МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені Ігоря Сікорського”

Губська В.В., Кришталь В.Ф., Пікенін О.О.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА-3

Методичні вказівки для проведення практичних занять
для студентів напряму підготовки 6.050502 – інженерна механіка,
6.050503 – машинобудування

Київ – 2017

Теоретична механіка-3. Методичні вказівки для проведення практичних занять для студентів напряму підготовки 6.050502 – інженерна механіка, 6.050503 – машинобудування [Електр]/ Уклад.: Губська В.В., Кришталь В.Ф., Пікенін О.О. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 78 с.

Рекомендовано вченою радою факультету АКС
Протокол № 6 від 23 січня 2017 року

Навчальне електронне видання

Теоретична механіка-3.
Методичні вказівки для проведення практичних занять
для студентів напряму підготовки 6.050502 – інженерна механіка,
6.050503 – машинобудування

Укладачі Губська В.В., канд. техн. наук, ст. викладач
Кришталь В.Ф., канд. техн. наук, доцент
Пікенін О.О., асистент

Відповідальний редактор Штефан Н. І., канд. техн. наук, доцент

Рецензент Струтинський В. Б., докт.техн. наук, професор

ЗМІСТ

1. ВСТУП

Кредитний модуль *«Теоретична механіка-3»* є частиною дисципліни Теоретична механіка, у якому вивчають методи складання і розв'язування *диференціальних рівнянь руху* твердих тіл, механічних систем та окремих їх точок за допомогою основних теорем динаміки в проекціях на осі вибраної системи координат та в узагальнених координатах (рівняння Лагранжа ІІ роду).

Вивчення кредитного модуля *«Теоретична механіка-3»* базується на широкому використанні знань зі статики та кінематики, отриманими при вивченні попередніх двох модулів, і математичних методів диференціальних та інтегральних обчислень, теорії диференціальних рівнянь, постановки задачі Коші і тому її вивчення вимагає наявність базових знань з елементарної і вищої математики, евклідової геометрії, аналітичної алгебри, нарисної геометрії, загальної фізики.

Цей модуль курсу теоретичної механіки дає студенту конкретні знання для складання математичної моделі будь-якого можливого руху або рівноваги окремих матеріальних точок, твердих тіл та механічних систем, навички запису диференціальних рівнянь руху, постановки задачі Коші для конкретних об'єктів дослідження, закріплює знання з розв'язування цих рівнянь, і є фундаментом для вивчення таких дисциплін, як гідро- і аеродинаміка, теорії коливань, пружності, пластичності і оболонок, механіка суцільного середовища.

Важливою складовою модуля є практичні заняття, оскільки саме на них закладаються вміння студентів застосовувати відповідний теоретичний матеріал, оволодіння сучасними методиками розрахунків параметрів механічних систем та математичного моделювання їхнього руху. Саме цій проблематиці і присвячена дана робота.

1.1. Розподіл навчального часу

Розподіл навчальних годин кредитного модуля наведений у таблиці:

Семестр / код кредитного модуля	*Всього годин*	*Розподіл годин за видами занять*				*Кількість МКР*	*Вид індивідуального завдання*	*Семестрова атестація*
		Лекції	*Практичні заняття*	*СРС*				
				Всього	*У тому числі на виконання індивідуального завдання*			
	60	18	18	24	10	-	РГР	залік

1.2. Мета і завдання модуля

Мета вивчення кредитного модуля «Теоретична механіка-3» – дати студентам теоретичні знання і практичні уміння в галузях: побудови математичних моделей та складання диференціальних рівнянь руху твердих тіл, оволодіти деякими методами їх розв'язання, запису початкових умов руху. Основним завданням кредитного модуля є формування у студентів здатностей:

знання: загальних теорем динаміки, поняття центра мас системи точок, головного вектора кількостей руху, кінетичного момента системи точок, кінетичної енергії та роботи сил, загального рівняння статики, рівнянь Лагранжа другого роду;

уміння: визначення кінетичної енергії системи точок та тіл, визначення роботи системи сил, складання диференціальних рівнянь руху твердого тіла;

досвід: визначення кінетичної енергіїі твердого тіла при обертальному, поступальному та плоскопаралельному русі, визначеня роботи сили та момента сил, складання диференціальних рівнянь обертального, поступального та плоскопаралельного руху твердого тіла;

1.3. Тематичний план

Назви розділів і тем	Кількість годин				
	Всього	у тому числі			
		Лекції	Практичні (семінарськ і)	Лабораторні (комп'ютерни й практикум)	СРС
1	2	3	4	5	6
Розділ 5. Загальні теореми динаміки					
Тема 5.1.*Теореми про рух центра мас, зміну кількості руху та моменту кількості руху системи точок.*	14	6	6	-	2
Тема 5.2. *Теореми про зміну кінетичної енергії*	10	4	2	-	4
Разом за розділом 5	24	10	8		6
Розділ 6. Елементи аналітичної механіки					
Тема 6.1. *Диференціальні принципи механіки*	7	2	4	-	1
Тема 6.2. *Рівняння руху механічних систем в узагальнених координатах*	8	4	2	-	2
Тема 6.3. *Елементарна теорія удару*	5	2	2	-	1
РГР за розділами 5,6	10				10

1	2	3	4	5	6
Разом за розділом 6	30	8	8	-	14
залік	6		2	-	*4*
Всього годин	60	18	18	-	24

1.4. Тематика практичних занять

.№ з/п	Назва теми заняття та перелік основних питань (перелік дидактичного забезпечення, посилання на літературу та завдання на СРС)
1	*Практичне заняття 1.* Теореми про рух центра мас та про зміну кількості руху механічної системи. Теорема про рух центра мас механічної системи. Кількість руху точки та механічної системи. Теорема імпульсів. Закони збереження. Література: [5], с.203-219, [4], с.287-296.
2	*Практичне заняття 2.* Теореми про зміну моменту кількості руху точки і системи. Момент кількості руху матеріальної точки та кінетичний момент. Теореми та закони збереження. Література: [5] с.236-252, [4], с.296-312. Завдання на СРС: моменти інерції однорідних тіл.
3	*Практичне заняття 3.* Динаміка твердого тіла. Динаміка поступального, обертального та плоскопаралельного руху твердого тіла. Складання та розв’язування диференціальних рівнянь руху. Література: [1], с.289-293, [5], с.278-305, [4], с.327-332. Завдання на СРС: *Розрахунково-графічна робота (РГР). Частина 1.* Література: [5]: с.231-236, [6]: 246-256.
4	*Практичне заняття 4.* Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки. Робота сил. Кінетична енергія твердого тіла та механічної системи. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи. Література: [5] с.220-236, [4] с.236-241, 312-326. Завдання на СРС: розв’язати задачі для самостійного розв’язування.
5	*Практичне заняття 5.* Принцип можливих переміщень. Загальне рівняння статики. Умови рівноваги твердого тіла та механічної системи. Література: [1], с.337-339, [5], с.313-326. Завдання на СРС: Література: [4], с.364-373.
6	*Практичне заняття 6.* Принцип Даламбера-Лагранжа. Загальне рівняння динаміки. Література: [1], с.340-342, [5], с.327-340. Завдання на СРС: Література: [4], с.374-378.
7	*Практичне заняття 7.* Рівняння Лагранжа II роду. Отримання рівнянь руху системи тіл з використанням рівнянь Лагранжа другого роду. Література: [1], с.353-356, [5], с.341-366, [4], с.378-395. Завдання на СРС: *РГР. Частина 2.* Література: [5], с.231-236, с.362-366.
8	*Практичне заняття 8.* Удар. Прямий і косий центральні удари кульок: пружний і пластичний. Центр удару, дія удару на вісь обертання. Завдання на СРС:Література: [1], с.316-323, [5], с.306-312, [4], с.350-355.
9	*Практичне заняття 9.* Диференційований залік

1.5. Індивідуальні завдання

У даному кредитному модулі індивідуальне завдання передбачається у вигляді розрахунково-графічної роботи (РГР) за темами 5.1, 5.2, 6.2: «Дослідження руху механічної системи» (Застосування загальних теорем динаміки та рівнянь Лагранжа другого роду до дослідження руху механічної системи), яка видається на третьому практичному занятті.

Метою розрахунково-графічної роботи (РГР) є поглиблене вивчення окремих розділів теоретичної механіки та набуття студентами умінь самостійного аналізу задач та виконання необхідних розрахунків. Ця робота виконується з використанням часу, відведеного на самостійну роботу студента.

Варіанти розрахункових схем для студентів встановлюються викладачем. При захисті роботи студенту обов'язково задаються контрольні запитання за змістом задачі і/або пропонується самостійне розв'язування аналогічних контрольних прикладів.

На допомогу студентам надаються відповідні методичні рекомендації [8].

2. **МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ**

2.1. <u>Практичне заняття 1.</u> Теореми про рух центра мас та про зміну кількості руху. (тема 5.1).

Мета заняття

Метою даного заняття, є вивчення основних (загальних) теорем динаміки та їх застосування на прикладах, набуття умінь використання цих теорем для знаходження кінематичних характеристик руху (переміщень, швидкостей та прискорень) точок і тіл. На даному занятті розглядаються теореми про рух центра мас та про зміну кількості руху точки та системи.

Методичні прийоми

На цьому занятті розглядаються дві з основних (загальних) теорем динаміки, а саме:

- теорема про рух центру мас системи матеріальних точок

$$m\vec{a}_C = \vec{F}^e \tag{1.1}$$

  де $\vec{a}_C$ - прискорення центра мас системи, $\vec{F}^e$ - головнй вектор завнішніх сил системи.

- теорема про зміну кількості руху точки у диференціальній ($\dfrac{d\vec{q}}{dt} = \vec{F}$) та інтегральній ($m\vec{\text{v}} - m\vec{\text{v}}_0 = \vec{S}$) формах, та системи матеріальних точок у диференціальній

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e \tag{1.2}$$

  та інтегральній

$$\vec{Q}(t) - \vec{Q}_0(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{F}^e d\tau = \vec{S}^e \tag{1.3}$$

  формах, де $\vec{q}$ – кількість руху точки, $\vec{Q}$ – кількість руху системи матеріальних точок, $\vec{S}$ – імпульс рівнодійної прикладених до точки сил, $\vec{S}^e$ – повний імпульс головного вектора зовнішіх сил. $\vec{Q}(t_0), \vec{Q}(t)$ – кількість руху системи матеріальних точок в початковий і кінцевий моменти часу.

  Для знаходження координат цента мас використовується формула:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{1.4}$$

де $m=\sum_{i=1}^{n} m_i$ маса системи, x_i, y_i, z_i – координати і-ї точки в прямокутній декартовій системі координат Oxy.

Головною особливістю цих теорем є те, що за їхньою допомогою можна знаходити деякі кінематичні характеристики точок і тіл, оминаючи складання і розв’язання диференціальних рівнянь руху. Крім цього, використовуючи, наприклад, теорему про зміну головного моменту кількостей руху (кінетичного моменту) можна досить легко отримувати зазначені рівняння.

Наведені векторні вирази цих теорем, як правило, застосовуються у проекції на якусь вісь. Може мати місце як пряма, так і обернена задача динаміки. Зустрічаються також і змішані задачі.

Застосування теореми про рух центра мас доцільне при розв’язанні обох задач динаміки, тобто за допомогою цієї теореми можна визначати як сили, так і кінематичні характеристики руху.

Комплект завдань

В аудиторії можуть розглядатися, наприклад, задачі 35.10;35.18; 28.3; 28.9; 36.8 [4] різного ступеня складності із застосуванням вищевказаного алгоритмічного підходу.

Приклад 1.1 ([4] 35.10)

Електричний мотор маси m_1 встановлений на горизонтальному фундаменті; на валу мотора під прямим кутом закріплений одним кінцем однорідний стержень довжини $2l$ і маси m_2, на інший кінець стержня насаджений точковий вантаж маси m_3; кутова швидкість вала ω. Визначити найбільше горизонтальне зусилля R_x, що діє на болти, якими закріплений кожух електромотора на фундаменті.

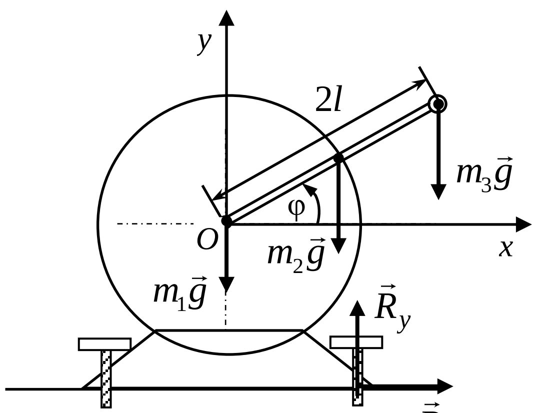


Рис.1.1

Розв'язання. Розглянемо систему, яка складається з трьох тіл: мотора масою m_1, стержня масою m_2 і вантажу масою m_3 (Рис. 1.1). На неї діють зовнішні сили: $\vec{P}_1 = m_1\vec{g}$, $\vec{P}_2 = m_2\vec{g}$, $\vec{P}_3 = m_3\vec{g}$ - сили ваги; $\vec{R}_x$ - сумарна тангенціальна складова реакції в болтах, $\vec{R}_y$ - сумарна нормальна складова реакції боллтів. Введемо систему координат Oxy з початком в центрі мас мотора, вісь Ox спрямуємо паралельно підлозі, вісь Oy вертикально вверх. Оскільки потрібно знайти горизонтальну складову цієї реакції, скористаємось теоремою про рух центра мас матеріальної системи в проекції на горизонтальний напрям:

$$m\ddot{x}_C = F_x^e. \tag{1.5}$$

Тут $m = m_1 + m_2 + m_3$ - маса системи. У вибраній системі координат вектори ваги компонентів системи $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ напрямлені вздовж осі Oy, тому на Ox проектується лише шукана горизонтальна складова реакції болтів R_x. Тоді рівняння (1.5) приймає вигляд:

$$m\ddot{x}_C = R_x. \tag{1.6}$$

Нехай x_1, x_2, x_3 - абсциси центрів мас частин системи в довільний момент часу t. Центр системи координат розташуємо в центрі мотору. Тоді, використовуючи формулу (1.4), абсциса центру мас C усієї системи:

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m}, \tag{1.7}$$

де

$$x_1 = 0;\ \ x_2 = l\cos\omega t;\ \ x_3 = 2l\cos\omega t. \tag{1.8}$$

Підставивши формули (1.8) в (1.7) одержимо:

$$x_C = \frac{m_2 l\cos\omega t + m_3 2l\cos\omega t}{m}. \tag{1.9}$$

Продиференціювавши (1.9) двічі за часом, отримаємо:

$$\ddot{x}_C = -\frac{\left(m_2 + 2m_3\right)}{m} l\omega^2 \cos\omega t. \tag{1.10}$$

Підставимо (1.10) в (1.6), отримаємо шукану горизонтальну складову реакції болтів в залежності від часу t:

$$R_x = -\left(m_2 + 2m_3\right) l\omega^2 \cos\omega t.$$

Максимальна горизонтальна складова реакції болтів буде, коли $\cos\omega t = 1$, тобто

$$R_{x\max} = -\left(m_2 + 2m_3\right) l\omega^2.$$

Відповідь: $R_{x\max} = -\left(m_2 + 2m_3\right) l\omega^2$.

Приклад 1.2 ([4] 35.18)

По горизонтальній товарній платформі довжиною 6 м і масою 2700 кг, що знаходиться у початковий момент у спокої, двоє робітників

перекочують важку відливку з лівого кінця платформи в правий. В яку сторону і на скільки переміститься при цьому платформа, якщо загальна маса вантажу і робітників 1800 кг? Силами опору руху платформи знехтувати.

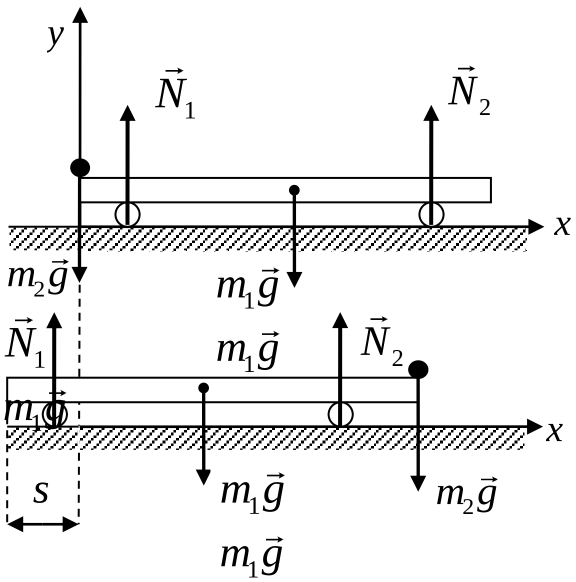


Рис.1.2

Розв'язання.

Розглянемо систему, яка складається з двох тіл: платформи масою m_1 і відливки та робочих масою m_2. На неї діють зовнішні сили: $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ - сили ваги, $\vec{N}_1$ та $\vec{N}_2$ - нормальні складові реакції поверхні. Оскільки рух відбувається вздовж осі Ox, скористаємось теоремою про рух центра мас матеріальної системи в проекції на горизонтальний напрям:

$$m\ddot{x}_C = F_x^e. \tag{1.11}$$

В цьому випадку сили ваги напрямлені вздовж осі Oy, тому:

$$\ddot{x}_C = 0. \tag{1.12}$$

Перший інтеграл з рівності (1.12):

$$\dot{x}_C = C_1,$$

де $C_1 = v_0$, а оскільки в початковий момент система знаходилась в стані спокою, то початкова швидкість $\mathrm{v}_0 = 0$. Тоді другий інтеграл з (1.12):

$$x_C = C_2,$$

причому $C_2 = x_C(0)$, координаті центра мас в початковий момент. Отже маємо рівність:

$$x_C = x_C(0), \tag{1.13}$$

яка фактично означає рівність координати центра мас в початковий і кінцевий момент руху системи і є виразом закону збереження центру мас.

Знайдемо положення центру мас в початковий і кінцевий момент, використовуючи формулу (1.4):

$$x_C(0)=\frac{m_1\frac{l}{2}+m_2\cdot 0}{m_1+m_2},$$

$$x_C=\frac{m_1\left(\frac{l}{2}-s\right)+m_2\left(l-s\right)}{m_1+m_2}.$$

Прирівняємо ці вирази на основі (1.13), отримаємо:

$$\frac{m_1\frac{l}{2}+m_2\cdot 0}{m_1+m_2}=\frac{m_1\left(\frac{l}{2}-s\right)+m_2\left(l-s\right)}{m_1+m_2};$$

$$m_1\frac{l}{2}-m_1\frac{l}{2}+m_1s-m_2l+m_2s=0;$$

$$s\left(m_1+m_2\right)=m_2l;$$

$$s=\frac{m_2l}{\left(m_1+m_2\right)}=\frac{1800\cdot 6}{2700+1800}=2{,}4\ \text{м}.$$

Відповідь: 2,4 м.

Приклад 1.3 ([4] 28.3)

Потяг маси $4\cdot 10^5$ кг входить на підйом $i=\mathrm{tg}\alpha=0{,}006$ (де α - кут підйому) зі швидкістю 15 м/с (Рис 1.3). Коефіцієнт тертя (коефіцієнт сумарного опору) при русі потяга рівний 0,005. Через 50 с після входу потяга на підйом його швидкість падає до 12,5 м/с. Знайти силу тяги тепловоза.

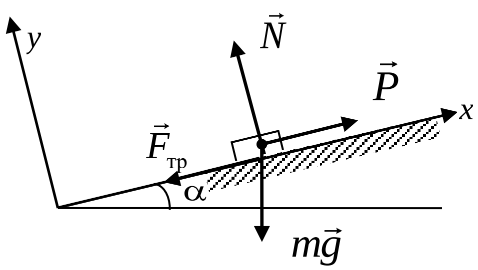


Рис.1.3

Розв'язання.

Позначимо сили, що діють на тіло: сила ваги тіла $m\vec{g}$, сила тертя між тілом і площиною $\vec{F}_{тр}$, $\vec{P}$ – сила тяги тепловоза. Згідно з означенням, сила тертя $F_{тр}=fN$, де $\vec{N}$ – нормальна складова реакції поверхні площини.

Згідно з малюнком $N = mg\cos\alpha$, тоді $F_{\text{тр}} = fmg\cos\alpha$. Спрямуємо вісь Ox паралельно площині спуску тіла і спроектуємо на неї співвідношення $\vec{q}(t) - \vec{q}_0(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \vec{F}^e d\tau$, що виражає теорему про зміну кількості руху. Маємо:

$$q_x - q_{0x} = \int\limits_0^t F_x^e dt$$

або

$$m\mathrm{v}_1 - m\mathrm{v}_0 = \int\limits_0^t \left(-mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha + P\right)dt,$$

Підставимо межі інтегрування і остаточно отримаємо відповідь:

$$m\mathrm{v}_1 - m\mathrm{v}_0 = \left(-mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha + P\right)\Big|_0^t,$$

$$m\mathrm{v}_1 - m\mathrm{v}_0 = \left(-mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha + P\right)t$$

$$P = \frac{m\mathrm{v}_1 - m\mathrm{v}_0}{t} + mg\sin\alpha + fmg\cos\alpha =$$

$$= \frac{4\cdot 10^5(12,5-15)}{50} + 9,8\cdot 4\cdot 10^5\cdot 0,006 + 0,005\cdot 9,8\cdot 4\cdot 10^5\cdot 0,99 = 0,2312\cdot 10^5$$

$$P = 0,2312\cdot 10^5 \text{ Н.}$$

Відповідь: $P = 0,2312\cdot 10^5$ Н.

Приклад 1.4 ([5] 12.4)

На горизонтальній платформі вагою $\vec{P}_1$ встановлено похилу площину AB, яка утворює з горизонтом кут α (рис. 1.4). По цій площині за допомогою лебідки піднімається вантаж C з вагою $\vec{P}_2$ так, що відстань AC змінюється за законом $s = \frac{1}{2}at^2$. У початковий момент система знаходиться в стані спокою. Визначити швидкість, з якою буде рухатися платформа. Опором рухові платформи знехтувати.

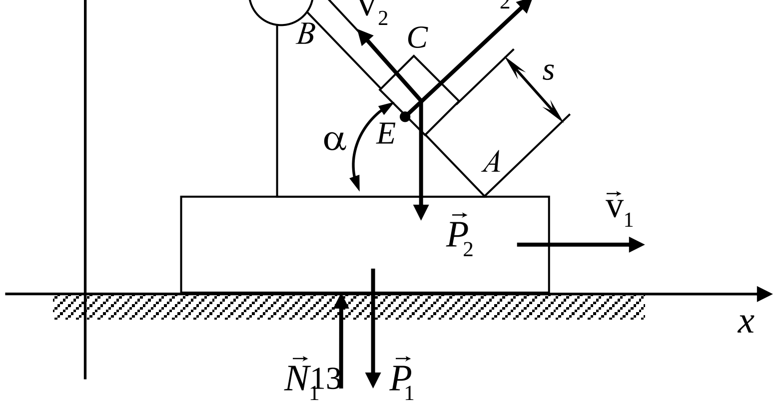


Рис. 1.4

Розв'язання. Механічна система складається з двох тіл: платформи і рухомого вантажу *C*. Зовнішніми силами, прикладенми до цієї системи, є вага платформи $\vec{P}_1$, вага вантажу $\vec{P}_2$, нормальні реакції $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ опорної площини в точках *D* І *E*. Оскільки всі сили вертикальні, то сума їх проекцій на горизонтальну вісь *Ox* дорівнює нулю, тобто $\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$. Тому, враховуючи, що в початковий момент часу система нерухома, і застосовуючи теорему імпульсів, дістанемо

$$\frac{P_1}{g}\mathrm{v}_{1x} + \frac{P_2}{g}\mathrm{v}_{2x} = 0,$$

де v_{1x} ,v_{2x} – проекції на вісь *Ox* абсолютних швидкостей платформи і вантажу. Нехай швидкість платформи дорівнює $\vec{\mathrm{v}}_1$, тоді $\mathrm{v}_{1x} = \mathrm{v}_1$ $\mathrm{v}_{2x} = \mathrm{v}_1 - at\cos\alpha.$ Отже,

$$\frac{P_1}{g}\mathrm{v}_1 + \frac{P_2}{g}(\mathrm{v}_1 - at\cos\alpha) = 0.$$

Звідси знаходимо

$$\mathrm{v}_1 = \frac{P_2}{P_1 + P_2}at\cos\alpha.$$

Платформа буде переміщуватися вправо.

Контрольні запитання

Для самоконтролю засвоєння матеріалу цього практичного заняття пропонуються наступні запитання:

1. Які наслідки випливають із теореми про рух центра мас?
2. Чим відрізняється теорема про зміну кількості руху системи від теореми про рух центра мас? Яка з них є більш загальною?
3. Якою мірою механічного руху (скалярною чи векторною) є кількість руху?
4. Що таке імпульс сили, та як він обчислюється?
5. Запис якої з теорем, що вивчаються на даному занятті, є еквівалентним другому закону Ньютона?
6. Запис якої з теорем, що вивчаються на даному занятті, схожий за формою з другим законом Ньютона?
7. Як обчислити головний вектор імпульсів зовнішніх сил?

Завдання на СРС

Самостійно рекомендується розв'язати задачі 35.5; 35.16, 28.5; 28.11; 36.9 [4].

2.2. Практичне заняття 2. Теореми про зміну моменту кількості руху точки і системи. (тема 5.1)

Мета заняття

Метою даного заняття є вивчення теореми про зміну моменту кількості руху точки і системи та її застосування на прикладах, набуття умінь використання цих теорем для знаходження кінематичних характеристик руху (переміщень, швидкостей та прискорень) точок і тіл, а також складання диференціальних рівнянь руху (математичних моделей) цих об’єктів.

Методичні прийоми

Теореми, які розглядаються на даному занятті, можуть бути записані: для точки - у диференціальній ($\frac{d\vec{k}_A}{dt} = \vec{M}_A$) та інтегральній ($\vec{k}_A - \vec{k}_{A0} = \int_{t_0}^{t} \vec{M}_A dt$) формах; та системи матеріальних точок - у диференціальній ($\frac{d\vec{K}_A}{dt} = \vec{M}_A^e$) та інтегральній ($\vec{K}_A - \vec{K}_{A0} = \int_{t_0}^{t} \vec{M}_A^e dt$) формах, де $\vec{k}_A$ – момент кількості руху точки відносно центра *A*, $\vec{K}_A$ – кінетичний момент системи матеріальних точок відносно центра *A*. Значення кінетичного моменту твердого тіла визначається за формулою:

$$K_z = \omega J_z \ , \qquad (2.1)$$

де $J_z = \int_{(m)} r^2 dm$ - момент інерції твердого тіла відносно нерухомої осі обертання.

Наведені векторні вирази цих теорем, як правило, застосовуються у проекції на якусь вісь. За певних умов, із отриманих виразів (диференціальних рівнянь) можна отримати відповідні закони збереження. Можуть мати місце різні задачі динаміки (пряма, обернена, змішана).

Застосування цих теорем надає можливість для деяких механічних систем (зокрема, гіроскопічних) ефективно складати диференціальні рівняння їх руху та визначати різні шукані кінематичні характеристики.

Комплект завдань

В аудиторії можуть розглядатися, наприклад, задачі 28.8; 37.7, 37.52 [4], приклади 12.23, 12.12, 12.24, 12.36 [5] різного ступеня складності із застосуванням вищевказаного алгоритмічного підходу.

Приклад 2.1 ([4] 28.8)

Точка M рухається навколо нерухомого центра під дією сили тяжіння до цього центра. Знайти швидкість v_2 в найбільш віддаленій від центру точці траєкторії, якщо швидкість в найбільш близькому до нього положенні $\mathrm{v}_1 = 30$ см/с, а r_2 в п’ять разів більше за r_1.

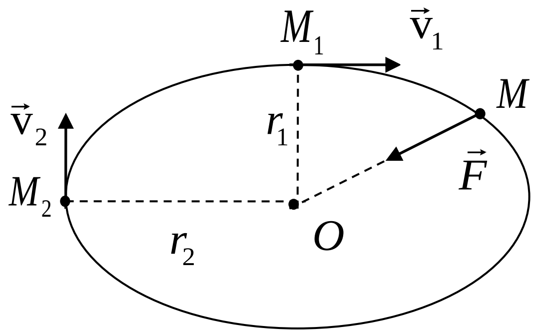


Рис.2.1

Розв’язання. Нехай $\vec{F}$ – сила тяжіння до центра О, M_1 – найбільш близьке до центру положення точки, M_2 – найбільш віддалене плоложення. Для розв’язання задачі застосуємо теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки, тобто вираз:

$$\frac{d\vec{k}_O}{dt} = \vec{M}_O . \qquad (2.1)$$

Момент зовнішніх сил в даному випадку дорівнює нулю, оскільки сила $\vec{F}$ проходить завжди через центр O. Отже:

$$\vec{k}_{O2} = \mathrm{const} = \vec{k}_{O1} . \qquad (2.2)$$

Це означає, що моменти кількості руху для двох положень точок рівні, що виражає закон збереження кінетичного моменту.

За означенням кінетичного моменту:

$$\vec{k}_O = \vec{r} \times m\vec{\mathrm{v}}$$

Отже для двох положень точки:

$$k_{O1} = r_1 m_1 \mathrm{v}_1 \sin\alpha = r_1 m_1 \mathrm{v}_1 ;$$
$$k_{O2} = r_2 m_2 \mathrm{v}_2 \sin\alpha = r_2 m_2 \mathrm{v}_2 ;$$

де кут α – це кут між векторами $\vec{r}$ і $m\vec{v}$, який, як видно з малюнку складає 90°. Сінус такого кута відповідно дорівнює одиниці.

Прирівняємо кінетичні моменти для двох положень на основі (2.2):

$$r_1 m_1 \mathrm{v}_1 = r_2 m_2 \mathrm{v}_2 ,$$

Звідки

$$\mathrm{v}_2 = \mathrm{v}_1 \frac{r_1}{r_2} = \mathrm{v}_1 \frac{r_1}{5r_1} = \frac{30}{5} = 6 \text{ см/с.}$$

Відповідь: 6 см/с.

Приклад 2.2 ([4] 37.7)

Тверде тіло, що знаходилось у спокої, приводиться до обертання навколо нерухомої вертикальної осі постійним моментом M; при цьому виникає момент сил опору M_1, пропорційний квадрату кутової швидкості обертання твердого тіла: $M_1 = \alpha\omega^2$. Знайти закон зміни кутової швидкості; момент інерції твердого тіла відносно осі обертання рівний J.

Розв'язання. Запишемо теорему про зміну моменту кількості руху:

$$\frac{d\vec{K}_A}{dt} = \vec{M}_A^e;$$

Згідно (2.1):

$$\frac{dK_A}{dt} = J\frac{d\omega}{dt};$$

Підставляючи зовнішні моменти в праву частину, теорему про зміну кінетичного моменту можна записати:

$$J\frac{d\omega}{dt} = M - M_1;$$

або

$$J\frac{d\omega}{dt} = M - \alpha\omega^2.$$

Отже знаходження закону зміни кутової швидкості полягає у розв'язанні диференціального рівняння першого порядку. Скористаємось методом розділення змінних:

$$\frac{Jd\omega}{\alpha\left(\frac{M}{\alpha} - \omega^2\right)} = dt.$$

Користуючись відомою формулою таблиці інтегралів:

$$\int\frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,$$

отримаємо:

$$\frac{J}{\alpha}\frac{1}{2\sqrt{\frac{M}{\alpha}}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{M}{\alpha}}+\omega}{\sqrt{\frac{M}{\alpha}}-\omega}\right|\Bigg|_0^{\omega} = t\Big|_0^t.$$

Підставивши межі, маємо:

$$\frac{J}{2\sqrt{\alpha M}}\left(\ln\frac{\sqrt{\frac{M}{\alpha}}+\omega}{\sqrt{\frac{M}{\alpha}}-\omega} - \ln 1\right) = t.$$

Перетворимо це рівняння:

$$\frac{\sqrt{\frac{M}{\alpha}}+\omega}{\sqrt{\frac{M}{\alpha}}-\omega}=e^{\frac{2\sqrt{\alpha M}}{J}t},$$

звідки шляхом нескладних перетворень виражаємо кутову швидкість:

$$\omega=\sqrt{\frac{M}{\alpha}}\frac{\left(e^{2\frac{\sqrt{\alpha M}}{J}t}-1\right)}{\left(e^{2\frac{\sqrt{\alpha M}}{J}t}+1\right)}.$$

Відповідь: $\omega=\sqrt{\frac{M}{\alpha}}\frac{\left(e^{2\frac{\sqrt{\alpha M}}{J}t}-1\right)}{\left(e^{2\frac{\sqrt{\alpha M}}{J}t}+1\right)}$.

Приклад 2.3 ([5] пр. 12.23)

Однорідний горизонтальний диск (платформа) радіуса R і масою m має можливість обертатися без тертя навколо вертикальної осі (рис. 2.2). Як зміниться кутова швидкість диска, якщо людина, що знаходиться на диску на відстані r від осі обертання, почне рухатися по колу радіуса r з відносною швидкістю v? Маса людини дорівнює m_1.

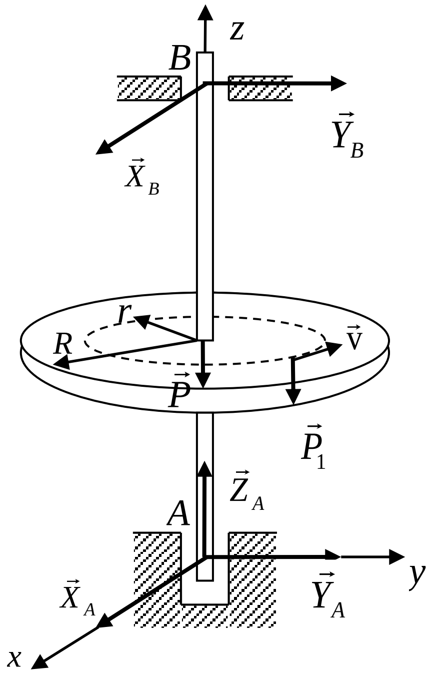


Рис.2.2

Розв'язання.

Об'єктом дослідження є механічна система, яка складається з диска з нерухомою віссю обертання Az і матеріальної точки, за яку приймається

людина. Для розв’язання задачі використовується закон збереження кінетичного моменту системи відносно осі обертання.

Застосувавши аксіому про звільнення від в’язей, матимемо, що на механічну систему крім сил ваги будуть діяти ще й реакції підп’ятника $\vec{X}_A$ $\vec{Y}_A$ $\vec{Z}_A$ і підшипника $\vec{X}_B$ $\vec{Y}_B$ осі обертання диска. Оскільки сили ваги $\vec{P}=m\vec{g}$ і $\vec{P}_1=m_1\vec{g}$ паралельні осі Az, а реакції підп’ятника і підшипника перетинають її, то момент діючих на дану механічну систему зовнішніх сил відносно осі обертання Az дорівнює нулю:

$$\sum_i M_z\left(\vec{F}_i^e\right)=0.$$

Кінетичний момент системи відносно цієї осі є сталою величиною:

$$K_z=\text{const}.$$

Нехай початкове значення кутової швидкості диска дорівнює ω_0, а потім, внаслідок руху людини, дорівнює ω.

Складемо вирази K_z для початкового і поточного моментів часу і прирівняємо їх обидва значення. В початковий момент, коли людина не рухається по диску, кінетичний момент системи відносно осі повороту Az визначається як сума кінетичного моменту платформи та моменту кількості руху точки, нерухомої відносно платформи:

$$K_z=J_z\omega_0+m_1r^2\omega_0.$$

Після того, як людина почне рухатись по платформі, кінетичний момент системи буде дорівнювати кінетичному моменту усієї системи від обертання з кутовою швидкістю ω, складеному з моментом кількості руху відносного руху людини по платформі $\left(m_1\text{v}r\right)$. Якщо людина рухається у бік обертання, маємо:

$$K_z=J_z\omega+m_1r^2\omega+m_1\text{v}r.$$

Прирівнявши отримані вирази кінетичних моментів, одержимо:

$$J_z\omega+m_1r^2\omega+m_1vr=J_z\omega_0+m_1r^2\omega_0,$$

звідки

$$\omega=\frac{\left(J_z+m_1r^2\right)\omega_0-m_1\text{v}r}{J_z+m_1r^2}.$$

Момент інерції платформи, яку вважаємо однорідним диском,

$$J_z=\frac{mR^2}{2}.$$

Отже, кутова швидкість платформи (диска) від руху по ній людини зменшиться на величину:

$$\Delta\omega=\frac{2m_1\text{v}r}{mR^2+2m_1r^2}.$$

Відповідь: $\Delta\omega = \dfrac{2m_1 vr}{mR^2 + 2m_1 r^2}$.

Контрольні запитання

Для самоконтролю засвоєння матеріалу цього практичного заняття пропонуються наступні запитання:

1. В чому полягає аналогія між моментом кількості руху та моментом сили з точки зору векторної алгебри?
2. Чому дорівнює кінетичний момент механічної системи?
3. Чому в запису теореми про зміну кінетичного моменту відсутній момент внутрішніх сил?
4. Вектор моменту кількості руху є зв'язаним чи вільним?
5. Як саме і чому основні теореми динаміки дають змогу виключити з розгляду внутрішні сили системи?
6. Чому дорівнює кінетичний момент твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
7. За якої умови із запису теореми про зміну кінетичного моменту в проекції на довільну вісь можна отримати закон збереження кінетичного моменту?

Завдання на СРС

Розв'язати задачі 37.5, 37.8 [4], 12.35, 12.45, 12.43 [5].

2.3. <u>**Практичне заняття 3.**</u> **Динаміка твердого тіла.** (тема 5.1)

Мета заняття

Метою даного заняття є складання диференціальних рівнянь руху системи тіл на основі теореми про рух центра мас і теореми про зміну моменту кількості руху системи та їх застосування на прикладах, набуття умінь використання цих теорем для знаходження силових факторів, що діють на систему, а також кінематичних характеристик руху (переміщень, швидкостей та прискорень) точок і тіл.

Методичні прийоми

Методика розв'язування задач:

1. Вибрати об'єкт дослідження (тіло, або систему тіл), динаміку якого розглядатимемо. Ввести осі координат.
2. Зобразити на рисунку активні сили та реакції в'язей, прикладені до об'єкта дослідження.
3. Визначити положення (координати) центр мас вибраного об'єкта.

4. Скласти диференціальні рівняння руху твердих тіл:

$$ma_{Cx} = F_x^e,\ \ ma_{Cy} = F_y^e,\ ma_{Cz} = 0. \tag{3.1}$$

$$0 = M_{Cx}^e,\ \ 0 = M_{Cy}^e,\ J_{Cz}\varepsilon_z = M_{Cz}^e. \tag{3.2}$$

Перші три рівняння описують поступальний рух твердого тіла разом з центром мас C, рівняння (3.2) – обертальний рух навколо центра мас.

5. Користуючись кінематичними співвідношеннями, записати формули для визначення прискорення центра мас та кутового прискорення кожного тіла, вибравши за полюс точку, прискорення якої відоме за умови задачі.

6. Розв'язати рівняння, записані в п.4, і визначити шукані величини.

Комплект завдань

В аудиторії можуть розглядатися, наприклад, задачі 39.5; 39.16 [4], приклади 15.7, 15.9, завдання § 12.4.4 [5] або РГР Д-10 [6].

Приклад 3.1 ([4] 39.5)

Провідне колесо автомашини радіуса r і маси m рухається горизонтально і прямолінійно. До колеса прикладений обертаючий момент M. Радіус інерції колеса відносно осі, що проходить через центр мас перпендикулярно його площині, рівний ρ. Коефіцієнт тертя ковзання колеса об землю рівний f. Якій умові повинен задовольняти обертальний момент для того, щоб колесо котилось без ковзання? Розв'язати задачу з урахуванням тертя кочення, якщо коефіцієнт тертя кочення рівний δ.

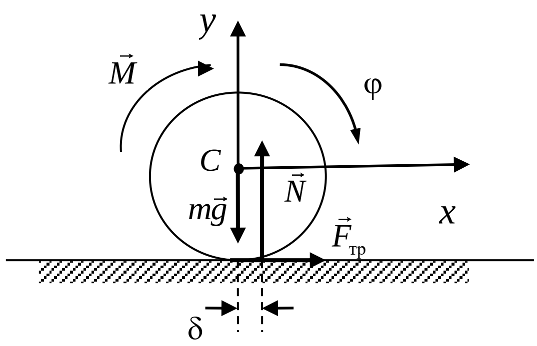


Рис.3.1

Розв'язання.

Об'єктом дослідження є колесо. До нього прикладена сила ваги $\vec{P} = m\vec{g}$ і зовнішній момент $\vec{M}$, а також сила тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$ і нормальна реакція поверхні $\vec{N}$. Колесо здійснює плоскопаралельний рух і його центр мас знаходиться в центрі кулі. Вісь Cx системи координат направимо в напрямку руху. Диференціальні рівняння руху мають вигляд:

$$ma_{Cx} = F_x^e;\ ma_{Cy} = F_y^e;\ J_{Cz}\varepsilon_z = M_{Cz}^e$$

де $F_e^x = F_{\text{тр}}$ - проекція головного вектора сил на вісь Cx; $F_e^y = N - mg$ – проекція головного вектора сил на вісь Cy; $M_{Cz}^e = M - F_{\text{тр}}r - M_{\text{тр к}}$ – головний момент зовнішніх сил відносно осі Cz.

Тоді диференціальні рівняння руху можна записати у вигляді системи:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = F_{\text{тр}}, \\ m\ddot{y}_C = N - mg, \\ m\rho^2\ddot{\varphi} = M - F_{\text{тр}}r - M_{\text{тр к}}, \end{cases}$$

де $M_{\text{ðð ê}} = \delta N$ - момент тертя кочення.

Тут перші два рівняння представляють собою теорему про рух центра мас, а друге рівняння – теорему про зміну моменту кількості руху. Момент інерції $J_z = m\rho^2$.

У вказаних припущеннях:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_C}{r}.$$

Отримаємо рівняння для знаходження N і $F_{\text{тр}}$.

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = F_{\text{ðð}}, \\ 0 = N - mg, \\ m\rho^2\dfrac{\ddot{x}_C}{r} = M - F_{\text{ðð}}r - \delta N, \end{cases}$$

Звідси

$$N = mg;\ F_{\text{ðð}} = \left(M - \delta mg\right)\frac{r}{\rho^2 + r^2}.$$

Умова кочення колеса без ковзання $\left|F_{\text{тр}}\right| \le fN$ приймає вигляд:

$$\left(M - \delta mg\right)\frac{r}{\rho^2 + r^2} \le fmg;$$

Звідси:

$$M \le fmg\frac{\rho^2 + r^2}{r} + \delta mg.$$

Відповідь: $M \le fmg\dfrac{\rho^2 + r^2}{r} + \delta mg$.

Приклад 3.2 ([4] 39.16)

Однорідний стержень маси горизонтально підвішений до стелі за допомогою двох вертикальних ниток, прикріплених до кінців стержня. Знайти натяг однієї з ниток в момент обриву іншої.

Вказівка. Скласти диференціальні рівняння руху стержня для досить малого проміжку часу, що слідує за моментом обриву нитки, нехтуючи зміною напряму стержня і зміною відстані центра мас від іншої нитки.

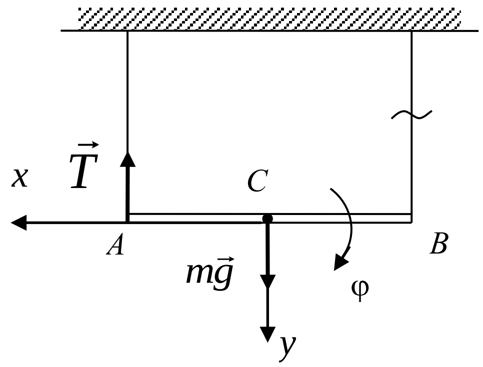


Рис.3.2

Розв’язання. Об’єктом дослідження є стержень. До нього прикладена сила ваги $\vec{P} = m\vec{g}$ і натяг нитки $\vec{T}$. Стержень здійснює плоскопаралельний рух і його центр мас знаходиться в його центрі, тобто в точці C. Вісь Cx системи координат направимо вліво вздовж стержня, вісь Cy вниз в напрямку руху. Диференціальні рівняння руху мають вигляд:

$$ma_{Cx} = F_x^e; \qquad ma_{Cy} = F_y^e; \qquad J_{Cz}\varepsilon_z = M_{Cz}^e$$

де F_e^x - проекція головного вектора сил на вісь Cx; $F_e^y = mg - T$ – проекція головного вектора сил на вісь Cy; $M_{Cz}^e = T\dfrac{AB}{2}$ – головний момент зовнішніх сил відносно осі Cz.

Складемо диференціальні рівняння плоского руху стержня для малого проміжку часу, наступного за моментом обриву нитки, нехтуючи зміною напряму стержня і зміною відстані центра мас від лівої нитки.

$$M\ddot{x}_C = 0,$$

$$M\ddot{y}_C = -T + Mg,$$

$$\frac{M \cdot (AB)^2}{12}\ddot{\varphi} = T \cdot \frac{AB}{2}.$$

Тут перші два рівняння представляють собою теорему про рух центра мас, а друге рівняння – теорему про зміну моменту кількості руху.

У вказаних припущеннях:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{y}_C \cdot 2}{AB}.$$

Підставивши це в третє рівняння, маємо:

$$\begin{cases} M\ddot{y}_C = T - Mg, \\ M\dfrac{AB}{6}\ddot{y}_C = T\cdot\dfrac{AB}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M\ddot{y}_C = -T + Mg, \\ M\ddot{y}_C = 3T \end{cases}$$

Остаточно отримаємо силу натягу:

$$T = \frac{Mg}{4}.$$

Відповідь: $T = \dfrac{Mg}{4}$.

Контрольні запитання

Для самоконтролю засвоєння матеріалу цього практичного заняття пропонуються наступні запитання.

1. Які теореми динаміки використовуються при складанні диференціальних рівнянь руху тіла?
2. Який рух тіла можна описати на основі теореми про рух центра мас і теореми про зміну моменту кількості руху системи?
3. Чи використовуються реакції в'язей при записі диференціальних рівнянь руху тіла?
4. Скільки диференціальних рівнянь можна скласти для плоскопаралельного руху тіла?
5. Якими кінематичними співвідношеннями можна скористуватись, щоб записати формули для визначення прискорення центра мас та кутового прискорення кожного тіла?

Завдання на СРС

Розв'язати задачі 39.7; 39.18 [4], 15.13, приклад 15.8 [5]. завдання §12.4.4 [5].

2.4. <u>Практичне заняття 4.</u> Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи. (тема 5.2)

Мета заняття

Метою даного заняття є отримання навиків застосування теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки для визначення кінематичних характеристик руху (переміщень, швидкостей та прискорень) досліджуваної точки. Другою частиною заняття є набуття

вміння застосовувати теорему про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок для визначення кінематичних характеристик руху (переміщень, швидкостей та прискорень) тіл, що утворюють данну систему. Розв'язання задач на застосування теорема про зміну кінетичної енергії точки подано у прикладах 4.1, 4.2., на застосування теореми про зміну кінетичної енергії системи у прикладах 4.3, 4.4.

Методичні прийоми

Застосування теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки є доцільним, коли при русі точки можна визначити два її положення (наприклад, початкове і кінцеве), а треба визначити її переміщення або швидкість. Якщо ж треба знайти прискорення, то це робиться шляхом диференціювання отриманого виразу швидкості за часом.

При використанні теореми про зміну кінетичної енергії точки найбільші труднощі виникають під час визначення роботи сил. Тому спочатку слід вказати напрямок елементарного переміщення $d\vec{r}$ точки з її початкового положення, потім обчислити елементарну роботу $d'A$ сили $\vec{F}$ (на цьому елементарному переміщенні) - $d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, а потім, шляхом інтегрування отриманого виразу, знайти повну роботу A цієї сили. Інтегрування виконується в межах, що визначаються початковим і кінцевим положеннями точки. Застосування цієї теореми є доцільним, коли можна вказати при русі системи два її положення (наприклад, початкове і кінцеве), а треба визначити переміщення або швидкість. Якщо ж треба знайти прискорення, то це робиться шляхом диференціювання отриманого виразу швидкості за часом.

Використання теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи вимагає вміння знаходити кінетичну енергію системи та роботу зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до точок системи. Якщо розглядувана система складається із абсолютно твердих тіл, що з'єднані ідеальними, двосторонніми та стаціонарними в'язями, тоді сумою робіт внутрішніх сил можна знехтувати. Цю теорему можна використовувати і у випадку неідеальних в'язей, якщо сили, які характеризують «неідеальності» в'язей (найчастіше це сили тертя) умовно віднести до активних сил.

Знаходження кінетичної енергії механічної системи вимагає вміння аналізувати, які рухи здійснюють тіла, що входять до системи, і, в залежності від цих рухів, потрібно вибрати відповідні формули.

Для визначення сумарної роботу зовнішніх сил, що діють на систему, в першу чергу, треба проаналізувати, які зовнішні сили прикладені до точок системи, а потім, надаючи елементарні переміщення цим точкам, обчислити елементарну роботу зовнішніх сил на цих перемещеннях. Далі шляхом інтегрування отриманих виразів елементарних робіт знаходяться повні роботи, за рахунок додавання яких знаходиться сумарна робота. Інтегрування виконується в межах, що визначаються початковим і кінцевим моментами часу.

Теоретичні відомості

Кінетичною енергією матеріальної точки називають скалярну міру механічного руху точки в нерухомій системі координат, що дорівнює половині добутку маси точки m на квадрат її швидкості:

$$T = \frac{1}{2} m\mathrm{v}^2. \tag{4.1}$$

Кінетичною енергією системи матеріальних точок називають суму кінетичних енергій усіх точок, що входять до системи:

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathrm{v}_i^2, \tag{4.2}$$

де m_i – маси точок, v_i - швидкості точок.

Кінетична енергія твердого тіла, що рухається поступально:

$$T = \frac{1}{2} M\mathrm{v}_C^2, \tag{4.3}$$

де M – маса тіла, v_C - швидкість центра мас (або будь – якої іншої точки).

Кінетична енергія твердого тіла при обертанні його навколо нерухомої осі (наприклад Oz):

$$T_z^{\omega} = \frac{1}{2} I_z \omega^2, \tag{4.4}$$

де I_z - момент інерції тіла відносно осі обертання, ω - кутова швидкість тіла.

Для загального випадку руху твердого тіла (в тому числі і для плоского руху):

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2, \tag{4.5}$$

де I_C - момент інерції тіла відносно миттєвої осі, яка проходить через центр мас (для плоского руху ця вісь перпендикулярна площині руху); ω - миттєва кутова швидкість.

Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки: приріст кінетичної енергії матеріальної точки на деякому відрізку дуги її траєкторії дорівнює роботі сили, що прикладена до точки, на цьому самому відрізку дуги траєкторії:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A. \tag{4.6}$$

Тут v_0, v – відповідно початкова та кінцева швидкість точки, A - робота сили.

Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в диференціальній формі: диференціал кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює елементарній роботі сил, що діють на точку

$$dT = d'A. \tag{4.7}$$

Теорема про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок: приріст кінетичної енергії системи матеріальних точок за деякий проміжок часу дорівнює сумі робіт зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на точки системи протягом розглядуваного проміжку часу:

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i^e + \sum_{i=1}^{n} A_i^j, \tag{4.8}$$

де $\sum_{i=1}^{n} A_i^e$ і $\sum_{i=1}^{n} A_i^j$ – відповідно сума робіт зовнішніх і внутрішніх сил.

Елементарна робота сили дорівнює скалярному добутку сили на елементарне переміщення точки її прикладення:

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot ds \cdot \cos(\vec{F}, \vec{\tau}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \tag{4.9}$$

де s – дугова координата, $\vec{\tau}$ - орт дотичної до траєкторії точки, dx, dy, dz - проекції вектора елементарного переміщення $d\vec{r}$ точки прикладення сили на осі декартової системи координат.

Робота сили на скінченому переміщенні матеріальної точки вздовж дуги L визначається одним з інтегралів:

$$A = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_L F_\tau ds = \int_L (F_x dx + F_y dy + F_y dz). \tag{4.10}$$

Робота сили ваги матеріальної точки дорівнює добутку сили ваги на різницю висот (±h) початкового і кінцевого положення точки:

$$A = \pm Ph = \pm mgh. \tag{4.11}$$

Робота центральної сили не залежить від форми траєкторії матеріальної точки, на яку діє центральна сила, а залежить тільки від початкового та кінцевого положень точки:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr\ . \tag{4.12}$$

Робота сили пружності у випадку, коли кінці пружини закріплено шарнірно, а пружня сила пропорційна подовженню Δr $(F = -C\Delta r)$, визначається з виразу:

$$A = -\frac{C}{2}(\Delta r_2^2 - \Delta r_1^2), \tag{4.13}$$

де $\Delta r_1 = r_1 - r_0$, $\Delta r_2 = r_2 - r_0$ – початкове та кінцеве подовження пружини, r_1 та r_2 – довжина пружини в початковому та кінцевому положенні, r_0 – довжина недеформованої пружини, C - жорсткість пружини.

Елементарна робота сил, що прикладені до твердого тіла, дорівнює сумі роботи головного вектора зовнішніх сил, яка здійснюється на елементарному переміщенні полюса O, і роботи головного моменту цих сил, обчисленого відносно центра O, на елементарному обертальному переміщенні $\overrightarrow{d\varphi}$ тіла навколо осі, що проходить через цей центр:

$$d'A = \vec{F}^e \cdot d\vec{r}_O + \vec{M}_O^e \cdot \overrightarrow{d\varphi}. \tag{4.14}$$

Елементарна та повна робота сил, прикладених до твердого тіла, що обертається навколо осі Oz:

$$d'A = M_z \cdot d\varphi, \qquad A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z \cdot d\varphi, \tag{4.15}$$

де M_z - головний момент всіх зовнішніх сил відносно осі обертання Oz.

Сума робіт всіх внутрішніх сил абсолютно твердого тіла дорівнює нулю.

Потужність зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, дорівнює сумі скалярного добутку головного вектора на швидкість полюса O і скалярного добутку головного моменту цих сил відносно даного полюсу на кутову швидкість обертання тіла:

$$N = \vec{F}^e \cdot \vec{v}_O + \vec{M}_O^e \cdot \vec{\omega}. \tag{4.16}$$

В окремому випадку, коли тіло здійснює обертання навколо нерухомої осі, наприклад Oz, і $M_z = \text{const}$, потужність і робота зовнішніх сил визначається за формулами:

$$N = M_z \cdot \omega, \qquad A = M_z(\varphi - \varphi_0), \tag{4.17}$$

де φ, φ_0 - кінцеве і початкове значення кута повороту тіла.

Комплект завдань

В аудиторії можуть розв'язуватись задачі 30.4, 30.8, 30.16 [4] або 12.14, 12.15, 12.28 [5] різного ступеня складності на застосування теореми про зміну кінетичної енергії точки.

В аудиторії можуть розв'язуватись задачі 38.41 [4], завдання § 12.4.4 [5] або РГР Д-10 [6] різного ступеня складності.

Приклад 4.1 ([5] 12.14)

Вантажу вагою $\vec{P} = m\vec{g}$, підвішеному в точці O_1 на пружині, статичне подовження якої під дією сили ваги P дорівнює $\lambda_{\text{СТ}}$, надана початкова швидкість $\vec{v}_0$ із положення M_0 вертикально вниз (рис.4.1). Визначити швидкість вантажу в положенні M, якщо вантаж, який приймається за матеріальну точку, ковзає по кільцю радіуса R без тертя, $OO_1 = R$ і довжина недеформованої пружини дорівнює R.

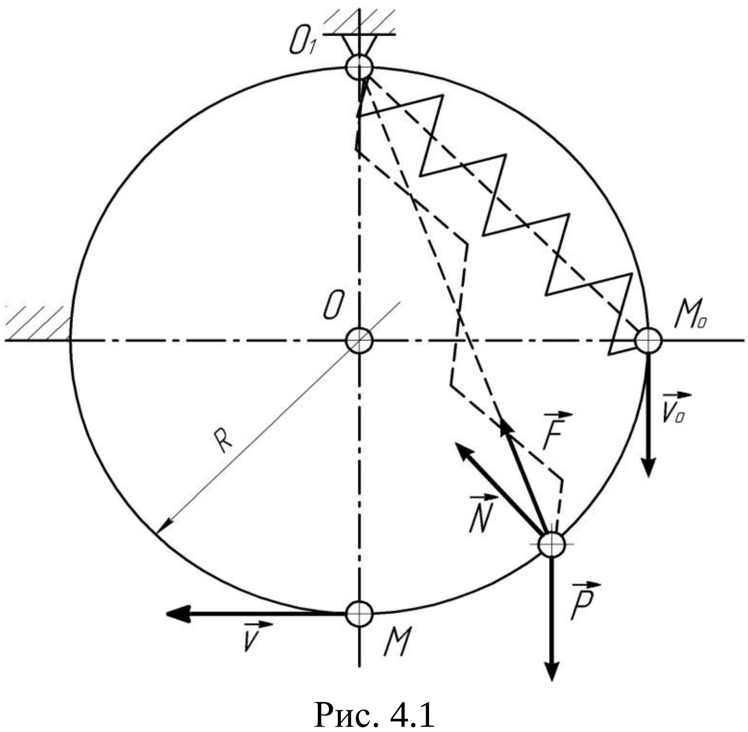


Рис. 4.1

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо для аналізу руху вантажу теорему про зміну кінетичної енергії точки, прийнявши за початкове положення вантажу точку M_0 і кінцеве – точку M. Отримаємо за (4.1):

$$m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = A.$$

Роботу здійснюють сила ваги вантажу:

$$A = mgh$$

і пружня сила пружини:

$$A = -\frac{C}{2}(\Delta r_2^2 - \Delta r_1^2),$$

де Δr_2 та Δr_1 - відповідно подовження пружини в кінцевому та початковому положеннях. Так як в положенні статичної рівноваги тіла, підвішеного на пружині, сила ваги *mg* зрівноважується пружньою силою пружини, то має місце співвідношення $mg = C\lambda_{CT}$, де $\lambda_{\text{СТ}}$ - статичне подовження пружини (подовження пружини в положенні рівноваги). Тоді коефіцієнт пружності пружини визначається так:

$$C = \frac{mg}{\lambda_{CT}}.$$

Нормальна реакція $\vec{N}$ кільця весь час перпендикулярна переміщенню і її робота дорівнює нулю. Отже сума робіт має вигляд:

$$A = mgh - \frac{mg}{2\lambda_{\text{СТ}}}(\Delta r_2^2 - \Delta r_1^2).$$

У випадку, який розглядається:

$$h = R, \qquad \Delta r_1 = R\sqrt{2} - R; \qquad \Delta r_2 = 2R - R = R,$$

Тому:

$$A = mgh - \frac{mg}{2\lambda_{\text{СТ}}}[R^2 - R(\sqrt{2}-1)^2] = mgR[1 - \frac{R}{\lambda_{\text{СТ}}}(\sqrt{2}-1)].$$

Підставляючи одержаний вираз роботи в (1), дістанемо:

$$m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = mgR[1 - \frac{(\sqrt{2}-1)]R}{\lambda_{\text{СТ}}}],$$

Звідки:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gR[1 - \frac{(\sqrt{2}-1)^2 R}{\lambda_{\text{СТ}}}]}.$$

Приклад 4.2 ([5] 12.15)

Тіло має вагу $P = mg$, падає без початкової швидкості на пружину з висоти h (рис.4.2). Визначити найбільше стиснення пружини λ. Масою пружини знехтувати.

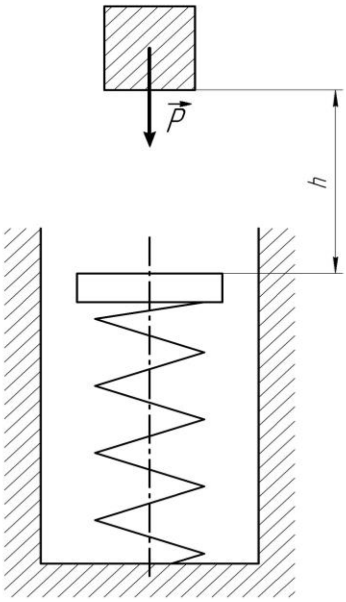


Рис. 4.2

Розв'язання. Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії точки:

$$m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = A$$

прийнявши за початкове положення тіла начало його падіння з висоти h, а за кінцеве – момент максимального стиснення пружини. Зміна кінетичної енергії за цей проміжок часу дорівнює нулю, тому що $v_0 = 0$ і при найбільшому стисненні пружини v=0 Отже, робота $A = 0$. На тіло, після його дотику з пружиною, діють дві сили: сила ваги $\vec{P} = m\vec{g}$ і пружня сила пружини. Сила $\vec{P}$ здійснює роботу на переміщенні $(h + \lambda)$, пружня сила – на переміщенні λ. Тому:

$$A = mg(h + \lambda) - \frac{C}{2}\lambda^2 = 0,$$

де C-коефіцієнт пружності пружини.

Так як в положенні статичної рівноваги тіла сила ваги зрівноважується пружньою силою пружини, то має місце співвідношення $mg = C\lambda_{CT}$, де $\lambda_{\text{СТ}}$ - статична деформація пружини (подовження пружини в положенні рівноваги). Тоді коефіцієнт пружності пружини визначається так:

$$C = \frac{mg}{\lambda_{CT}}.$$

Далі з виразу роботи сил отримаємо:

$$h + \lambda - \frac{1}{2\lambda_{CT}}\lambda^2 = 0,$$

Або:

$$\lambda^2 - 2\lambda_{CT}\lambda - 2\lambda_{CT}h = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, маємо два корені. Враховуючи фізичний зміст задачі, залишаємо один корінь (другий корінь від'ємний):

$$\lambda = \lambda_{CT} + \sqrt{\lambda_{CT}^2 + 2\lambda_{CT}h}.$$

Зауважимо, що при $h = 0$ найбільше стиснення пружини $\lambda = 2\lambda_{CT}$, тобто при динамічній дії вантажу на пружину її найбільше стиснення в два рази більше статичної деформації.

Приклад 4.3 ([5] 12.16)

Редуктор пароплавного турбозубчатого агрегата складається з трьох коліс, радіуси яких відповідно дорівнюють r_1, r_2, r_3 (рис.4.3). На ведучі колеса I і II від турбін передаються моменти M_1 і M_2. Визначити кутове прискорення гребного валу, якщо на гвинт діє момент опору M_3. Прийняти моменти інерції ведучих колес рівними I_1 і I_2, а момент інерції колеса III з валом і гвинтом I_3.

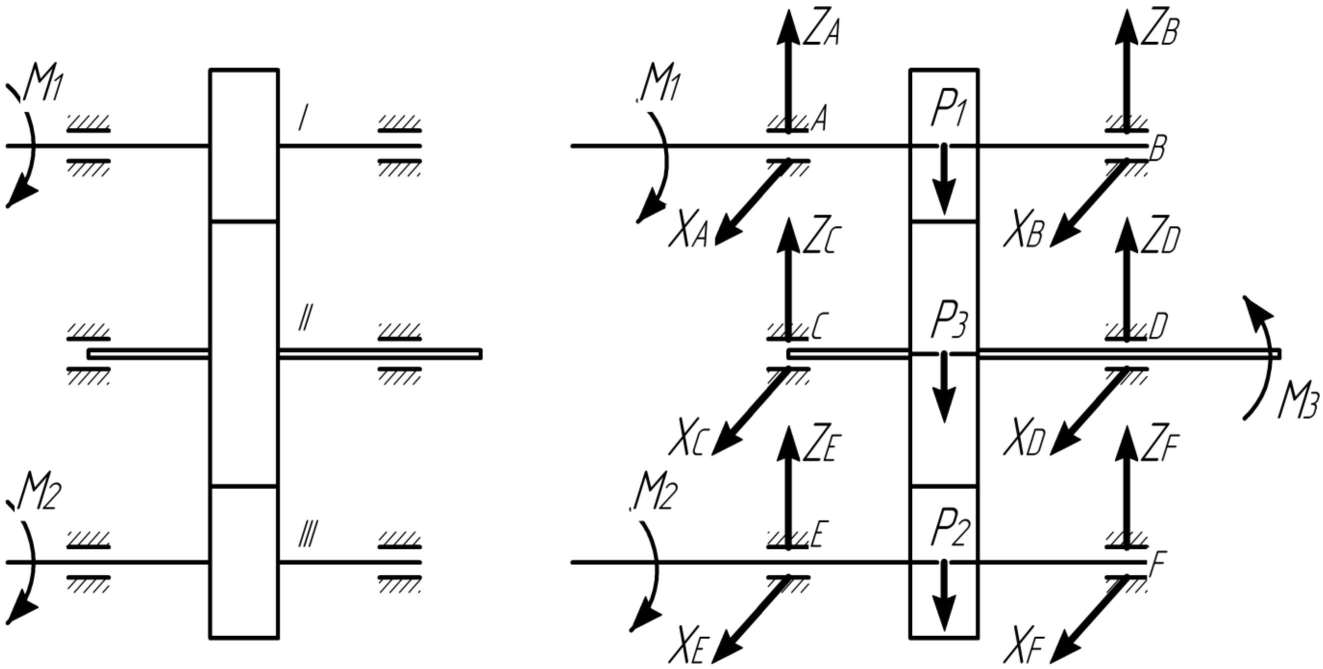


Рис. 4.3

Розв’язання. Скористаємося теоремою про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі і запишемо формулу для визначення потужності :

$$\frac{dT}{dt} = N\,.$$

Визначимо кінетичну енергію системи, яка складається з трьох виконуючих обертальний рух коліс редуктора:

$$T = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)\,.$$

В силу кінематичних співвідношень:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 = \omega_3 r_3,$$

маємо:

$$T = \frac{1}{2}[I_1(\frac{r_3}{r_1})^2 + I_2(\frac{r_3}{r_2})^2 + I_3]\omega_3^2$$

Або:

$$T = \frac{1}{2} I_{\text{пр}}\omega_3^2,$$

де приведений момент інерції $I_{\text{пр}}$ дорівнює:

$$I_{\text{пр}} = I_3 + I_1(\frac{r_3}{r_1})^2 + I_2(\frac{r_3}{r_2})^2\,.$$

Знайдемо потужність N :

$$N = M_1\omega_1 + M_2\omega_2 - M_3\omega_3 = (M_1\frac{r_3}{r_1} + M_2\frac{r_3}{r_2} - M_3)\omega_3 .$$

Діючи на систему і зображені на рис.12.30 сили ваги коліс P_1, P_2, P_3 і реакції підшипників коліс X_A, Z_A, X_B, Z_B, X_C, Z_C, X_D, Z_D, X_F, Z_F, X_E, Z_E прикладені до нерухомих точок, їх робота при обертальних рухах коліс дорівнює нулю, тому вони не входять до виразу потужності N. Внутрішніми силами являються окружні сили в точках дотику зубчастих коліс.

Із виразу для T знаходимо, враховуючи, що кутова швидкість ω є функція часу:

$$\frac{dT}{dt} = I_{\text{пр}}\omega_3\varepsilon_3 .$$

Тому маємо:

$$I_{\text{пр}}\omega_3\varepsilon_3 = (M_1\frac{r_3}{r_1} + M_2\frac{r_3}{r_2} - M_3)\omega_3 ,$$

Звідси:

$$\varepsilon_3 = \frac{(M_1\frac{r_3}{r_1} + M_2\frac{r_3}{r_2} - M_3)}{I_{\text{пр}}} .$$

Приклад 4.4 ([5] 12.17)

Механічна система внаслідок дії сил ваги тіл 1 починає рухатись із стану спокою. Враховуючи опір кочення тіла 1, яке котиться без ковзання, нехтуючи масами ниток, які вважаються нерозтяжними, знайти швидкість v тіла 1 в той момент, коли пройдений ним шлях буде дорівнювати S (рис.4.4,а). Дано: $m_1 = 2m$; $m_2 = m$; $m_3 = 2m$; $m_4 = m$; $R_1 = R_3 = 12$см, $r_2 = 0,75R_2$, $r_1 = 0,5R_1$, $R_2 = 20$см, $i_{1x} = 10$см, $i_{2x} = 8$см, $\alpha = 30^o$, $\delta = 0,2$см; $S = 2$м.

Розв'язання. Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи:

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i^e + \sum_{i=1}^{n} A_i^j .$$

Для розглядуваної системи, яка складається із абсолютно твердих тіл, з'єднаних нерозтяжними нитками, сума робіт внутрішніх сил дорівнює нулю: $\sum_{i=1}^{n} A_i^j = 0$.

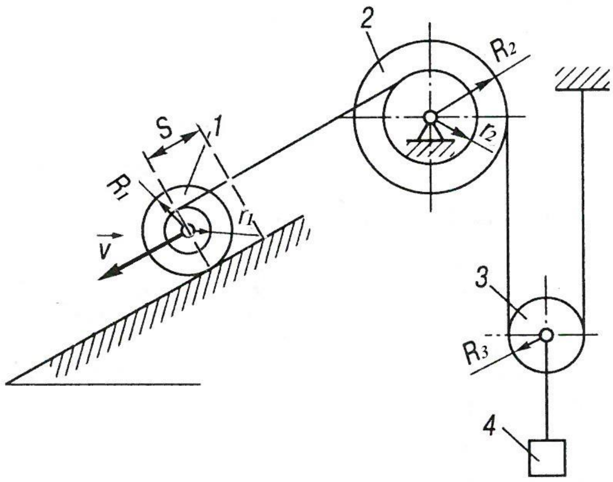


Рис. 4.4,а.

Крім того, оскільки у початковому положенні система знаходиться в стані спокою, то $T_0 = 0$.

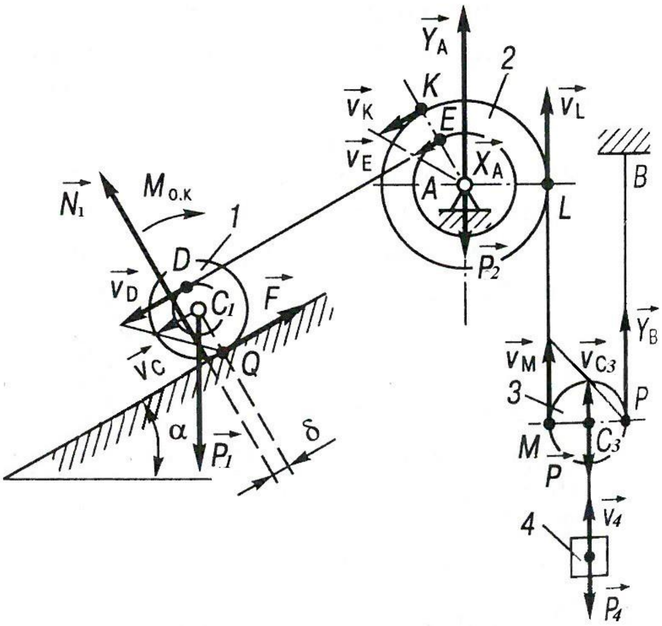


Рис. 4.4, б.

Кінетична енергія T системи в кінцевому її положенні дорівнює сумі кінетичних енергій тіл 1, 2, 3, 4:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 .$$

Кінетична енергія блоку 2, який обертається відносно нерухомої осі, $T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2$, де I_1- момент інерції блоку 2 відносно осі обертання, $I_2 = m_2 i_{2x}^2 = m i_{2x}^2$, ω_1- кутова швидкість тіла 2, $\omega_2 = \frac{\text{v}_E}{r_2}$.

Швидкість точки E блока 2 дорівнює швидкості точки D котка 1, яку можна знайти із співвідношення $\frac{\text{v}_D}{\text{v}_{C_1}} = \frac{(R_1 + r_1)}{R_1}$, оскільки $\text{v}_{C_1} = \text{v}$, $R_1 = 2r_1$ то $\frac{\text{v}_D}{\text{v}} = \frac{3}{2}$, і $\text{v}_E = \text{v}_D = \frac{3}{2}\text{v}$. Тоді $\omega_2 = \frac{3\text{v}}{2r_2}$. З урахуванням виразів для I_2 і ω_2 формула для кінетичної енергії блока 2 приймає вигляд:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 i_{2x}^2 \left(\frac{3\text{v}}{2r_2} \right)^2 = \frac{9m}{8} \left(\frac{i_{2x}}{r_2} \right)^2 \text{v}^2 .$$

Кінетична енергія T_3 блока 3, який здійснює плоский рух:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \text{v}_{C_3}^2 + \frac{1}{2} I_{C_3} \omega_3^2 ,$$

де v_{C_3}- швидкість центра мас C_3 блока 3, I_{C_3}- момент інерції блока (однорідного суцільного циліндра) відносно його центральної (горизонтальної) осі, $I_{C_3} = \frac{1}{2} m_3 R_3^2$, ω_3 - миттєва кутова швидкість блока 3. Оскільки блок 3 рухається таким чином, що нитка відносно поверхні блока не проковзує, то миттєвий центр швидкостей знаходиться у точці P. Тому $\omega_3 = \frac{\text{v}_{C_3}}{R_3}$. Швидкість v_{C_3} точки C_3 блока дорівнює $\text{v}_{C_3} = \frac{\text{v}_M}{2}$, а $\text{v}_M = \text{v}_L = \text{v}_K$.

Швидкість v_K точки K блока 2 знайдемо із співвідношення:

$$\frac{\text{v}_K}{\text{v}_E} = \frac{R_2}{r_2} .$$

Враховуючи те, що $r_2 = 0{,}75 R_2$, з урахуванням попередніх кінематичних співвідношень, одержимо $\text{v}_{C_2} = \text{v}$, $\omega_3 = \frac{\text{v}}{R_2}$. Тоді для кінетичної енергії блока 3 одержимо вираз:

$$T_3 = \frac{m_3 \text{v}^2}{2} + \frac{m_3 \text{v}^2}{4} = \frac{3m\text{v}^2}{2}.$$

Кінетична енергія котка 1, який здійснює плоский рух:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \text{v}_{C_1}^2 + \frac{1}{2} I_{C_1} \omega_1^2,$$

де v_{C_1} - швидкість центра мас C_1 котка 1, $\text{v}_{C_1} = \text{v}$, I_{C_1} - момент інерції котка 1 відносно його центральної горизонтальної поздовжньої осі: $I_{C_1} = m_1 i_{1x}^2 = 2m i_{1x}^2$, ω_1 - миттєва кутова швидкість котка 1. Оскільки каток котиться без ковзання, то миттєвий центр швидкостей знаходиться у точці Q. Тому $\omega_1 = \dfrac{\text{v}_{C_1}}{R_1} = \dfrac{\text{v}}{R_1}$. З урахуванням виразів для I_{C_1} і ω_1 формула для T_1 набуває вигляду:

$$T_1 = \frac{m_1 \text{v}^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{m_1 i_{1x}^2 \text{v}^2}{R_1^2} = m\text{v}^2 \left[1 + \left(\frac{i_{1x}}{R_1} \right)^2 \right].$$

Кінетична енергія тягаря 4, який рухається поступально, $T_4 = \dfrac{m_4 \text{v}_4^2}{2}$,

де v_4 - швидкість тягаря 4, $\text{v}_4 = \text{v}$, тому $T_4 = \dfrac{m\text{v}^2}{2}$.

Кінетична енергія всієї механічної системи з урахуванням одержаних формул для T_1, T_2, T_3, T_4:

$$T = m\text{v}^2 \left\{ \frac{3}{2} + \frac{9}{8} \left(\frac{i_{2x}}{r_2} \right)^2 + \frac{1}{2} + 1 + \left(\frac{i_{1x}}{R_1} \right)^2 \right\}$$

або $$T = 3{,}92 m\text{v}^2.$$

Знайдемо суму робіт усіх зовнішніх сил, прикладених до точок системи, на заданому переміщенні. Покажемо усі зовнішні сили, прикладені до системи (рис.4.4,б).

Робота сили ваги $\vec{P}_3$ і сили ваги $\vec{P}_4$:

$$A(\vec{P}_3) = -m_3 g h_3,\ A(\vec{P}_4) = -m_4 g h_4,$$

де $h_3 = h_4 = h$ - вертикальне переміщення центра мас C_3 блока 3 і тягаря 4.

Для визначення величини переміщення h слід врахувати те, що між лінійними переміщеннями точок такі ж залежності, як і між їх швидкостями. Через те, що $\text{v}_{C_3} = \text{v}$, отримаємо: $h = S$. Тому:

$$A(\vec{P}_3) = -m_3 gS\,,\quad A(\vec{P}_4) = -m_4 gS\,,$$

Робота сили ваги $\vec{P}_1$:

$$A(\vec{P}_1) = m_1 g h_1 = m_1 gS \sin\alpha$$

Робота пари сил опору кочення котка 1:

$$A(M_{\text{ðð ê}}) = -M_{\text{ðð ê}} \cdot \varphi_1,$$

де $M_{\text{ðð ê}} = \delta N_1 = \delta m_1 g \cos\alpha$ - момент пари сил тертя кочення котка 1; φ_1- кут повороту котка 1. Оскільки коток 1 котиться без ковзання, то кут його повороту:

$$\varphi_1 = \frac{S_{C_1}}{R_1}\,,$$

де S_{C_1}- переміщення центра мас C_1 котка 1, причому $S_{C_1} = S$. Тому $A(M_{\text{ðð ê}}) = -\dfrac{\delta m_1 gS\cos\alpha}{R_1}$.

Робота сили ваги $\vec{P}_2$ і реакцій X_A , Y_A підшипника осі обертання блока 2 дорівнюють нулю, оскільки ці сили прикладені до нерухомої точки. Робота сили зчеплення $\vec{F}$ котка 1 дорівнює нулю, оскільки ця сила прикладена в миттєвому центрі швидкостей котка. Точка прикладання реакції Y_B троса знаходиться в точці P (миттєвому центрі швидкостей тіла 3) тобто є нерухомою, тому робота реакції Y_B дорівнює нулю.

Сума робіт зовнішніх сил визначиться додаванням робіт, обчислених за вище приведеними виразами:

$$\sum A_i^E = -m_3 gS - m_4 gS + m_1 gS\sin\alpha - \frac{\delta m_1 gS\cos\alpha}{R_1} =$$

$$= mgS\left[-2 - 1 + 2\sin\alpha - \frac{2\delta\cos\alpha}{R_1}\right] = -2{,}03mgS.$$

Відповідно до теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи прирівняємо значення T і $\sum A_i^E$:

$$3{,}92m\text{v}^2 = -2{,}03mgS\,, \tag{4.18}$$

звідси

$$\text{v} = \sqrt{\frac{2{,}03gS}{3{,}92}} = \sqrt{\frac{2{,}03\cdot 9{,}81\cdot 2}{3{,}92}} = 10{,}16\,\frac{м}{с}\,.$$

Теорема про зміну кінетичної енергії дозволяє окрім швидкості визначати також і прискорення. Продиференціювавши вираз (4.18) за часом, вважаючи пройдений тілом 1 шлях S змінною величиною, отримаємо:

$$3{,}92 \cdot 2\mathrm{v}\dot{\mathrm{v}} = 2{,}03 g\dot{S} .$$

Оскільки $\dot{S} = \dfrac{dS}{dt} = \mathrm{v}$, а $\dot{\mathrm{v}} = \dfrac{d\mathrm{v}}{dt} = \mathrm{w}$, то скорочуючи на v, одержимо:

$$\mathrm{w} = \dot{\mathrm{v}} = \frac{2{,}03g}{3{,}92 \cdot 2} = 2{,}54 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} .$$

Контрольні запитання

1. Яку величину називають кінетичною енергією точки і в якій системі координат вона обчислюється?

2. Як визначається кінетична енергія точки при натуральному способі задання її руху?

3. Як визначається кінетична енергія точки при координатному способі задання її руху?

4. Чи є робота сил, прикладених до матеріальної точки, повним диференціалом деякої функції часу?

5. Яка принципова відмінність кінетичної енергії як міри механічного руху від інших динамічних величин, що характеризують рух матеріальних об’єктів?

6. Який вираз має елементарна робота сили, прикладеної до матеріальної точки на дійсному її переміщенні?

7. Що таке повна робота сили і за якими формулами її можна обчислити?

8. Як можна знайти вираз повної роботи сили, маючи вираз її елементарної роботи?

9. Чи залежить робота сил, прикладених до матеріальної точки, від форми шляху, пройденого точкою?

10 Від чого залежить робота сил, прикладених до матеріальної точки?

11. Які вирази має кінетична енергія тіла, що рухається поступально, обертається навколо нерухомої осі та виконує плоский рух?

12. Які три складові є у виразі для кінетичної енергії системи?

13. Чи є робота сил, прикладених до матеріальної точки, повним диференціалом деякої функції часу?

14. Яким співвідношенням зв’язані між собою основні динамічні величини?

15. Яка принципова відмінність кінетичної енергії як міри механічного руху від інших динамічних величин, що характеризують рух матеріальних об’єктів?

16. Чим принципово за змістом відрізняються теореми про зміну кінетичної енергії для точки і для механічної системи?

17. Що таке робота сили і за якими формулами її можна обчислити?

18. Як можна знайти вираз повної роботи сили, маючи вираз її елементарної роботи?

19. Чи залежить робота сил, прикладених до матеріальної точки, від форми шляху, пройденого точкою?

20. Чому для системи, що складається з абсолютно твердих тіл, що підкорені ідеальним стаціонарним та утримуючим в’язям, можна знехтувати роботою внутрішніх сил в системі?

Завдання на СРС

Розв’язати задачі 30.9, 18, 25 [4] або пр. 12.27, 12.31 [5] для частини про зміну кінетичної енергії точки.

Розв’язати задачі 38.44 [4], завд. § 12.4.4 [5] або видати завдання по варіантам РГР Д-10 [6] для частини про зміну кінетичної енергії системи точок. Повторити матеріал попередніх практичних занять для підготовки до модульної контрольної роботи.

2.5. <u>Практичне заняття 5.</u> Принцип можливих переміщень. Загальне рівняння статики. (тема 6.1)

Мета заняття

Метою цього заняття є засвоєння методів розв’язання задач за допомогою теорії можливих переміщень.

Методичні прийоми

Застосування вказаної теорії базується на понятті можливого переміщення. У разі, коли в'язі, накладені на систему, є ідеальними, двосторонніми та стаціонарними, принцип можливих переміщень трансформуються відповідно в загальне рівняння статики. Це рівняння використовується при розв'язанні задач.

Теоретичні відомості

Найзагальніший принцип аналітичної статики, принцип можливих переміщень, полягає в наступному: для рівноваги системи матеріальних точок, що підпорядковуються утримувальним ідеальним стаціонарним в'язям, необхідно і достатньо, щоб дорівнювала нулю сума елементарних робіт активних сил на будь-якому можливому переміщенні системи з положення рівноваги, що розглядається, за умови, що в початковий момент система нерухома:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \tag{5.1}$$

де $\vec{F}_i$ — активні сили, прикладені до точок системи.

Вираз (5.1) називають *загальнім рівнянням статики*. Враховуючи, що в проекціях на осі декартової системи координат $Oxyz$ можна записати $\vec{F}_i = \left\{ F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} \right\}$ та $\delta \vec{r}_i = \left\{ \delta x_i, \delta y_i, \delta z_i \right\}$, загальне рівняння статики можна подати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{n} (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = 0. \tag{5.2}$$

Принцип можливих переміщень дає змогу розв'язувати задачі па дослідження рівноваги твердого тіла та системи твердих тіл, визначати залежності між величинами активних сил у стані рівноваги. Він дозволяє одержати найменш можливу кількість рівнянь рівноваги довільної системи, яка дорівнює числу її степенів вільності.

У випадку неідеальних в'язей, наприклад шорсткої поверхні, до активних сил треба умовно віднести сили, які вносять неідеальність (сили тертя) і. відповідно, прирівняти нулю суму робіт активних сил і сил тертя на будь-яких можливих переміщеннях точок системи.

Принцип можливих переміщень дає змогу визначати невідомі реакції ідеальних в'язей. Для цього треба застосувати аксіому про звільнення від

в’язей і замінити дію в’язі шуканою реакцією. При складанні рівняння рівноваги до активних сил слід віднести шукану реакцію в'язі.

Наведемо послідовність розв'язання задач з використанням принципу можливих переміщень:

1) виділити систему матеріальних точок або тіл, рівновага яких досліджується;

2) проаналізувати та графічно зобразити активні сили, які діють на систему;

3) дослідити характер в’язей і у випадку неідеальних в’язей визначити їх реакції та умовно віднести до активних сил;

4) надати системі можливі переміщення;

5) скласти загальне рівняння статики, тобто записати алгебраїчну суму елементарних робіт сил. що розглядаються на можливих переміщеннях їх точок прикладання, та прирівняти її нулю;

6) визначити число степенів вільності системи та встановити при необхідності залежність між можливими переміщеннями. Кількість незалежних можливих переміщень дорівнюватиме числу степенів вільності;

7) у загальному рівнянні статики виключити залежні можливі переміщення і. враховуючи. що незалежні можливі переміщення одночасно не дорівнюють нулю, отримати систему рівнянь, з яких визначаються шукані величини.

Комплект завдань

В аудиторії можуть розглядатися, наприклад, задачі 46.8, 20, 22; 47.3, 9, 16 [4] різного ступеня складності із застосуванням вищевказаного алгоритмічного підходу.

Приклад 5.1 ([5] 17.3)

До повзуна A механізму еліпсографа (рис. 5.1) прикладено силу P, яка діє вздовж прямої руху повзуна в напрямку осі обертання O кривошипа OC .Визначити обертальний момент M , який треба прикласти до кривошипа OC для того, щоб механізм знаходився в рівновазі. Механізм розташовано в горизонтальній площині, кривошип OC утворює з напрямком руху повзуна В наперед заданий кут φ, $OC = AC = CB = l$.

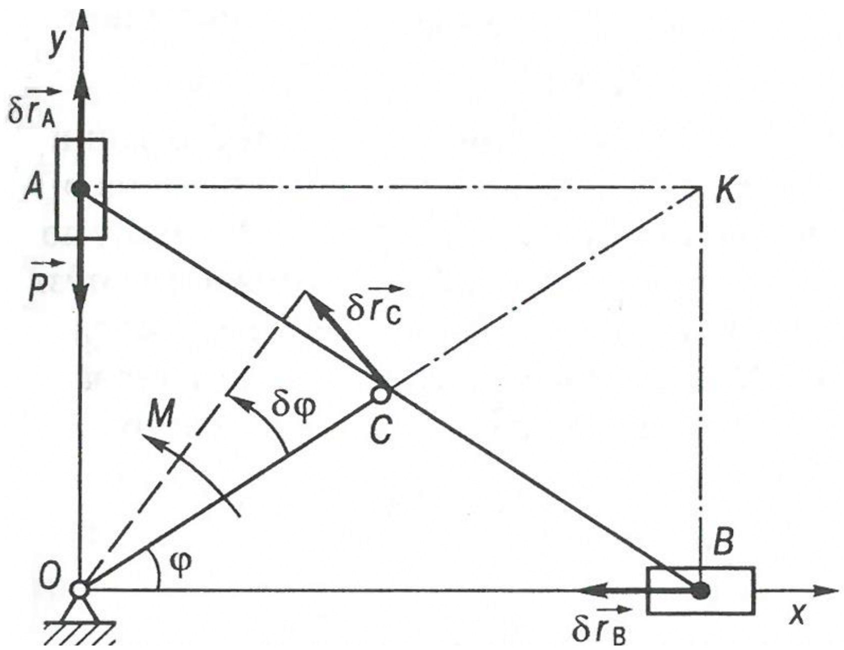


Рис. 5.1

Розв’язання. Розглянемо рівновагу всього механізму і застосуємо принцип можливих переміщень.

Зобразимо відому активну силу Р та пару сил з невідомим моментом M (рис. 5.1).

В’язями в даній задачі є напрямні повзунів A та B, циліндричні шарніри O, C, B, A, тертям в яких знехтуємо. Ці в’язі є ідеальними, тобто їх реакції не увійдуть у загальне рівняння статики.

Надаємо механізму можливого переміщення: уявно повернемо кривошип OC проти ходу годинникової стрілки на малий кут $\delta\varphi$. Тоді відповідні можливі переміщення повзунів A та B будуть $\delta\vec{r}_A$ та $\delta\vec{r}_B$ (рис. 5.1). Загальне рівняння статики набуває вигляду:

$$\vec{M} \cdot \delta\vec{r}_A + \vec{P} \cdot \delta\vec{r}_B = 0, \qquad (5.3)$$

де $\overline{\delta\varphi}$ — вектор, напрямок якого збігається з вектором кутової швидкості повороту кривошипа на кут $\delta\varphi$. У скалярній формі, враховуючи напрямки векторів, маємо

$$M\delta\varphi - P\delta r_A = 0. \qquad (5.4)$$

У це рівняння не входить робота сил ваги, оскільки механізм розташовано в горизонтальній площині.

Поданий механізм є системою з одним степенем вільності. Тому між величинами $\delta\varphi$ та δr_A існує зв’язок, для встановлення якого скористаємось

кінематичними співвідношеннями. Спочатку визначимо зв'язок між швидкістю v_A точки A та кутовою швидкістю ω_{OC} кривошипа OC. Координата y_A точки A визначається так: $y_A = 2l\sin\varphi$.

Тоді швидкість точки A:

$$v_A = \dot{y}_A = 2l\omega_{OC}\cos\varphi.$$

Вираз для швидкості точки A можна отримати іншим способом, визначивши миттєвий центр швидкостей K лінійки AB еліпсографа (рис. 5.1). Тоді можна записати:

$$\frac{v_A}{KA} = \frac{v_C}{KC},$$

де швидкість точки C дорівнює $v_C = \omega_{OC}\, l$.

Для прямокутного трикутника OKA можемо записати співвідношення $KA = 2KC\cos\varphi$. Тоді швидкість:

$$v_A = 2l\omega_{OC}\cos\varphi. \tag{5.5}$$

Далі, враховуючи, що $v_A = \dfrac{dr_A}{dt}$ і $\omega_{OC} = \dfrac{d\varphi}{dt}$, з виразу (3) отримаємо:

$$dr_A = 2l\cos\varphi \cdot d\varphi.$$

Оскільки в'язі стаціонарні, дійсні переміщення є одними з можливих. Отже, можна записати $\delta r_A = 2l\delta\varphi\cos\varphi$, і загальне рівняння статики (2) набуде вигляду:

$$(M - 2Pl\cos\varphi)\delta\varphi = 0. \tag{5.6}$$

Враховуючи, що $\delta\varphi \neq 0$, отримаємо рівняння рівноваги механізму:

$$M - 2Pl\cos\varphi = 0.$$

Після розв'язання маємо $M = 2Pl\cos\varphi$.

Приклад 5.2 ([5] 17.4)

До кінців невагомої нерозтяжної мотузки прив'язано вантажі A та B однакової ваги. Мотузка огинає нерухомі блоки C та E, охоплює рухомий блок D (рис. 5.2, а). До осі рухомого блока D підвішено вантаж K вагою Q. Визначити вагу P вантажів A та B та коефіцієнт тертя f вантажу A по горизонтальній площині, якщо система вантажів перебуває у стані спокою.

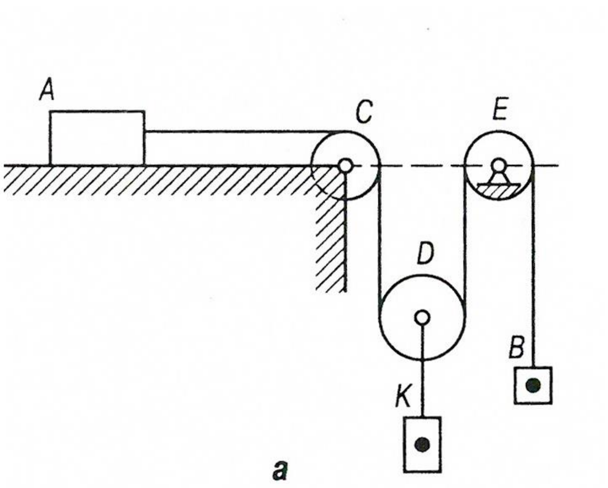


Рис. 5.2,а

Розв’язання. Об’єкт дослідження Даної задачі — система вантажів. Активними силами, прикладеними до вантажів є сили ваги $\overrightarrow{P_A}, \overrightarrow{P_B}, \vec{Q}$ (рис. 5.2).

Проведемо аналіз в’язей. Нерозтяжна невагома мотузка та блоки є ідеальними в’язями. На відміну від мотузки та блоків жорстка горизонтальна поверхня не є ідеальною в’яззю. Дотичну складову її реакції - силу тертя - визначимо за законом Кулона із співвідношення $F_{TP} = fP_A$ та віднесемо до активних сил. Напрямимо її вліво, що відповідає фізичному змісту задачі.

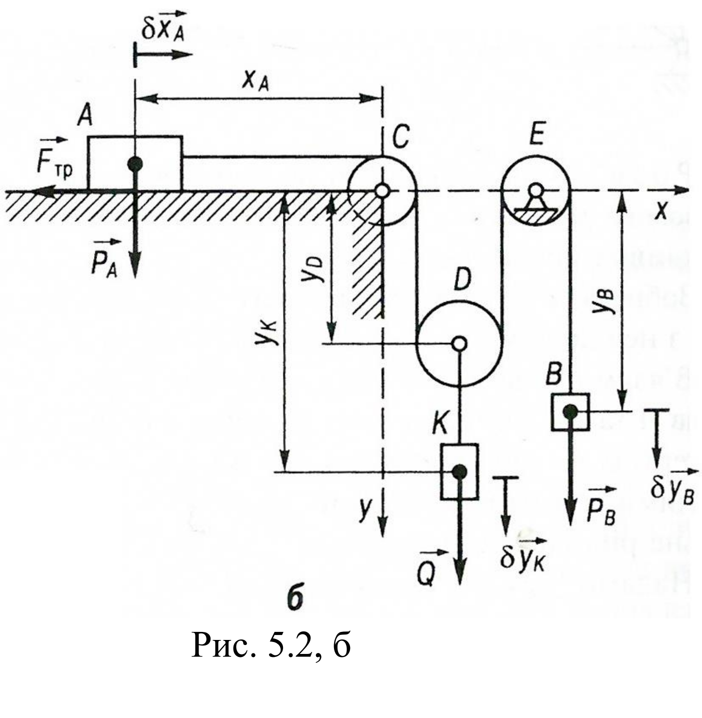


Рис. 5.2, б

Визначимо положення вантажів параметрами x_A, y_B, y_K, які є координатами вантажів у вибраній системі координат Cxy (рис. 5.2, б).

Уявно надамо тілам $A, B, K,$ системи можливих переміщень $\delta x_A, \delta y_B, \delta y_K,$, проекції яких на осі координат вважаємо додатними. Складемо загальне рівняння статики:

$$\vec{F}_{TP} \cdot \delta \vec{x}_A + \vec{P}_B \cdot \delta \vec{y}_B + \vec{Q} \cdot \delta \vec{y}_K = 0, \tag{5.7}$$

або з урахуванням напрямків векторів:

$$-fP_A \cdot \delta x_A + P_B \cdot \delta y_B + Q \cdot \delta y_K = 0. \tag{5.8}$$

Складаємо рівняння в'язі, тобто запишемо обмеження, які мотузка накладає на рух і положення системи вантажів. Незмінну довжину (припустимо, l) нерозтяжної мотузки можна вважати рівною сумі ділянок $x_A, y_D, y_B,$. Враховуючи, що вантаж A розташований на від'ємних значеннях осі Cx, маємо:

$$-x_A + y_B + 2y_D = l = const. \tag{5.9}$$

Варіюючи останній вираз і враховуючи, що $\delta y_K = \delta y_D$ запишемо:

$$-\delta x_A + 2\delta y_K + \delta y_B = 0. \tag{5.10}$$

або

$$\delta x_A = 2\delta y_K + \delta y_B. \tag{5.11}$$

Число степенів вільності вданій системі дорівнює двом, тобто лише два можливих переміщення є незалежними. Такими вважатимемо величини δy_K та δy_B.

Виключимо з загального рівняння статики (5.8) можливе переміщення за формулою (5.11). Тоді отримаємо:

$$-fP_A(2\delta y_K + \delta y_B) + P_B \delta y_B + Q\delta y_K = 0 .$$

З урахуванням $P_A = P_B = P$:

$$(-2fP + Q)\delta y_K + (fP + P)\delta y_B = 0. \tag{5.12}$$

Оскільки δy_K і δy_B — незалежні та довільні можливі переміщення, остання рівність виконується при одночасному виконанні умов:

$$-2fP + Q = 0, \qquad -fP + P = 0. \tag{5.13}$$

Після розв'язання системи рівнянь (7) отримаємо:

$$f = 1, \; P = \frac{Q}{2}.$$

Контрольні запитання

1. Сформулюйте визначення в’язей в аналітичній механіці. Наведіть класифікацію в’язей.
2. В чому полягає аналітична умова (постулат) ідеальних в’язей?
3. Для яких в’язей справедливий принцип можливих переміщень?
4. Сформулюйте принцип можливих переміщень точок системи (принцип Лагранжа). Для чого застосовується цей принцип?
5. Що спільного між дійсними та можливими переміщеннями і чим вони відрізняються?
6. Як отримати із принципу можливих переміщень умови рівноваги твердого тіла?
7. Яким чином врахувати «неідеальності» в’язей, що обумовлені тертям у загальних рівняннях статики?

Завдання на СРС

Розв’язати задачі 46.6, 9, 24 [4]; 17.12, 13, 14 [5].

2.6. <u>Практичне заняття 6.</u> Принцип Даламбера-Лагранжа. Загальне рівняння динаміки. (тема 6.1)

Мета заняття

Метою цього заняття є засвоєння методів розв’язання задач динаміки за допомогою теорії можливих переміщень.

Методичні прийоми

Застосування теорії можливих переміщень базується на понятті можливого переміщення. У разі, коли в’язі, накладені на систему, є ідеальними, двосторонніми та стаціонарними, принцип Д’Аламбера-Лагранжа трансформуються відповідно в загальне рівняння динаміки. Це рівняння і використовується при розв’язанні задач.

Методика розв’язання задач з використанням загального рівняння динаміки може бути наступною:

1. Визначаємо об’єкт дослідження, тобто тіло або систему тіл, до аналізу руху яких застосовується загальне рівняння динаміки.
2. Визначаємо число степенів вільності системи. Це можна зробити шляхом накладання додаткових в’язей (число степенів вільності дорівнює

числу додатково накладених в’язей, які зупиняють механічну систему), або математично, складаючи рівняння в’язей.

3. Визначаємо активні сили $\vec{F}_i$, які діють на систему, і зображуємо їх графічно.

4. Проводимо аналіз в’язей. Реакції ідеальних в’язей не входять у загальне рівняння динаміки. Якщо серед в’язей, які обмежують рух системи, є неідеальні, то їх реакції (наприклад, сила тертя) відносять до активних сил. Графічно сили тертя зображуються після того, як зроблено припущення про напрям руху системи.

5. Робимо припущення про напрям руху й прискорень точок системи та виходячи з кінематичних міркувань знаходимо зв’язок між прискореннями.

6. Відповідно до вибраного напряму прискорень зображуємо сили інерції $\vec{\Phi}_i$, умовно прикладаючи їх до точок системи. Для твердих тіл систему сил інерції зводимо до головного вектора системи елементарних сил інерції і пари сил, момент якої дорівнює головному моменту сил інерції елементів тіла відносно вибраного центра зведень.

7. В поточний момент часу умовно зупиняємо систему і надаємо її точкам можливих переміщень $\delta\vec{r}_i$.

8. Складаємо загальне рівняння динаміки як суму елементарних робіт активних сил, головних векторів сил інерції та їх моментів на відповідних можливих переміщеннях

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i)\cdot\delta\vec{r}_i = 0.$$

9. Встановлюємо зв’язок між можливими переміщеннями точок системи. Це можна зробити виходячи з кінематичних міркувань або аналітично, використовуючи рівняння в’язей. Після вибору незалежних можливих переміщень з загального рівняння динаміки виключаємо залежні можливі переміщення. Одночасно вибираємо незалежні прискорення точок системи і виключаємо залежні.

10. У загальному рівнянні динаміки збираємо коефіцієнти при незалежних можливих переміщеннях і прирівнюємо ці коефіцієнти до нуля. Таким чином, приходимо до диференціальних рівнянь руху розглядуваної механічної системи.

11. З одержаних рівнянь знаходимо невідомі величини. Задача визначення закону руху системи зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху. Якщо визначенню підлягають прискорення точок системи, то задача розв’язується алгебраїчно.

Комплект завдань

В аудиторіїї пропонується розв’язати задачі з групи задач [4]: 47.3, 47.11, [5]: 17.17, 17.18. Для самостійної роботи [4]: 47.4, 47.5, 47.12, [5]: 17.19, 17.22 .

Наведемо приклади розв’язання задачі на застосування загального рівняння динаміки.

Приклад 6.1.

До вантажа *A* вагою P_1 прикріплено кінець тонкої нерозтяжної нитки, яку перекинуто через блок *B* вагою P_2 і з’єднано з віссю *C* котка *D* радіуса *r* і вагою P_3 (рис.6.1). Коток *D* котиться без проковзування вздовж похилої площини, яка складає кут α з горизонтом.

Визначити прискорення вантажа *A*, якщо коефіцієнт тертя кочення котка дорівнює $f_{\hat{e}}$. Блок *B* та коток *D* вважати однорідними круглими дисками. Вагою нитки знехтувати.

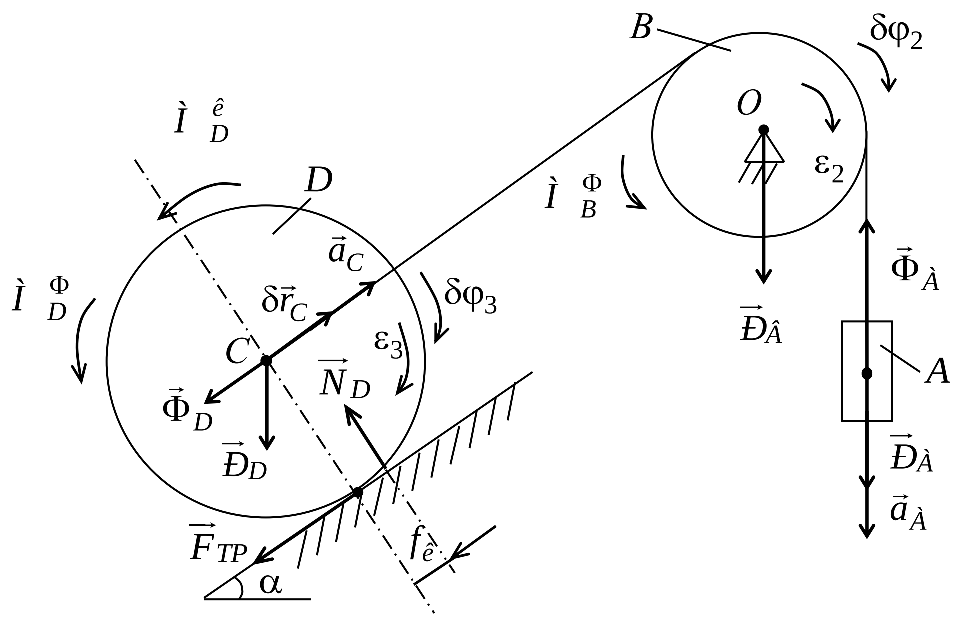


Рис.6.1.

Розв'язання. Об'єкт дослідження даної задачі система трьох тіл *A*, *B* та *D*. Дана система має один степінь вільності. Зображуємо сили ваги тіл системи $\vec{Đ}_{À}$, $\vec{Đ}_{Â}$, $\vec{Đ}_{D}$ (рис.6.1).

В'язями для механічної системи є невагома нерозтяжна нитка, вісь блока *B* і похила площина. Вісь блока та нитка є ідеальними в'язями, похила площина не є ідеальною в'яззю.

При коченні котка *D* по похилій площині, внаслідок деформації котка і площини, їх дотик відбувається не в одній точці, а вздовж невеликої дуги. Реакція, яка підраховується вздовж цієї дуги розкладається на нормальну та дотичну складову. Дотична складова є силою тертя. Нормальна складова реакції виявляється зміщеною відносно центра тяжіння *C* котка *D* в напрямку руху на величину $f_{ê}$, яку називають коефіцієнтом тертя кочення.

Внаслідок цього до активних сил віднесемо силу тертя F_{TP} котка ($F_{TP} \leq fN = fP\cos\alpha$, f - коефіцієнт тертя ковзання), а також момент тертя кочення $Ì_{D}^{ê} = f_{ê}N_{D} = f_{ê}P_{D}\cos\alpha$.

Вважаємо, що прискорення $\vec{a}_A$ вантажа *A* спрямоване донизу, тоді прискорення точки *C* – вверх. Кутове прискорення ε_2 блока *B* позначимо на рисунку дуговою стрілкою (вектор $\vec{\varepsilon}_2$ напрямлений вздовж осі повороту блока *B* від читача). Кутове прискорення ε_3 котка *D* узгоджується з напрямком руху точки *C*.

Зобразимо на рисунку сили інерції. Тіло *A* здійснює поступальний рух, його сила інерції визначається так:

$$\vec{Ô}_{À} = -\frac{Đ_{À}}{g}\vec{a}_{A}.$$

Сили інерції блока *B*, який здійснює обертальний рух, зводяться до пари сил з моментом

$$\vec{M}_{B}^{\Phi} = -{}^{2}{}_{Â}\vec{\varepsilon}_{2},$$

де осьовий момент інерції блока

$$I_{B} = \frac{P_{B}R_{2}^{\ 2}}{2g},$$

тут R_2 - радіус блока *B*.

Величина момента сил інерції блока *B*

$$M_B^{Ф} = \frac{P_B R_2^{2}}{2g}\varepsilon_2 .$$

Коток D здійснює плоскопаралельний рух. Сили інерції елементів цього тіла при виборі центра зведень в точці C зводяться до головного вектора

$$\vec{Ф}_D = -\frac{P_D}{g}\vec{a}_C$$

та пари сил момент якої дорівнює головному моменту сил інерції відносно точки C:

$$\vec{M}_D^{Ф} = -J_D\vec{\varepsilon}_3 ,$$

де $J_D = \dfrac{P_D R_3^{2}}{2g}$.

Величина момента сил інерції котка

$$M_D^{Ф} = \frac{P_D R_3^{2}}{2g}\varepsilon_3 .$$

Умовно зупинимо систему в довільний момент часу і надамо їй з цього положення можливе переміщення. Якщо можливе переміщення $\delta\vec{r}_A$ тіла A спрямоване донизу, то блок B здійснює обертальне можливе переміщення на кут $\delta\varphi_2$ за стрілкою годинника, а точка C тіла D – поступальне можливе переміщення $\delta\vec{r}_C$, тіло D обертальне можливе переміщення $\delta\varphi_3$ за стрілкою годинника.

Складаємо загальне рівняння динаміки

$$P_A\delta r_A - Ф_A\delta r_A - M_B\delta\varphi_2 - P_D\delta r_C\sin\alpha - Ф_D\delta r_C - M_D^{Ф}\delta\varphi_3 - M_D^{к}\delta\varphi_3 = 0 .$$

Робота сили тяжіння P_B дорівнює нулю внаслідок нерухомості точки її прикладання.

Оскільки точка прикладання сили тертя F_{TP} збігається з миттєвим центром швидкостей, її робота дорівнює нулю.

Враховуючи вирази для сил інерції та моментів пар сил інерції одержимо:

$$P_A\delta r_A - \frac{P_A}{g}a_A\delta r_A - \frac{P_B R_2^{2}}{2g}\varepsilon_2\delta\varphi_2 - P_D\delta r_C\sin\alpha - \frac{P_D}{g}a_C\delta r_C -$$

$$-\frac{P_D R_3^{2}}{2g}\varepsilon_3\delta\varphi_3 - f_к P_D\cos\alpha\,\delta\varphi_3 = 0 .$$

Будемо вважати незалежним можливим переміщенням переміщення тіла A. Оскільки нитка нерозтяжна, то $\delta r_A = \delta r_C = \delta r$, $\delta\varphi_2 = \dfrac{\delta r}{R_2}$, $\delta\varphi_3 = \dfrac{\delta r}{R_3}$.
Відповідно, зв'язок між прискоренням має вигляд:

$$a_A = a_C, \qquad \varepsilon_2 = \frac{a_A}{R_2}, \qquad \varepsilon_3 = \frac{a_C}{R_3} = \frac{a_A}{R_3}.$$

Тоді загальне рівняння динаміки перетвориться так:

$$\delta r(P_A - P_D\sin\alpha - f_{\hat{e}}\frac{1}{R_3}P_D\cos\alpha - \frac{2P_A + P_B + 3P_D}{2g}a_A) = 0.$$

Оскільки $\delta r \neq 0$, отримаємо:

$$P_A - P_D\sin\alpha - f_{\hat{e}}\frac{1}{R_3}P_D\cos\alpha - \frac{2P_A + P_B + 3P_D}{2g}a_A = 0.$$

З останнього співвідношення визначаємо прискорення вантажа A:

$$a_A = \frac{P_A - P_D\sin\alpha - f_{\hat{e}}\dfrac{1}{R_3}P_D\cos\alpha}{2P_A + P_B + 3P_D}2g.$$

Контрольні запитання

Для самоконтролю засвоєння матеріалу цього практичного заняття пропонуються наступні запитання (див. також [1]):

1) Яким чином зв’язана кількість степенів вільності системи з загальним рівнянням динаміки?

2) Для яких в’язей справедливий принцип Д’Аламбера-Лагранжа, а для яких – загальне рівняння динаміки?

3) З якої основної теореми динаміки можна визначити головний момент сил інерції?

4) Як формулюється принцип Д’Аламбера-Лагранжа?

5) Як із загального рівняння динаміки отримати загальне рівняння статики?

6) Які кроки треба зробити, щоб отримати диференціальні рівняння (математичну модель) руху за допомогою загального рівняння динаміки?

7) Яка класифікація сил застосовується в принципі Д’Аламбера-Лагранжа?

8) Яким чином врахувати «неідеальності» в’язей, що обумовлені тертям у загальному рівнянні динаміки?

9) У чому полягає загальне рівняння динаміки?

10) Чим відрізняється методика застосування загального рівняння динамики від методики застосування загального рівняння статики при розв’язанні задач?

2.7. <u>Практичне заняття 7.</u> Рівняння Лагранжа другого роду.

(тема 6.2)

Мета заняття

Метою цього заняття є засвоєння методів розв’язання задач динаміки за допомогою теорії узагальнених координат.

Методичні прийоми

Складання рівнянь Лагранжа другого роду можна виконати за певною методикою:

1.Визначити кількість степенів вільності механічної системи *N*.

2.Вибрати узагальнені координати q_j в кількості, яка дорівнює кількості степенів вільності.

3.Визначити узагальнені сили. Це можна здійснити декількома способами.

а). Визначення узагальненої сили як коефіцієнта у виразі суми елементарних робіт активних сил на відповідних узагальнених можливих переміщеннях

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{N} Q_j \delta q_j .$$

Для цього треба:

1) зобразити усі активні сили, що діють на точки механічної системи;
2) якщо серед в’язей накладених на систему є неідеальні, додати до активних сил відповідні реакції в’язей (наприклад, силу тертя);
3) надати системі незалежні узагальнені переміщеннях в кількості, яка дорівнює кількості узагальнених координат;
4) для визначення узагальненої сили Q_j, яка відповідає *j*-й узагальненій координаті, треба обчислити суму робіт активних сил

разом з реакціями неідеальних в'язей на узагальненому можливому переміщенні δq_j. Інші узагальнені можливі переміщення $\delta q_1,\ ...,\ \delta q_{j-1},\ \delta q_{j+1},\ ...,\ \delta q_N$ вважати рівними нулю. Тоді узагальнена сила Q_j визначиться як коефіцієнт при δq_j. Усі інші узагальнені сили визначаються аналогічно.

б). Якщо сили, які діють на механічну систему є потенціальними, то треба визначити потенціальну енергію П механічної системи як функцію узагальнених координат. Узагальнена сила Q_j визначається як частинна похідна від потенціальної енергії за відповідною узагальненою координатою q_j, що береться зі знаком мінус $Q_j = -\dfrac{\partial \text{Ï}}{\partial q_j},\ j = 1,\ 2,\ ...,\ N$.

в). визначення узагальненої сили може бути здійснено з використанням формул

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} (F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j}),$$

де F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} - проекції активних сил, x_i, y_i, z_i - декартові координати точок прикладання активних сил.

4. Знайти кінетичну енергію системи T як вираз, що залежить від узагальнених координат та узагальнених швидкостей. Якщо рух системи відбувається в потенціальному силовому полі, то треба знайти потенціальну енергію системи, а потім скласти функцію Лагранжа.

5. Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j},\ \dfrac{\partial T}{\partial q_j}$ і повні похідні за часом $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$. У випадку потенціальної системи треба знайти похідні $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j},\ \dfrac{\partial L}{\partial q_j}$ та $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$.

6. Скласти рівняння Лагранжа другого роду у вигляді

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j,\ j = 1, 2. \ldots, N$$

та проінтегрувати їх з урахуванням початкових умов.

7. Провести аналіз розв'язку відповідно до особливостей задачі.

Комплект завдань

Для роботи в аудиторії пропонується розв'язати задачі з групи [4]: 48.2, 48.23, 48.30 [5]: 18.4, 18.6, 18.10, 18.13. Для самостійної роботи [4]: 48.6, 48.28, 48.35, [5]: 18.1, 18.5, 18.12.

Приклад 7.1. Однорідний барабан *A* радіуса *r* і вагою *Q* обертається під дією пари сил з моментом *M* навколо осі, що проходить через точку *O*. На барабан накручується нитка кінець якої зв'язаний з вантажем *B*. Вантаж має вагу *P* і ковзає вверх вздовж похилої площини, що утворює кут α з горизонтом, причому коефіцієнт тертя ковзання дорівнює *f* (рис.7.1).

Визначити узагальнену силу для обраної узагальненої координати. Нитку вважати нерозтяжною та невагомою.

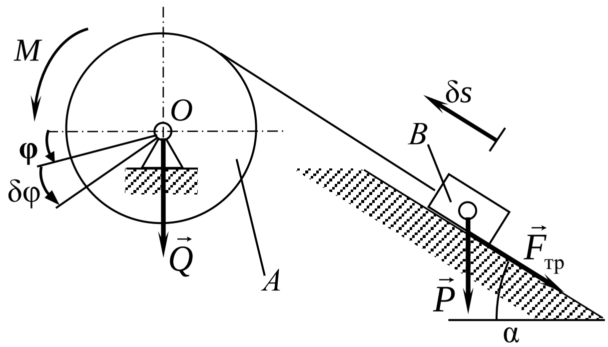


Рис.7.1.

Розв'язання. Дана механічна система має один степінь вільності, оскільки накладання однієї нової в'язі повністю зупиняє її.

В'язями, що обмежують рух системи є циліндричний шарнір в точці *O*, похила площина та нерозтяжна нитка (рис.7.1). Ці в'язі є голономними стаціонарними. Шарнір та нитка є ідеальними в'язями, похила площина не є ідеальною в'яззю: неідеальність вносить дотична складова її реакції (сила тертя ковзання).

За узагальнену координату візьмемо кут повороту барабана в напрямку його обертання: q=φ.

Знайдемо узагальнену силу, яка відповідає вибраній узагальненій координаті, визначивши елементарну роботу активних сил.

До точок даної механічної системи прикладаються наступні активні сили: сили ваги $\vec{Q}$ та $\vec{P}$, пара сил з моментом $\vec{M}$. Віднесемо до активних

сил силу тертя ковзання $\vec{F}_{\text{тр}}$, яка напрямлена протилежно напрямку руху вантажа B і дорівнює $F_{\text{тр}} = fN$. Тут N – нормальна складова реакції похилої площини. Для визначення N знайдемо суму проекцій сил, які прикладені до вантажа B, на вісь перпендикулярну до похилої площини, і прирівняємо її нулю. Отримаємо $N=P\cos\alpha$. Тоді $F_{\text{тр}} = fP\cos\alpha$.

Умовно зупинимо систему і надамо барабану можливе переміщення $\delta\varphi$ в бік його повороту. Тоді вантаж B отримає можливе переміщення δs вздовж похилої площини. Встановлюємо зв'язок між можливими переміщеннями

$$\delta s = r\delta\varphi. \tag{1}$$

Визначимо суму елементарних робіт активних сил $\vec{Q}$ та $\vec{P}$, пари сил та сили тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$, яка відповідає можливому переміщенню $\delta\varphi$:

$$\delta A = \delta A(\vec{Q}) + \delta A(\vec{P}) + \delta A(\vec{M}) + \delta A(\vec{F}_{\text{тр}}). \tag{2}$$

Оскільки сила $\vec{Q}$ прикладена в нерухомій точці і її робота дорівнює нулю, можна записати

$$\delta A = \vec{P}\cdot\delta\vec{s} + \vec{M}\cdot\overrightarrow{\delta\varphi} + \vec{F}_{\text{тр}}\cdot\delta\vec{s}, \tag{3}$$

де $\overrightarrow{\delta\varphi}$- вектор який збігається з напрямком вектора кутової швидкості повороту барабана на кут $\delta\varphi$. Тут відповідні доданки, з урахуванням напрямків векторів, визначаються так:

$$\vec{P}\cdot\delta\vec{s} = P\delta s\cos(90^\circ + \alpha) = -P\sin\alpha\delta s = -rP\sin\alpha\delta\varphi,$$

$$\vec{M}\cdot\overrightarrow{\delta\varphi} = M\delta\varphi,$$

$$\vec{F}_{\text{тр}}\cdot\delta\vec{s} = F_{\text{тр}}\delta s\cos 180^\circ = -fP\cos\alpha r\delta\varphi.$$

Підставимо ці вирази у (3) і зберемо коефіцієнти при $\delta\varphi$

$$\delta A=(M-rP(\sin\alpha+f\cos\alpha))\delta\varphi. \tag{4}$$

За означенням, узагальнена сила Q_φ - це коефіцієнт при можливому переміщенні $\delta\varphi$ у виразі (4), тобто

$$Q_\varphi = M-rP(\sin\alpha+f\cos\alpha). \tag{5}$$

Знайдемо тепер узагальнену силу, що відповідає узагальненій координаті $q=s$, яка є переміщенням вантажа B.

В цьому випадку за незалежне можливе переміщення вибираємо переміщення вантажа δs. Тоді барабан має можливе переміщення $\delta\varphi=\delta s/r$.

Виразимо елементарну роботу активної сили $\vec{P}$, пари сил з моментом M та сили тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$ через узагальнене можливе переміщення δs:

$\delta A(P) = -P\sin\alpha\delta s$, $\delta A(M) = M\delta\varphi = M\delta s/r$, $\delta A(F_{\text{тр}}) = -fP\cos\alpha\delta s$.

Тоді вираз (3) приймає вигляд:

$$\delta A = (\frac{M}{r} - P(\sin\alpha + f\cos\alpha))\delta s\,. \tag{6}$$

Узагальнена сила, в цьому випадку, як коефіцієнт при δs має вигляд

$$Q_s = \frac{M}{r} - P(\sin\alpha + f\cos\alpha)\,. \tag{7}$$

Приклад 7.2. Вантаж 1 масою $m_1 = m$ прикріплено до невагомої нерозтяжної нитки (рис.7.2), яка перекидається через великий радіус блока 2 масою $m_2 = 2m$. Нитка, яка сходить з малого радіуса блока 2 навита на барабан 3 масою $m_3 = m$. Рухаючись вниз, вантаж 1 змушує котитись без ковзання барабан 3. Радіуси великого та малого кіл блока 2 відповідно дорівнюють $R_2 = 2r$, $r_2 = r$. Радіус барабана дорівнює $R_3 = 2r$. Коефіцієнт тертя кочення барабана 3 дорівнює $\delta = 0{,}02r$, коефіцієнт тертя ковзання $f_3 = 0{,}1$, радіус інерції блока відносно горизонтальної осі $i_2 = r\sqrt{2}$. Знайти швидкість і прискорення вантажу 1 після того, як він опуститься на відстань s. Скласти рівняння руху системи за координатою $q = s$. У початковий момент система була у спокої. Барабан 3 вважати однорідним суцільними циліндром.

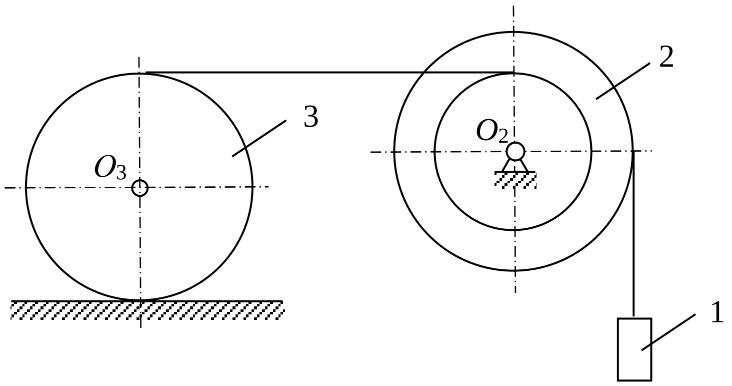


Рис.7.2

Розв'язання. Для розв'язання задачі скористаємось рівняннями Лагранжа другого роду. В'язями накладеними на механічну систему (рис.7.2) є невагомі нерозтяжні нитки, шарнір O_2 та шорстка горизонтальна

поверхня. Перші дві в'язі є ідеальними та стаціонарними. Силу тертя зчеплення та пару сил тертя кочення барабана 3 віднесемо умовно до активних сил, що дозволяє вважати горизонтальну поверхню ідеальною в'яззю. Враховуючи результати, отримані у частині 1, з яких випливає відсутність проковзування барабана 3 при його коченні, приходимо до висновку, що механічна система має один степінь вільності. За узагальнену координату оберемо переміщення s тіла 1 (q=s). Тоді рівняння Лагранжа другого роду приймає вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right)-\frac{\partial T}{\partial s}=Q_S, \tag{1}$$

де T – кінетична енергія системи, Q_S – узагальнена сила, яку можна подати так

$$Q_S=-\frac{\partial \Pi}{\partial s}+Q_S^*. \tag{2}$$

Тут П – потенціальна енергія, Q_S^* – складова узагальненої сили, яка має непотенціальний характер.

Визначимо кінетичну енергію механічної системи $T=\sum_{i=1}^{3}T_i$ як функцію узагальнених координат і швидкостей, де T_i – кінетична енергія окремих тіл.

Кінетичну енергію тіла 1, яке рухається поступально (рис.7.2), виразимо через узагальнену координату

$$T_1=\frac{1}{2}m_1\mathrm{v}_1^2=\frac{1}{2}m\dot{s}^2. \tag{3}$$

Для блока 2, який обертається навколо нерухомої осі маємо:

$$T_2=\frac{1}{2}I_2\omega_2^2. \tag{4}$$

Кінетична енергія барабана 3, який здійснює плоскопаралельний рух, записується у вигляді

$$T_3=\frac{1}{2}m_3\mathrm{v}_3^2+\frac{1}{2}I_3\omega_3^2. \tag{5}$$

Враховуючи кінематичні залежності

$$\omega_2=\frac{\mathrm{v}_1}{R_2},\qquad \omega_3=\frac{r_2}{2R_3R_2}\mathrm{v}_1,\qquad \mathrm{v}_3=\frac{r_2}{2R_2}\mathrm{v}_1, \tag{6}$$

які мають місце у припущенні нерозтяжності ниток, що з’єднують тіла, та вирази для моментів інерції тіл $I_2 = m_2 i_2^2 = 2m_2 r^2$, $I_3 = \dfrac{1}{2} m_3 R_3^2$, отримаємо:

$$T_2 = \frac{1}{2} 2m_2 r^2 \frac{\mathrm{v}_1^2}{R_2^2} = \frac{1}{2} 4mr^2 \frac{\mathrm{v}_1^2}{4r^2} = \frac{1}{2} m\dot{s}^2, \tag{7}$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \frac{r_2^2}{4R_2^2} \mathrm{v}_1^2 + \frac{1}{4} m_3 R_3^2 \frac{r_2^2}{4R_3^2 R_2^2} \mathrm{v}_1^2 = \frac{1}{2} m \frac{r^2}{16r^2} \mathrm{v}_1^2 + \frac{1}{4} m \frac{r^2}{16r^2} \mathrm{v}_1^2 = \frac{3}{64} m\dot{s}^2. \tag{8}$$

Кінетична енергія системи тіл дорівнює

$$T = \frac{67}{64} m\dot{s}^2. \tag{9}$$

Знайдемо частинні похідні від кінетичної енергії:

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{67}{32} m\dot{s}. \tag{10}$$

Після диференціювання останнього виразу за часом отримаємо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) = \frac{67}{32} m\ddot{s}, \tag{11}$$

Визначимо потенціальну енергію системи:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3,$$

як роботу сил ваги по переміщенню відповідних тіл з кінцевого положення, яке відповідає переміщенню тіла 1 вниз на відстань *s*, в початкове.

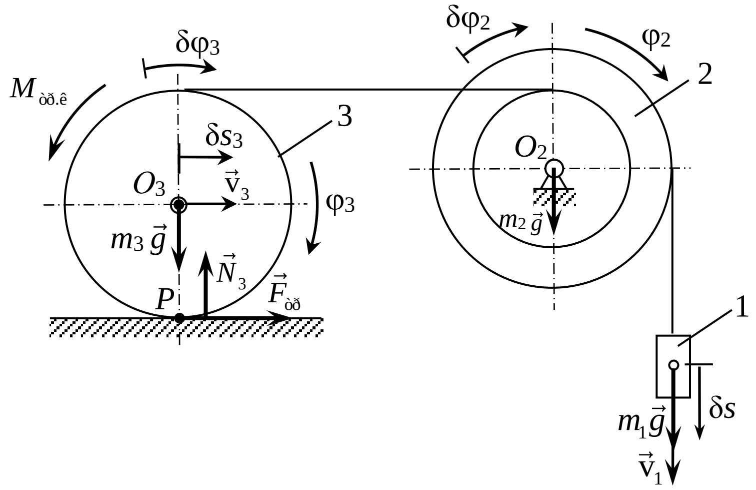


Рис. 7.3.

Отримаємо

$$\Pi_1 = -m_1 g s, \qquad \Pi_2 = 0, \qquad \Pi_3 = 0.$$

Два останні доданки дорівнюють нулю, оскільки сили ваги тіл 2 та 3 роботу не виконують.

Таким чином:

$$\Pi = -mgs .$$

Знаходимо частинну похідну за узагальненою координатою від потенціальної енергії системи:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -mg , \qquad . \tag{12}$$

Узагальнену силу Q_S^* визначимо як коефіцієнт при варіації δs узагальненої координати у виразі можливої (елементарної) роботи непотенціальних сил. До останніх відносяться: сила тертя зчеплення $F_{òð}$ барабана 3 та пара сил тертя кочення з моментом $M_{òð.ê} = \delta N_3 = \delta(m_3\vec{g})_{y_3} = \delta m_3 g$.

Надамо механічній системі можливе переміщення δs в бік його додатних значень (рис.7.3). Внаслідок цього тіло 2 отримає відповідне кутове переміщення $\delta\varphi_2$, а барабан 3 – можливе кутове переміщення $\delta\varphi_3$ та переміщення його центра ваги δs_3. Тоді, у припущенні кочення барабана 3 без ковзання, можлива робота сили тертя зчеплення $F_{òð}$ буде дорівнювати нулю, оскільки ця сила прикладена у миттєвому центрі швидкостей P і можливе переміщення точки P дорівнює нулю. Можлива (елементарна) робота пари сил тертя кочення має вигляд

$$\delta A = \vec{M}_{òð.ê}\,\overrightarrow{\delta\varphi_3} = -\delta m_3 g \delta\varphi_3 . \tag{13}$$

Елементарна робота (13) має від’ємний знак, оскільки напрямок момента тертя кочення протилежний до напрямку кутової швидкості барабана 3, яка відповідає його повороту на кут $\delta\varphi_3$.

Елементарне переміщення $\delta\varphi_3$ потрібно виразити через варіацію узагальненої координати δs користуючись співвідношеннями (6):

$$\omega_3 = \frac{r_2}{2R_3R_2}\mathrm{v}_1 .$$

У диференціалах маємо

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{r_2}{2R_3R_2}\frac{ds}{dt},$$

або

$$d\varphi_3 = \frac{r_2}{2R_3R_2}ds = \frac{1}{8r}ds\,.$$

У випадку стаціонарних в'язей дійсні переміщення точок механічної системи є підмножиною можливих переміщень, тому останню формулу запишемо так

$$\delta\varphi_3 = \frac{1}{8r}\delta s$$

і підставимо у (12)

$$\delta A = -\delta m_3 g\delta\varphi_3 = -\delta m_3 g\frac{1}{8r}\delta s = Q_S^*\delta s\,.$$

Звідси маємо

$$Q_S^* = -\delta mg\frac{1}{8r}\,.$$

Враховуючи формули (2) та (11), одержимо

$$Q_S = mg - \delta mg\frac{1}{8r} = (1 - \frac{1}{8r}\delta)mg\,. \tag{14}$$

Тепер запишемо рівняння Лагранжа другого роду (1), приймаючи до уваги вирази (10), (11) та (14)

$$\frac{67}{32}m\ddot{s} = (1 - \frac{1}{8r}\delta)mg\,,$$

звідки отримаємо

$$\dot{\mathrm{v}}_1 = g(1 - \frac{1}{8r}\delta)\frac{32}{67} = 0,476g\,.$$

Для визначення залежності швидкості тіла 1 від його переміщення s інтегруємо останній вираз. З урахуванням нульових початкових умов маємо

$$\mathrm{v}_1 = 0,476gt\,, \qquad s = 0,238gt^2\,.$$

З цих формул виключаємо час t. В результаті шукана залежність приймає вигляд

$$\mathrm{v}_1 = 0,976\sqrt{gs}\,.$$

Приклад 7.3. Механічна система складається з п'яти тіл, маси яких відповідно дорівнюють m_1, m_2, m_3, m_4 та m_5 (рис.7.4). Тіло 1 рухається вздовж

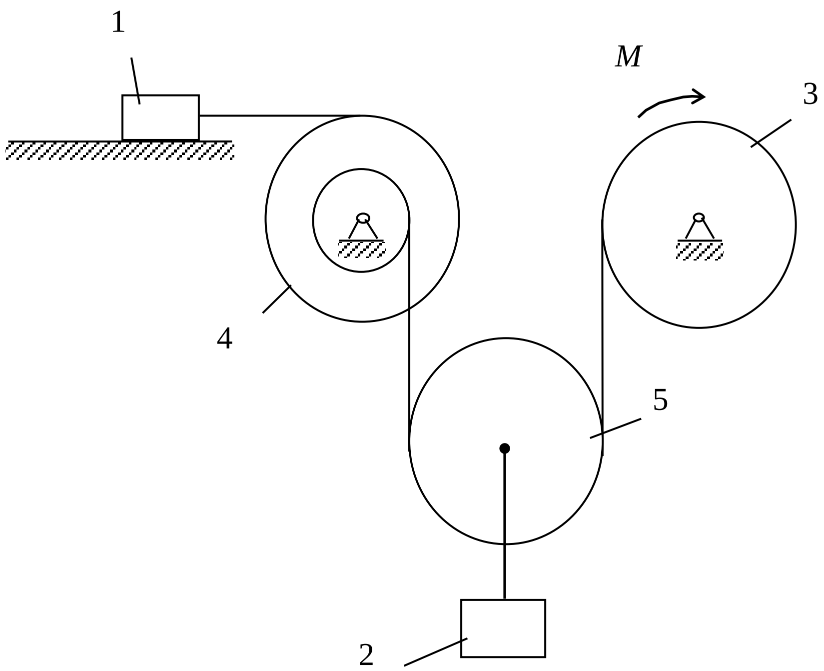


Рис.7.4.

горизонтальної шорсткої поверхні, коефіцієнт тертя ковзання при русі тіла 1 дорівнює f = 0,1. Блок 4 - східчатий, причому радіуси ступенів дорівнюють r та 0,5r, а його радіус інерції – i. Блоки 3 та 5 мають однакові радіуси що дорівнюють r. До блока 3 прикладена пара сил з моментом M. Скласти диференціальні рівняння руху механічної системи, якщо тіла з'єднані невагомою нерозтяжною ниткою.

Розв'язання. Дана механічна система має два степеня вільності. Це визначається шляхом накладання двох додаткових в'язей – вони повністю зупиняють механічну систему.

За узагальнені координати візьмемо переміщення тіла 1 вздовж горизонтальної площини та кут повороту блока 3: $q_1 = x$, $q_2 = \varphi$ (рис.7.5).

Вказаним узагальненим координатам відповідає наступна система рівнянь Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \tag{1}$$

Визначимо спочатку узагальнені сили Q_x та Q_φ складаючи вираз роботи активних сил на можливих переміщеннях точок системи. Аналіз в'язей показує, нитка та осі обертання блоків є ідеальними в'язями. Горизонтальна шорстка поверхня не є ідеальною. Тому до активних сил,

прикладених до точок даної системи: сил тяжіння $m_1\vec{g},\ m_2\vec{g},\ m_3\vec{g},\ m_4\vec{g},\ m_5\vec{g}$ та пари сил з моментом M, умовно віднесемо силу тертя $\vec{F}_{\text{ТР}}$, яка вносить неідеальність (рис.7.5). Враховуючи, що тіло 1 може здійснювати рух під дією нитки в правий бік, напрямимо силу тертя ковзання в лівий бік вздовж площини руху.

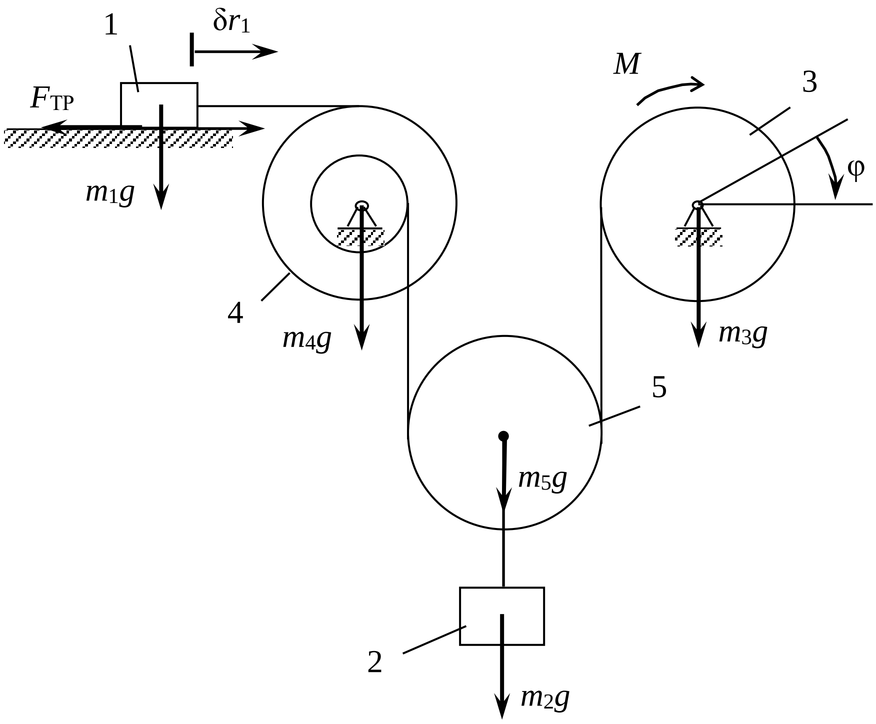


Рис.7.5

Визначимо першою узагальнену силу Q_x, яка відповідає узагальненій координаті x. Для цього зафіксуємо кут повороту φ та надамо тілу 1 можливе переміщення $\delta\vec{r}_1$, яке напрямлене в бік додатнього приросту узагальненої координати x. Обчислимо алгебраїчну суму елементарних робіт активних сил на можливих переміщеннях точок їх прикладання, які викликаються переміщенням $\delta\vec{r}_1$:

$$\delta A = m_1\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_1 + \vec{F}_{\text{ТР}}\cdot\delta\vec{r}_1 + m_2\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_2 + m_5\vec{g}\cdot\delta\vec{r}_{O_2}, \qquad (2)$$

де $\delta\vec{r}_2$ та $\delta\vec{r}_{O_2}$ - можливе переміщення тіла 2 та центра блока 5.

Зв’язок між можливими переміщеннями носить кінематичний характер. Оскільки тіло 4 здійснює обертальний рух маємо

$$\frac{\delta r_1}{r} = \frac{\delta r_C}{0,5r},$$

де δr_C – можливе переміщення точки C (рис.7.6). Отримаємо

$$\delta r_C = 0,5\delta r_1 . \tag{3}$$

З умови нерозтяжності нитки випливає, що швидкості точок C та D будуть однакові, відповідно однаковими будуть і можливі переміщення цих точок:

$$\delta r_C = \delta r_D .$$

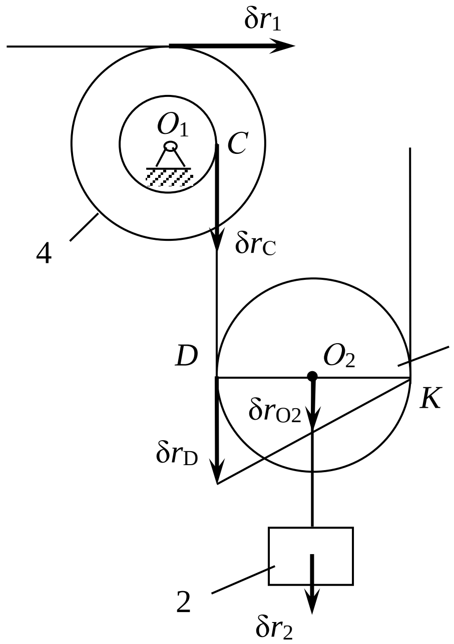


Рис.7.6.

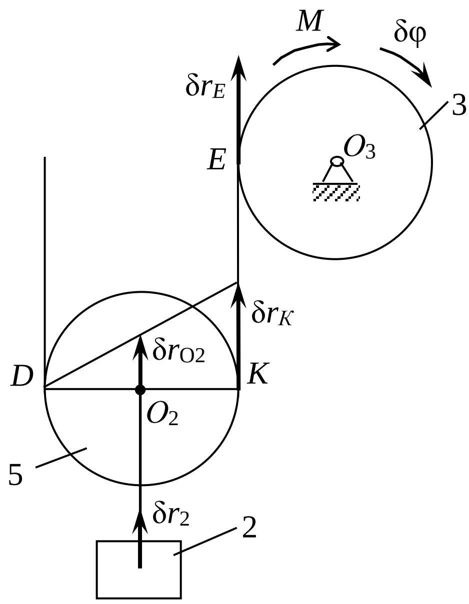


Рис.7.7.

У випадку фіксованого кута повороту φ блока 3, точка K є миттєвим центром швидкостей тіла 5, яке здійснює плоскопаралельний рух (рис.7.6). Тоді можливі переміщення центру O_2 блока 5 і тіла 1, з урахуванням (3), зв'язані співвідношенням

$$\delta r_{O_2} = \frac{1}{2}\delta r_D = \frac{1}{4}\delta r_1. \tag{4}$$

Нитка, що з'єднує тіло 2 і точку O_2, рухається поступально. Тоді на підставі (4) дістанемо

$$\delta r_2 = \delta r_{O_2} = \frac{1}{4}\delta r_1. \tag{5}$$

Таким чином, співвідношення (2), з урахуванням напрямів векторів, можна записати у формі

$$\delta A = -F_{\text{ТР}}\delta r_1 + \frac{1}{4}(m_2 + m_5)g\delta r_1 = (\frac{1}{4}(m_2 + m_5)g - F_{\text{ТР}})\delta r_1 . \tag{6}$$

Тут враховано, що сила $m_1\vec{g}$ роботу на переміщені $\delta\vec{r}_1$ не виконує. Величину сили тертя ковзання визначимо з виразу $F_{\text{ТР}} = fN$, де N – нормальна складова реакції поверхні руху тіла 1, яка у випадку паралельності нитки до поверхні визначається так $N = m_1 g$.

Використовуючи означення узагальненої сили і те, що δr_1 збігається з додатнім приростом δx узагальненої координати *x*, з виразу (6), записаного у формі $\delta A = Q_x \delta r_1 = Q_x \delta x$, отримуємо

$$Q_x = (\frac{1}{4}(m_2 + m_5) - fm_1)g. \tag{7}$$

Визначимо тепер узагальнену силу Q_φ, яка відповідає узагальненій координаті φ.

Зафіксуємо тіло 1 на горизонтальній площині і надамо блоку 3 можливе переміщення $\delta\varphi$ (рис.7.7), що відповідає додатньому приросту кута повороту φ (за стрілкою годинника). Обчислимо алгебраїчну суму елементарних робіт активних сил на можливих переміщеннях, які викликаються приростом $\delta\varphi$:

$$\delta A = \vec{M} \cdot \overrightarrow{\delta\varphi} + m_2\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_2 + m_5\vec{g} \cdot \delta\vec{r}_{O_2}.$$

Тут $\overrightarrow{\delta\varphi}$ - вектор, який збігається з напрямком вектора кутової швидкості повороту блоку 3 на кут $\delta\varphi$, $\delta\vec{r}_2$ та $\delta\vec{r}_{O_2}$ - можливі переміщення тіла 2 та центра блока 5 викликані приростом $\delta\varphi$. З урахуванням напрямів векторів отримаємо

$$\delta A = M\delta\varphi - m_2 g\delta r_2 - m_5 g\delta r_{O_2}. \tag{8}$$

Встановимо зв'язок між можливими переміщеннями.

Тіло 3 здійснює обертальний рух (рис.7.7), тоді елементарне переміщення точки *E* цього тіла визначається так

$$\delta r_E = r\delta\varphi. \tag{9}$$

Точка *D*, при фіксованій узагальненій координаті *x*, є миттєвим центром швидкостей тіла 5. Тоді можливі переміщення точки *К* та центру O_2 блока 5 зв’язані співвідношенням

$$\delta r_{O_2} = \frac{1}{2}\delta r_K. \tag{10}$$

Враховуючи, що нитки нерозтяжні, можна записати

$$\delta r_K = \delta r_E, \qquad \delta r_2 = \delta r_{O_2}. \tag{11}$$

З виразів (9)-(11) отримаємо

$$\delta r_2 = \delta r_{O_2} = \frac{1}{2} r\delta\varphi\,. \qquad (12)$$

Тоді узагальнена сила Q_φ визначиться з виразу

$$\delta A = M\delta\varphi - \frac{1}{2}(m_2 + m_5)gr\delta\varphi = Q_\varphi\delta\varphi\,,$$

тобто

$$Q_\varphi = M - \frac{1}{2}(m_2 + m_5)gr. \qquad (13)$$

Знайдемо тепер вираз для кінетичної енергії *T* механічної системи

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$$

як функцію узагальнених координат *x* і φ та узагальнених швидкостей $\dot{x}$ і $\dot{\varphi}$.

Кінетична енергія тіла 1, що здійснює поступальний рух, визначається так

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \mathrm{v}_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2. \qquad (14)$$

Тут $\mathrm{v}_1 = \dot{x}$ - узагальнена швидкість, яка відповідає узагальненій координаті *x*.

Тіло 2 рухається поступально, тоді

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \mathrm{v}_2^2, \qquad (15)$$

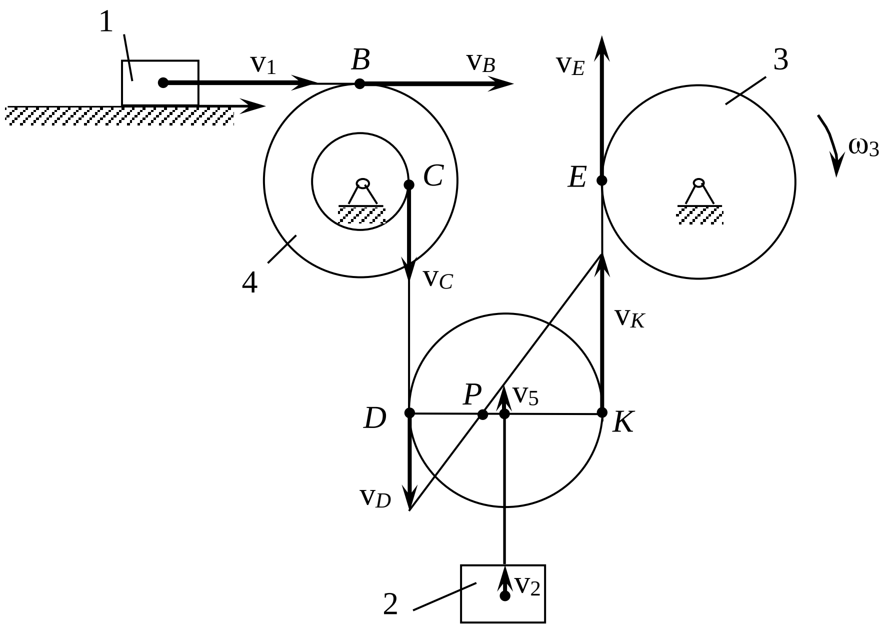


Рис.7.8

де v_2 - швидкість тіла 2, яка за умови нерозтяжності нитки дорівнює швидкості точки O_2 блоку 5. Блок 5 здійснює плоскопаралельний рух (рис.7.8), напрям швидкостей точок *D* та *K* відповідає додатнім значенням узагальнених швидкостей $\dot{x}$ і $\dot{\varphi}$. Тоді швидкість точки O_2 (і тіла 2), на підставі рис.7.8, визначимо так

$$v_2 = v_{O_2} = \frac{1}{2}(v_K - v_D). \tag{16}$$

Частини нитки *CD* і *EK* нерозтяжні, внаслідок чого маємо

$$v_K = v_E = \omega_3 r, \qquad v_D = v_C = \frac{1}{2}v_B = \frac{1}{2}v_1. \tag{17}$$

Тут $\omega_3 = \dot{\varphi}$ - кутова швидкість обертального руху тіла 3. На підставі формул (16) та (17) запишемо

$$v_{O_2} = v_2 = \frac{1}{2}(\dot{\varphi}\, r - \frac{1}{2}\dot{x}), \tag{18}$$

і після підстановки в (15) отримаємо

$$T_2 = \frac{1}{32}m_2(2\dot{\varphi}\, r - \dot{x})^2. \tag{19}$$

Кінетична енергія T_3 та T_4 блоків 3 та 4, які здійснюють обертальний рух навколо нерухомих осей, визначається так

$$T_3 = \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 = \frac{1}{2}I_3\dot{\varphi}^2, \qquad T_4 = \frac{1}{2}I_4\omega_4^2 = \frac{1}{2}I_4\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2. \tag{20}$$

Осьовний момент інерції I_3 для однорідного блоку подається у вигляді $I_3 = \frac{1}{2}m_3 r^2$. Момент інерції I_4 східчастого блоку визначимо через радіус інерції $I_4 = m_4 i^2$.

Оскільки блок 5 здійснює плоскопаралельний рух, його кінетична енергія визначається з виразу

$$T_5 = \frac{1}{2}m_5 v_{O_2}^2 + \frac{1}{2}I_5\omega_5^2.$$

Кутову швидкість ω_5 блоку 5 знайдемо використовуючи залежність між швидкостями точок *D* і *K* та відстанями від цих точок до миттєвого центру швидкостей *P* (рис.7.8):

$$\omega_5 = \frac{v_K}{PK} = \frac{v_D}{PD}. \tag{21}$$

Оскільки *PK*=2*r* - *PD*, то пропорцію формули (21) можна записати так

$$PD\,\mathrm{v}_K = (2r\text{-}PD)\mathrm{v}_D.$$

Звідси, збираючи коефіцієнти при множнику *PD*, отримаємо таку пропорцію

$$\omega_5 = \frac{\mathrm{v}_D}{PD} = \frac{\mathrm{v}_K + \mathrm{v}_D}{2r}.$$

Підставимо в цей вираз формули (17). Отримаємо

$$\omega_5 = \frac{2\dot{\varphi}r + \dot{x}}{4r}. \qquad (22)$$

Формули (18) та (22) підставимо в вираз для кінетичної енергії блоку 5 і врахуємо, що блок 5 є однорідний циліндр, тобто його осьовий момент інерції I_5 дорівнює $I_5 = \frac{1}{2}m_5 r^2$. Дістанемо

$$T_5 = \frac{1}{64}m_5\left(2(2\dot{\varphi}\,r - \dot{x})^2 + (2\dot{\varphi}\,r + \dot{x})^2\right) \qquad (23)$$

Таким чином, кінетична енергія даної механічної системи як сума виразів (14), (19), (20) та (23) дорівнює

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{32}m_2(2\dot{\varphi}r - \dot{x})^2 + \frac{1}{4}m_3 r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_4\left(\frac{i}{r}\right)^2\dot{x}^2 + \\ + \frac{1}{64}m_5\left(2(2\dot{\varphi}r - \dot{x})^2 + (2\dot{\varphi}r + \dot{x})^2\right). \qquad (24)$$

Визначаємо частині похідні від отриманого виразу за узагальненими координатами та узагальненими швидкостями. Відсутність змінних x та φ у виразі (24) дозволяє записати

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \left(m_1 + \frac{1}{16}m_2 + m_4\left(\frac{i}{r}\right)^2 + \frac{3}{32}m_5\right)\dot{x} - \frac{1}{16}(2m_2 + m_5)r\dot{\varphi}, \qquad (25)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{8}(2m_2 + 4m_3 + 3m_5)r^2\dot{\varphi} - \frac{1}{16}(2m_2 + m_5)r\dot{x}.$$

Після диференціювання за часом двох останніх виразів отримаємо рівняння руху механічної системи у формі (1):

$$\left(m_1 + \frac{1}{16}m_2 + m_4\left(\frac{i}{r}\right)^2 + \frac{3}{32}m_5\right)\ddot{x} - \frac{1}{16}(2m_2 + m_5)r\ddot{\varphi} = (\frac{1}{4}(m_2 + m_5) - fm_1)g,$$

$$\frac{1}{8}(2m_2+4m_3+3m_5)r^2\ddot{\varphi}-\frac{1}{16}(2m_2+m_5)r\ddot{x}=M-\frac{1}{2}(m_2+m_5)gr\,.$$

Контрольні запитання

Для засвоєння матеріалу практичного заняття пропонуються наступні запитання:

1) Як зв’язані між собою узагальнені координати, швидкості та прискорення?
2) Для яких в’язей виводиться рівняння Лагранжа другого роду?
3) У чому полягають переваги рівнянь Лагранжа другого роду перед іншими способами складання динамічних рівнянь руху?
4) Який вигляд мають рівняння Лагранжа другого роду для консервативних систем?
5) Чому дорівнює число рівнянь Лагранжа другого роду?
6) Скільки рівнянь Лагранжа другого роду можна записати для вільної матеріальної точки, що рухається у просторі?
7) Функцією яких величин має бути записана кінетична енергія системи для її використання в рівняннях Лагранжа другого роду?
8) Як найкращим чином знаходити узагальнену силу, якщо сили в системі є потенціальними?
9) Чи може бути від’ємною кінетична енергія і коли?
10) Який вигляд має вираз функції розсіювання енергії (функції Релея)?
11) Чи входять узагальнені швидкості у вираз потенціальної енергії?
12) Що спільного за формою запису у виразах кінетичної, потенціальної енергії та функції розсіювання енергії для системи зі стаціонарними в’язями?
13) Як записується зв'язок між можливими переміщеннями точок системи та узагальненими координатами?

2.8. **Практичне заняття 8.** **Удар.** (тема 6.3)

Мета заняття

Метою цього заняття є засвоєння методу складання і розв'язання рівнянь Лагранжа другого роду для системи з декількома (двома) степенями вільності в межах теорії узагальнених координат.

Методичні прийоми

При ударі виникають сили малої тривалості в часі і великої інтенсивності. Такі сили називають *миттєвими* або *ударними*. Вони вимірюються своїми імпульсами. Звичайними (зовнішніми) силами при вивченні удару нехтують, оскільки за час удару вони створюють дуже малі імпульси у порівнянні з ударними силами. Для системи тіл, що співударяються, ударні сили та їх імпульси є внутрішніми, тобто вони не можуть змінити кількість руху цієї системи за час удару. З цього випливає, що під час удару виконуються закони збереження кількості руху й кінетичного моменту системи. Зокрема, для двох кульок з масами m_1 та m_2, що рухаються поступально вздовж однієї прямої у одному напрямку зі швидкостями до удару $\vec{\mathrm{v}}_1$ та $\vec{\mathrm{v}}_2$, мають місце співвідношення:

$$m_1(u_1 - \mathrm{v}_1) = -S,$$

$$m_2(u_2 - \mathrm{v}_2) = S,$$

$$m_1\mathrm{v}_1 + m_2\mathrm{v}_2 = m_1u_1 + m_2u_2,$$

де u_1, u_2 - швидкості після удару, S - ударний імпульс. Останнє співвідношення називають *основним рівнянням Ньютона в теорії удару*.

Зазначимо, що спільна нормаль до поверхні тіл, що стикаються, називається *лінія удару*. Удар називається *центральним*, якщо центри мас тіл, що стикаються, лежать на лінії удару. Центральний удар називається *прямим*, якщо швидкості центрів мас тіл на початку удару лежать на лінії удару.

При розв'язанні задач на співудар тіл рекомендується використовувати гіпотезу *І.Ньютона* про коефіцієнт k відновлення швидкостей, оскільки вона дає можливість розв'язувати задачі про співудар тіл методами теоретичної механіки.

За гіпотезою І.Ньютона *коефіцієнт відновлення* швидкостей k для тіл, що співударяються, дорівнює відношенню відносної швидкості точок після удару до їх відносної швидкості до удару, тобто:

$$k = -\frac{u_1 - u_2}{\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2},$$

де u_1 і u_2 – проекції на пряму, що сполучає центри мас тіл, швидкостей після удару, а v_1 і v_2- проекції на той самий напрям швидкостей тіл до удару.

При $|k| = 1$ удар називають абсолютно пружним, а при $k = 0$ удар непружний (пластичний), для решти тіл коефіцієнт відновлення є правильний дріб

$$0 < |k| < 1.$$

При косому ударі без тертя, тобто коли, наприклад, кулька падає на гладеньку поверхню під певним кутом α до нормалі до поверхні і відбивається під кутом β, то коефіцієнт відновлення швидкості можна обчислити за формулою

$$k = \frac{tg\alpha}{tg\beta}$$

За *теоремою Остроградського –Карно* втрата кінетичної енергії при прямому центральному ударі двох тіл дорівнює

$$\Delta T = T_2 - T_1 = -\frac{1-k}{1+k}\left[\frac{m_1}{2}\left(u_1 - \mathrm{v}_1\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(u_2 - \mathrm{v}_2\right)^2\right],$$

де m_1 та m_2 - маси тіл, а різниці $\Delta\mathrm{v}_1 = u_1 - \mathrm{v}_1$, $\Delta\mathrm{v}_2 = u_2 - \mathrm{v}_2$ називають *втраченими швидкостями*.

Втрата кінетичної енергії при прямому центральному ударі двох тіл також може бути визначена за формулою

$$\Delta T = T_2 - T_1 = -(1-k^2)\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}\left(\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2\right)^2.$$

За цим виразом, якщо друге тіло було у спокої, втрата кінетичної енергії дорівнює

$$\Delta T = T_2 - T_1 = -(1-k^2)\frac{m_2}{m_1 + m_2}T_1 = -(1-k^2)\frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{m_1 \mathrm{v}_1^2}{2}.$$

При розв'язанні задач на ударну взаємодію тіл, зокрема молота та наковальні, використовується коєфіцієнт корисної дії молота – відношення

корисної роботи, яка витрачається на деформацію метала, до роботи, яка втрачається на підйом молота, тобто відношення втрати кінетичної енергії при ударі до кінетичної енергії системи на початку удара

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

З урахуванням попередньої формули:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = (1 - k^2)\frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

де m_1 - маса рухомого тіла (молота), m_2 - маса нерухомого (наковальні).

Якщо одне з тіл, що співударяються, може обертатися навколо нерухомої осі, то при ударі виникають миттєві реакції в опорних точках осі.

Вісь Oz обертання тіла не зазнаватиме впливу удару, коли вона буде головною віссю інерції, ударний імпульс буде до неї перпендикулярним, і точка B його прикладання лежить в одній площині з віссю обертання і центром мас C тіла. У цьому випадку відстань точки прикладання ударного імпульсу $\vec{S}$ від осі обертання Oz дорівнює зведеній довжині фізичного маятника (якщо немає імпульсів динамічних реакцій)

$$OB = \frac{I_z}{m \cdot OC},$$

де I_z та m - осьовий момент інерції тіла та його маса.

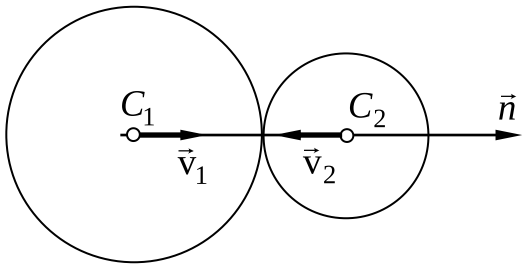
Точка B прикладання ударного імпульсу $\vec{S}$ називається центром удару і збігається з центром коливань фізичного маятника.

Комплект завдань

Для роботи в аудиторії пропонується розв'язати задачі з групи [4]: 44.6, 44.8, 44.22, 44.25, [5]: Пр.16.2, Пр.16.4, Пр.16.6. Для самостійної роботи [4]: 44.7, 44.9, 44.10, 44.16, 44.23, 44.26, [5]: 16.2, 16.6, 16.7.

Приклад 8.1. Дві кулі 1 і 2 зіштовхуються з протилежними за напрямком, але однаковими за модулем швидкостями $v_1 = v_2 = 5$ м/с. Коефіцієнт відновлення $k = 0,6$. Маси куль $m_1 = 5$ кг та $m_2 = 3$ кг (рис.8.1). Знайти швидкості u_1 та u_2 куль після удару.

Рис.8.1.



Розв'язання. Механічна система складається з двох тіл, які рухаються поступально. Швидкості центрів мас тіл лежать на одній прямій, яка збігається з нормаллю. Таким чином, маємо прямий центральний удар. Спроектуємо основне рівняння Ньютона в теорії удару (вираз закону збереження кількості руху системи) на вісь n, яка проходить через центри мас C_1 і C_2 куль (рис. 8.1). З урахуванням проекцій маємо:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 . \qquad (1)$$

У рівності (1) вважається, що невідомі швидкості v_1 та v_2, центрів куль після удару, додатні, тобто напрямлені в додатній бік осі n.

Рівняння (1) утримує дві невідомі. Доповнимо його співвідношенням для коефіцієнта відновлення

$$k = -\frac{u_1 - u_2}{v_1 + v_2} . \qquad (2)$$

Розв’язуючи систему рівнянь (1) і (2) відносно u_2, знайдемо

$$u_1 = \frac{(m_1 - k m_2) v_1 + m_2 (1 + k)(-v_2)}{m_1 + m_2} = -1 \text{ ì /ñ},$$

$$u_2 = \frac{(m_2 - k m_1)(-v_2) + m_1 (1 + k) v_1}{m_1 + m_2} = 5 \text{ ì /ñ}.$$

Таким чином, обидві кулі після удару змінюють напрям руху: швидкість $u_1 < 0$, тобто куля 1 після удару рухається в від’ємний бік осі n, а швидкість $u_2 > 0$, тобто куля 2 - в додатній бік осі n.

Приклад 8.2. Тіло масою m_1, яке має горизонтальну швидкість v, зіштовхується з кінцем *B* однорідного прямолінійного стержня *OB* довжиною l і масою m_2, що підвішений за допомогою циліндричного шарніра в точці *O* і знаходиться в стані спокою (рис.8.2,а). Визначити

найбільший кут відхилення стержня 2 від вертикалі. Удар вважати абсолютно непружним.

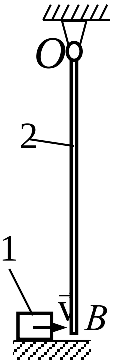


Рис.8.2,а

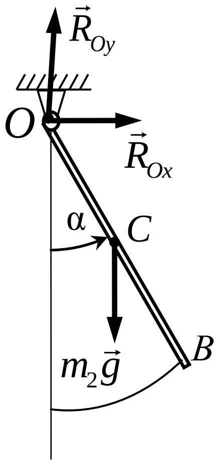


Рис.8.2,б

Розв'язання. Розглянемо спочатку співудар тіла і стержня. Оскільки тривалість удару дуже маленька, а ударний імпульс є внутрішнім, має місце закон збереження кінетичного момента K_{Ox} системи тіло-стержень відносно горизонтальної осі Ox, яка збігається з віссю обертання стержня

$$K_{Ox}(0) = K_{Ox}(\Delta t) = const, \tag{1}$$

де Δt - тривалість удару.

Кінетичний момент системи дорівнює сумі кінетичних моментів стержня K_{Ox}^{l} і тіла K_{Ox}^{s}:

$$K_{Ox}(t) = K_{Ox}^{s}(t) + K_{Ox}^{l}(t).$$

До удару стержень знаходився у спокої, тому

$$K_{Ox}(0) = K_{Ox}^{s}(0) = m_1 l \mathrm{v}. \tag{2}$$

Оскільки удар абсолютно непружній, то наприкінці співудару тіло і точка B стержня отримують певну швидкість u. Кінетичний момент системи стержень-тіло відносно осі обертання, в кінці удару, визначається як сума кінетичного момента тіла $K_{Ox}^{s}(\Delta t) = m_1 l u$ та стержня $K_{Ox}^{l}(\Delta t) = I_O \omega = \frac{1}{3} m_2 l^2 \omega$, де $I_O = \frac{1}{3} m l^2$ момент інерції стержня. Оскільки $u = \omega l$, отримаємо

$$K_{Ox}(\Delta t) = (m_1 l^2 + \frac{m_2 l^2}{3})\omega. \qquad (3)$$

На підставі (1), (2) і (3) запишемо

$$m_1 l \mathrm{v} = (m_1 + \frac{m_2}{3}) l^2 \omega,$$

звідки знайдемо кутову швидкість ω стержня після удару:

$$\omega = \frac{3m_1 \mathrm{v}}{(3m_1 + m_2) l}. \qquad (4)$$

Далі розглянемо рух стержня навколо осі Ox за інерцією при умові, що він отримав початкову кутову швидківсть. Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії системи:

$$T - T_0 = A. \qquad (5)$$

Тут T, T_0 - кінетична енергія системи в кінцевому і початковому положеннях, A - повна робота зовнішніх сил, що діють на систему. В кінці руху стержень зупиняється, тому $T = 0$. Оскільки стержень здійснює обертальний рух навколо осі, то його кінетична енергія дорівнює:

$$T_0 = T_2 = I_O \frac{\omega^2}{2} = \frac{m_2 l^2}{3} \frac{\omega^2}{2}.$$

Робота A складається з роботи сил ваги стержня. Реакція шарніра O роботу не виконує, оскільки точка O, де прикладена ця сила, не переміщується. Роботу сили ваги знаходимо за формулою

$$A = \pm mgh,$$

де h - зміна висоти точки прикладання сили ваги. В даній задачі центр ваги C стержня піднімається, тому робота сили ваги від'ємна (рис.8.2,б):

$$A(m_2 g) = -m_2 gh = -m_2 g \frac{l}{2}(1 - \cos\alpha).$$

Після підстановки значень T, T_0 і A в (5), знайдемо

$$-\frac{m_2 l^2}{3} \frac{\omega^2}{2} = -m_2 g \frac{l}{2}(1 - \cos\alpha).$$

Враховуючи (4), отримаємо

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\omega^2 l}{3g} = 1 - \frac{3m_1^2 \mathrm{v}^2}{gl(3m_1 + m_2)^2}.$$

Приклад 8.3. На гладеньку сталеву горизонтальну плиту під кутом $\alpha = 45^\circ$ до нормалі падає сталева кулька. Вона відбивається під кутом $\beta = 60^\circ$. Визначити коефіцієнт відновлення при ударі. Обчислити втрату кінетичної енергії кульки, якщо швидкість кульки перед падінням на плиту дорівнює v, маса кульки m.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що кулька рухається в вертикальній площині. При косому ударі без тертя коефіцієнт відновлення обчислюється за формулою $k = \dfrac{tg\alpha}{tg\beta}$. В даному випадку $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$,

отже, $k = \dfrac{tg45^\circ}{tg60^\circ} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cong 0,577$.

Втрату кінетичної енергії кульки ΔT можна обчислити за формулою

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{m}{2}(u^2 - \mathrm{v}^2), \qquad (1)$$

де T_2, T_1 - кінетична енергія кульки після і до удару, v - швидкість до удару, u - швидкість після удару.

Оскільки плита гладенька, то дотичні складові швидкостей до і після удару однакові, тобто $\mathrm{v}_\tau = u_\tau$ (тут $\vec{\tau}$ - орт дотичної, $\vec{n}$ - орт нормалі до горизонтальної площини). Зрозуміло, що $u^2 = u_n^2 + u_\tau^2$; $\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_n^2 + \mathrm{v}_\tau^2$; $\dfrac{u_n}{\mathrm{v}_n} = k$;

$u_n = k\mathrm{v}_n = k\mathrm{v}\cos\alpha$;

$$u^2 - \mathrm{v}^2 = k^2\mathrm{v}_n^2 + u_\tau^2 - \mathrm{v}_n^2 - \mathrm{v}_\tau^2 = (k^2 - 1)\mathrm{v}^2\cos^2\alpha. \qquad (2)$$

Підставляємо (2) в (1), отримаємо

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{m}{2}(k^2 - 1)\mathrm{v}^2\cos^2\alpha = -\frac{m}{2}(1 - k^2)\mathrm{v}^2\cos^2\alpha.$$

Від'ємний знак відповіді вказує на втрату кінетичної енергії при ударі. Застосуємо тепер теорему Остроградського-Карно

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{k-1}{k+1}\frac{m}{2}(u - \mathrm{v})^2, \qquad (3)$$

де різниця $(u - \mathrm{v})$ називається втраченою швидкістю.

При ударі об гладеньку поверхню

$$u - \mathrm{v} = u_n - \mathrm{v}_n = u_n + |\mathrm{v}_n| = k\mathrm{v}_n + |\mathrm{v}_n|,$$

орт $\vec{n}$ вважаємо напрямленим в зовнішній бік поверхні. Після підстановки виразу для втраченої швидкості у (3), знайдемо

$$\Delta T = \frac{k-1}{k+1}\frac{m}{2}(u - \mathrm{v})^2 = \frac{k-1}{k+1}\frac{m}{2}(\mathrm{v}_n k + \mathrm{v}_n)^2 =$$

$$= \frac{k-1}{k+1}\frac{m}{2}(k+1)^2 \mathrm{v}_n^2 = (k^2 - 1)\frac{m}{2}\mathrm{v}^2 \cos^2\alpha \, .$$

Список літератури

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Павловский М. А., Акинфиева Л. Ю., Бойчук О. Ф. Теоретическая механика. Статика. Кинематика. – К.: Вища шк., 1989. – 351 с.
3. Павловский М. А., Акинфиева Л. Ю., Бойчук О. Ф. Теоретическая механика. Динамика. – К.: Вища шк., 1980. – 480с.
4. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике.- М.: Наука, 1986.-448 с.
5. Теоретична механіка: Збірник задач / О. С. Апостолюк, В. М. Воробйов, Д. І. Ільчишина та ін.; За ред. М.А. Павловського. - К.: Техніка, 2007. – 400 с.
6. Яблонский А. А. и др. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. - М.: Высш. шк., 1985. - 368 с.
7. Теоретична механіка-3. Загальні теореми динаміки та елементи аналітичної механіки. Конспект лекцій для студентів механіко-машинобудівного інституту напрямів підготовки 6.050502 «Інженерна механіка» та 6.050503 «Машинобудування» для всіх форм навчання/ Укладачі: Бабаєв О. А., Кришталь В.Ф. – НТУУ «КПІ» – Київ: НТУУ «КПІ», 2015. – 82 с.
8. Теоретична механіка-3. Динаміка. Дослідження руху механічної системи. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи для студентів напрямів підготовки: 6.050502 «Інженерна механіка», 6.050503 «Машинобудування» усіх форм навчання Укладач Кришталь В.Ф. – НТУУ «КПІ» – Електронні текстові дані. – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – 82 с.
9. Айзенберг Т. Б. и др. Руководство к решению задач по теоретической механике. - М.: Высш. шк., 1963. – 420 с.
10. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. Т.1. - М.: Наука, 1979. – 272 с.
11. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. Т.2. - М.: Наука, 1979. – 461 с.
12. Кильчевский Н. А., Ремизова Н. И., Кильчевская Е. Н. Основы теоретической механики. – К.: Вища школа, 1986. – 296 с.
13. Бать М.И., Джанелидзе М.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. М.: Наука. Т. 2, 1972.