

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

*ДЛЯ СТУДЕНТІВ ВСІХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ ІНСТИТУТУ
ЕНЕРГОЗБЕРЕЖЕННЯ ТА ЕНЕРГОМЕНЕДЖМЕНТУ І
ТЕПЛОЕНЕРГЕТИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ ВСІХ ФОРМ НАВЧАННЯ*

КИЇВ 2013

УДК 531.8

Теоретична механіка. Методичні вказівки по виконанню розрахунково-графічної роботи для студентів всіх спеціальностей інституту енергозбереження та енергоменеджменту і теплоенергетичного факультету для всіх форм навчання [електр]/ Укл.: О.М. Алексейчук, В.Г. Савін, В.М.Федоров. К.- НТУУ «КПІ».- 36с.

Навчальне електронне видання

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

*ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ВСІХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ ІНСТИТУТУ
ЕНЕРГОЗБЕРЕЖЕННЯ ТА ЕНЕРГОМЕНЕДЖМЕНТУ І
ТЕПЛОЕНЕРГЕТИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ ВСІХ ФОРМ НАВЧАННЯ*

Методичні вказівки містять: загальні рекомендації до виконання розрахунково-графічної роботи, вимоги до оформлення роботи, завдання і приклади розв'язання задач.

Укладачі: Алексейчук Ольга Миколаївна, канд. техн. наук, доцент

Савін Віктор Гурійович, доктор техн. наук, професор

Федоров Володимир Миколайович, канд. техн. наук, доцент

Відповідальний

редактор: Апостолук Олександр Семенович, канд. техн. наук, доцент

Рецензент: Ремез Наталя Сергіївна, доктор техн. наук, професор

© Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»
2013р.

ЗМІСТ

Вступ ...4

Зміст і приклади виконання завдань

РОЗДІЛ 1. СТАТИКА ...5

С -1. Довільна систем сил в площині.

Визначення реакцій в'язей суцільної конструкції....5

Приклад С-18

РОЗДІЛ 2. КІНЕМАТИКА...15

К -1. Визначення швидкості та прискорення точки по заданим рівнянням її руху...9

Приклад К-1...9

К-2. Визначення швидкостей і прискорень точок багатоланкового механізму...11

Приклад К-2....16

РОЗДІЛ 3. ДИНАМІКА...22

Д -1. Динаміка матеріальної точки...22

Приклад Д-1...24

Д -2. Застосування теореми про зміну кінетичної енергії до вивчення руху механічної системи...27

Приклад Д-2...32

Вимоги до оформлення розрахунково-графічних робіт

та методика їх оцінювання ...35

Література36

Вступ

Дисципліна відноситься до циклу природничо-наукової підготовки.

Передумовами вивчення кредитного модуля є володіння вищою математикою в обсязі програми першого курсу університету (математичні методи диференціальних та інтегральних обчислень, теорія звичайних диференціальних рівнянь, лінійна алгебра, аналітична геометрія).

Викладання теоретичної механіки передбачає: розвиток логічного та алгоритмічного мислення, оволодіння основними методами дослідження у вирішенні прикладних задач, вироблення вміння самостійно ставити і розв'язувати прикладні задачі методами теоретичної механіки.

Вивчення дисципліни повинно:

- підвищити інтелектуальний рівень студента, завдяки отриманню фундаментальних знань, які відповідають існуючим світовим стандартам вищої освіти;
- навчити майбутніх інженерів елементам творчості, вмінню узагальнювати отримані результати при розв'язуванні конкретних задач, які відповідають профілю спеціальності;
- ознайомити студента з основними закономірностями механічних та фізичних явищ і тим самим підготувати студентів до осмисленого сприйняття інших дисциплін механічного та спеціального профілів;
- сприяти засвоєнню вміння роботи з науково-методичною літературою, використанню наукових знань у власній та суміжних галузях.

Теоретична механіка забезпечує вивчення таких спеціальностей як прикладна механіка, опір матеріалів, теорія машин і механізмів, деталі машин.

Мета вивчення дисципліни – дати студентам теоретичні знання і практичний досвід в галузях: визначення кінематичних параметрів рухомої точки і твердого тіла (у випадку найпростіших форм руху і плоскопаралельного руху), складання динамічних рівнянь руху (математичних моделей) системи твердих тіл у випадку найпростіших форм руху і плоскопаралельного руху з використанням загальних теорем динаміки та рівнянь Лагранжа другого роду, визначення умов рівноваги плоскої довільної системи сил та просторових валів.

Дані методичні вказівки створені для виконання розрахунково-графічної роботи (РГР) з теоретичної механіки, що складається з 5 задач, з них одна по статиці, дві з кінематики, 2 з динаміки. При цьому в роботі надаються крім завдань до РГР повні розв'язання демонстраційних задач.

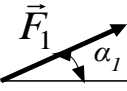
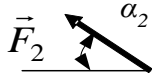
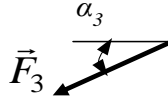
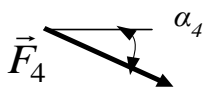
РОЗДІЛ 1. СТАТИКА

Завдання С-1. Довільна систем сил в площині.

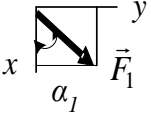
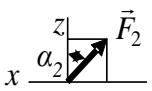
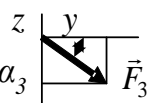
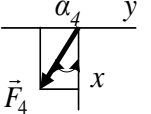
Визначення реакцій в'язей суцільної конструкції

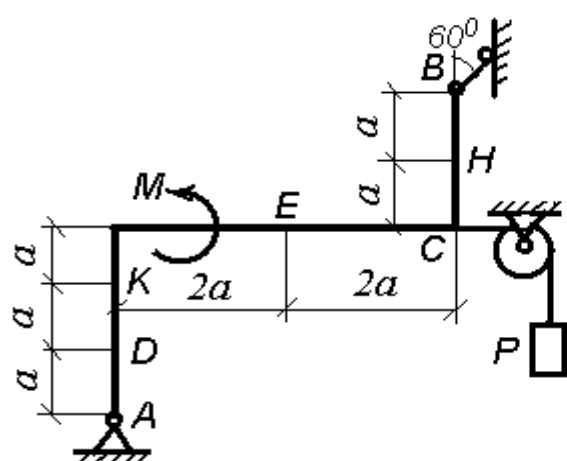
Жорстка рама (рис. 1.0-1.9), закріплена в точці *A* шарнірно, а в точці *B* прикріплена до невагомому стрижня. Знайти реакції в точках *A*, *B*.

ТАБЛИЦЯ С-1

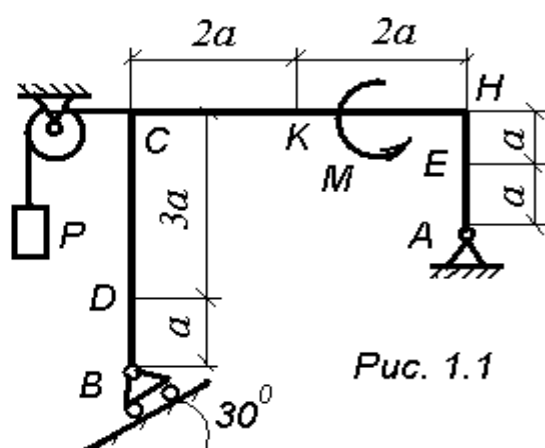
СИЛИ								
	$F_1=10 \text{ кН}$		$F_2=20 \text{ кН}$		$F_3=30 \text{ кН}$		$F_4=40 \text{ кН}$	
НОМЕР УМОВ	ТОЧКА ПРИКЛАДА ННЯ СИЛИ	α_1 , ГРАД.	ТОЧКА ПРИКЛАДА ННЯ СИЛИ	α_2 , ГРАД.	ТОЧКА ПРИКЛАДА ННЯ СИЛИ	α_3 , ГРАД.	ТОЧКА ПРИКЛАДА ННЯ СИЛИ	α_4 , ГРАД.
0	Н	30	-	-	-	-	К	60
1	-	-	Д	15	Е	60	-	-
2	К	75	-	-	-	-	Е	30
3	-	-	К	60	Н	30	-	-
4	Д	30	-	-	-	-	Е	60
5	-	-	Н	30	-	-	Д	75
6	Е	60	-	-	К	15	-	-
7	-	-	Д	60	-	-	Н	15
8	Н	60	-	-	Д	30	-	-
9	-	-	Е	75	К	30	-	-

ТАБЛИЦЯ С-2

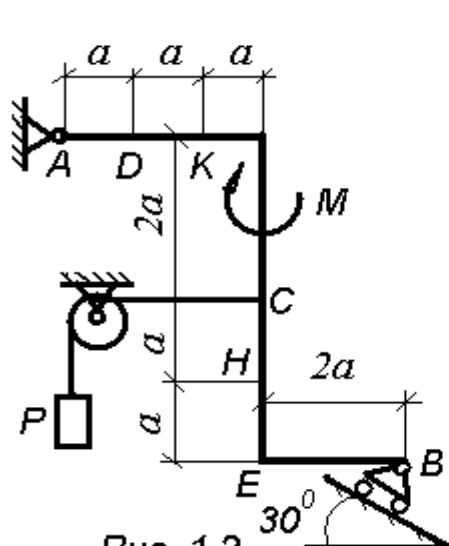
СИЛИ								
	$F_1=6 \text{ кН}$		$F_2=8 \text{ кН}$		$F_3=10 \text{ кН}$		$F_4=12 \text{ кН}$	
НОМЕР УМОВ	ТОЧКА ПРИКЛАДА ННЯ СИЛИ	α_1 , ГРАД.	ТОЧКА ПРИКЛАДА ННЯ СИЛИ	α_2 , ГРАД.	ТОЧКА ПРИКЛАДА ННЯ СИЛИ	α_3 , ГРАД.	ТОЧКА ПРИКЛАДА ННЯ СИЛИ	α_4 , ГРАД.
0	Е	60	Н	30	-	-	-	-
1	-	-	Д	60	Е	30	-	-
2	-	-	-	-	К	60	Е	30
3	К	30	-	-	Д	0	-	-
4	-	-	Е	30	-	-	Д	60
5	Н	0	К	60	-	-	-	-
6	-	-	Н	90	Д	30	-	-
7	-	-	-	-	Н	60	К	90
8	Д	30	-	-	К	0	-	-
9	-	-	Д	90	-	-	Н	30



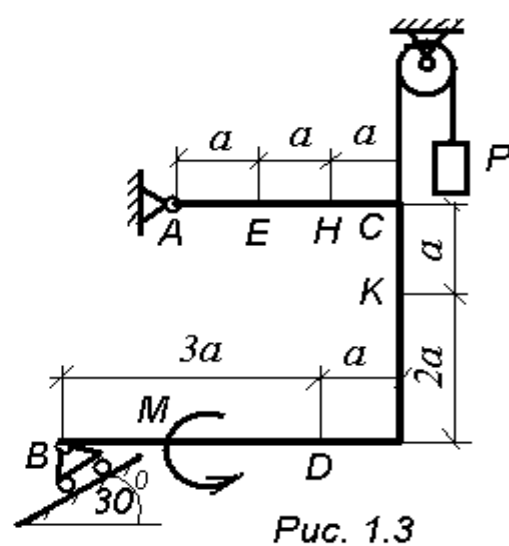
Puc. 1.0



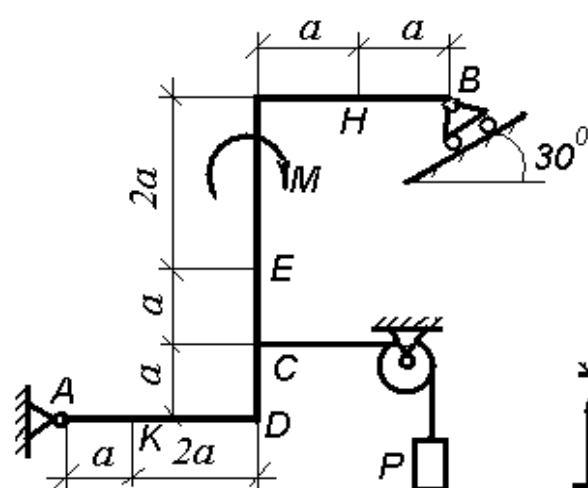
Puc. 1.1



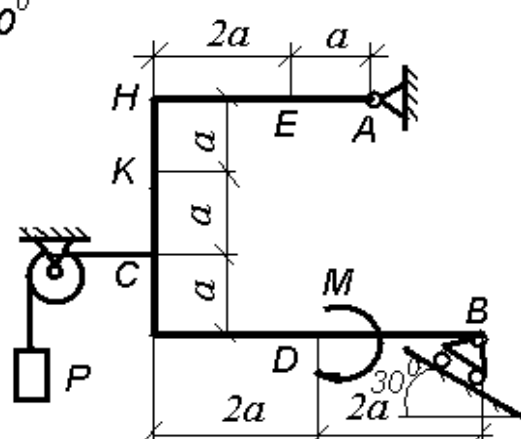
Puc. 1.2



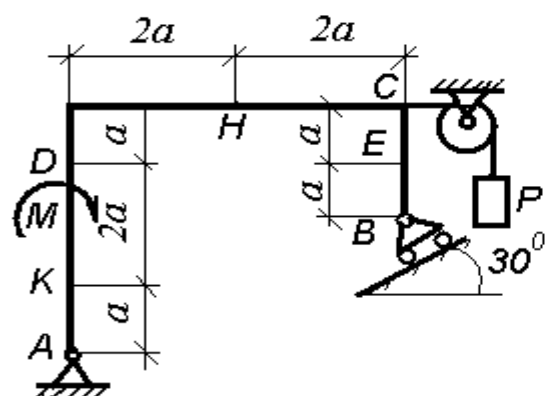
Puc. 1.3



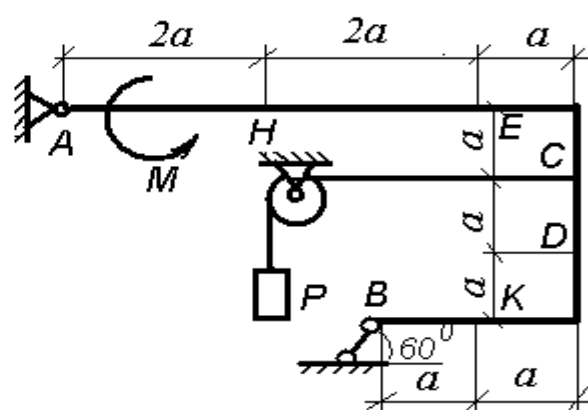
Puc. 1.4.



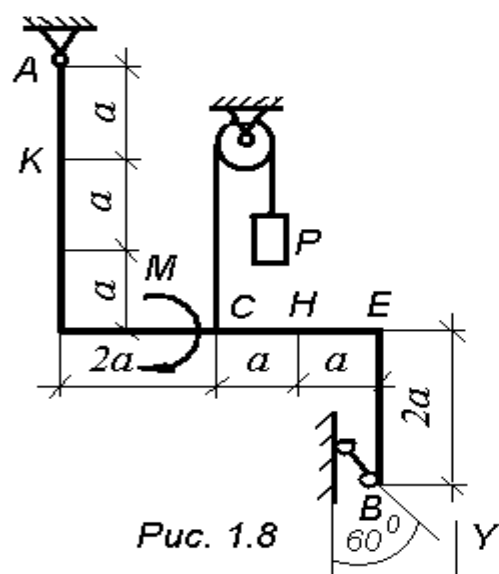
Puc. 1.5.



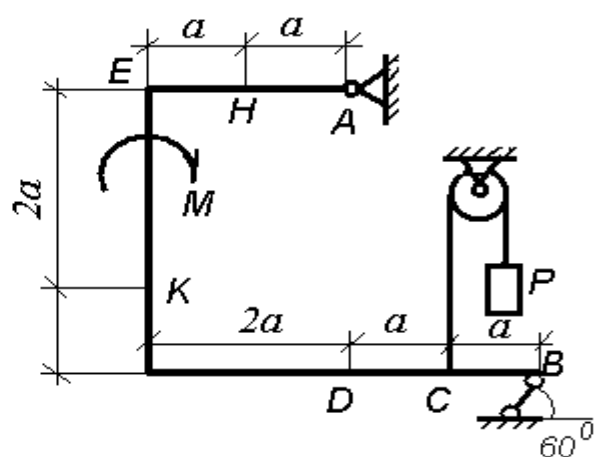
Puc. 1.6



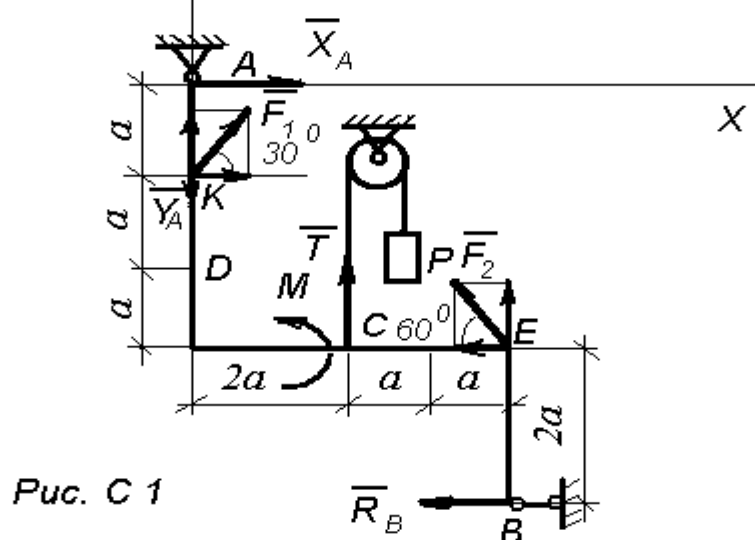
Puc. 1.7



Puc. 1.8



Puc. 1.9



Puc. C 1

ПРИКЛАД С-1

Дано: $F_1 = 10 \text{ кН}$; $F_2 = 20 \text{ кН}$; $P = 30 \text{ кН}$; $M = 40 \text{ кНм}$; $a = 1 \text{ м}$.

Визначити: реакції в точках А, В, викликані заданими навантаженнями.

Розв'язання

1. Розглянемо рівновагу рами (рис. С -1).
2. Зобразимо і позначимо всі сили, що діють на раму, включаючи реакції в'язей. Реакцію нерухомої шарнірної опори в точці А замінимо двома її складовими, а реакцію в стрижні направимо по стрижню. Слід зазначити, що сила натягу в тросі рівна за модулем силі тяжіння вантажу, закріпленого на його кінці: $T = P$.
3. Для отриманої плоскої системи сил складемо рівняння рівноваги:

$$\sum_1^n X_i = X_A + F_1 \cdot \cos 30^\circ - F_2 \cdot \cos 60^\circ - R_B = 0;$$

$$\sum_1^n Y_i = -Y_A + F_1 \cdot \cos 60^\circ + F_2 \cdot \cos 30^\circ + T = 0;$$

$$\sum_1^n m_{Ai} = F_1 \cdot \cos 30^\circ \cdot a + T \cdot 2a - F_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot 3a + F_2 \cdot \cos 30^\circ \cdot 4a - R_B \cdot 5a + M = 0.$$

4. Підставимо в складені рівняння значення заданих величин і визначимо реакції.

Відповідь: $X_A = 30,8 \text{ кН}$; $Y_A = 52,3 \text{ кН}$; $R_B = 29,5 \text{ кН}$.

Модуль реакції в шарнірі А дорівнює: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 60,7 \text{ кН}$

Перевірка: для перевірки правильності рішення необхідно скласти умову рівноваги для даної системи сил у новій системі координат.

РОЗДІЛ 2.. КІНЕМАТИКА

Завдання К -1. Визначення швидкості та прискорення точки по заданим рівнянням її руху

Точка **В** рухається в площині ХОУ. Закон руху точки задано функціями: $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$ (табл. К -1), де x та y виражено в сантиметрах, t – в секундах.

Знайти рівняння траєкторії точки; для моменту часу $t_1=1c$ знайти швидкість і прискорення точки, а також її дотичне і нормальне прискорення и радіус кривини в відповідній точці траєкторії.

ТАБЛИЦЯ К-1

№ п/п	$x=f_1(t)$	$y=f_2(t)$		
		Для СТРОК 0-2	Для СТРОК 3-6	Для СТРОК 7-9
0	$6\cos(\pi t/6) - 3$	$12\sin(\pi t/6)$	$2t^2 + 2$	$4\cos(\pi t/6)$
1	$4\cos(\pi t/6)$	$-6\cos(\pi t/3)$	$8\sin(\pi t/4)$	$6\cos^2(\pi t/6)$
2	$2 - 3\cos(\pi t/6)$	$-3\sin^2(\pi t/6)$	$(2+t)^2$	$4\cos(\pi t/3)$
3	$t-4$	$9\sin(\pi t/6)$	$2t^3$	$10\cos(\pi t/6)$
4	$4-2t$	$3\cos(\pi t/3)$	$2\cos(\pi t/4)$	$-4\cos^2(\pi t/6)$
5	$2-t$	$10\sin(\pi t/6)$	$2 - 3t^2$	$12\cos(\pi t/3)$
6	$2t$	$6\sin^2(\pi t/6)$	$2\sin(\pi t/4)$	$-3\cos(\pi t/6)$
7	$8\sin(\pi t/6) - 2$	$-2\sin(\pi t/6)$	$(t+1)^3$	$-8\cos(\pi t/3)$
8	$12\sin(\pi t/6)$	$9\cos(\pi t/3)$	$2 - t^3$	$9\cos(\pi t/6)$
9	$4 - 6\sin(\pi t/6)$	$-8\sin(\pi t/6)$	$4\cos(\pi t/4)$	$-6\cos(\pi t/3)$

Приклад К-1

Дано: рівняння руху точки в площині ХОУ:

$x=12\sin(\pi t/6)$, $y=4\cos(\pi t/6)$, де x , y - в сантиметрах, t - в секундах.

Визначити: рівняння траєкторії точки; для моменту часу $t_1 = 1c$ знайти швидкість і прискорення точки, а також її дотичне і нормальне прискорення та радіус кривизни у відповідній точці траєкторії.

Розв'язання

1. Для визначення рівняння траєкторії точки виключимо з даних рівнянь руху параметр t :

$$\begin{cases} \frac{x}{12} = \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right); \\ \frac{y}{4} = \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right); \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{12^2} = \sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right); \\ \frac{y^2}{4^2} = \cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right); \end{cases}$$

$\frac{x^2}{12^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ рівняння траєкторії точки - еліпс з півсями 12 см і 4 см

(рис. К -1).

2. Визначимо положення точки на траєкторії в момент часу $t_1 = 1c$:

$$x_1 = 12 \sin(\pi t / 6) = 6 (cm), \quad y_1 = 4 \cos(\pi t / 6) = 3,48 (cm).$$

3. Швидкість точки знаходимо по її проекціям на координатні осі:

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = 2\pi \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right); \quad v_{1x} = 5,46 (cm / c);$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = -\frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right); \quad v_{1y} = -1,05 (cm / c);$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad ; \text{ при } t_1 = 1c \quad v_1 = 5,56 (cm / c).$$

4. . Аналогічно знайдемо прискорення точки при $t_1 = 1c$:

$$a_x = \dot{v}_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\pi^2}{3} \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right); \quad a_{1x} = -1,64 (cm / c^2);$$

$$a_y = \dot{v}_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{9} \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right); \quad a_{1y} = -0,95 (cm / c^2);$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad ; \text{ при } t_1 = 1c \quad a_1 = 1,89 (cm / c^2).$$

5. Знаходимо дотичне прискорення точки, знаючи чисельні значення всіх величин, що входять в праву частину виразу:

$$a^\tau = \frac{dv}{dt} = \left| \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} \right|; \quad \text{при } t_1 = 1c \quad a_1^\tau = 1,43 (cm / c^2).$$

6. Нормальне прискорення точки визначаємо за формулою $a^n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$, підставляючи відомі чисельні значення. При $t_1 = 1\text{с}$,

отримаємо $a_1^n = 1,24(\text{см}/\text{с}^2)$.

7. Визначаємо радіус кривизни траєкторії: $\rho = v^2/a^n$ при $t_1 = 1\text{с}$ $\rho_1 = 24,93(\text{см})$.

відповідь: $v_1 = 5,56(\text{см}/\text{с})$; $a_1 = 1,89(\text{см}/\text{с}^2)$; $a_{1\tau} = 1,43(\text{см}/\text{с}^2)$; $a_{1n} = 1,24(\text{см}/\text{с}^2)$; $\rho_1 = 24,93(\text{см})$.

Завдання К2 Визначення швидкостей і прискорень точок

багатоланкового механізму

Плоский механізм складається з стрижнів **1, 2, 3**, ползунів **B** і **E** (рис. К 2.0 – К 2.1) або з стрижнів **1, 2, 3, 4** і ползунів **B** або **E** (рис. К 2.2 – К 2.9), з'єднаних між собою та з нерухомими опорами O_1, O_2 шарнирно; точки **D, B** і **K** знаходяться в серединях відповідних стрижнів довжиною: $l_1 = 0,4\text{ м}$, $l_2 = 1,2\text{ м}$, $l_3 = 1,4\text{ м}$, $l_4 = 0,6\text{ м}$. Положення механізму визначається кутами: $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$. Значення цих кутів та інших заданих величин вказано в таблицях К -2.1 (для рис. К 2.0 – К 2.4) і К 2.2 (для рис. К 2.5 – К 2.9); в табл. К - 2.2 ω_1, ω_4 – постійні величини.

Визначити швидкості та прискорення точок і ланок плоского механізму, що вказані в таблицях.

Задані кутові швидкості та прискорення вважати направленими проти стрілки годинника, а задані швидкість \vec{v}_B та прискорення \vec{a}_B від точки **B** до **b** (рис. К 2.0 – К 2.4).

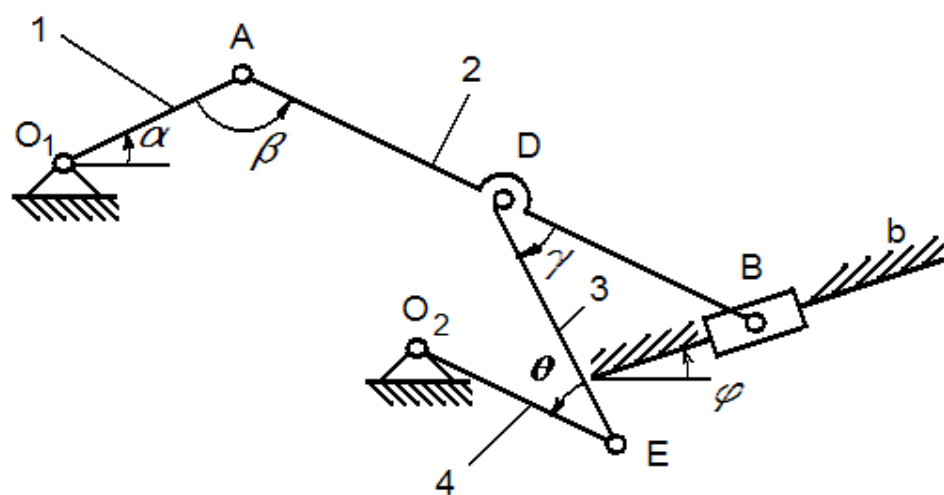


Рис. K2.2

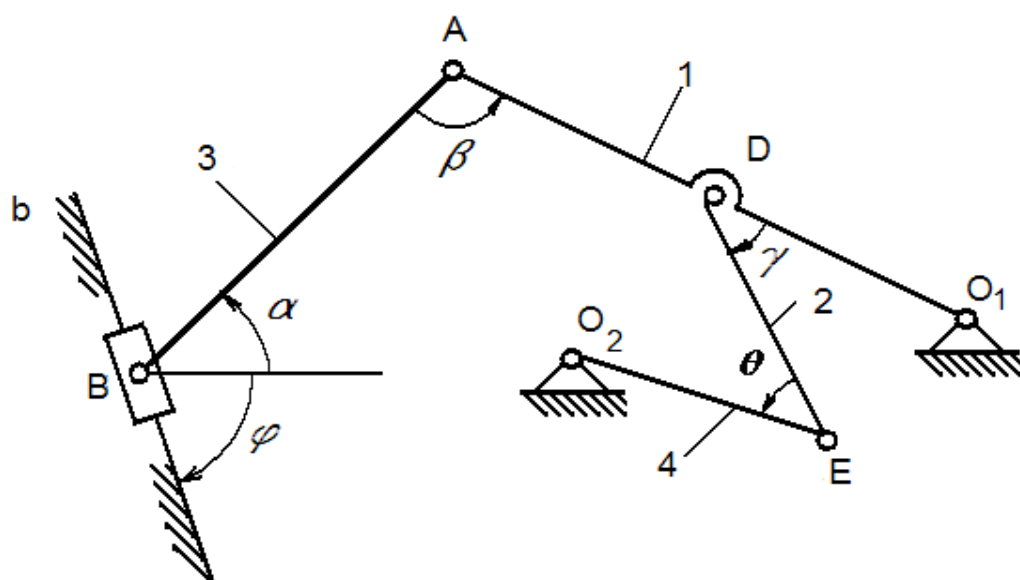


Рис. K2.3

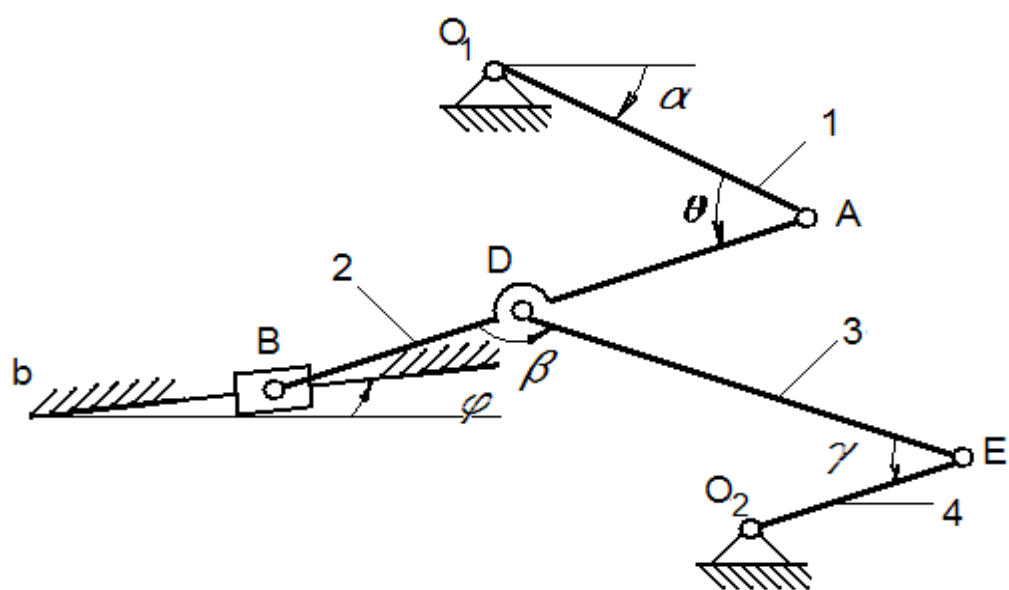


Рис. K2.4

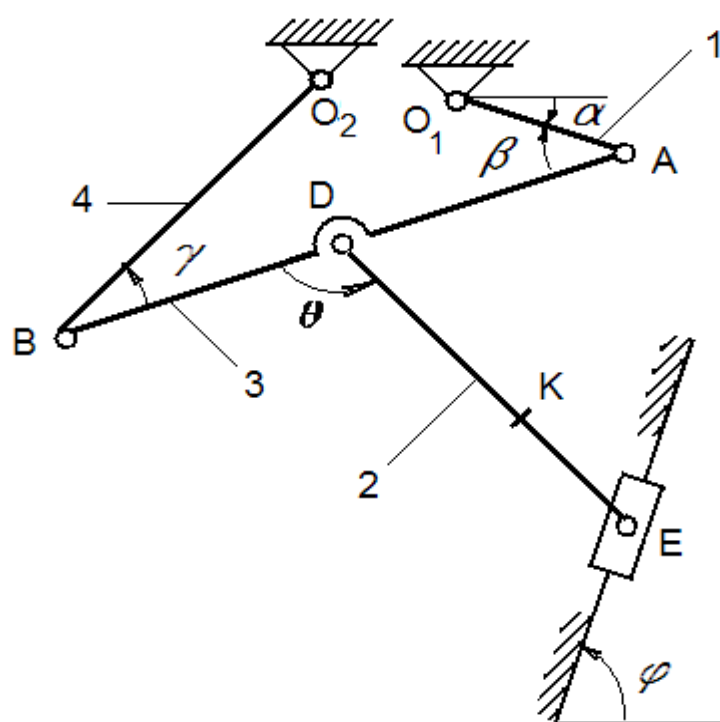


Рис. K2.5

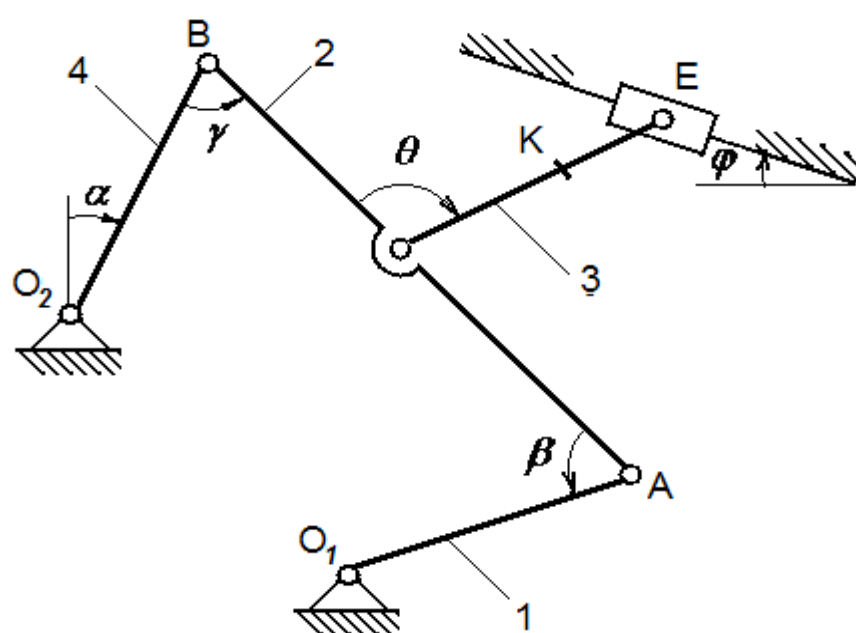


Рис. К2.6

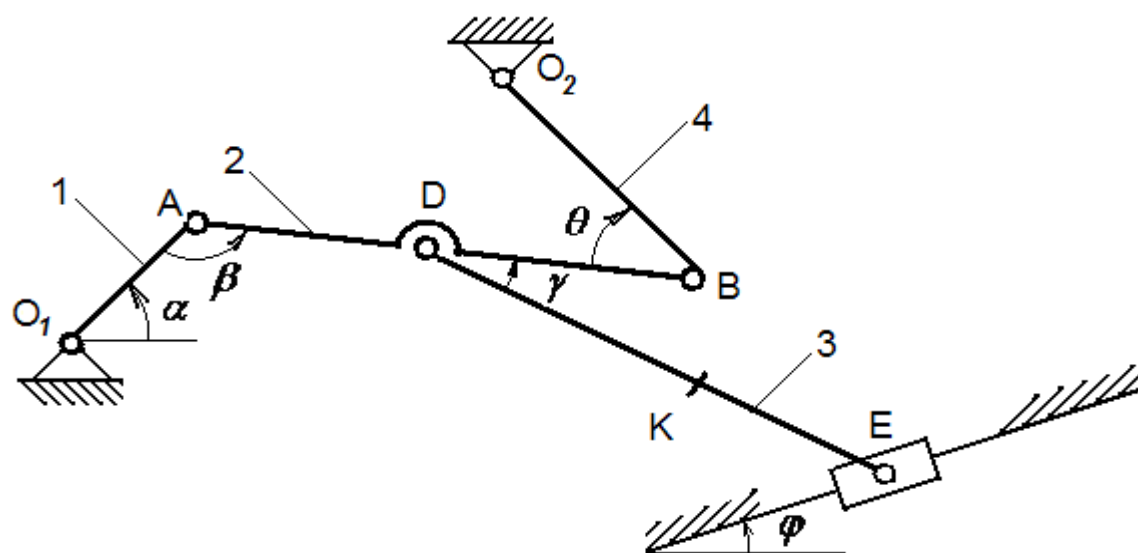


Рис. К2.7

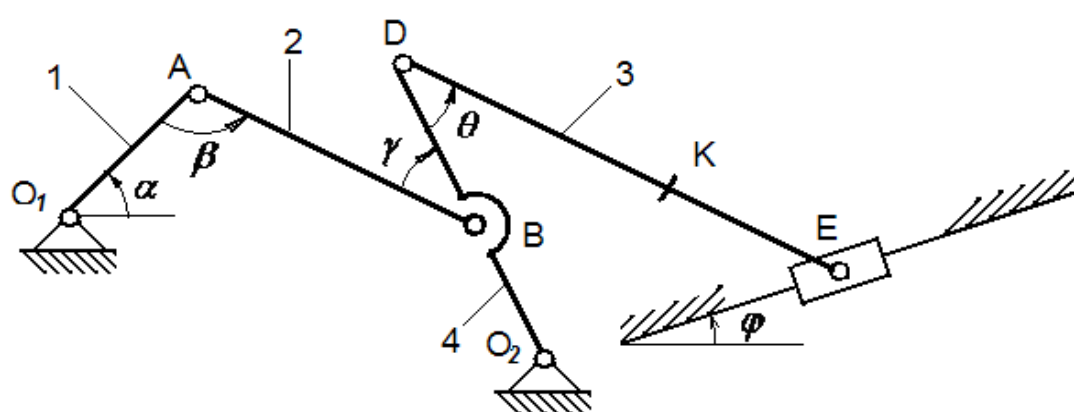


Рис. К2.8

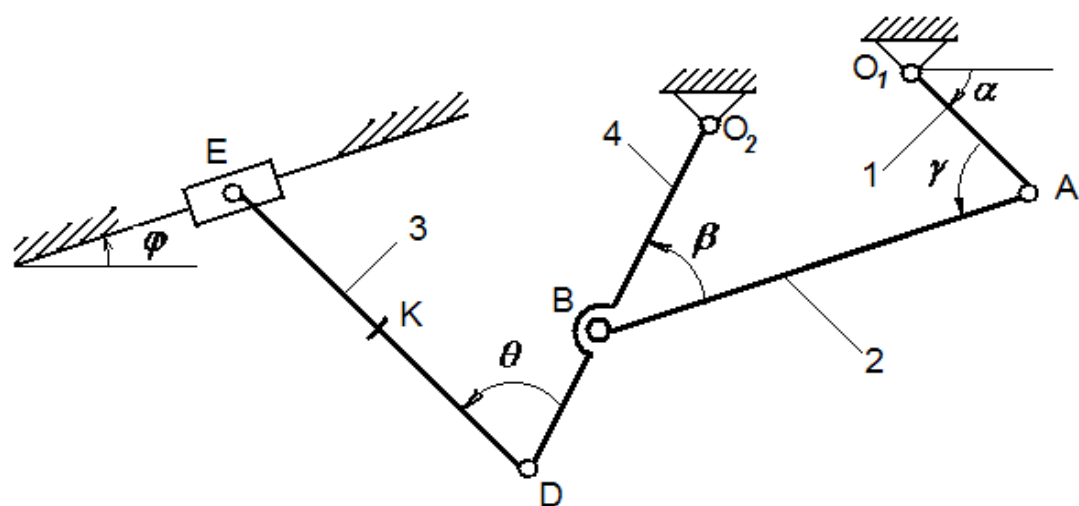


Рис. К2.9

ТАБЛИЦЯ К-2.1 (к рис. К 2.0-К 2.4)

Номер умови	Кути , град.					Дано				Знайти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1 рад/с	ε_1 рад/с ²	V_B м/с	a_B м/с ²	V точок	ω	a точки	ε
0	30	120	30	0	60	2	4	-	-	B,E	AB	B	AB
1	0	120	90	0	120	-	-	4	6	A,D	DE	A	AB
2	60	60	60	90	120	3	5	-	-	B,E	DE	B	AB
3	0	150	30	0	60	-	-	6	8	A,E	AB	A	AB
4	30	120	120	0	60	4	6	-	-	B,E	DE	B	AB
5	90	120	90	90	60	-	-	8	10	D,E	DE	A	AB
6	0	120	90	0	120	5	8	-	-	B,E	AB	B	AB
7	30	120	30	0	60	-	-	2	5	A,E	DE	A	AB
8	90	120	90	90	60	6	10	-	-	B,E	AB	B	AB
9	60	60	60	90	120	-	-	5	4	D,E	AB	A	AB

ТАБЛИЦЯ К-2.2 (к рис. К 2.5-К 2.9)

Номер умови	кути, град.					Дано		знайти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1 рад/с	ω_4 рад/с	V точек	ω звена	a точки	ε звена
0	0	60	30	0	120	6	-	B,K	DE	B	AB
1	90	150	120	90	30	-	4	A,E	DE	A	AB
2	30	60	30	0	120	5	-	B,K	AB	B	AB
3	60	150	120	90	30	-	5	A,E	DE	A	AB
4	30	30	30	0	120	4	-	D,K	AB	B	AB
5	90	120	120	90	60	-	6	A,E	AB	A	AB
6	90	150	120	90	30	3	-	B,E	DE	B	AB
7	0	60	30	0	120	-	2	A,K	DE	A	AB
8	60	150	120	90	30	2	-	D,E	AB	B	AB
9	30	30	30	0	120	-	8	A,K	AB	A	AB

Приклад К-2

Дано: $l_1=0,4$ м, $l_2=1,2$ м, $l_3=1,4$ м, $l_4=0,6$ м, $\alpha=30^\circ$, $\beta=60^\circ$, $\gamma=30^\circ$, $\varphi=0^\circ$, $\theta=120^\circ$;
 $AD=DB$; $\omega_1=5$ рад/с

Знайти: v_B , v_E , a_B , ω_{AB} , ε_{AB} .

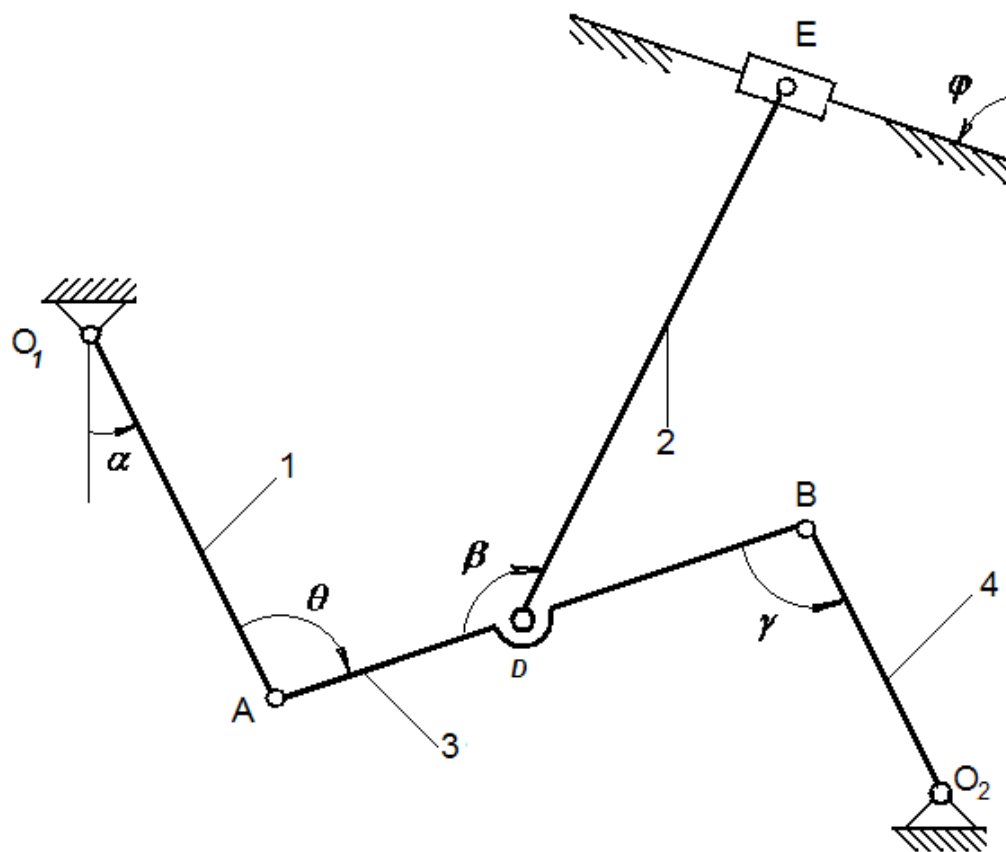
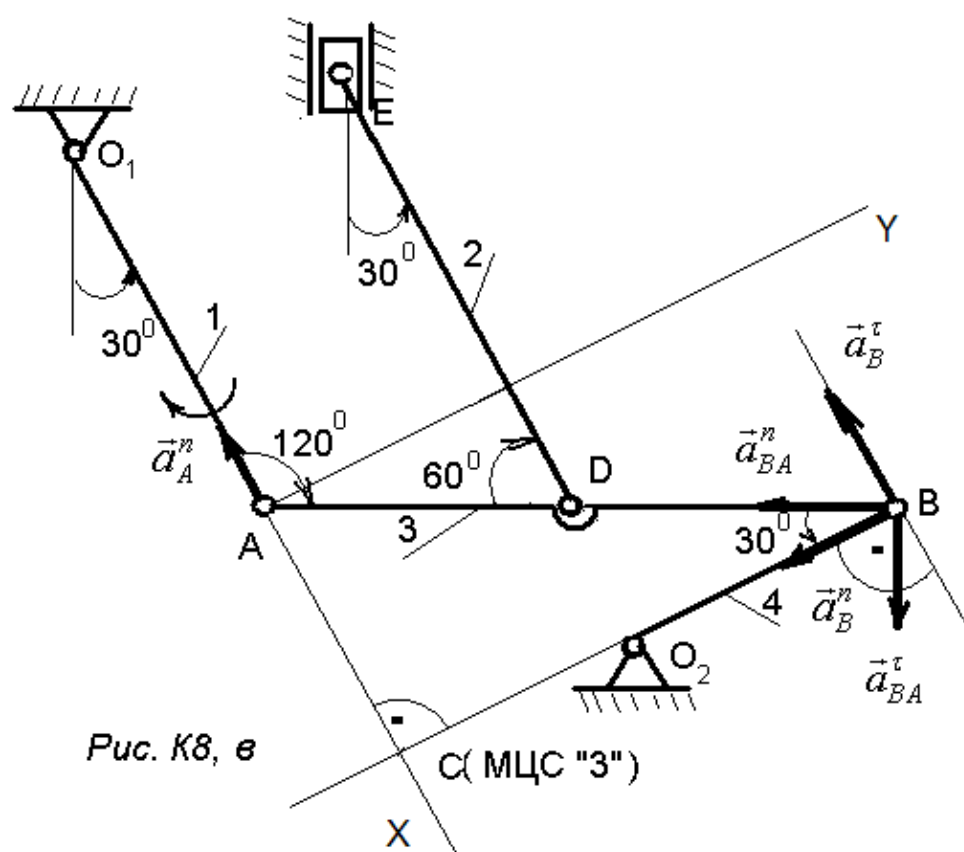
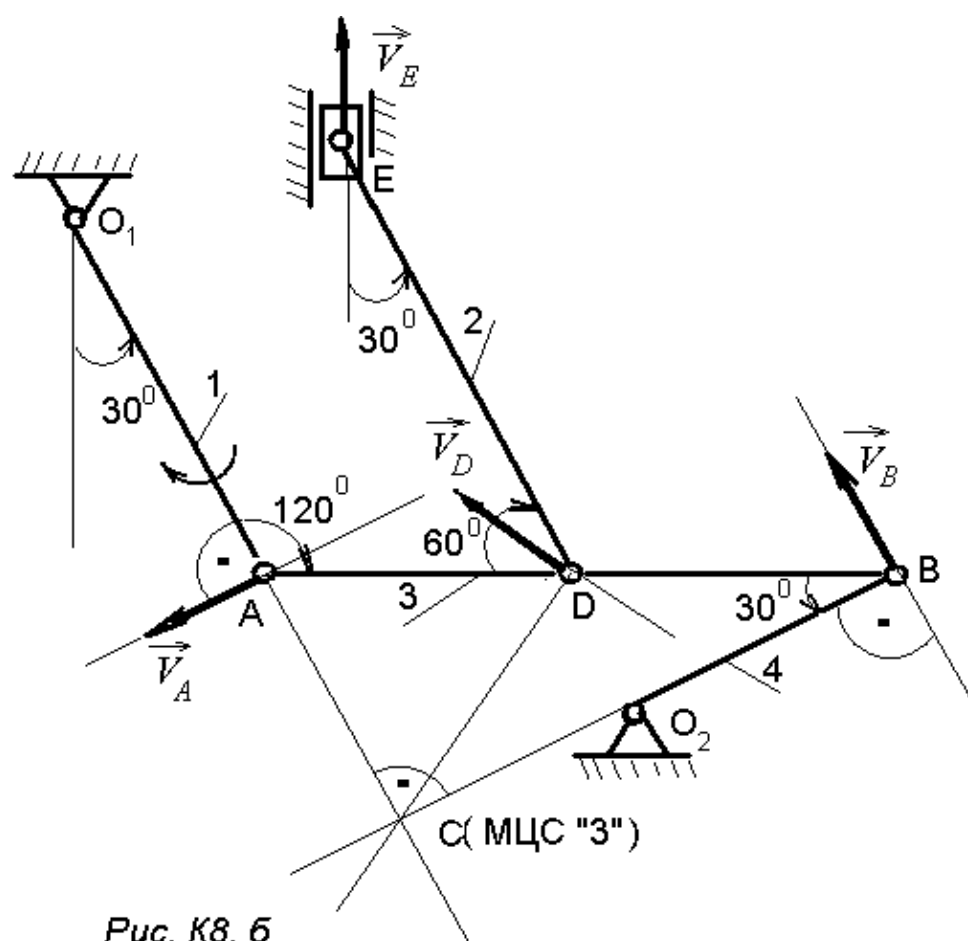


Рис. К8,а



1. Будуємо положення механізму у відповідності з заданими кутами (рис. К-8, а).

Кінематичний аналіз:

- ланки O_1A і O_2B здійснюють обертальний рух;
- ланки AB і DE здійснюють плоскопаралельний рух;
- повзун E рухається поступально.

2. Для того, щоб визначити швидкість точки B , що належить ланці AB , необхідно знайти швидкість якої-небудь точки цієї ланки. Такою точкою є точка A , що належить одночасно і ланці O_1A , здійснює обертальний рух з кутовою швидкістю $\omega_1 = 5$ рад / с по ходу годинникової стрілки відносно нерухомого шарніра в точці O_1 . Точка A рухається разом з кривошипом O_1A по колу радіуса, рівним довжині ланки $l_1 = 0,4$ м. Швидкість точки A може бути визначена виразом: $v_A = \omega_{111} = 5 \cdot 0,4 = 2$ (м / с). Вектор швидкості точки A перпендикулярний ланці 1 (O_1A) і спрямований у бік обертання кривошипа.

3. На підставі теореми про проекції швидкостей двох точок, що належать тілу, яке здійснює плоский рух, знаходимо напрям і модуль швидкості точки B :

$$Pr_{AB} \vec{v}_A = Pr_{AB} \vec{v}_B, \quad v_A \cdot \cos 30^\circ = v_B \cdot \cos 60^\circ, \quad v_B = 3,46 \text{ (м/с)}.$$

Вектор швидкості точки B перпендикулярний ланці 4 (O_2B), оскільки точка B разом з ланкою 4 здійснює рух по колу.

4. Для визначення лінії дії вектора швидкості точки D побудуємо миттєвий центр швидкостей (МЦШ) ланки AB : МЦШАВ - точка C , що лежить на перетині перпендикулярів, проведених з точок A і B до векторів їх швидкостей. Вектор швидкості точки D перпендикулярний до відрізка DC - відстань від точки D до миттєвого центру швидкостей ланки AB , якому точка D належить.

5. Визначаємо кутову швидкість ланки АВ: $\omega_{AB} = v_A / AC$, де AC - катет, що лежить проти кута рівного 30^0 , $AC = 0,5 \cdot AB = 0,7$ (м); $\omega_{AB} = 2/0,7 = 2,86$ (рад / с).

6. Визначаємо лінію дії, напрямок і модуль вектора швидкості повзуна, прийнятого за матеріальну точку Е.

Лінія дії вектора паралельна напрямних повзуна (збігається з віссю повзуна), який рухається поступально. Напрям вектора і його модуль знаходимо, використовуючи теорему про проекції швидкостей двох точок, що належать одному й тому тілу:

$$Pr_{ED}\vec{v}_E = Pr_{ED}\vec{v}_D, \quad v_E \cdot \cos 30^0 = v_D \cdot \cos 30^0, \quad v_E = v_D = v_A = 2 \text{ (м/с)}.$$

7. Визначаємо a_B . Точка В належить ланці АВ. Щоб знайти її прискорення, необхідно знати прискорення якої-небудь точки цієї ланки (полюса) і траєкторію точки В. Точка В рухається по колу разом з кривошипом O_2B .

Прискорення точки В при плоскому русі тіла дорівнює геометричній сумі прискорення полюса А і прискорення точки В при обертанні навколо полюса А: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$

Розклавши вектори прискорень на складові по натуральним осям, одержимо наступну векторну рівність:

$$\vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau.$$

Вектори прискорень будуть спрямовані таким чином: вектор \vec{a}_B^n - по радіусу O_2B до центру O_2 кола; вектор \vec{a}_B^τ - перпендикулярний O_2B в будь-яку сторону; вектор \vec{a}_A^n - по радіусу O_1A до центру O_1 обертання; вектор \vec{a}_{BA}^n - по радіусу BA до центру А обертання; вектор

\vec{a}_{BA}^{τ} - перпендикулярно до ВА. Оскільки за умовою задачі точка А, що належить ланці O_1A , рухається рівномірно, то її дотичне прискорення дорівнює 0, і тому на кресленні вектор $\vec{a}_A^{\tau}=0$ не зображаємо.

8. Спроектуємо обидві частини рівняння на координатні осі Х і Y:

$$X: -a_B^{\tau} = -a_A^n + a_{BA}^{\tau} \cos 30^{\circ} - a_{BA}^n \cos 60^{\circ};$$

$$Y: -a_B^n = -a_{BA}^{\tau} \cos 60^{\circ} - a_{BA}^n \cos 30^{\circ}.$$

9. Визначаємо a_B^n , a_A^n , a_{BA}^n :

$$a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 25 \cdot 0,4 = 10 (\text{м} / \text{с}^2); \quad a_B^n = \frac{v_B^2}{l_4} = 19,95 (\text{м} / \text{с}^2);$$

$$a_{BA}^n = \omega_{3(AB)}^2 l_3 = 2,86^2 \cdot 1,4 = 11,45 (\text{м} / \text{с}^2).$$

10. Підставляючи відомі значення в рівняння, отримані при проектуванні векторної суми, знаходимо a_{BA}^{τ} и a_B^{τ} : $a_B^{\tau} = -1,66 (\text{м} / \text{с}^2)$,

$$a_{BA}^{\tau} = 20,07 (\text{м} / \text{с}^2).$$

11. Знаходимо повне прискорення точки В: $a_B = \sqrt{a_B^{n^2} + a_B^{\tau^2}} = 20,02 (\text{м} / \text{с}^2)$.

12. Кутове прискорення ланки АВ визначається виразом:

$$\varepsilon_{3(AB)} = \frac{|a_{BA}^{\tau}|}{l_3} = 14,34 (\text{рад} / \text{с}^2).$$

Відповідь: $v_B = 3,46 (\text{м} / \text{с})$, $v_E = 2 (\text{м} / \text{с})$, $a_B = 20,02 (\text{м} / \text{с}^2)$, $\omega_{AB} = 2,86 (\text{рад} / \text{с})$, $\varepsilon_{AB} = 14,34 (\text{рад} / \text{с}^2)$.

РОЗДІЛ 3. ДИНАМІКА

Завдання Д -1. Динаміка матеріальної точки

Дано: вантаж D масою m , отримав в точці A початкову швидкість v_0 , рухається в трубі ABC . (рис. Д 1.0-Д1.9, табл. Д -1).

На ділянці AB на вантаж крім сили ваги діють постійна сила \vec{Q} і сила опору середовища \vec{R} , що залежить від швидкості \vec{v} ; тертям вантажа на ділянці AB нехтуємо.

В точці B вантаж, не змінюючи своєї швидкості, переходить на ділянку BC труби, де на нього крім сили ваги діють сила тертя (коефіцієнт тертя о трубу $f=0,2$) і змінна сила \vec{F} , проекція якої F_x на вісь x задана в таблиці.

Визначити. закон руху вантажа на ділянці BC , $x=f(t)$, де $x=BD$.

ТАБЛИЦЯ Д-1

НОМЕР УМОВИ	m , кг	V_0 , м/с	Q , Н	R , Н	l , м	t_1 , с	F_x , Н
0	2	20	6	$0,4v$	-	2,5	$2\sin(4t)$
1	2,4	12	6	$0,8v^2$	1,5	-	$6t$
2	4,5	24	9	$0,5v$	-	3	$3\sin(2t)$
3	6	14	22	$0,6v^2$	5	-	$-3\cos(2t)$
4	1,6	18	4	$0,4v$	-	2	$4\cos(4t)$
5	8	10	16	$0,5v^2$	4	-	$-6\sin(2t)$
6	1,8	24	5	$0,3v$	-	2	$9t^2$
7	4	12	12	$0,8v^2$	2,5	-	$-8\cos(4t)$
8	3	22	9	$0,5v$	-	3	$2\cos(2t)$
9	4,8	10	12	$0,2v^2$	4	-	$-6\sin(4t)$



Рис. Д1.0

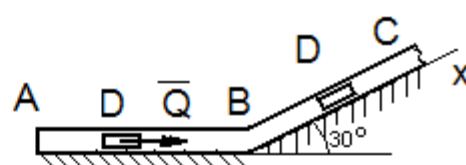


Рис. Д1.1

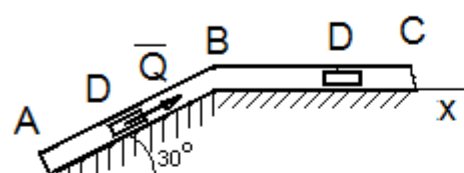


Рис. Д1.2

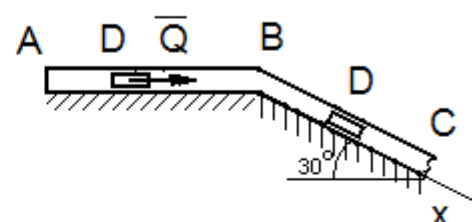


Рис. Д1.3

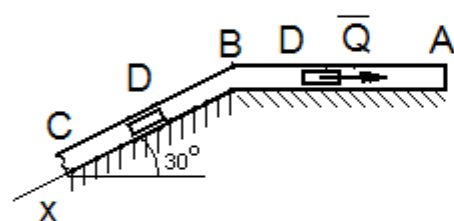


Рис. Д1.4

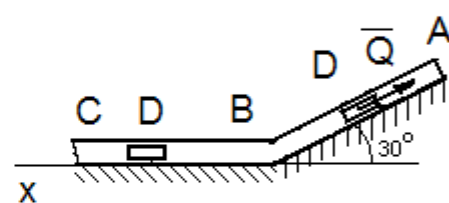


Рис. Д1.5

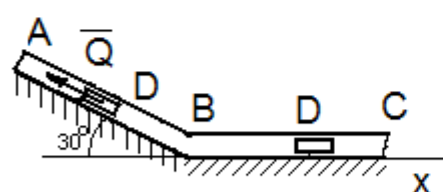


Рис. Д1.6

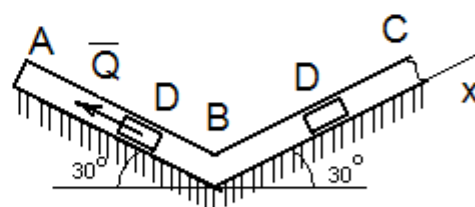


Рис. Д1.7

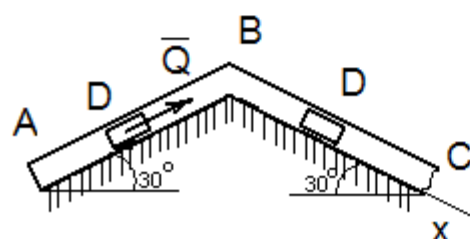


Рис. Д1.8

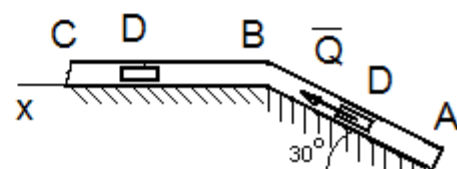


Рис. Д1.9

Приклад Д -1

На похилій ділянці АВ труби на вантаж D масою m діє сила тяжіння, постійна сила \vec{Q} і сила опору \vec{R} (рис. Д -1). Рух точки від точки А при $v_0 = 22$ м / с до точки В відбувається протягом t с.

На горизонтальній ділянці ВС на вантаж крім сили тяжіння діє сила тертя \vec{F}_{mp} і змінна сила $\vec{F} = \vec{F}(t)$.

Дано: $m = 3$ кг; $v_0 = 22$ м/с; $Q = 9$ Н; $R = \mu v(H)$; $\mu = 0,5$ кг/с; $t = 3$ с; $F = 4 \sin(2t)$; $\alpha = 30^\circ$.

Визначити: закон руху вантажу на ділянці ВС.

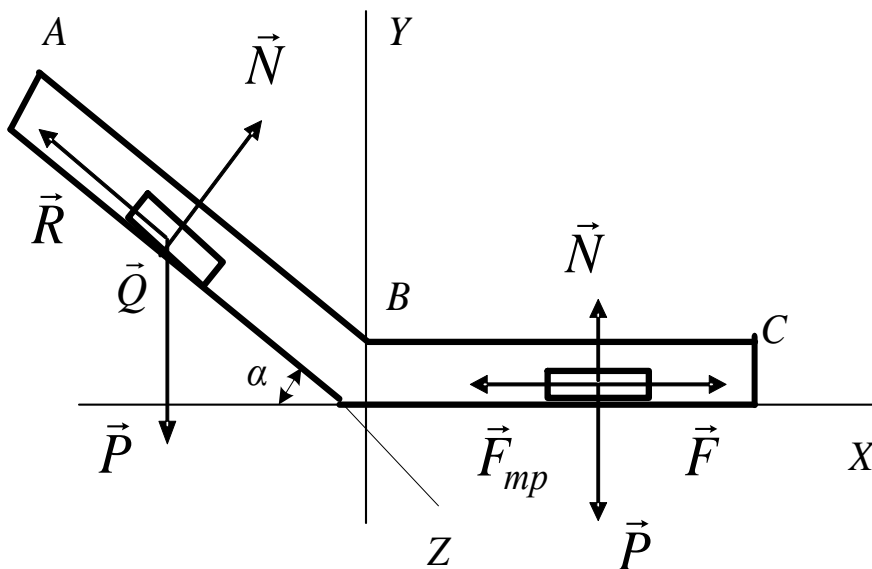


Рис. Д-1

Розв'язання

- Розглянемо рух вантажу на ділянці АВ, вважаючи вантаж матеріальною точкою. Зобразимо в довільному положенні вантаж і діючі на нього сили: \vec{P} , \vec{R} , \vec{Q} , \vec{N} . Проведемо вісь AZ і складемо диференціальне рівняння руху вантажу в проекціях на цю вісь:

$$2. \quad m \frac{dv_z}{dt} = \sum F_{kz} \quad \text{або} \quad m \frac{dv_z}{dt} = P \sin \alpha - Q - \mu v$$

або
$$m \frac{dv}{dt} = \frac{\mu}{m} \left(\frac{mg \sin \alpha}{\mu} - \frac{Q}{\mu} - v \right).$$

2. Введемо позначення: $a = \left(\frac{mg \sin \alpha}{\mu} - \frac{Q}{\mu} \right)$, звідки при заданих відомих значеннях

отримаємо $a = 12 \text{ м/с}$ при $g = 10 \text{ м/с}^2$.

3. Розділивши в рівнянні змінні і взявши інтеграли від обох частин рівності, отримаємо:

$$\frac{dv}{a-v} = \frac{\mu}{m} dt, \quad -\ln(a-v) = \frac{\mu}{m} t + C_1$$

3. При відомих початкових умовах: $t = 0$, $v_0 = 22 \text{ м/с}$ отримуємо

$C_1 = -\ln(a-22)$. Тоді рівняння прийме вигляд:

$$\ln(a-22) - \ln(a-v) = \frac{\mu}{m} t.$$

4. Після перетворення одержимо:

$$\ln \frac{a-22}{a-v} = \frac{\mu}{m} t \quad \text{або} \quad \frac{a-22}{a-v} = e^{\frac{\mu}{m} t}$$

6. З п. 5 знаходимо:

$$v = a - \frac{a-22}{e^{\frac{\mu}{m} t}}$$

Вважаючи, що $t = 3 \text{ с}$, і замінивши a , μ , m відовими чисельними значеннями, визначаємо швидкість вантажу в точці В: $v_B = 18,1 \text{ м/с}$.

7. Розглянемо рух вантажу на ділянці ВС. Знайдена швидкість v_B буде для руху вантажу на цій ділянці бути початковою швидкістю ($v_0 = v_B$). Зобразимо в довільному положенні вантаж і діючі на нього сили:

$$\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{mp}, \vec{F}.$$

4. Проведемо з точки В осі ВХ і ВУ і складемо диференціальне рівняння руху вантажу в проекції на вісь ВХ:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -F_{mp} + F, \quad \text{де } F_{mp} = fN.$$

5. Для визначення N складемо рівняння в проекції на вісь BY . Так як в напрямку BY немає руху, то, тому $0 = N - mg$, звідки $N = mg$. Отже, $F_{mp} = fmg$. Враховуючи, що $F = 4 \sin(2t)$, рівняння прийме вигляд:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -fmg + 4 \sin(2t).$$

Розділивши обидві частини рівності на m , отримаємо:

$$\frac{dv_x}{dt} = -fg + \frac{4}{m} \sin(2t) \quad \text{або} \quad \frac{dv_x}{dt} = 1,33 \sin(2t) - 2,$$

де $4/m = 1,33$; $fg = 2 \text{ м/с}^2$ при $f = 0,2$.

6. Помноживши обидві частини рівняння на dt і проінтегрувавши його,

$$\text{знайдемо: } v_x = -\frac{1,33}{2} \cos(2t) - 2t + C_2.$$

7. При відомих початкових умовах: $t = 0$, $v_0 = v_B = 18,1 \text{ м/с}$ - отримаємо

$$C_2 = 18,1 + 1,33 / 2 = 18,8.$$

8. Рівняння для знайденої C_2 прийме вигляд:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 18,8 - 2t - 0,67 \cos(2t)$$

9. Помножимо обидві частини на dt і знову інтегруючи, отримаємо:

$$x = 18,8t - t^2 - 0,33 \sin(2t) + C_3.$$

10. При $t = 0$, $x = 0$, $C_3 = 0$, тоді закон руху вантажу остаточно буде представлений виразом:

$$x = 18,8t - t^2 - 0,33 \sin(2t).$$

Відповідь:

$$x = 18,8t - t^2 - 0,33 \sin(2t).$$

Завдання Д-2. Застосування теореми про зміну кінетичної енергії до вивчення руху механічної системи

Дано. Механічна система складається з катків **1** і **2** (або катка і рухомого блока), ступінчастого шківу **3** з радіусами $R_3 = 0,3 \text{ м}$, $r_3 = 0,1 \text{ м}$ і радіусом інерції відносно осі обертання $\rho_3 = 0,2 \text{ м}$, блока **4** радіуса $R_4 = 0,2 \text{ м}$ і вантажів **5** і **6** (рис. Д 2.0 – Д 2.9, табл. Д-2); тіла **1** і **2** вважати суцільними однорідними циліндрами, а масу блока **4** – рівномірно розподілену по ободу. Коефіцієнт тертя вантажів $f=0,1$. До одного з тіл прикріплено пружину з коефіцієнтом жорсткості c .

Під дією сили $F = f(s)$, залежної від переміщення s точки її прирозкладання, система приходить в рух зі стану спокою; деформація пружини в момент початку руху дорівнює нулю. При русі на шків **3** діє постійний момент M сил опору (від тертя в підшипниках).

Всі катки котяться по площинах без ковзання. Якщо за завданням маси вантажів **5** і **6** або маси **1** (рис. Д 2.0-2.4) і **2** (рис. Д 2.5-2.9) дорівнюють нулю, то на рисунку їх можна не зображати.

Визначити: значення шуканої величини в той момент часу, коли переміщення s стане рівним $s_1 = 0,2 \text{ м}$.

ТАБЛИЦЯ Д-2

НОМЕР УМОВ	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	m_4 , кг	m_5 , кг	m_6 , кг	c , Н/м	M , Нм	$F=f(s)$, Н	ЗНАЙТИ
0	2	0	4	0	6	0	180	1,2	$80(3+4s)$	v_{c1}
1	0	2	0	6	0	4	120	0,6	$20(6+5s)$	a_6
2	6	0	0	2	4	0	400	1,8	$60(4+s)$	ω_4
3	0	4	6	0	0	2	240	0,3	$40(3+8s)$	ε_3
4	4	0	0	2	0	6	320	1,5	$50(5+2s)$	v_6
5	2	0	4	0	0	6	100	0,9	$30(4+3s)$	a_{c1}
6	0	4	0	6	2	0	160	2,4	$60(2+5s)$	v_5
7	6	0	0	4	0	2	120	0,3	$80(1+4s)$	ε_4
8	0	6	2	0	4	0	200	1,2	$20(8+3s)$	ω_3
9	0	2	0	4	6	0	100	0,6	$40(3+2s)$	a_{c2}

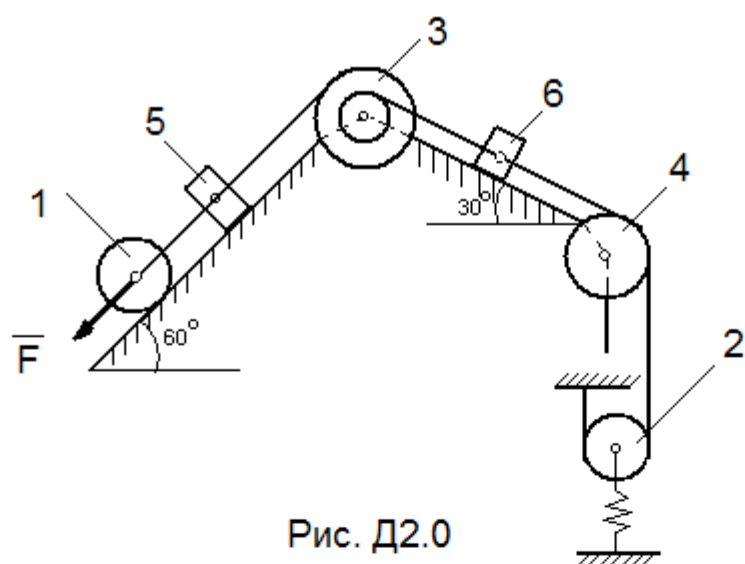


Рис. Д2.0

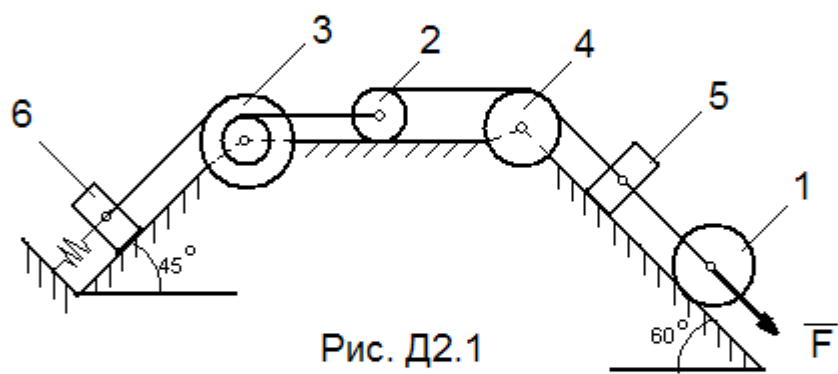


Рис. Д2.1

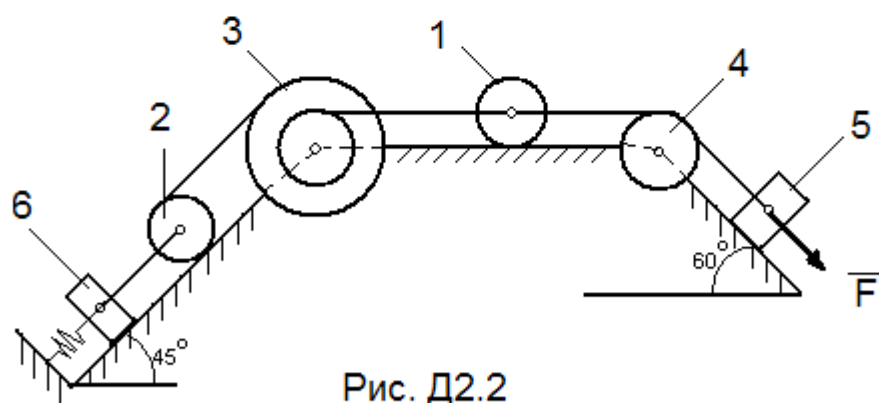
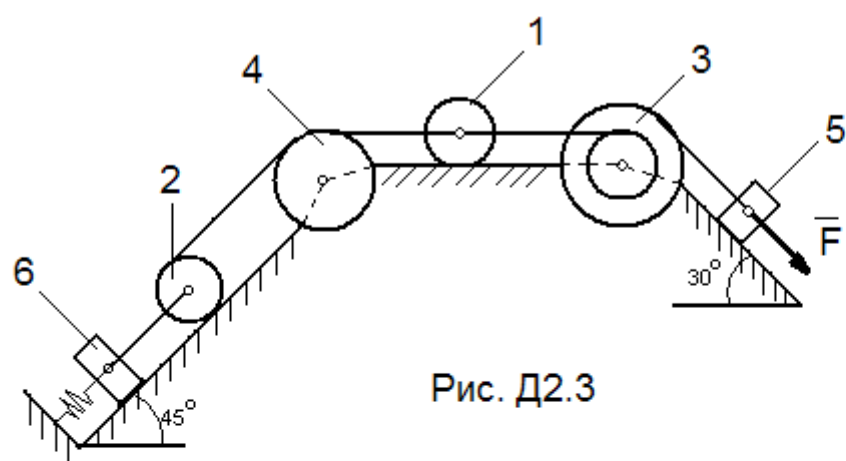
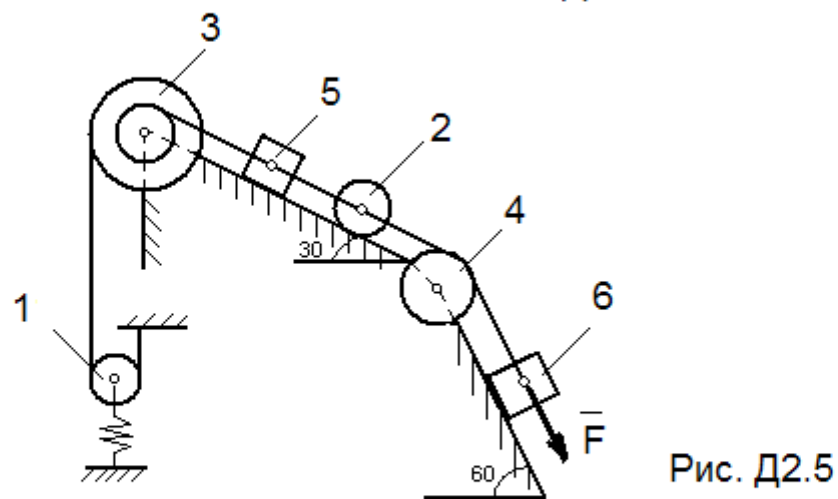
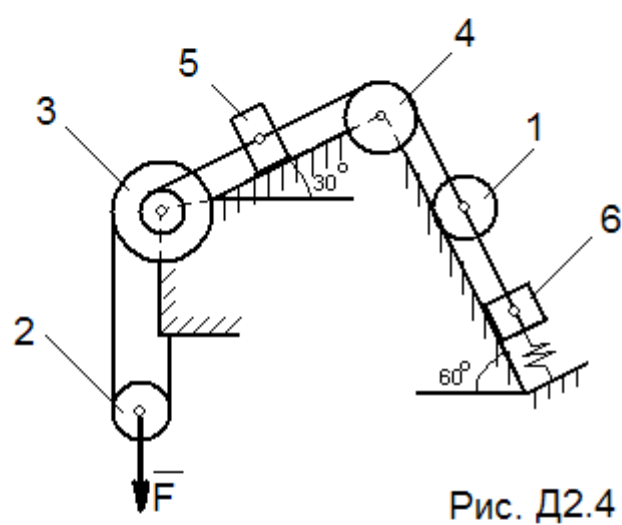
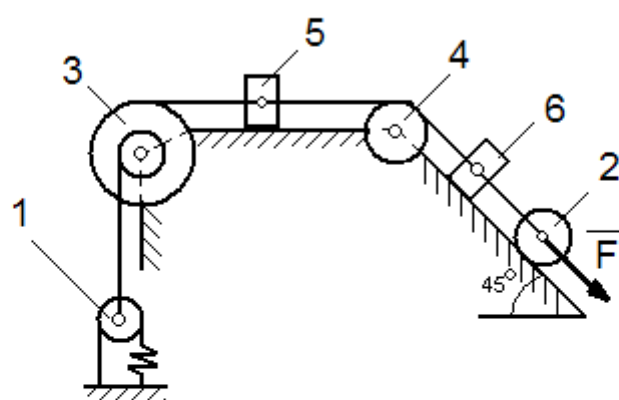
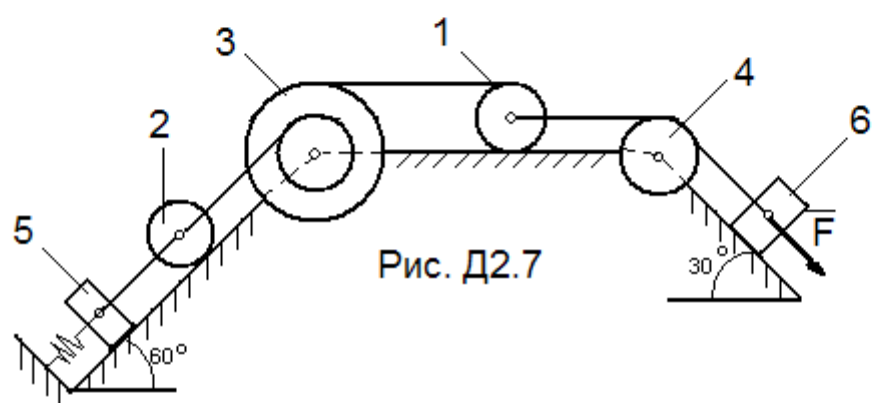
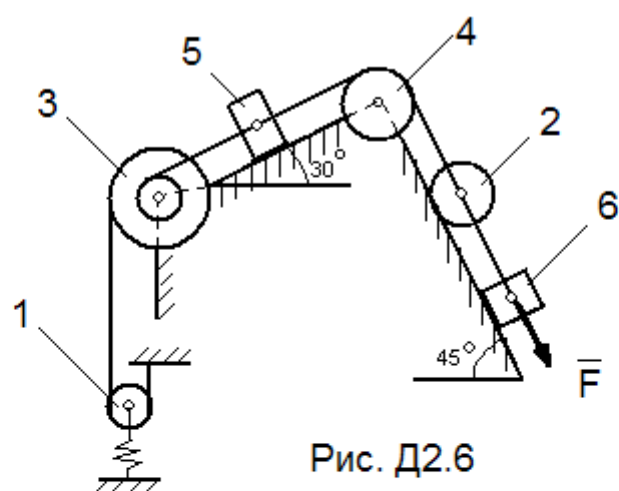


Рис. Д2.2



1





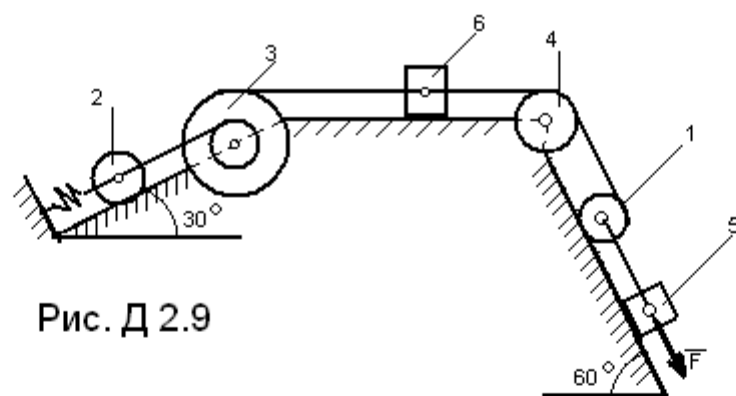


Рис. Д 2.9

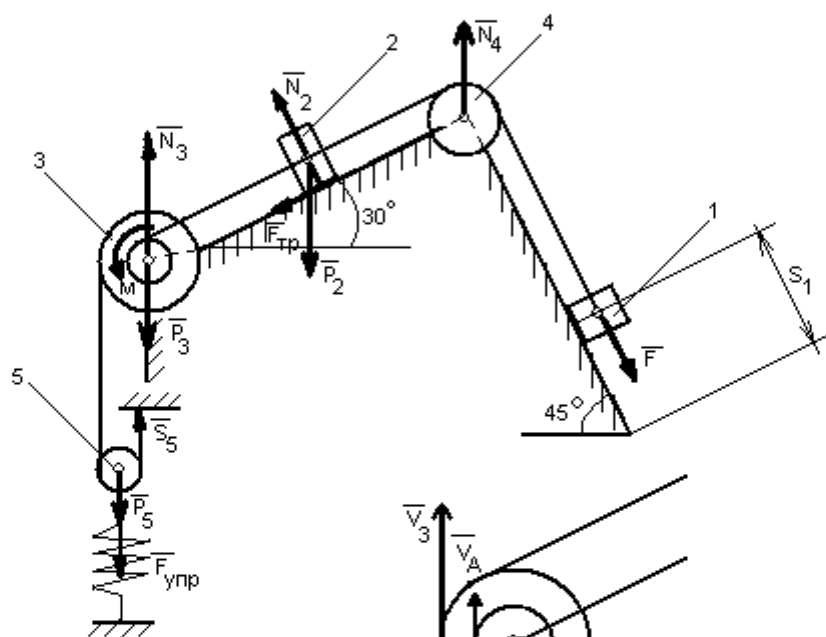
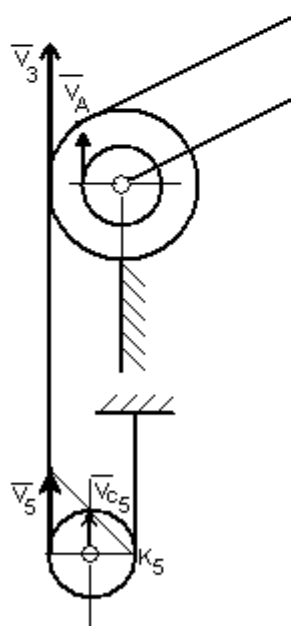


Рис. Д 2



Приклад Д-2

Дано: $m_1=0$ кг, $m_2=5$ кг, $m_3=6$ кг, $m_4=0$ кг, $m_5=4$ кг, $R_3=0,3$ м, $r_3=0,1$ м, $\rho_3=0,2$ м, $f=0,1$, $c=240$ Н/м, $M=0,6$ Нм, $F=80(3+2S)$ Н, $s_1=0,2$ м.

Визначити: v_{c5} в той момент, когда $s=s_1$.

Розв'язання

1. Розглянемо рух незмінної механічної системи, що складається з вагомих тіл 2, 3, 5 і невагомих тел 1 і 4, сполучених нитками. Зобразимо діючі на систему зовнішні сили: активні F , F_{np} , P_2 , P_3 , P_5 , F_{mp2} , момент опору M , силу натягу нитки S_5 і реакції в'язей N_2 , N_3 , N_4 .

2. Для визначення v_{c5} скористаємося теоремою про зміну кінетичної енергії: $T - T_0 = \sum_1^n A_V^e + \sum_1^n A_V^i$, де $\sum_1^n A_V^e, \sum_1^n A_V^i$ - відповідно, сума робіт зовнішніх і внутрішніх сил системи.

Для розглянутої системи, що складається з абсолютно твердих тіл, з'єднаних нерозтяжними нитками, робота внутрішніх сил дорівнює нулю.

У початковому положенні всі елементи механізму перебували в спокої, швидкості усіх тіл були рівні нулю, тому $T_0 = 0$.

3. Кінетична енергія системи дорівнює сумі енергій всіх тіл системи:

$$T = T_2 + T_3 + T_5.$$

4. Виконаємо кінематичний аналіз:

- ☐ тіло 2 рухається поступально;
- ☐ тіло 3 обертається навколо нерухомої осі;
- ☐ тіло 5 бере участь в плоскопаралельному русі.

Виходячи з цього, кінетична енергія системи може бути представлена виразом:

$$T = \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2} + \frac{m_5 v_{c5}^2}{2} + \frac{J_{c5} \omega_5^2}{2}$$

5. Кінетична енергія T , яку отримала система після того, як вантаж перемістився уздовж похилій площині на відстань s_1 , залежить від швидкості v_{c5} . Тому всі швидкості, що входять у вираз кінетичної енергії даної механічної системи, виразимо через v_{c5} .

6. Оскільки вантажі 1 і 2 пов'язані нерозтяжною ниткою, то їх швидкості рівні. У свою чергу ця нерозтяжна нитка перекинута через малий обід шківів 3, отже: $v_1 = v_2 = v_A$, де v_A – швидкість будь-якої точки ободу радіусу r_3 шківів 3.

7. Лінійні швидкості шківів 2 і блоку 5 залежать від однієї кутової швидкості ω_3 : $v_2 = \omega_3 r_3$, $v_5 = \omega_3 R_3$.

8. Оскільки точка K_5 є миттєвим центром швидкостей для блоку 5 (він як би «котиться» по ділянці нитки K_5L), то $v_5 = 2v_{c5}$. тоді:

$$\omega_5 = \frac{v_{c5}}{R_5}; \quad \omega_3 = \frac{2v_{c5}}{R_3}; \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{2v_{c5}}{R_3} \cdot r_3.$$

9. Осьові моменти інерції рухомого блоку 5 і ступінчастого шківів 3 виражаються виразами:

$$J_{c5} = \frac{m_5 R_5^2}{2}; \quad J_3 = m_3 \rho_3^2.$$

10. Виконавши підстановку всіх наведених вище значень в вираз для кінетичної енергії заданої механічної системи, отримаємо:

$$T = v_{c5}^2 \left(\frac{2m_2 r_3^2}{R_3^2} + \frac{2m_3 \rho_3^2}{R_3^2} + \frac{3m_5}{4} \right).$$

11. Знаходимо роботу всіх діючих зовнішніх сил на переміщенні, яке матиме система, коли вантаж 1 пройде шлях $s_1 = 0,2$ м. Введемо наступні позначення: s_2 - переміщення вантажу 2 ($s_2 = s_1$); φ_3 - кут повороту шківів 3; h_5 - переміщення центру мас блоку 5; λ_0, λ_1 - початкове і кінцеве подовження пружини.

Сума робіт всіх зовнішніх сил дорівнює:

$$\sum_1^n A_V^e = A_F + A_{P_2} + A_{F_{mp2}} + A_M + A_{P_5} + A_{F_{unp}}, \text{ де}$$

$$A_F = \int_0^{s_1} 80(3+2s)ds = 80(3s_1 + s_1^2);$$

$$A_{P_2} = -P_2 \cdot s_1 \cdot \sin 45^\circ;$$

$$A_{F_{mp}} = -f \cdot P_2 \cdot s_1 \cdot \cos 45^\circ;$$

$$A_M = -M \cdot \varphi_3;$$

$$A_{P_5} = -P_5 \cdot h_5 = -P \cdot s_{c5};$$

$$A_{F_{yup}} = \frac{c}{2} (l_0^2 - l_1^2).$$

точка K_5 - миттєвий центр швидкостей, тому робота сили натягу

□ нитки S_5 дорівнює нулю;

□ реакція опори N_2 перпендикулярна переміщенню вантажу 2, а тому роботи не здійснює;

□ реакції N_3, N_4 , прикладені в нерухомих точках, не здійснюють роботи.

За умовою завдання $\lambda_0 = 0$, тоді $\lambda_1 = s_{c5}$ - переміщення кінця пружини. Висловимо величини s_{c5} і φ_3 через заданий переміщення s_1 . Залежність між переміщеннями така ж, як між відповідними їм швидкостями:

$$\omega_3 = \frac{2v_{c5}}{R_3}; \quad \Rightarrow \quad \varphi_3 = \frac{2s_{c5}}{R_3}.$$

12. Оскільки $v_5 = v_3 = \omega_3 R_3$ і $v_{c5} = 0,5v_5$, то $v_{c5} = 0,5\omega_3 R_3$. Отже, $\lambda_1 = s_{c5} = 0,5\varphi_3 R_3 = 0,5(s_1 R_3)/r_3$.

13. При знайдених значеннях φ_3 і λ_1 отримаємо вираз для підрахунку суми робіт всіх зовнішніх сил, що діють на механічну систему:

$$\sum_1^n A_v^e = 80(3s_1 + s_1^2) - P_2 \cdot s_1 \cdot \sin 45^\circ - fP_2 \cdot s_1 \cdot \cos 45^\circ - M \frac{s_1}{r_3} - P_5 \frac{s_1 R_3}{2r_3} - \frac{cs_1^2 R_3^2}{8r_3^2}.$$

14. Кінетичну енергію прирівнюємо до роботи:

$$v_{c5} \left(\frac{2m_2 r_3^2}{R_3^2} + \frac{2m_3 \rho_3^2}{R_3^2} + \frac{3m_5}{4} \right) = \sum_1^n 80(3s_1 + s_1^2) - P_2 \cdot s_1 \cdot \sin 45^\circ - fP_2 \cdot s_1 \cdot \cos 45^\circ - M \frac{s_1}{r_3} - P_5 \frac{s_1 R_3}{2r_3} - \frac{cs_1^2 R_3^2}{8r_3^2}.$$

Підставивши в отриманий вираз відомі числові значення заданих величин, знайдемо швидкість v_{c5} .

Вимоги до оформлення розрахунково-графічних робіт та методика їх оцінювання

Розрахунково-графічні роботи (РГР) оформляються акуратно на аркушах паперу формату А4 (писати з одного боку).

На першому (титульному аркуші) вказується назва університету, кафедри, предмета, назва (тема) РГР, номер варіанта і рік виконання роботи. Також вказується П.І.Б. й посаду викладача, спеціальність (група), П.І.Б. студента.

При виконанні РГР потрібно обов'язково привести текст кожного завдання, виписати вихідні дані свого варіанту і зробити відношення до задачі і свого варіанту креслення. Креслення повинні виконуватися олівцем, з допомогою креслярських інструментів, в масштабі, акуратно і точно. На кресленнях повинні бути зображені осі координат і всі вектори, які зустрічаються в ході вирішення завдання (сили, швидкості, прискорення).

Рішення кожної задачі повинно супроводжуватися короткими поясненнями, тобто має бути вказано, які теореми, формули або рівняння застосовуються при вирішенні даної задачі.

Використання математичних комп'ютерних програм при вирішенні завдань, безумовно, заохочується, проте не є необхідною вимогою. Розрахунки, виконані в математичній програмі необхідно роздрукувати і прикріпити до записки.

Оцінювання виконання розрахунково-графічної роботи

Ваговий бал – 18 . Максимальна кількість балів – 18.

- своєчасне безпомилкове виконання завдання -18 балів
- завдання виконано з незначними помилками – 15 балів;
- завдання виконано зі значними помилками – 6 балів;
- невиконане завдання -0 балів

ЛІТЕРАТУРА

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. –М.: Наука 1978. –428 с.
3. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. . –М.: Наука –448 с.
4. Яблонский А.А. и др. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике –М.: Высш. шк., -367 с.
5. Павловський М.А.,Акинфиева Л.Ю. Бойчук О.Ф. Теоретическая механика. Статика. Кинематика. Динамика. –К.: Вища шк., 1989. –351 с.
6. Бать М.И., Джанелидзе М.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. - М.: Наука. Т.1-3, 1972.
- 7.Методика розв'язування задач з теоретичної механіки. Путята Т.В., Фрадлін Б.Н. Київ, Рад. Шк., 1995.