МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

Навчальне електронне видання

Бабаєв О. А., Кришталь В. Ф.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА-3. ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ ТА ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Конспект лекцій
для студентів механіко-машинобудівного інституту
напрямів підготовки 6.050502 «Інженерна механіка» та
6.050503 «Машинобудування»
для всіх форм навчання

Київ
НТУУ «КПІ»
2015

ББК 22.21
УДК 521.8

Теоретична механіка-3. Загальні теореми динаміки та елементи аналітичної механіки. Конспект лекцій для студентів механіко-машинобудівного інституту напрямів підготовки 6.050502 «Інженерна механіка» та 6.050503 «Машинобудування» для всіх форм навчання/Укл.: О. А. Бабаєв, В. Ф. Кришталь – К. НТУУ "КПІ", 2015. – 82 с.

Рекомендовано Вченою радою факультету авіаційних і космічних систем НТУУ «КПІ»
22 червня 2015 р.

Навчальне електронне видання

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА-3.
ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ ТА
ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ**

Конспект лекцій
для студентів механіко-машинобудівного інституту
напрямів підготовки 6.050502 «Інженерна механіка» та
6.050503 «Машинобудування»
для всіх форм навчання

Укладачі: *Бабаєв Олександр Арташесович*, канд.техн.наук, доцент
Кришталь Володимир Федорович, канд.техн.наук, доцент

Відповідальний редактор: *Штефан Наталія Іллівна*, канд.техн.наук, доцент

Рецензенти: *Ковальчук Вікторія Валентинівна*, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Охріменко Олександр Анатолійович, канд. техн. наук, доцент

© О. А. Бабаєв
В. Ф. Кришталь

Зміст

Вступ

Представлений конспект лекцій відповідає кредитному модулю «Теоретична механіка-3» (Динаміка твердого тіла та елементи аналітичної механіки). Для опанування матеріалу, наведеного у конспекті лекцій, згідно робочої програми даного кредитного модуля відводиться 18 аудиторних лекційних годин та 10 годин самостійної роботи студентів.

Кредитний модуль «Теоретична механіка-3» є частиною дисципліни Теоретична механіка, у якому вивчають методи і способи складання і розв'язування диференціальних рівнянь руху твердих тіл, механічних систем та окремих їх точок за допомогою загальних теорем динаміки в проекціях на осі вибраної системи координат та в узагальнених координатах (рівняння Лагранжа II роду)

Вивчення кредитного модуля «Теоретична механіка-3» базується на широкому використанні знань зі статики та кінематики, математичних методів диференціальних та інтегральних обчислень, теорії диференціальних рівнянь, постановки задачі Коші і тому його вивчення вимагає наявність базових знань з елементарної і вищої математики, евклідової геометрії, аналітичної алгебри, нарисної геометрії, загальної фізики.

Мета конспекта лекцій – дати студентам теоретичні знання в галузі побудови математичних моделей та складання диференціальних рівнянь руху твердих тіл.

Структурно конспект включає такі частини дисципліни «Теоретична механіка» як «Загальні теореми динаміки» та «Елементи аналітичної механіки», які поділено на п'ять тем. Нумерація пунктів відбувається в межах однієї теми. Нумерація формул та рисунків відбувається в межах однієї лекції. Конспект лекцій включає 9 лекцій. В кінці кожної лекції подано контрольні питання для закріплення отриманих знань.

ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ

Тема 5.1. Теореми про рух центра мас, зміну кількості руху та моменту кількості руху системи системи точок

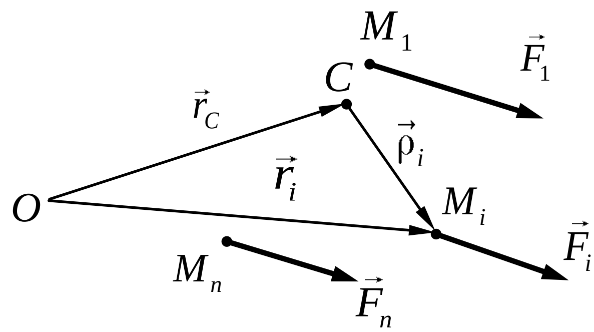
Лекція 1

Загальні теореми динаміки – це твердження, які встановлюють залежність між системою сил прикладених до системи матеріальних точок або твердих тіл та їх прискореннями. До них відносяться: теорема про рух центра мас, теореми про зміну кількості руху точки та системи точок (теорема імпульсів), теорема про зміну момента кількості руху системи точок, теореми про зміну кінетичної енергії.

1. Теорема про рух центра мас.

Припустимо, шо є система матеріальних точок M_i положення яких відносно полюса *O* визначається радіусами-векторами $\vec{r}_i = \overrightarrow{OM}_i = \; x_i, y_i, z_i$, *i*=1, 2,…, *n*. Маси точок дорівнюють m_i. Нехай до системи точок M_i прикладена система сил $\vec{F}_i$ таких (рис.1.1), що система точок здійснює поступальний рух з прискоренням $\vec{a}_i = \vec{a} = \dfrac{\vec{F}_i}{m_i}$, *i*=1, 2,…, *n*. Тоді, сили $\vec{F}_i$ утворюють систему паралельних сил, яку можна замінити однією силою $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$, прикладеною у певній точці, для якої виконується умова $\vec{F} = m\vec{a}$. Точка прикладання такої сили буде називатись центром мас системи точок.

Рис.1.1.



Таким чином, *центр мас* (або *центр інерції*) *системи матеріальних точок* – це точка прикладання рівнодійної системи паралельних сил $\vec{F}_i = m_i\vec{a}$, *i* =1, 2,…, *n*, які надають даній системі точок поступальний рух. Вказану точку простору позначають буквою *C*.

Дана точка характеризує розподіл маси в системі точок і її положення визначається радіусом–вектором

$$\vec{r}_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m}. \tag{1.1}$$

Проектуючи (1.1) на осі прямокутної декартової системи координат $Oxyz$ отримаємо координати центра мас

$$x_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}, \qquad y_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}, \qquad z_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z_i}{m}, \tag{1.2}$$

де $m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ - маса системи точок.

Положення центра мас незмінної системи точок не залежить від вибору системи координат і закону руху цієї системи точок. Незмінна система матеріальних точок – це система точок, взаємне розташування яких і відстані між точками не змінюються.

Теорема. *Центр мас системи матеріальних точок рухається як вільна матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи і до якої прикладена сила, що дорівнює головному вектору зовнішніх сил*:

$$m\vec{a}_{\boldsymbol{C}} = \vec{F}^e, \tag{1.3}$$

де $\vec{a}_{\boldsymbol{C}}$- прискорення центра мас, $\vec{F}^e = F_x^e, F_y^e, F_z^e$ - головний вектор зовнішніх сил, причому

$$F_x^e = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}^e, \qquad F_y^e = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}^e, \qquad F_z^e = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}^e.$$

Доведення. Нехай до системи матеріальних точок прикладена система зовнішніх сил $\vec{F}_i^E \;{}_{i=1}^{n}$ та система внутрішніх сил $\vec{F}_i^I \;{}_{i=1}^{n}$.

За другим законом Ньютона та законом незалежності дії сил, для кожної точки даної системи можна записати

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^E + \vec{F}_i^I, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.4}$$

Просумуємо ліві та праві частини формул (1.4):

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^E + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^I, \tag{1.5}$$

Ліва частина формули (1.5) може бути записана так

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i .$$

За формулою (1.1) маємо $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = m\vec{r}_C$, що дозволяє записати

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} m\vec{r}_C = m\vec{a}_C . \qquad (1.6)$$

Визначимо тепер праву частину формули (1.5). Векторна сума зовнішніх сил, прикладених до точок однієї системи є головний вектор системи зовнішніх сил:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^E = \vec{F}^e . \qquad (1.7)$$

Оскільки внутрішні сили, за третім законом Ньютона, утворюють систему сил дії та протидії $\vec{F}_{i+1}^I = -\vec{F}_i^I$, i=1, 2,…, n-1, то головний вектор внутрішніх сил дорівнює нулю: $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^I = 0$.

Таким чином, отримаємо $m\vec{a}_{\boldsymbol{C}} = \vec{F}^e$.

У проекціях на осі в координатній формі вираз (1.3) приймає вигляд

$$m\ddot{x}_C = F_x^e, \qquad m\ddot{y}_C = F_y^e, \qquad m\ddot{z}_C = F_z^e . \qquad (1.8)$$

Співвідношення (1.8) називаються диференціальними рівняннями руху центра мас системи в проекціях на осі декартової системи координат. Відсутність внутрішніх сил в наведених диференціальних рівняннях дає можливість зробити висновок, що внутрішні сили безпосередньо не впливають на рух центра мас, але внутрішні сили в ряді випадків є причиною появи зовнішніх сил, прикладених до точок системи. Так, внутрішні сили, які приводять в обертальний рух провідне колесо автомобіля, викликають дію на нього зовнішньої сили тертя зчеплення з шорсткою поверхнею дороги. Ця сила прикладається до обода колеса.

З теореми про рух центра мас матеріальної системи випливають такі наслідки:

1) Одними лише внутрішніми силами не можна змінити механічний стан системи точок. Це можна зробити опосередковано через зовнішні сили.

2) Якщо головний вектор зовнішніх сил дорівнює нулю, то прискорення центра мас також дорівнює нулю $m\vec{a}_C = m\frac{d\vec{\mathrm{v}}_C}{dt} = 0$. Звідси випливає, що центр мас рухається рівномірно і прямолінійно $\vec{\mathrm{v}}_C = \vec{\mathrm{v}}_{C0} = \overrightarrow{\mathrm{const}}$. У цьому випадку кажуть, що має місце закон збереження руху центра мас.

3) Якщо одна з проекцій головного вектора зовнішніх сил дорівнює нулю, то відповідна проекція прискорення центра мас $ma_{Cx} = m\frac{d\mathrm{v}_{Cx}}{dt} = 0$. Звідси

випливає, що центр мас вздовж відповідної осі рухається рівномірно і прямолінійно $v_{Cx} = v_{C0x} = \text{const}$. У цьому випадку кажуть, що має місце закон збереження руху центра мас вздовж осі *Ox*.

2. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки.

Кількістю руху матеріальної точки $\vec{q}$ (першою або векторною мірою механічного руху) називається вектор, який дорівнює добутку маси *m* точки та вектора її швидкості

$$\vec{q} = m\vec{v}. \qquad (1.9)$$

Теорема (про зміну кількості руху матеріальної точки в диференціальній формі): *Перша похідна за часом від кількості руху матеріальної точки дорівнює прикладеній доточки силі*

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{F}. \qquad (1.10)$$

З вказаного твердження для точки сталої маси можна отримати основний закон динаміки матеріальної точки $m\vec{a} = \vec{F}$.

Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки в інтегральній формі (теорема імпульсів): *Приріст кількості руху матеріальної точки за певний проміжок часу дорівнює імпульсу рівнодійної сил прикладених до точки за цей же проміжок часу*

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{s}, \qquad (1.11)$$

де $\vec{v}_0$, $\vec{v}$ - початкова та кінцева швидкість точки, $\vec{s} = \int_{t_0}^{t} \vec{R}(t)dt$ - повний імпульс сили, $d\vec{s} = \vec{R}(t)dt$ - елементарний імпульс сили.

Доведення. Припустимо, що до точки *M* прикладена система сил $\left\{\vec{F}_i\right\}_{i=1}^{n}$, яка зводиться до рівнодійної $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$. Вважаємо, що у момент часу t_0 точка займає положення M_0 та має швидкість $\vec{v}_0$, а у момент часу t швидкість точки – $\vec{v}$. Скористаємось формулою (1.10) та помножимо її ліву та праву частину на dt

$$d\vec{q} = \vec{R}dt.$$

Позначимо $d\vec{s} = \vec{R}dt$ - елементарний імпульс рівнодійної сили. Візьмемо інтеграл від отриманого виразу за часом:

$$\int_{t_0}^{t} d\vec{q} = \int_{t_0}^{t} d\vec{s}.$$

Після інтегрування отримаємо

$$\vec{q} - \vec{q}_0 = \vec{s}\,,$$

де $\vec{q}_0 = m\vec{\mathrm{v}}_0$, $\vec{q} = m\vec{\mathrm{v}}$, $\vec{s} = \int\limits_{t_0}^{t} d\vec{s} = \int\limits_{t_0}^{t} \vec{R}(t)dt$.

3. Теорема про зміну кількості руху системи точок і твердого тіла.

Головним вектором кількостей руху $\vec{Q}$ системи матеріальних точок називається векторна сума кількостей руху матеріальних точок, що входять у систему

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} \vec{q}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathrm{v}}_i\,. \qquad (1.12)$$

Теорема: *Кількість руху* $\vec{Q}$ *системи точок або абсолютно твердого тіла дорівнює добутку маси* m *системи точок (тіла) та швидкості його центра мас*

$$\vec{Q} = m\vec{\mathrm{v}}_C\,. \qquad (1.13)$$

Дійсно, якщо формулу (1.1) помножити на масу m системи точок та продифенціювати за часом, з урахуванням (1.12), отримуємо (1.13).

Теорема (про зміну кількості руху системи матеріальних точок в диференціальній формі): *Похідна за часом від головного вектора кількостей руху системи матеріальних точок (твердого тіла) дорівнює головному вектору зовнішніх сил, прикладених до точок системи (тіла):*

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e, \qquad (1.14)$$

де $\vec{F}^e = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_i^E$; $\vec{F}_i^E$- зовнішні сили прикладені до точок системи.

Доведення. Для кожної точки системи за теоремою про зміну кількості руху у диференціальній формі можна записати

$$\frac{d}{dt}\vec{q}_i = \vec{F}_i^E + \vec{F}_i^I,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Складемо ліві та праві частини цих формул:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\vec{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^E + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^I\,.$$

Очевидно, що у лівій частині отримаємо похідну за часом від головного вектора кількостей руху системи точок

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\vec{q}_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \vec{q}_i = \frac{d}{dt}\vec{Q}\,.$$

Векторна сума зовнішніх сил визначає головний вектор зовнішніх сил $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^E=\vec{F}^e$, а векторна сума внутрішніх сил дорівнює нулю $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^I=0$, оскільки внутрішні сили утворюють систему сил дії та протидії ($\vec{F}_{i+1}^I=-\vec{F}_i^I$). Таким чином, отримаємо

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e.$$

Теорема про зміну кількості руху системи матеріальних точок в інтегральній формі (теорема імпульсів): *Приріст головного вектора кількостей руху системи матеріальних точок за деякий проміжок часу* $[t_0,t]$ *дорівнює повному імпульсу головного вектора зовнішніх сил, прикладених до точок системи за цей же проміжок часу*

$$\vec{Q}(t)-\vec{Q}(t_0)=\vec{S}^e, \tag{1.15}$$

де $\vec{S}^e=\int_{t_0}^{t}\vec{F}^e dt=\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^E dt$ - повний імпульс головного вектора зовнішніх сил, $\vec{Q}(t_0)$ та $\vec{Q}(t)$ - головний вектор кількостей руху системи матеріальних точок в початковий та кінцевий момент часу.

Доведення. Скористаємось формулою (1.14). Помножимо її ліву та праву частину на dt та візьмемо визначений інтеграл на проміжку часу $[t_0,t]$:

$$\int_{t_0}^{t} d\vec{Q}=\int_{t_0}^{t} d\vec{S}^e,$$

де $d\vec{S}^e=\vec{F}^e dt$ - елементарний імпульс головного вектора системи зовнішніх сил. Після взяття інтеграла отримаємо $\vec{Q}(t)-\vec{Q}(t_0)=\vec{S}^e$.

Зауважимо, що у проекціях на осі системи координат вирази (1.14) та (1.15) відповідно записуються так

$$\frac{dQ_x}{dt}=F_x^e,\qquad \frac{dQ_y}{dt}=F_y^e,\qquad \frac{dQ_z}{dt}=F_z^e \tag{1.16}$$

$$Q_x(t)-Q_x(t_0)=S_x^e,\qquad Q_y(t)-Q_y(t_0)=S_y^e,\qquad Q_z(t)-Q_z(t_0)=S_z^e. \tag{1.17}$$

Наслідки до теорем.

1) Як випливає з виразів (1.14) та (1.15) одними лише внутрішніми силами не можна змінити механічний стан системи точок. Це можна зробити опосередковано через зовнішні сили.

2) Якщо головний вектор зовнішніх сил дорівнює нулю, то головний вектор кількостей руху системи точок задовольняє умову $\frac{d\vec{Q}}{dt}=0$, тобто є сталою величиною у будь-який момент часу і дорівнює початковому

значенню: $\vec{Q} = \vec{Q}_0 = \overrightarrow{\text{const}}$. У цьому випадку кажуть, що має місце *закон збереження* головного вектора кількостей руху системи точок.
3) Якщо одна з проекцій головного вектора зовнішніх сил дорівнює нулю, то відповідна проекція головного вектора кількостей руху системи точок буде сталою $Q_x = Q_{0x} = const$. У цьому випадку кажуть, що має місце *закон збереження* головного вектора кількостей руху системи точок відносно осі *Ox*.

Теорема про зміну кількості руху, або закон збереження кількості руху, застосовують у випадках, коли до відомих і невідомих величин входять швидкості точок матеріальної системи (тіла), діючі на систему сили та час.

Контрольні запитання.
1. Як визначаються радіус-вектор та координати центра мас (інерції) системи матеріальних точок?
2. Сформулюйте теорему про рух центра мас.
3. У чому полягає закон збереження руху центра мас системи точок?
4. Наведіть приклад, який підтверджує висновок про неможливість зміни механічного стану системи точок тільки внутрішніми силами.
5. Як можна визначити головний вектор кількостей руху системи точок окрім означення?
6. Сформулюйте теорему про зміну головного вектора кількостей руху системи точок у диференціальній формі та вкажіть на чому грунтується її доведення.
7. Сформулюйте теорему про зміну головного вектора кількостей руху системи точок в інтегральній формі.
8. У якому випадку виконується закон збереження головного вектора кількостей руху системи точок?
9. У чому складається різниця між елементарним та повним імпульсом сили?
10. Яка з теорем є більш загальною: теорема про рух центра мас чи теорема про зміну кількості руху системи точок?

Лекція 2

4. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки.

Момент кількості руху матеріальної точки – це ще одна (допоміжна) міра механічного руху, вона застосовується в основному для характеристики обертального руху.

Моментом кількості руху $\vec{k}_O$ *точки відносно центра O* називається вектор, що дорівнює векторному добутку радіуса–вектора $\vec{r}$ матеріальної точки, проведеного з центра *O*, і кількості руху цієї точки

$$\vec{k}_O = \vec{r} \times \vec{q} = \vec{r} \times m\vec{v}. \qquad (2.7)$$

Модуль вектора $\vec{k}_O$ визначається згідно виразу

$$k_O = r \cdot q \cdot \sin(\widehat{\vec{r},\vec{v}}) = m \cdot r \cdot v \cdot \sin(\widehat{\vec{r},\vec{v}}). \qquad (2.8)$$

Вектор $\vec{k}_O$ напрямлений перпендикулярно до площини у якій лежать вектор $\vec{q} = m\vec{\mathrm{v}}$ кількості руху (швидкості) точки та радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ у ту частину простору, звідки перехід по найкоротшому шляху від кінця вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ до кінця $\vec{q} = m\vec{\mathrm{v}}$ відбувається проти стрілки годинника. Це значить, що трійка векторів $\vec{r},\ \vec{\mathrm{v}},\ \vec{k}_O$ є правою трійкою.

Нехай задано прямокутну декартову систему координат *Oxyz*. Тоді при заданому радіусі-векторі $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \ x, y, z\ $ та швидкості $\vec{\mathrm{v}} = \ \mathrm{v}_x, \mathrm{v}_y, \mathrm{v}_z$ отримаємо момент кількості руху точки у формі

$$\vec{k}_O = \vec{r} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\mathrm{v}_x & m\mathrm{v}_y & m\mathrm{v}_z \end{vmatrix} = \vec{i}k_{Ox} + \vec{j}k_{Oy} + \vec{k}k_{Oz}. \qquad (2.9)$$

Через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ позначено орти системи координат *Oxyz*. Проекції моментa кількості руху точки мають вигляд

$$\begin{aligned} k_{Ox} &= my\mathrm{v}_z - mz\mathrm{v}_y, \\ k_{Oy} &= mz\mathrm{v}_x - mx\mathrm{v}_z, \\ k_{Oz} &= mx\mathrm{v}_y - my\mathrm{v}_x. \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Візьмемо похідну за часом від момента кількості руху матеріальної точки

$$\frac{d}{dt}\vec{k}_O = \frac{d}{dt}\ \vec{r} \times \vec{q}\ = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{q} + \vec{r} \times \frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{\mathrm{v}} \times m\vec{\mathrm{v}} + \vec{r} \times \frac{d\vec{q}}{dt}.$$

Оскільки перший доданок правої частини дорівнює нулю, а похідна за часом від кількості руху точки дорівнює рівнодійній системи прикладених до точки сил ($\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{R}$), отримаємо

$$\frac{d}{dt}\vec{k}_O = \vec{M}_O\ \vec{R}\ , \qquad (2.11)$$

де $\vec{M}_O\ \vec{R}\ = \vec{r} \times \vec{R}$.

Таким чином, ми довели ***теорему*** *(про зміну момента кількості руху точки): похідна за часом від момента кількості руху матеріальної точки відносно нерухомого центра О дорівнює моменту $\vec{M}_O$ рівнодійної сил $\vec{R}$, прикладених до точки, відносно того самого центра*.

В проекціях на осі системи координат теорема (2.11) має вигляд

$$\frac{d}{dt}k_{Ox} = M_x\ \vec{R}\ , \qquad \frac{d}{dt}k_{Oy} = M_y\ \vec{R}\ , \qquad \frac{d}{dt}k_{Oz} = M_z\ \vec{R}\ , \qquad (2.12)$$

або

$$m\frac{d}{dt}(y\dot{z} - z\dot{y}) = yR_z - zR_y,$$

$$m\frac{d}{dt}(z\dot{x}-x\dot{z})=zR_x-xR_z,$$
$$m\frac{d}{dt}(x\dot{y}-y\dot{x})=xR_y-yR_x,$$

де $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ - проекції швидкості точки на осі координат; R_x, R_y, R_z - проєкції рівнодійної сили на ті самі осі координат.

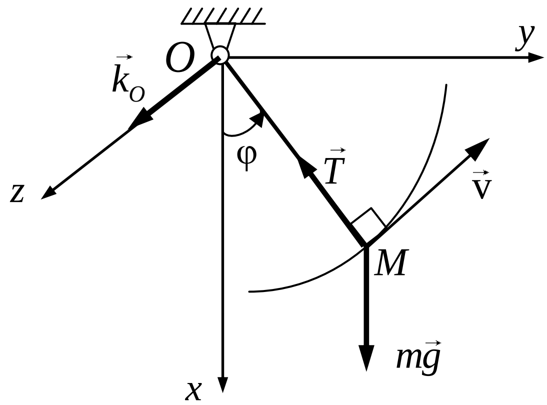
Розглянемо застосування теореми про зміну момента кількості руху точки на прикладі математичного маятника.

Математичний маятник – це точка *M* масою *m*, яка прикріпляється до деякої точки *O* за допомогою невагомої нерозтяжної нитки або ідеального стержня.

Нехай $OM=l$ - довжина маятника. Введемо систему координат *Oxyz* (рис.2.1), вісь *Ox* якої напрямимо вниз, осі *Oy* та *Oz* - горизонтальні. Вважаємо, що точка *M* рухається тільки у вертикальній площині *Oxy*.

Кут відхилення маятника від вертикалі позначимо через φ. Зображуємо точку *M* у положенні, що відповідає руховi у додатному напрямку кута φ. З активних сил до точки *M* прикладена сила тяжіння $m\vec{g}$. Відкидаємо в'язь та заміняємо її силою натягу $\vec{T}$.

Рис. 2.1.



Скористаємось записом теореми у формі (2.12). Визначимо моменти прикладених до точки *M* сил відносно координатних осей:

$$M_x(\vec{R})=0, \qquad M_y(\vec{R})=0, \qquad M_z(\vec{R})=-mgl\sin\varphi.$$

З рисунка випливає, що $k_{Ox}=k_{Oy}=0$, $k_O=k_{Oz}=\left|\overrightarrow{OM}\right|m\left|\vec{v}\right|\sin(\overrightarrow{OM}\,\widehat{,}\,\vec{v})$. Оскільки $\left|\overrightarrow{OM}\right|=l$, $\left|\vec{v}\right|=\omega l=\dot{\varphi}l$, для момента кількості руху точки *M* отримаємо $k_O=k_{Oz}=ml^2\dot{\varphi}$. Після підстановки отриманих виразів у третє співвідношення формул (2.12) отримаємо

$$ml^2\ddot{\varphi}=-mgl\sin\varphi.$$

Поділимо праву та ліву частину на ml^2 і перенесемо усі доданки в ліву сторону:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \tag{2.13}$$

Отримане рівняння є диференціальним рівнянням руху математичного маятника. Для малих кутів φ виконується спрощення $\sin\varphi \approx \varphi$ і рівняння набуває вигляду

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0. \tag{2.14}$$

Це рівняння називається *диференціальним рівнянням малих коливань математичного маятника*. Очевидно, що дане рівняння відповідає вільним незгасаючим коливанням з коловою частотою $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ та розв'язком $\varphi = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$.

5. Кінетичний момент системи матеріальних точок.

Кінетичним моментом $\vec{K}_A$ системи матеріальних точок, або *головним моментом кількостей руху системи матеріальних точок* відносно полюса *A*, називається векторна сума моментів кількостей руху точок системи відносно цього самого полюса

$$\vec{K}_A = \sum_{i=1}^{n} \vec{k}_{Ai} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i, \tag{2.15}$$

де $\vec{k}_{Ai}$ - момент кількості руху i - ї точки; $\vec{r}_i$ - радіус-вектор, що з'єднує нерухомий центр *A* з i - ю точкою системи, $\vec{v}_i$ - швидкість *i*- ї точки.

Розглянемо деякі властивості кінетичного моментам $\vec{K}_A$ системи матеріальних точок.

Теорема 1. *Кінетичний момент системи точок відносно деякого полюса A дорівнює векторній сумі кінетичного моменту системи точок відносно полюса O складеного з моментом кількості руху точки розташованій в полюсі O, маса якої дорівнює масі системи і яка має швидкість центра мас*:

$$\vec{K}_A = \vec{K}_O + \overrightarrow{AO} \times \vec{Q}, \tag{2.16}$$

де $\vec{Q} = m\vec{v}_C$, $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ - маса системи точок, $\vec{v}_C$ - швидкість центра мас, m_i та $\vec{v}_i$ - маса та швидкість окремої точки ($i = 1, 2, \ldots, n$).

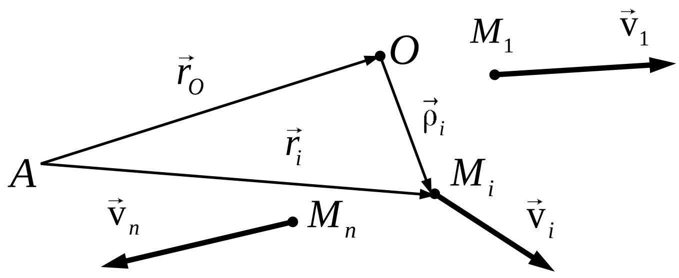


Рис.2.2

Для доведення теореми подамо радіуси-вектори точок у вигляді (рис.2.2)

$$\vec r_i = \vec r_O + \vec\rho_i = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}_i \tag{2.17}$$

та підставимо у вираз (2.15)

$$\vec K_A = \sum_{i=1}^{n} \vec r_i \times m_i \vec{\mathrm v}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec r_O + \vec\rho_i) \times m_i \vec{\mathrm v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec r_O \times m_i \vec{\mathrm v}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec\rho_i \times m_i \vec{\mathrm v}_i .$$

В отриманому виразі перший доданок можна перетворити використовуючи похідну за часом від формули (1.1):

$$\sum_{i=1}^{n} \vec r_O \times m_i \vec{\mathrm v}_i = \vec r_O \times \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathrm v}_i = \vec r_O \times m \vec{\mathrm v}_C = \vec r_O \times \vec Q .$$

Другий доданок є кінетичним моментом системи точок відносно полюса *O*:

$$\vec K_O = \sum_{i=1}^{n} \vec\rho_i \times m_i \vec{\mathrm v}_i .$$

Таким чином, теорема (2.16) доведена.

Зазначимо, формула (2.16) аналогічна відомій формулі для головного моменту системи сил відносно різних полюсів

$$\vec M_A = \vec M_O + \overrightarrow{AO} \times \vec F ,$$

де $\vec F$ - головний вектор системи сил.

Припустимо тепер, що система точок здійснює складний рух: переносний разом з деяким полюсом *O* (початок відліку рухомої системи координат *Oxyz*) та відносний зі швидкостями $\vec{\mathrm v}_{ir}$ навколо полюса *O*. Тоді переносні та абсолютні швидкості визначаються так: $\vec{\mathrm v}_{ie} = \vec{\mathrm v}_O$, $\vec{\mathrm v}_i = \vec{\mathrm v}_{ie} + \vec{\mathrm v}_{ir}$. Радіуси-вектори точок визначаються як на рис.2.2, де точка *A* – початок відліку деякої нерухомої системи координат $A\xi\eta\varsigma$. Підставимо вирази для швидкостей точок у формулу для кінетичного момента (2.15):

$$\vec K_A = \sum_{i=1}^{n} \vec r_i \times m_i \vec{\mathrm v}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec r_O + \vec\rho_i) \times m_i (\vec{\mathrm v}_O + \vec{\mathrm v}_{ir}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec r_O \times m_i (\vec{\mathrm v}_O + \vec{\mathrm v}_{ir}) + \sum_{i=1}^{n} \vec\rho_i \times m_i \vec{\mathrm v}_O + \sum_{i=1}^{n} \vec\rho_i \times m_i \vec{\mathrm v}_{ir} .$$

Перша сума отриманого виразу подається так

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_O \times m_i(\vec{v}_O + \vec{v}_{ir}) = \vec{r}_O \times \vec{Q}.$$

Друга сума, з урахуванням формули (1.1), перетворюється до вигляду:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_O = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho}_i \times \vec{v}_O = (\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho}_i) \times \vec{v}_O = m\vec{\rho}_C \times \vec{v}_O,$$

де $\vec{\rho}_C = \overline{OC}$ - радіус-вектор центра мас відносно полюса *O*.

Третя сума є кінетичним моментом системи точок у відносному русі навколо полюса *O*:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_{ir} = \vec{K}_O^r.$$

Таким чином, остаточно отримаємо

$$\vec{K}_A = \vec{r}_O \times \vec{Q} + \overline{OC} \times m\vec{v}_O + \vec{K}_O^r, \tag{2.18}$$

тобто (**теорема 2**): *Кінетичний момент тіла відносно нерухомого центра A дорівнює моменту кількості руху системи точок (тіла), прикладеному в полюсі O, відносно центра A* ($\vec{r}_O \times \vec{Q}$), *складеному з векторним добутком* $\vec{\rho}_C \times m\vec{v}_O$, *а також з моментом кількості руху системи точок (тіла) у відносному русі навколо полюса O.*

Якщо початок *O* рухомої системи координат збігається з центром мас (відповідно $\vec{\rho}_C = \overline{OC} = 0$), то *кінетичний момент системи точок (твердого тіла) відносно нерухомого центра A дорівнює сумі момента кількості руху системи точок (тіла) відносно центра A* ($\vec{r}_C \times \vec{Q}$) *у припущенні, що вся маса тіла зосереджена в центрі мас і момента кількості руху системи точок (тіла) в обертальному русі навколо центра мас C* $\vec{K}_C^r$:

$$\vec{K}_A = \vec{r}_C \times \vec{Q} + \vec{K}_C^r. \tag{2.19}$$

Визначимо більш детально, чому дорівнює останній доданок формули (2.18). Вважаємо, що точки системи здійснюють обертальний рух відносно полюса *O* з кутовою швидкістю $\vec{\omega} = \vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z$, де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - орти рухомої системи координат *Oxyz*. Радіуси-вектори точок у рухомій системі координат *Oxyz* представимо так $\vec{\rho}_i = \vec{i}x_i + \vec{j}y_i + \vec{k}z_i$. Тоді кінетичний момент системи точок у відносному русі навколо полюса *O* запишеться у вигляді

$$\vec{K}_O^r = \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_{ir} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{\omega}\vec{\rho}_i^2 - \vec{\rho}_i(\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}_i)). \tag{2.20}$$

Останнє перетворення виконано з урахуванням відомої формули векторної алгебри $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Після підстановки координатної форми векторів отримаємо

$$\vec{K}_O^r=\vec{i}K_{Ox}^r+\vec{j}K_{Oy}^r+\vec{k}K_{Oz}^r, \tag{2.21}$$

де

$$\begin{aligned} K_{Ox}^r &= I_x\,\omega_x - I_{xy}\,\omega_y - I_{xz}\,\omega_z, \\ K_{Oy}^r &= -I_{yx}\,\omega_x - I_y\,\omega_y - I_{yz}\,\omega_z, \\ K_{Oz}^r &= -I_{zx}\,\omega_x - I_{zy}\,\omega_y + I_z\,\omega_z. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Коефіцієнти при кутових швидкостях у виразах (2.22)

$$\begin{cases} I_x=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i(y_i^2+z_i^2), \\ I_y=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i(z_i^2+x_i^2), \\ I_z=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i^2+y_i^2) \end{cases} \tag{2.23}$$

називаються осьовими моментами інерції системи точок. Коефіцієнти

$$\begin{cases} I_{xy}=I_{yx}=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i y_i, \\ I_{xz}=I_{zx}=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i z_i, \\ I_{yz}=I_{zy}=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i z_i \end{cases} \tag{2.24}$$

називаються відцентровими моментами інерції системи точок.

Осьові та відцентрові моменти інерції характеризують розподіл мас системи точок при її обертальному русі.

Осі системи координат відносно яких відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю називаються *головними осями інерції системи точок*. Будь-яка система координат осі якої паралельні до головних осей інерції теж має *головні осі інерції*. Осі системи координат, початок відліку яких збігається з центром мас системи точок, називаються *центральними осями інерції*.

6. Моменти інерції твердого тіла.

Моменти інерції твердого тіла можна визначити за формулами (2.23) та (2.24), представляючи тіло як сукупність елементарних мас Δm_i, $i=1,2,...,n$, які неперервно заповнюють об'єм тіла. Зрозуміло, що точність обчислення моментів інерції у цьому випадку зростатиме при зростанні

кількості елементарних мас і для достатньо великих n значення моментів інерції досягне певного значення, яке практично не буде змінюватись при зміні величини n. Таким чином, для визначення значень моментів інерції потрібно у формули (2.23) та (2.24) замість мас m_i підставити Δm_i і перейти до границі при $n \to \infty$. Результатом визначення границь будуть інтеграли, які поширюються на всю масу тіла:

$$I_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2)dm, \qquad I_y = \int_{(m)} (x^2 + z^2)dm, \qquad I_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2)dm. \quad (2.25)$$

$$I_{xy} = \int_{(m)} xydm, \qquad I_{yz} = \int_{(m)} yzdm, \qquad I_{xz} = \int_{(m)} xzdm. \quad (2.26)$$

Згідно наведених формул, одиницею вимірювання момента інерції тіла в системі СІ є 1 $\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

При визначені моментів інерції тіл складної форми часто використовують поняття радіуса інерції. *Радіусом інерції* твердого тіла називається відстань від осі до точки, в якій зосереджена маса усього тіла, причому момент інерції точки відносно даної осі дорівнює моменту інерції тіла:

$$\rho = \sqrt{\frac{I_z}{m}}. \quad (2.27)$$

Радіус інерції вимірюється в метрах.

Визначимо моменти інерції однорідного тонкого стержня, однорідного циліндра та однорідної сфери.

Момент інерції однорідного тонкого стержня.

Припускаємо, що маса стержня m, довжина стержня l, площа поперечного перерізу постійна і дорівнює σ. Вважаємо, що найбільший лінійний розмір поперечного перерізу стержня у порівнянні з його довжиною є величиною малою. Визначимо момент інерції стержня відносно осі Oz, яка перпендикулярна до осі стержня і проходить через його кінець O (рис.2.3). Виділимо елемент dx стержня на відстані x від осі Oz. Маса цього елемента $dm = \sigma\gamma dx$, де γ – густина матеріалу стержня. Тоді з формул (2.25) отримаємо

$$I_Z = \int_{(m)} x^2 dm = \int_0^l \gamma\sigma x^2 dx = \gamma\sigma \int_0^l x^2 dx = \gamma\sigma \frac{x^3}{3}\bigg|_0^l = \frac{\gamma\sigma x^3}{3}$$

або

$$I_Z = \frac{ml^2}{3}, \quad (2.28)$$

тобто момент інерції стержня дорівнює третині добутку маси на квадрат довжини стрижня.

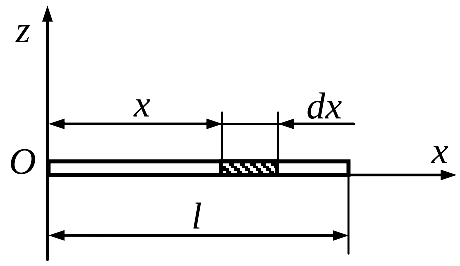


Рис.2.3.

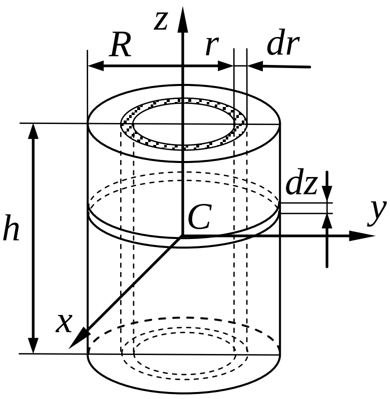


Рис.2.4.

Моменти інерції однорідного циліндра.

Нехай є циліндр (рис.2.4) масою *m*, висотою *h*, радіусом основи *R* та густиною матеріалу γ. Визначимо момент інерції відносно повздовжньої центральної осі *Cz*, яка проходить через центр мас циліндра *C*. Скористаємось формулою

$$I_Z = \int\limits_{(m)} (x^2 + y^2)dm = \int\limits_{(m)} r^2 dm. \tag{2.29}$$

За елементарний об'єм оберемо циліндричну трубку висотою *h*, внутрішнім радіусом *r* та товщиною стінки *dr*. Маса цього елементарного об'єму:

$$dm = \gamma dV = \gamma 2\pi r \;\; dr \;\; h. \tag{2.30}$$

Підставимо (2.30) у (2.29)

$$I_z = \gamma 2\pi h \int\limits_0^r r^3 dr = 2\pi\gamma h R^2 \frac{R^2}{4} \tag{2.31}$$

та врахуємо, що $2\pi\gamma h R^2 = m$:

$$I_z = \frac{mR^2}{2}. \tag{2.32}$$

Таким чином, момент інерції циліндра відносно повздовжньої центральної осі дорівнює половині добутку маси циліндра на квадрат радіуса основи.

Визначимо момент інерції циліндра відносно центральної поперечної осі. Вочевидь, що $I_x = I_y$. Тоді, порівнюючи праву частину перших двох формул (2.25), нескладно зрозуміти, що

$$\int\limits_{(m)} y^2 dm = \int\limits_{(m)} x^2 dm = \frac{1}{2} \int\limits_{(m)} (x^2 + y^2) dm,$$

причому

$$\frac{1}{2} \int\limits_{(m)} (x^2 + y^2) dm = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{4} mR^2. \tag{2.33}$$

Знайдемо $\int\limits_{(m)} z^2 dm$. Тут елементом маси dm буде циліндр висотою dz, який знаходиться на відстані z від площини Cxy. Відповідна маса дорівнює $dm = \gamma\pi R^2 dz$. Тоді

$$\int\limits_{(m)} z^2 dm = \gamma\pi R^2 \int\limits_{-0,5h}^{0,5h} z^2 dz = \gamma\pi R^2 \frac{h^2}{12} = m\frac{h^2}{12}. \qquad (2.34)$$

Підставимо значення інтегралів (2.33) та (2.34) у перші два вирази (2.25), отримаємо:

$$I_x = I_y = \frac{m}{4}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right). \qquad (2.35)$$

Момент інерції однорідної кулі.

Нехай є куля масою m, радіусом R та густиною матеріалу γ. Визначимо момент інерції відносно будь-якої центральної осі. Врахуємо, що $I_x = I_y = I_z$. Складемо формули (2.25)

$$I_x + I_y + I_z = 2\int\limits_{(m)} (x^2 + y^2 + z^2)dm = 2I_C,$$

де I_C - момент інерції кулі відносно точки C. Зрозуміло, що

$$I_C = \frac{1}{2}\ \ I_x + I_y + I_z\ \ = \frac{3}{2}I_x = \frac{3}{2}I_y = \frac{3}{2}I_z. \qquad (2.36)$$

Знайдемо момент інерції кулі відносно точки C

$$I_C = \int\limits_{(m)} (x^2 + y^2 + z^2)dm = \int\limits_{(m)} r^2 dm,$$

та врахуємо, що елемент масою dm розташований між двома сферичними поверхнями радіусами r та $r + dr$. Маса елемента дорівнює $dm = \gamma 4\pi r^2 dr$. Тоді отримаємо

$$I_C = \gamma 4\pi \int\limits_0^R r^4 dr = \gamma 4\pi \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5}mR^2, \qquad (2.37)$$

де $m = \gamma \frac{4}{3}\pi R^3$ - маса кулі. На підставі (2.37) остаточно маємо

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mR^2. \quad (2.38)$$

Контрольні запитання.

1. Чому дорівнює похідна за часом від момента кількості руху матеріальної точки?

2. Як визначається момент кількості руху матеріальної точки, якщо відповідні вектори задано через їх проекції?
3. Що таке математичний маятник і яке динамічне рівняння описує його рух?
4. Який зв'язок між кінетичним моментом системи точок відносно різних полюсів? .
5. Сформулюйте теорему про кінетичний моментом системи точок у складному русі.
6. Сформулюйте теорему про кінетичний моментом системи точок у складному русі, якщо полюс збігається з центром мас.
7. Запишить осьові та відцентрові моменти інерції системи точок.
8. Чому дорівнюють моменти інерції системи точок, якщо осі системи координат - головні осі інерції?
9. Запишить кінетичний момент системи точок у відносному русі у вигляді вектора-стовпчика через вектор-стовпчик проекцій кутової швидкості.
10. Як буде виглядати матриця, складена з моментів інерції, якщо осі системи координат є головними?

Лекція 3

7. Теореми про зміну кінетичного моменту системи матеріальних точок.

Теорема. *Похідна за часом від кінетичного моменту системи точок відносно нерухомого полюса A дорівнює головному моменту зовнішніх сил, прикладених до точок системи, відносно цього ж полюса.*

$$\frac{d}{dt}\vec{K}_A = \vec{M}_A^e. \qquad (3.1)$$

Доведення. Нехай є рухома система точок $M_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ до якої прикладається система зовнішніх $\vec{F}_i^E\ {}_{i=1}^{n}$ та внутрішніх $\vec{F}_i^I\ {}_{i=1}^{n}$ сил. Позначимо $\overrightarrow{AM_i} = \vec{r}_i$ радіуси-вектори точок відносно нерухомого полюса A (нерухомої системи координат). За теоремою (2.11) можна записати

$$\frac{d}{dt}\vec{k}_{iA} = \vec{M}_A(\vec{F}_i^E) + \vec{M}_A(\vec{F}_i^I),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Просумуємо ліві та праві частини цих виразів:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\vec{k}_{iA} = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_A(\vec{F}_i^E) + \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_A(\vec{F}_i^I)\,. \qquad (3.2)$$

Оскільки сума похідних дорівнює похідній від суми, у лівій частині (3.2) отримаємо похідну від кінетичного момента системи точок відносно нерухомого полюса A:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\vec{k}_{iA} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{k}_{iA} = \frac{d}{dt}\vec{K}_A.$$

Перший доданок правої частини (3.2) дорівнює головному моменту зовнішніх сил відносно полюса A:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_A(\vec{F}_i^E) = \vec{M}_A^e.$$

Головний момент внутрішніх сил, які утворюють систему сил дії та протидії ($\vec{F}_i^I = -\vec{F}_{i+1}^I, i = 1, 2, \ldots, n-1$), дорівнює нулю

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i^I) = 0 .$$

Таким чином, твердження теореми доведено.

В проекціях на осі нерухомої системи координат $A\xi\eta\varsigma$ вираз (3.1) набуває вигляду:

$$\frac{d}{dt}K_{A\xi} = M_{\xi}^{e}, \qquad \frac{d}{dt}K_{A\eta} = M_{\eta}^{e}, \qquad \frac{d}{dt}K_{A\zeta} = M_{\zeta}^{e}. \tag{3.3}$$

Теорема (про зміну кінетичного моменту системи точок відносно центра мас): *похідна за часом від кінетичного моменту системи точок відносно центра мас С дорівнює головному моменту зовнішніх сил, прикладених до точок системи, відносно центра мас*

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{M}_C^e . \tag{3.4}$$

Доведення. Для доведення теореми скористаємось теоремою про зміну кінетичного моменту системи відносно нерухомого центра *A*

$$\frac{d}{dt}\vec{K}_A = \vec{M}_A^e \tag{3.5}$$

та запишемо кінетичний момент відносно полюса *A* за формулою (2.16)

$$\vec{K}_A = \vec{K}_C + \overline{AC} \times \vec{Q} .$$

Відповідно, головний момент зовнішніх сил представимо так

$$\vec{M}_A^e = \vec{M}_C^e + \overline{AC} \times \vec{F}^e .$$

Підставимо дві останні формули у (3.5):

$$\frac{d}{dt}\vec{K}_C + \frac{d\overline{AC}}{dt} \times \vec{Q} + \overline{AC} \times \frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{M}_C^e + \overline{AC} \times \vec{F}^e . \tag{3.6}$$

Другий доданок лівої частини з урахуванням $\overline{AC} = \vec{r}_C$, $\vec{Q} = m\vec{\mathrm{v}}_C$ дорівнює нулю

$$\frac{d\overline{AC}}{dt} \times \vec{Q} = \frac{d\vec{r}_C}{dt} \times m\vec{\mathrm{v}}_C = \vec{\mathrm{v}}_C \times m\vec{\mathrm{v}}_C = 0 .$$

У третьому доданку лівої частини можна скористатись теоремою про зміну головного вектора кількостей руху системи точок ($\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e$) та записати (3.6) у вигляді

$$\frac{d}{dt}\vec{K}_C + \overline{AC} \times \vec{F}^e = \vec{M}_C^e + \overline{AC} \times \vec{F}^e .$$

Права та ліва частина останнього виразу утримує однакові доданки. Після спрощення отримаємо

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{M}_C^e .$$

Теорема доведена.

Існує також інтегральна форма теореми про зміну кінетичного моменту системи точок відносно нерухомого полюса A.

Теорема про зміну кінетичного моменту в інтегральній формі (***теорема моменту імпульсів зовнішніх сил***): *приріст кінетичного моменту матеріальної системи відносно нерухомого центра А за деякий проміжок часу* $[t_0, t]$ *дорівнює головному моменту імпульсів* $\vec{L}_A^e$ *зовнішніх сил, прикладених до точок системи, за той самий проміжок часу*

$$\vec{K}_A(t) - \vec{K}_A(t_0) = \vec{L}_A^e . \qquad (3.7)$$

Доведення. Помножимо ліву та праву частину формули (3.1) на dt та про інтегруємо на інтервалі часу t_0, t :

$$\int_{t_0}^{t} d\vec{K}_A = \int_{t_0}^{t} \vec{M}_A^e dt .$$

Ліва частина цього виразу визначається так $\int_{t_0}^{t} d\vec{K}_A = \vec{K}_A(t) - \vec{K}_A(t_0)$.

Права частина $\int_{t_0}^{t} \vec{M}_A^e dt = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e dt = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times d\vec{S}_i^e = \vec{L}_A^e$, де $\vec{F}_i^e dt = d\vec{S}_i^e$ - елементарний імпульс зовнішньої сили, $\vec{r}_i \times d\vec{S}_i^e$ - момент елементарного імпульса зовнішньої сили, $\vec{L}_A^e$ - головний момент імпульсів зовнішніх сил відносно центра A. Отже, теорема доведена.

Наслідки до теорем:

1) Як випливає з виразів (3.1) та (3.7) одними лише внутрішніми силами не можна змінити механічний стан системи точок. Це можна зробити опосередковано через зовнішні сили.

2) Якщо головний момент системи зовнішніх сил відвідносно деякої нерухомої точки A дорівнює нулю $\vec{M}_A^e = 0$, то кінетичний момент системи точок задовольняє умову $\frac{d\vec{K}_A}{dt} = 0$, тобто є сталою величиною у будь-який момент часу і дорівнює початковому значенню: $\vec{K}_A = \vec{K}_{A0} = \overrightarrow{\mathrm{const}}$. У цьому випадку кажуть, що має місце *закон збереження* кінетичного моменту системи точок.

3) Якщо одна з проекцій головного момента зовнішніх сил відносно однієї з координатних осей дорівнює нулю $M_x^e = 0$, то відповідна проекція кінетичного момента системи точок відносно даної осі буде сталою $K_x = K_{0x} = \text{const}$. У цьому випадку кажуть, що має місце *закон збереження* кінетичного момента системи точок відносно осі *Ox*.

Теорема Резаля: *швидкість* $\vec{\mathrm{v}}_K$ *кінця вектора кінетичного моменту системи відносно нерухомої точки O дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил відносно тієї самої точки*

$$\vec{\mathrm{v}}_K = \frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e.$$

8. Диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

Припустимо, деяке тверде тіло може обертатись навколо нерухомої осі *AB* (рис.3.1). До тіла прикладається система активних сил $\vec{F}_i \,{}_{i=1}^{n}$. Жорстко зв'яжемо з тілом систему координат *Axyz*, вісь *Az* напрямимо вздовж осі обертання. Відкинемо опори та замінимо їх відповідними реакціями $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A + \vec{Z}_A$ та $\vec{R}_B = \vec{X}_B + \vec{Y}_B + \vec{Z}_B$.

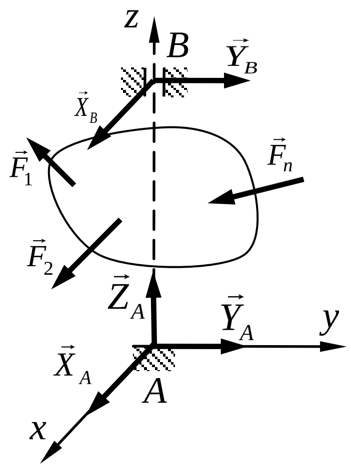


Рис.3.1.

Для складання рівняння скористаємось теоремою про зміну кінетичного моменту системи точок відносно центра *A*

$$\frac{d\vec{K}_A}{dt} = \vec{M}_A^e.$$

Оскільки моменти інерції тіла в рухомій системі координат не змінюються, зручніше аналізувати рух тіла в цій системі координат. Тоді

потрібно перейти від абсолютної похідної $\frac{d\vec{K}_A}{dt}$ від вектора кінетичного моменту до відносної $\frac{d'\vec{K}_A}{dt}$, яка визначається у рухомій системі координат:

$$\frac{d'\vec{K}_A}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_A = \vec{M}_A^e. \qquad (3.8)$$

У проекціях на осі (3.8) запишеться так

$$\begin{aligned} \frac{d'K_{Ax}}{dt} + \omega_y K_{Az} - \omega_z K_{Ay} &= M_{Ax}^e, \\ \frac{d'K_{Ay}}{dt} + \omega_z K_{Ax} - \omega_x K_{Az} &= M_{Ay}^e, \\ \frac{d'K_{Az}}{dt} + \omega_x K_{Ay} - \omega_y K_{Ax} &= M_{Az}^e. \end{aligned} \qquad (3.9)$$

Вектор кутової швидкості у нашому випадку має проекції тільки на вісь Az $\vec{\omega} = \vec{k}\omega_z = \vec{k}\omega$, тоді

$$\frac{d'K_{Ax}}{dt} - \omega_z K_{Ay} = M_{Ax}^e, \quad \frac{d'K_{Ay}}{dt} + \omega_z K_{Ax} = M_{Ay}^e, \quad \frac{d'K_{Az}}{dt} = M_{Az}^e.$$

Проекції кінетичного момента на підставі (2.22) мають вигляд

$$K_{Ax} = -I_{xz}\omega, \qquad K_{Ay} = -I_{yz}\omega, \qquad K_{Az} = I_z\omega.$$

Проекції моментів зовнішніх сил та реакцій в’язей

$$\begin{aligned} M_x^e &= \sum_i (M_x(\vec{F}_i)) + \sum_j M_x(\vec{R}_j), \\ M_y^e &= \sum_i (M_y(\vec{F}_i)) + \sum_j M_y(\vec{R}_j), \\ M_z^e &= \sum_i (M_z(\vec{F}_i)). \end{aligned}$$

Як бачимо у третьому виразі відсутні реакції невідомих в’язей. Внаслідок цього для визначення закону обертального руху тіла потрібно скористатись проекцією виразу теореми на вісь Az:

$$\frac{dK_{Az}}{dt} = M_{Az}^e,$$

яка дозволяє записати динамічне (диференціальне) рівняння обертального руху тіла у формі

$$\frac{d}{dt} I_z \omega = \sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i)\,, \qquad (3.10)$$

або

$$I_z \dot{\omega} = \sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i)\,. \qquad (3.11)$$

Для визначення закону обертального руху може бути використана третя форма запису

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i)\,. \qquad (3.12)$$

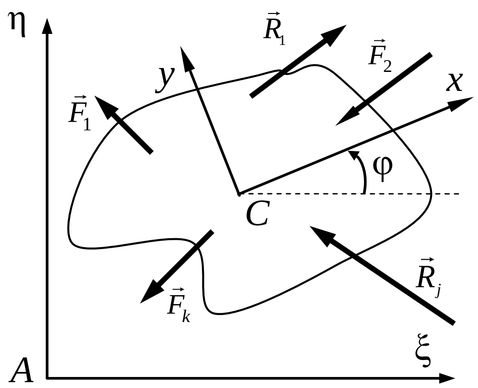
Для розв’язання відповідних задач Коші потрібно диференціальні рівняння доповнити початковими умовами:

$$\varphi(0) = \varphi_0\,,\ \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0\,.$$

9. Диференціальні рівняння плоскопаралельного руху твердого тіла.

Припустимо, що тверде тіло під дією системи активних сил $\vec{F}_l\ {}_{l=1}^{k}$ здійснює плоскопаралельний рух у нерухомій площині $A\xi\eta$. Позначимо через C центр мас тіла та жорстко зв’яжемо з ним рухому систему координат Cxy (рис.3.2).

Рис.3.2.



Для складання динамічних рівнянь руху скористаємось теоремою про рух центра мас та теоремою про зміну кінетичного моменту системи точок.

Відкинемо в’язі та замінимо їх дію відповідними реакціями $\vec{R}_j\ {}_{j=1}^{m}$.

Тоді сили $\vec{F}_l, \vec{R}_j\ = \vec{F}_i^{E}$ утворюють систему зовнішніх сил.

Проектування співвідношення (1.3) на осі нерухомої системи координат дозволяє записати рівняння для визначення закону руху центра мас тіла

$$m\ddot{\xi}_C = \sum_{i=1}^{n} F_{i\xi}^E , \qquad m\ddot{\eta}_C = \sum_{i=1}^{n} F_{i\eta}^E . \tag{3.13}$$

Для визначення закону обертального руху, тобто зміни кута повороту тіла, скористаємось теоремою про зміну кінетичного момента тіла записаною у рухомій системі координат *Cxy*

$$\frac{d'\vec{K}_C}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_C = \vec{M}_C^e . \tag{3.14}$$

Вектор кутової швидкості спрямований перпендикулярно до площини *Cxy* $\vec{\omega} = \vec{k}\omega_z = \vec{k}\omega$. Тоді отримаємо

$$\frac{d'K_{Cx}}{dt} - \omega_z K_{Cy} = M_{Cx}^e , \qquad \frac{d'K_{Cy}}{dt} + \omega_z K_{Cx} = M_{Cy}^e , \qquad \frac{d'K_{Cz}}{dt} = M_{Cz}^e . \tag{3.15}$$

Досліджуючи плоскопаралельний рух тіла у площині *Cxy* можна вважати, що для усіх точок тіла координата z=0, тобто відцентрові моменти $I_{xz} = I_{zx} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i = 0$, $I_{yz} = I_{zy} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i = 0$. Отже

$$K_{Cx} = -I_{xz}\omega = 0, \qquad K_{Cy} = -I_{yz}\omega = 0 .$$

Таким чином, занон обертального руху можна визначити з останього рівняння (3.15), яке записується у вигляді

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i) . \tag{3.16}$$

Сукупність рівнянь (3.13) та (3.16) складають систему диференціальних рівнянь плоскопаралельного руху твердого тіла. Цю систему рівнянь потрібно доповнити початковими умовами:

$$\xi_C(t_0) = \xi_{C0},\ \eta_C(t_0) = \eta_{C0},\ \dot{\xi}_C(t_0) = \dot{\xi}_{C0},\ \dot{\eta}_C(t_0) = \dot{\eta}_{C0},\ \varphi\ t_0\ = \varphi_0,\ \dot{\varphi}\ t_0\ = \dot{\varphi}_0 .$$

Контрольні запитання.

1. Яка система сил приводить до зміни кінетичного момента системи точок відносно нерухомого полюса *A*?

2. Сформулюйте теорему про зміну кінетичного моменту системи точок відносно центра мас.
3. Сформулюйте теорему про зміну кінетичного моменту системи точок в інтегральній формі.
4. Запишить момент елементарного імпульсу сили та момент повного імпульсу сили відносно центра A.
5. Як формулюються наслідки до теореми про зміну кінетичного моменту системи точок.
6. При яких умовах виконується .закон збереження кінетичного моменту системи точок?
7. У якому вигляді можна записати динамічне (диференціальне) рівняння обертального руху тіла?
8. У якій системі координат записується диференціальне рівняння обертального руху тіла і чому?
9. Запишить диференціальні рівняння плоскопаралельного руху тіла та відповідні початкові умови.
10. Які теореми використовуються для запису диференціальних рівнянь плоскопаралельного руху тіла?

Тема 5.2. Теореми про зміну кінетичної енергії

Лекція 4

1. Теорема про зміну кінетичної енергії точки.

Кінетичною енергією матеріальної точки називається фізична величина, яка дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:

$$T = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}. \tag{4.1}$$

Кінетична енергія – це друга або скалярна міра механічного руху. Визначається кінетична енергія точки відносно абсолютної (нерухомої) системи координат.

Теорема: *Зміна кінетичної енергії точки на деякій ділянці її траєкторії дорівнює повній роботі сили, прикладеної до точки на цій же ділянці траєкторії.*

Доведення. Скористаємось основним законом динаміки точки $m\vec{a} = \vec{F}$, який запишемо так

$$m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \vec{F}. \tag{4.2}$$

В свою чергу, домножимо ліву та праву частину (4.2), відповідно, на ліву та праву частину тотожності

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Отримуємо рівняння:

$$m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt},$$

яке домножимо на dt

$$m\vec{v}d\vec{v} = \vec{F}d\vec{r}. \tag{4.3}$$

Ліву частину (4.3) подамо так:

$$m\vec{v}d\vec{v} = md\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dT. \tag{4.4}$$

Праву частину (4.3) позначимо:

$$\vec{F}d\vec{r} = d'A, \tag{4.5}$$

де $d'A$ - називається елементарною роботою сили. Знак штрих біля диференціала d' означає, що скалярний добуток вектора сили та малого переміщення $d\vec{r}$ не завжди записується у вигляді повного диференціала, тобто прийняте позначення певною мірою є умовним.

З урахуванням введених позначень (4.4) та (4.5), на підставі (4.3) отримаємо **теорему** про зміну кінетичної енергії точки в диференціальній формі

$$d\ T = d'A, \tag{4.6}$$

яка формулюється так: *приріст кінетичної енергії точки дорівнює елементарній роботі сили, прикладеної до точки*.

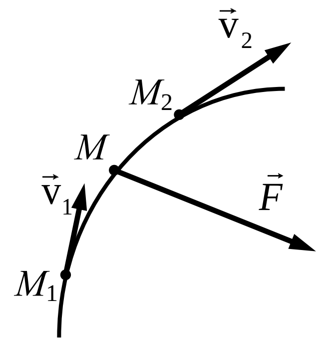


Рис.4.1.

При переході матеріальної точки з положення M_1 у положення M_2 її швидкість змінюється від $\vec{v}_1$ до $\vec{v}_2$ (рис.4.1). Тоді інтегрування виразу (4.6) вздовж дуги M_1M_2, яку проходить точка прикладання сили $\vec{F}$, дозволяє записати

$$\int_{M_1}^{M_2} dT = \int_{M_1}^{M_2} d'A. \tag{4.7}$$

Ліва частина цього виразу дорівнює

$$\int_{M_1}^{M_2} dT = T_2 - T_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Права частина позначається так

$$A = \int_{M_1}^{M_2} d'A \qquad (4.8)$$

та називається *повною роботою сили на скінченному переміщені* або *повна робота сили*.

Таким чином, остаточно маємо

$$T_2 - T_1 = A, \qquad (4.9)$$

тобто теорема доведена.

2. Робота сили.

Елементарна робота сили – це фізична величина, яка за формулою (4.5) дорівнює скалярному добутку вектора сили та елементарного переміщення точки прикладання сили:

$$d'A = \vec{F} d\vec{r} \, .$$

Робота сили – це фізична величина, яка характеризує перетворення кінетичної енергії в інші форми енергії з кількісного боку та дорівнює

$$A = \int_{M_1}^{M_2} d'A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} \, , \qquad (4.10)$$

де $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ - радіуси-вектори точки прикладання сили (рис.4.2) у положенні M_1 та M_2.

Формула (4.10) визначає роботу сили при векторному способі задання руху точки (задається функція $\vec{r} = \vec{r}(t)$).

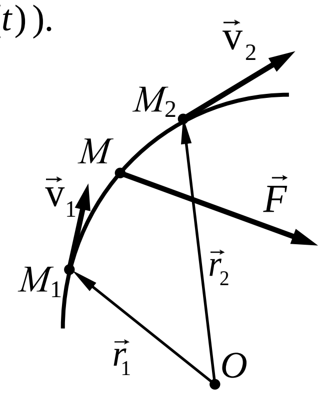


Рис.4.2.

У випадку координатного способу задання руху точки ($x = x(t)$, $y = y(t)$. $z = z(t)$) вектор сили у розкладі за базисними векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ системи координат *Oxyz* записується так

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z, \qquad (4.11)$$

а радіус-вектор точки її прикладання

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z \, .$$

Беремо диференціал від останнього виразу

$$d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz,$$

та підставимо його разом з (4.11) у (4.10)

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \tag{4.12}$$

Ця формула визначає роботу сили при *координатному способі* задання руху точки.

Підстановка у (4.12) виразів $dx = \dot{x}dt$, $dy = \dot{y}dt$. $dz = \dot{z}dt$ дозволяє перейти від криволінійного інтегралу до інтегралу визначеного

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z})dt. \tag{4.13}$$

При натуральному способі задання руху точки її вектор швидкості можна подати так

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau},$$

де $\vec{\tau}$ - орт дотичної до траєкторії точки. Ліва частина останньої формули дорівнює

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

що дозволяє записати

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}.$$

Домножимо праву та ліву частину останнього виразу на dt, одержимо

$$d\vec{r} = ds\vec{\tau},$$

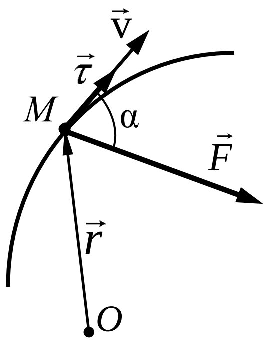
і підставимо у (4.5) та (4.10)

$$d'A = \vec{F}d\vec{r} = \vec{F}\vec{\tau}ds,$$

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F\cos(\vec{F},\hat{\vec{\tau}})ds, \tag{4.14}$$

де $\vec{F}\vec{\tau} = F\tau\cos(\vec{F},\hat{\vec{\tau}}) = F\tau\cos\alpha$ (рис.4.3), s_1 та s_2 - значення дугової координати, які відповідають положенням точки M_1 та M_2. Таким чином, (4.14) дозволяє обчислити роботу сили при *натуральному способі* задання руху точки.

Рис.4.3.



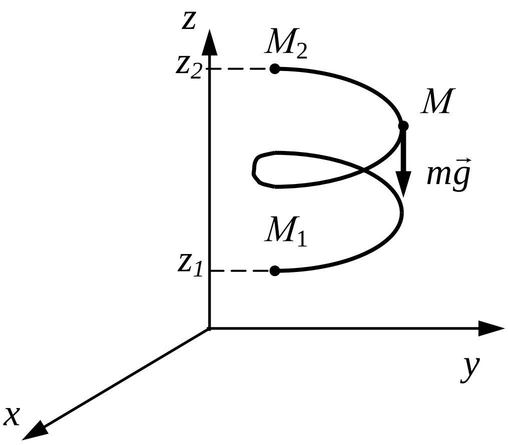
При умові, що вектор сили та кут $\alpha = \widehat{\vec{F},\vec{\tau}}$ не залежать від дугової координати або є сталими, отримаємо

$$A = F(s_2 - s_1)\cos(\widehat{\vec{F},\vec{\tau}})\,. \tag{4.15}$$

3. Визначення роботи сили тяжіння.

Визначимо роботу сили тяжіння, прикладеної до точки масою m. Вважаємо, що точка здійснює рух з положення $M_1(x_1,y_1,z_1)$ в положення $M_1(x_1,y_1,z_1)$ (рис.4.4), які задаються в системі координат $Oxyz$.

Рис.4.4.



За формулою (4.12), з урахуванням $\vec{F} = m\vec{g} = \ 0;0;-mg$, отримаємо

$$A(m\vec{g}) = \int_{z_1}^{z_2} -mgdz = -mg(z_2 - z_1)\,. \tag{4.16}$$

З формули можна зробити наступні висновки:

Висновок 1: Робота сили тяжіння не залежить від форми траєкторії точки, а залежить тільки від початкового та кінцевого положення точки.

Висновок 2: Якщо кінцеве положення вище початкового, то робота сили тяжіння від’ємна. Робота сили тяжіння додатна, якщо кінцеве положення нижче початкового.

Висновок 3: Робота сили тяжіння дорівнює нулю, якщо траєкторія точки –замкнена лінія.

В якості робочої формули визначення роботи сили тяжіння можна використати вираз:

$$A(m\vec{g}) = \pm mgh\,, \tag{4.17}$$

де h - переміщення точки прикладання сили по висоті, знак „+” обирається при переміщенні точки вниз; знак „-” – при переміщенні точки вгору.

4. Робота центральної сили.

Центральною силою називається сила, лінія дії якої під час руху матеріальної точки проходить через одну й ту ж точку простору. До центральних сил відносяться гравітаційні сили, сили кулонівської взаємодії, сила пружності шарнірно закріпленої пружини.

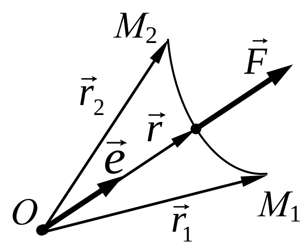


Рис.4.5.

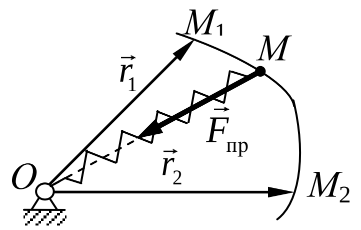


Рис.4.6.

Обчислимо роботу A центральної сили $\vec{F}$, представляючи її так

$$\vec{F} = F\vec{e} = F(r)\vec{e} = F(r)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},$$

де $\vec{e}$ - одиничний вектор, який визначає напрям вектора сили, $\vec{r}$ - радіус-вектор точки прикладання сили (рис.4.5). Тоді за формулою (4.10), приймаючи до уваги перетворення $\vec{r}d\vec{r} = d\left(\frac{\vec{r}^2}{2}\right) = d\left(\frac{r^2}{2}\right) = rdr$, отримаємо

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} F\vec{e}d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} F\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F\frac{r}{r}dr = \int_{r_1}^{r_2} Fdr.$$

Отже, враховуючи, що модуль центральної сили залежить тільки від відстані r між точкою прикладання сили та полюсом O, одержимо:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr. \qquad (4.18)$$

З останнього виразу бачимо, що у випадку центральної сили її робота не залежить від форми траєкторії матеріальної точки, на яку діє центральна сила, а залежить тільки від початкового і кінцевого положення точки.

Визначимо *роботу сили пружності*. Нехай в полюсі O розташований нерухомий шарнір (рис.4.6). Величину сили пружності запишемо так

$$F = -c\Delta r, \qquad (4.19)$$

де c – коефіцієнт пружності пружини; $\Delta r = r - r_0$ - подовження пружини - різниця між поточною довжиною пружини r=*OM* і довжиною пружини в ненавантаженому стані r_0:

$$F = -c(r - r_0)\,. \tag{4.20}$$

Підставимо (4.20) у (4.18), отримаємо

$$A = \int_{r_1}^{r_2} -c(r - r_0)dr = -\frac{c}{2}\ \ (r_2 - r_0)^2 - (r_1 - r_0)^2 \ \ ,$$

або

$$A(\vec{F}_{\text{пр}}) = \frac{c}{2}(\Delta r_1^2 - \Delta r_2^2)\,. \tag{4.21}$$

Тут $\Delta r_1 = r_1 - r_0$ та $\Delta r_2 = r_2 - r_0$ - початкове та кінцеве подовження пружини.

5. Робота довільної системи сил.

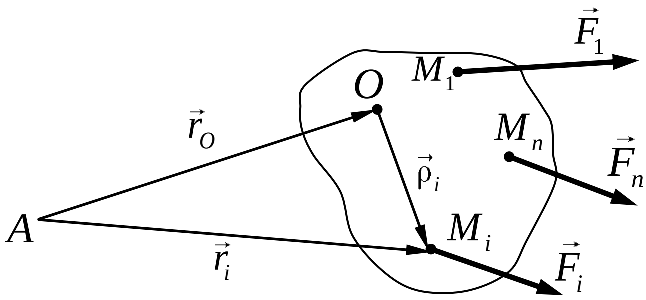
Теорема. *Елементарна робота довільної системи сил, прикладених до твердого тіла дорівнює сумі двох доданків: роботі головного вектора системи сил на елементарному переміщенні довільно вибраного полюса та роботі головного моменту системи сил на елементарному кутовому переміщенні навколо осі, яка проходить через вибраний полюс*

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r}_O + \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \overrightarrow{d\varphi}, \tag{4.22}$$

де $\vec{F}$ – головний вектор системи сил, $\vec{M}_O$ – головний момент системи сил, точка O – довільний полюс.

Доведення. Припустимо, що до твердого тіла (рис.4.7) прикладається система сил $\vec{F}_i\ _{i=1}^{n}$.

Рис.4.7.



Елементарну роботу вказаної системи сил запишемо так

$$d'A = \sum_{i=1}^{n} d'A(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i d\vec{r}_i\,, \tag{4.23}$$

де $d\vec{r}_i$ - елементарне переміщення точки M_i прикладання сили $\vec{F}_i$. Визначимо це елементарне переміщення.

Нехай точка A – нерухомий полюс. Позначимо $\vec{r}_O = \overrightarrow{AO}$, $\vec{r}_i = \overrightarrow{AM_i}$, $\vec{\rho}_i = \overrightarrow{OM_i}$,

$$\vec{r}_i = \vec{r}_O + \vec{\rho}_i. \tag{4.24}$$

Як відомо, будь-який рух вільного твердого тіла можна подати як сукупність двох рухів: поступального руху тіла разом з деяким полюсом O і обертального руху навколо миттєвої осі, яка проходить через полюс O. Тоді швидкість точки M_i буде визначатись за формулою:

$$\vec{v}_{M_i} = \vec{v}_O + \vec{v}_{OM_i}, \tag{4.25}$$

$\vec{v}_O$ – швидкість полюса O, $\vec{v}_{OM_i}$ - швидкість точки M_i відносно полюса O. Враховуючи формулу Ейлера отримаємо:

$$\vec{v}_{M_i} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i,$$

де $\vec{\omega}$ - кутова швидкість тіла.

Останнє співвідношення можна подати так:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i. \tag{4.26}$$

Домножимо (4.26) на dt

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i dt \tag{4.27}$$

і підставимо у (4.23):

$$d'A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i (d\vec{r}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i dt) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i d\vec{r}_O + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i dt).$$

У першому доданку винесемо за знак суми множник $d\vec{r}_O$:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i d\vec{r}_O = \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \right) d\vec{r}_O = \vec{F} d\vec{r}_O,$$

де $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}$ - головний вектор системи сил. У другому доданку, приймаючи до уваги відому властивість мішаного добутку векторів ($\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})$), отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i dt) = \sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}(\vec{\rho}_i \times \vec{F}_i dt) = \left(\sum_{i=1}^{n} (\vec{\rho}_i \times \vec{F}_i) \right) \vec{\omega} dt = \left(\sum_{i=1}^{n} M_O(\vec{F}_i) \right) \vec{\omega} dt,$$

де $\vec{\omega} dt = \overrightarrow{d\varphi}$ - елементарне кутове переміщення, $\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{M}_O(\vec{F})$ - головний момент системи сил. Остаточно отримаємо вираз

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r}_O + \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \overrightarrow{d\varphi},$$

який повністю збігається з (4.22).

Повна робота системи сил може бути обчислена так:

$$A = \int d'A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}_O + \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \overrightarrow{d\varphi}. \qquad (4.28)$$

Контрольні запитання.

1. Як визначається кінетична енергія точки і в якій системі координат?
2. Як формулюється теорема про зміну кінетичної енергії точки у диференціальній та повній формі?
3. Запишить формули для визначення елементарної та повної роботи сили.
4. Запишить повну роботу сили за трьома способами задання положення точки.
5. Що таке центральна сила і як визначається її робота?
6. Запишить елементарну роботу довільної системи сил, прикладених до твердого тіла, та сформулюйте зміст доданків.
7. Як визначається робота сили тяжіння і чому вона дорівнює на замкненій траєкторії?
8. Чому дорівнює елементарна робота системи сил яка зводиться до рівнодійної?
9. Як визначається робота сили пружності і чому на замкненій траєкторії точки вона дорівнює нулю?
10. Чому дорівнює повна робота системи сил яка зводиться до пари сил?

Лекція 5

6. Робота момента сили.

Припустимо, що деяке тіло може обертатись навколо осі Oz та знаходиться під дією системи сил $\vec{F}_i\,{}_{i=1}^{n}$.

За полюс оберемо точку O, яка належить осі повороту. Оскільки у цьому випадку $d\vec{r}_O = 0$, елементарна робота системи сил $\vec{F}_i\,{}_{i=1}^{n}$ визначається другим доданком формули (4.22)

$$d'A = \vec{M}_O(\vec{F})\overrightarrow{d\varphi}.$$

Відповідно повна робота системи сил:

$$A = \int \vec{M}_O(\vec{F})\overrightarrow{d\varphi}. \qquad (5.1)$$

Підінтегральний вираз подамо у вигляді

$$\vec{M}_O(\vec{F})\overrightarrow{d\varphi} = M_O(\vec{F}) \cdot d\varphi \cdot \cos(\widehat{\vec{M}_O, \overrightarrow{d\varphi}}),$$

в якому добуток

$$M_O(\vec{F}) \cdot \cos(\widehat{\vec{M}_O, \overrightarrow{d\varphi}}) = M_O(\vec{F}) \cdot \cos(\widehat{\vec{M}_O, \vec{\omega}}) = M_z(\vec{F})$$

є проекцією головного моменту системи сил на вісь *Oz*. Підставимо цей вираз в (5.1). Тоді робота головного моменту системи сил при обертанні навколо нерухомої осі визначається так:

$$A = \int \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \overrightarrow{d\varphi} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z(\vec{F}) d\varphi, \tag{5.2}$$

де φ_0 та φ– початкове та кінцеве значення кута повороту.

При умові, що проекція момента не залежить від кута повороту, отримаємо*:*

$$A = M_z(\varphi - \varphi_0). \tag{5.3}$$

7**. Потужність сили та системи сил.**

Потужністю сили називається фізична величина, яка дорівнює скалярному добутку вектора сили та швидкості точки прикладання сили і характеризує бистроту виконання роботи силою:

$$N = \frac{d'A}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{v}}. \tag{5.4}$$

Потужність системи сил - це фізична величина, яка дорівнює потужності головного вектора системи сил та потужності пари сил, момент якої дорівнює головному моменту:

$$N = \frac{d'A}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}_O + \vec{M}_O \overrightarrow{d\varphi}}{dt} = \vec{F}\vec{\mathrm{v}}_O + \vec{M}_O \vec{\omega}, \tag{5.5}$$

де $\vec{F}$ - головний вектор, $\vec{M}_O$ - головний момент системи сил.

Одиницею вимірювання роботи та кінетичної енергії є Джоуль:

$$[A] = \text{Дж}, \qquad [T] = \text{Дж}.$$

Одиницею вимірювання потужності є Ватт:

$$[N] = \left[\frac{A}{t}\right] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}.$$

Враховуючи одиницю вимірювання потужності, одиниця вимірювання роботи подається так

$$[A] = \text{Вт}\cdot\text{с} = \text{Дж}.$$

В побутових умовах більш відома одиниця вимірювання роботи – кіловатт-година:

$$1\ \text{кВт} \cdot \text{год} = 10^3 \cdot 3{,}6 \cdot 10^3\ \text{Вт} \cdot \text{с} = 3{,}6 \cdot 10^6\ \text{Дж}.$$

Одиниця вимірювання потужності – кінська сила, зв’язана з Ватом співвідношенням

$$1\ \text{к.с.} = 75\text{кГс}\cdot\text{м/с} \approx 736\ \text{Вт}\,.$$

8. Кінетична енергія системи матеріальних точок.

Кінетичною енергією системи матеріальних точок називається сума кінетичних енергій точок системи:

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2}\,, \tag{5.6}$$

де m_i – маси точок, $\vec{v}_i$ – швидкості точок. Зазначимо, що кінетична енергія системи точок визначається відносно абсолютної (нерухомої) системи координат.

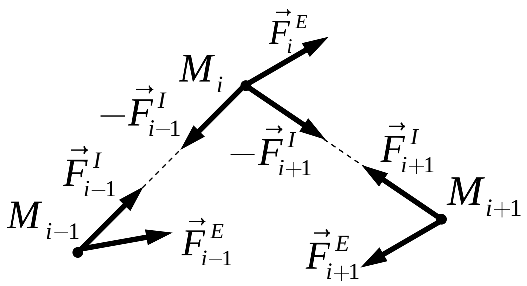
Теорема: *зміна кінетичної енергії системи матеріальних точок за деякий проміжок часу дорівнює повній роботі зовнішніх та внутрішніх сил, прикладених до точок системи за цей же проміжок часу.*

Доведення. Нехай є система матеріальних точок M_i, масами m_i, i=1,2,…,n, до яких прикладається система зовнішніх $\vec{F}_i^{E}\,{}_{i=1}^{n}$ та внутрішніх $\vec{F}_i^{I}\,{}_{i=1}^{n}$ сил (рис.5.1). Тоді за теоремою про зміну кінетичної енергії матеріальної точки запишемо

$$\frac{1}{2} m_i v_i^2 - \frac{1}{2} m_i v_{i0}^2 = A(\vec{F}_i^{E}) + A(\vec{F}_i^{I}),\ i=1,2,\ldots,n, \tag{5.7}$$

де v_i^2 – поточна швидкість точки, v_{i0}^2 – початкова швидкість.

Рис.5.1.



Складемо ліві і праві частини формул (5.7):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_{i0}^2 = \sum_{i=1}^{n} A(\vec{F}_i^{E}) + \sum_{i=1}^{n} A(\vec{F}_i^{I})\,.$$

У останньому виразі:

$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\mathrm{v}_i^2 = T$ - кінетична енергія системи точок в поточний момент часу, $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\mathrm{v}_{i0}^2 = T_0$ - кінетична енергія системи точок в початковий момент часу, $\sum_{i=1}^{n}A(\vec{F}_i^E) = A^e$ - повна робота зовнішніх сил, $\sum_{i=1}^{n}A(\vec{F}_i^I) = A^I$ - повна робота внутрішніх сил. Таким чином, отримаємо

$$T - T_0 = A^E + A^I. \tag{5.8}$$

9. Теорема Кьоніга

Кінетична енергія системи матеріальних точок, яка здійснює складний рух дорівнює сумі двох доданків: кінетичної енергії поступального руху системи точок разом з центром мас і кінетичної енергії відносно руху точок навколо центра мас.

Доведення. Нехай система матеріальних точок M_i, масами m_i, i=1,2,…,n, здійснює складний рух. Тоді швидкості точок можна подати у вигляді

$$\vec{\mathrm{v}}_i = \vec{\mathrm{v}}_{ie} + \vec{\mathrm{v}}_{ir}, \tag{5.9}$$

де переносні швидкості точок дорівнюють швидкості центра мас: $\vec{\mathrm{v}}_{ie} = \vec{\mathrm{v}}_C$.

Підставимо вираз (5.9) в (5.6):

$$T = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\vec{\mathrm{v}}_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i(\vec{\mathrm{v}}_C + \vec{\mathrm{v}}_{ir})^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i(\vec{\mathrm{v}}_C^2 + 2\vec{\mathrm{v}}_C\vec{\mathrm{v}}_{ir} + \vec{\mathrm{v}}_{ir}^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\,\mathrm{v}_C^2 + \sum_{i=1}^{n}m_i\,\vec{\mathrm{v}}_C\vec{\mathrm{v}}_{ir} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\,\mathrm{v}_{ir}^2.$$

Перший доданок суми дорівнює кінетичній енергії системи точок в її поступальному русі разом з центром мас C:

$$T_\Pi = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\,\mathrm{v}_C^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\right)\mathrm{v}_C^2 = \frac{1}{2}m\,\mathrm{v}_C^2,$$

де m – маса системи.

Третій доданок $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\mathrm{v}_{ir}^2 = T_r$ відповідає кінетичній енергії системи точок в її русі відносно центра мас.

Зрозуміло, що для доведення теореми потрібно довести, що другий доданок суми дорівнює нулю. Подамо другий доданок так

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\mathrm{v}}_C\vec{\mathrm{v}}_{ir} = \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\mathrm{v}}_C(\vec{\mathrm{v}}_i - \vec{\mathrm{v}}_C) = \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\mathrm{v}}_C\vec{\mathrm{v}}_i - \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\mathrm{v}}_C^2. \tag{5.10}$$

Приймаючи до уваги формулу (1.1) та похідну від цієї формули за часом: $m\vec{\mathrm{v}}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathrm{v}}_i$, з (5.10) отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathrm{v}}_C \vec{\mathrm{v}}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathrm{v}}_C^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathrm{v}}_i\right)\vec{\mathrm{v}}_C - \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\mathrm{v}_C^2 = m\vec{\mathrm{v}}_C \ \vec{\mathrm{v}}_C - m\mathrm{v}_C^2 = 0 .$$

Остаточно маємо

$$T = T_{\Pi} + T_r , \tag{5.11}$$

що вимагалося довести.

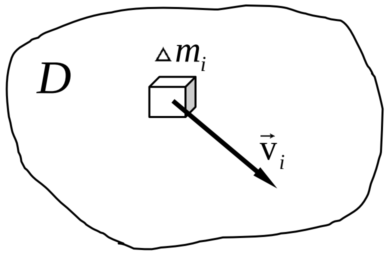
10. Кінетична енергія твердого тіла.

Визначимо кінетичну енергію твердого тіла масою *m*. Розіб'ємо його на елементарні частинки, масами Δm_i, *i*=1,2,…,*n*, такими що $\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = m$ (рис.5.2). Вважаємо частинки Δm_i настільки малими, що їх можна прийняти за матеріальні точки. У цьому випадку, кінетична енергія визначиться наближено виразом

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \Delta m_i \mathrm{v}_i^2 .$$

Для точного визначення кінетичної енергії потрібно спрямувати кількість елементарних частинок розбиття до нескінченності, тобто перейти до границі:

Рис.5.2.



$$T = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \Delta m_i \mathrm{v}_i^2 = \frac{1}{2} \int_{(m)} \mathrm{v}^2 dm .$$

Таким чином, кінетична енергія довільного твердого тіла може бути визначена за формулою

$$T = \frac{1}{2} \int_{(m)} \mathrm{v}^2 dm \tag{5.12}$$

Визначимо кінетичну енергію твердого тіла у частинних випадках руху.

1) *Поступальний рух* твердого тіла. У цьому випадку всі точки тіла рухаються з однаковими швидкостями, які дорівнюють швидкості центра мас $\vec{v}_i = \vec{v}_C$. Тоді розподіл швидкостей точок тіла не залежить від розподілу маси тіла і його кінетична енергія визначається так

$$T = \frac{1}{2}\int_{(m)} v^2 dm = \frac{1}{2}\int_{(m)} v_C^2 dm = \frac{1}{2} m v_C^2,$$

де $m = \int_{(m)} dm$. Остаточно

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2. \tag{5.13}$$

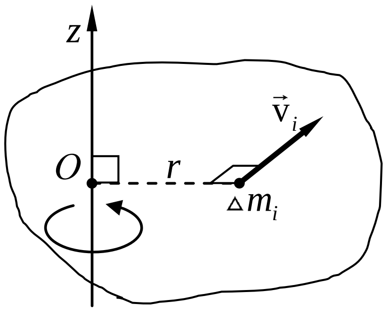
2) *Обертальний рух* твердого тіла навколо нерухомої осі. Нехай $\vec{\omega}$ - вектор кутової швидкості обертального руху тіла навколо осі *Oz*. Тоді швидкість будь-якої точки тіла визначиться з виразу $v = \omega r$, де r – найкоротша відстань від осі обертання до цієї точки (рис.5.3). Кінетична енергія тіла визначається так

$$T = \frac{1}{2}\int_{(m)} v^2 dm = \frac{1}{2}\int_{(m)} (\omega r)^2 dm = \frac{1}{2} I_z \omega^2.$$

де $I_z = \int_{(m)} r^2 dm$ - момент інерції тіла відносно осі обертання (осьовий). Остаточно

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2. \tag{5.14}$$

Рис.5.3.



3) *Плоскопаралельний рух* твердого тіла.

Плоскопаралельний рух твердого тіла (ППР) можна подати як сукупність двох рухів: поступального руху разом з центром мас і обертального навколо осі, яка перпендикулярна до площини руху тіла і проходить через центр мас. Відповідно, кінетична енергія тіла при ППР дорівнює сумі двох доданків (за теоремою Кьоніга): кінетичній енергії поступального руху тіла разом з центром мас та кінетичній енергії обертального руху тіла навколо осі, яка проходить через центр мас:

$$T = \frac{1}{2} m \mathrm{v}_C^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2, \qquad (5.15)$$

де m - маса тіла, v_C - швидкість центра мас, ω - миттєва кутова швидкість, I_z - момент інерції тіла відносно осі, яка проходить через центр мас.

Зазначимо, що ППР твердого тіла можно подати як обертальний рух навколо миттєвого центра швидкостей. Тоді кінетична енергія визначається:

$$T = \frac{1}{2} I_{z_P} \omega^2, \qquad (5.16)$$

де I_{z_P} - осьовий момент інерції тіла відносно миттєвої осі обертання Pz_P, ω - миттєва кутова швидкість.

Зв'язок між моментом інерції тіла відносно осі, яка проходить через центр мас I_z та моментом інерції I_{z_P} тіла відносно іншої паралельної осі встановлюється теоремою Гюйгенса-Штейнера: *Момент інерції системи матеріальних точок або твердого тіла відносно деякої осі дорівнює моменту інерції відносно центральної осі, що паралельна даній, складеному з добутком маси системи (тіла) на квадрат відстані між осями.*

4) *Рух твердого тіла з нерухомою точкою*.

Зв'яжемо з нерухомою точкою тіла початок *O* системи координат *Oxyz*, яка жорстко зв'язана з тілом. Швидкість будь-якої точки тіла визначається за формулою Ейлера

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

де $\vec{\omega}$ - миттєва кутова швидкість тіла. Спроектуємо цю векторну рівність на осі координат, враховуючи, що $\vec{\omega} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$ та $\vec{r} = \{x, y, z\}$. Відповідні проекції швидкості запишуться так:

$$\mathrm{v}_x = \omega_y z - \omega_z y, \qquad \mathrm{v}_y = \omega_z x - \omega_x z, \qquad \mathrm{v}_z = \omega_x y - \omega_y x. \qquad (5.17)$$

Квадрат швидкості точки та проекції її швидкостей зв'язані залежністю

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2. \qquad (5.18)$$

Підставимо (5.17), (5.18) у (5.12). Отримаємо:

$$T = \frac{1}{2} \int\limits_{(m)} \left[(\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2 \right] dm.$$

Перетворимо підінтегральній вираз, розкриваючи дужки та враховуючи, що величини $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ однакові для усіх точок тіла не залежать від розподілу мас і, відповідно, можуть бути винесені за знак інтеграла. Одержимо:

$$2T=\omega_x^2\int\limits_{(m)}(y^2+z^2)dm+\omega_y^2\int\limits_{(m)}(z^2+x^2)dm+\omega_z^2\int\limits_{(m)}(x^2+y^2)dm-$$
$$-2\omega_x\omega_y\int\limits_{(m)}xydm-2\omega_x\omega_z\int\limits_{(m)}xzdm-2\omega_y\omega_z\int\limits_{(m)}yzdm. \quad (5.19)$$

Перші три інтеграли відомі як осьові моменти інерції (2.23) або (2.25), а три останні інтеграли – відцентрові моменти інерції (2.24) або (2.26). Остаточно маємо:

$$2T=I_x\omega_x^2+I_y\omega_y^2+I_z\omega_z^2-2I_{xy}\omega_x\omega_y-2I_{xz}\omega_x\omega_z-2I_{yz}\omega_y\omega_z\,. \quad (5.20)$$

Контрольні запитання.

1. Запишить роботу момента системи сил в загальному випадку та у випадку сталого за величиною момента.
2. Дайте означення потужності сили та системи сил.
3. Робота яких сил приводить до зміни кінетичної енергії системи точок?
4. По відношенню до якого полюса формулюється теорема Кьоніга?
5. Як визначається кінетична енергія твердого тіла у загальному випадку?
6. Що спільного є між виразами кінетичної енергії твердого тіла у випадку поступального руху та обертального навколо нерухомої осі?
7. Скільки форм запису дозволяють подати кінетичну енергію твердого тіла при плоскопаралельному русі?
8. Вкажіть одиниці вимірювання кінетичної енергії та потужності сили.
9. Сформулюйте теорему Гюйгенса-Штейнера.
10. Вкажіть одиниці вимірювання роботи сили.

ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Аналітична механіка - це наука про найбільш загальні аналітичні методи дослідження механічних систем. Засновником аналітичної механіки вважається Ж. Лагранж (1736-1813). В трактаті «Аналітична механіка» (1788) ним було викладено основи цієї науки.

Тема 6.1. Диференціальні принципи механіки

У попередніх лекціях даного конспекту було викладено загальні теореми (закони) динаміки. Кожна з цих теорем в конкретному випадку активних сил та реакцій в'язей може дати можливість визначити інтеграл руху системи: закон зміни кількості руху, закон зміни кінетичного моменту. Але кожна окремо узята теорема не в змозі стати підставою для отримання усієї сукупності рівнянь руху механічної системи. Виконання такої задачі можливе при використанні у сукупності загальних теорем динаміки. Положення, які можуть дати повну характеристику руху механічної системи, називаються принципами механіки. З кожного принципа механіки можна отримати всю систему диференціальних рівнянь руху механічної системи.

Принципи механіки поділяють на диференціальні та інтегральні. До першої групи відносяться: принцип можливих переміщень (принцип Лагранжа), принцип Д'Аламбера-Лагранжа, принцип найменшого змушення. Диференціальні принципи подаються диференціальними рівностями або нерівностями. До другої групи належать: принцип Гамільтона, принцип Лагранжа, принцип Гельмгольца. Інтегральні принципи виражаються властивостями інтегралів. У даному конспекті подано принцип можливих переміщень та принцип Д'Аламбера-Лагранжа.

Лекція 6

1. Дійсні та можливі переміщення.

Дійсними переміщеннями називаються нескінченно малі елементарні переміщення точок системи, які не суперечать в'язям і відбуваються під дією заданих сил. Ці переміщення відповідають дійсному закону руху механічної системи. Позначаються дійсні переміщення $d\vec{r}$ при векторному способі задання руху або dx, dy, dz при координатному способі задання руху.

Припустимо, що задано радіус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z, t)$ точки *M*. Дійсне переміщення у цьому випадку подається так:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}dz + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}dt.$$

Можливими переміщеннями називають нескінченно малі елементарні уявні переміщення точок системи, які не суперечать в'язям і відбуваються у фіксований момент часу. Можливі переміщення не залежать від діючих сил, закону руху системи і являють собою сукупність одночасних уявних переміщень точок системи, сумісних з в'язями. Позначаються можливі переміщення $\delta\vec{r}$ при векторному способі задання руху та $\delta x, \delta y, \delta z$ при координатному способі задання руху. Можливі переміщення визначаються наступним чином:

$$\delta\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\delta z .$$

Значок δ тут позначає варіацію певної функції ($\vec{r}$, у, тощо). *Варіацією функції δy називається приріст функції, викликаний зміною функціональної залежності, при фіксованому значенні аргументу*.

Можливими переміщеннями матеріальної точки, рух якої обмежується утримувальною в'яззю, наприклад, деякою поверхнею, будуть переміщення в дотичній площині до даної поверхні (рис.6.1). Якщо

дана поверхня не є утримувальною в’яззю, то можливі переміщення направлені в частину простору яка не заповнена в’яззю.

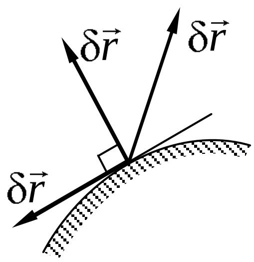


Рис.6.1.

Для стаціонарних в’язей дійсні переміщення точки є одними з множини її можливих переміщень (рис.6.2,а). Для нестаціонарних в’язей дійсні переміщення точки не будуть частинним випадком можливих переміщень (рис.6.2,б), оскільки останні визначаються для фіксованого моменту часу.

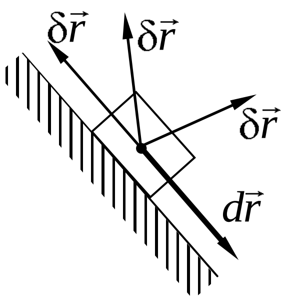


Рис.6.2,а).

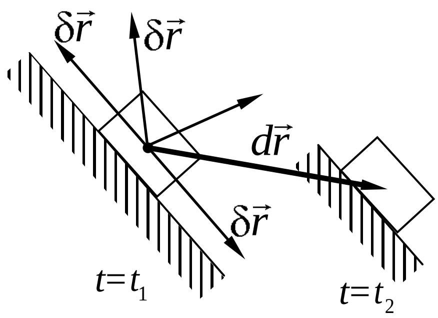


рис.6.2,б).

Кількість незалежних можливих переміщень, які можна надати точкам системи у фіксований момент часу називають *числом степенів вільності* матеріальної системи. Число степенів вільності матеріальної точки, яка вільно рухається в просторі дорівнює трьом, для точки яка рухається по поверхні – двом, по кривій – один. У загальному випадку руху вільного твердого тіла кількість степенів вільності – шість.

2. Ідеальна в’язь.

Ідеальними називають в’язі, напрям реакції яких можна визначити наперед виходячи з їх фізичних властивостей. Визначимо ідеальні в’язі аналітично.

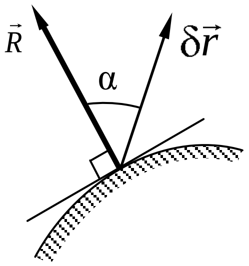


Рис.6.3

Припустимо, що рух деякої точки обмежується ідеально гладенькою поверхнею (рис.6.3). Будемо вважати, що точка може залишати в’язь, тобто в’язь є неутримувальною. Зрозуміло, що можливі переміщення такої точки напрямлені в частину простору, яка не заповнена в’яззю. Оскільки реакція $\vec{R}$ ідеально гладенької поверхні напрямлена вздовж нормалі, то її робота на можливому переміщенні $\delta\vec{r}$, яку називають *можливою роботою*, задовольняє умову

$$\delta A = \vec{R} \cdot \delta\vec{r} = R \cdot \delta r \cdot \cos\alpha \geq 0,$$

де кут α змінюється в межах $0 \leq \alpha \leq 90^{\circ}$.

Припустимо тепер, що на деяку систему точок накладаються ідеальні в’язі, реакції яких $\vec{R}_i$, i =1, 2,…, n. Можлива робота кожної реакції буде невід’ємна, відповідно, і сума можливих робіт усіх реакції буде невід’ємною:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i \geq 0. \tag{6.1}$$

Тут $\delta\vec{r}_i$ - можливі переміщення точок системи.

Таким чином, *ідеальними* називають в’язі, алгебраїчна сума елементарних робіт реакцій яких на будь-яких можливих переміщеннях точок системи буде невід’ємна. У випадку утримувальних в’язей сума робіт їх реакцій дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \tag{6.2}$$

Зазначимо, що до ідеальних в’язей відносяться: абсолютно жорсткий стрижень, абсолютно тверде тіло, точкові шарніри без сил тертя, невагома нерозтяжна нитка. Негладка поверхня не відноситься до ідеальних в’язей внаслідок того, що робота дотичної складової її реакції (сили тертя ковзання) на можливому переміщенні $\delta\vec{r}$ буде від’ємна.

3. Принцип можливих переміщень.

Найзагальніший принцип аналітичної статики – *принцип можливих переміщень* полягає в наступному: *для рівноваги системи матеріальних точок, на яку накладаються неутримувальні ідеальні стаціонарні в’язі, необхідно і достатньо, щоб була недодатньою сума елементарних робіт активних сил на будь-якому можливому переміщенні точок системи з розглядуваного положення рівноваги за умови, що в початковий момент система була нерухома*:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i \leq 0, \tag{6.3}$$

де $\vec{F}_i$ -активні сили, прикладені до точок системи.

Вираз (6.3) у випадку утримувальних вязей називають *загальним рівнянням статики*, оскільки він приймає вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0\,. \tag{6.4}$$

Враховуючи, що в проекціях на осі декартової системи координат $Oxyz$ можна записати $\vec{F}_i = F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}$ та $\delta\vec{r}_i = \delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, загальне рівняння статики можна подати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i = 0\,. \tag{6.5}$$

Доведення. *Необхідна умова.*

Припустимо, що система точок, до якої прикладаються активні сили $\vec{F}_i \,{}_{i=1}^{n}$ та реакції $\vec{R}_i \,{}_{i=1}^{n}$ неутримувальних ідеальних стаціонарних в’язей, перебуває у рівновазі. Тоді для кожної точки має місце рівність

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.6}$$

Задамо можливі переміщення точок $\delta\vec{r}_i$ та помножимо їх скалярно на усі рівності (6.6). Складемо отримані співвідношення:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

та перенесемо другий доданок суми вправо від знаку дорівнює. Отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = -\sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i\,.$$

Оскільки згідно (6.1) сума можливих робіт усіх реакції буде невід’ємною, остаточно маємо:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i \le 0\,.$$

Достатня умова.

Застосуємо метод доведення від протилежного. Припустимо, що система точок після деякого моменту часу почала рухатись. Обмежимось стаціонарними утримувальними в’язями. При накладанні таких в’язей дійсні переміщення є підмножиною можливих.

Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії системи точок. Тоді зміна кінетичної енергії $\delta T > 0$. Оскільки $\delta T = \delta A$, то

$$\delta T = \delta A = \sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i + \vec{R}_i) \cdot \delta \vec{r}_i > 0, \qquad (6.7)$$

де $\delta \vec{r}_i$ - можливі переміщення точок системи, які збігаються з дійсними.

Оскільки для утримувальних ідеальних в'язей сума робіт їх реакцій на можливих переміщеннях дорівнює нулю, то (6.7) суперечить умові (6.4). Отже умова (6.4) є достатньою умовою рівноваги системи точок на яку накладаються утримувальні ідеальні в'язі.

Принцип можливих переміщень дозволяє розв'язувати задачі на дослідження рівноваги твердого тіла та системи твердих тіл, визначати залежності між величинами активних сил в стані рівноваги. Він дозволяє одержати найменш можливу кількість рівнянь рівноваги довільної системи, яка дорівнює числу її степенів вільності.

У випадку неідеальних в'язей, наприклад, шорсткої поверхні, до активних сил треба віднести сили які вносять неідеальність (сили тертя) і, відповідно, прирівняти нулю суму робіт активних сил і сил тертя на будь-яких можливих переміщеннях точок системи.

Принцип можливих переміщень дозволяє визначати невідомі реакції ідеальних в'язей. Для цього треба застосувати аксіому про звільнення від в'язей і замінити дію в'язі шуканою реакцією. При складанні рівняння рівноваги до активних сил треба умовно віднести шукану реакцію в'язі.

Наведемо послідовність розв'язання задач з використанням принципа можливих переміщень:

1. Виділити систему матеріальних точок або тіл рівновага яких досліджується.
2. Проаналізувати та графічно зобразити активні сили, які діють на систему.
3. Дослідити характер в'язей і у випадку неідеальних в'язей визначити їх реакції і умовно віднести до активних сил.
4. Надати системі можливі переміщення.
5. Скласти загальне рівняння статики, тобто записати алгебраїчну суму елементарних робіт розглядуваних сил на можливих переміщеннях їх точок прикладання, та прирівняти її нуля.
6. Визначити число степенів вільності системи та встановити при необхідності залежність між можливими переміщеннями. Кількість незалежних можливих переміщень буде дорівнювати числу степенів вільності.
7. В загальному рівнянні статики виключити залежні можливі переміщення і враховуючи, що незалежні можливі переміщення одночасно не дорівнюють нулю, отримати систему рівнянь, з яких визначаються шукані величини.

Приклад. Складена балка *AD* спирається на рухомі опори *B*, *D* та нерухому опору *A* (рис.6.4,а). Балки *AC* та *CD* шарнірно з'єднані між

собою в точці C. До балки AC прикладено момент пари сил M=2 Н·м, а до балки CD - вертикальна сила P= 4 Н. Узяти a=1 м.

Визначити опорну реакцію в точці A. Вважати балку невагомою.

Розв'язання. Розв'язання даної задачі проведемо з використанням принципа можливих переміщень, який дозволяє будь-яку опорну реакцію визначити з одного рівняння, складеного відповідним чином. Це важливо тоді, коли треба знайти тільки одну опорну реакцію.

Враховуючи, що реакція в опорі A може бути розкладена на дві ортогональні складові, замінимо нерухому опору A горизонтальною складовою реакції $\vec{X}_A$ та рухомим шарніром (рис.6.4,б).

Надамо можливе переміщення $\delta\vec{x}_A$ точці A. Очевидно, що сила P і момент $\vec{M}$ роботу не виконують, тобто загальне рівняння статики має вигляд

$$X_A \delta x_A = 0 .$$

З останнього випливає $X_A = 0$.

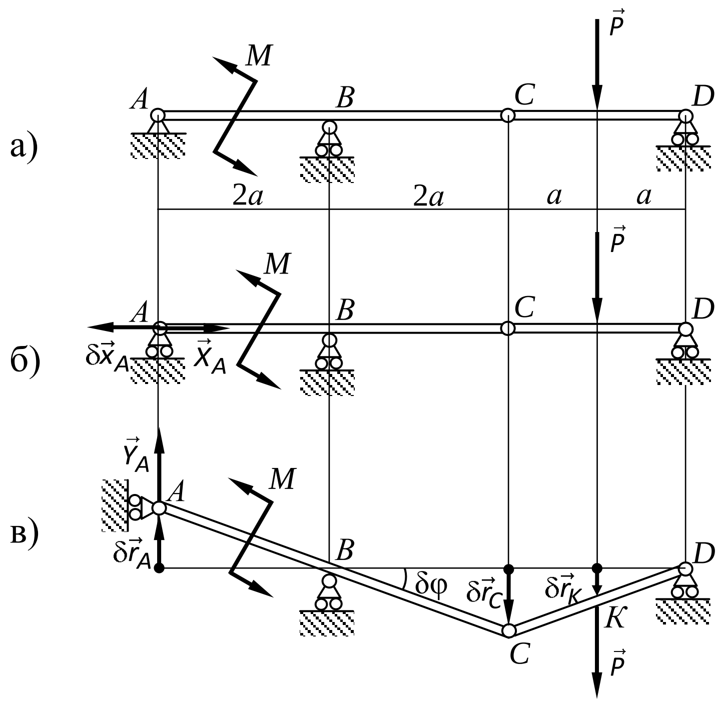


Рис.6.4.

Замінимо опору A вертикальною складовою реакції $\vec{Y}_A$ та рухомим шарніром. Надамо точці A можливе переміщення $\delta\vec{r}_A$ вгору (рис.6.4,в). Запишемо співвідношення між можливими переміщеннями

$$\delta r_C = \delta r_A = 2\delta r_K = 2a\delta\varphi. \qquad (а)$$

Застосовуючи принцип можливих переміщень, отримаємо:

$$Y_A \delta r_A - M\,\delta\varphi + P\delta r_K = 0, \tag{б}$$

або з урахуванням формул (а)

$$(Y_A - \frac{1}{2a}M + \frac{1}{2}P)\delta r_A = 0\,.$$

З останнього співвідношення, при довільному і незалежному δr_A, отримаємо

$$Y_A = \frac{1}{2a}M - \frac{1}{2}P\,.$$

Звідки Y_A = -1 Н. Знак мінус показує, що дійсний напрям реакції Y_A протилежний вказаному на рисунку. Таким чином, реакція в шарнірі A складається з однієї складової напрямленої вниз.

4. Принцип Д'Аламбера – Лагранжа.

Об'єднуючи принцип Д'Аламбера та принцип можливих переміщень дістанемо *принцип Д'Аламбера-Лагранжа: під час руху системи матеріальних точок, що підпорядковується неутримувальним ідеальним в'язям, сума елементарних робіт активних сил і сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи буде недодатня, тобто*

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i)\cdot\delta\vec{r}_i \le 0\,, \tag{6.8}$$

тут $\vec{F_i}$ - рівнодійна активних сил, прикладених до i-ї точки системи (i=1,2,…, n), $\vec{\Phi}_i = -m_i\vec{a}_i$ - сила інерції i-ї точки, m_i та $\vec{a}_i$- маса та прискорення i-ї точки, $\delta\vec{r_i}$ - можливе переміщення i-ї точки.

У випадку утримувальних вязей нерівність (6.8) перетворюється на рівняння

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i)\cdot\delta\vec{r}_i = 0\,, \tag{6.9}$$

яке називають *загальним рівнянням динаміки.*

Векторному рівнянню (6.9) можна записати відповідне рівняння в скалярній формі:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(F_{ix} - m_i\ddot{x}_i)\delta x_i + (F_{iy} - m_i\ddot{y}_i)\delta y_i + (F_{iz} - m_i\ddot{z}_i)\delta z_i\right] = 0, \tag{6.10}$$

де F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} - проекції активних сил на осі декартової системи координат *Oxyz*; $\ddot{x}_i$, $\ddot{y}_i$, $\ddot{z}_i$ - проекції прискорення *i*-ї точки системи; δx_i, δy_i, δz_i - проекції можливих переміщень точки на вибрані осі координат.

Доведення. Нехай рух деякої системи точок під дією активних сил $\vec{F}_i\ {}_{i=1}^{n}$ обмежується неутримувальними ідеальними в'язями, реакції яких позначимо $\vec{R}_i\ {}_{i=1}^{n}$. Тоді для кожної точки можна застосувати принцип Даламбера

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.11}$$

де $\vec{\Phi}_i = -m_i\vec{a}_i$ - сила інерції *i*-ї точки.

Умовно зупинимо точки та надамо їм можливі переміщення $\delta\vec{r}_i$. Помножимо скалярно усі рівності (6.11) на можливі переміщення $\delta\vec{r}_i$ та складемо отримані співвідношення:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i\cdot\delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n}\vec{\Phi}_i\cdot\delta\vec{r}_i = 0.$$

Перенесемо другий доданок суми вправо від знаку дорівнює. Отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n}\vec{\Phi}_i\cdot\delta\vec{r}_i = -\sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i\cdot\delta\vec{r}_i\,.$$

Оскільки згідно (6.1) сума можливих робіт усіх реакцій ідеальних в'язей буде невід'ємною, остаточно маємо:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n}\vec{\Phi}_i\cdot\delta\vec{r}_i \le 0.$$

Цей вираз збігається з формулою (6.8), що доводить принцип Д'Аламбера-Лагранжа.

Загальне рівняння динаміки для більшості задач дозволяє визначити закон руху системи не визначаючи реакцій в'язей. При необхідності, останні можна визначити після визначення закону руху системи, застосовуючи, наприклад, принцип Д'Аламбера.

Методика розв'язання задач з використанням загального рівняння динаміки може бути наступною:

1. Визначаємо об'єкт дослідження, тобто тіло або систему тіл, до аналізу руху яких застосовується загальне рівняння динаміки.

2. Визначаємо число степенів вільності системи. Це можна зробити шляхом накладання додаткових в’язей (число степенів вільності дорівнює числу додатково накладених в’язей, які зупиняють механічну систему), або математично, складаючи рівняння в’язей.
3. Визначаємо активні сили, які діють на систему, і зображуємо їх графічно.
4. Проводимо аналіз в’язей. Реакції ідеальних в’язей не входять у загальне рівняння динаміки. Якщо серед в’язей, які обмежують рух системи, є неідеальні, то їх реакції (наприклад, сила тертя) відносять до активних сил. Графічно сили тертя зображуються після того, як зроблено припущення про напрям руху системи.
5. Робимо припущення про напрям руху й прискорень точок системи та виходячи з кінематичних міркувань знаходимо зв’язок між прискореннями.
6. Відповідно до вибраного напряму прискорень зображуємо сили інерції, умовно прикладаючи їх до точок системи. Для твердих тіл систему сил інерції зводимо до головного вектора системи елементарних сил інерції і пари сил, момент якої дорівнює головному моменту сил інерції елементів тіла відносно вибраного центра зведень.
7. В поточний момент часу умовно зупиняємо систему і надаємо її точкам можливих переміщень.
8. Складаємо загальне рівняння динаміки як суму елементарних робіт активних сил, головних векторів сил інерції та їх моментів на відповідних можливих переміщеннях.
9. Встановлюємо зв’язок між можливими переміщеннями точок системи. Це можна зробити виходячи з кінематичних міркувань або аналітично, використовуючи рівняння в’язей. Після вибору незалежних можливих переміщень з загального рівняння динаміки виключаємо залежні можливі переміщення. Одночасно вибираємо незалежні прискорення точок системи і виключаємо залежні.
10. У загальному рівнянні динаміки збираємо коефіцієнти при незалежних можливих переміщеннях і прирівнюємо ці коефіцієнти до нуля. Таким чином, приходимо до диференціальних рівнянь руху розглядуваної механічної системи.
11. З одержаних рівнянь знаходимо невідомі величини. Задача визначення закону руху системи зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху. Якщо визначенню підлягають прискорення точок системи, то задача розв’язується алгебраїчно.

Розглянемо **приклад**.

До вантажа A вагою P_1 прикріплено кінець тонкої нерозтяжної нитки, яку перекинуто через блок B вагою P_2 і з’єднано з віссю C котка D радіуса r і вагою P_3 (рис.6.5). Коток D котиться без проковзування вздовж похилої площини, яка складає кут α з горизонтом.

Визначити прискорення вантажа *A*, якщо коефіцієнт тертя кочення котка дорівнює $f_к$. Блок *B* та коток *D* вважати однорідними круглими дисками. Вагою нитки знехтувати.

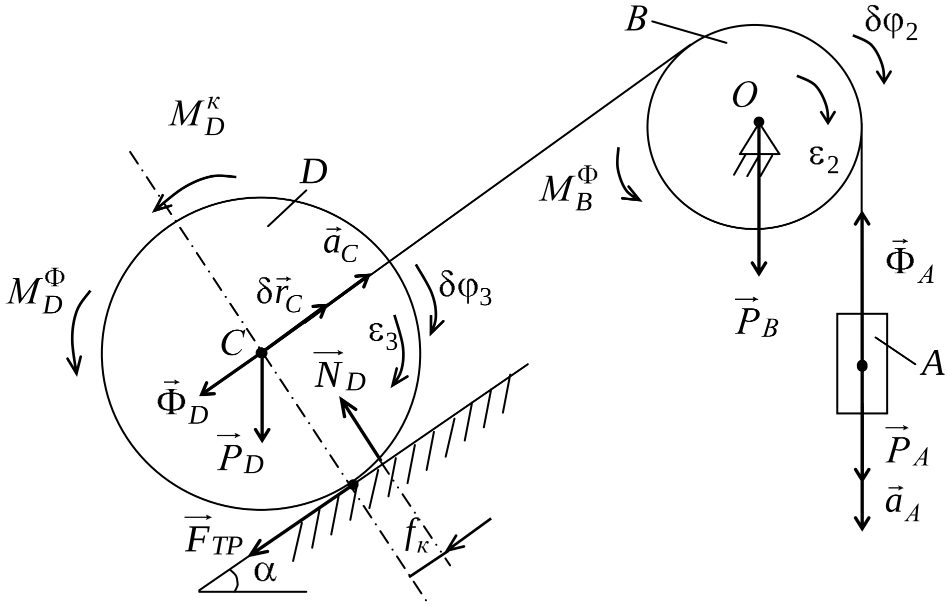


Рис.6.5.

Р о з в ' я з а н н я . Об'єкт дослідження даної задачі система трьох тіл *A*, *B* та *D*. Дана система має один степінь вільності. Зображуємо сили ваги тіл системи $\vec{P}_A, \vec{P}_B, \vec{P}_D$ (рис.6.5).

В'язями для механічної системи є невагома нерозтяжна нитка, вісь блока *B* і похила площина. Вісь блока та нитка є ідеальними в'язями, похила площина не є ідеальною в'яззю.

При коченні котка *D* по похилій площині, внаслідок деформації котка і площини, їх дотик відбувається не в одній точці, а вздовж невеликої дуги. Реакція, яка підраховується вздовж цієї дуги розкладається на нормальну та дотичну складову. Дотична складова є силою тертя. Нормальна складова реакції виявляється зміщеною відносно центра тяжіння *C* котка *D* в напрямку руху на величину $f_к$, яку називають коефіцієнтом тертя кочення.

Внаслідок цього до активних сил віднесемо силу тертя F_{TP} котка ($F_{TP} \le fN = fP\cos\alpha$, f - коефіцієнт тертя ковзання), а також момент тертя кочення $M_D^к = f_к N_D = f_к P_D \cos\alpha$.

Вважаємо, що прискорення $\vec{a}_A$ вантажа *A* спрямоване донизу, тоді прискорення точки *C* – вверх. Кутове прискорення ε_2 блока *B* позначимо на рисунку дуговою стрілкою (вектор $\vec{\varepsilon}_2$ напрямлений вздовж осі повороту блока *B* від читача). Кутове прискорення ε_3 котка *D* узгоджується з напрямком руху точки *C*.

Зобразимо на рисунку сили інерції. Тіло *A* здійснює поступальний рух, його сила інерції визначається так:

$$\vec{\Phi}_A = -\frac{P_A}{g}\vec{a}_A.$$

Сили інерції блока *B*, який здійснює обертальний рух, зводяться до пари сил з моментом

$$\vec{M}_B^{\Phi} = -I_B\vec{\varepsilon}_2,$$

де осьовий момент інерції блока

$$I_B = \frac{P_B {R_2}^2}{2g},$$

тут R_2 - радіус блока *B*.

Величина момента сил інерції блока *B*

$$M_B^{\Phi} = \frac{P_B {R_2}^2}{2g}\varepsilon_2.$$

Коток *D* здійснює плоскопаралельний рух. Сили інерції елементів цього тіла при виборі центра зведень в точці *C* зводяться до головного вектора

$$\vec{\Phi}_D = -\frac{P_D}{g}\vec{a}_C$$

та пари сил момент якої дорівнює головному моменту сил інерції відносно точки *C*:

$$\overrightarrow{M}_D^{\Phi} = -I_D\vec{\varepsilon}_3,$$

де $I_D = \dfrac{P_D {R_3}^2}{2g}$.

Величина момента сил інерції котка

$$M_D^{\Phi} = \frac{P_D {R_3}^2}{2g}\varepsilon_3.$$

Умовно зупинимо систему в довільний момент часу і надамо їй з цього положення можливе переміщення. Якщо можливе переміщення $\delta\vec{r}_A$ тіла *A* спрямоване донизу, то блок *B* здійснює обертальне можливе переміщення на кут $\delta\varphi_2$ за стрілкою годинника, а точка *C* тіла *D* – поступальне можливе переміщення $\delta\vec{r}_C$, тіло *D* обертальне можливе переміщення $\delta\varphi_3$ за стрілкою годинника.

Складаємо загальне рівняння динаміки

$$P_A\delta r_A - \Phi_A\delta r_A - M_B\delta\varphi_2 - P_D\delta r_C\sin\alpha - \Phi_D\delta r_C - M_D^{\Phi}\delta\varphi_3 - M_D^{\kappa}\delta\varphi_3 = 0.$$

Робота сили тяжіння P_B дорівнює нулю внаслідок нерухомості точки її прикладання.

Оскільки точка прикладання сили тертя F_{TP} збігається з миттєвим центром швидкостей, її робота дорівнює нулю.

Враховуючи вирази для сил інерції та моментів пар сил інерції одержимо:

$$P_A\delta r_A - \frac{P_A}{g}a_A\delta r_A - \frac{P_B R_2^{\ 2}}{2g}\varepsilon_2\delta\varphi_2 - P_D\delta r_C\sin\alpha - \frac{P_D}{g}a_C\delta r_C -$$

$$-\frac{P_D R_3^{\ 2}}{2g}\varepsilon_3\delta\varphi_3 - f_к P_D\cos\alpha\delta\varphi_3 = 0.$$

Будемо вважати незалежним можливим переміщенням переміщення тіла *А*. Оскільки нитка нерозтяжна, то $\delta r_A = \delta r_C = \delta r$, $\delta\varphi_2 = \dfrac{\delta r}{R_2}$, $\delta\varphi_3 = \dfrac{\delta r}{R_3}$.

Відповідно, зв'язок між прискоренням має вигляд:

$$a_A = a_C, \qquad \varepsilon_2 = \frac{a_A}{R_2}, \qquad \varepsilon_3 = \frac{a_C}{R_3} = \frac{a_A}{R_3}.$$

Тоді загальне рівняння динаміки перетвориться так:

$$\delta r\left(P_A - P_D\sin\alpha - f_к\frac{1}{R_3}P_D\cos\alpha - \frac{2P_A + P_B + 3P_D}{2g}a_A\right) = 0.$$

Оскільки $\delta r \neq 0$, отримаємо:

$$P_A - P_D\sin\alpha - f_к\frac{1}{R_3}P_D\cos\alpha - \frac{2P_A + P_B + 3P_D}{2g}a_A = 0.$$

З останнього співвідношення визначаємо прискорення вантажа *А*:

$$a_A = \frac{P_A - P_D\sin\alpha - f_к\dfrac{1}{R_3}P_D\cos\alpha}{2P_A + P_B + 3P_D}2g.$$

Контрольні запитання.

1. Які переміщення точок системи називаються можливими?
2. Чим відрізняються дійсні переміщення від можливих та що вони мають спільне?
3. Яким чином враховуються неідеальні в'язі, що обумовлені тертям, в принципі можливих переміщень та загальному рівнянні динаміки?
4. Яка аналітична умова повинна виконуватись для ідеальних в'язей?
5. Для яких в'язей справедливий принцип можливих переміщень, а для яких – загальне рівняння статики?
6. Сформулюйте принцип Д'Аламбера-Лагранжа.
7. Яким чином зв'язана кількість степенів вільності системи з загальним рівнянням статики?
8. У чому полягають переваги загального рівняння статики перед умовами рівноваги геометричної статики?
9. У чому полягає загальне рівняння динаміки?
10. Чим відрізняється методика застосування загального рівняння динамики від методики застосування загального рівняння статики при розв'язанні задач?

Тема 6.2. Рівняння руху механічних систем в узагальнених координатах

Лекція 7

1. Узагальнені координати.

Узагальненими координатами називаються параметри, які дозволяють визначити положення системи точок у будь який момент часу. Узагальнені координати позначають латинськими буквами $q_1,\ q_2,\ ...,\ q_n$. Наприклад, положення диска при його обертанні навколо нерухомої осі (рис.7.1,а) можна визначити кутом повороту φ. Тоді вводять позначення q=φ. Для точки (рис.7.1,б), яка рухається у площині Oxy положення визначається двома узагальненими координатами $q_1 = x,\ q_2 = y$.

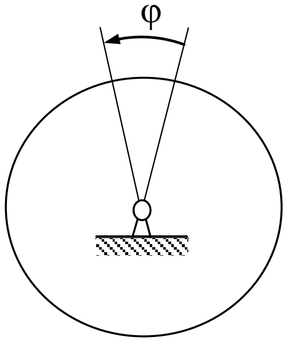


Рис.7.1,а

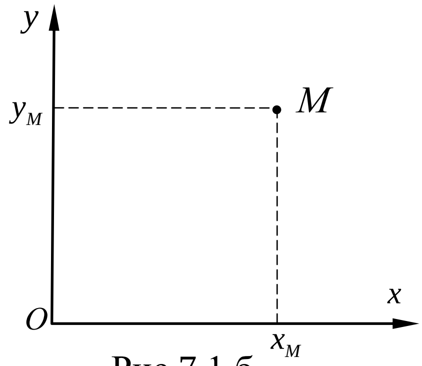


Рис.7.1,б

Мінімальна кількість узагальнених координат, які однозначно визначають положення системи точок у будь-який момент часу називається – *кількість степенів вільності системи точок*.

У наведених на рис.43 прикладах, тіло яке обертається має один степінь вільності і його положення описується однією узагальненою координатою. Положення точки M у площині визначається двома узагальненими координатами, оскільки вона має два степеня вільності.

Кількість степенів вільності позначають буквою N.

Узагальненими швидкостями називаються похідні за часом від узагальнених координат $\dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ ...,\ \dot{q}_N$.

Припустимо, що дано систему точок $M_i,\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n$, положення яких визначається радіусами-векторами

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_N, t). \tag{7.1}$$

Швидкості вказаних точок визначаються похідними за часом від відповідного радіуса-вектора, який є функцією декількох змінних:

$$\vec{\mathrm{v}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + ... + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_N}\frac{dq_N}{dt} + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}.$$

В згорнутому вигляді:

$$\vec{\mathrm{v}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \qquad (7.2)$$

У випадку стаціонарних в'язей радіус-вектор точки є функцією тільки узагальнених координат $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_N)$. Тоді швидкість подається у вигляді

$$\vec{\mathrm{v}}_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j. \qquad (7.3)$$

Візьмемо частинну похідну від швидкості $\vec{\mathrm{v}}_i$ за узагальненою швидкістю $\dot{q}_1$. Отримаємо

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}_i}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}.$$

Потім візьмемо похідну від швидкості $\vec{\mathrm{v}}_i$ за узагальненими швидкостями $\dot{q}_2, ..., \dot{q}_N$:

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}_i}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}, \ \ldots, \ \frac{\partial \vec{\mathrm{v}}_i}{\partial \dot{q}_N} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_N}.$$

Узагальнюючи ці формули, отримаємо *тотожності Лагранжа*:

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \qquad (7.4)$$

Зазначимо, що множення формули (7.2) на dt дозволяє отримати дійсні переміщення точок

$$d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt. \qquad (7.5)$$

Можливі переміщення, які визначаються у фіксований момент часу (dt=0), подаються так

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \qquad (7.6)$$

2. Узагальнена сила.

Нехай є система точок M_i, $i = 1, 2, ..., n$, яка рухається під дією прикладеної системи активних сил $\vec{F}_i \,{}_{i=1}^{\,n}$. Будемо вважати, що рух точок обмежується ідеальними утримувальними стаціонарними в'язями, реакції яких $\vec{R}_i \,{}_{i=1}^{\,n}$.

Запишемо роботу усіх активних сил та реакцій в'язей на можливих переміщеннях точок системи

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i . \tag{7.7}$$

Оскільки вязі ідеальні та утримувальні, то згідно (6.2) другий доданок суми робіт дорівнює нулю. У перший доданок підставимо вирази для можливих переміщень (7.6) через варіацію узагальнених координат:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i \cdot \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right).$$

В отриманому виразі поміняємо порядок додавання та внутрішню суму позначимо як Q_j:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i \cdot \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^{N} Q_j \delta q_j .$$

Коефіцієнти Q_j при варіаціях узагальнених координат δq_j за своїм змістом відповідають силам, їх називають *узагальненими силами*. Таким чином, *узагальнена сила* – це коефіцієнт при варіації узагальненої координати у виразі роботи активних сил, прикладених до точок системи на їх можливих переміщеннях:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} . \tag{7.8}$$

Як випливає з (7.8) узагальнена сила є лінійною комбінацією сил та моментів, які впливають на зміну прискорення системи точок за відповідною узагальненою координатою. Використовується узагальнена сила при складанні рівнянь руху системи точок в узагальнених координатах – рівнянь Лагранжа другого роду.

Для визначення узагальненої сили використовують наступну методику:

1) Визначити та зобразити активні сили $\vec{F}_i \,\Big|_{i=1}^{n}$, що діють на точки механічної системи;
2) Якщо серед в'язей накладених на систему є неідеальні, додати до активних сил відповідні реакції в'язей (наприклад, сили тертя);
3) Визначити кількість степенів вільності N та ввести відповідні узагальнені координати $q_1,\ q_2,\ ...,\ q_N$;
4) Надати системі точок можливе узагальнене переміщення δq_j, яке відповідає шуканій узагальненій силі Q_j;

5) Для визначення узагальненої сили Q_j, яка відповідає *j*-й узагальненій координаті, треба обчислить суму робіт активних сил разом з реакціями неідеальних в'язей на переміщеннях точок їх прикладання, які викликаються узагальненим можливим переміщенням δq_j (інші узагальнені можливі переміщення покладаються рівними нулю). Тоді узагальнена сила Q_j визначиться як коефіцієнт при δq_j у отриманому виразі:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i{}' = Q_j \delta q_j ,$$

де $\delta \vec{r}_i{}'$ - переміщення точок прикладання сил, які викликаються тільки можливим переміщенням δq_j.

Якщо задано систему координат *Oxyz* і система сил, прикладених до точок системи, разом з радіусами-векторами точок їх прикладання подається у вигляді

$$\vec{F}_i = F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j} + F_{iz}\vec{k} , \qquad \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\vec{i} + \frac{\partial y_i}{\partial q_j}\vec{j} + \frac{\partial z_i}{\partial q_j}\vec{k} ,$$

то узагальнена сила Q_j може бути визначена так

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right), \; j=1, \ldots, N. \tag{7.9}$$

3. Узагальнені умови рівноваги.

Припустимо, що система точок M_i, $i = 1, 2, ..., n$, яка має *N* степенів вільності, на яку накладено ідеальні утримувальні стаціонарні в'язі, знаходиться у рівновазі під дією системи активних сил $\vec{F}_i{}_{i=1}^{n}$. Тоді згідно загального рівняння статики

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 . \tag{7.10}$$

У цьому рівнянні виразимо варіації радіусів-векторів через варіації узагальнених координат за формулою (7.6)

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

і, враховуючи означення узагальненої сили, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i \cdot \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^{N} Q_j \delta q_j = 0 .$$

Остання рівність у розгорнутому вигляді подається так

$$Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + ... + Q_N\delta q_N = 0\,. \qquad (7.11)$$

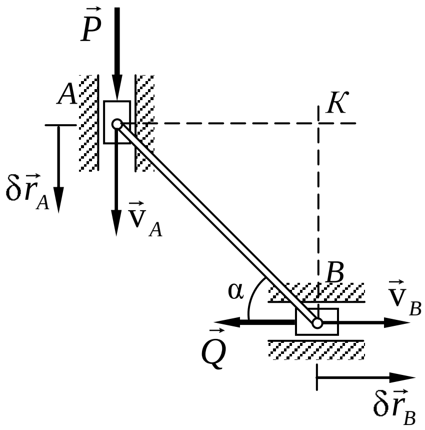
Оскільки варіації узагальнених координат одночасно не дорівнюють нулю, то вираз (7.11) дорівнює нулю при одночасному виконанні умов

$$Q_j = 0,\ j = 1,\ 2,\ ...,\ N\,, \qquad (7.12)$$

які називаються *узагальнені умови рівноваги*.

Розглянемо **приклад** визначення узагальненої сили та застосування узагальненої умови рівноваги. Припустимо, що два повзуни *A* та *B*, які з’єднані шарнірно з невагомим абсолютно жорстким стержнем, можуть рухатись вздовж двох взаємно перпендикулярних осей (рис.7.2). До повзуна *A* прикладена сила $\vec{P}$. Визначити силу $\vec{Q}$, яку треба прикласти до повзуна *B* для рівноваги даної системи та визначити узагальнену силу, яка відповідає переміщенню повзуна *A* у випадку руху.

Рис.7.2.



Дана механічна система має один степінь вільності *N*=1.

Активними силами є сили: $\vec{P}$, $\vec{Q}$.

За узагальнену координату оберемо переміщення повзуна *A*: $q = r_A$.

Надаємо точкам прикладання активних сил можливі переміщення $\delta\vec{r}_A$, $\delta\vec{r}_B$ та запишемо можливу роботу активних сил на цих переміщеннях:

$$\delta A = \vec{P}\cdot\delta\vec{r}_A + \vec{Q}\cdot\delta\vec{r}_B = P\cdot\delta r_A - Q\cdot\delta r_B\,. \qquad (7.13)$$

Виразимо можливе переміщення δr_B через варіацію узагальненої координати $\delta q = \delta r_A$. Оскільки стержень *AB* здійснює плоскопаралельний рух, точка *K* є миттєвим центром швидкостей. Тоді швидкості точок *A* та *B* зв’язані співвідношенням

$$\frac{\mathrm{v}_A}{KA} = \frac{\mathrm{v}_B}{KB}\,.$$

Звідси отримуємо

$$\mathrm{v}_B = \mathrm{v}_A\frac{KB}{KA}$$

або

$$\frac{dr_B}{dt} = \frac{dr_A}{dt} \cdot \frac{KB}{KA}.$$

З рисунка випливає

$$dr_B = dr_A \cdot \frac{KB}{KA} = dr_A \cdot \mathrm{tg}\alpha .$$

У випадку стаціонарних в'язей дійсні переміщення є підмножиною можливих переміщень. Виходячи з цього замінимо в останньому виразі символ d на δ та підставимо у формулу (7.13). Отримаємо

$$\delta A = P \cdot \delta r_A - Q \cdot \delta r_A \cdot \mathrm{tg}\alpha = (P - Q \cdot \mathrm{tg}\alpha)\delta r_A = Q_A \cdot \delta r_A .$$

Коефіцієнт Q_A при варіації узагальненої координати є узагальненою силою:

$$Q_A = P - Q \cdot \mathrm{tg}\alpha .$$

Рівновага системи має місце за умови $Q_A = 0$, звідки $Q = P \cdot \dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$.

4. Рівняння Лагранжа другого роду.

Припустимо, що є система матеріальних точок M_i, $i = 1, 2, ..., n$, масами m_i, яка має N степенів вільності і її положення визначається узагальненими координатами $q_1, q_2, ..., q_N$. Система точок знаходиться під дією системи активних сил $\vec{F}_i \,\big|_{i=1}^{n}$, які викликають прискорення $\vec{a}_i$. В'язі накладені на систему точок є ідеальні утримувальні стаціонарні.

Запишемо загальне рівняння динаміки для даної системи точок

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0,$$

де $\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{a}_i$ - сили інерції та подамо його у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{\Phi}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \qquad (7.14)$$

Перший доданок, враховуючи означення пункту 2, виразимо через узагальнену силу

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{N} Q_j \cdot \delta q_j . \qquad (7.15)$$

У другому доданку формули (7.14) виразимо можливе переміщення $\delta \vec{r}_i$ через варіації узагальнених координат, згідно (7.6), та поміняємо порядок додавання

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{\Phi}_i\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{n}(-m_i\vec{a}_i)\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j\right)=-\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j\,. \qquad (7.16)$$

Тут враховано, що $\vec{a}_i=\frac{d\vec{v}_i}{dt}$. Розглянемо далі коефіцієнт при δq_j. Введемо позначення $\vec{b}=\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$. Підставимо у внутрішню суму виразу (7.16) наступне співвідношення

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt}\vec{b}=\frac{d}{dt}(\vec{v}_i\cdot\vec{b})-\vec{v}_i\frac{d\vec{b}}{dt},$$

яке випливає з правила взяття похідної від добутку

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}_i\cdot\vec{b})=\frac{d\vec{v}_i}{dt}\vec{b}+\vec{v}_i\frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{d}{dt}(\vec{v}_i\cdot\vec{b})-\vec{v}_i\frac{d\vec{b}}{dt}\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}. \qquad (7.17)$$

Застосуємо тотожності Лагранжа (7.4) до першого доданка останнього виразу та внесемо швидкість під знак частинної похідної

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\frac{\vec{v}_i^2}{2}\right). \qquad (7.18)$$

У другому доданку (7.17) поміняємо порядок диференціювання, врахуємо, що $\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\vec{v}_i$, і також внесемо швидкість під знак частинної похідної:

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\vec{v}_i^2}{2}\right). \qquad (7.19)$$

Вважаючи масу точок сталою, внесемо її у формулах (7.18) та (7.19) під знак похідної та підставимо отримані вирази у (7.17):

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}m_i\frac{\vec{v}_i^2}{2}\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(m_i\frac{\vec{v}_i^2}{2}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_i}{\partial\dot{q}_j}\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T_i}{\partial q_j},$$

де $T_i = \frac{1}{2} m_i \mathrm{v}_i^2$ - кінетична енергія *i* точки. Оскільки сума похідних дорівнює похідній від суми, одержимо

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{\mathrm{v}}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{n} T_i\right) - \frac{\partial T_i}{\partial q_j}\sum_{i=1}^{n} T_i =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}. \qquad (7.20)$$

Далі підставимо праву частину виразу (7.20) у (7.16)

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\Phi}_i \cdot \delta \vec{r}_i = -\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{\mathrm{v}}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j = -\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\delta q_j. \qquad (7.21)$$

Праві частини виразів (7.21) та (7.15) підставляємо у (7.14):

$$\sum_{j=1}^{N} Q_j \cdot \delta q_j - \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\delta q_j = 0$$

або

$$\sum_{j=1}^{N}\left(Q_j - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\delta q_j = 0.$$

Рівність нулю останнього виразу для довільних варіацій узагальнених координат δq_j можлива при умові одночасної рівності нулю коефіцієнтів при цих варіаціях, тобто

$$Q_j - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0, \; i = 1, 2. \ldots, N.$$

У більш зручному вигляді

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \;\; i = 1, 2. \ldots, N. \qquad (7.22)$$

Співвідношення (7.22) називаються *рівняннями Лагранжа другого роду*.

Рівняння Лагранжа другого роду мають ряд переваг перед іншими способами складання рівнянь руху механічних систем. До таких переваг відносяться:

- Кількість рівнянь Лагранжа другого роду дорівнює кількості степенів вільності механічної системи, тобто є мінімальною.
- Рівняння Лагранжа другого роду не утримують реакції ідеальних в’язей.

- Складання рівнянь Лагранжа другого роду можна виконати за певною методикою:
1.Визначити кількість степенів вільності механічної системи.
2.Вибрати узагальнені координати в кількості, яка дорівнює кількості степенів вільності.
3.Визначити узагальнені сили. Це можна здійснити декількома способами.
а). Визначення узагальненої сили як коефіцієнта у виразі суми елементарних робіт (7.8) активних сил на відповідних узагальнених можливих переміщеннях.
Для цього треба:

1) зобразити усі активні сили, що діють на точки механічної системи;
2) якщо серед в'язей накладених на систему є неідеальні, додати до активних сил відповідні реакції в'язей (наприклад, силу тертя);
3) надати системі незалежні узагальнені переміщеннях в кількості, яка дорівнює кількості узагальнених координат;
4) для визначення узагальненої сили Q_j, яка відповідає j-й узагальненій координаті, треба обчислити суму робіт активних сил разом з реакціями неідеальних в'язей на узагальненому можливому переміщенні δq_j. Інші узагальнені можливі переміщення $\delta q_1,\ ...,\ \delta q_{j-1},\ \delta q_{j+1},\ ...,\ \delta q_N$ вважати рівними нулю. Тоді узагальнена сила Q_j визначиться як коефіцієнт при δq_j. Усі інші узагальнені сили визначаються аналогічно.

б). Якщо сили, які діють на механічну систему є потенціальними, то треба визначити потенціальну енергію П механічної системи як функцію узагальнених координат. Узагальнена сила Q_j визначається як частинна похідна від потенціальної енергії за відповідною узагальненою координатою q_j, що береться зі знаком мінус $Q_j = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j},\ j = 1,\ 2,\ ...,\ N$.

в). визначення узагальненої сили може бути здійснено з використанням формул (7.9).
4. Знайти кінетичну енергію системи як вираз, що залежить від узагальнених координат та узагальнених швидкостей. Якщо рух системи відбувається в потенціальному силовому полі, то треба знайти потенціальну енергію системи, а потім скласти функцію Лагранжа.
5. Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j},\ \dfrac{\partial T}{\partial q_j}$ і повні похідні за часом $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$. У випадку потенціальної системи треба знайти похідні $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j},\ \dfrac{\partial L}{\partial q_j}$ та $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$.
6. Скласти рівняння Лагранжа другого роду та проінтегрувати їх з урахуванням початкових умов.
7. Провести аналіз розв'язку відповідно до особливостей розглядуваної задачі.

Контрольні запитання.
1. Як зв’язані між собою узагальнені координати, швидкості та прискорення?
2. Сформулюйте означення узагальненої сили.
3. Запишить загальне рівняння статики в узагальнених координатах.
4. Як записується зв'язок між можливими переміщеннями точок системи та узагальненими координатами?
5. Сформулюйте правило визначення узагальненої сили.
6. На підставі якого принципа механіки виводяться рівняння Лагранжа другого роду?
7. Як можлива робота сил інерції механічної системи зв’язана з її кінетичною енергією?
8. Для яких в’язей виводиться рівняння Лагранжа другого роду?
9. У чому полягають переваги рівнянь Лагранжа другого роду перед іншими способами складання динамічних рівнянь руху?
10. Сформулюйте методику складання рівнянь Лагранжа другого роду.

Лекція 8

5. Потенціальне силове поле.

Силовим полем називається частина простору, в якій на кожну точку діє сила, яка залежить тільки від координат точки і можливо часу. Якщо вказана сила залежить від часу, тобто $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z,t)$, силове поле називають *нестаціонарним*, у випадку $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$ - силове поле називають *стаціонарним*.

Стаціонарне силове поле називається *потенціальним*, якщо робота сил поля залежить тільки від початкового та кінцевого положення точки. Система точок, яка рухається у потенціальному силовому полі, називається *консервативною*, а сили, які діють на цю систему точок, називаються *потенціальними*.

Нехай деяка точка M рухається у потенціальному силовому полі. Введемо прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ (рис.8.1). Робота сил поля по переміщенню точки $M(x,y,z)$ з початкового положення (початку відліку O) у довільне положення називається *силовою функцією*:

$$A_{OM}=U(x,y,z). \tag{8.1}$$

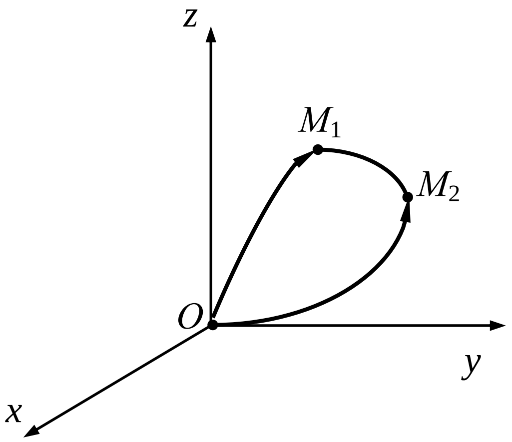
Зазначимо, що роботу сил поля по переміщенню точки з початку відліку в положення $M_2(x_2,y_2,z_2)$ можна подати як суму робіт сил поля по переміщенню точки з початку відліку у положення $M_1(x_1,y_1,z_1)$ та роботи сил поля по переміщенню точки з положення M_1 в положення M_2:

$$A_{OM_2}=A_{OM_1}+A_{M_1M_2}. \tag{8.2}$$

Враховуючи, що $A_{OM_1} = U(x_1, y_1, z_1)$ та $A_{OM_2} = U(x_2, y_2, z_2)$, робота сил поля по переміщенню точки з положення M_1 в положення M_2 запишеться так:

$$A_{M_1M_2} = A_{OM_2} - A_{OM_1} = U(x_2; y_2; z_2) - U(x_1; y_1; z_1). \quad (8.3)$$

Рис.8.1



Припустимо, що положення M_1 та M_2 точки настільки близькі, що виконуються співвідношення:

$$x_2 - x_1 = \Delta x \to dx, \ y_2 - y_1 = \Delta y \to dy, \ z_2 - z_1 = \Delta z \to dz,$$

$$\overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r} \to d\vec{r},$$

де $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM}_1$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OM}_2$ - радіуси-вектори відповідних положень точки *M*. Тоді роботу сил поля можна подати у вигляді диференціалу від силової функції

$$A_{M_1M_2} = U(x_1 + dx, y_1 + dy, z_1 + dz) - U(x_1, y_1, z_1) = dU(x_1, y_1, z_1). \quad (8.4)$$

Враховуючи довільність положень M_1 та M_2, запишемо

$$A_{M_1M_2} = dU(x, y, z). \quad (8.5)$$

З другого боку, робота сили $\vec{F}$ на елементарному переміщенні $d\vec{r}$ є елементарною роботою $A_{M_1M_2} = d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Таким чином, отримаємо

$$dU(x, y, z) = \vec{F} \cdot d\vec{r} \ . \quad (8.6)$$

З формули (8.6) випливає, що потенціальне силове поле - це поле *елементарна робота сил якого подається у вигляді повного диференціала:*

$$d'A = dA = dU(x, y, z).$$

На підставі виразу (8.6) можна сформулювати такі дві задачі: 1) визначення невідомої силової функції за відомою силою $\vec{F}$; 2) визначення невідомої сили, яка прикладається з боку поля до точки, за відомою силовою функцією *U*.

Для розв’язання першої задачі візьмемо інтеграл від лівої та правої частини (8.6). Отримаємо

$$U = \int \vec{F} d\vec{r} + C\,. \tag{8.7}$$

З (8.7) випливає, що силову функцію можна визначити з точністю до константи.

Визначимо, наприклад, силову функцію поля сил тяжіння. В системі координат $Oxyz$ можна записати $\vec{F} = m\vec{g} = \{0;0;-mg\}$. Тоді маємо

$$U = \int -mgdz + C = -mgz + C\ . \tag{8.8}$$

Геометричне місце точок, для яких силова функція має однакове значення, називається *еквіпотенціальною поверхнею*. Так, у розглянутому прикладі еквіпотенціальні поверхні – це площини перпендикулярні до осі Oz.

Для розв’язання другої задачі подамо диференціал від силової функції через частинні похідні

$$dU(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\,. \tag{8.9}$$

Порівнюючи цей вираз з елементарною роботою сили

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz\,, \tag{8.10}$$

на підставі (8.6) приходимо до висновку, що

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x},\ \ F_y = \frac{\partial U}{\partial y},\ \ F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{8.11}$$

З (8.11) випливає, що вектор сили у випадку потенціального силового поля можна визначити як градієнт силової функції:

$$\vec{F} = \ F_x, F_y, F_z \ = \overrightarrow{grad}U = \left\{\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right\}. \tag{8.12}$$

Як випливає з властивостей градієнта, вектор $\overrightarrow{gradU}$ напрямлений вздовж нормалі до поверхні $U(x,y,z) = C$ в бік найбільшого зростання значень силової функції (рис.8.2).

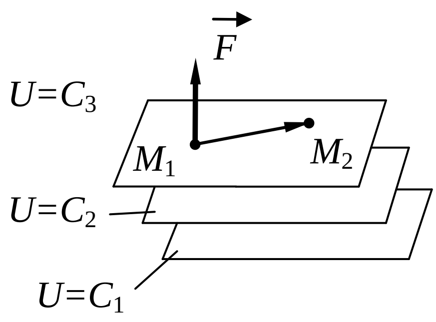


Рис.8.2

Дійсно, для вектора $d\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$, який проведено між двома дуже близькими точками однієї еквіпотенціальної поверхні $U(x,y,z) = C$, можна записати $\vec{F}\cdot d\vec{r} = dU = C - C = 0$ Оскільки $\vec{F} \neq 0$ та $d\vec{r} \neq 0$, то рівність нулю виконується при умові перпендикулярності відповідних векторів $\vec{F} \perp d\vec{r}$.

Візьмемо тепер частинні похідні від проекцій сили (8.11), вважаючи їх неперервними та диференційованими. Отримаємо

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}. \tag{8.13}$$

Умови (8.13) є необхідні і достатні умови існування потенціального силового поля.

Потенціальна енергія П точки - це робота сил поля по переміщенню точки з поточного положення у початкове

$$\Pi = A_{MO}. \tag{8.14}$$

Оскільки $A_{MO} = -A_{OM}$, то

$$\Pi = -U(x,y,z). \tag{8.15}$$

З урахуванням (8.12) отримаємо, що у випадку потенціального силового поля прикладені до точки сили визначаються так

$$\vec{F} = \left(F_x, F_y, F_z\right) = \left\{-\frac{\partial \Pi}{\partial x}, -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, -\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right\}. \tag{8.16}$$

Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії до точки яка рухається з положення M_1 в M_2 у потенціальному силовому полі:

$$T_2 - T_1 = A_{M_1M_2}$$

або

$$\frac{m\mathrm{v}_2^2}{2} - \frac{m\mathrm{v}_1^2}{2} = U(x_2,y_2,z_2) - U(x_1,y_1,z_1).$$

Після перенесення силової функції в ліву частину, враховуючи $\Pi_i = -U(x_i,y_i,z_i)$, i=1, 2, отримаємо

$$T_2 + \Pi_2 - \left(T_1 + \Pi_1\right) = 0$$

або

$$T_2 + \Pi_2 = T_1 + \Pi_1 = E = \text{const}.$$

тут *E – повна енергія* точки.

Таким чином, для точки яка рухається у потенціальному силовому полі виконується *закон збереження енергії*.

Зазначимо, що система точок, яка рухається у потенціальному силовому полі, називається *консервативною*, а сили, які діють на цю систему точок, називаються *потенціальними*.

6. Рівняння Лагранжа другого роду для консервативної системи точок.

Припустимо, що деяка система матеріальних точок M_i, $i=1,\ 2,\ ...,\ n$, яка має N степенів вільності, рухається у потенціальному силовому полі, тобто є консервативною. Положення системи точок визначається узагальненими координатами $q_1,\ q_2,\ ...,\ q_N$. В'язі накладені на дану систему точок є ідеальні утримувальні стаціонарні.

Система точок знаходиться під дією системи потенціальних сил $\vec{F}_i\ {}_{i=1}^{n}$. Такі сили виражаються через потенціальну енергію П силового поля наступним чином

$$\vec{F}_i = \ F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}\ = \left\{ -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}; -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}; -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i} \right\},\ i=1,\ 2,\ ...,\ n, \qquad (8.17)$$

де $F_{ix},\ F_{iy},\ F_{iz}$ - проекції сили на осі системи координат *Oxyz*, $x_i,\ y_i,\ z_i$ - координати i точки, П=П($x_1,\ y_1,\ z_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_n,\ z_n$) – потенціальна енергія системи точок як функція їх координат.

Визначимо узагальнені сили, які відповідають узагальненими координатами $q_1,\ q_2,\ ...,\ q_N$, за виразом (7.8)

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j},\ j=1,\ 2,\ ...,\ N.$$

Враховуючи, що радіуси-вектори точок $\vec{r}_i = \ x_i,\ y_i,\ z_i$, підставимо (8.17) у (7.8):

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

Таким чином

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j},\ j=1,\ 2,\ ...,\ N. \qquad (8.18)$$

У цьому випадку рівняння Лагранжа другого роду запишуться так

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j},\ j=1,\ 2,\ ...,\ N.$$

Перенесемо праву частину співвідношення в ліву сторону та введемо *функцію Лагранжа* (друга назва – *кінетичний потенціал*)

$$L = T - \Pi, \tag{8.19}$$

отримаємо

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0,\ j=1,\ 2,\ ...,\ N. \tag{8.20}$$

Співвідношення (8.20) називаються *рівняннями Лагранжа другого роду для консервативної системи точок*.

7. Рівняння Лагранжа другого роду для дисипативної системи точок. Функція Релея.

Праву частину рівнянь Лагранжа другого роду (7.22), тобто узагальнену силу, подамо у вигляді

$$Q_j = Q_j^{\Pi} + Q_j^{\Phi} + Q_j(t),$$

де Q_j^{Π} – узагальнена сила, яка має потенціальний характер, Q_j^{Φ} – узагальнена сила, яка викликається силами опору, $Q_j(t)$ – узагальнена збурювальна сила.

Механічна система, під час руху якою діють сили опору, тобто відбувається розсіювання енергії, називається *дисипативною*.

Будемо вважати, що сили опору пропорційні першому степеню швидкостей точок

$$\vec{R}_i = -\beta_i \vec{\mathrm{v}}_i,\ i=1,\ 2,\ ...,\ n, \tag{8.21}$$

де β_i - коефіцієнти в'язкого тертя середовища, у якому здійснюється рух.

Виразимо узагальнену силу опору Q_j^{Φ} через сили в'язкого тертя згідно (7.8)

$$Q_j^{\Phi}=\sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}=-\sum_{i=1}^{n}\beta_i\vec{\mathrm{v}}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \tag{8.22}$$

та застосуємо тотожність Лагранжа (7.4) до частинної похідної. Отримаємо

$$Q_j^{\Phi}=-\sum_{i=1}^{n}\beta_i\vec{\mathrm{v}}_i\cdot\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}_i}{\partial \dot{q}_j}=-\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\beta_i \mathrm{v}_i^2\right). \tag{8.23}$$

Вираз, який записано у дужках, називається *дисипативною функцією Релея* або *функцією розсіювання*:

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i^2 . \quad (8.24)$$

З (8.23) випливає, що узагальнену силу опору можна визначити як частинну похідну від дисипативної функції Релея за відповідною узагальненою швидкістю

$$Q_j^{\Phi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}, \; j = 1,\; 2,\; ...,\; N . \quad (8.25)$$

З урахуванням (8.18) та (8.25), *рівняння Лагранжа другого роду для дисипативної системи точок* можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} + Q_j(t)\, , \; j = 1,\; 2,\; ...,\; N . \quad (8.26)$$

або через функцію Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} + Q_j(t), \; j = 1,\; 2,\; ...,\; N . \quad (8.27)$$

Контрольні запитання.

1. Яке силове поле називається потенціальним?
2. Дайте визначення силової функції.
3. Який зв'язок між силовою функцією та елементарною роботою сил поля?
4. Як визначається силова функція за відомою силою?
5. Визначте вектор сили у випадку потенціального силового поля через силову функцію.
6. Дайте означення потенціальної енергії точки та вкажіть її зв'язок з силовою функцією?
7. Яка механічна система називається консервативною?
8. Як визначаються узагальнені сили у випадку консервативної механічної системи?
9. Запишить рівняння Лагранжа другого роду для довільних сил та для консервативної механічної системи.
10. Обгрунтуйте необхідні та достатні умови існування потенціального силового поля.
11. Яка механічна система називається дисипативною?
12. Як визначається функція розсіювання та узагальнені сили опору?

Тема 5. Елементарна теорія удару

Лекція 9

1. Удар. Основні визначення.

Ударом називають особливий вид взаємодії системи матеріальних точок, при якій за малий (нескінченно малий) проміжок часу τ швидкості точок системи набувають скінченні прирости. Проміжок часу τ називається

тривалість удару. Дослідження показують, що тривалість удару між твердими тілами з деякими пружніми властивостями вимірюється тисячними або десятитисячними долями секунди.

Оскільки швидкості тіл під час удару отримують скінченні прирости за нескінченно малий проміжок часу, то, відповідно, кількості руху тіл (точок) системи також отримають скінченні прирости. На підставі теореми про зміну кількості руху можна стверджувати, що при ударі на тіла (точки) діють деякі додаткові сили, які за нескінченно малий час удару розвивають скінченні імпульси. Сили з такими властивостями називають *ударними* або *миттєвими*. Сили $\vec{F}$ звичайної природи в теорії удару не враховуються, оскільки вони за нескінченно малий час удару τ розвивають дуже малий імпульс:

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{F} d\tau = \vec{F}_{CP}\tau \cong 0 . \qquad (9.1)$$

Тут $\vec{F}_{CP}$ – середнє значення сили.

При дослідженні ударної взаємодії тіл розглядаються не самі ударні сили, величина яких дуже велика, а їх імпульси, внаслідок їх скінченності. Тобто, рівняння ударної взаємодії треба записувати через імпульси ударних сил, а не через самі ударні сили.

При ударі можна нехтувати перемещеннями точок системи за проміжок часу, рівний тривалості удару.

Дійсно, на підставі

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\mathrm{v}} ,$$

можна написати:

$$\vec{r} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{\mathrm{v}} dt + \vec{r}_0 , \qquad (9.2)$$

де τ - тривалість удару. Швидкість $\vec{\mathrm{v}}$ при ударі скінченна, тому згідно теореми про середнє отримаємо:

$$\vec{r} = \vec{\mathrm{v}}_{CP}\tau + \vec{r}_0 . \qquad (9.3)$$

Оскільки τ - мала величина, то членом $\vec{\mathrm{v}}_{CP}\tau$ можна знехтувати. Тоді отримаємо:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 , \qquad (9.4)$$

тобто за проміжок часу, що дорівнює тривалості удару, радиуси-вектори точок системы не змінюються.

Процес удару можна поділити на дві фази. Перша фаза – це процес зближення тіл по лінії спільної нормалі. Тут реакції виконують від'ємну роботу, кінетична енергія тіл зменшується. Проекція відносної швидкості тіла в точці контакту на нормаль в момент удару зменшується до нуля.

Друга фаза удару – процес віддалення тіл і відновлення їх форми. Проекція відносної швидкості на напрям нормалі змінює знак та зростає за величиною, але може не досягати попереднього абсолютного значення.

Таким чином, явище удару буде залежати від деформації тіл, які взаємодіють при ударі: на першій фазі деформації зростають, на другій – зменшуються. Закінчується друга фаза відокремленням тіл.

2. Гіпотеза Ньютона.

Ісаак Ньютон на підставі дослідів з кулькою яка співударяється з деякою поверхнею встановив, що швидкості тіл після удару менше ніж швидкості тіл до удару, причому ним було висунуто гіпотезу про те, що відношення величини швидкості $\vec{u}$ центра інерції кульки після удару до величини швидкості $\vec{\mathrm{v}}$ центра інерції кульки до удару не залежить від величини цих швидкостей, а залежить від пружних властивостей речовини тіл, які співударяються. Величину цього відношення Ньютон назвав коефіцієнтом відновлення k:

$$\frac{u}{\mathrm{v}} = k. \tag{9.5}$$

Цей термін пояснюється тим, що величина k визначає ту частину швидкості центра інерції кульки, яка відновлюється після удару. Тут можливі два граничні випадки. Може статись, що величина швидкості центра інерції кульки після удару дорівнює величині швидкості центра інерції кульки до удару. Це можливо тоді, коли деформація тіл, які співударяються, повністю зникає протягом другої фази удару. У цьому випадку кажуть про абсолютно пружній удар, при цьому коефіцієнт відновлення $k=1$.

Другий граничний випадок має місце коли речовина кульки та поверхні ідеально пластичні. У цьому випадку друга фаза удару не відбувається і швидкість центра інерції кульки після удару дорівнює нулю. Цей випадок називають ідеально пластичним ударом, при цьому коефіцієнт відновлення:

$$k = 0.$$

Інші випадки які зустрічаються при ударі тіл знаходяться між цими граничними випадками, відповідно, величина k є правильний додатній дріб

$$0 \le k \le 1. \tag{9.6}$$

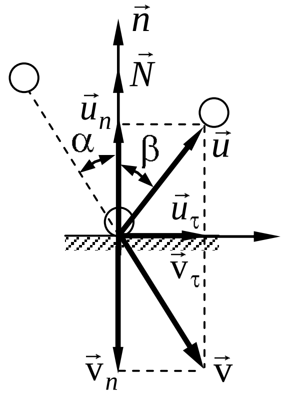
Знаки рівності відповідають зазначеним граничним випадкам удару.

Більш точні дослідження показують, що коефіцієнт відновлення залежить від швидкості тіл, які співударяються, але в теоретичній механіці цією обставиною нехтують.

Розглянемо косий удар кульки по нерухомій площині. Для спрощення досліджень площину вважаємо абсолютно гладкою. Вважаємо, що кулька рухається поступально і падає на площину під кутом α до нормалі $\vec{n}$. Кут

α називається кутом падіння (рис.9.1). Швидкість кульки в момент удару дорівнює $\vec{\mathrm{v}}$. Швидкість кульки після удару позначимо $\vec{u}$. Ця швидкість складає кут β з нормаллю $\vec{n}$. Кут β називається кутом відбиття.

Рис.9.1



Миттєвою силою є нормальна складова реакції $\vec{N}$. Тоді за теоремою імпульсів маємо

$$m\vec{u} - m\vec{\mathrm{v}} = \vec{S}, \tag{9.7}$$

де m – маса кульки, $\vec{S} = \int_0^\tau \vec{N}dt$ - імпульс миттєвої реакції за час удару τ. В проекціях на напрям нормалі та дотичної отримаємо

$$mu_n - m\mathrm{v}_n = S, \qquad u_\tau - \mathrm{v}_\tau = 0. \tag{9.8}$$

З другого рівняння випливає, що дотичні складові швидкості до удару та після удару рівні між собою. Для визначення нормальних складових маємо лише одне рівняння. Додаткове співвідношеня, яке враховує фізичні властивості тіл при ударі, можна скласти на підставі поняття коефіцієнта відновлення (9.5). В нашому випадку

$$k = \left|\frac{u_n}{\mathrm{v}_n}\right|. \tag{9.9}$$

З рисунка бачимо, що

$$|\vec{u}_n| = \frac{1}{tg\beta}\cdot|\vec{u}_\tau|, \qquad |\vec{\mathrm{v}}_n| = \frac{1}{tg\alpha}\cdot|\vec{\mathrm{v}}_\tau|,$$

тоді

$$\frac{|\vec{u}_n|}{|\vec{\mathrm{v}}_n|} = \frac{tg\alpha}{tg\beta} = k. \tag{9.10}$$

Співвідношення (9.10) разом з (9.8) дозволяє визначити нормальні складові швидкостей.

Зазначимо, (9.10) дозволяє знаходити будь-яку з величин α, β и k, якщо відомі дві інші величини. Якщо $k=1$, то $\alpha=\beta$, тобто у випадку абсолютно пружнього удару кут падіння дорівнює куту відбиття.

3.Прямий центральний удар двох куль.

Нехай є дві кулі масами m_1 та m_2, які рухаються поступально вздовж однієї прямої у одному напрямку зі швидкостями до удару $\vec{\mathrm{v}}_1$ та $\vec{\mathrm{v}}_2$ (рис.9.2).

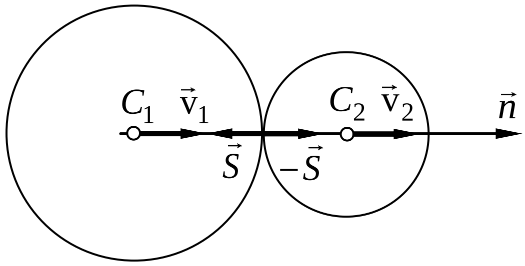


Рис.9.2

Зазначимо, що спільна нормаль до поверхні тіл, що стикаються, називається *лінія удару*. У нашому випадку – $\vec{n}$. Удар називається *центральним*, якщо центри мас тіл C_1 та C_2 лежать на лінії удару. Центральний удар називається *прямим*, якщо швидкості центрів мас тіл на початку удару лежать на лінії удару. Отже розглянемо прямий центральний удар. Щоб удар відбувся, потрібно виконання умови:

$$\vec{\mathrm{v}}_1 > \vec{\mathrm{v}}_2 . \qquad (9.11)$$

Швидкості центрів мас куль після удару позначимо $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$. Миттєвими силами під час удару є сили тиску однієї кулі на другу, імпульси яких позначимо через $\vec{S}$. Ці сили є внутрішні сили. Зовнішніми силами, які діють на цю систему, є сили тяжіння, тертя та інші сили. Ці сили приймати до уваги не будемо, оскільки вони протягом удару не мають скінченних імпульсів. Застосуємо теорему імпульсів в проекції на нормаль $\vec{n}$. Оскільки ударні імпульси є внутрішніми силами у системі двох куль, вони не можуть змінити кількість руху цієї системи за час удару. Отримаємо:

$$m_1(u_1-\mathrm{v}_1)=-S,$$
$$m_2(u_2-\mathrm{v}_2)=S,$$
$$m_1\mathrm{v}_1+m_2\mathrm{v}_2=m_1u_1+m_2u_2 . \qquad (9.12)$$

Співвідношення (9.12) називають основним рівнянням Ньютона в теорії удару. Доповнимо його рівнянням, складеним на підставі гіпотези Ньютона про коефіцієнт відновлення:

$$\frac{u_2-u_1}{\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_2}=k$$

або

$$u_2 - u_1 = k(\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2)\,, \tag{9.13}$$

де $u_2 - u_1$ та $\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2$ - проекції відносних швидкостей на нормаль центрів мас куль після та до удару.

Рівняння (9.12) та (9.13) є система двох рівнянь для визначення невідомих u_2 та u_1. Додаючи теорему імпульсів, можна визначити також ударний імпульс S:

$$u_1 = \frac{(m_1 - km_2)\mathrm{v}_1 + m_2(1+k)\mathrm{v}_2}{m_1 + m_2}\,, \qquad u_2 = \frac{(m_2 - km_1)\mathrm{v}_2 + m_1(1+k)\mathrm{v}_1}{m_1 + m_2}\,,$$

$$S = \frac{m_1 m_2 (1+k)(\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2)}{m_1 + m_2}\,.$$

М. Є. Жуковським було показано, що задача співудару тіл скінченних розмірів зводиться до дослідження співудару куль, маси яких визначаються певним особливим чином, вказаним М. Є. Жуковським.

4.Теорема Остроградського-Карно.

Введемо поняття втрачених при ударі тілами швидкостей: під ними розуміють різницю швидкостей тіла після удару та до удару. Зокрема, для першої кулі втрачена швидкість це $\Delta\mathrm{v}_1 = u_1 - \mathrm{v}_1$, для другої кулі - $\Delta\mathrm{v}_2 = u_2 - \mathrm{v}_2$.

Теорема Остроградского-Карно полягає в наступному:

Кінетична енергія, яку втрачає система під час пружного удару, дорівнює $\dfrac{1-k}{1+k}$ *частці кінетичної енергії втрачених швидкостей.*

Доведення. Розглянемо випадок прямого центрального удару двох куль. Кінетична енергія T_1 системи двох куль до удару дорівнює

$$T_1 = \frac{m_1\mathrm{v}_1^2}{2} + \frac{m_2\mathrm{v}_2^2}{2}\,. \tag{9.14}$$

Кінетична енергія T_2 системи двох куль після удару дорівнює

$$T_2 = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}\,. \tag{9.15}$$

Приріст кінетичної енергії за час удару

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{m_1}{2}(u_1 - \mathrm{v}_1)(u_1 + \mathrm{v}_1) + \frac{m_2}{2}(u_2 - \mathrm{v}_2)(u_2 + \mathrm{v}_2)\,. \tag{9.16}$$

Різниці швидкостей в круглих дужках є втраченими швидкостями.

Розглянемо далі співвідношення (9.12) та (9.13)

$$\begin{gathered} m_1(u_1 - \mathrm{v}_1) = -S\,, \\ m_2(u_2 - \mathrm{v}_2) = S\,, \\ u_2 - u_1 = k(\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2)\,. \end{gathered} \tag{9.17}$$

Перше співвідношення (9.17) помножимо на $u_1 + k\text{v}_1$, а друге на $u_2 + k\text{v}_2$:

$$m_1(u_1 - \text{v}_1)(u_1 + k\text{v}_1) = -S(u_1 + k\text{v}_1),$$
$$m_2(u_2 - \text{v}_2)(u_2 + k\text{v}_2) = S(u_2 + k\text{v}_2)$$

та складемо ці рівняння

$$m_1(u_1 - \text{v}_1)(u_1 + k\text{v}_1) + m_2(u_2 - \text{v}_2)(u_2 + k\text{v}_2) = \\ = S(u_2 - u_1 - k(\text{v}_1 - \text{v}_2)). \tag{9.18}$$

Підставимо у праву частину (9.18) вираз для k з формули (9.13). Права частина (9.18) перетворюється на нуль:

$$m_1(u_1 - \text{v}_1)(u_1 + k\text{v}_1) + m_2(u_2 - \text{v}_2)(u_2 + k\text{v}_2) = 0. \tag{9.19}$$

Перетворення лівої частини (9.19) зв'язане з використанням тотожностей:

$$\begin{aligned}
(u_1 - \text{v}_1)u_1 &= \frac{1}{2}(u_1^2 - \text{v}_1^2) + \frac{1}{2}(u_1 - \text{v}_1)^2, \\
(u_1 - \text{v}_1)k\text{v}_1 &= \frac{1}{2}k(u_1^2 - \text{v}_1^2) - \frac{1}{2}k(u_1 - \text{v}_1)^2, \\
(u_2 - \text{v}_2)u_2 &= \frac{1}{2}(u_2^2 - \text{v}_2^2) + \frac{1}{2}(u_2 - \text{v}_2)^2, \\
(u_2 - \text{v}_2)k\text{v}_2 &= \frac{1}{2}k(u_2^2 - \text{v}_2^2) - \frac{1}{2}k(u_2 - \text{v}_2)^2.
\end{aligned} \tag{9.20}$$

Підстановка (9.20) у вираз (9.19) дозволяє отримати

$$\frac{1}{2}(1 + k)\ \{(m_1u_1^2 + m_2u_2^2) - (m_1\text{v}_1^2 + m_2\text{v}_2^2)\}\ + \\ + \frac{1}{2}(1 - k)\ \{m_1(u_1 - \text{v}_1)^2 + m_2(u_2 - \text{v}_2)^2\}\ = 0.$$

Після ділення усього виразу на $1 + k$ бачимо, що перша дужка – це різниця кінетичних енергій $T_2 - T_1$. Остаточно записуємо

$$\Delta T = T_2 - T_1 = -\frac{1 - k}{1 + k}\left[\frac{m_1}{2}(u_1 - \text{v}_1)^2 + \frac{m_2}{2}(u_2 - \text{v}_2)^2\right]. \tag{9.21}$$

Отже, теорема доведена.

Розглянемо частинні випадки. Нехай удар буде непружний: k = 0, $u_1 = u_2 = u$. Тоді

$$\Delta T = T_2 - T_1 = -\frac{1}{2}\left[m_1(u - \text{v}_1)^2 + m_2(u - \text{v}_2)^2\right]. \tag{9.22}$$

Тут зміна кінетичної енергії системи дорівнює усій кінетичній енергії втрачених швидкостей.

При абсолютно пружному ударі k = 1 і $\Delta T = 0$, тобто кінетична енергія системи не змінюється.

В реальних системах зміна кінетичної енергії лежить між цими значеннями. Кінетична енергія під час удару витрачається на утворення незворотних деформацій та на підвищення температури тіл, які стикаються.

Теорема Остроградського-Карно має практичне застосування. На ній ґрунтуються розрахунки машин ударної дії, пресів та штампів.

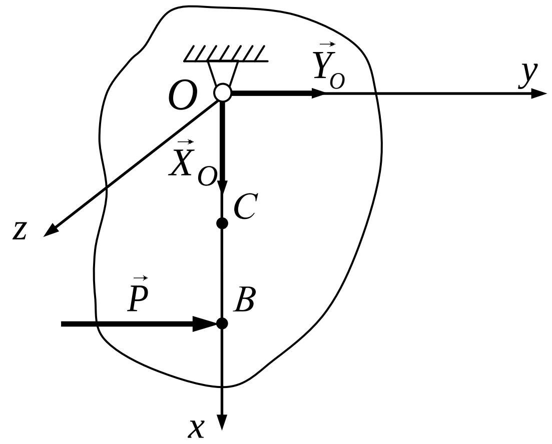
5. Фізичний маятник під дією удару. Центр удару.

Припустимо, що фізичний маятник (рис.9.3) знаходиться у положенні стійкої рівноваги та його вісь повороту проходить через точку O перпендикулярно до площини рисунка. Центр мас маятника знаходиться у точці C.

Вважаємо, що ударна сила $\vec{P}$ прикладається до маятника у точці B і спрямована горизонтально. Визначимо миттєві реакції осі обертання маятника при такому ударі та з'ясуємо чи існує таке положення точки прикладання ударної сили при якому на вісь маятника не передається ударний імпульс.

Оберемо нерухому систему координат $Oxyz$, оскільки переміщеннями маятника за проміжок часу, що дорівнює тривалості удару, можна нехтувати. Динамічну реакцію осі розкладемо на складові $\vec{X}_O$ и $\vec{Y}_O$.

Рис.9.3.



Складемо рівняння до яких будуть входити імпульси ударних сил, оскільки вони на відміну від самих миттєвих сил мають скінченну величину. Скористаємось теоремою про зміну кількості руху системи точок. В проекціях на осі Oxy одержимо:

$$m\Delta \mathrm{v}_{Cx} = S_x,$$
$$m\Delta \mathrm{v}_{Cy} = S_P + S_y, \quad (9.23)$$

де S_P - імпульс ударної сили, S_x, S_y - імпульси реакцій осі маятника.

За теоремою про зміну кінетичного моменту в інтегральній формі можна записати:

$$I_Z\omega - I_Z\omega_0 = \int_0^\tau M_Z(\vec{P})dt, \quad (9.24)$$

де I_Z - момент інерції маятника відносно осі обертання *Oz*. Оскільки $M_Z(\vec{P}) = P \cdot OB$, то праву частину (9.24) можна виразити через імпульс ударної сили

$$\int_0^\tau M_Z(\vec{P})dt = \int_0^\tau OB \cdot Pdt = OB \cdot \int_0^\tau Pdt = OB \cdot S_P$$

і потім (9.24) записати у вигляді

$$I_Z \Delta \boldsymbol{\omega} = OB \cdot S_P. \tag{9.25}$$

Тут $\Delta \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0$.

Рівняння (9.23) та (9.25) утворюють систему трьох рівнянь до яких входить п'ять невідомих

$$\Delta v_{Cx},\ \Delta v_{Cy},\ \Delta \boldsymbol{\omega},\ S_x,\ S_y.$$

Додаткові рівняння можна отримати на підставі кінематичних співвідношень. Враховуючи, що переміщеннями маятника за проміжок часу, що дорівнює тривалості удару, можна нехтувати, то і зміну швидкості центра мас у напрямку осі *Ox* можна вважати рівною нулю

$$\Delta v_{Cx} = 0. \tag{9.26}$$

Центр мас C маятника внаслідок удару матиме швидкість спрямовану перпендикулярно до осі *Ox*, яка зв'язана з кутовою швидкістю залежністю, отриманою на підставі формули Ейлера:

$$\Delta v_{Cy} = \Delta \omega \cdot OC. \tag{9.27}$$

Дві останні формули є додатковими співвідношеннями, які дозволяють розв'язати систему рівнянь (9.23) та (9.25), тобто її замикають.

З формул (9.23) та (9.26) бачимо, що

$$S_x = 0. \tag{9.28}$$

Підставимо (9.27) у друге рівняння (9.23)

$$m\Delta\omega \cdot OC = S_P + S_y.$$

В отриманий вираз підставимо зміну кутової швидкості $\Delta\omega$ з (9.25):

$$m \cdot \frac{OB}{I_Z} \cdot OC \cdot S_P = S_P + S_y.$$

Нескладно бачити, що

$$S_y = \left(m \cdot \frac{OB}{I_Z} \cdot OC - 1 \right) S_P. \tag{9.29}$$

Таким чином, (9.28) та (9.29) визначають величину імпульсів ударних реакцій осі маятника.

Зазначимо, що рівність нулю імпульсу ударної реакції осі маятника S_y за формулою (9.29) визначає умову, при виконанні якої ударний імпульс не передається на вісь обертання маятника:

$$S_y = \left(m \cdot \frac{OB}{I_Z} \cdot OC - 1 \right) S_P = 0.$$

З цього виразу знайдемо відповідну відстань *OB* від точки підвісу маятника до точки прикладання ударної сили:

$$OB = \frac{I_Z}{m \cdot OC}. \qquad (9.30)$$

Величина, яка визначається за формулою (9.30), в теорії фізичного маятника називається *зведеною довжиною* фізичного маятника.

Точка *B*, в якій прикладається ударна сила, що не викликає ударної реакції осі маятника, називається *центр удару*.

Приклад. Однорідний стержень довжини l підвішений одним з кінців до нерухомої горизонтальної осі обертання. Визначити положення центра удару.

Розв'язання. Однорідний стержень є фізичним маятником. Відповідно до формули (9.30), центр удару розташований від точки підвішування на відстані зведеної довжини фізичного маятника.

Момент інерції однорідного стержня відносно осі підвішування, яка проходить через його кінець дорівнює:

$$I_Z = \frac{1}{3}ml^2.$$

Центр мас однорідного стержня збігається з його серединою, тобто $OC = \frac{1}{2}l$.

Після підстановки I_Z та OC у формулу (9.30) одержимо: $OB = \frac{2}{3}l$.

Отже, центр удару однорідного стержня знаходиться на відстані $\frac{2}{3}l$ його довжини від осі підвішування.

Контрольні запитання.

1. Перерахуйте динамічні та кінематичні особливості удару тіл.
2. Яка взаємодія тіл називається ударом?
3. Чи має місце закон збереження кількості руху системи тіл при абсолютно пружньому ударі?
4. Коли відбувається непружній удар?
5. Чому дорівнює коефіцієнт відновлення у загальному випадку?
6. У чому полягає гіпотеза Ньютона?
7. Як можна визначити коефіцієнт відновлення тіл?
8. Який удар називається прямим центральним ударом тіл?
9. Сформулюйте теорему Остроградського-Карно про зміну кінетичної енергії тіл при ударі.
10. Що називається втраченими швидкостями?

Список рекомендованої літератури.

1. Березова О. А., Друшляк Г. Ю., Солодовников Р. В., Теоретична механіка. – К.: ІЗМН, 1998. – 408 с.
2. Векерик В. І., Ільчишина Д. І., Левчук К.Г., Цідило І. В., Шальда Л. М. Теоретична механіка: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Факел, 2006. – 459 с.
3. Мещерский И. В. Задачи по теоретической механике. – СПБ.: Лань, 2002. – 448 с.
4. Павловский М. А., Путята Т. В. Теоретическая механика. К.: Вища школа, 1985. – 359 с.
5. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник. К.: Техніка, 2002. – 512 с.
6. Сборник коротких задач по теоретической механике/ Под редакцией О. Э. Кепе. М.: Высшая школа, 1989. – 386 с.
7. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике/ Под ред. А. А. Яблонского. - М.: Интеграл-Пресс, 2003. – 384 с.
8. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 2001. – 416 с.
9. Теоретична механіка: Збірник задач/ За редакцією М. А. Павловського.- К.: Техніка, 2007. – 400 с.: іл.