2-5.7.1.4.

Таблица 5.7.1.1

| Форма | Расчет   | Лит. данные | Эксперимент |
|-------|----------|-------------|-------------|
| 1     | 1918304  | 2016400     | данные      |
| 2     | 16343060 | 16646400    | отсутствуют |
| 3     | 27490224 | 27562500    |             |
| 4     | 62759328 | 62410000    |             |



1) первая форма; 2) вторая форма.

Рис. 5.7.1.2. Плоские колебания лопатки

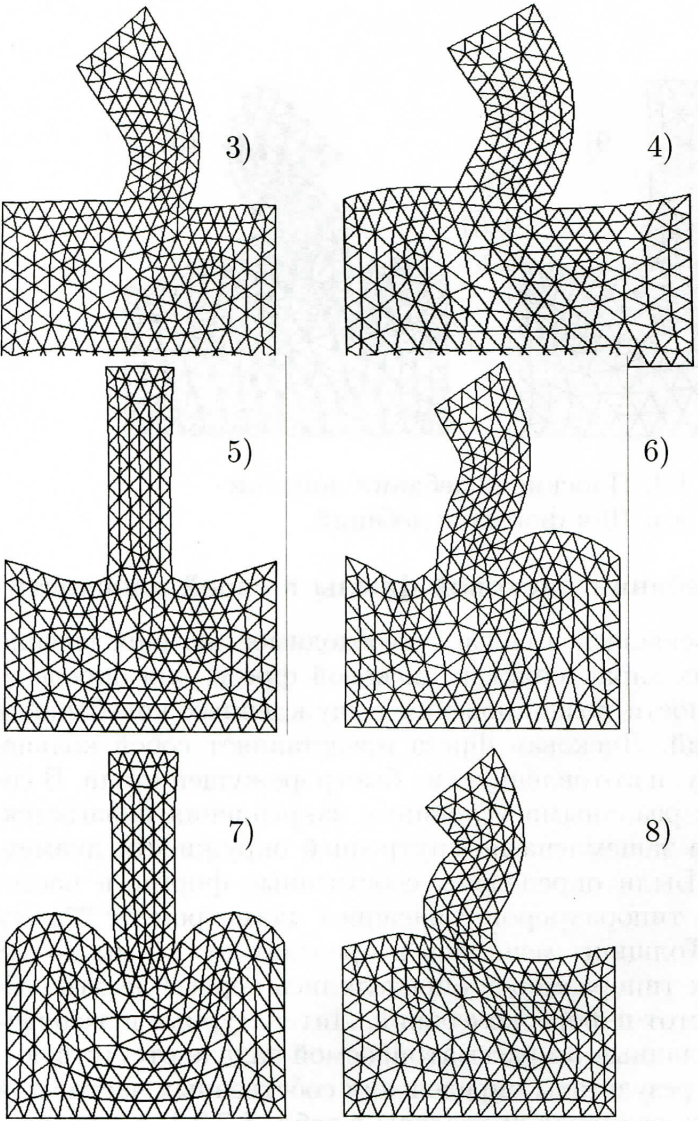


Рис. 5.7.1.3. 3, 4, 5, 6, 7, 8 формы



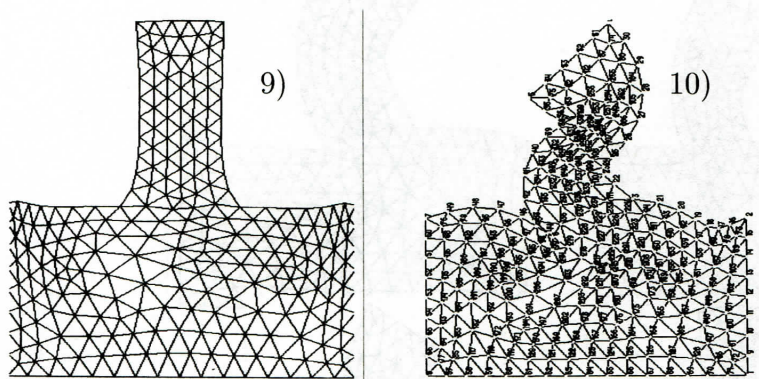


Рис. 5.7.1.4. Плоские колебания лопатки  
9-я и 10-я форма колебаний.

### 5.7.2 Колебания дисковой фрезы в своей плоскости

Задача решалась в связи с необходимостью определения динамических характеристик дисковой фрезы для определения возможности возникновения вынужденных колебаний и автоколебаний. Дисковая фреза представляет собой кольцевую пластину, изготовленную из быстрорежущей стали. В соответствии с реальными условиями закрепления полагается, что пластина закреплена по внутренней окружности диаметром 95 мм. Были определены собственные формы и частоты для ряда типоразмеров с внешним диаметром от 275 мм до 200 мм. Толщины менялись в пределах от 2,5 мм до 1,8 мм. Для всех типоразмеров определялись первые десять собственных частот и форм колебаний. Литературные и экспериментальные данные по рассматриваемой задаче отсутствуют. Полученные результаты определения собственных частот для одного из типоразмеров приведены в табл. 5.7.2.1, а собственные формы показаны на рис. 5.7.2.1 - 5.7.2.2.

Таблица 5.7.1.2

| Частоты плоских колебаний фрезы |            |          |           |
|---------------------------------|------------|----------|-----------|
| Форма                           | Расчет     | Лит.дан. | Эксперим. |
| 1                               | 608144800  | нет      | нет       |
| 2                               | 1935035000 | нет      | нет       |
| 3                               | 1935035000 | нет      | нет       |
| 4                               | 4790692000 | нет      | нет       |
| 5                               | 4789492000 | нет      | нет       |
| 6                               | 8016144000 | нет      | нет       |
| 7                               | 8016146000 | нет      | нет       |
| 8                               | 8945327000 | нет      | нет       |
| 9                               | 8945333000 | нет      | нет       |
| 10                              | 9115384000 | нет      | нет       |

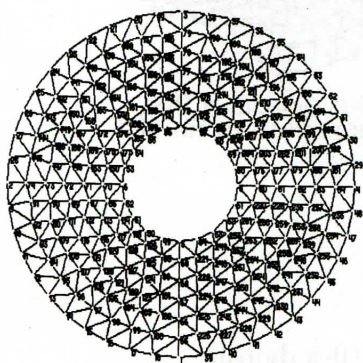
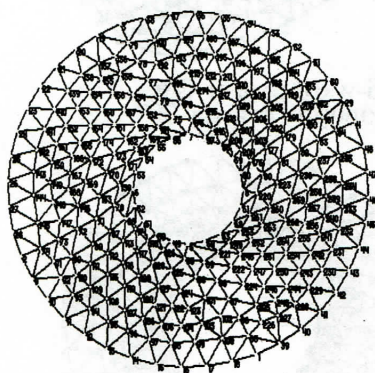
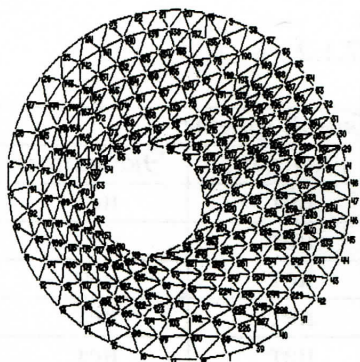


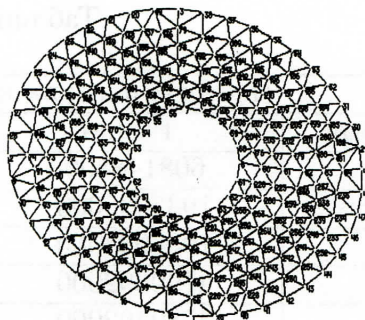
Рис.5.7.2.1 Фреза.  
Начальная форма



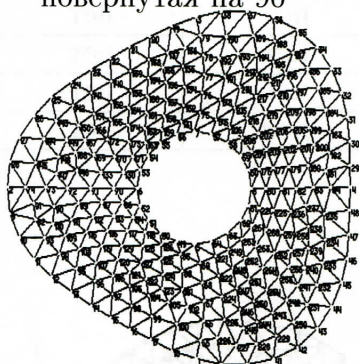
1-я форма



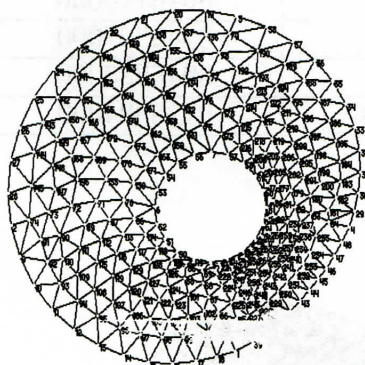
2-я форма и 3-я,  
повернутая на  $90^\circ$



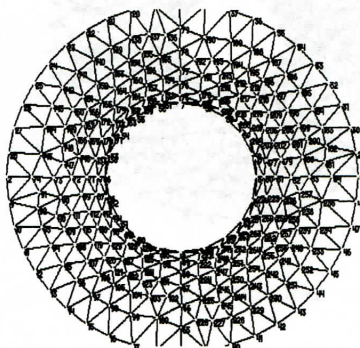
4-я форма и 5-я,  
повернутая на  $45^\circ$



6-я форма и 7-я,  
повернутая на  $90^\circ$



8-я форма и 9-я,  
повернутая на  $90^\circ$



10-я форма

Рис. 5.7.2.2. Колебания фрезы в своей плоскости



## 5.8 Определение собственных частот и собственных форм изгибных колебаний

### 5.8.1 Собственные изгибные колебания квадратной пластинки

В качестве тестовых рассматривалось несколько задач о свободных колебаниях квадратной пластинки.

1. Пластика жестко зашцеилена по контуру. Данная задача не поддается решению в аналитической форме, поэтому результаты расчета сравнивались с решениями, полученными приближенными методами Релея–Ритца, Эдмана, Игути. Задача решалась на различных сетках. Далее приведено решение на нерегулярной сетке, которая содержала 223 узла и 392 треугольника. Было получено 10 низших собственных частот и соответствующие им формы колебаний. Значения собственных частот приведены в табл. 5.8.1.1. Формы колебаний в виде изолиний представлены на рис. 5.8.1.1.

Таблица 5.8.1.1

| Форма | Расчет | Лит. данные | Эксперимент |
|-------|--------|-------------|-------------|
| 1     | 3,646  | 3,582       | нет         |
| 2     | 7,437  | 7,113       | нет         |
| 3     | 7,437  | 7,198       | нет         |
| 4     | 10,965 | 10,360      | нет         |
| 5     | 13,393 | 12,628      | нет         |
| 6     | 13,393 | 12,659      | нет         |

2. Пластика, жестко зашцеиленная по двум противоположным краям. Задача решалась на сетке содержащей 68 узлов и 112 треугольников. Значения безразмерных собственных частот приведены в табл. 5.8.1.2.

Таблица 5.8.1.2

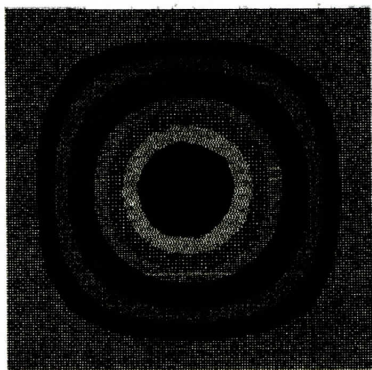
| Форма | Расчет | Лит. данные | Эксперимент |
|-------|--------|-------------|-------------|
| 1     | 21,989 | 22,184      | нет         |
| 2     | 26,437 | 26,441      | нет         |
| 3     | 43,658 | 43,614      | нет         |
| 4     | 59,985 | 61,203      | нет         |
| 5     | 66,238 | 67,251      | нет         |
| 6     | 78,407 | 82,163      | нет         |

3. Пластика, заземленная по двум смежным краям. Задача решалась на регулярной сетке, было получено шесть первых собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний. Значения частот, полученные с помощью предложенного алгоритма, несколько ниже частот, полученных другими приближенными методами [79], что хорошо видно из табл. 5.8.1.3.

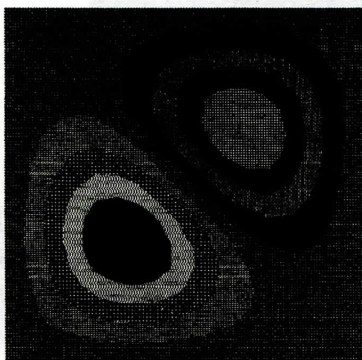
Таблица 5.8.1.3

| Форма | Расчет | Лит. данные | Эксперимент |
|-------|--------|-------------|-------------|
| 1     | 6,937  | 6,958       | нет         |
| 2     | 24,037 | 24,081      | нет         |
| 3     | 26,624 | 26,802      | нет         |
| 4     | 47,537 | 48,054      | нет         |
| 5     | 62,765 | 63,147      | нет         |
| 6     | 65,685 |             | нет         |

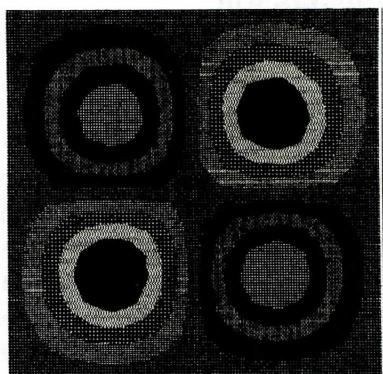
Следует отметить, что значения собственных частот, полученных с помощью «МПС», несколько ниже частот, вычисленных с помощью вышеуказанных приближенных методов, что может быть обусловлено более точным определением собственных форм, что разработанный подход позволяет автоматически найти все формы колебаний, соответствующие одной и той же собственной частоте, что необходимо при решении задачи о вынужденных колебаниях.



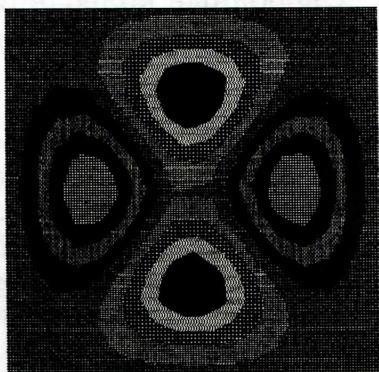
1-я форма



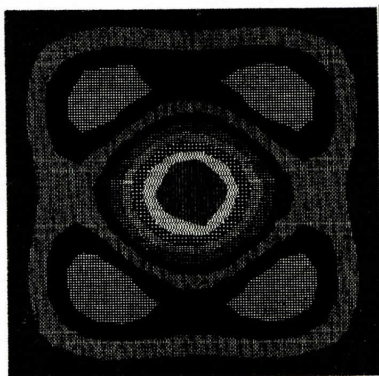
2-я форма и 3-я  
повернута на  $90^\circ$ .



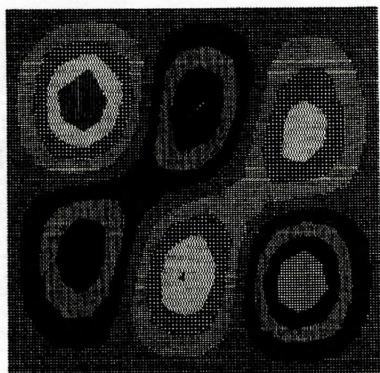
4-я форма



5-я форма

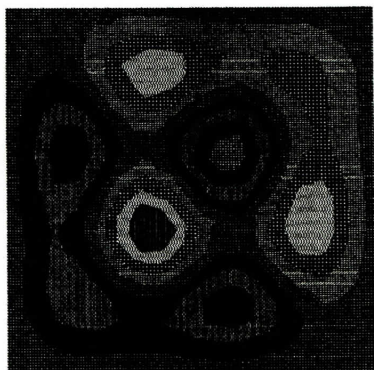


6-я форма



7-я форма и 8-я  
повернута на  $90^\circ$ .





9-я форма

Рис. 5.8.1.1.

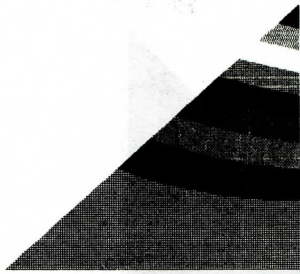
Изгибные колебания  
квадратной пластинки,  
защемленной по 4-м сторонам

### 5.8.2 Свободные колебания консольной треугольной пластинки

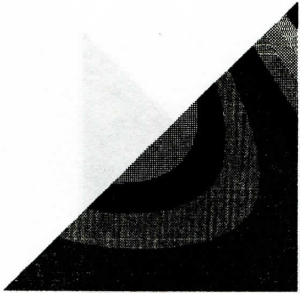
В качестве тестового примера решалась задача о свободных колебаниях консольной пластинки, являющейся в плане прямоугольным треугольником. В результате разбивки было получено 267 узлов и 464 треугольника. Значения девяти приведенных частот представлены в табл. 5.8.2.1. Для сравнения приведены результаты, полученные по методу Ритца, разбиением на систему балок и экспериментальные результаты. Формы собственных колебаний представлены на рис. 5.8.2.1.

Таблица 5.8.2.1

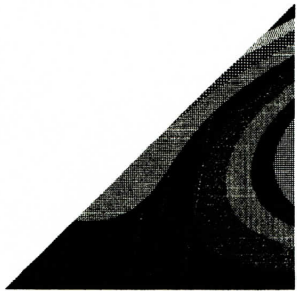
| Форма | Расчет | Лит. данные | Эксперимент |
|-------|--------|-------------|-------------|
| 1     | 4,34   | 4,35; 4,42  | 4,17        |
| 2     | 16,5   | 16,8; 16,9  | 16,4        |
| 3     | 23,0   | 23,0; 23,7  | 23,0        |
| 4     | 39,4   | 38,9; 43,6  | 39,3        |
| 5     | 53,4   | 53,6; —     | 53,3        |
| 6     | 69,9   | 60,3; —     | 69,9        |
| 7     | 78,8   |             |             |



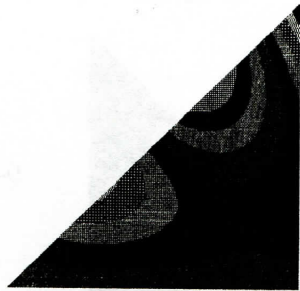
1-я форма



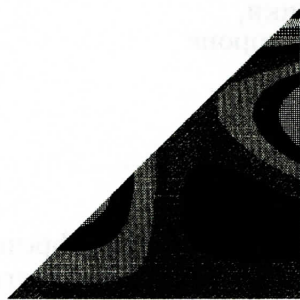
2-я форма



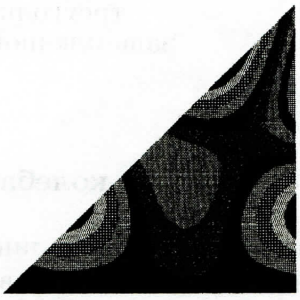
3-я форма



4-я форма



5-я форма



6-я форма



Рис. 5.8.2.1. Изгибные колебания  
треугольной пластинки,  
защемленной по одной стороне

### 5.8.3 Изгибные колебания фрезы

С целью определения динамических характеристик фрезы и частично в качестве тестового примера, поскольку существующих данных не достаточно, решалась задача о свободных колебаниях круговой пластинки, жестко защемленной по внутреннему контуру. В качестве примера приведены результаты для наружного диаметра 275 мм, внутреннего 91 мм при толщине 2,5 мм. В результате дискретизации получено 306 узлов и 546 треугольников. Двадцать собственных форм и соответ-

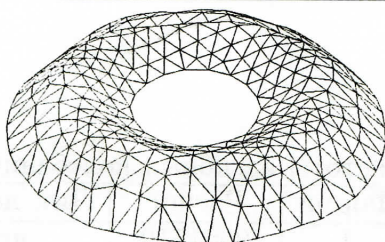
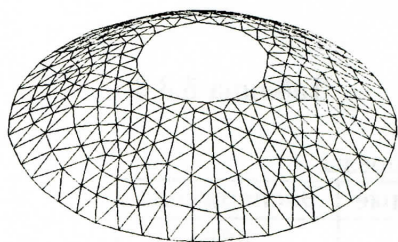


ствующих приведенных частот представлены в табл. 5.8.3.1 и на рис. 5.8.3.1.

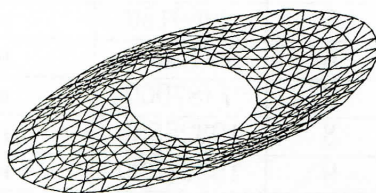
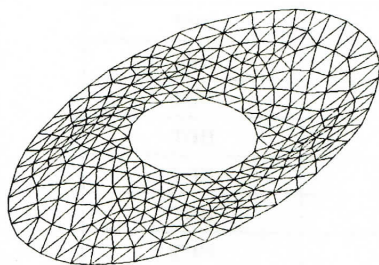
Таблица 5.8.3.1

Частоты изгибных колебаний фрезы

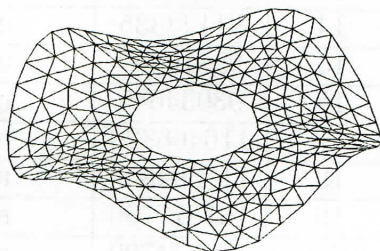
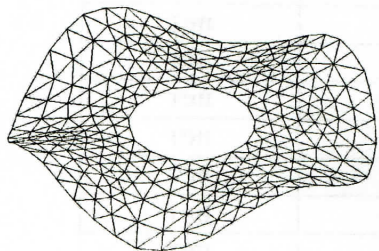
| Форма | Расчет    | Лит. данные | Эксперимент |
|-------|-----------|-------------|-------------|
| 1     | 2081710   | нет         | нет         |
| 2     | 2090710   | нет         | нет         |
| 3     | 2108830   | нет         | нет         |
| 4     | 2959240   | нет         | нет         |
| 5     | 2960150   | нет         | нет         |
| 6     | 7472500   | нет         | нет         |
| 7     | 7487960   | нет         | нет         |
| 8     | 19825500  | нет         | нет         |
| 9     | 19927800  | нет         | нет         |
| 10    | 45309873  | нет         | нет         |
| 11    | 45557334  | нет         | нет         |
| 12    | 85737290  | нет         | нет         |
| 13    | 89593738  | нет         | нет         |
| 14    | 91143335  | нет         | нет         |
| 15    | 92810869  | нет         | нет         |
| 16    | 93034645  | нет         | нет         |
| 17    | 116468820 | нет         | нет         |
| 18    | 117394850 | нет         | нет         |
| 19    | 161577730 | нет         | нет         |
| 20    | 161874790 | нет         | нет         |



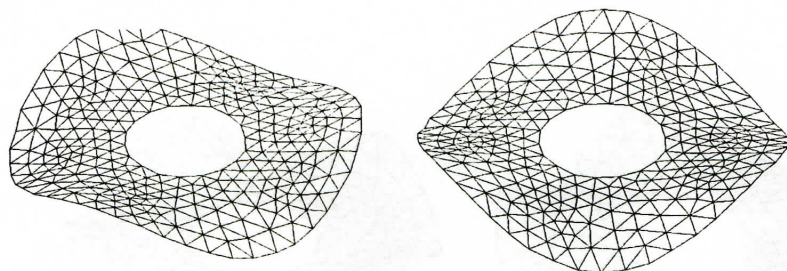
1 и 2-я форма



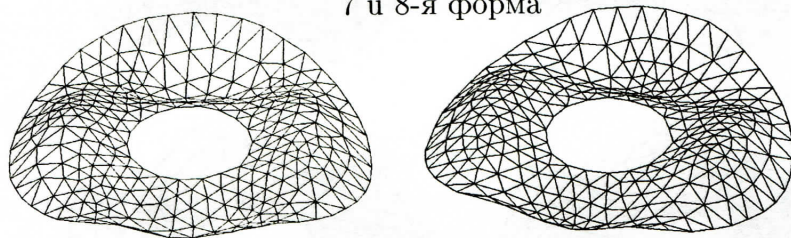
3 и 4-я форма



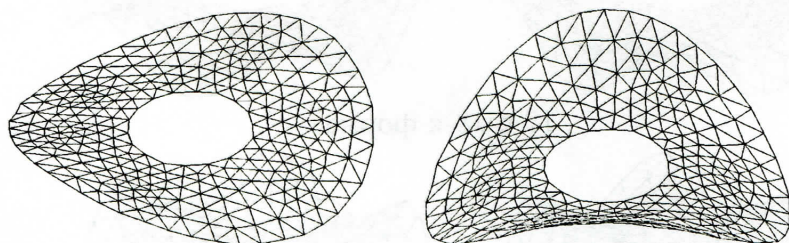
5 и 6-я форма



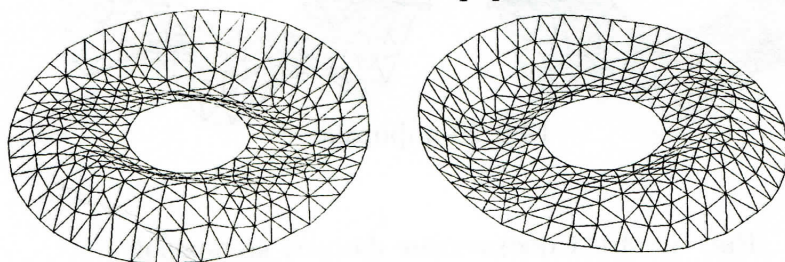
7 и 8-я форма



9 и 10-я форма



11 и 12-я форма



13 и 14-я форма



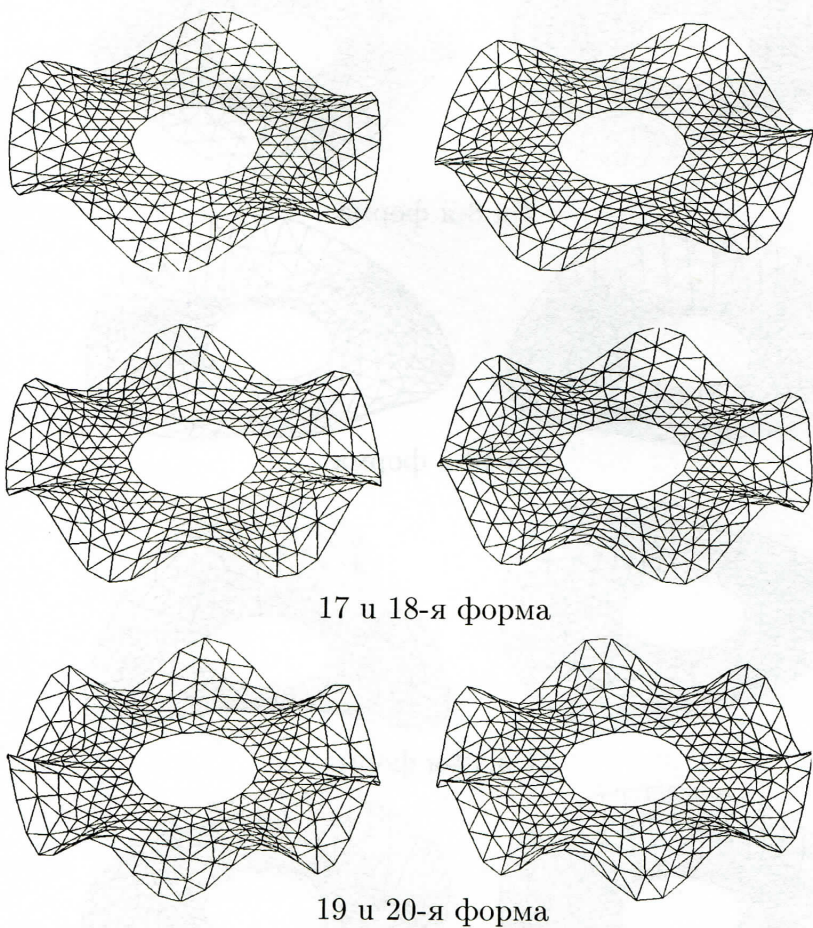


Рис. 5.8.3.1. Собственные формы кольцевой пластинки, заземленной по внутренней границе

#### 5.8.4 Свободные колебания Т-образной пространственной пластинчатой конструкции

В качестве контрольного примера исследовались свободные колебания Т-образной пространственной пластинчатой системы. Вид конструкции представлен на рис. 5.8.4.1.

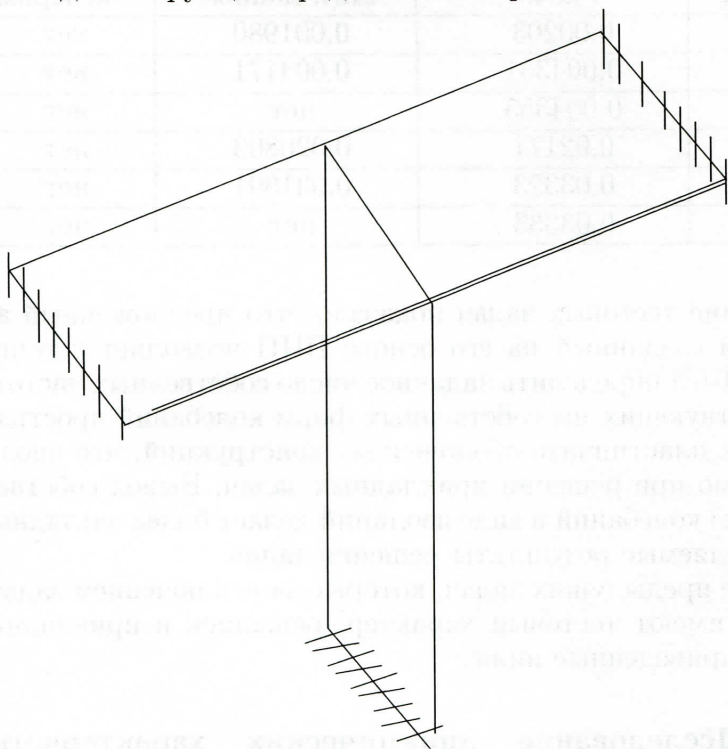


Рис. 5.8.4.1. Т-образная конструкция

В результате разбиения получено 62 узла и 60 треугольников. В ходе вычислений было получено шесть первых собственных частот и соответствующих им форм колебаний. Результаты расчета сравнивались с аналитическим решением [36]. Ошибка в вычислении значений собственных частот не превышала 5%. Значения собственных частот рассматриваемой конструкции соответствующих первым 6-ти форм ко-

лебаний представлены в табл. 5.8.4.1.

Таблица 5.8.4.1.

| Частоты Т-образной конструкции |          |             |           |
|--------------------------------|----------|-------------|-----------|
| Форма                          | Расчет   | Лит. данные | Эксперим. |
| 1                              | 0,00203  | 0,001980    | нет       |
| 2                              | 0,004331 | 0,004171    | нет       |
| 3                              | 0,004355 | нет         | нет       |
| 4                              | 0,02171  | 0,020803    | нет       |
| 5                              | 0,03323  | 0,031691    | нет       |
| 6                              | 0,03333  | нет         | нет       |

Решение тестовых задач показало, что предложенный алгоритм и созданный на его основе ППП позволяет с точностью до 1-6% определить заданное число собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний пространственных пластинчато-оболочечных конструкций, что вполне приемлемо при решении прикладных задач. Вывод собственных форм колебаний в виде изолиний делает более наглядным представляемые результаты решения задач.

Кроме предыдущих задач, которые за исключением задачи о фрезе имеют тестовый характер, решались и прикладные задачи, приведенные ниже.

### **5.8.5 Исследование динамических характеристик элементов конструкций теплозащитного слоя летательных аппаратов**

Теплозащитный слой (ТС) летательных аппаратов (ЛА) многоразового использования имеет важное значение в современной космической технике. От достоверности определения динамических характеристик элементов конструкции ТС зависит прочность и надежность летательных аппаратов. Кроме того, необходимо добиться уменьшения веса ТС с целью



создания оптимальной конструкции ЛА, а также сроков проектирования и разработки ЛА. Поэтому при разработке ЛА особое значение имеют исследования собственных и вынужденных колебаний элементов ТС.

В связи с этим были рассмотрены наиболее часто встречающиеся элементы теплозащитного слоя в виде пластинок с различными граничными условиями и пространственной конструкции ТС типа «стол». Так как механические и термодинамические характеристики материала, использованного в качестве теплозащитного слоя, в процессе разработки изделия изменяются, то собственные частоты, рассчитанные для определенных элементов ТС, даны в виде приведенных собственных частот, что дает возможность без нового пересчета получить реальные собственные частоты элементов ТС для различных материалов.

Элементы теплозащитного слоя имеют вид квадратных пластинок. Задача решалась на регулярной сетке количество узлов — 121 и 400 треугольников. Количество узловых неизвестных при решении задачи — 363. Определялось 10 собственных частот. Из тестовых примеров, приведенных ранее, видно, что при данной дискретизации и заданной точности в определении собственных форм ошибка в нахождении собственных частот не превышала 2-3%, что вполне приемлемо для практических расчетов.

#### **5.8.6 Теплозащитная квадратная пластинка, заземленная в 4-х точках**

Решалась задача о собственных колебаниях квадратной пластинки 30х30 см, заземленной по 4-м точкам. Закрепленные узлы расположены симметрично на расстоянии 6 см от края. Найденные 10 собственных частот  $\omega_0 = \omega a^2(\rho h/D)^{1/2}$  приведены в табл. 5.8.6.1. Следует отметить, что вторая и третья собственные частоты равны и имеют симметричные формы колебаний, что важно при решении задачи о вынужденных колебаниях путем разложения по собственным формам.

Таблица 5.8.6.1

| Пластина ТС (закреплены 4 точки) |         |             |         |
|----------------------------------|---------|-------------|---------|
| Форма                            | Расчет  | Лит. данные | Экспер. |
| 1                                | 20,6161 | нет         | нет     |
| 2                                | 34,2273 | нет         | нет     |
| 3                                | 34,4456 | нет         | нет     |
| 4                                | 36,2773 | нет         | нет     |
| 5                                | 55,9924 | нет         | нет     |
| 6                                | 75,1998 | нет         | нет     |
| 7                                | 75,1998 | нет         | нет     |
| 8                                | 80,8985 | нет         | нет     |
| 9                                | 100,154 | нет         | нет     |
| 10                               | 106,521 | нет         | нет     |

### 5.8.7 Квадратная пластинка, заземленная в пяти точках

Рассматривалась аналогичная квадратная пластинка ТС, но с дополнительно наложенными связями в центральной точке. Дискретизация аналогична предыдущей. Приведенные частоты представлены в табл. 5.8.7.1. Первая собственная частота пластины, заземленной по пяти точкам, соответствует 4-ой собственной частоте пластинки, заземленной по 4-м точкам, т. е. дополнительное наложение связи в в центральной точке квадратной пластины значительно увеличило ее жесткость, что привело к повышению значений собственных частот почти на 70%.

Таким образом, варьируя граничные условия, можно избежать явления механического резонанса и тем самым значительно уменьшить динамические напряжения, возникающие в теплозащитных пластинах.

Таблица 5.8.7.1

| Форма | Расчет   | Лит. данные | Эксперимент |
|-------|----------|-------------|-------------|
| 1     | 36,2787  | нет         | нет         |
| 2     | 36,7339  | нет         | нет         |
| 3     | 36,8828  | нет         | нет         |
| 4     | 39,7999  | нет         | нет         |
| 5     | 79,0532  | нет         | нет         |
| 6     | 80,0959  | нет         | нет         |
| 7     | 80,8973  | нет         | нет         |
| 8     | 85,6579  | нет         | нет         |
| 9     | 100,1554 | нет         | нет         |
| 10    | 109,9333 | нет         | нет         |

### 5.8.8 Квадратная пластинка, заземленная в 10-ти точках по оси симметрии

В результате разбиения на конечные элементы получено 169 узлов и 288 треугольников. Количество неизвестных составило 507. Данная задача решалась как приближенная задача для определения собственных частот и форм колебаний пространственной конструкции ТС в виде «стола». В результате решения было определено шесть низших собственных частот и соответствующих им форм колебаний. Значения приведенных частот соответствующих форм колебаний приведены в табл. 5.8.8.1.

Таблица 5.8.8.1

| Форма | Расчет | Лит. данные | Эксперимент |
|-------|--------|-------------|-------------|
| 1     | 1,0705 | нет         | нет         |
| 2     | 1,1512 | нет         | нет         |
| 3     | 1,7676 | нет         | нет         |
| 4     | 1,7649 | нет         | нет         |
| 5     | 3,2749 | нет         | нет         |
| 6     | 3,3355 | нет         | нет         |



### 5.8.9 Пространственная конструкция теплозащитного слоя

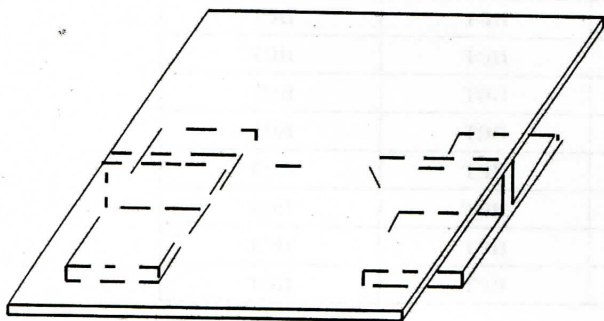


Рис. 5.8.9.1. Конструкция теплозащитного слоя

Вид, геометрическая форма и граничные условия пространственной конструкции теплозащитного слоя типа «стола» показаны на рис. 5.8.9.1.

В результате дискретизации получено 253 узла и 360 треугольников. Количество неизвестных для данной задачи составляло 1518. В результате исследования собственных колебаний данной пространственной конструкции ТС были получены четыре приведенные собственные частоты:

$$\omega^* = \omega a^2 (\rho h / D)^{1/2}, \quad \omega_1^* = 2,468 \cdot 10^{-4}, \quad \omega_2^* = 7,070 \cdot 10^{-4}, \\ \omega_3^* = 1,093 \cdot 10^{-3}, \quad \omega_4^* = 1,170 \cdot 10^{-3}.$$

Следует отметить, что собственные частоты пластинки, заземленной по 10-ти центральным точкам, которая решалась как приближенная задача о колебаниях пространственной конструкции, в 10 раз превышает значения собственных частот рассматриваемой конструкции. Таким образом, вышеуказанный приближенный расчет конструкции типа «стол» является неэффективным и данную задачу необходимо решать в пространственной постановке.

### 5.8.10 Определение собственных форм и частот полусферического резонатора твердотельного волнового гироскопа (ТВГ)

Чувствительным элементом ТВГ является резонатор, представляющий полусферическую оболочку, защемленную по контуру малого отверстия, расположенного вокруг полюса. Материал резонатора – плавленый кварц. Модуль Юнга  $E = 70000 \text{ МПа}$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,1$ ; плотность  $-2300 \text{ кг/м}^3$ , радиус  $0,029 \text{ м}$ , толщина стенки  $0,003 \text{ м}$ , радиус защемления  $0,0036 \text{ м}$ . Задача решалась на сетке, содержащей 100 узлов и 168 треугольников. Использовался метод повышения жесткостей. Результаты и их сравнение с литературными данными, проверенными экспериментально, приведены в табл. 5.8.10.1.

Созданный метод позволил найти неизвестные ранее две балочные собственные формы и крутильную форму. Совпадение расчетных частот и форм с рассчитанными другими методами и экспериментом является удовлетворительным. Максимальное расхождение по частоте не превышает 7%.

Таблица 5.8.10.1

| Сравнительные данные форм и частот резонатора |           |        |           |
|---|-----------|--------|-----------|
| Форма   | Расчет    | Лит.   | Экспер.   |
| 1-я балочная                                  | 15777,321 | отсут. | 1475-1625 |
| 2-я балочная                                  | 15777,473 | отсут. | 1475-1625 |
| 3-я оболочечная                               | 2519,011  | 2441   | 2475-2575 |
| 4-я оболочечная                               | 2519,514  | 2441   | 2475-2575 |
| 5-я крутильная                                | 4681,61   | отсут. | 4575-4750 |
| 6-я оболочечная                               | 6371,019  | 6333   | 6200-6500 |
| 7-я оболочечная                               | 6371,683  | 6333   | 6200-6500 |
| 8-я осесимметричная                           | 7707,112  | отсут. | 7200-7525 |
| 9-я оболочечная                               | 10931,104 | 11374  | отсут.    |
| 10-я оболочечная                              | 10931,810 | 11374  | отсут.    |





## Глава 6

# Список литературы

1. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П., Савченко В.И. Численные методы в теории упругости и теории оболочек.— Красноярск: КГУ, 1986. — 383 с.
2. Автоматизированная система обслуживания конечно-элементных расчетов /А.С.Цыбенко, Н.Г.Ващенко, Н.Г.Кришук, Ю.А.Лавендел.— К.: Вища школа, 1986.—257с.
3. Агапов В.П. Усовершенствованный плоский треугольный конечный элемент комбинированного типа //Изв. вузов. Строительство и архитектура. —1985. — №10. — С.31—34.
4. Агапов В.П. Многослойный конечный элемент для расчета пластинок и оболочек на прочность,устойчивость и колебания.— Деп. в ВИНТИ, 4963.— 1982.— 20 с.
5. Айнола Л.Я., Нигул У.К. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Изв. АН ЭССР. Сер. физмат. и техн. наук. — 1965. — Т.14, №1. — С.3—63.
6. Александров А.Я., Бородин М.Я., Павлов В.В. Конструкции с заполнителем из пенопласта. — М.: Оборонгиз, 1962. — 211 с.
7. Александров А.Я., Брюккер Л.Э., Куршин Л.М., Прусаков А.П. Расчет трехслойных панелей.— М.: Оборонгиз, 1960.— 270 с.

8. Александров А.Я., Куршин Л.М. Трехслойные пластинки и оболочки // Прочность, устойчивость, колебания. — М.: Машиностр.1968.— Т.2.— С.243—326.
9. Александров А.Я., Соловьев Ю.П. Пространственные задачи теории упругости. — М.: Наука, 1978. — 462 с.
10. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. — 264 с.
11. Амбарцумян С.А. Некоторые вопросы развития теории анизотропных слоистых оболочек // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1964.— Т.17, №3.— С.29—53.
12. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек.— М.: Наука, 1974. — 446 с.
- 13.Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек.— К.: Наук. думка, 1980.— 367 с.
- 14.Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Об одном варианте теории упругих многослойных анизотропных пластин // Прикладная механика — 1978. — Т.14, №7. — С. 55—62.
- 15.Антоненко В.М., Пискунов В.Г., Степанова А.Е. Определение частот и форм собственных колебаний прямоугольных слоистых пластин при сложных граничных условиях методом сеток // Пробл. прочности. — 1979. — №7. — С.97—99.
- 16.Аргитис Дж. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц. — М.: Стройиздат, 1968.— 242 с.
- 17.Аргирис Дж., Шарпф Д. Теория расчета пластин и оболочек с учетом деформации поперечного сдвига на основе метода конечных элементов // Расчет конструкций с использованием ЭВМ—Л.: Судостроение, 1974.— №1.—С.179— 210.
- 18.Артюхин Ю.П. Расчет однослойных и многослойных ортотропных оболочек на локальные нагрузки // Исследования по теории пластин и оболочек.— 1966.— №4 — С.91—109.
- 19.Бабаков И.М. Теория колебаний.—М.: Мир, 1968.—559 с.
20. Бабенко А.Е., Боронко О.А., Василенко О.Н., Труба-

чев С.И. Определение частотного спектра и собственных форм колебаний упругих систем методом повышения жесткостей // Пробл. прочности. — 1990. — №2 — С.122—124.

21. Определение спектра собственных частот при колебаниях пластин в своей плоскости /Бабенко А.Е., Боронко О.А., Василенко Н.В., Чирков А.Ю. // Тез. докл. Всесоюз. конф. "Вибродиагностика машин и механизмов. Методы и средства". - Запорожье: Запорожский машиностроительный ин-т.— 1985. — С.26.

22. Учет рассеяния энергии при вынужденных колебаниях круговых колец /Бабенко А.Е., Боронко О.А., Бойко С.Л., Василенко О.Н. // В кн. Рассеяние энергии при колебаниях механических систем.— К.: Наук. думка, 1989. — С.10—18.

23. Бабенко А.Е., Василенко Н.В., Трубочев С.И. Решение задачи о колебаниях трехслойных пластинчатых систем методом повышения жесткостей // Совершенствование технологической эксплуатации корпусов судов: Тез. докл. Всесоюзн. научно-техн. конф. 17—19 октября 1989. — Калининград, 1989.— С.40—41.

24.Бабенко А.Е., Павловский А.М., Трубочев С.И. Численное моделирование колебаний осесимметричного оболочечного резонатора // Надежность машин, математическое и машинное моделирование задач динамики: Тез. док. Всесоюзной научно-техн. конф., 22—24 мая 1991.— Кишинев, 1991.— С.110.

25. Бабенко А.Е., Трубочев С.И. Исследование собственных колебаний трехслойных оболочечных конструкций с мягким заполнителем // Фундаментальные и прикладные проблемы космонавтики Тез.докл. II Респуб.конф. — Киев, 1990. — С.27—28.

26.Бабенко А.Е., Трубочев С.И. Построение математической модели расчета напряженно-деформированного состояния и колебаний трехслойных пластинчато-оболочечных систем // Надежность машин, математическое и машинное моделирование задач динамики: Тез.докл. Всесоюзн.научн.конф.



22—24 мая 1991 Кишинев, 1991.— С.15

27. Бабич Ю.Н., Цыбенко А.С. Методы и алгоритмы автоматического формирования сетки конечных элементов. — К.: ИПП АН УССР, 1978. — 93 с.

28. Бакулин В.Н., Демидов В.И. Конечный элемент естественной кривизны // Изв.вузов. Машиностроение. — 1978.— №5.— С.10—15.

29. Бакулин В.Н., Рассоха А.А. Метод конечных элементов и голографическая интерферометрия в механике композитов.— М.: Машиностр., 1987. — 312 с.

30. Бартелдс Г., Оттенс Х. Расчет слоистых панелей на основе метода конечных элементов // Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ. — Л.: Судостроение, 1974. — Т.1. — С.252—254.

31. Бахвалов Н.С. Численные методы.— М.: Наука, 1973. — Т.1.— 632с.

32. Берт С.В., Френсис Р.Х. Механика композиционных материалов и строительная механика // Ракетная техника и космонавтика. 1974.— Т.12, №9.— С.7—26.

33. Бекин Н.Г., Шанин Н. П. Оборудование заводов резиновой промышленности.— Л.: Химия, 1978.— 400 с.

34. Берхардт Э. Переработка термопластичных материалов.— М.: Гостехиздат, 1962.— 242 с.

35. Беспалова Е.И., Григоренко Я.М., Лацинник И.Ф. Численное решение двумерных задач статики оболочек вращения переменной жесткости // Прикл.механика.— 1974.— Т.10, №1.— С.36—40.

36. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник.— М.: Машиностроение, 1968— Т.3.—567 с.

37. Биргер И.А. Метод дополнительных деформаций в задачах теории пластичности /Изв. АН УССР. Механика и машиностроение.— 1963. — N1.— С.47—56.

38. Биргер И.А. Методы упругих решений в тео-

рии пластического течения /Изв. АН УССР. Механика и машиностроение.— 1964.— N2.— С.116—118.

39. Биргер И.А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности /Прикл. математика и механика. — 1951.— Т.15.— N6 — С.765—770 с.

40. Болотин В.В. Прочность, устойчивость и колебания многослойных пластин // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1965.— 11 — С.31—63.

41. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций.— М.: Машиностроение, 1980.— 375 с.

42. Болотин В.В. Статические методы в строительной механике.— М.: Стройиздат, 1965.— 279 с.

43. Болотин В.В. Обобщение асимптотического метода решения задач о собственных значениях для прямоугольных областей // Инж. журн. — 1961. — N 2.— С.25—29.

44. Бондарь А.Г., Рассказов А.О. Изгиб многослойных ортотропных секторных пластин // Пробл.прочности.— 1985.— №11.— С.49—52.

45. Боровский П.В. Исследование прочности многослойных косоугольных пластин // Строительная механика и расчет сооружений. — 1978.— №10.— С.8—9.

46. Боровский П.В., Варвак П.М., Пискунов В.Г. Изгиб и колебания параллелограммных пластинок // Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. — М.: Наука, 1966.— С.316—319.

47. Богомолов С.И., Журавлева А.М. Колебания сложных механических систем. — Харьков: Вища шк., 1978. — 135 с.

48. Боронко О.А. Определение собственных частот и форм колебаний пространственных пластинчатых систем // Тез. докл. Междунар. науч.-техн. конф. 19—22 апреля. Киев.— 1989.— С.33—34.

49. Боронко О.А., Василенко О.Н. Об одном итерационном методе нахождения собственных частот и собственных векторов // Тез. докл. III конф. "Прочность материалов и элемен-

тов конструкций с учетом реальных условий эксплуатации". Киев.— 1987.— С.8.

50. Богнер Ф., Фокс Р., Шмидт Л. Расчет цилиндрической оболочки методом дискретных элементов // Ракетная техника и космонавтика.— 1967.— № 4.— С.170—176.

51. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений.— М.: Мир, 1964.— 518 с.

52. Брюккер Л.Э. Некоторые варианты упрощения уравнений изгиба трехслойных пластин // Расчеты элементов авиационных конструкций.— М.: Машиностроение, 1965.— Вып.3— С.74—99.

53. Брюккер Л.Э. О приближенных универсальных формулах для расчета трехслойных пластин с легким и жестким заполнителем // Тр. Всесоюзн. конф. по теории пластин и оболочек, Львов, 1961 — К.: Изд. АН УССР, 1962.— С.141—146.

54. Бублик Б.Н., Мольченко Л.В. Определение частот собственных колебаний пологих оболочек // Математическая физика.— 1969.— №6.— С.37—48.

55. Быков Е.В., Попов Б.Г. Расчет многослойных оболочечных конструкций с учетом деформаций поперечных сдвигов // Расчеты на прочность. 1989.— №30.— С.66—87.

56. Быков Д.Л. О некоторых методах решения задач теории пластичности / Упругость и неупругость. — 1975. - Вып.4.— С. 119—139.

57. Быков Д.Л., Шачнев В.А. Об одном обобщении метода упругих решений // Прикл. математика и механика. — 1969.— №33.— Вып.2.— С.290—298.

58. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных.— М.: ИЛ., 1973.— 487с.

59. Вайнберг Д.В. Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин.— К.: Будівельник, 1973.— 448 с.

60. Вайнберг Д.В., Геращенко В.М, Райтфарб И.Д, Синявский А.Л. Вывод сеточных уравнений изгиба пластин вари-



ционным методом // Сопрот. матер. и теория сооружений.— 1965.— №1 — С.23—33.

61. Вайнберг Д.В., Гончаренко И.Е., Кислоокский В.Н., Легостаев А.Д. Сахаров А.С. Исследование нетонких оболочек методом конечного элемента // Соппротивление материалов и теория сооружений.— 1974.— №23.— С.28—33.

62. Вайнберг Д.В., Кислоокский В.Н., Сахаров А.С. Уравнения теории непологих оболочек и оболочечных систем // Теория оболочек и пластин.— Л.: Судостроение, 1975.— С.28—33.

63. Вайнберг Д.В., Синявский Л.А. Расчет оболочек.— К.: Госстройиздат УССР, 1961.— 119 с.

64. Варвак П.М., Коновалюк Д.М., Соколовский Н.И. Пространственные задачи для кубического массива с конструктивной особенностью // Расчет пространственных строительных конструкций.— 1974.— №4.— С.122—126.

65. Варвак П.Н., Рябов А.Ф., Пискунов В.Г. Изгиб многослойной пластины на упругом основании // Соппротивление материалов и теория сооружений.— 1972.— №17.— С.27—34.

66. Система математического обеспечения расчета пространственных конструкций "Прочность-I"/Вайнберг Д.В., Кислоокский В.Н., Сахаров А.С., Синявский А.Л. // В кн. Организация и методика строительного проектирования с применением вычислительной и организационной техники.— М.: ЦНИИС Госстроя СССР, 1974.— С.2—5.

67. Василенко А.Т., Григоренко Я.М., Панкратова Н.Д. К оценке некоторых допущений в теории однородных и слоистых оболочек. // Теория оболочек и пластин.— Л.: Судостроение, 1975.— С.33—36.

68. Василенко А.Т., Савченко П.И. Осесимметричная деформация слоистых анизотропных оболочек вращения с учетом поперечных сдвигов и обжатия // Прикл. механика.— 1988.— Т.24, №5.— С.75—81.

69. Василенко Н.В. Колебания нелинейно-упругих тел с гистерезисом // В кн. Рассеяние энергии при колебаниях упру-

гих систем.— К.: Наук.думка, 1966. — С.8—18.

70. Василенко Н.В. Влияние формы петли гистерезиса на характеристики колебательного движения. — В кн. Вопросы рассеяния энергии при колебаниях упругих систем.—К.: Техн. литер. УССР, 1962.— С.37—39.

71. Свободные и вынужденные колебания пластин с учетом рассеяния энергии /Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Чирков А.Ю., Боронко О.А. // Тез. докл. XIII конф. по вопросам рассеяния энергии при колебаниях механических систем. Киев.— 1983.— С.14.

72. Определение собственных частот и собственных форм при колебаниях пластин в своей плоскости методом покоординатного спуска /Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Боронко О.А., Чирков А.Ю. // Тез. докл. на III науч.— техн. конф. "Совершенствование эксплуатации и ремонта корпусов судов". Калининград.— 1984.— С.118—119.

73. Расчет вибрационной напряженности и циклической долговечности станин каландров /Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Чирков А.Ю., Боронко О.А. // Тез. докл. Междунар. симпоз. "Прочность материалов и элементов конструкций при звуковых и ультразвуковых частотах нагружения". Киев.— 1984. — С.47.

74. Оценка прочности и спектра колебаний станин каландров /Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Чирков А.Ю., Боронко О.А. // Тез. докл. на Всесоюз. конф. по вибрационной технике. Телави.— 1984.— С.92.

75. Определение собственных частот и форм поперечных колебаний пластин /Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Боронко О.А., Чирков А.Ю., Мельниченко Г.И. // Пробл. прочн.— 1987.— №6.— С.116—120.

76. Динамика пластинчатых элементов вибрационных машин /Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Боронко О.А., Бойко С.Л., Чирков А.Ю.// Тез. докл. Всесоюз. конф. по вибр. техн. Кобулети.— 1987.— С.198.



77. Определение собственных частот и форм колебаний пластин в своей плоскости /Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Чирков А.Ю., Боронко О.А. // Проблемы прочности.— 1985.— N12.— С.107—110.

78. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Боронко О.А. Определение собственных частот и собственных форм плоских колебаний пространственных конструкций // Тез.докл. V Всесоюз.конф. по статике и динамике пространственных конструкций. Киев.— 1985.— С.40.

79. Свободные и вынужденные колебания пластин с учетом рассеяния энергии /Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Чирков А.Ю., Боронко О.А. // Тез.докл.Респуб.науч.конф. по вопросам рассеяния энергии при колебаниях механических систем. Киев.— 1983.— С.14.

80. Продольные колебания пластин с учетом рассеяния энергии в материале /Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Боронко О.А., Чирков А.Ю. // Рассеяние энергии при колебаниях механических систем. Материалы XIII Респуб. науч.-техн. конф.— К.: Наукова думка, 1985.—С.16—21.

81. Расчет вынужденных колебаний пластин с учетом рассеяния энергии /Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Боронко О.А., Чирков А.Ю. // В кн. Рассеяние энергии при колебаниях механических систем. — К.: Наук. думка, 1989. — С.35—39.

82. Расчет вынужденных колебаний трехслойных пластин с учетом рассеяния энергии /Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Трубочев С.И., Боронко О.А. // Тез.докл.Всесоюз.конф. "Прочность материалов и элементов конструкций при звуковых и ультразвуковых частотах нагружения. — К.: ИПП АН УССР, 1988.— С.106.

83. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Боронко О.А. Вынужденные колебания пространственных пластинчато-оболочечных конструкций с учетом рассеяния энергии // Тез. докл. XV науч. конф. по вопросам рассеяния энергии при колебаниях механических систем. Киев. — 1989. — С.29.



84. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Трубачев С.И. Исследование колебаний трехслойных пластин с ортотропным заполнителем // Надежность машин, математическое и машинное моделирование задач динамики: Тез. докл. Всесоюзн. науч.-техн. конф. 22—24 мая 1991 г.— Кишинев, 1991.— С.16.

85. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Трубачев С.И. Комплекс «Оболочка» автоматического формирования треугольных элементов для многосвязных оболочечных областей // Пробл. прочности.— 1989.— №6. — С.104—106.

86. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Трубачев С.И. Определение динамических характеристик слоистых конструкций // Повышение надежности и долговечности машин и сооружений: Тез. докл. III Всесоюзной науч.-техн. конф. 24—26 мая 1988г.— Запорожье, 1988.—С.40—41

87. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Трубачев С.И. Определение собственных частот и форм колебаний трехслойного пластинчатого элемента вибрационных машин // Всесоюзн.конф. по вибрационной технике: Тез.докл. — Кобулет, 1987.— С.4.

88. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Трубачев С.И. Расчет трехслойных пластин с мягким заполнителем, подверженных статическим и динамическим нагрузкам // Пробл.прочности — 1989.— №2.— С.71—74.

89. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Каменичный И.Д. Расчет несущих элементов валкового оборудования на основе трехмерной термоупругой задачи // Всесоюз. науч.-техн. конф. "Совершенствование технической эксплуатации корпусов судов" ( Калининград, окт.1989г): Тез. докл.— Л: Судостроение, 1989.— С.65—66.

90. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Каменичный И.Д. Расчет несущих элементов вулканизационных аппаратов на основе трехмерной упруго-пластической задачи // Пробл. прочности — 1990.— N 2.— С.75—79.

91. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Чирков А.Ю. Анализ напряженно-деформированного состояния крышки паровой

камеры // Пробл. прочности. -1985. — №6.— С.64—68.

92. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Чирков А.Ю. О применении метода покоординатного спуска в вариационно-сеточных схемах при решении задач теории упругости // Пробл. прочности. — 1985.— № 9.— С.102—106.

93. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Чирков А.Ю. Расчет пластинчатых систем //Пробл. прочности.—1985.—№2.—С.79—84.

94. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Трубачев С.И. Учет рассеяния энергии при колебаниях трехслойных пластин с заполнителем // XV Всесоюзн. конф. по вопросам рассеяния энергии при колебаниях мех. систем: Тез. докл. — Каменец-Подольский, 1989.— С.30.

95. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Трубачев С.И. Учет рассеяния энергии при колебаниях трехслойных пластин с сжимаемым заполнителем // В кн. Рассеяние энергии при колебаниях механических систем. — К.: Наук.думка, 1991. — С.6—9.

96. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Трубачев С.И., Боронко О.А. Расчет вынужденных колебаний трехслойных пластин с учетом рассеяния энергии // Прочность материалов и элементов конструкций при звуковых и ультрозвуковых частотах нагружения: Тез. докл. Всесоюзн. науч.-техн. конф. 6 — 8 декабря 1988г., К.: 1987.—С.106.

97. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Трубачев С.И., Боронко О.А. Вынужденные колебания трехслойных пластинчато-оболочечных конструкций с учетом рассеяния энергии // Докл. АН УССР. Сер.А. — 1990.— №12. — С.20—23.

98. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Трубачев С.И., Трушко С.П. Исследование колебаний слоистых оболочек с ортотропным заполнителем //Тез. докл. Всесоюзн. конф. по вибрац. технике, октябрь 1991г. Батуми-Тбилиси, 1991.—С.44.

99. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Чирков А.Ю. Оптимизация процедуры численного решения задач теории упругости методом покоординатного спуска // Динамика и прочность машин.— 1984.— №40— С.92.

100. Васильев В.В. Прикладная теория композитных оболочек // Мех. композит.материалов.— 1985. — №5. — С.843—852.

101. Васицина Т.Н. Изгиб и свободные колебания трехслойных ортотропных цилиндрических оболочек несимметричного строения // Расчет элементов авиационных конструкций. — 1965. — №4. — С.91—98.

102. Веселев Ю.А., Дриас Н.А. Динамический расчет трехслойной балки с легким заполнителем // Легк. констр. зданий. — Ростов н/Д, 1990. — С.85—93.

103. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике.— М.,Л.:— Гостехиздат, 1949.— 874 с.

104. Воеводин В.В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. — М.: Наука, 1966.— 248 с.

105. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. — М.:Наука, 1984. — 320 с.

106. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. — М.: Госфизматлит, 1963. — 984 с.

107. Вискребенцев А.Я., Холод А.И. К вопросу динамики двухслойных пластин // Сопротивление материалов и теория сооружений. — 1970. — №12. — С.30—35.

108. Воробьев Ю. В. Случайный процесс. // ЖМВ и МФ.— 1965. — N5.— С.43—47.

109. Ворович И.И., Красовский Ю.П. О методе упругих решений // Докл. АН СССР—1959.— 126.—N 4.—С.118—121.

110. Галилеев М.Д. Аналитический метод расчета многослойных анизотропных плоских систем: Автореф. дисс...докт. техн. наук.— Л.: 1973.— 39 с.

111. Галимов Н.К. Изгиб трехслойных круглых пластин под действием неравномерных поперечных нагрузок // Исследования по теории пластин и оболочек. — Казань: Изд. Казан. ун-та, 1967.— №5.— С.237—242.

112. Галимов Н.К. К теории тонких пологих оболочек с заполнителем при конечных прогибах //Нелинейная теория пластин и оболочек.—Казань: Изд.Казан.ун-та, 1962.—С.61—95.



113. Галиныш А.К. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям // Исследования по теории оболочек и пластин.— Казань:Изд. Казан. ун-та, — 1970.— №6— С.23—64.

114. Гармаш Л.И., Ингульцов В.Л. Уравнения колебаний многослойных оболочек с учетом деформации сдвига и надавливания волокон в заполнителях // Изв. вузов. Машиностроение. — 1972 — №10.— С.23—27.

115. Гармаш Л.И., Кан С.Н. Собственные колебания многослойных оболочек и пластин с заполнителями.— 1972. — №18. — С.17—19.

116. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук.— 1962.— Т.16, №3.— С.171—174.

117. Годунов С.К., Прокопов Г.П. Вариационный подход к решению больших систем линейных уравнений, возникающих в сильно эллиптических задачах. — М.: ИПМ АН УССР, 1968.— С.71—79.

118. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы.— М.: Наука, 1977—439 с.

119. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластинок и оболочек.— К.: Наук. думка, 1964.— 287с.

120. Гордон Л.А. Расчет многослойных пластин симметричной структуры на упругом основании винклеровского типа методом конечных элементов // Изв. ВНИИгидротехника.— 1975.— №109.— С.172—176.

121. Гордон Л.А., Скомаровский Я.Г., Фридман Е.Ш., Шойхет Б.А. Расчет и экспериментальные исследования пластин средней толщины // Изв. ВНИИгидротехники.— 1971.— №95. — С. 142—146.

122. Григолюк Э.И. Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким заполнителем // Изв. АН СССР. ОН. —1958. — №1. — С.26—34.

123. Григолюк Э.И. Уравнения трехслойных оболочек с легким заполнителем // Изв. АН СССР. ОН.— 1957.— №1.—

С.77—84.

124. Григолюк Э.И., Кирюхин Ю.П. Линейная теория трехслойных оболочек с жестким заполнителем // Изв. Сиб. отд. АН СССР.— 1962.— №3.— С.12—24.

125. Григолюк Э.И., Коган Ф.А. Современное состояние теории многослойных оболочек // Прикл. мех.— 1972.— №8.— С.2—17.

126. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. — М.: Машиностр., 1988.— 288 с.

127. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассическая теория колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники // Механика твердых деформируемых тел. — М.: ВИНТИ.— Т.5.— 272 с.

128. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Нелинейные уравнения многослойных оболочек нерегулярного строения // МТТ.1967.— №1.— С.163—169.

129. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. — М.: Машиностроение, 1973.— 170с.

130. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость круговых цилиндрических оболочек.— М.: ВИНТИ, 1969.— 384 с.

131. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. — К.: Наук. думка, 1973.— 288с.

132. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Методы расчета оболочек.— Т.4. Теория оболочек переменной жесткости.— К.: Наук. думка, 1981.— 544с.

133. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Несимметричная деформация толстостенных неоднородных сферических оболочек // Докл. АН УССР. Сер.А.— 1981.— №6.— С.41—44.

134. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек.— К.: Вища

школа, 1985.— 190 с.

135. Деклу Ж. Метод конечных элементов.— М.: Мир, 1976.— 95 с.

136. Дубенец В.Г. Рассеяние энергии при колебаниях многослойных пластин // Пробл. прочн.— 1970.— №9.— С.25—30.

137. Дудченко А.А., Лурье С.А., Образцов И.Ф. Анизотропные многослойные пластины и оболочки // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. — М.: ВИНТИ, 1983.— С.3—68.

138. Демидов С.П. Теория упругости.— М.: Высшая школа, 1979.— 432с.

139. Дьяконов Е.Г. Проекционно-разностные и разностные методы решения нелинейных задач теории упругости и пластичности. // Числ. методы механики сплошной среды — 1976.— N5.— С.14—78.

140. Евзеров И.Д., Здоренко В.С. Сходимость плоских конечных элементов тонкой оболочки // Строит. механика и расчет сооружений—1984.— №1.— С.35—39.

141. Заруцкий В.А. Приближенные формулы для вычисления минимальных собственных частот колебаний подкрепленных цилиндрических оболочек // Прикл. механика— 1977.— Т.13, №5.— С.43—51.

142. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир. — 1975.— 541 с.

143. Зенкевич О. Метод конечных элементов: от интуиции к общности // Механика.—1970.— N6.— С.90—103.

144. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. —М.: Недра, 1974.— 238 с.

145. Ильгамов М.А. Вынужденные и параметрические колебания трехслойных пластин // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение.— 1962.— №3.— С.114—119.

146. Ильгамов М.А. Уравнения равновесия и колебаний трехслойных оболочек несимметричного строения // Изв. ву-



зов. Авиац. техника.— 1962.— №4.— С.68—78.

147. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики.— М.: Наука, 1985.— 334 с.

148. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. 2-е изд. перераб. и допущено — М.: МГУ, 1978.— 288 с.

149. Ильюшин А.А. Пластичность.— М.: ГИТТЛ, 1948.—376 с.

150. Ильюшин А.А. К теории малых упругопластических деформаций //Прикл. математика и механика.— 1946.— Т.10.— С.347—356.

151. Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача —М.: Энергоиздат, 1981.— 416 с.

152. К построению эффективных программ триангуляции произвольных областей применительно МКЭ / П.П. Ворошко, А. Л. Квитка, С. В. Кобельский и др. // Пробл. прочн.— 1981.— №1.— С.116—117.

153. Камель А. Х., Эйзенштейн Г. К. Автоматическое построение сетки в двух- и трехмерных составных областях // Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ.—Л.: Судостр., 1974.—Т.2.— С.21—35.

154. Каюк Я.Ф. Напряженное состояние пологих оболочек вращения при больших перемещениях. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1969.— №5.— С.159—163.

155. Каюк Я.Ф. Некоторые вопросы методов разложения по параметру.— К.: Наук. думка, 1980.— 167 с.

156. Канторович Л. В. О методе наискорейшего спуска. // ДАН СССР — 1947.— 56, N3.—С.87—93.

157. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа.—М.: Физматгиз, 1962.—528 с.

158. Кандинов В.П., Чесноков С.С. Метод конечных элементов в задачах динамики.—М.: МГУ, 1980.—165с.

159. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964.— 488 с.

160. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. — М.:

Наука, 1969.— 420 с.

161. Кислоокий В.Н., Гранат С.Я. Исследования колебаний пластин, оболочек и комбинированных систем методом базисных векторов на основе разностной дискретизации // Сопрот.матер. и теор. сооружений.— 1972. — №16.— С.37—41.

162. Кислоокий В.Н., Легостаев А.Д., Сахаров А.С., Соловей Н.А. Об одном варианте МКЭ в задачах статики и динамики консольных оболочек // Сопрот. матер. и теор. сооружений.— 1975.— №27.— С.45—51.

163. Коваленко А.Д. Основы термоупругости.— К.: Наук. думка, 1970.— 240 с.

164. Коваленко А.Д. Термоупругость.— К.: Вища школа, 1975.— 216 с.

165. Козулин Н.А., Шапиро А.Я., Гавурина Р.К. Оборудование для производства и переработки пластических масс.— М.: Гостехиздат, 1963.— 784 с.

166. Корнеев В.Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности.— Л.:— ЛГУ,— 1977.— 208 с.

167. Коллатц Л. Задачи на собственные значения.— М.: Наука, 1968.— 503 с.

168. Коновалюк Д.М., Акимова В.И. Определение прогибов в толстых прямоугольных плитах // Расчет пространственных конструкций.— 1976.— №6.— С.90—93.

169. Коробка С.С., Попов В.Г., Приходько М.Н. Рассеяние энергии при поперечных колебаниях трехслойных пластин // Тр. Николаев. кораблестроит. ин-та.— 1982. — С.30—34.

170. Королев В.И. Упруго-пластические деформации оболочек.— М.: Машиностроение, 1971.— 303 с.

171. Кошелев А.И. Регулярность решений эллиптических уравнений и систем.— М.: Наука, 1986.— 240 с.

172. Красносельский М.А. Крейн С.Г. Итерационный процесс с минимальными невязками.— Матем. сб., 1952.— 31 с.

173. Кузнецов В.Н. Численное решение задач теории пластичности // Упругость и неупругость. 1978.—

Вып. 5.—С.97—107

174. Куршин Л.М. Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек // Расчет пространственных конструкций.— 1961.— №7.— С. 163—192.

175. Кэнтин Дж. Смещения криволинейных конечных элементов как жесткого целого // Ракетная техника и космонавтика.— 1970.— №7.— С.84—88.

176. Кэнтин Дж., Клауф Р. Искривленный дискретный элемент цилиндрической оболочки // Ракетная техн. и космонавтика.— 1968.— №6.— С.82.

177. Лавендел Ю.О. К оценке оптимальности конечно-элементной модели // Вычислительная техника и краевые задачи. Вычислительные методы и специализированные процессоры.— Рига, 1982.— С.35—42.

178. Ладыженская О.Л. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.— 407 с.

179. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа.— М.: Физматгиз, 1961.— 524 с.

180. Лебедев В.И. Об итерационных методах решения операторных уравнений со спектром лежащим на нескольких отрезках // ЖВМ и МФ — 1969.— №96.— С.31—37.

181. Литвинов В.Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложением к механике.— М.: Наука, 1987.—366 с.

182. Литвинов В.Г. Оптимальные задачи на собственные значения. //Укр. мат. журн.— 1981.— Т.33, №5.— С.610—613.

183. Лехницкий С.С. Теория упругости анизотропного тела.— М.: Наука, 1977.— 417 с.

184. Либреску Л. О физических уравнениях нелинейно-упругой теории тонких слоистых оболочек // Изв. АН Арм. ССР. Механика.— 1969.— Т.22, №3.— С.38—45.

185. Лизарев А.Д., Ростанина Н.Б. Колебания металлополимерных и однородных сферических оболочек.— Минск: Наука и техн., 1984.— 192с.



186. Лизарев А.Д., Ростанина Н.Б. Уравнения свободных колебаний непологих трехслойных сферических оболочек // Изв. АЕ СССР. Механика тв. тела.—1978.—№4.—С.142—148.

187. Лыков А.В. Теория теплопроводности.— М.: Высшая шк., 1967.— 278 с.

188. Малинин А.А. Колебания и устойчивость оболочек вращения с дискретными включениями и отверстиями // Прикл. механика.— 1973.— Т.9, N10.— С.29—34.

189. Малинин М.Ю., Снигирев В.Ф. Треугольный конечный элемент пологой оболочки типа Тимошенко // Мех. композит. материалов— 1985. — №5.— С.873—877.

190. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1980.— 534 с.

191. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981.— 416 с.

192. Марчук Г.И., Кузнецов Ю.А. Итерационные методы и квадратичные функционалы.— Новосибирск: Наука, 1972.— 205 с.

193. Марчук Г.И., Лебедев В.И. Численные методы в теории переноса нейтронов.— М.: Атомиздат,— 1971.— 273с.

194. Матвеев В.В. К определению демпфирующих свойств систем с амплитудно-зависимым сопротивлением // Пробл. прочности — 1970.— №5.— С.11.

195. Матвеев В.В. К описанию контура петли механического гистерезиса // Пробл. прочности — 1973. — N8. — С.3—9.

196. Матвеев В.В. Конструкционный гистерезис в сложном замковом соединении лопаток турбин. — В кн. Рассеяние энергии при колебаниях упругих систем.— К.: Наукова думка, 1966.— С.226—234.

197. Матвеев В.В., Бовсуновский А.П. Демпфирующая способность материала при бигармоническом деформировании в широком диапазоне отношений частот гармонических составляющих. В кн. Рассеяние энергии при колебаниях механических систем.— К.: Наук. думка, 1989.— С.196—201.

198. Мау С., Пиан Т., Тонг П. Исследование колебаний многослойных пластин и оболочек с помощью гибридных элементов напряжений. // Ракетная техника и космонавтика. — 1973. — Т.11, №10. — С.116—117.

199. Мейбен П., Стриклин И. Неявное представление жесткого смещения в случае криволинейных конечных элементов. // Ракетная техника и космонавтика. — 1971. — №2. — С. 206—208.

200. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения вызываемые стационарными температурными полями. — М.: Физматгиз, 1958. — 168 с.

201. Метод конечного элемента в механике деформируемых тел. Д.В. Вайнберг, А.С. Городецкий В.В., Киричевский А.С., Сахаров. // Прикладная механика — 1972. — №8. — С.3—28.

202. Метод конечных элементов в механике твердых тел. А.С.Сахаров, В.Н. Кислооккий, В.В. Киричевский и др. — К.: Вища школа, — 1982. — 479 с.

203. Метод конечных элементов. /П.М. Варвак, И.М. Бузин, А.С. Городецкий и др. — К.: Вища школа, —1981. —176 с.

204. Михлин С.Г Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970. — 512с.

205. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. — М.: Наука. — 1968. — 432 с.

206. Метод конечных элементов. /П.М.Варвак, И.М.Бужун, А.С.Городецкий, В.Г. Пискунов, Ю.Н.Толокнов. — К.: Вища школа, 1981.

207. Метод конечных элементов в механике твердых тел. /А.С.Сахаров, В.Н.Кислооккий, В.В.Киричевский и др. Под общей редакцией А.С.Сахарова и И.Альтенбаха. — К.: Вища шк., 1982. — 479 с.

208. Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ. /А.В.Александров, Б.Я.Лашенников, Н.Н.Шапошников, В.А.Смирнов — М.: Стройиздат, 1976. — 248 с.

209. Механика композитных материалов и элементов конструкций. Т.2. Механика элементов конструкций /Гузь А.Н., Григоренко Я.М., Бабич И.Ю. и др.— К.: Наук. думка, 1983.—464с.

210. Молчанов И.Н. Машинные методы решения прикладных задач.— К.: Наук. думка, 1988.— 343с.

211. Морозов Е. М. Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения.— М.: Наука.— 1980.— 256 с.

212. Москаленко В.Н. О собственных колебаниях трехслойных плит // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.— 1962.— №4.— С.125—130.

213. Москаленко В.Н., Новичков Ю.Н. Изгиб толстых многослойных оболочек. // Механика твердого тела.— 1968. — №3.— С.149—153.

214. Мукоед А.П. О некоторых комплексных уравнениях слоистых оболочек. // Прикл. механика. — 1966.— Т.2, №7.— С.34—38.

215. Муштари Х.М. К общей теории пологих оболочек с заполнителем //Изв. АН СССР. ОТН.—1961.—№2.—С.24—29.

216. Муштари Х.М. Об области применения приближенных теорий трехслойных пластин несимметричного строения с заполнителем // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностр.— 1963.— С.176—178.

217. Назаров А.А. Основы теории и методы расчета пологих оболочек.— М.: Госстройиздат, 1966.— 303 с.

218. Нараянасвами М. Новый треугольный конечный элемент в задачах изгиба пластин с учетом поперечного сдвига. // Ракетная техника и космонавтика.— 1974.— Т.12, №2. — С.177—180.

219. Наумов В.С. Расчет трехслойных пластин с легким заполнителем МКЭ.— М.: 1984.— Деп. в ВИНТИ 14.03.84, 2376.— 25 с.

220. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний. — М.: Мир, 1988.— 448 с.



221. Немчинов Ю.И., Толбатов Ю.А. Свободные колебания пологих цилиндрических оболочек, подкрепленных ребрами жесткости. // Строит. механика и расчет сооружений.— 1975.— №3.— С.55—57.

222. Никишкин В.С., Шапиро Г.С. Задачи теории упругости для многослойных сред.— М.: Наука, 1973.— 132 с.

223. Новиков Н.В. Характеристики рассеяния энергии в материале при продольных и крутильных колебаниях.— В кн.: Рассеяние энергии при колебаниях упругих систем.— К.: Наук. думка, 1963.— С.194—198.

224. Новичков Ю.Н. Изгиб, устойчивость и колебания многослойных оболочек // Теория оболочек и пластин.— Л.: Судостроение, 1975.— С.142—145.

225. Норри Д., Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов.— М.: Мир,— 1981.— 304 с.

226. Обобщенная теория неоднородных по толщине пластин и оболочек /Л.П.Хорошун, С.В.Козлов, Ю.А.Иванов, И.К.Кошевой.— К.: Наук. думка, 1988.— 152 с.

227. Оганесян Л.А., Ривкинд В.Я., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. // Дифференц. уравнения и их приложение.— 1973.— №5.— С.1—385.

228. Определение собственных частот и форм поперечных колебаний пластин. /Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Боронко О.А., Чирков А.Ю., Мельниченко Г.И. // Пробл. прочности — 1987.— №6.— С.116—120.

229. Ортега Дж., Рейнболд В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.— М.: Мир,— 1975.

230. Осетинский Ю.В., Черепяхин В.А. Расчет подкрепленной трехслойной плиты МКЭ. // Расчет оболочек и пластин. Ростов-на-Дону, 1975.— С.63—75.

231. Паймушин В.Н., Петрушенко Ю.А., Саитов И.Х. Обобщенная модель механики многослойных оболочек со слоя-

ми переменной толщины. // Прочность и колебания авиац. конструкций.— 1984.— С.37—43.

232. Паламарчук В.Г., Сивак Э.Ф. Свободные колебания подкрепленных конических оболочек.— В кн.: Динамика пространственных конструкций.— К.: КИСИ, 1978.— С.34—36.

233. Панкратова Н.Д., Мукоед А.А. К расчету напряженного состояния неоднородных пластин в пространственной постановке. // Прикл. механика.— 1990.— Т.26, №2.— С.49—56.

234. Парлет Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы.— М.: Мир, 1983.— 382 с.

235. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью.— К.: Наук. думка, 1973.— 246 с.

236. Пикуль В.В. К теории тонких неоднородных пластин и оболочек. // Прикл. механика.— 1976.— Т.12, №8.— С.42—47.

237. Писаренко Г.С. Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале.— К.: Изд-во АН УССР, 1955.— 237 с.

238. Писаренко Г.С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала.— К.: Наук. думка, 1970.— 377 с.

239. Писаренко Г.С. Рассеяние энергии при механических колебаниях.— К.: Из-во АН УССР, 1962.— 320 с.

240. Писаренко Г.С., Богинич О.Е. Колебания кинематически возбуждаемых механических систем с учетом диссипации энергии.— К.: Наук.думка, 1982.— 220 с.

241. Писаренко Г.С. Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии.— К.: Наук. думка, 1976.— 415 с.

242. Пискунов В.Г. Исследование собственных колебаний пластинок. Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. техн.наук.— К.: 1966.— 32 с.

243. Пискунов В.Г. Неклассическая теория в задачах динамики и статики слоистых оболочек и пластин: Автореферат дисс... д-ра техн. наук.— К.: 1980.— 48 с.

244. Пискунов В.Г. Об одном варианте неклассической теории неоднородных пологих оболочек и пластин // Прикл.механика.— 1979.— Т.15, №11.— С.76—81.

245. Пискунов В.Г. Построение дискретно-континуальной схемы расчета неоднородных плит на основе метода конечных элементов // Сопрот. матер. и теор. сооружений.— 1978.— №33.— С.78—81.

246. Пискунов В.Г. Точність розв'язку задач про коливання пластинок методом скінченних різниць // Опір матеріалів і теорія споруд.— 1966.— №4.— С.15—31.

247. Пискунов В.Г., Вериженко В.Е. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций.— К.: Будівельник, 1986.— 176с.

248. Пискунов В.Г., Карпиловский В.С., Сипетов В.С., Марченко Н.Г. Реализация конечных элементов многослойных конструкций на ЕС ЭВМ // Изв. вузов. Строительство и архитектура. — 1982.— №5.— С.29.

249. Пискунов В.Г., Сипетов В.С., Туйметов Ш.Ш. Решение задачи статики для слоистых ортотропных плит в пространственной постановке // Прикл. механика.— 1990. — Т.26, №2.— С.41—49.

250. Пискунов В.Г., Юнусов А.М. Расчет трехслойных пластин, опертых и защемленных по контуру // Строительная мех. и расчет сооружений.— 1976.— №8.— С.16—18.

251. Плевако В.П. Деформация неоднородного полупространства под действием поверхностной нагрузки // Прикл. механика.— 1973.— Т.9, №6.— С.16—23.

252. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности.— М.: МГУ. 1981.— 344 с.

253. Подлеснов Ю.П., Сакало В.И. Решение упругопластических контактных задач с использованием РСМКЭ. Технологическое обеспечение повышения качества и долговечности деталей машин и инструментов. Тула: Тульский политехн ин-т, 1980.— С.140—142.



254. Полывяный А.П. Рябинин Д.Д. Экспериментальные данные по определению распорных усилий на валковых машинах. Сб. Химическое машиностроение,— 3. МВССО УССР К.: Техника, 1966.— С.87—89.

255. Постнов В.А., Слезина Н.Г. Учет деформации поперечного сдвига при расчете оболочек вращения с помощью метода конечных элементов // Строительная механика корабля.— 1971.— №161.— С.12—16.

256. Постнов В.А. Харкурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций.— Л.: Судостроение, 1974.— 344 с.

257. Приказчиков В.Г. Разностная задача на собственные значения для эллиптических операторов // ЖВМ и МФ.— 1965.— Т.5, №4.— С.648—657.

258. Проблемы автоматизации метода суперэлементов. Программный комплекс "Каскад-2"/В.А.Постнов, С.А.Дмитриев, Б.К.Елтышев, А.А.Родионов. //Применение численных методов в строительной механике корабля.— Л.: Судостроение, 1976.— С.6—14.

259. Пространственные задачи термопластичности. Под общ. ред. Ю.Н.Шевченко.— К.: Наук. думка, 1980.— 264 с.

260. Прусаков А.П. Изгиб и свободные колебания пологих цилиндрических круговых оболочек с жестким наполнителем // Изв.вузов. Строительство и архитектура, 1959.— №11.— С.46—52.

261. Прусаков А.П. Свободные колебания трехслойных пластин с легким наполнителем // Сб. трудов ДИСИ.— 1960.— №9.— С.101—108.

262. Прусаков А.П. Устойчивость и свободные колебания трехслойных пластин с легким наполнителем. Т.1.:Дисс...докт. техн. наук.— К.: 1958.— 354 с.

263. Пухлий В.А. К расчету трехслойных оболочек переменной жесткости с сжимаемым наполнителем // Прикл. механика.— 1982.— №12.— С.54—59.

264. Рассказов А.О. К теории многослойных ортотропных пологих оболочек // Прикл. механика, 1976.— Т.12, №11.— С. 50—65.

265. Рассказов А.О. Расчет многослойной ортотропной полой оболочки методом конечных элементов // Прикл. механика.— 1978.— Т.14, №8.— С.51—57.

266. Рассказов А.О., Карпиловский В.С., Харченко Н.Г. Конечный элемент многослойной ортотропной полой оболочки.— К.: 1984.— Деп. в УкрНИИТИ, 2234к-Д84.— 38 с.

267. Рассказов А.О., Соколовский И.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек.— К.: Вища школа, 1986.— 191 с.

268. Расчет машиностроительных конструкций на прочность и жесткость. //Н.Н. Шапошников, Н.Д. Тарабасов, В.Б. Петров, В.И. Мяченков.— М.: Машиностроение, 1981.—332 с.

269. Расчет на прочность деталей машин Справочник. И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, Г.Б. Иосилевич. 3-е изд. перераб. и доп.— М.: Машиностроение.— 1979.— 704 с.

270. Расчет напряженно-деформированного состояния станин каландров. /Н.В.Василенко, А.Е. Бабенко, А.Ю. Чирков, И.Д. Каменичный. Респ. симпоз. "Концентрация напряжений—Тез. докл.— Донецк: 1983.— С. 23.

271. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов. Справочник: /В.И.Мельников, В.П.Мальцев, В.П.Майборода и др.; Под общ.ред.В.И.Мяченкова.—М.: Машиностроение, 1989.

272. Расчет напряженно-деформированного и предельного состояний элементов конструкций, находящихся под воздействием динамических нагрузок и высокотемпературного газового потока. Отчет о НИР 806 (заключ.) /Киевский политехнический ин-т; Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Боронко О.А., Чирков А.Ю., Трубачев С.И.— Деп. в ВИНТИ 0286019438.—

К.: 1985.— 88 с.

273. Расчет неоднородных пологих оболочек и пластин методом конечных элементов. /В.Г.Пискунов, В.Е.Веригин, В.К.Присяжнюк, В.С.Сипетов, В.С.Карпиловский.— К.: Вища школа, 1987.— 200 с.

274. Расчет трехслойных конструкций. Справочник: /В.Н.Кобелев, Л.М.Коварский, С.И.Тимофеев. Под ред. В.Н.Кобелева.— М.: Машиностроение, 1984—304с.

275. Расчеты и испытания на прочность МР 30—81.

276. Расчеты элементов авиационных конструкций. Трехслойные пластины и оболочки: Сб.статей / Под ред. А.Я.Александрова, Р.Е.Лампера, В.Г.Сувернева. — М.: Машиностроение, 1985.— 208 с.

277. Рашид И.Р., Смит П.Д., Принц Н. Развитие метода конечных элементов в применении к решению трехмерных задач теории упругости. Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ Т.2,— Л.: Судостроение, 1974.— С. 7—21.

278. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и механике.— М.: Мир, 1985.— 590 с.

279. Рикардс Р.Б., Чате А.К. Изопараметрический треугольный конечный элемент многослойной оболочки по сдвиговой модели Тимошенко. 1. Матрицы жесткости, масс и геометрической жесткости элемента // Мех. композит. материалов.— 1981.— №3.— С. 453—460.

280. Рикардс Р.Б., Чате А.К. Изопараметрический треугольный элемент многослойной оболочки по сдвиговой модели Тимошенко. 2.Численные примеры // Мех. композит. материалов.— 1981.— №5.— С.815—820.

281. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. — М.: Стройиздат, 1977.— 129 с.

282. Розин Л.А. Основы метода конечных элементов в теории упругости.— Л.: ЛПИ, 1972.— 78 с.

283. Розин Л.А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Метод конечных элементов.—Л.: Энер-



гия, 1971.—214 с.

284. Рябов А.Ф. Основные положения теории многослойных оболочек с учетом деформации поперечного сдвига. // Сопротивление материалов и теория сооружений. — 1965. — №3. — С.17—27.

285. Рябов А.Ф. Розрахунок багатошарових оболонок. — К.: Будівельник, 1968. — 96 с.

286. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971. — 552 с.

287. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 588 с.

288. Сахаров А.С., Соловей Н.А. Исследование сходимости метода конечных элементов в задачах пластин и оболочек // Пространственные конструкции, здания и сооружения. — 1977. — №3. — С.10—15.

289. Сахаров А.С. Альтенбах И. Метод конечных элементов в механике твердых тел. К.: Вища школа. Лейпциг: ФЭБ ФАХБУХ-АТНKFU 1982. — 480 с.

290. Сахаров А.С., Козак А.Л., Гондляр А.В. Математическая модель деформирования многослойных композитных оболочечных структур в приложении к вопросам разрушения // Механика неоднородных структур. Тез. докл. 1 Всесоюз. конф. Львов. — 1983. — С.101—102.

291. Сахаров А.С., Козак А.Л., Гондляр А.В., Мельников С.Л. Математическая модель деформирования многослойных композитных оболочечных систем // Сопротивл. материалов и теория сооружений. — 1984. — №44. — С.13—16.

292. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. — М.: Мир, 1979. — 392 с.

293. Сеницын А.П. Метод конечных элементов в динамике сооружений. — М.: Стройиздат, 1978. — 231 с.

294. Сипетов В.С. Исследование напряженно-деформированного состояния многослойных пластин МКЭ.-Деп. в УкрНИИНТИ, 29.11.77, 883. — 1977. — 14 с.

295. Ситник Ю.Ф. Расчет трехслойных балок методом конечных разностей // Изв.вузов. Строительство и архитектура.— 1969.— №3.— С.44—48.

296. Снигирев В.Ф., Малинин М.Ю. Уточненный элемент слоистой полой оболочкой. // Вопросы прочности, устойчивости и колебаний конструкций летательных аппаратов.— Казань: КАИ, 1985.— С.103.

297. Создание новых методов расчета на прочность важнейших деталей полимерного оборудования и внедрение пакетов прикладных программ как элементов САПР-К: Отчет о НИР 114 (заключит.) // Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Трубачев С.И. и др.— Деп. в ВИНТИ 02910017112.— К.: Политехн. ин-т, 1990.— 192 с.

298. Сопротивление материалов. Г.С. Писаренко, В.А. Агарев, А.А. Квитка и др.— К.: Вища школа, 1979.— 693 с.

299. Сорокин Е.С. Метод учета неупругого сопротивления материала при расчете конструкции на колебания.— В кн.: Исследования по динамике сооружений.— М.: Стройиздат, 1951.— С.5—90.

300. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем.— М.: Госстройиздат, 1960.— 129 с.

301. Стратонова М.М. Расчет колебаний пластин с различным закреплением на отдельных участках внешнего и внутреннего контуров // Пробл. прочн.—1974.— N10.—С.47—50.

302. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов.— М.: Мир, 1979.— 349 с.

303. Сриниваз А., Йога Рао К., Рао А. Некоторые результаты точного расчета толстых многослойных плит.— М.: Мир, 1970.— С.295—296.

304. Съярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980.— 412 с.

305. Тадмор З., Гогос К. Теоретические основы переработки полимеров. Пер. с англ.— М.: Химия, 1984.— 632 с.

306. Тарковский Б.Д., Гельфгафт В.И. О распространении

колебаний в трехслойной пластине // Вибрации и шумы.— М.: Наука, 1969.— С.73—87.

307. Терегулов А.Г. Изгиб трехслойных пластин с упруго-вязким наполнителем // Прикл.механика.— 1965.— Т.1, №7.— С.57—62.

308. Термопрочность деталей машин. Под общ. ред. И.А. Биргера и Б.Ф. Шорра.— М.: Машиностроение, 1975.— 456 с.

309. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости.— М.: Наука, 1975.— 576 с.

310. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле.— М.: Машиностроение, 1985.— 472 с.

311. Торнер Р.В., Добролюбов Г.В. Приближенная гидродимическая теория механизма вальцевания. Каучук и резина. 1958.— №4.— С.6—10.

312. Трубачев С.И. Расчет трехслойных пластин с учетом сжимаемости наполнителя на основе вариационно-сеточных методов и метода покоординатного спуска // Тезисы докл. Междунар. науч.- техн. конф. 19-21 апреля 1989г.— К.: 1989.— С.49—50.

313. Уилкинсон Дж. Алгебраическая проблема собственных значений.— М.: Наука, 1970. — 340 с.

314. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости.—К.: Наук. думка, 1979.

315. Ульяшина А.Н. Напряженно-деформированное состояние ортотропных многослойных оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. — 1983.— №1.— С.155—166.

316. Уманский С.Э. Алгоритм и программа триангуляции двумерной области произвольной формы //Пробл. прочности, 1978.— №6.— С.83—87.

317. Уманский С.Э. О сходимости метода переменных параметров упругости //Прикл. математика и механика. 1980.— №3.— С.577—581.



318. Уманский С.Э. Оптимизация приближенных методов решения задач механики.—К.: Наук. думка, 1983.—164с.
319. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — М.: Физматгиз, 1963. — 734 с.
320. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. — М.: Машиностроение, 1970. — 734 с.
321. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. — М.: Мир, 1977. — 205 с.
322. Фондер Г., Клау Р. Явное добавление смещений тела как жесткого целого в криволинейных конечных элементах // Ракетная техника и космонавтика. 1973.— №3.— С.62—72.
323. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980.— 280 с.
324. Форсайт Дж., Моулер К. Численное решение систем алгебраических уравнений.— М.: Физматгиз, 1969. — 166 с.
325. Харченко Ю.А. Многослойная пластина в уточненной постановке под действием синусоидальной нагрузки // Расчет пространственных конструкций. — 1974. — №4. — С. 200—205.
326. Харченко Ю.А. Некоторые задачи изгиба многослойных пластин // Сопротивл.матер. и теория сооружений. — 1974. — №22. — С.127—134.
327. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. — М.: Мир, 1986. — 448 с.
328. Хильчевский В.В. Исследование рассеяния энергии в турболопаточной стали при высоких температурах // Изд. КПИ, 1955.— N18. — С.109—116.
329. Хильчевский В.В. Обобщение зависимостей, описывающих петлю механического гистерезиса. // Пробл. прочности, 1969.—№4.—С. 22—24.
330. Хильчевский В.В., Дубенец В.Г. Рассеяние энергии при колебаниях тонкостенных элементов конструкций. — К.: Вища школа, 1977. — 256 с.
331. Хэбин Л.М. Обзор современного состояния исследований по трехслойным конструкциям // Механика.— М.: Мир,

1966.—2.(96).—С.3—17.

332. Цурпал И.А., Тамуров Н.Г. Расчет многосвязных слоистых и нелинейно-упругих пластин и оболочек.—К.: Вища школа, 1977.—224 с.

333. Цыбенко А.С., Ващенко Н.Г., Крищук Н.Г. Алгоритмы и программы автоматической подготовки информации в методе конечных элементов: Учебное пособие.— К.: Киевск. политехн. ин-т, 1983. — 114 с.

334. Автоматизированная система обслуживания конечно-элементных расчетов /Цыбенко А.С., Ващенко Н.Г., Крищук Н.Г., Лавендел Ю.О.— К.: Вища шк., 1986.— 251 с.

335. Цыбенко А. С., Ващенко Н. Г., Крищук Н. Г. Алгоритмы и программы автоматической подготовки и обработки информации в методе конечных элементов. Учеб. пособие.— К.: 1989.— 114 с.

336. Цыганок И.И. Вулканизационное оборудование.— М.: Машиностроение, 1967.— 323 с.

337. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.Н., Петров В.М. Численные методы решения вариационных и краевых задач методом локальных вариаций // ЖВМ и МФ. 1966.—№6.—С.124—134.

338. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Чирков А.Ю. Оптимизация процедуры численного решения задач теории упругости методом покоординатного спуска // Динамика и прочность машин.—1984.—N40.—С.92—96.

339. Бабенко А.Е., Василенко Н.В., Чирков А.Ю. Решение задач теории упругости методом покоординатного спуска. // Тез. док. на II науч. техн. конф. "Усовершенствование эксплуатации и ремонта судов".— Калининград: Калининград. техничн. ин-т, 1981.— С.11.

340. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Чирков А.Ю. О выборе коэффициента релаксации при решении задач теории упругости методом покоординатного спуска // Пробл. прочности.— 1984.— N5.— С.111—112.

341. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Чирков А.Ю. Расчет

станины каландра методом покоординатного спуска // Изв. Киев. политехн. ин-та. Машиностроение. — 1984. — Вып. 21. — С.83—85.

342. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Чирков А.Ю. Использование метода покоординатного спуска в вариационно-сеточных схемах при расчете пространственных пластинчатых систем // Тез. док. V Всесоюзн. конф. по статике и динамике пространственных конструкций. — Киев.: Киев. инж.-стр. ин-т, 1985. — С.39.

343. Решение задач теории упругости методом покоординатного спуска. / Н.В.Василенко, А.Е.Бабенко, А.С.Цыбенко, А.Ю.Чирков // Пробл. прочности. — 1983. — №1. — С.102—104.

344. Чирков А.Ю., Бабенко А.Е. Об эффективных подходах к оптимизации релаксационной схемы при численном решении краевых задач теории упругости // Пробл. прочности. — 1987. — №6. — С.95—100.

345. Численные методы в теории упругости и теории оболочек. / Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П., Савченков В.И. Под ред. Н.П.Абовского. — Красноярск: Изд. Краснояр. ун-та, 1986. — 384 с.

346. Чулков П.П. Общая теория слоистых оболочек. // МТТ. — 1967. — №6. — С.167—174.

347. Чулков П.П., Иванов А.В. Учет поперечных деформаций заполнителя в задачах устойчивости трехслойных пластин с различными слоями. // Изв. АН СССР. МТТ. — 1969. — №6. — С.101—107.

348. Шапошников Н.Н. К расчету пластин на устойчивость и колебания по методу конечного элемента // Труды МИИТ. — 1970. — 31. — С. 35—39.

349. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена. — М.: Мир, 1988.

350. Шмидт Г. Параметрические колебания. — М.: Мир, 1978. — 336 с.

351. Шульга Н.А. Основы механики сплошных сред перио-



дической структуры. — К.: Наук. думка, 1981. — 198 с.

352. Шульга Н.А., Ямковой А.И. Деформация регулярно-слоистого полупространства под вибрационной нагрузкой // Прикл.механика.— 1979.— Т.15, №9.— С.113—117.

353. Эффективный метод решения трехмерной задачи теории упругости для ступенчато-призматических тел. Н.В. Василенко // А.Е. Бабенко, Чирков А.Ю., Каменичный И.Д.— К.: 1988.— 9, Рукопись деп. в УкрНИИТИ 706 УК — 88.

354. Юдаев Б.Н. Теплопередача.— М.: Высшая школа, 1973.— 360 с.

355. Яковлев А.П. Влияние формы колебаний на рассеяние энергии в материале. — В кн.: Тр. науч.-техн. совещ. по изучению рассеяния энергии при колебаниях упругих тел. — К.: Изд.-во АН УССР, 1958.— С.228—246.

356. Яковлев А.П. Диссипативные свойства неоднородных материалов и систем. — К.: Наук. думка, 1985.— 248 с.

357. Acruggs R.M., Piersy S.V., Reese I.R. An analytical and experimental study of the vibration of ortogonally stiffened cilindrical shels.-J.Spacecraft and Rocket, 1969, 6, N5, p.603—609.

358. Argylis J.N. Energy theorems of structural analysis, part 1, General theorie // Aircraft engineering. 1954.— 26, No.308. p.337—356.

359. Argylis J.N. ASKA : A automatik system for kinematik analysis - a universal system for structural analysis based on the matrix displacement (finite element ) method // Nucl. End .Des. 1969—V.10, N2—p. 441—447.

360. Cohen G.A. Computer analysis of asymeric free vibrations of ring - stiffened ortotropic shells of revolution.-AIAA Journal, 1965, 3, N12, p.2305—2312.

361. Counturat R. Variational methods for th solutiong of problems of equilibrim and vibrations. — Bull. Amer. Math. Soc. — 1943.—49, 1—23.

362. Hageman L.A., Kellogg R.B. Estimating optimum overrelaxation parameters // Math. Comput.— 1968.— 22,

No.101.— p.60—68.

363. Hestens M.R., Sttiefel E. Method of conjugate gradients for solving linear system.— J.Res.Nat.Bur.Stand.— 1952.— 49.— p.409—436.

364. Hrennikoff A. Solytion of problems of elastisity by the framework method. // Journal of Applied Mechanics.— 1941.— 8.— p.169—175.

365. Iguchi S. Biegeschwingen und klangfiguren der vierseitig eignespannten rechteckigen Platte. Ing.— Archiv, Bd8, H.1,1937.

366. Koul P.K.,Cadambe V. The natural frequencies of thin skew plates. Aeron. Sos., vol.60, N544, 1956.

367. Klein B. Fundamental frequencies of arbitrarily shaped simply supported triangular plates arbitrary plan form. Journ. Roy. Aeron. Sos., vol.60, N544, 1956.

368. Launaly P. et.al. The Tridimensional termoplastic computer code,, TITUS,,—Jr.1—st. Jnt.conf.Struct.Mech.React. technol. BErlin, 1971.-Amsterddam.: Amsterddam e.a..-1971.-v.5, part H.,p M5—4/1—M5—4/21

369. MacNeal R.H.,MaCormick C.W. The NASTRAN computer program for structural analyysis. // Comput. and SStruct. — 1971.— v.7,No.1.— p.32—35.

370. Odman S.T.A. Studies of boundery value problems, part II, inst. for cem. arch. bet., Stocholm, 1955.

371. Peaceman D. W., Rashford H.H. Thenumerical solution of parabolic and elliptic differential eqquations. // SIAM J.—1955.— 3, No.1.— p.28—41.

372. Rosen A., Singer J. Vibrations of axially stiffened cilindrical shels.— J.Sound and Vibr., 1974.— 34,p. 357—378.

373. Ross C.T. Vibration and instability of ringreinforced circular cilindrical shells.—J. Ship. Res., 1976.—20, N1,—p.22—31.

374. Ruhe A. Iterative eigenvalue algorithms based of convergence splittings.—J.Comp.Phys.,1975.— 19.— p.110—120.

375. Stifness and deflection analysis of complex structures. M.J.Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, L.J. Topp // J.Aeronaut.

Sct.— 1956.— 23, No. 9.— p. 805—824.

376. Synge J.L. The hyperrcircle in mathematical physics.— London: Cambridge University Press, 1957.— p.327.

377. Varga R.S. Orderings of Successive overrelaxetion sheme. // Pacific J. Math. — 1959.— 9.— p.622.

378. Yoning D.M. Iterrative solution of large linear systems: —N.—J.,L.: Acad.Press.—1971.— p.253.

379. Wang J.T.S., Rinehart S.A. Free vibrations of longitudinelly stiffened cylindrical shits.— TRANS.ASME., 1974, E41, N4, p.1087—1093.



# Оглавление

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Анализ задачи исследования НДС</b>                                   | <b>7</b>  |
| 1.1      | Анализ методов расчёта НДС . . . . .                                    | 9         |
| 1.2      | Численные методы определения НДС . . . . .                              | 16        |
| 1.3      | Анализ методов расчёта колебаний . . . . .                              | 25        |
| 1.4      | Анализ методов построения сеток . . . . .                               | 36        |
| 1.5      | Методы нахождения решения . . . . .                                     | 42        |
| <b>2</b> | <b>Вариационно-сеточные методы в статических задачах</b>                | <b>47</b> |
| 2.1      | Плоская упругая и упруго-пластическая задача                            | 53        |
| 2.2      | Изгиб однородных пластин . . . . .                                      | 54        |
| 2.3      | Изгиб однородных оболочек . . . . .                                     | 58        |
| 2.4      | Трёхслойные пластинчато-оболочечные конструкции . . . . .               | 63        |
| 2.4.1    | Построение вариационно-сеточных схем для слоистых конструкций . . . . . | 63        |
| 2.4.2    | Изгиб трехслойных пластин . . . . .                                     | 68        |
| 2.5      | Трёхмерные призматические тела . . . . .                                | 79        |
| <b>3</b> | <b>Собственные частоты и собственные формы</b>                          | <b>93</b> |
| 3.1      | Вариационная постановка задачи о колебаниях                             | 93        |
| 3.2      | Колебания пластинчатых систем . . . . .                                 | 98        |
| 3.3      | Сходимость приближенного решения . . . . .                              | 101       |
| 3.4      | Метод повышения жесткостей . . . . .                                    | 101       |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.5      | Свободные колебания пластин в своей плоскости                    | 105        |
| 3.6      | Изгибные колебания пластин . . . . .                             | 108        |
| 3.7      | Колебания пластинчато-оболочечных конструкций . . . . .          | 113        |
| 3.8      | Колебания трехслойных пластин . . . . .                          | 116        |
| 3.9      | Пространственные конструкции . . . . .                           | 120        |
| <b>4</b> | <b>Метод покоординатного спуска</b>                              | <b>123</b> |
| 4.1      | Метод покоординатного спуска . . . . .                           | 125        |
| 4.2      | Максимизация скорости сходимости . . . . .                       | 135        |
| <b>5</b> | <b>Автоматизированная система расчета</b>                        | <b>151</b> |
| 5.1      | Назначение пакета прикладных программ . . . . .                  | 151        |
| 5.2      | Методика построения сетки на многосвязных поверхностях . . . . . | 152        |
| 5.3      | Макроструктура программного комплекса . . .                      | 157        |
| 5.4      | Ввод информации и генерации сетки . . . . .                      | 159        |
| 5.5      | Итерационная процедура . . . . .                                 | 161        |
| 5.6      | Тестовые и прикладные задачи . . . . .                           | 163        |
| 5.6.1    | Станина каландра 503089 . . . . .                                | 163        |
| 5.6.2    | Крышка паровой камеры вулканизатора 421222 . . . . .             | 167        |
| 5.6.3    | Крышка камеры форматора-вулканизатора 88 дюймов . . . . .        | 172        |
| 5.6.4    | Кривошипное колесо форматора - вулканизатора . . . . .           | 175        |
| 5.6.5    | Напряженно-деформированное состояние ГК . . . . .                | 181        |
| 5.7      | Колебания пластин в своей плоскости . . . . .                    | 201        |
| 5.7.1    | Колебания лопатки-пластины . . . . .                             | 201        |
| 5.7.2    | Колебания дисковой фрезы в своей плоскости . . . . .             | 204        |
| 5.8      | Изгибные колебания . . . . .                                     | 207        |

|        |  |     |
|--------|--|-----|
| 5.8.1  | Собственные изгибные колебания квадратной пластинки . . . . .  | 207 |
| 5.8.2  | Свободные колебания консольной треугольной пластинки . . . . .   | 210 |
| 5.8.3  | Изгибные колебания фрезы . . . . .   | 212 |
| 5.8.4  | Свободные колебания Т-образной пространственной пластинчатой конструкции . . . . .                           | 217 |
| 5.8.5  | Исследование динамических характеристик элементов конструкций теплозащитного слоя летательных аппаратов . .  | 218 |
| 5.8.6  | Теплозащитная квадратная пластинка, заземленная в 4-х точках . . . . .                                       | 219 |
| 5.8.7  | Квадратная пластинка, заземленная в пяти точках . . . . .  | 220 |
| 5.8.8  | Квадратная пластинка, заземленная в 10-ти точках по оси симметрии . . . . .                                  | 221 |
| 5.8.9  | Пространственная конструкция теплозащитного слоя . . . . .   | 222 |
| 5.8.10 | Определение собственных форм и частот полусферического резонатора твердотельного волнового гироскопа (ТВГ) . | 223 |

## 6 Список литературы

225



**Наукове видання**

**Бабенко Андрій Єлісейович**  
**Бобир Микола Іванович**  
**Бойко Сергій Леонідович**  
**Боронко Олег Олександрович**

**Використання і розвиток методу покоординатного спуску в  
задачах визначення напружено-деформованого стану  
при статичних та вібраційних навантаженнях**

**(Російською мовою)**

**Монографія**

*В авторській редакції*

Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Папір офс.. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 15,34.  
Обл.-вид. арк. 25,52. Зам. № 25-654. Наклад 700 пр.

---

ПГО УСІ «Інрес»

Свідцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру  
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції

ДК № 2225 від 25.06.2005 р.

03067, Київ-67, вул. Машинобудівна, 36

тел. (044) 458-04-46, факс 458-04-29, e-mail: axiompub@gmail.com

Надруковано з оригінал-макета замовника в типографії ПП „Видавництво «Фенікс»”  
Св-во ДК № 271 від 07.12.2000 р.