

## КОЛИВАННЯ ЕЛІПТИЧНИХ МЕМБРАН

### Вступ

Цільні та з отвором еліптичні мембрани зустрічаються в різного типу діафрагм, пружин, підвісок. Методика рішення задач по визначенню частот власних коливань для таких мембран приведені в роботах [1] - [2]. В роботі [3] на основі методів Релея-Рітца та коллокацій знайдено частотний параметр при значенні величини ексцентриситету 0.8, який в [4] не визначався. Результати обчислень частотного параметра для цільної еліптичної мембрани при різних значеннях ексцентриситету приведені в роботі [4], які також ввійшли в довідник [5]. Інших результатів по визначенню частотного параметра цільної еліптичної мембрани в літературі не виявлено. Відсутні також дані по визначенню частотного параметру еліптичної мембрани з отвором.

### Мета досліджень

В роботі ставиться задача визначення частотних параметрів цільної еліптичної мембрани при симетричних коливаннях при різних значеннях ексцентриситету. Складання частотного рівняння для визначення частот коливань мембрани з отвором та визначення частотного параметра при різних значеннях ексцентриситету внутрішнього та зовнішнього еліпсів.

### Дослідження

Рівняння коливань розтягнутої мембрани матиме такий вигляд:

$$N \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

де  $w$  – нормальні переміщення точок пластинки,

$m$  – маса пластинки на одиницю площі,

$N$  – погонна розтягуюча сила,

$t$  – час.

Якщо  $\omega$  колова частота коливань, то  $w$  змінюється з часом як  $\cos \omega t$  і рівняння (1) матиме вигляд,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w + k_1^2 w = 0 \quad (2)$$

Між прямокутними  $x, y$  та еліптичними ортогональними координатами  $\xi, \eta$  існує залежність:

$$x + iy = h \cosh(\xi + i\eta), \quad (x = h \cosh \xi \cdot \cos \eta, \quad y = h \sinh \xi \cdot \sin \eta),$$

де  $2h$  – відстань між фокусами еліпса,

$a, b$  – півосі еліпса,

$$e = \sqrt{1 - (b/a)^2} - \text{його ексцентриситет.}$$

В даному випадку маємо для різних  $h$  систему еліпсів  $x^2 / \cosh^2 \xi + y^2 / \sin^2 \eta = h^2$  (рис. 1, а), які перетинаються системою гіпербол ( $x^2 / \cosh^2 \eta - y^2 / \sin^2 \xi = h^2$ ). При  $e=1$  еліпс переходить в лінію (рис. 1, б), а при  $e=0$  еліпс переходить в коло (рис. 1, с).

В еліптичній системі координат рівняння (2) при  $k_1^2 h = 2q$  матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \partial^2 w / \partial \xi^2 + \partial^2 w_1 / \partial \eta^2 + 2k^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) w_1 &= 0 \\ w(\xi, \eta) &= \psi(\xi) \cdot \varphi(\eta) \end{aligned} \quad (3)$$

Рівняння (3) матиме вигляд:

$$\varphi \cdot d^2 \psi / d\xi^2 + \psi \cdot d^2 \varphi / d\eta^2 + 2q (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \cdot \psi \varphi = 0.$$

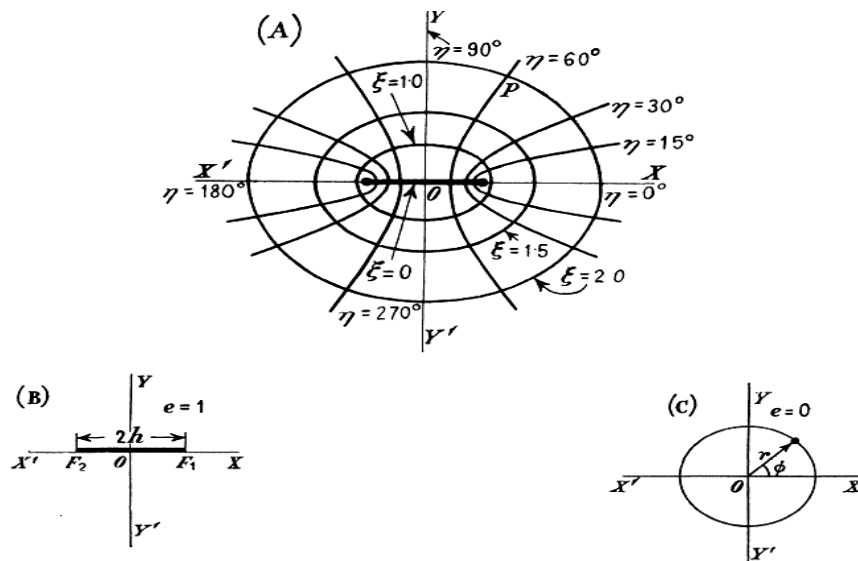


Рис. 1. Випадки перетину системи еліпсів системою гіпербол

Позначимо через  $\alpha$  сталу величину і запишемо це рівняння в такій формі:

$$d^2 \psi / d\xi^2 + (2q \cosh 2\xi) \cdot \psi = -d^2 \varphi / d\eta^2 + (2q \cos 2\eta) \cdot \varphi = \alpha. \quad (4)$$

Із даного співвідношення маємо систему канонічних рівнянь Мат'є

$$d^2 \varphi / d\eta^2 + (\alpha - 2q \cosh 2\eta) \cdot \varphi = 0, \quad (5)$$

$$d^2\psi / d\xi^2 - (\alpha - 2q \cos 2\xi) \cdot \psi = 0. \quad (6)$$

Рішення (5) складають звичайні функції Мат'є  $se_m(\eta, q)$   $se_m(\eta, q)$ . Рівняння (6) і його рішення називають модифікованими  $Ce_m(\eta, q)$ ,  $Se_m(\eta, q)$ . Це рівняння можна отримати шляхом заміни  $\eta$  на  $i\eta$  в (5).

$$ce_m(i\eta, q) = Ce_m(\eta, q), se_m(i\eta, q) = Se_m(\eta, q)$$

Частинне рішення (6) складають звичайні  $ce_m(\xi, -q)$ ,  $se_m(\xi, -q)$  та модифіковані функції:

$$Ce_m(\xi, -q), \quad Se_m(\xi, -q),$$

$$Ce_o(\xi_o, q) = 1 - \frac{q}{2} \operatorname{ch} 2\xi_o + \frac{q^2}{32} \cdot \operatorname{ch} 4\xi_o - \frac{q^3}{128} \left( \frac{1}{9} \cdot \operatorname{ch} 2\xi_o - 7 \operatorname{ch} 2\xi_o \right) + \\ + \frac{q^4}{73828} (\operatorname{ch} 8\xi_o - 320 \operatorname{ch} 4\xi_o),$$

$$\operatorname{ch} \xi_o = \frac{1}{e}, \quad e = \sqrt{1 - (b/a)^2}, \quad \omega = \frac{2\sqrt{q}}{ea} \cdot \sqrt{\frac{N}{m}};$$

$$Ce_1(\xi_o, q) = \operatorname{ch} \xi_o - \frac{q}{8} \operatorname{ch} 3\xi_o + \frac{q^2}{64} \left( \frac{1}{3} \operatorname{ch} 5\xi_o - \operatorname{ch} 3\xi_o \right) - \frac{q^3}{512} \left( \frac{1}{3} \operatorname{ch} 3\xi_o - \frac{4}{9} \operatorname{ch} 5\xi_o + \right. \\ \left. + \frac{1}{18} \operatorname{ch} 7\xi_o \right) + \frac{q^4}{4096} \left( \frac{11}{9} \operatorname{ch} 3\xi_o + \frac{1}{6} \operatorname{ch} 5\xi_o - \frac{1}{12} \operatorname{ch} 7\xi_o + \frac{1}{180} \operatorname{ch} 9\xi_o \right),$$

$$Se_1(\xi_o, q) = \operatorname{sh} \xi_o - \frac{q}{8} \operatorname{sh} 3\xi_o + \frac{q^2}{64} \cdot \left( \frac{1}{3} \operatorname{sh} 5\xi_o + \operatorname{sh} 3\xi_o \right) - \frac{q^3}{512} \left( \frac{1}{3} \operatorname{ch} 3\xi + \frac{4}{9} \operatorname{ch} 5\xi_o \right) + \\ + \frac{1}{18} \operatorname{ch} 7\xi_o + \frac{q^4}{4096} \left( -\frac{11}{9} \operatorname{sh} 3\xi_o + \frac{\operatorname{sh} 5\xi_o}{6} + \frac{\operatorname{sh} 7\xi_o}{12} + \frac{1}{180} \operatorname{sh} 9\xi_o \right), \quad (7)$$

$$Ce_2(\xi_o, q) = \operatorname{ch} 2\xi_o - \frac{q}{8} \left( \frac{2}{3} \operatorname{ch} 4\xi_o - 2 \right) + \frac{q^2}{384} \operatorname{ch} 6\xi_o - \frac{q^3}{512} \left( \frac{1}{45} \operatorname{ch} 8\xi + \right. \\ \left. + \frac{43}{27} \operatorname{ch} 4\xi_o + \frac{40}{3} \right) + \frac{q^4}{4096} \left( \frac{1}{540} \operatorname{ch} 10\xi_o + \frac{293}{540} \operatorname{ch} 6\xi_o \right),$$

$$Se_2(\xi_o, q) = \operatorname{sh} 2\xi_o - \frac{q}{12} \operatorname{sh} 4\xi_o + \frac{q^2}{384} \operatorname{sh} 6\xi_o - \frac{q^3}{512} \left( \frac{1}{45} \operatorname{ch} 8\xi - \frac{5}{27} \operatorname{ch} 4\xi_o \right) + \\ + \frac{q^4}{4096} \left( -\frac{37}{540} \operatorname{sh} 6\xi_o + \frac{\operatorname{sh} 10\xi_o}{540} \right).$$

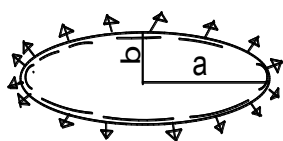


Рис. 2.

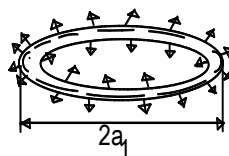


Рис. 3.

Цільна еліптична мембрана (Рис. 2) закріплена по зовнішній границі. Рішення рівнянь коливань мембрани в даному випадку буде

$$w(\xi, \eta) = A_m C e_m(\xi, q) c e_m(\eta, q) + B + B_m S e_m(\xi, q) s e_m(\eta, q) + q,$$

де  $A_m$ ,  $B_m$  - сталі величини. Підставляємо дане рішення в граничну умову

$$w(\xi_o, \eta) = 0.$$

Знаходимо для  $m$ -ої симетричної форми коливань рівняння

$$C e_m(\xi_o, q) = 0. \quad (8)$$

Аналогічно для  $m$ -ої несиметричної форми коливань маємо рівняння

$$S e_m(\xi_o, q) = 0.$$

Таблиця 1.

Найменші корні  $q_o$ ,  $q_1$ ,  $q_1^1$  рівняння (8)

$e$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.866	0.9
$q_o$	0.059	0.137	0.253	0.421	0.665	1.061	2.5	4.118	5.171
$q_1$	0.15	0.371	0.617	0.994	1.521	2.269	—	—	—
$q_1^1$	0.136	0.32	0.592	0.984	1.512	2.208	3.088	3.768	4.168

Найменші корні  $q_o$ ,  $q_1$ ,  $q_1^1$  рівняння (8) при  $m=0$ ,  $m=1$  наведені в табл. 1.

При обчисленні  $q_1$  в формулі  $C_1(\xi_o, q)$  враховані всі складові, при обчисленні  $q_1^1$  в формулі  $C_1(\xi_o, q)$  не врахований останній доданок з співмножником  $q^4$ . В роботі [2] приведено обчислення  $q_1^1$  при  $e=0.8$  і знайдено значення 3.144, що мало відрізняється від 3.088. В табл. 2 приведено значення частотного параметра  $k_i = 2\sqrt{q}/e (i=0,1)$ .

Частотний параметр  $k$  обчислено по даним, приведеним в роботі [4]. В роботі [4] проведено наближене обчислення частотного параметра  $k_o$  при  $e=0.866$ , який дорівнює 3.5 - 3.56. Частотні параметри табл. 2 для несиметричних коливань  $k_1, k_1^1$  відповідають відповідно значенням  $q_1$  і  $q_1^1$ .

Таблиця 2.

Частотні параметри для несиметричних коливань

$e$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.866	0.9
$k$	2.1	—	2.162	—	2.708	—	3.75	—	5.33
$k_0$	2.43	2.47	2.52	2.6	2.72	2.94	3.95	4.12	5.17
$k_1$	3.87	3.89	3.93	3.99	4.1	4.3	—	—	—
$k_1^1$	3.87	3.69	3.85	3.97	4.1	4.25	4.39	4.48	5.34

Еліптична мембрана з отвором (рис. 3), що представляє собою фокальний еліпс. Нехай  $a_1$  – півдіаметра внутрішнього отвору мембрани фокального еліпса (рис. 3). Рішення рівнянь коливань мембрани в даному випадку для симетричних коливань можна записати в формі

$$w(z, q) = A \cdot Ce_1(z, q) + B \cdot Fe_1(z, q),$$

де  $A, B$  – сталі величини,

$Fe_1(q, z)$  – функція Матґе другого роду[2].

Граничні умови  $w(\xi_1, q) = 0, w(\xi_2, q) = 0$

Частотне рівняння

$$Ce_1(\varepsilon_1, q) \cdot Fe_1(\varepsilon_2, q) - Ce_1(\varepsilon_2, q) \cdot Fe_1(\varepsilon_1, q) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 Fe_1(z, q) = & \operatorname{sh} z - \frac{1}{8} q \operatorname{sh} 3z + \frac{1}{64} q^2 \left( 5 \operatorname{sh} 3z + \frac{1}{3} \operatorname{sh} 5z \right) - \\
 & - \frac{1}{512} q^3 \left( -\frac{35}{3} \operatorname{sh} 3z + \frac{8}{3} \operatorname{sh} 5z + \frac{8}{3} \operatorname{sh} 7z \right) + \\
 & + \frac{1}{4096} q^4 \left( -\frac{17}{3} \operatorname{sh} 3z - \frac{343}{54} \operatorname{sh} 5z + \frac{61}{108} \operatorname{sh} 7z + \frac{1}{180} \operatorname{sh} 9z \right) + \\
 & + \left( q - \frac{3}{64} q^3 - \frac{3}{256} q^4 + \frac{31}{36864} q^5 \right) \cdot z \cdot Ce_1(z, q),
 \end{aligned} \tag{1}$$

де  $\rho = a_1 / a$ ,  $\varepsilon_1 = \operatorname{arch}(1 / e)$ ,  $\varepsilon_2 = \operatorname{arch}(1 / \rho^2 \cdot e)$ .

Корні частотного рівняння  $q$  та значення частотного параметра  $k$  приведені в табл. 3 при різних співвідношеннях діаметрів еліпсів та значень ексцентриситету більшого еліпса.

Таблиця 3.

Корні частотного рівняння та значення частотного параметра

$a_1 / a$	0.2	0.4	0.6	0.8	0.2	0.4	0.6	0.8
$e = 0.1$	$q=0.044$	0.041	0.039	0.367	$k=4.195$	4.05	3.95	12.12

## Розділ 2. Механіка

$a_1 / a$	0.2	0.4	0.6	0.8	0.2	0.4	0.6	0.8
$e = 0.2$	0.197	0.188	0.171	0.166	4.438	4.336	4.135	4.074
$e = 0.3$	0.502	0.482	0.437	0.417	4.723	4.628	4.407	4.305
$e = 0.4$	0.971	0.939	0.867	2.577	4.927	4.845	4.656	8.027
$e = 0.5$	1.522	1.491	1.426	1.392	4.935	4.884	4.777	4.719
$e = 0.6$	–	2.115	2.079	2.04	–	4.848	4.806	4.761
$e = 0.7$	2.861	2.855	2.851	2.798	4.833	4.828	4.824	4.779
$e = 0.8$	3.773	3.772	3.762	3.766	4.856	4.855	4.855	4.852

## Висновки

1. Проведені порівняльні розрахунки для визначення симетричних коливань цільних мембран в різною величиною ексцентриситету ( $e = 0.1 - 0.8$ ).
2. Визначені значення частотного параметра симетричних коливань мембран з отвором при різних значеннях ексцентриситету ( $e = 0.2 - 0.9$ ).
3. Подальші дослідження пов'язані з визначенням частотного параметра при несиметричних коливаннях

## Список використаної літератури

1. *Mathieu E.* Memoire sur le mouvement vibratorie d'une membrane de form elliptique, J. de math, pures et appliques (Liouville), 1868. v.13.p. 137.
2. *Мак Лахлан* Теория и приложения функций Матье. ИЛ, 1954.
3. *Collatz l.* Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Akad. Verlad. Lpz. 1949.
4. *Meixner J., Schafke F. W.* Methienschene Funktionen und Spharoidfunktionen, Springer, 1954.
5. *Гонткевич В. С.* Собственные колебания пластинок. Справочное пособие. –К.: Наукова думка, 1964, -287с.