УДК 621.396.9

О. В. Збруцький, Г. Є. Янкелевич

ВИЗНАЧЕННЯ КООРДИНАТ КОРИСТУВАЧА В СУПУТНИКОВИХ НАВІГАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ

Вступ

В супутникових навігаційних системах (СНС) координати користувача, супутників та різниці між годинниками супутника та користувача пов’язані між собою системою рівнянь псевдо–відстаней між супутниками та користувачем [1]:

$$P_i = \sqrt{(x_{ci} - x_k)^2 + (y_{ci} - y_k)^2 + (z_{ci} - z_k)^2} + c \cdot \vartriangle t, \qquad (1)$$

де P_i – псевдо-відстань між кожним з чотирьох супутників i = 1, 2, ..., 4 та користувачем,

x_{ci}, y_{ci}, z_{ci} – координати супутників,

x_k, y_k, z_k – координати користувача,

$\vartriangle t$ – різниця між годинниками супутника та користувача,

c - швидкість світла.

Зазначені рівняння є нелінійними, тому обчислювати координати користувача, різницю між годинниками супутника та користувача по відомим значенням координат супутників та псевдо–відстаней за допомогою цих рівнянь не зручно. Для обчислення координат x_k, y_k, z_k та різниці $\vartriangle t$ в СНС використовують лінеаризовані шляхом розкладання в ряд Тейлора та відкидання членів другого порядку малості рівняння (1). Система лінеаризованих рівнянь має вигляд

$$P_{ij} = R_{Tij} + \frac{x_{kj} - x_{ci}}{R_{Tij}} \vartriangle x_{ij} + \frac{y_{kj} - y_{ci}}{R_{Tij}} \vartriangle y_{ij} + \frac{z_{kj} - z_{ci}}{R_{Tij}} \vartriangle z_{ij} + c \cdot \vartriangle t_j, \qquad (2)$$

де R_{Tij} – відстань від кожного з чотирьох супутників до передбачуваної позиції користувача,

x_{kj}, y_{kj}, z_{kj} – координати передбачуваної позиції користувача,

$\vartriangle x_j, \vartriangle y_j, \vartriangle z_j$ – поточні різниці координат між передбачуваною та реальною позицією користувача,

j – номер кроку ітерації при визначені координат користувача та різниці між годинниками супутника та користувача.

$$x_{kj+1} = x_{kj} + \vartriangle x_j, \quad y_{kj+1} = y_{kj} + \vartriangle y_j, \quad z_{kj+1} = z_{kj} + \vartriangle z_j, \qquad (3)$$

$$R_{Tij} = \sqrt{(x_{kj} - x_{ci})^2 + (y_{kj} - y_{ci})^2 + (z_{kj} - z_{ci})^2}\,.$$

Виконавши необхідні перетворення, з системи рівнянь (2) можна знайти величини:

$$\begin{bmatrix} \triangle x_j \\ \triangle y_j \\ \triangle z_j \\ c \cdot \triangle t_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_{kj} - x_{c1}}{R_{T1j}} & \frac{y_{kj} - y_{c1}}{R_{T1j}} & \frac{z_{kj} - z_{c1}}{R_{T1j}} & 1 \\ \frac{x_{kj} - x_{c2}}{R_{T2j}} & \frac{y_{kj} - y_{c2}}{R_{T2j}} & \frac{z_{kj} - z_{c2}}{R_{T2j}} & 1 \\ \frac{x_{kj} - x_{c3}}{R_{T3j}} & \frac{y_{kj} - y_{c3}}{R_{T3j}} & \frac{z_{kj} - z_{c3}}{R_{T3j}} & 1 \\ \frac{x_{kj} - x_{c4}}{R_{T4j}} & \frac{y_{kj} - y_{c4}}{R_{T4j}} & \frac{z_{kj} - z_{c4}}{R_{T4j}} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P_{1j} - R_{T1j} \\ P_{2j} - R_{T2j} \\ P_{3j} - R_{T3j} \\ P_{4j} - R_{T4j} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Для знаходження псевдо–відстаней P_{ij} використовується метод ітерацій, а саме задаються початкові значення координат x_{kj}, y_{kj}, z_{kj} та різниць $\triangle x_j, \triangle y_j, \triangle z_j$. По формулі (3) обчислюють відстань R_{Tij}, по формулі (2) – P_{ij}. Замість обчислень на кожному кроці ітерацій можна вимірювати P_{ij}. Далі по формулі (4) знаходяться величини $\triangle x_j, \triangle y_j, \triangle z_j, c \cdot \triangle t_j$, які підставляються в формули (3). Потім зазначеним чином уточнюються значення x_{kj}, y_{kj}, z_{kj}, R_{Tij} і P_{ij}, які підставляються в (4), звідки знаходяться нові, більш точні значення величини $\triangle x_j, \triangle y_j, \triangle z_j, c \cdot \triangle t_j$. Далі процес ітерацій повторюється доки модулі різниць $\triangle x_j, \triangle y_j, \triangle z_j$ не будуть менші наперед заданої величини, якою визначається допустима похибка обчислення координат користувача.

Виконання наведеної методики визначення координат користувача потребує значних обчислювальних затрат.

Постановка задачі

Визначити метод знаходження координат користувача з належною точністю без використання наведеного процесу ітерацій, тобто з меншими обчислювальними затратами.

Математичні засади

Для вирішення поставленої задачі рівняння (1) перепишемо наступним чином

$$(P_i - c \cdot \triangle t)^2 = (x_{ci} - x_k)^2 + (y_{ci} - y_k)^2 + (z_{ci} - z_k)^2. \tag{5}$$

В цих рівняннях відомими величинами є псевдо-відстані P_i, які одержані в результаті вимірів GPS-приймачів користувача, та координати x_{ci}, y_{ci}, z_{ci} супутників. Необхідно розрахувати координати користувача x_k, y_k, z_k та різницю між годинниками супутника та користувача Δt. З метою зменшення похибок обчислювання замість малої величини Δt обчислюється величина $c \cdot \Delta t$.

В системі рівнянь (5) віднімемо одне рівняння від іншого, виключаючи повтори. Після перетворень одержимо систему з шести рівнянь виду

$$\begin{aligned}
&2(P_1-P_3)c\cdot\Delta t-2(x_{c1}-x_{c3})x_k-2(y_{c1}-y_{c3})y_k-2(z_{c1}-z_{c3})z_k=\\
&\quad=P_1^2-P_3^2-(x_{c1}^2-x_{c3}^2)-(y_{c1}^2-y_{c3}^2)-(z_{c1}^2-z_{c3}^2),\\
&2(P_1-P_2)c\cdot\Delta t-2(x_{c1}-x_{c2})x_k-2(y_{c1}-y_{c2})y_k-2(z_{c1}-z_{c2})z_k=\\
&\quad=P_1^2-P_2^2-(x_{c1}^2-x_{c2}^2)-(y_{c1}^2-y_{c2}^2)-(z_{c1}^2-z_{c2}^2),\\
&2(P_2-P_3)c\cdot\Delta t-2(x_{c2}-x_{c3})x_k-2(y_{c2}-y_{c3})y_k-2(z_{c2}-z_{c3})z_k=\\
&\quad=P_2^2-P_3^2-(x_{c2}^2-x_{c3}^2)-(y_{c2}^2-y_{c3}^2)-(z_{c2}^2-z_{c3}^2),\\
&2(P_1-P_4)c\cdot\Delta t-2(x_{c1}-x_{c4})x_k-2(y_{c1}-y_{c4})y_k-2(z_{c1}-z_{c4})z_k=\\
&\quad=P_1^2-P_4^2-(x_{c1}^2-x_{c4}^2)-(y_{c1}^2-y_{c4}^2)-(z_{c1}^2-z_{c4}^2),\\
&2(P_2-P_4)c\cdot\Delta t-2(x_{c2}-x_{c4})x_k-2(y_{c2}-y_{c4})y_k-2(z_{c2}-z_{c4})z_k=\\
&\quad=P_2^2-P_4^2-(x_{c2}^2-x_{c4}^2)-(y_{c2}^2-y_{c4}^2)-(z_{c2}^2-z_{c4}^2),\\
&2(P_3-P_4)c\cdot\Delta t-2(x_{c3}-x_{c4})x_k-2(y_{c3}-y_{c4})y_k-2(z_{c3}-z_{c4})z_k=\\
&\quad=P_3^2-P_4^2-(x_{c3}^2-x_{c4}^2)-(y_{c3}^2-y_{c4}^2)-(z_{c3}^2-z_{c4}^2).
\end{aligned} \tag{6}$$

Можна бачити, що ця система рівнянь лінійна відносно змінних $x_k, y_k, z_k, c\cdot\Delta t$. Визначимо кількість лінійно незалежних рівнянь в цій системі. При цьому будемо вважати, що похибки визначення координат кожного з супутників та псевдо-дальностей відповідно рівнозначні. Для визначення кількості лінійно незалежних рівнянь знайдемо ранг матриці системи (6) та ранг розширеної матриці системи (6) [2].

Матриця системи (6) має вигляд:

$$A_з=2\begin{bmatrix}
(P_1-P_2) & -(x_{c1}-x_{c2}) & -(y_{c1}-y_{c2}) & -(z_{c1}-z_{c2})\\
(P_1-P_3) & -(x_{c1}-x_{c3}) & -(y_{c1}-y_{c3}) & -(z_{c1}-z_{c3})\\
(P_2-P_3) & -(x_{c2}-x_{c3}) & -(y_{c2}-y_{c3}) & -(z_{c2}-z_{c3})\\
(P_1-P_4) & -(x_{c1}-x_{c4}) & -(y_{c1}-y_{c4}) & -(z_{c1}-z_{c4})\\
(P_2-P_4) & -(x_{c2}-x_{c4}) & -(y_{c2}-y_{c4}) & -(z_{c2}-z_{c4})\\
(P_3-P_4) & -(x_{c3}-x_{c4}) & -(y_{c3}-y_{c4}) & -(z_{c3}-z_{c4})
\end{bmatrix}. \tag{7}$$

Оскільки ранг матриці дорівнює найбільшому числу лінійно незалежних рядків або стовпців, то можна показати, що ранг матриці (7) дорівнює чотирьом.

Розширена матриця системи (6) має вигляд:

$$B_з = \begin{bmatrix} 2(P_1 - P_2) & -2(x_{c1} - x_{c2}) & -2(y_{c1} - y_{c2}) & -2(z_{c1} - z_{c2}) & b_1 \\ 2(P_1 - P_3) & -2(x_{c1} - x_{c3}) & -2(y_{c1} - y_{c3}) & -2(z_{c1} - z_{c3}) & b_2 \\ 2(P_2 - P_3) & -2(x_{c2} - x_{c3}) & -2(y_{c2} - y_{c3}) & -2(z_{c2} - z_{c3}) & b_3 \\ 2(P_1 - P_4) & -2(x_{c1} - x_{c4}) & -2(y_{c1} - y_{c4}) & -2(z_{c1} - z_{c4}) & b_4 \\ 2(P_2 - P_4) & -2(x_{c2} - x_{c4}) & -2(y_{c2} - y_{c4}) & -2(z_{c2} - z_{c4}) & b_5 \\ 2(P_3 - P_4) & -2(x_{c3} - x_{c4}) & -2(y_{c3} - y_{c4}) & -2(z_{c3} - z_{c4}) & b_6 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

де $b_1 = P_1^2 - P_2^2 - (x_{c1}^2 - x_{c2}^2) - (y_{c1}^2 - y_{c2}^2) - (z_{c1}^2 - z_{c2}^2)$,

$b_2 = P_1^2 - P_3^2 - (x_{c1}^2 - x_{c3}^2) - (y_{c1}^2 - y_{c3}^2) - (z_{c1}^2 - z_{c3}^2)$,

$b_3 = P_2^2 - P_3^2 - (x_{c2}^2 - x_{c3}^2) - (y_{c2}^2 - y_{c3}^2) - (z_{c2}^2 - z_{c3}^2)$,

$b_4 = P_1^2 - P_4^2 - (x_{c1}^2 - x_{c4}^2) - (y_{c1}^2 - y_{c4}^2) - (z_{c1}^2 - z_{c4}^2)$,

$b_5 = P_2^2 - P_4^2 - (x_{c2}^2 - x_{c4}^2) - (y_{c2}^2 - y_{c4}^2) - (z_{c2}^2 - z_{c4}^2)$,

$b_6 = P_3^2 - P_4^2 - (x_{c3}^2 - x_{c4}^2) - (y_{c3}^2 - y_{c4}^2) - (z_{c3}^2 - z_{c4}^2)$.

Також можна показати, що для матриці (8) ранг дорівнює чотирьом. Таким чином, в системі рівнянь (6) є тільки чотири незалежних, і цю систему можна записати так:

$$A \begin{bmatrix} c \cdot \triangle t \\ x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} = B.$$

Матриці A, B утворюються шляхом викреслювання з матриці $A_з$, довільних двох рядків та використанням величин b_i з індексами, що дорівнюють номерам залишених рядків. Оскільки ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матраці, то ця система має єдине рішення

$$\begin{bmatrix} c \cdot \triangle t \\ x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} = A^{-1} B, \quad (9)$$

де $A = 2\begin{bmatrix} (P_1 - P_2) & -(x_{c1} - x_{c2}) & -(y_{c1} - y_{c2}) & -(z_{c1} - z_{c2}) \\ (P_2 - P_3) & -(x_{c2} - x_{c3}) & -(y_{c2} - y_{c3}) & -(z_{c2} - z_{c3}) \\ (P_1 - P_4) & -(x_{c1} - x_{c4}) & -(y_{c1} - y_{c4}) & -(z_{c1} - z_{c4}) \\ (P_3 - P_4) & -(x_{c3} - x_{c4}) & -(y_{c3} - y_{c4}) & -(z_{c3} - z_{c4}) \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_6 \end{bmatrix}$.

Можна також використовувати інші чотири рівняння з системи (6), але система (9) сформована так, щоб дані кожного з супутників використовувалися рівномірно. При цьому $\det A \neq 0$, що забезпечується належним розташуванням супутників.

Для подальшого зменшення обчислювальних затрат доцільно різницю квадратів в виразах коефіцієнтів матриці B замінити на добуток суми та різниці відповідних величин.

Висновки

Отримана лінійна система алгебраїчних рівнянь для обчислення координат користувача x_k, y_k, z_k та значення поправки $c \cdot \Delta t$, дозволяє скоротити обчислювальні затрати.

Список використаної літератури

1. *Антонович К. М.* Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии. В 2 т. Т. 2. // К. М. Антонович /– М. ФГУП «Картгеоцентр», 2006. – 360 с.
2. *Корн Г.* Справочник по математике.// Г. Корн, Т. Корн /– М. «Наука», 1973.– 832с.