МОН УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Штефан Н. І., Гнатейко Н. В., Бабаєв О.А.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Варіаційні принципи аналітичної механіки

Методичні вказівки до проведення практичних занять та самостійної роботи студентів напрямів підготовки: 6.050503_«Машинобудування» та 6.050502 «Інженерна механіка» всіх форм навчання

КИЇВ НТУУ «КПІ» 2016

Теоретична механіка. **Варіаційні принципи аналітичної механіки.** Методичні вказівки до проведення практичних занять та самостійної роботи студентів напрямів підготовки: 6.050503 «Машинобудування» та 6.050502 «Інженерна механіка» всіх форм навчання / Уклад. Н.І. Штефан, Н.В. Гнатейко, Бабаєв О.А.– К.: НТУУ «КПІ», 2016 – 46 с.

Гриф надано Вченою радою ФАКС НТУУ «КПІ»

Навчальне електронне видання

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Варіаційні принципи аналітичної механіки

Методичні вказівки до проведення практичних занять та самостійної роботи студентів напрямів підготовки: 6.050503 «Машинобудування» та 6.050502 «Інженерна механіка» всіх форм навчання

Укладачі:

Штефан Наталія Іллівна
кандидат технічних наук, доцент

Гнатейко Нонна Валентинівна
кандидат технічних наук, доцент

Бабаєв Олександр Арташесович,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Відповідальний редактор: О.М.Юдін, кандидат технічних наук, доцент

Рецензент: А.Р.Степанюк, кандидат технічних наук, доцент кафедри МАХНВ ІХФ

Вступ

Представлені методичні вказівки є однією з складових єдиного інформаційного пакету забезпечення дисципліни «Теоретична механіка». Вони розглядають один з найскладніших розділів дисципліни, а саме «Аналітичну механіку».

Вміння розв'язувати задачі з цього розділу є важливим для загальної інженерної підготовки, бо вони дають можливість вивчати рівновагу або динаміку механічної системи з будь-яким числом степеней вільності за допомогою варіаційних принципів механіки.

Так як цей розділ суттєво відрізняється від усіх розглянутих попередніх, то пропонуємо застосовувати надані методичні вказівки до проведення практичних занять з аналітичної механіки, а також при самостійній роботі студентів по підготовці до них. Тут будуть розглянуті три обов'язкові для вивчення теми, на які згідно робочої навчальної програми дисципліни заплановані практичні заняття, а саме:

- принцип можливих переміщень;
- принцип Д'Аламбера-Лагранжа;
- рівняння Лагранжа II роду.

В кожній з цих тем наведено короткі теоретичні відомості, методика розв'язування задач з детальним поясненням, а також наведено перелік задач для самостійного розв'язування. В кінці кожної теми є запитання для самоконтролю, які дадуть можливість студенту оцінити свою підготовленість до відповідної теми.

В темах «Принцип Д'Аламбера-Лагранжа» та «Рівняння Лагранжа II роду» поряд з іншими буде розв'язана одна і та сама задача (система з двома степенями вільності). Це зроблено для того, щоб дати можливість студенту самостійно провести порівняльний аналіз щодо методик розв'язування і самого розв'язування задачі.

Для того щоб досягти найкращих успіхів у розв'язуванні задач з вказаного розділу теоретичної механіки, радимо звернутися до [2, 3, 7], попередньо опрацювавши та засвоївши теоретичний курс за [1,4-6,7].

Представлені методичні вказівки рекомендуємо використовувати для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів технічних напрямів підготовки НТУУ «КПІ».

1.Принцип можливих переміщень (загальне рівняння статики)

1.1. Короткі теоретичні відомості

Принцип можливих переміщень полягає в тому, що для рівноваги системи матеріальних точок, що підпорядковується утримуючим ідеальним стаціонарним в'язям, необхідно і достатньо, щоб сума можливих робіт активних сил, прикладених до точок системи, на будь-якому можливому її переміщенні дорівнювала нулю

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0,$$

де $\vec{F}_i$ – активні (задані) сили, що діють на точки матеріальної системи,

$\delta\vec{r}_i$ – можливі переміщення точок матеріальної системи.

В координатній формі рівняння має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} \left(X_i \cdot \delta x_i + Y_i \cdot \delta y_i + Z_i \cdot \delta z_i \right) = 0.$$

Нагадаємо, що можливими переміщеннями точок матеріальної системи називаються нескінченно малі переміщення точок системи, які допускаються в'язями в певний фіксований момент часу.

На відміну від можливих переміщень, дійсні $d\vec{r}_i$ переміщення не є уявними, вони відповідають справжньому руху точок системи у просторі та часі під дією сил.

Очевидно, що дійсне переміщення матеріальна система у кожному випадку має тільки одне, а можливих може мати безліч.

При стаціонарних в'язях дійсні переміщення можна розглядати як одне з можливих. При нестаціонарних в'язях дійсні і можливі переміщення відрізняються.

Нагадаємо також, що ідеальними в’язями називаються в’язі, сума можливих робіт реакцій яких на будь-якому можливому переміщенні матеріальної системи дорівнює нулю.

Застосування принципу можна поширити на випадок наявності неідеальних в’язей (сил тертя). Для цього необхідно перевести ці сили в розряд заданих сил, тоді в рівнянні робіт сила $\vec{F}_i$ буде рівнодійною всіх заданих сил і сил тертя.

Принцип можливих переміщень застосовують при вивченні рівноваги або руху системи тіл з ідеальними в’язями.

1.2. Методика розв’язування задач

При розв’язуванні задач необхідно:

1. Визначити кількість точок в системі, рух яких вивчається.
2. Визначити число степенів вільності цієї системи.
3. Визначити характер в’язей, які накладені на систему, тобто визначити чи є в’язі ідеальними, чи ні. В останьому випадку реакції неідеальних в’язей (сил тертя) слід віднести до заданих сил.
4. Якщо треба визначити реакції в’язей, то необхідно уявно відкинути кожну в’язь, замінити її реакцією і цю реакцію віднести в розряд заданих сил. При цьому в’язі, реакції яких необхідно визначити, по черзі відкидають так, щоб у рівняння входила тільки одна невідома сила.
5. Скласти схему заданих сил.
6. Надати системі одного з можливих переміщень, показавши напрями переміщень окремих точок.
7. Визначити можливу роботу заданих сил на відповідних можливих переміщеннях і скласти рівняння на підставі принципу можливих переміщень. Таких рівнянь буде стільки, скільки система має степенів вільності.

8. Встановити залежність між можливими переміщеннями і визначити можливі переміщення всіх точок системи, як функції від незалежних одне від одного можливих переміщень.

В результаті отримуємо систему рівнянь, кількість яких відповідає кількості степенів вільності механічної системи. Виключивши з цих рівнянь незалежні одне від одного можливі переміщення, внаслідок їх довільності, можна визначити шукані сили або інші величини.

1.3. Розв’язування демонстраційних задач з поясненням

Задача 1

Знайти залежність між силами $\vec{F}$ і $\vec{Q}$ для простого важільного пресу (рис. 1), щоб він знаходився в рівновазі.

Розв’язування

Активними силами є сили F і Q. Складемо рівняння сумарної можливої роботи активних сил на можливих переміщеннях точок прикладання сил в координатній формі

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i \cdot \delta x_i + Y_i \cdot \delta y_i\right) = 0,$$

де $\delta x, \delta y$ визначимо як варіації координат

$$x_A = b + a\cos\alpha,$$

$$y_c = 2a\sin\alpha,$$

звідки в результаті варіювання маємо

$$\delta x_A = -a\cos\alpha\,\delta\alpha,$$

$$\delta y_c = 2a\sin\alpha\,\delta\alpha.$$

Рівняння сумарної можливої роботи активних сил на можливих переміщеннях

$$-2F\delta x_A - Q\delta y_C = 0.$$

Підставивши значення δx_A і δy_C, отримуємо

$$-2F(-a\sin\alpha\delta\alpha) - Q2a\cos\alpha\delta\alpha = 0,$$

або

$$\left(2Fa\sin\alpha - Q2a\cos\alpha\right)\delta\alpha = 0.$$

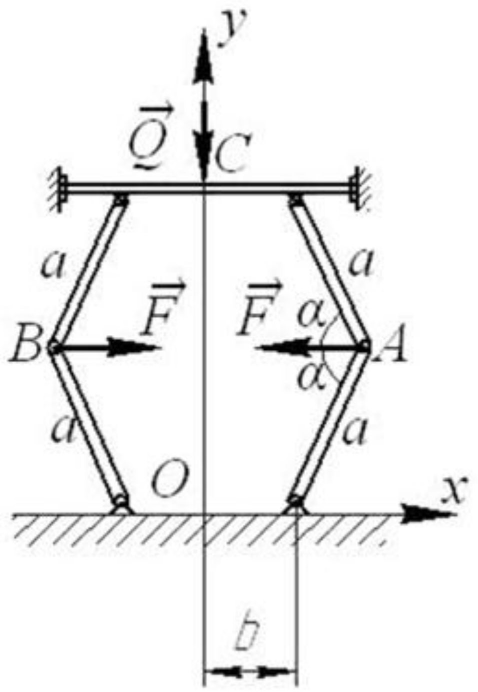


Рис. 1

Оскільки $\delta\alpha \neq 0$, то

$$2Fa\sin\alpha - Q2a\cos\alpha = 0,$$

звідки

$$F = Qctg\alpha.$$

Задача 2

Знайти ваги P_1 і P_2 тягарів, які утримуються в рівновазі тягарем вагою P на площинах, нахилених до горизонту під кутами α і β. Тягарі P_1 та P_2 прикріплені до кінців тросу, що йде від тягара P_1 через блок O_1, насаджений на горизонтальну вісь, до рухомого блоку O_2, що несе тягар P, а потім через

блок O_2, насаджений на вісь блока O_1, до тягара P_2 (рис. 2). Тертям та масами блоків і троса нехтувати.

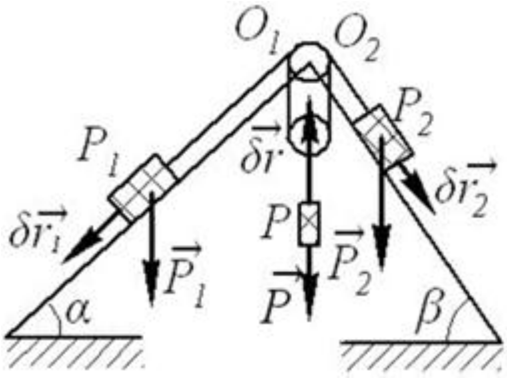


Рис.2

Розв'язування

Оскільки система з ідеальними в'язями знаходиться в рівновазі, то до розв'язання задачі застосуємо принцип можливих переміщень.

Зобразимо схему активних сил (сили ваги), що діють на точки системи (рис.2). Надамо точкам системи можливих переміщень. Позначивши можливі переміщення цих тягарів через $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2$ і $\delta\vec{r}$, складемо рівняння сумарної можливої роботи активних сил на відповідних можливих переміщеннях

$$P_1\delta r_1 \sin\alpha + P_2\delta r_2 \sin\beta - P\delta r = 0.$$

Щоб встановити залежність між цими переміщеннями, запишемо рівняння в'язі

$$r_1 + r_2 + 2r = l,$$

де l– загальна довжина нитки.

Проваріюємо це рівняння

$$\delta r_1 + \delta r_2 + 2\delta r = 0,$$

звідки
$$\delta r = -\left(\frac{\delta r_1 + \delta r_2}{2}\right).$$

В рівняння можливих робіт підставимо модуль δr, оскільки знак роботи прийнятий до уваги.

Отже, маємо

$$(P_1 \sin\alpha - \frac{P}{2})\delta r_1 + (P_2 \sin\beta - \frac{P}{2})\delta r_2 = 0.$$

Оскільки система має два степені вільності, то δr_1 і δr_2 є незалежними одне від одного.

Приймаючи, що $\delta r_2 = 0$, а $\delta r_1 \neq 0$, отримуємо

$$P_1 \sin\alpha - \frac{P}{2} = 0,$$

звідки

$$P_1 = \frac{P}{2\sin\alpha}.$$

Приймаючи $\delta r_1 = 0$, а $\delta r_2 \neq 0$, отримуємо

$$P_2 \sin\beta - \frac{P}{2} = 0,$$

звідки знайдемо

$$P_2 = \frac{P}{2\sin\beta}.$$

Задача 3

До повзуна *A* механізму еліпсографа (рис. 3) прикладено силу *P*, яка діє вздовж прямої руху повзуна в напрямку осі обертання О кривошипа ОС. Визначити обертальний момент *M*, який треба прикласти до кривошипа ОС для того, щоб механізм знаходився в рівновазі. Механізм розташовано в горизонтальній площині, кривошип ОС утворює з напрямком руху повзуна В наперед заданий кут φ, *OC* = *AC* = *CB* = *l*.

Розв'язування

Розглянемо рівновагу всього механізму і застосуємо принцип можливих переміщень.

Зобразимо відому активну силу $\vec{P}$ та пару сил з невідомим моментом $\vec{M}$ (рис. 3).

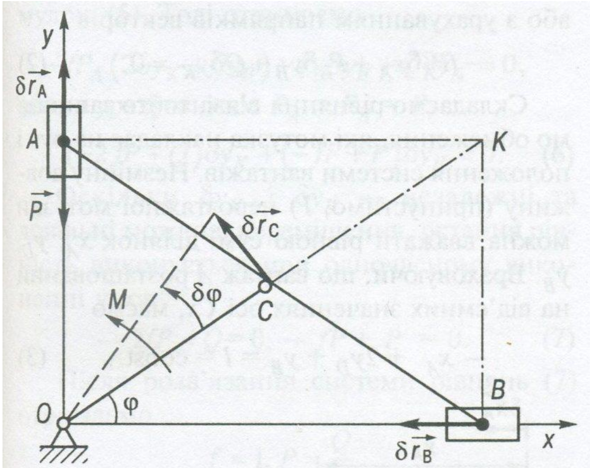


Рис. 3

В'язями в даній задачі є напрямні повзунів *A* та *B*, циліндричні шарніри *O, C, B, A*, тертям в яких знехтуємо. Ці в'язі є ідеальними, тобто їх реакції не увійдуть у загальне рівняння статики.

Надамо механізму можливого переміщення: уявно повернемо кривошип ОС проти ходу годинникової стрілки на малий кут $\delta\varphi$. Тоді відповідні можливі переміщення повзунів *A* та *B* будуть δr_A та δr_B (рис. 3). Загальне рівняння статики набуває вигляду

$$\overrightarrow{M} \cdot \overrightarrow{\delta\varphi} + \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{\delta r_A} = 0 \ , \qquad \text{(а)}$$

де $\overrightarrow{\delta\varphi}$ — вектор, напрямок якого збігається з вектором кутової швидкості повороту кривошипа на кут $\delta\varphi$. У скалярній формі, враховуючи напрямки векторів, маємо

$$M\delta\varphi - P\delta r_A = 0. \qquad \text{(б)}$$

У це рівняння не входить робота сил ваги, оскільки механізм розташовано в горизонтальній площині.

Поданий механізм є системою з одним степенем вільності. Тому між величинами $\delta\varphi$ та δr_A існує зв'язок, для встановлення якого скористаємось

кінематичними співвідношеннями. Спочатку визначимо зв'язок між швидкістю V_A точки *A* та кутовою швидкістю (ω_{OC} кривошипа *OC*. Координата y_A точки *A* визначається так:

$$y_A = 2l\sin\varphi .$$

Тоді швидкість точки *A*

$$V_A = \dot{y}_A = 2l\omega_{OC}\cos\varphi \text{.}$$

Вираз для швидкості точки *A* можна отримати іншим способом, визначивши миттєвий центр швидкостей *K* лінійки *AB* еліпсографа (рис. 3). Тоді можна записати

$$\frac{V_A}{KA} = \frac{V_C}{KC},$$

де швидкість точки *C* дорівнює

$$V_C = \omega_{OC} l \; .$$

Для прямокутного трикутника *OKA* можемо записати співвідношення

$$KA = 2KC\cos\varphi .$$

Тоді швидкість

$$V_A = 2l\omega_{OC}\cos\varphi \cdot \delta\varphi . \qquad \text{(в)}$$

Далі, враховуючи, що

$$V_A = \frac{dr_A}{dt} \text{ і } \omega_{OC} = \frac{d\varphi}{dt},$$

з виразу (в) отримаємо

$$dr_A = 2l\cos\varphi \cdot d\varphi .$$

Оскільки в'язі стаціонарні, дійсні переміщення є одними з можливих. Отже, можна записати, і загальне рівняння статики (б) набуде вигляду

$$(M - 2Pl\cos\varphi)\delta\varphi = 0 .$$

Враховуючи, що $\delta\varphi \neq 0$, отримаємо рівняння рівноваги механізму

$$M - 2Pl\cos\varphi = 0 .$$

Після розв'язання маємо

$$M = 2P / \cos\varphi .$$

Задача 4

До кінців невагомої нерозтяжної мотузки прив'язано вантажі A та B однакової ваги. Мотузка огинає нерухомі блоки C та E, охоплює рухомий блок D (рис. 4, а). До осі рухомого блока О підвішено вантаж K вагою Q. Визначити вагу P вантажів A та B та коефіцієнт тертя f вантажа A по горизонтальній площині, якщо система вантажів перебуває у стані спокою.

Розв'язування

Об'єкт дослідження даної задачі — система вантажів. Активними силами, прикладеними до вантажів, є сили ваги $\vec{P}_A, \vec{P}_B, \vec{Q}$ (рис. 4, б)

Проведемо аналіз в'язей. Нерозтяжна невагома мотузка та блоки є ідеальними в'язями. На відміну від мотузки та блоків жорстка горизонтальна поверхня не є ідеальною в'яззю. Дотичну складову її реакції — силу тертя — визначимо за законом Кулона із співвідношення $F_{тр} = fP_A$ та віднесемо до активних сил. Напрямимо її вліво, що відповідає фізичному змісту задачі. Наведемо два способи розв'язання задачі.

Спосіб 1

Визначимо положення вантажів параметрами x_A, y_B, y_K, які є координатами вантажів у вибраній системі координат Oxy (рис. 4, б).

Уявно надамо тілам A, B, K системи можливих переміщень $\delta x_A, \delta y_B, \delta y_K$, проекції яких на осі координат вважаємо додатними. Складемо загальне рівняння статики:

$$\overrightarrow{F_{тр}} . \delta \overrightarrow{x_A} + \overrightarrow{P_B} . \delta \overrightarrow{y_B} + \vec{Q} . \delta \overrightarrow{y_K} = 0,$$

або з урахуванням напрямків векторів

$$-P_A\delta x_A + P_B\delta y_B + Q\delta y_K = 0. \qquad (а)$$

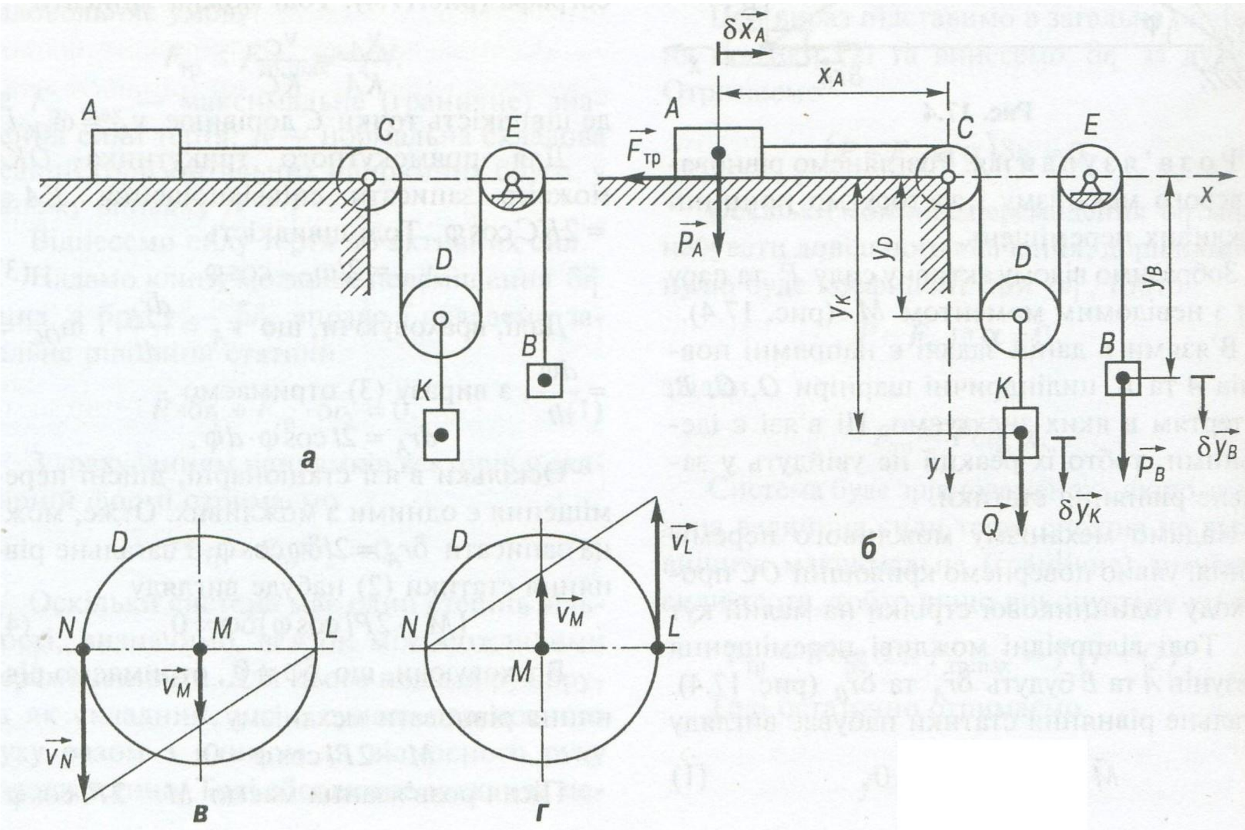


рис. 4

Складаємо рівняння в'язі, тобто запишемо обмеження, які мотузка накладає на рух і положення системи вантажів. Незмінну довжину (припустимо, l) нерозтяжної мотузки можна вважати рівною сумі ділянок x_A, y_B, y_K. Враховуючи, що вантаж A розташований на від'ємних значеннях осі Cx, маємо

$$-x_A + 2y_D + y_B = l = const.$$

Варіюючи останній вираз і враховуючи, що $\delta y_K = \delta y_D$, запишемо

$$-\delta x_A + 2\delta y_K + \delta y_B = 0$$

або

$$\delta x_A = 2\delta y_K + \delta y_B. \qquad (б)$$

Число степенів вільності в даній системі дорівнює двом, тобто лише два можливих переміщення є незалежними. Такими вважатимемо величини δy_K та δy_B.

Виключимо з загального рівняння статики (а) можливе переміщення δx_A за формулою (б). Тоді отримаємо

$$-fP_A(2\delta y_K + \delta y_B) + P_B\delta y_B + Q\delta y_K = 0,$$

або, з урахуванням $P_A = P_B = P$,

$$(-2fP + Q)\delta y_K + (-fP + P)\delta y_B = 0.$$

Оскільки δy_K і δy_B — незалежні та довільні можливі переміщення, остання рівність виконується при одночасному виконанні умов

$$-2fP + Q = 0, \quad -fP + P = 0. \tag{в}$$

Після розв'язання системи рівнянь (в) отримаємо $f = 1, P = \dfrac{Q}{2}$.

Спосіб 2

Встановлюємо, що число степенів вільності системи дорівнює двом. З трьох можливих переміщень вантажів незалежними будуть тільки два, наприклад $\delta\vec{x}_A$ та $\delta\vec{y}_B$. Враховуючи, що $\delta\vec{x}_A$ та $\delta\vec{y}_B$ незалежні та довільні, покладемо, що $\delta\vec{y}_B = 0$ (тобто зафіксуємо вантаж *B*), а переміщення $\delta\vec{x}_A$ не дорівнює нулеві і спрямоване вправо. Вантаж *K* матиме відповідне можливе переміщення $\delta\vec{y}_K$. Тоді загальне рівняння статики набуває вигляду

$$\vec{F}_{тр} \cdot \delta\vec{x}_A + \vec{Q} \cdot \delta\vec{y}_K = 0,$$

або у скалярній формі

$$-fP_A\delta x_A + Q\delta y_K = 0.$$

При нерухомому вантажі *B* точка *L* рухомого блока *D* буде його миттєвим центром швидкостей (рис. 4, в). Тоді швидкості точок *N* та *M* цього блока пов'язані співвідношенням $V_N = 2V_M$. З умови нерозтяжності нитки отримаємо співвідношення між швидкостями точок *A* та *N*, *K* та *M*:

$$V_A = V_N, V_K = V_M.$$

Отже $V_A = 2V_K$ або в диференціалах

$$\frac{dx_A}{dt} = 2\frac{dy_K}{dt},$$

що дає змогу записати

$$dx_A = 2dy_K.$$

Дійсні переміщення у випадку стаціонарних в'язей є одними з можливих, тому

$$\delta x_A = 2\delta y_K.$$

Після виключення з рівняння можливого переміщення δy_K маємо співвідношення

$$\delta x_A(fP_A - \frac{Q}{2}) = 0,$$

з якого при $\delta x_A \neq 0$ отримаємо

$$fP_A - \frac{Q}{2} = 0. \qquad \text{(г)}$$

Далі покладемо, що $\delta x_A = 0$ (зафіксуємо вантаж *A*), а переміщення δy_B не дорівнює нулеві і спрямоване донизу. Вантаж *K* матиме відповідне можливе переміщення δy_K, яке спрямоване вверх. Тоді загальне рівняння статики у скалярній формі запишеться так:

$$P_B\delta y_B - Q\delta y_K = 0. \qquad \text{(д)}$$

Встановимо зв'язок між можливими переміщеннями. У випадку нерухомого вантажу *A* точка *N* рухомого блока *D* буде його миттєвим центром швидкостей (рис. 4, г). Тоді переміщення точок *L* та *M* цього блока пов'язані співвідношенням

$$\delta y_L = 2\delta y_M.$$

З умови нерозтяжності мотузки отримаємо

$$\delta y_L = \delta y_B, \delta y_M = \delta y_K.$$

Отже,

$$\delta y_B = 2\delta y_K .$$

Підставляємо δy_B з цього виразу в (д). Тоді, враховуючи, що $\delta \vec{y} \neq 0$, матимемо

$$P - \frac{Q}{2} = 0. \qquad \text{(е)}$$

Система алгебраїчних рівнянь (г) та (е) дає такий результат: $f = 1, P = \frac{Q}{2}$

1.4. Задачі для практичних занять та самостійного розв'язування.

Рекомендуємо самостійно розв'язати задачі: 46.1, 46.2, 46.3, 46.11, 46.20, 46.21[2]

1.5. Запитання для самоконтролю

1. Що називають дійсним і можливим переміщенням?
2. Яка аналітична умова ідеальних в'язей і чи суперечить вона поняттю ідеальних в'язей, введеному в статиці?
3. Для яких в'язей справедливий принцип можливих переміщень?
4. Яка класифікація сил застосовується у принципі можливих переміщень?
5. Які в'язі називають голономними, утримуючими, ідеальними, стаціонарними?
6. Запишіть загальне рівняння статики.
7. У чому полягає методика розв'язування задач із застосуванням принципу можливих переміщень?
8. Чим визначається кількість незалежних можливих переміщень для розглядуваної системи?
9. Якими не можуть бути можливі переміщення?
10. Яким чином і для чого використовують кінематичні залежності, отримані для конкретної задачі?

2. Принцип Д'Аламбера-Лагранжа (загальне рівняння динаміки)

Методичне значення загального рівняння динаміки полягає у тому, що для більшості задач воно дозволяє визначити закон руху системи, не визначаючи реакцій в'язей. При необхідності реакції в'язей можна визначити на другому етапі після визначення закону руху системи, застосовуючи, наприклад, принцип Д'Аламбера.

2.1. Короткі теоретичні відомості

При застосуванні принципу можливих переміщень у випадку руху матеріальної системи, згідно з принципом Германа – Ейлера – Д'Аламбера, до заданих сил приєднати сили інерції $\vec{\Phi}_i$

$$\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{W}_i .$$

У цьому випадку руху матеріальної системи з ідеальними в'язями сума можливих робіт усіх заданих сил і сил інерції на довільному переміщенні дорівнює нулю

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0,$$

або

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i - m_i \vec{W}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 . \qquad (1)$$

Останній вираз можна записати у спрощеному вигляді

$$\delta A^a + \delta A^\Phi = 0 , \qquad (2)$$

де δA^a і δA^Φ сума можливих робіт активних сил і сил інерції відповідно.

Рівняння (1) представляє собою поєднання принципу можливих переміщень з принципом Д'Аламбера і називається загальним рівнянням динаміки.

Загальне рівняння динаміки в координатній формі

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\left(X_i - m_i \ddot{x}_i \right) \cdot \delta x_i + \left(Y_i - m_i \ddot{y}_i \right) \cdot \delta y_i + \left(Z_i - m_i \ddot{z}_i \right) \cdot \delta z_i \right] = 0 .$$

Принцип Д'Аламбера – Лагранжа: під час руху системи матеріальних точок, що підпорядковується ідеальним утримуючим в'язям, сума можливих робіт активних сил і сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю.

2.2. Методика розв'язування задач

Послідовність розв'язування задач:

1. Знаходимо об'єкт дослідження, тобто виділяємо систему тіл, застосування до якої загальне рівняння динаміки дозволяє розв'язати задачу.

2. Визначаємо число степенів вільності системи. Це можна зробити шляхом накладання додаткових в'язей чи математично, складаючи рівняння в'язей, що обмежують систему.

3. Аналізуємо активні сили, що діють на систему, і зображуємо їх графічно.

4. Аналізуємо в'язі. При цьому слід пам'ятати, що реакції ідеальних в'язей не входять у загальне рівняння динаміки й при його застосуванні вони взагалі виключаються з розгляду. Якщо серед в'язей, які обмежують систему, є неідеальні, то їх реакції (наприклад, сили тертя) приєднуються до активних сил. Графічно сили тертя зображуються після того, як зроблено припущення про напрям руху системи.

5. Робимо припущення про напрям руху і прискорень точок розглядуваної системи, а далі, виходячи з кінематичних міркувань, знаходимо ці прискорення.

6. Відповідно до вибраного напряму прискорень зображуємо сили інерції, умовно прикладаючи їх до точок системи. Якщо система складається з твердих тіл, то слід заздалегідь звести сили інерції елементів тіла до сили та пари сил. Ця сила, як відомо, визначається головним вектором системи елементарних сил інерції й прикладена до центра зведення, а пара сил має момент, що дорівнює головному моменту сил інерції елементів тіла відносно вибраного центра зведення.

7. Уявно в довільний момент часу зупиняємо систему й надаємо їй можливого переміщення.

8. Складаємо загальне рівняння динаміки.

9. Встановлюємо зв'язок між можливими переміщеннями та прискореннями точок системи. Це можна здійснити, виходячи з кінематичних міркувань або аналітично, використовуючи рівняння в’язей. Після вибору незалежних можливих переміщень із загального рівняння динаміки виключаємо залежні можливі переміщення й залежні прискорення.

10. Збираючи коефіцієнти при незалежних можливих переміщеннях і прирівнюючи отримані вирази до нуля, приходимо до диференціальних рівнянь руху розглядуваної механічної системи.

11. З одержаних рівнянь знаходимо невідомі величини. Якщо в задачі потрібно визначити закон руху системи, то складені диференціальні рівняння руху слід проінтегрувати. Якщо ж визначенню підлягають лише прискорення деяких точок системи,то питання розв’язується алгебраїчно.

2.3. Розв’язування демонстраційних задач з поясненням

Задача 5

Три вантажі A, B та C вагою відповідно P_A, P_B та P_C з’єднані невагомою нерозтяжною ниткою, перекинутою через блок D з нерухомою віссю обертання(рис. 5,а). Вантажі A та B рухаються по гладкій горизонтальній площині, а вантаж C – вертикально. Беручи до уваги масу блока D, визначити прискорення вантажів і натяг нитки в перерізі ab, якщо вага блока однорідного суцільного циліндра дорівнює P_D.

Розв’язування

Відповідно до викладеної методики знаходимо об'єкт дослідження. У даній задачі – це система, що складається з вантажів A, B, C та блока D.

Застосовуючи спосіб накладання додаткових в'язей, неважко встановити, що розглядувана система має один степінь вільності.

Зображуємо графічно активні сили $\vec{P}_A, \vec{P}_B, \vec{P}_C$ і $\vec{P}_D$.

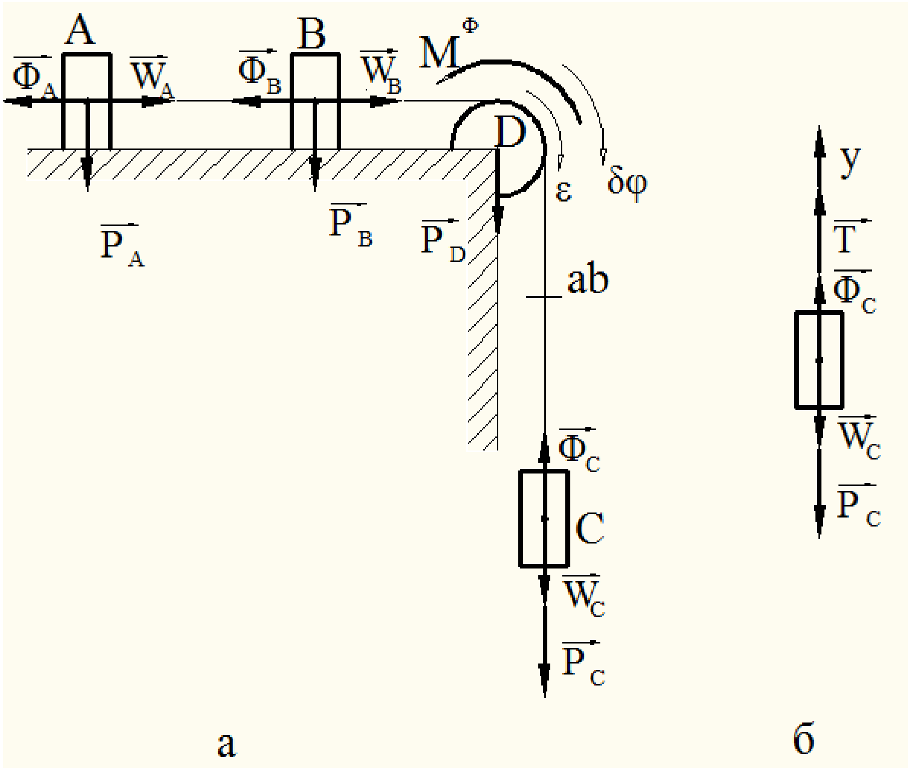


Рис. 5

В'язями в даній задачі є горизонтальна площина, нитка й вісь блока. Оскільки площина гладка, нитка невагома, абсолютно гнучка й нерозтяжна, а на осі блока тертя відсутнє, то їх можна вважати ідеальними в'язями. З наведеного раніше зауважимо, що реакції таких в'язей при застосуванні загального рівняння динаміки до уваги не беруться і на рисунку їх не зображують.

Розглянемо систему в довільний момент часу. Аналізуючи умову задачі, робимо висновок, що при русі системи прискорення $\vec{W}_c$ вантажа C завжди спрямоване донизу, а прискорення вантажів A та B – вправо. На

відміну від вантажів, що рухаються поступально, блок D здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі. Його кутове прискорення позначимо ε і на рисунку зобразимо дуговою стрілкою.

Умовно прикладемо до точок системи їх сили інерції. Оскільки тіла A, B та C здійснюють поступальний рух, то сили інерції елементів кожного з тіл взаємно паралельні й тому зводяться до рівнодійних

$$\vec{\Phi}_A = -\frac{P_A}{g}\vec{W}_A; \vec{\Phi}_B = -\frac{P_B}{g}\vec{W}_B; \vec{\Phi}_C = -\frac{P_C}{g}\vec{W}_C. \quad \text{(а)}$$

Точкою їх прикладання є центр мас відповідного тіла.

Центр зведення елементарних сил інерції блока D виберемо на його нерухомій осі. Тоді сукупність сил інерції елементів блока зводиться до пари сил з моментом

$$M^{\Phi} = I_D \varepsilon,$$

де I_D – осьовий момент інерції блока

$$I_D = \frac{P_D R^2}{2g};$$

R – радіус блока.

Таким чином,

$$M^{\Phi} = \frac{P_D R^2}{2g}\varepsilon. \quad \text{(б)}$$

Уявно зупинимо систему в розглядуваний довільний момент часу й надамо їй з цього положення можливого переміщення. Якщо можливе переміщення $\delta\vec{r}_C$ вантажа C спрямоване вертикально вниз, то блок D здійснить обертальне можливе переміщення на кут $\delta\varphi$ за годинниковою стрілкою, а тіла A та B – поступальні переміщення δr_A та δr_B горизонтально вправо.

Складемо загальне рівняння динаміки. Якщо виходити з форми його запису, слід безпосередньо підрахувати алгебраїчну суму можливих робіт

активних сил та сил інерції на можливих переміщеннях їх точок прикладання й прирівняти одержаний вираз до нуля. Отже, знаходимо

$$-\Phi_A\delta_A - \Phi_B\delta_B - M^{\Phi}\delta\varphi + P_C\delta r_C - \Phi_C\delta r_C = 0 \qquad \text{(в)}$$

Доданки, що відповідають роботам сил $\vec{P}_A, \vec{P}_B$ та $\vec{P}_D$ на можливих переміщеннях їх точок прикладання внаслідок рівності нулю опущені.

Беручи до уваги (а) та (б), одержуємо

$$-\frac{P_A}{g}W_A\delta r_A - \frac{P_B}{g}W_B\delta r_B - \frac{P_D R^2}{2g}\varepsilon\delta\varphi + P_C\delta r_C - \frac{P_C}{g}W_C\delta r_C = 0 \ . \qquad \text{(г)}$$

Оскільки система має один степень вільності, то серед величин $\delta r_A, \delta r_B$, $\delta\varphi$ та δr_C незалежною є лише одна. Зрозуміло, що їй відповідає також лише одне незалежне прискорення.

Залежні величини виражаємо через одну незалежну. Це здійснюється на підставі аналізу тих обмежень, які накладаються в’язями на рух системи. З умови нерозтяжності нитки випливає, що можливі переміщення та відповідні прискорення вантажів однакові. Тому позначимо

$$\delta r_A = \delta r_B = \delta r_C = \delta r \,;\; W_A = W_B = W_C = W \ . \qquad \text{(д)}$$

Залишається виразити $\delta\varphi$ та ε відповідно через δr та W. Це зробити неважко, якщо використати умову відсутності ковзання нитки по поверхні блока. Отримуємо

$$\delta\varphi = \frac{\delta r}{R}\,;\; \varepsilon = \frac{W}{R}\,. \qquad \text{(е)}$$

Співвідношення (е) та (д) дозволяють подати рівняння (г) у вигляді

$$\delta r\left(P_C - \frac{2\left(P_A + P_B\right) + P_D + 2P_C}{2g}W\right) = 0 \ . \qquad \text{(ж)}$$

Оскільки $\delta r \neq 0$, то з (ж) випливає співвідношення

$$P_C - \frac{2\left(P_A + P_B\right) + P_D + 2P_C}{2g}W = 0, \qquad \text{(з)}$$

з якого визначаємо шукане прискорення:

$$W = \frac{2P_C}{2\left(P_A + P_B\right) + P_D + 2P_C} g \,. \qquad \text{(и)}$$

Тепер визначимо натяг T нитки в довільному місці. Для цього, наприклад, у перерізі ab окремо розглянемо рухомий вантаж C та застосуємо до нього метод кінетостатики. Шуканий натяг нитки у вибраному перерізі введемо в розгляд згідно з аксіомою про звільнення від в'язей (рис. 5 ,б).

Умовно прикладаємо до тіла C його силу інерції $\vec{\Phi}_C$, що спрямована відповідно до формул (а) протилежно прискоренню $\vec{W}_C$. Метод кінетостатики дозволяє скласти рівняння умовної рівноваги

$$\vec{P}_C + \vec{T} + \vec{\Phi}_C = 0, \qquad \text{(і)}$$

яке в проекції на вертикальний напрям приводить до співвідношення

$$-P_C + T + \Phi_C = 0.$$

Звідси

$$T = P_C - \Phi_C = P_C\left(1 - \frac{W}{g}\right).$$

Беручи до уваги знайдене раніше прискорення вантажів, остаточно отримуємо

$$T = P_C\left(1 - \frac{2P_C}{2\left(P_A + P_B\right) + P_D + 2P_C}\right).$$

Аналогічно можна визначити натяг нитки в горизонтальних її ділянках.

Задача 6

Механічна система (рис.6) складається з чотирьох тіл, маси яких відповідно дорівнюють m_1, m_2 , m_3 , m_4 . Тіло 2 рухається по похилій шорсткій площині, коефіцієнт тертя ковзання при русі тіла дорівнює $2f$. Блок 3 – східчастий, причому радіуси його ступенів r та R, де $2r = R$, радіус інерції i_{3x}. Блок 4 має радіус r .

Складати диференціальні рівняння руху механічної системи, якщо тіла з'єднані невагомими нерозтяжними нитками.

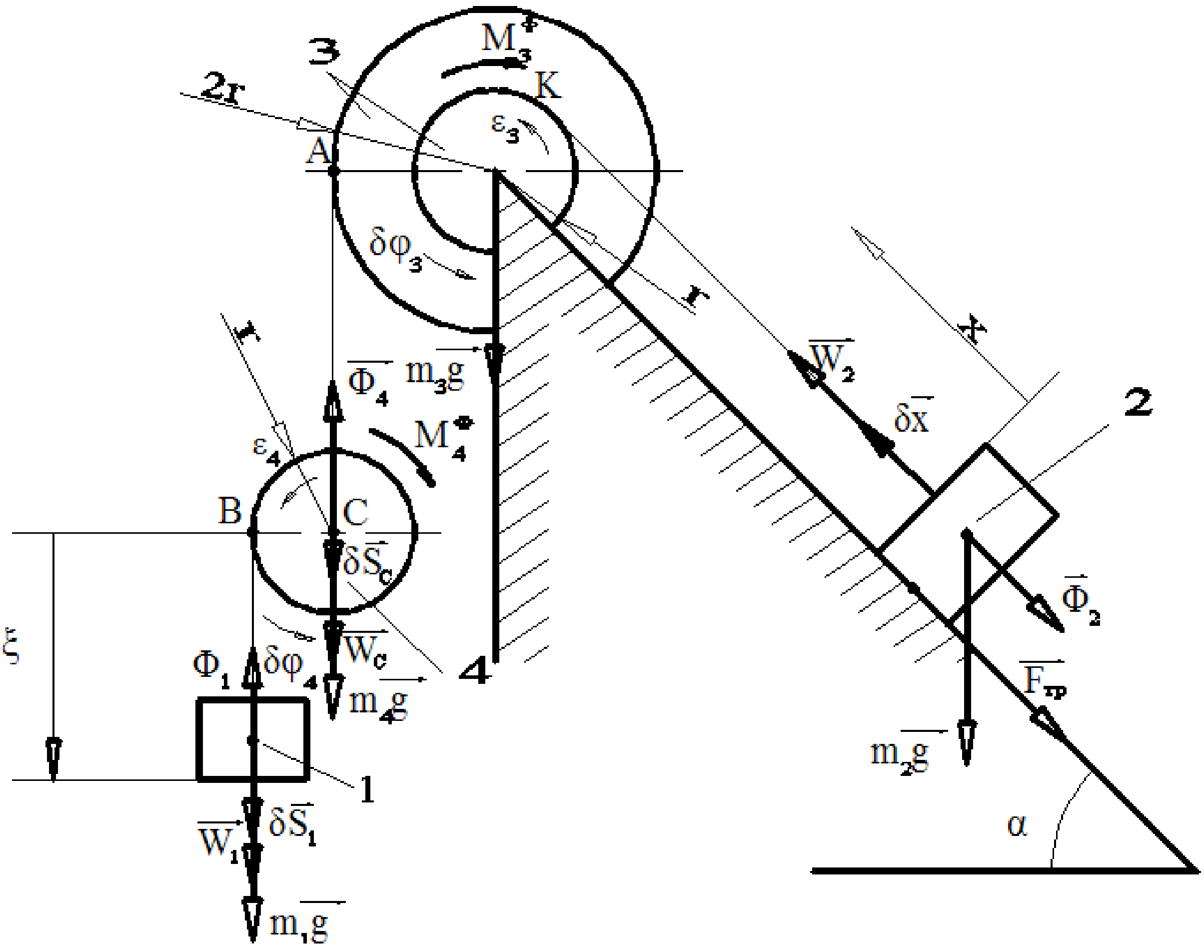
Розв'язування

Застосуємо для розв'язування задачі принцип Д'Аламбера-Лагранжа (загальне рівняння динаміки). Пізніше, у п. 3.3, цю саму задачу розв'яжемо за допомогою рівнянь Лагранжа II роду (задача 9). Складемо вираз (2).

Об'єктом дослідження є система чотирьох тіл, з'єднаних між собою нерозтяжними нитками.

В'язями для системи є вісь блока 3 та нитки, які з'єднують тіла між собою. Оскільки тертя на осі блока відсутнє, а нитки невагомі та нерозтяжні, то вказані в'язі є ідеальними. Похилу поверхню також вважатимемо ідеальною в'яззю, бо дотичну складову її реакції, а саме силу тертя ковзання, віднесемо до активних сил.

Визначимо активні сили і покажемо їх на рис.6. Такими силами є сили



(рис. 6)

ваги тіл системи, а також сила тертя ковзання тіла 2.

Представлена механічна система має 2 степеня вільності, отже, її положення визначається двома параметрами. Наприклад, координатами x та ξ.

Зафіксуємо уявно час і надамо тілам системи можливих переміщень, а саме: для тіла 2 – лінійне можливе переміщення δx, напрям якого вказаний на рис.6 . Тоді, відповідно до його напряму, вкажемо напрями всіх інших можливих переміщень. Для тіла 3 – можливий кут повороту $\delta\varphi_3$, для тіла 4, яке в плоско-паралельному русі - δS_c і $\delta\varphi_4$, а для тіла 1, що в складному поступальному русі - δS_1. Так як число степеней вільності системи дорівнює двом, то незалежних можливих переміщень також буде два, а саме δx і $\delta\xi$. Отже, через них виразимо всі інші можливі переміщення тіл системи, враховуючи кінематичні залежності, що будуть отримані нижче.

Для цього швидкість тіла 2 позначимо $V_2 = \dot{x}$, кутова швидкість тіла 3 тоді дорівнює

$$\omega_3 = \frac{V_K}{r}.$$

Так як $V_K = V_2$ (бо точка K тіла 3 і тіло 2 з'єднані однією віткою нитки), то

$$\omega_3 = \frac{\dot{x}}{r}. \qquad \text{(а)}$$

Швидкість точки A тіла 3 $V_A = \omega_3 R = \omega_3 \cdot 2r_3 = 2V_2 = 2\dot{x}$. Отже

$$V_C = V_A = 2\dot{x}, \qquad \text{(б)}$$

бо точки A і C з'єднані однією віткою нитки.

Блок 4 здійснює плоско-паралельний рух, який можна розглядати як сукупність поступального руху разом з полюсом, що збігається з точкою C, та обертального руху навколо осі, що проходить через вибраний полюс.

Тоді

$$\omega_4 = \frac{V_{Br}}{r} = \frac{\dot{\xi}}{r}\ , \tag{в}$$

де V_{Br} - відносна швидкість точки *B*, або швидкість точки *B* тіла, що обертається навколо осі *C*. Зауважимо, що абсолютна швидкість точки *B* дорівнює векторній сумі відносної та переносної швидкостей, причому переносна швидкість точки *B* дорівнює V_c. Так як всі вектори одного напряму, то

$$V_B = V_{Br} + V_C = \dot{\xi} + 2\dot{x}\ . \tag{г}$$

Тіло 1 здійснює складний рух, який можна подати сукупністю двох поступальних рухів. Так як точка *B* і тіло 1 з'єднані однією віткою нитки, тому

$$V_1 = V_B = \dot{\xi} + 2\dot{x}\ . \tag{д}$$

Використовуючи кінематичні залежності (а-д), отримаємо вирази можливих переміщень всіх точок системи через δx і $\delta\xi$:

$$\begin{aligned} &\delta S_C = 2\delta x, \\ &\delta S_1 = \delta\xi + 2\delta x, \\ &\delta\varphi_3 = \frac{\delta x}{r}, \\ &\delta\varphi_4 = \frac{\delta\xi}{r}. \end{aligned} \tag{е}$$

Складемо вираз суми можливих робіт всіх активних сил на відповідних можливих переміщеннях:

$$\begin{aligned} \delta A^a &= -m_2 g \sin\alpha \cdot \delta x - f m_2 g \cos\alpha \cdot \delta x + m_4 g \cdot \delta S_C + m_1 g \cdot \delta S_1 = \\ &= -m_2 g \sin\alpha \cdot \delta x - f m_2 g \cos\alpha \cdot \delta x + 2m_4 g \cdot \delta x + 2m_1 g \cdot \delta x + m_1 g \cdot \delta\xi \end{aligned} \tag{ж}$$

Тепер визначимо суму можливих робіт сил інерції δA^{Φ} тіл системи. Для цього визначимо ці сили.

Система сил інерції тіла 2, що в поступальному русі

$$\vec{\Phi}_2 = -m_2 \vec{W}_2,\ \Phi_2 = m_2 W_2.$$

Система сил інерції блока 3, що в обертальному русі навколо нерухомої осі, зводиться до пари сил з моментом

$$M_3^{\Phi} = I_3 \varepsilon_3,$$

де

$$I_3 = m_3 i_{3x}^{\;2} \text{ -}$$

осьовий момент інерції східчастого блока 3. Тоді

$$M_3^{\Phi} = m_3 i_{3x}^{\;2} \varepsilon_3 = 2 m_3 r_3^{\;2} \varepsilon_3.$$

M_3^{Φ} зображуємо на рисунку протилежно напряму ε_3.

Система сил інерції блока 4 при виборі центра зведень у точці C зводиться до головного вектора сил інерції

$$\vec{\Phi}_4 = -m_4 \vec{W}_4, \;\; \Phi_4 = m_4 W_4$$

та пари сил, момент якої дорівнює головному моменту сил інерції відносно точки C:

$$M_4^{\Phi} = I_4 \varepsilon_4,$$

тут

$$I_4 = \frac{m_4 r^2}{2},$$

отже,

$$M_4^{\Phi} = \frac{m_4 r^2}{2} \varepsilon_4.$$

Вектор $\vec{\Phi}_4$ зображуємо з початком в точці C блока 4, вектор M_4^{Φ} показуємо умовно дуговою стрілкою, а саме – протилежно напряму ε_4.

Систему сил інерції тіл 1 представимо як

$$\vec{\Phi}_1 = -m_1 \vec{W}_1, \; \Phi_1 = m_1 W_1.$$

Тепер складаємо δA^{Φ}:

$$\delta A^{\Phi} = -\Phi_2 \delta x - M_3^{\;\Phi} \delta\varphi_3 - \Phi_4 \delta S_4 - M_4^{\;\Phi} \delta\varphi_4 - \Phi_1 \delta S_1.$$

Зауважимо, що з кінематичних залежностей (а-д) маємо:

$$W_2 = \ddot{x},\ W_1 = W_B = \ddot{\xi} + 2\ddot{x},\ \varepsilon_3 = \frac{\ddot{x}}{r},\ \varepsilon_4 = \frac{\ddot{\xi}}{r}.$$

Отже, з урахуваннях цих всіх підстановок

$$\begin{aligned} \delta A^{\Phi} = -m_2 \ddot{x} \cdot \delta x - 2m_3 \ddot{x} \cdot \delta x - 4m_4 \ddot{x} \cdot \delta x - \\ -\frac{m_4}{2} \ddot{\xi} \cdot \delta \xi - m_1 \left(\ddot{\xi} + 2\ddot{x} \right) \cdot \delta \xi - 2m_1 \left(\ddot{\xi} + 2\ddot{x} \right) \cdot \delta x = 0. \end{aligned} \tag{з}$$

Тепер підставимо (ж) і (з)в загальне рівняння динаміки (2)

$$\begin{aligned} -m_2 g \sin\alpha \cdot \delta x - f m_2 g \cos\alpha \cdot \delta x + 2m_4 g \cdot \delta x + 2m_1 g \cdot \delta x + m_1 g \cdot \delta \xi - \\ -m_2 \ddot{x} \cdot \delta x - 2m_3 \ddot{x} \cdot \delta x - 4m_4 \ddot{x} \cdot \delta x - \frac{m_4}{2} \ddot{\xi} \cdot \delta \xi - \\ -m_1 \left(\ddot{\xi} + 2\ddot{x} \right) \cdot \delta \xi - 2m_1 \left(\ddot{\xi} + 2\ddot{x} \right) \cdot \delta x = 0 \end{aligned} \tag{і}$$

Подальше розв'язування задачі проведемо, враховуючи, що можливі переміщення δx і $\delta \xi$ є довільними і незалежними. Тому в (і) покладаємо спочатку, що $\delta x = 0$, а $\delta \xi \neq 0$,

а потім, що $\delta x \neq 0$, а $\delta \xi = 0$ і отримаємо

$$\left(m_1 g - \frac{m_4}{2} \ddot{\xi} - m_1 \ddot{\xi} - 2m_1 \ddot{x} \right) \cdot \delta \xi = 0, \tag{к}$$

$$\begin{aligned} (-m_2 g \sin\alpha - f m_2 g \cos\alpha + 2m_4 g + 2m_1 g - \\ -m_2 \ddot{x} - 2m_3 \ddot{x} - 4m_4 \ddot{x} - 2m_1 \ddot{\xi} - 4m_1 \ddot{x}) \cdot \delta x = 0 \end{aligned} \tag{л}$$

Так як співвідношення (к) і (л) повинні виконуватись при будь-яких δx і $\delta \xi$, які не дорівнюють нулю, то вирази в дужках дорівнюють нулю.

Отже,

$$m_1 g - \frac{m_4}{2} \ddot{\xi} - m_1 \ddot{\xi} - 2m_1 \ddot{x} = 0,$$

$$m_2 \ddot{x} + 2m_3 \ddot{x} + 4m_4 \ddot{x} + 2m_1 \ddot{\xi} + 4m_1 \ddot{x} + m_2 g \sin\alpha + f m_2 g \cos\alpha - 2m_4 g - 2m_1 g = 0.$$

Отримані вирази представляють собою диференціальні рівняння руху розглядуваної механічної системи.

2.4. Задачі для практичних занять та самостійного розв’язування

Рекомендуємо самостійно розв’язати задачі: 47.1, 47.3, 47.5, 47.9, 47.11, 47.12, 47.13 [2]

2.5. Запитання для самоконтролю

1. Яка класифікація сил застосовується у принципі Д’Аламбера – Лагранжа?
2. Для яких в’язей справедливий принцип Д’Аламбера – Лагранжа?
3. Сформулюйте принцип Д’Аламбера – Лагранжа.
4. Запишіть загальне рівняння динаміки.
5. Як врахувати в задачі не ідеальність в’язі, що обумовлена тертям, у загальному рівнянні динаміки?
6. У чому полягає суть методики складання рівнянь руху системи за допомогою рівнянь динаміки?
7. Як скласти загальні рівняння динаміки для системи з двома степенями вільності?
8. Чим визначається кількість незалежних переміщень для розглядуваної системи?
9. Як із загального рівняння динаміки отримати загальне рівняння статики?
10. Як визначити сили інерції для тіл при поступальному, обертальному русі навколо нерухомої осі та плоско – паралельному русі? Що представляє собою момент сил інерції ті який він має напрям?

3. Рівняння Лагранжа II роду

3.1. Короткі теоретичні відомості

Як відомо, диференціальні рівняння руху системи в узагальнених координатах (рівняння Лагранжа II роду) мають вигляд

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j,$$

$$(j=1,2,\ldots,N)$$

де T – кінетична енергія матеріальної системи,

q_j – узагальнені координати,

$\dot{q}_j$ – узагальнені швидкості,

Q_j – узагальнені сили,

N – число степенів вільності системи.

Узагальнена сила– це фізична величина, яка залежить від сил у звичайному розумінні і визначається як множник при варіації узагальненої координати у виразі можливої роботи

$$\delta A=\sum_{j=1}^{N}Q_j\delta q_j,$$

де
$$Q_j=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j},$$

або
$$Q_j=\sum_{i=1}^{n}(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_j}),$$

де X_i, Y_i, Z_i – проекції сил на осі координат,

x_i, y_i, z_i – координати точок прикладання сил.

Якщо матеріальна система рухається в потенціальному силовому полі, то узагальнена сила Q_j визначається за формулою

$$Q_j=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}=\frac{\partial U}{\partial q_j}, \qquad (j=1,2,..,N)$$

де Π – потенціальна енергія системи,

U – силова функція.

Число степенів вільності системи визначається за формулами:

$N=3n-k$, якщо система рухається у просторі і

$N=2n-k$, якщо система рухається у площині,

де n – кількість рухомих точок у системі,

k – кількість в'язей.

Число степенів вільності дорівнює числу недостаючих в'язів, які треба накласти на систему, щоб вона зупинилась.

Якщо матеріальна система рухається в потенціальному силовому полі, то рівняння Лагранжа *II* роду можна записати так

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad (j=1,2,\ldots,N)$$

або

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j=1,2,\ldots,N)$$

де L – функція Лагранжа або кінетичний потенціал системи

$$L=T-\Pi.$$

3.2. Методика розв'язування задач

Розв'язування задач за допомогою рівнянь Лагранжа II–го роду слід проводити в такій послідовності:

1. Визначити число степенів вільності рухомої системи.
2. Вибрати узагальнені координати.

У випадку поступального руху за узагальнені координати доцільно вибрати декартові координати ценра інерції системи. При обертанні тіла навколо нерухомої осі за узагальнену координату вибирають кут повороту. При плоско-паралельному русі твердого тіла за узагальнені координати вибирають координати центра інерції і кут повороту тіла навколо центра інерції.

3. Надаючи точкам системи одного з можливих переміщень, обчислити можливу роботу прикладених сил, що діють на систему і визначити узагальнені сили, що відповідають узагальненим координатам.
4. Обчислити кінетичну енергію системи, виразивши її як функцію узагальнених швидкостей.

5. Визначити частинні похідні $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ і $\frac{\partial T}{\partial q_j}$.

6. Скласти рівняння руху матеріальної системи і проінтегрувати їх, враховуючи початкові умови.

3.3. Розв’язування демонстраційних задач з поясненням

Задача 7

Визначити кутове прискорення кривошипу, що приводить в рух лінійку еліпсографу, яка лежить в горизонтальній площині (рис.7). На вісь кривошипу діє обертальний момент M_0 . Кривошип та лінійку розглядати як однорідні стрижні вагою P та $2P$, при цьому ваги повзунів A і B однакові: P_A=P_B=P_1. Тертям нехтувати.

Розв’язування

Система, що складається з кривошипу, лінійки та двох повзунів, має один степінь вільності, тобто:

$$N = 2n - k = 2\cdot 4 - 7 = 1.$$

Дійсно, якщо на систему накласти одну в’язь, то вона зупиниться.

За узагальнену координату виберемо кут φ повороту кривошипу $q_1 = \varphi$.

Оскільки лінійка еліпсографа розташована в горизонтальній площині, то роботу буде виконувати тільки момент M_0

$$\delta A = M_0 \delta\varphi.$$

Отже, узагальнена сила

$$Q_{\varphi} = M_0.$$

Обчислимо кінетичну енергію системи, як суму кінетичних енергій тіл, що входять в систему за формулою

$$T = T_{OC} + T_{AB} + T_A + T_B.$$

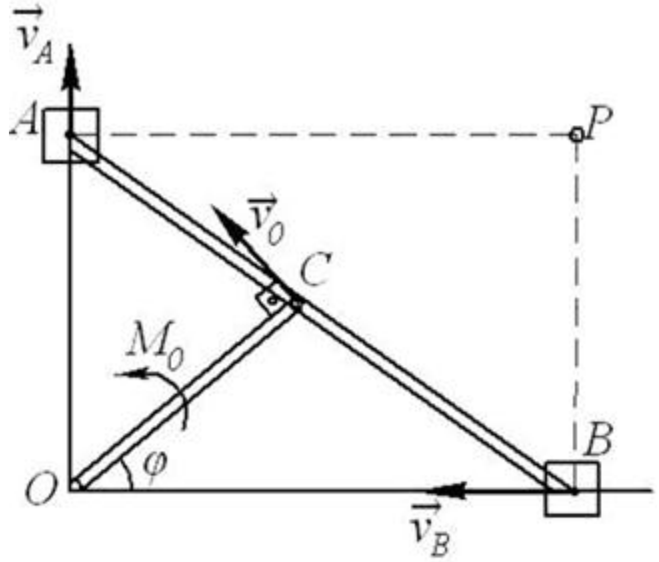


Рис.7

Кінетична енергія кривошипу, який перебуває в обертальному русі,

$$T_{OC} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{Pa^2 \dot{\varphi}^2}{6g},$$

де

$$I = I_0 = \frac{ml^2}{3} = \frac{Pa^2}{3g}.$$

Кінетичну енергію лінійки, яка перебуває в плоско-паралельному русі, визначимо за формулою

$$T_{AB} = \frac{I\omega_{AB}{}^2}{2} + \frac{mv_C{}^2}{2},$$

де

$$I_C = \frac{ml^2}{12} = \frac{2P \cdot 4a^2}{12g} = \frac{Pa^2}{3g},$$

$$v_C = \omega r = a\dot{\varphi},$$

$$\omega_{AC} = \frac{v_C}{CP} = \frac{a\dot{\varphi}}{a} = \dot{\varphi}$$

(точка P – миттєвий центр швидкостей).

Отже, $$T_{AB} = \frac{2Pa^2\dot{\varphi}^2}{3\cdot 2g} + \frac{2Pa^2\dot{\varphi}^2}{2g} = \frac{4Pa^2\dot{\varphi}^2}{3g}.$$

Кінетичні енергії повзунів, що перебувають у поступальному русі

$$T_A = \frac{m{v_A}^2}{2} = \frac{P_1\cdot 4a^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi}{2g} = \frac{2a^2P_1\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi}{g},$$

$$T_B = \frac{m{v_B}^2}{2} = \frac{P_1\cdot 4a^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi}{2g} = \frac{2a^2P_1\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi}{g},$$

де $$v_A = \frac{v_c}{CP}AP = \frac{a\dot{\varphi}\cdot 2a\cos\varphi}{a} = 2a\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

$$v_B = \frac{v_c}{CP}BP = \frac{a\dot{\varphi}\cdot 2a\sin\varphi}{a} = 2a\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

Отже, кінетична енергія системи

дорівнює

$$T = \frac{Pa^2\dot{\varphi}^2}{6g} + \frac{4Pa^2\dot{\varphi}^2}{3g} + \frac{2a^2P_1\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + 2a^2P_1\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi}{g} = \frac{Pa^2\dot{\varphi}^2}{6g}(1+8) +$$

$$+\frac{2a^2P_1\dot{\varphi}^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}{g} = \frac{3Pa^2\dot{\varphi}^2}{2g} + \frac{2a^2P_1\dot{\varphi}^2}{g} = \frac{a^2\dot{\varphi}^2}{2g}(3P+4P_1).$$

Обчислимо частинні похідні, що входять в диференціальні рівняння руху:

$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$ оскільки φ не входить в явному вигляді у вираз кінетичної енергії

системи; а

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{a^2\dot{\varphi}}{g}(3P+4P_1).$$

Складемо рівняння Лагранжа II роду

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{a^2\dot{\varphi}}{g}(3P+4P_1)\right] = M_0,$$

або $$\frac{a^2\ddot{\varphi}}{g}(3P+4P_1) = M_0,$$

звідки знайдемо

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{M_0 g}{a^2(3P + 4P_1)}.$$

Задача 8

Визначити рух тягара вагою P, що висить на однорідному тросі вагою P_1 і довжиною l (рис.8). Трос намотано на барабан радіуса а і ваги P_2; вісь обертання горизонтальна, тертям нехтувати. Масу барабана вважати рівномірно розподіленою по його ободу. В початковий момент $t=0$ система знаходиться в стані спокою; довжина звисаючої частини тросу l_0.

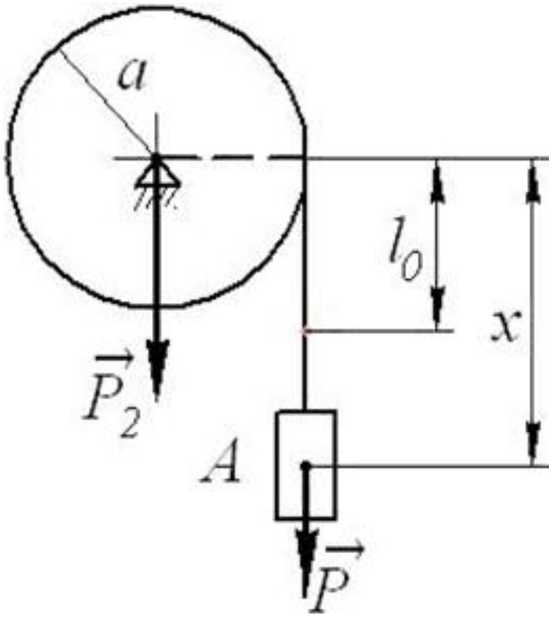


Рис. 8

Розв’язування

Система має один степінь вільності, тобто $N=1$.

За узагальнену координату виберемо координату x , тобто $q_1=x$. Обчислимо можливу роботу активних сил на одному з можливих переміщень точок системи:

$$\delta A = P \cdot \delta x + \frac{P_1 x}{l}\delta x = (P + \frac{P_1}{l}x)\delta x.$$

Отже, узагальнена сила

$$Q_1 = P + \frac{P_1}{l}x.$$

Обчислимо кінетичну енергію системи як суму кінетичних енергій барабана T_1, троса T_2 і тягара T_3.

Кінетична енергія барабана, який перебуває в обертальному русі

$$T_1 = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{P_2 a^2 \dot{x}^2}{2ga^2} = \frac{P_2 \dot{x}^2}{2g},$$

де $$I = I_0 = ma^2 = \frac{P_2 a^2}{g}; \ \omega = \frac{v}{a} = \frac{\dot{x}}{a}.$$

Кінетична енергія троса, який перебуває в поступальному русі,

$$T_2 = \frac{mv^2}{2} = \frac{P_1 \dot{x}^2}{2g}.$$

Кінетична енергія тягара, який здійснює поступальний рух,

$$T_3 = \frac{mv^2}{2} = \frac{P\dot{x}^2}{2g}.$$

Кінетична енергія системи

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{P_2 \dot{x}^2}{2g} + \frac{P_1 \dot{x}^2}{2g} + \frac{P\dot{x}^2}{2g} = \frac{\dot{x}}{2g}(P_2 + P_1 + P).$$

Обчислимо частинні похідні від кінетичної енергії по узагальненій координаті x і по узагальненій швидкості $\dot{x}$, тобто $\frac{\partial T}{\partial x}$ і $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}$.

Маємо: $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$; $\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{g}(P_2 + P_1 + P).$

Складемо рівняння Лагранжа II–го роду:

$$\frac{d}{dt}[\frac{\dot{x}}{g}(P_2 + P_1 + P)] = P + \frac{P_1 x}{l},$$

або

$$\frac{\ddot{x}}{g}(P_2 + P_1 + P)] = P + \frac{P_1 x}{l},$$

або

$$\ddot{x} - \frac{P_1 g}{l(P_2 + P_1 + P)} x = \frac{Pg}{(P_2 + P_1 + P)}. \qquad \text{(a)}$$

Рівняння (а) є лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами.

Загальний інтеграл такого рівня дорівнює сумі загального інтегралу однорідного рівняння і частинного інтегралу неоднорідного рівняння. Знайдемо загальний інтеграл однорідного рівняння

$$\ddot{x} - \frac{P_1 g}{l(P_2 + P_1 + P)} x = 0.$$

Для цього складемо характеристичне рівняння

$$r^2 - \frac{P_1 g}{l(P_2 + P_1 + P)} = 0.$$

Корені характеристичного рівняння

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{P_1 g}{l(P_2 + P_1 + P)}}.$$

Отже, загальний інтеграл однорідного рівняння має вигляд

$$x_1 = C_1 e^{t\cdot\sqrt{\frac{P_1 g}{l(P_2+P_1+P)}}} + C_2 e^{-t\cdot\sqrt{\frac{P_1 g}{l(P_2+P_1+P)}}}.$$

Частинний інтеграл даного рівняння знайдемо за виглядом правої частини

$$x_2 = A;\ \dot{x}_2 = 0;\ \ddot{x}_2 = 0$$

Підставивши ці значення в неоднорідне рівняння (а) і розв’язавши його, знайдемо:

$$A = -\frac{Pl}{P_1}.$$

Отже,

$$x_2 = -\frac{Pl}{P_1}.$$

Загальний інтеграл неоднорідного рівняння буде мати вигляд

$$x = x_1 + x_2 = C_1 e^{t\cdot\sqrt{\frac{P_1 g}{l(P_2+P_1+P)}}} + C_2 e^{-t\cdot\sqrt{\frac{P_1 g}{l(P_2+P_1+P)}}} - \frac{Pl}{P_1}, \qquad (б)$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування, які визначимо з початкових умов: при t=0, $x_0=l_0$, $\dot{x}_0 = 0$.

Для цього запишемо вираз для $\dot{x}$:

$$x = C_1\sqrt{\frac{P_1 g}{l(P_2+P_1+P)}}e^{t\cdot\sqrt{\frac{P_1 g}{l(P_2+P_1+P)}}} - C_2\sqrt{\frac{P_1 g}{l(P_2+P_1+P)}}e^{-t\cdot\sqrt{\frac{P_1 g}{l(P_2+P_1+P)}}}. \qquad (в)$$

Підставивши початкові умови в рівняння (б) і (в), знайдемо

$$C_1=C_2=C=\frac{1}{2}(l_0+\frac{Pl}{P_1}).$$

Підставивши значення сталих інтегрування в (а),отримуємо

$$x = \frac{1}{2}(l_0+\frac{Pl}{P_1})(e^{t\cdot\sqrt{\frac{P_1 g}{l(P_2+P_1+P)}}} + C_2 e^{-t\cdot\sqrt{\frac{P_1 g}{l(P_2+P_1+P)}}}) - \frac{Pl}{P_1} =$$

$$= (l_0+\frac{Pl}{P_1})ch\sqrt{\frac{P_1 g}{l(P_2+P_1+P)}}t - \frac{Pl}{P_1}.$$

Задача 9

Див. умову задачі 6 (п. 2.3) та рис. 9

Розв'язування

Розглядаємо рух механічної системи з чотирьох тіл, з'єднаних між собою нерозтяжними нитками. Застосуємо рівняння Лагранжа II роду.

Розглядувана механічна система має 2 степеня вільності. За узагальнені координати (їх число дорівнює числу степеней вільності) приймемо

$$q_1 = x;\ \ q_2 = \xi.$$

Тоді рівняння Лагранжа II роду в наведеній задачі мають вигляд:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial T}{\partial \xi} = Q_\xi. \qquad (а)$$

Розглянемо спочатку ліві частини (а). Для цього складемо вираз кінетичної енергії системи в узагальнених швидкостях.

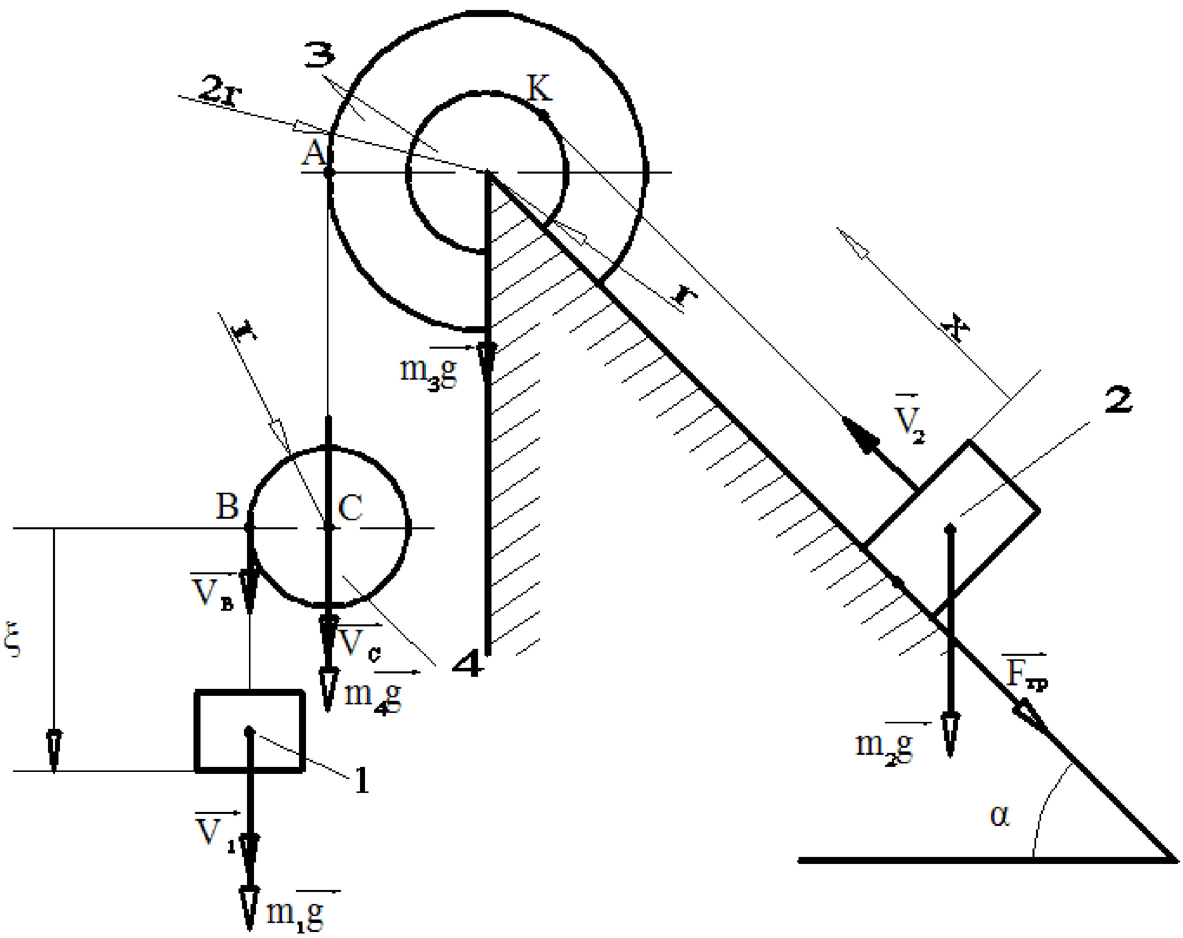


Рис. 9

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

Так як тіло 2 в поступальному русі, то його кінетична енергія

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2V_2^{\,2} \text{ або } T_2 = \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2, \text{ бо } V_2 = \dot{x}.$$

Тіло 3 в обертальному русі навколо нерухомої осі, його кінетична енергія

$$T_3 = \frac{1}{2}I_3\omega_3^{\,2}, \text{ де } I_3 = m_3 i_{3x}^{\,2} = m_3(r\sqrt{2})^2 = 2m_3r^2.$$

Визначимо ω_3 через швидкість точки K, яка належить тілу 3 і при цьому її швидкість дорівнює V_2 (так як точка K і тіло 2 з'єднані однією віткою нитки):

$$V_K = V_2\,,$$

тоді

$$\omega_3 = \frac{V_K}{r} = \frac{V_2}{r} = \frac{\dot{x}}{r}, \text{ а}$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \cdot 2r^2 \cdot \left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 = m_3 \dot{x}.$$

Тіло 4 в плоско-паралельному русі, його кінетична енергія

$$T_4 = \frac{m_4 V_C^{\,2}}{2} + \frac{1}{2} I_4 \omega_4^{\,2}.$$

Тут

$$I_4 = \frac{1}{2} m_4 r_4^{\,2}, \omega_4 = \frac{\dot{\xi}}{r_4}; \;\; V_C = V_A = \omega_3 R = \frac{V_2}{r} \cdot 2r = 2\dot{x}. \tag{б}$$

Тоді

$$T_4 = \frac{m_4 \left(2\dot{x}\right)^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_4 r_4^{\,2} \cdot \frac{\dot{\xi}^2}{r_4^{\,2}} = 2m_4 \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m_4 \dot{\xi}^2.$$

Тіло 1 знаходиться у складному поступальному русі. Його кінетична енергія $T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}$. При цьому

$$V_1 = V_B = V_C + \dot{\xi} = 2\dot{x} + \dot{\xi}. \tag{в}$$

Отже,

$$T_1 = \frac{m_1}{2}\left(2\dot{x} + \dot{\xi}\right)^2 = \frac{m_1}{2}\left(4\dot{x}^2 + 4\dot{x}\dot{\xi} + \dot{\xi}^2\right) = m_1\left(2\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\xi} + 0{,}5\dot{\xi}^2\right).$$

Вираз кінетичної енергії системи має вигляд

$$T = T_2 + T_3 + T_4 + T_1 = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + m_3 \dot{x}^2 + 2m_4 \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m_1 \dot{\xi}^2 + m_1\left(2\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\xi} + 0{,}5\dot{\xi}^2\right).$$

Проведемо операції, зазначені в лівих частинах рівнянь Лагранжа II роду (а) для розглядуваної задачі:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \xi} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_2 \dot{x} + 2m_3 \dot{x} + 4m_4 \dot{x} + 4m_1 \dot{x} + 2m_1 \dot{\xi};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = \frac{1}{2} m_4 \dot{\xi} + 2m_1 \dot{x} + m_1 \dot{\xi};$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = \frac{1}{2} m_4 \ddot{\xi} + 2m_1 \ddot{x} + m_1 \ddot{\xi};$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_2 \ddot{x} + 2m_3 \ddot{x} + 4m_4 \ddot{x} + 4m_1 \ddot{x} + 2m_1 \ddot{\xi}.$$

Перейдемо до розгляду правих частин виразів (а), а саме визначимо узагальнені сили як коефіцієнти, що стоять у виразі суми можливих робіт всіх активних сил, що діють на тіла системи, при відповідних варіаціях узагальнених координат.

Активними силами є сили ваги всіх тіл, а також сила тертя ковзання тіла 1.

Так як нитка невагома, абсолютно гнучка і нерозтяжна, а на осі блока тертя відсутнє, то їх вважаємо ідеальними в’язями. Похилу площину також вважаємо ідеальною в’яззю за умови, що дотичну складову її реакції, а саме силу тертя ковзання, віднесемо до активних сил.

$$\delta A = -m_2 g \sin\alpha \cdot \delta x - f m_2 g \cos\alpha \cdot \delta x + m_4 g \cdot \delta S_C + m_1 g \cdot \delta S_1.$$

Виразимо δS_C і δS_1 через δx і $\delta\xi$, користуючись кінематичими залежностями (б) і (в):

$$\delta S_C = 2\delta x, \;\; \delta S_1 = 2\delta x + \delta\xi.$$

Отже

$$\delta A = -m_2 g \sin\alpha \cdot \delta x - f m_2 g \cos\alpha \cdot \delta x + 2m_4 g \cdot \delta x + m_1 g \left(2\delta x + \delta\xi\right) =$$
$$= \left(-m_2 g \sin\alpha - f m_2 g \cos\alpha + 2m_4 g + 2m_1 g\right) \cdot \delta x + m_1 g \cdot \delta\xi.$$

З останнього виразу отримуємо узагальнені сили

$$Q_x = -m_2 g \sin\alpha - f m_3 g \cos\alpha + 2m_4 g + 2m_1 g,$$
$$Q_\xi = m_1 g.$$

Підставляємо всі отримані при розв'язуванні задачі співвідношення в (а) і знаходимо диференціальні рівняння руху механічної системи:

$$m_2\ddot{x}+2m_3\ddot{x}+4m_4\ddot{x}+4m_1\ddot{x}+2m_1\ddot{\xi}=-m_2g\sin\alpha-fm_2g\cos\alpha+2m_4g+2m_1g;$$

$$\frac{1}{2}m_4\ddot{\xi}+2m_1\ddot{x}+m_1\ddot{\xi}=m_1g.$$

Висновок: Пропонуємо студентам порівняти отримані результати при розв'язуванні задачі за допомогою загального рівняння динаміки та з використанням рівнянь Лагранжа II роду. Очевидно, що вони збігаються.

3.4. Задачі для практичних занять та для самостійного розв'язування

Рекомендуємо самостійно розв'язати задачі: 48.7, 48.12, 48.20, 48.24, 48.26-48.33 [2].

3.5. Запитання для самоконтролю

1. Чим визначається кількість рівнянь Лагранжа II роду в задачі?
2. Як визначається число незалежних можливих переміщень в задачі?
3. Як зв'язані між собою узагальнені координати, швидкості та прискорення?
4. Як визначаються узагальнені сили системи?
5. Як виразити швидкість точки через узагальнені координати?
6. Що таке можлива робота?
7. Як врахувати не ідеальність в'язі, що обумовлена тертям у рівнянні Лагранжа II роду?
8. Яка аналітична умова ідеальності в'язі?
9. Для яких в'язей, накладених на механічну систему, можна застосувати рівняння Лагранжа II роду?
10. Яким чином має бути записаний вираз кінетичної енергії системи для того, щоб провести всі диференціювання, зазначені в лівій частині рівнянь Лагранжа II роду?

Список рекомендованої літератури

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике.- М.: Наука, 1986. - 448 с.
3. Теоретична механіка: Збірник задач / О. С. Апостолюк, В. М. Воробйов, Д. І. Ільчишина та ін.; За ред. М.А. Павловського. - К.: Техніка, 2007. – 400 с.
4. Теоретична механіка: Конспект лекцій «Динаміка та аналітична механіка» / Укладачі: Апостолюк Олександр Семенович, Штефан Наталія Іллівна. – 110 с.; *http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/413*.
5. 10-11-090.doc : Теоретична механіка. Кінематика. Динаміка та аналітична механіка [Електронний ресурс] : навчальний посібник / Г. Я. Міщук, Н. І. Стефан ; НТУУ «КПІ». – Електронні текстові дані (1 файл: 108.4 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2010. - Назва з екрана.- Доступ: http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/859
6. 11-12-189.doc: Теоретична механіка. Розділ: Аналітична механіка [Електронний ресурс] : методичні вказівки до проведення практичних занять та самостійної роботи студентів технічних напрямів підготовки / НТУУ «КПІ» ; уклад. В. Г. Савін, Н. І. Штефан, Н. В. Гнатейко. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,54 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2012. – Назва з екрана.- Доступ: http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/1881

7. Теоретична механіка. Динаміка та аналітична механіка [Електронний ресурс] : методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи (РГР) для студентів технічних напрямів підготовки денної та заочної форм навчання / НТУУ «КПІ» ; уклад. В. Г. Савін, В. М. Федоров, Н. І. Штефан. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,90 Мбайт).

– Київ : НТУУ «КПІ», 2013. – 35 с. – Назва з екрана. – Доступ: http://ela.kpi.ua/handle/123456789/3558

8. Дистанційний курс . Електронний курс лекцій: Динаміка та аналітична механіка/ для студентів технічних напрямків підготовки / Уклад. Н. І. Штефан, . О. С. Апостолюк, Н. В. Гнатейко , В. Г. Савін - Доступ: http://moodle.udec.ntu-kpi.kiev.ua/moodle/course/view.php?id=591

Зміст

Вступ 3
1.Принцип можливих переміщень (загальне рівняння динаміки) 5
1.1. Короткі теоретичні відомості 5
1.2. Методика розв'язування задач 6
1.3. Розв'язування демонстраційних задач з поясненням 7
1.4. Задачі для практичних занять та самостійного розв'язування 17
1.5. Запитання для самоконтролю 17
2. Принцип Д'Аламбера-Лагранжа (загальне рівняння динаміки) 18
2.1. Короткі теоретичні відомості 18
2.2. Методика розв'язування задач 19
2.3. Розв'язування демонстраційних задач з поясненням 20
2.4. Задачі для практичних занять та самостійного розв'язування 30
2.5. Запитання для самоконтролю 30
3. Рівняння Лагранжа ІІ роду 30
3.1. Короткі теоретичні відомості 30
3.2. Методика розв'язування задач 32
3.3. Розв'язування демонстраційних задач з поясненням 33
3.4. Задачі для практичних занять та для самостійного розв'язування 43
3.5. Запитання для самоконтролю 43
Список рекомендованої літератури 44