МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”

Губська В.В., Кришталь В.Ф., Янчевський І. В.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА-1

Методичні вказівки для проведення практичних занять
для студентів спеціальності
133 Галузеве машинобудування

Київ – 2017

Теоретична механіка-1. Методичні вказівки для проведення практичних занять для студентів спеціальності 133 Галузеве машинобудування [Електр]/ Уклад.: Губська В.В., Кришталь В.Ф., Янчевський І. В. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 108 с.

Рекомендовано вченою радою факультету АКС
Протокол № 11 від 27 червня 2017 року

Навчальне електронне видання

Теоретична механіка-1.
Методичні вказівки для проведення практичних занять
для студентів спеціальності
133 Галузеве машинобудування

Укладачі Губська В. В., канд. фіз.-мат. наук, ст. викладач
Кришталь В. Ф., канд. техн. наук, доцент
Янчевський І. В, докт. фіз.-мат. наук, професор

Відповідальний редактор Федоров В. М., канд. техн. наук, доцент

Рецензент Охріменко О.А., докт.техн.наук, доцент

ЗМІСТ

1. ВСТУП

Кредитний модуль «Теоретична механіка-1» є частиною дисципліни Теоретична механіка, у якому вивчають основні поняття та закони механіки; методи вивчення *умов рівноваги* і *руху реальних фізичних об'єктів*, які моделюють у вигляді матеріальної точки, твердого тіла і механічної системи; *методи перетворення систем сил* у інші, їм еквівалентні; *розрахунок будівельних конструкцій* та *визначення зусиль*, які в них виникають; *способи визначення центра ваги* заданої фігури; способи визначення *кінематичних характеристик матеріальних точок* та *найпростіших рухів механічних систем і твердих тіл*.

Вивчення кредитного модуля «Теоретична механіка-1» базується на широкому використанні фізичних уявлень про Всесвіт і математичних методах диференціальних та інтегральних обчислень, теорії диференціальних рівнянь, теорії векторної алгебри і тому її вивчення вимагає наявність базових знань з елементарної і вищої математики, аналітичної алгебри, нарисної геометрії, загальної фізики.

Цей модуль курсу теоретичної механіки дає студенту *конкретні* знання для визначення умов руху і рівноваги фізичного об'єкта, а також знайомить з основними кінематичними характеристиками простих рухів і є *фундаментом* для отримання базових знань з кінематики та динаміки твердого тіла (кредитний модуль «Теоретична механіка-2» та «Теоретична механіка-3») і механічних систем, а також для вивчення таких дисциплін, як прикладна механіка, опір матеріалів, деталі машин.У модулі знайшли відображення сучасні запитання про задачі та методи визначення умов рівноваги механічних систем, які застосовують у різних галузях машинобудування. Його викладання передбачає: розвиток логічного та алгоритмічного мислення, оволодіння основними методами правильної постановки задачі, вибору об'єкта дослідження.

1.1. Розподіл навчального часу

Розподіл навчальних годин кредитного модуля наведений у таблиці:

Семестр / код кредитного модуля	*Всього годин*	*Розподіл годин за видами занять*				*Кількість МКР*	*Вид індивідуального завдання*	*Семестрова атестація*
		Лекції	*Практичні заняття*	*СРС*				
				Всього	*У тому числі на виконання індивідуального завдання*			
2/	165	36	36	93	10	-	РГР	іспит

1.2. Мета і завдання модуля

Мета вивчення кредитного модуля «Теоретична механіка-1» – дати студентам теоретичні знання і практичні уміння в галузях: розрахунку опорних реакцій та внутрішніх сил статично визначених конструкцій, визначення кінематичних параметрів руху матеріальної точки та елементів простих передач.

Згідно з вимогами програми навчальної дисципліни студенти після засвоєння кредитного модуля мають продемонструвати такі результати навчання:

- знання: умови рівноваги систем сил, умови еквівалентності систем сил та зведення до найпростішої, кінематичні характеристики точки, кінематичні характеристики точки та найпростіших рухів твердого тіла, кінематика складного руху точки;
- уміння: дослідження умов рівноваги систем сил: просторової, плоскої, збіжних сил; визначення статичних інваріантів, визначення центра ваги однорідного тіла, визначення кінематичних характеристик окремої точки та точки при складному русі, визначення кінематичних характеристик простих передач;
- досвід: розрахунок опорних реакцій та зусиль у стержнях простої статично визначеної ферми, застосування методу вирізання вузлів, методу Ріттера та побудова діаграми Максвелла-Кремони.

1.3. Тематичний план

Назви розділів і тем	Кількість годин				
	Всього	у тому числі			
		Лекції	Практичні (семінарські)	Лабораторні (комп'ютерний практикум)	СРС
1	2	3	4	5	6
Розділ 1. Статика твердого тіла					
Тема 1.1. Вступ до предмету	10	4	2	-	4
Тема 1.2. Умови рівноваги систем сил	32	8	14	-	10
Тема 1.3. Способи перетворення систем сил	16	4	4	-	8
РГР з розділу 1	10	–	–	-	10
Разом за розділом 1	68	16	20	-	32
Розділ 2. Кінематика точки та найпростіших рухів тіла					
Тема 2.1. Кінематика матеріальної точки	17	4	4	-	9
Тема 2.2. Найпростіші рухи	22	8	4	-	10

1	2	3	4	5	6
твердого тіла					
Тема 2.3. Складний рух точки	28	8	8	-	12
Разом за розділом 2	67	20	16	-	31
Екзамен	30			-	*30*
Всього годин	165	36	36	-	93

1.4. Тематика практичних занять

№ з/п	Назва теми заняття та перелік основних питань
1	Тема 1.1. *Вступ до предмету* *Практичне заняття 1.* Елементи векторної алгебри. Література: [4], с.9-12. Завдання на СРС: Повторення елементів векторної алгебри.
2	Тема 1.2.*Умови рівноваги систем сил* *Практичне заняття 2.* Розв'язування задач на тему «Рівновага збіжної плоскої системи сил. Теорема про три сили». Набуття навичок на виділення об'єкта дослідження, аналіз різних видів в'язей та їх реакцій. Розв'язування задач на тему «Теорема про три сили».Література: [3], с.10-24; [4], с.11-15, с.18-19, 21. Література: [6], с.5-11; [4], № 2.30, [3], № 1.9, [4], № 2.43.
3	*Практичне заняття 3.* Розв'язування задач на тему «Рівновага просторової збіжної системи сил».Література: [3], с.33-34; [4], с.66-67. Завдання на СРС: розв'язати індивідуальну задачу, з підручника і задачі для самостійного розв'язування.Література: [11], с.12-18; [3], № 1.36; [4], № 6.7.
4	*Практичне заняття 4.* «Рівновага довільної плоскої системи сил». Момент сили відносно точки як вектор. Еквівалентність пар сил. Зосереджені та розподілені сили. Рівновага системи пар сил. Література: [4], с.25-27, [3], с.36-45. Завдання на СРС: розв'язати задачі.Література: [3], № 1.9; [4], № 8.4.Література: [11], с.19-26; [3], № 2.5.
5	*Практичне заняття 5.* «Рівновага складеної системи тіл». Метод перерізів. Література: [3], с.44-51. Завдання на СРС: розв'язати індивідуальну задачу, з підручника і задачі для самостійного розв'язування. *Розрахунково-графічна робота.*Література: [11], с.27-37; [3], варіант 21 на с.49.
6	*Практичне заняття 6.* «Рівновага довільної плоскої системи сил з урахуванням сил тертя». Література: [3], с.29-32. Завдання на СРС: розв'язати задачу з підручника і задачі для самостійного розв'язування.Література: [3], № 1.30 на с.31; [4], № 5.26.
7	*Практичне заняття 7, 8.* Розв'язування задач на тему «Рівновага довільної просторової системи сил. Рівновага валів. Рівновага пластин». Література: [3], с.74-77. Завдання на СРС: розв'язати задачі для самостійного розв'язування.

	Література: [11], с.38-52; [3], № 4.3 на с.74; [4], № 8.29.
8	Тема 1.3.*Способи перетворення систем сил* *Практичне заняття 9.* Розв'язування задач на тему «Визначення центра ваги твердого тіла».Література: [3], с.101-103. Завдання на СРС: розв'язати індивідуальну задачу, з підручника і задачі для самостійного розв'язування.Література: [11], с.61-67; [3], № 4.22 на с.101 і № 4.30 на с.103.
9	*Практичне заняття 10.* Розв'язування задач на тему «Зведення систем сил до найпростішого вигляду». Література: [3], с.82-88. Завдання на СРС: розв'язати індивідуальну задачу і з підручника.Література: [11], с.53-60; [3], № 4.20 на с.88.
10	Тема 2.1.*Кінематика матеріальної точки* *Практичне заняття 11.* Розв'язування задач на тему «Траєкторія точки». Література: [3], с.108-114. Завдання на СРС: розв'язати задачі. Література: [4], № 12.8, № 12.20.
11	*Практичне заняття 12.* Розв'язування задач на тему «Швидкість та прискорення точки ». Література: [3], с.108-114. Завдання на СРС: розв'язати індивідуальну задачу, з підручника і для самостійного розв'язування.Література: [5], с.64-67; [3], № 5.3 на с.113.
12	*Практичне заняття 13.* Розв'язування задач на тему «Рівномірний та рівнозмінний рух точки». Література: [4], с.114. Завдання на СРС: розв'язати індивідуальну задачу, з підручника і для самостійного розв'язування.Література: [5], с.64-67.
13	Тема 2.2.*Найпростіші рухи твердого тіла* *Практичне заняття 14*. Розв'язування задач на тему «Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі».Література: [3], с.121-123. Завдання на СРС: розв'язати індивідуальну задачу, з підручника і для самостійного розв'язування. Література: [3], № 6.3 на с.121; [4], № 13.8.
14	*Практичне заняття 15*. Розв'язування задач на тему «Синтез найпростіших рухів твердого тіла». Розрахунок простих передавальних механізмів. Розрахунки фрикційних, зубчатих, ланцюгових та пасових передач. Література: [3], с.123-125. Завдання на СРС: розв'язати задачі.Література: [3], № 6.16 на с.124; [5], с.67-72.
15	*Практичне заняття 16.* «Складний рух точки. Поступальний переносний рух» - Визначення кінематичних характеристик точки при поступальному переносному русі. Література: [3], № 7.5, 7.6, 7.12 на с.131-134. Завдання на СРС: розв'язати задачу.Література: [3], № 7.3 на с.132.
16	*Практичне заняття 17.* «Складний рух точки. Обертальний переносний рух.» - Визначення кінематичних характеристик точки при обертальному переносному русі. Література: [3], № 7.1, 7.2, 7.4, 7.7-11 на с.131-134. Завдання на СРС: розв'язати індивідуальну задачу.Література: [5] завдання К-7 на с.104-111.

17	*Практичне заняття 18.* «Складний рух точки. Синтез простого і складного рухів точки» - Визначення кінематичних характеристик точки при синтезі простого і складного рухів точки. Визначення кінематичних характеристик точки при складному переносному русі.Література: [3], с.125-134, [4] с. 170-172, 189. Завдання на СРС: розв'язати задачі для самостійного розв'язування і з підручника.Література: [3], № 7.12.

1.5. Індивідуальні завдання

Індивідуальне завдання складається з розрахунково-графічної роботи.

Розрахунково-графічну роботу виконують з використанням часу, відведеного на самостійну роботу студента під керівництвом викладача. Основна мета РГР набуття досвіду з вивчених тем статики. Завдання для РГР наведено у [3], [5] або [6].

Тематика розрахунково-графічної роботи (РГР):

Розділ 1. Статика твердого тіла. Розрахунок плоскої ферми.

2. **МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ**

2.1. <u>Практичне заняття 1.</u> Елементи векторної алгебри (тема 1.1).

Мета заняття

Метою даного заняття є нагадування основних понять векторної алгебри та основних співвідношень планіметрії, зокрема, в трикутниках та чотирикутниках.

Методичні прийоми

На цьому занятті рекомендується нагадати основні дії з векторами, визначення координат вектора, проекції вектора на вісь, скалярний та векторний добуток векторів, основні поняття та співвідношення в довільному та прямокутному трикутнику: теорема Піфагора, теорема косинусів, теорема синусів, медіана, геометричні визначення функцій косинуса, синуса, тангенса та котангенса.

Рекомендується також розв’язати задачу на рівновагу системи збіжних сил, прикладених до однієї точки.

Враховуючи важливість поняття проекції сили наведемо відповідні пояснення.

Нехай потрібно знайти проекцію сили $\vec{P}$ на вісь Ox, яка знаходиться в одній площині з силою (рис.1.1).

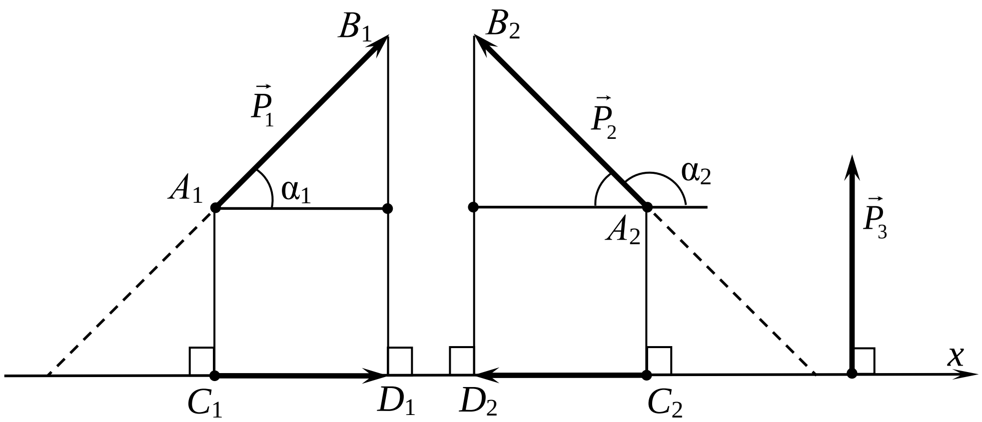


Рис.1.1,а Рис.1.1,б Рис.1.1,в

Позначимо початок та кінець вектора сили $\vec{P}_i$ (i=1, 2, 3) літерами $\grave{A}_i$ та $\hat{A}_i$ і опустимо з них на вісь x перпендикуляри. Точки перетину перпендикулярів з віссю x, які позначено, відповідно, буквами $\tilde{N}_i$ і D_i, відсікають на осі x напрямлений відрізок, який і буде проекцією сили $\vec{P}_i$ на вісь x. Величина знайденого відрізка дорівнює добутку модуля сили $\left|\vec{P}_i\right|$ на косинус кута, під яким лінія дії сили перетинає вісь:

$$P_{ix} = P_i \cdot \cos\alpha_i .$$

Знак проекції сили на вісь буде додатній, коли кут α (кут перетину лінії дії сили з віссю) гострий (рис.1.1,а). Якщо кут α буде тупий, то проекція сили $\vec{P}$ на вісь x буде мати від'ємний знак (рис.1.1, б). Якщо цей кут дорівнює 90^o, то проекція сили $\vec{P}$ на вісь x дорівнює нулю (рис.1.1, в).

Таким чином, *проекція сили на вісь – це відрізок на осі, який відсікається двома перпендикулярами до осі, проведеними через початок і кінець вектора сили, і який за величиною дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між напрямом вектора сили та віссю.*

Зазначимо, що проекція P_x вектора сили на вісь є числом. В свою чергу векторна величина $\vec{P}_x$ є складовою вектора сили $\vec{P}$.

Припустимо, що вектор сили $\vec{P}$ довільно розташований у просторі (рис.1.2). Знайдемо проекції вектора сили на осі координат $Oxyz$.

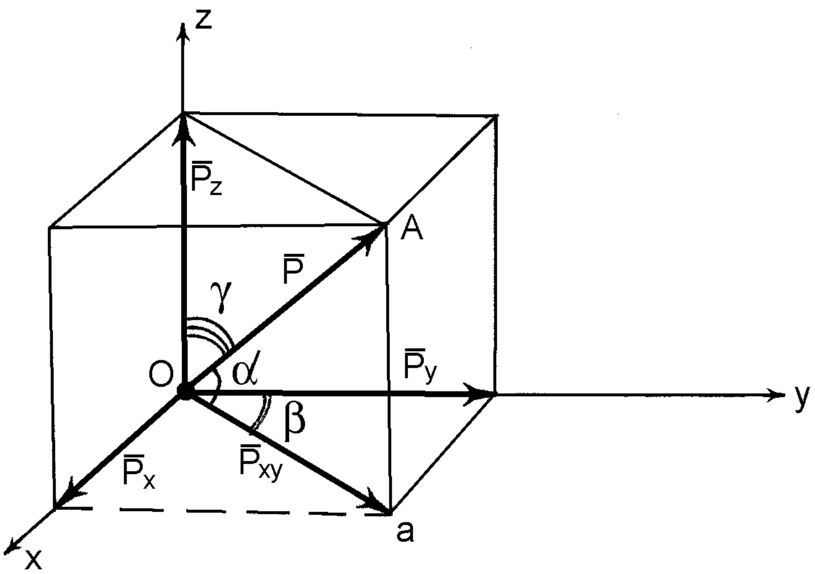


Рис.1.2

Вважаємо, що початок відліку системи координат $Oxyz$ збігається з точкою прикладання вектора сили $\vec{P}$. Спочатку спроектуємо вектор сили $\vec{P}$ на площину xOy. Опустимо з точки A (кінець вектора сили) на вказану площину перпендикуляр, який перетинає її в точці a. На площині xOy утворено вектор $\overrightarrow{Oa}$, який є складовою $\vec{P}_{xy}$ сили $\vec{P}$. Проекцією сили $\vec{P}$ на площину xOy є відрізок $[Oa]$.За модулем вона дорівнює дорівнює

$$P_{xy} = P\cos\alpha,$$

де α - кут між вектором сили $\vec{P}$ та площиною xOy.

В площині xOy введемо кут β, і спроектуємо силу $\vec{P}_{xy}$ на осі x та y, опускаючи з точки a на осі перпендикуляри. Тоді, за вже відомим

правилом, отримаємо складові $\vec{P}_x$ та $\vec{P}_y$ вектора $\vec{P}_{xy}$. Відповідні проекції вектора $\vec{P}_{xy}$ на вказані осі дорівнюють:

$$P_x = P_{xy} \cdot \sin\beta = P \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$P_y = P_{xy} \cdot \cos\beta = P \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta.$$

Оскільки кут між вектором сили $\vec{P}$ та віссю z відомий, складову $\vec{P}_z$ отримаємо проводячи через кінець A вектора сили $\vec{P}$ перпендикуляр до осі, який буде паралельний до відрізка $[Oa]$. Величина знайденої складової, тобто проекції P_z, буде дорівнювати

$$P_z = P \cdot \cos\gamma = P \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = P \cdot \sin\alpha.$$

Комплект завдань

В аудиторії рекомендується розв'язати задачі 1.1 [3], 2.1, 2.2, 2.6 [4].

Приклад 1.1

До шарніра *O* (рис.1.3,а), який утримується невагомими стержнями *OA* та *OB*, прикріплено вантаж вагою 100 *H*. Стержні *OA* та *OB* шарнірно закріплені на вертикальній стіні та перпендикулярні між собою. Кут α=60°. Знайти реакцію шарніра *O*.

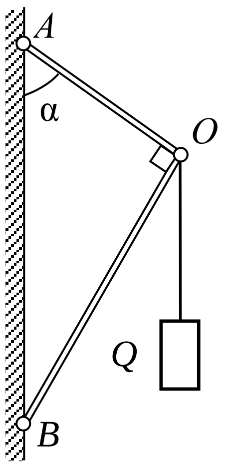


Рис.1.3,а

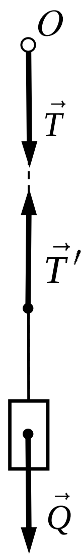


Рис.1.3,б

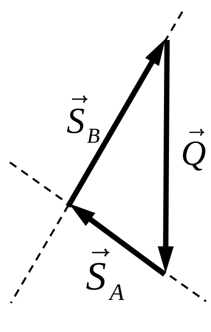


Рис.1.3,в

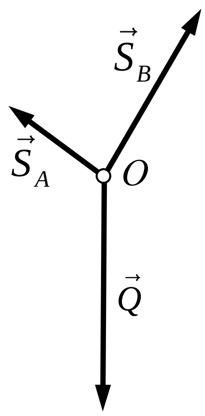


Рис.1.3,г

Розв'язання. Об'єктом дослідження є шарнір *O*. Шарнір знаходиться в рівновазі під дією реакцій ідеальних стержнів та сили натягу. Сила натягу $\vec{T}$ нитки напрямлена вниз і дорівнює вазі вантажа *Q*. Це випливає з того, що уявно перерізуючи нитку, ми маємо рівновагу нитки з вантажем (рис.1.3,б) під дією сили натягу $\vec{T}'$ та сили ваги $\vec{Q}$, які за аксіомою про дві

сили є рівними та протилежними: $\vec{T}' = -\vec{Q}$. В свою чергу, за третім законом Ньютона: $\vec{T}' = -\vec{T}$. Таким чином, $\vec{T} = \vec{Q}$.

Реакції ідеальних стержнів напрямлені вздовж осьових ліній стержнів. Позначимо їх $\vec{S}_A$, $\vec{S}_B$.

Оскільки вузол *O* знаходиться у рівновазі, то зрівноваженою буде і система сил, прикладених до вузла. Лінії дії всіх сил перетинаються у точці *O*, тобто система сил $\left\{\vec{S}_A, \vec{S}_B, \vec{T}\right\}$ є системою збіжних сил, умову рівноваги якої можна записати так:

$$\vec{S}_A + \vec{S}_B + \vec{T} = 0.$$

Розглянемо графічну умову рівноваги, тобто побудуємо замкнений силовий багатокутник (рис.1.3, в): від довільної точки площини відкладемо відому силу $\vec{T}$, потім через кінець цього вектора проведемо лінію паралельну до (AO), а через початок – паралельну до (BO). В отриманій фігурі розставляємо напрям векторів з умови замкненості. Кути визначаємо з урахуванням рис.1.3, а. Знайдемо невідоми сили:

$$S_A = Q\cos 60^{\circ} = 50 \text{ Н}, \; S_B = Q\sin\alpha = 50\sqrt{3} \text{ Н}.$$

Зображуємо сили в точці *O* (рис.1.3, г).

Контрольні запитання

Для самоконтролю засвоєння матеріалу цього практичного заняття пропонуються наступні запитання:

1. Як визначається сума та різниця векторів?
2. Що таке складова сили та проекція сили на вісь?
3. Визначити скалярний добуток векторів.
4. Визначити векторний добуток векторів.
5. Що таке права та ліва системи координат?
6. Сформулювати теорему косинусів.
7. Сформулювати теорему синусів.
8. Подати геометричні означення функції косинус та синус.
9. Подати геометричні означення функції тангенс та котангенс.
10. Подати основні співвідношення в паралелограмі.

Завдання на СРС

Самостійно рекомендується розв’язати задачі 2.7; 2.8 [4]. Повторення елементів векторної алгебри. Література: [5], с.9-12.

2.2. **Практичне заняття 2.** Рівновага збіжної плоскої системи сил. Теорема про три сили (тема 1.2).

Мета заняття

Метою даного заняття є набуття практичних навичок використання аксіоми про звільнення від в’язей, застосування теореми про три сили та складання графічної умови рівноваги системи збіжних сил.

Методичні прийоми

Системою збіжних сил називають систему сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці. Система збіжних сил еквівалентна одній силі – рівнодійній $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$.

Векторну умову рівноваги системи збіжних сил можна записати у вигляді

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 . \qquad (2.1)$$

Вираз (2.1) означає, що багатокутник сил (силовий багатокутник) за умови рівноваги повинен бути замкненим. Використання умови замкненості багатокутника сил лежить в основі графічного методу розв’язання задач.

Аналітичні умови (рівняння) рівноваги системи збіжних сил записуються як проекції виразу (2.1) на осі прямокутної декартової системи координат $Oxyz$ і мають вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 . \qquad (2.2)$$

При розв’язуванні задач рекомендується використовувати наступну методику:

1. Вибираємо об’єкт дослідження (вузол, шарнір, балка, тіло або система тіл), рівновагу якого розглядається. До об’єкта дослідження прикладаються шукані та відомі сили.
2. Зображуємо активні сили, які задані за умовою задачі. Активні сили – це сили, які задані наперед, які можуть викликати рух та реакції в’язей, які не залежать від інших сил.
3. Визначаємо в`язі, які обмежують положення об’єкт дослідження, та за *аксіомою про звільнення від в`язей* звільняємось від них, тобто заміняємо дію в`язей їхніми реакціями.
4. Далі проводимо аналіз системи сил, прикладеної до об’єкта дослідження. Оскільки об’єкт дослідження знаходиться у рівновазі, то і система сил є зрівноваженою. Застосування графічної умови рівноваги або аналітичних умов залежить від кількості сил та їх розташування. Якщо система сил складається з трьох сил і розташована у одній площині, то застосування графічної умови рівноваги може дати швидкий результат по

визначенню невідомих. Застосування аналітичних умов рівноваги представляється доцільним у випадку дослідження просторової системи збіжних сил та у випадку, коли кількість сил перевищує три.

5. Припустимо, що система сил складається з трьох сил і розташована у одній площині, причому лінії дії двох сил відомі і перетинаються у одній точці. У цьому випадку:

а) за *теоремою про три сили* приходимо до висновку, що лінія дії третьої сили проходить через точку перетину перших двох, тобто ми маємо справу з системою збіжних сил.

б) Використовуємо далі графічну умову рівноваги системи збіжних сил – замкненість силового багатокутника (в данному випадку – трикутника). Спочатку від довільної точки площини відкладаємо вектор, що відповідає відомій силі, а потім через початок цього вектора проводимо лінію паралельну до лінії дії однієї з невідомих сил, а через кінець – лінію дії паралельну до лінії дії другої невідомої сили. В утвореному трикутнику ставимо напрям векторів виходячи з умови замкненості силового багатокутника.

в) Для визначення довжини сторін силового багатокутника можна скористатись теоремою синусів, причому значення кутів потрібно визначити з рисунка для об'єкта рівноваги.

6. Припустимо тепер, що кількість сил у системі сил перевищує три. Тоді доцільно застосовувати умови рівноваги в аналітичній формі. У цьому випадку необхідно перевірити відповідність кількості невідомих сил (реакцій) кількості рівнянь рівноваги. Задача повинна бути статично визначеною – тобто кількість невідомих сил не повинна перевищувати кількість рівнянь рівноваги. Далі вводиться система координат, початок відліку якої рекомендується роміщувати у точці перетину ліній дії сил. Наступним кроком є запис аналітичних умов рівноваги (2.2) та розв'язання отриманої системи рівнянь відносно вказаних невідомих. Розв'язки рівнянь дозволяють знайти напрям та модулі невідомих сил.

Комплект завдань

В аудиторії можуть розглядатися, наприклад, задачі 2.7(а), 2.19, 2.26, 2.30(а), 2.38, 2.40 [4], або 1.3, 1.4, 1.6, 1.7, 1.10 [3], приклади 1.2, 1.3, 1.6, 1.7 [3].

Приклад 2.1.

Однорідна куля вагою *P* підвішена до гладенької вертикальної стіни за допомогою невагомої нерозтяжної нитки і знаходиться у рівновазі. Нитка утворює кут α зі стіною. (рис. 2.1). Визначити натяг нитки та реакцію стіни.

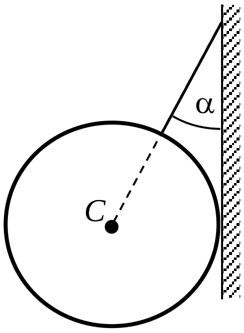


Рис.2.1.

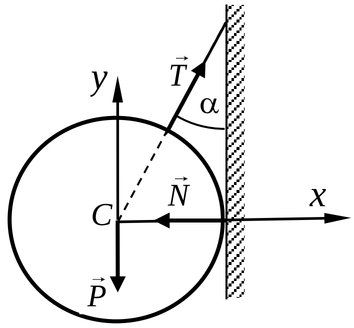


Рис.2.2

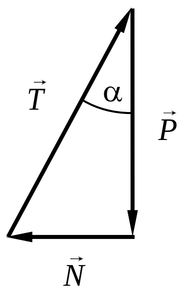


Рис.2.3

Розв'язання. Розглянемо рівновагу кулі. На неї діє сила тяжіння $\vec{P}$, прикладена в точці C – центрі ваги і спрямована вертикально вниз, реакція гладенької стіни $\vec{N}$, прикладена у точці контакту кулі та стіни і спрямована по взаємній нормалі цих тіл, і натяг нитки $\vec{T}$ напрямлений вздовж нитки від об'єкта рівноваги (рис. 2.2).

Система складається з трьох непаралельних сил розташованих у одній площині. Лінії дії сили ваги $\vec{P}$ та реакції $\vec{N}$ перетинаються у точці C, тоді *за теоремою про три сили* лінія дії сили натягу повинна проходити через точку C. Тобто, у стані рівноваги куля займе таке положення, при якому сила натягу нитки буде проходити через центр кулі. Це означає, що система сил $\vec{N}$, $\vec{P}$, $\vec{T}$ є системою збіжних сил.

Графічний метод розв'язання. Оскільки куля зрівноважена, то

$$\vec{P}+\vec{N}+\vec{T}=0,$$

і сили $\vec{N}$, $\vec{P}$, $\vec{T}$ утворюють замкнений силовий багатокутник (трикутник) (рис. 2.3). Відкладаючи спочатку вектор сили $\vec{P}$, а потім проводячи через кінець і початок цього вектора лінії паралельні до ліній дії сил $\vec{N}$, $\vec{T}$, отримаємо прямокутний трикутник. За відомим співвідношенням для сторін трикутника маємо:

$$N = P\cdot tg\alpha, \qquad T = P/\cos\alpha .$$

Аналітичний метод розв'язання. За цим методом скористаємось визначеними напрямами сил ваги $\vec{P}$, реакцій в'язей $\vec{N}$ та $\vec{T}$.

Вводимо систему координат Cxy, вісь Cx спрямуємо по горизонталі праворуч, вісь Cy вгору (рис.2.2). Далі записуємо рівняння рівноваги:

$$\sum F_{ix} = T\sin\alpha - N = 0, \qquad \sum F_{iy} = T\cos\alpha - P = 0,$$

звідси отримаємо $N = P\cdot tg\alpha$, $T = P/\cos\alpha$.

Приклад 2.2.

Визначити опорні реакції балки вагою 20 кН, яка може обертатись навколо горизонтальної осі (рис.2.4), що проходить через точку *A*. Кінцем *B* балка спирається на гладеньку опору і складає з горизонталлю кут α=45°.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу балки *AB*. До неї прикладено: силу ваги $\vec{P}$ у точці *C* – центрі ваги балки (рис.2.5); реакцію $\vec{R}_B$ гладенької опори у точці *B*, яка напрямлена вздовж нормалі до опорної площини; реакцію $\vec{R}_A$ шарніра *A*. Балка знаходиться у рівновазі під дією трьох сил, причому лінії дії сили $\vec{P}$ та реакції $\vec{R}_B$ перетинаються у точці *O*. Тоді, за теоремою про три сили лінії дії усіх трьох сил перетинаються у одній точці – точці *O*.

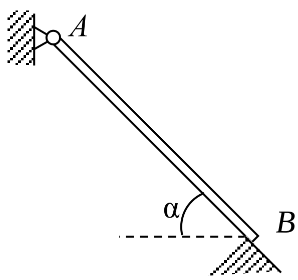


Рис.2.4

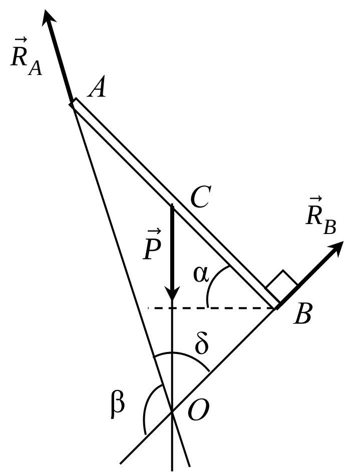


Рис.2.5

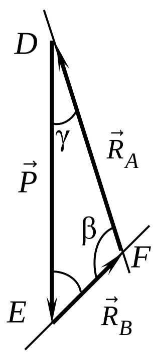


Рис.2.6.

Таким чином, система сил, прикладених до балки, $\{\vec{P},\ \vec{R}_A,\ \vec{R}_B\}$ є зрівноваженою системою збіжних сил. Графічною умовою рівноваги такої системи сил є замкненість силового багатокутника, що відповідає співвідношенню:

$$\vec{P} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = 0. \tag{1}$$

Будуємо силовий трикутник на підставі відомого вектора сили $\vec{P}$ та відомих ліній дії сил $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$. Через початок вектора сили $\vec{P}$ проводимо пряму паралельну до лінії дії сили $\vec{R}_A$ (рис.2.6), через кінець вектора $\vec{P}$ проводимо пряму паралельну до лінії дії сили $\vec{R}_B$ до перетину з лінією дії сили $\vec{R}_A$. Напрям векторів реакцій $\vec{R}_A$ та $\vec{R}_B$ визначаємо з умови замкненості силового трикутника *DEF*.

Невідомі реакції $\vec{R}_A$ та $\vec{R}_B$ знайдемо з силового трикутника за теоремою синусів:

$$\frac{P}{\sin\beta} = \frac{R_B}{\sin\gamma} = \frac{R_A}{\sin DEF}. \tag{2}$$

Синуси кутів визначимо з рис.2.5. Очевидно, що кут *DEF* дорівнює куту між прямими (*CO*) та (*BO*), тобто 45°. Для sinβ з рис.2.5. маємо:

$$\sin\beta = \sin(180° - \delta) = \sin\delta.$$

З трикутника ABO:

$$\sin\delta = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{\sqrt{AB^2 + OB^2}}.$$

Оскільки $AC = CB = OB$, то

$$\sin\beta = \sin\delta = \frac{2 \cdot CB}{\sqrt{(2 \cdot CB)^2 + CB^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Визначимо $\sin\gamma$, враховуючи що для трикутника DEF виконується умова: $\beta + \gamma + 45° = 180°$. Одержимо:

$$\sin\gamma = \sin(180° - 45° - \beta) = \sin(135° - \beta) = \sin 135° \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos 135°.$$

Оскільки кут β тупий, то $\cos\beta = -1/\sqrt{5}$. Маємо

$$\sin\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 0{,}1\sqrt{10}.$$

Таким чином, на підставі формули (2) шукані реакції дорівнюють

$$R_A = P\frac{\sin 45°}{\sin\beta} = 5\sqrt{10}\ \text{кН} = 15{,}81\ \text{кН}, \qquad R_B = P\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = 5\sqrt{2}\ \text{кН} = 7{,}07\ \text{кН}.$$

Приклад 2.3.

Арочна конструкція (рис.2.7,а) складається з двох однакових невагомих частин, з'єднаних між собою шарніром в точці B. Висота конструкції $BE = a$, $AE = DE = a$. До правої частини конструкції в точці С прикладена горизонтальна сила $\vec{P}$. Визначити реакції опор арочної конструкції.

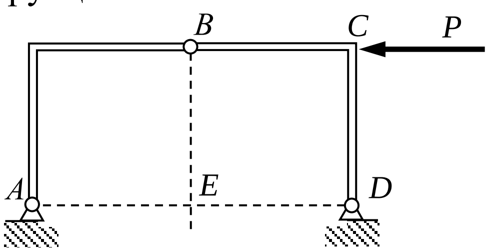


Рис.2.7,а

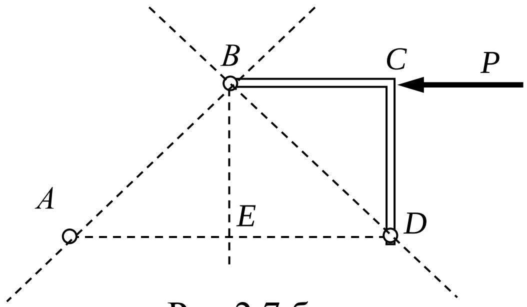


Рис.2.7,б

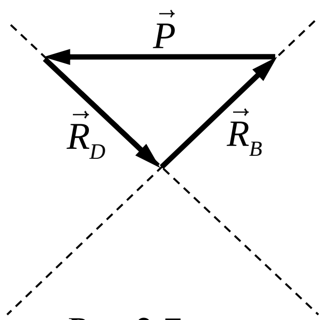


Рис.2.7, в

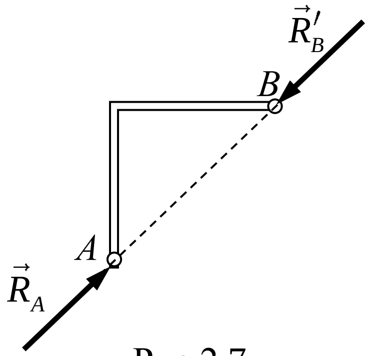


Рис.2.7, г

Розв'язання. Об'єктом дослідження оберемо праву частину конструкції (рис.2.7,б), проводячи переріз через шарнір *B*. Вона знаходиться в рівновазі під дією активної сили $\vec{P}$, невідомої реакції шарніра D та реакції ідеального криволінійного стержня *AB*, який є в'яззю для правої частини арки. Оскільки стержень *AB* ідеальний, його реакція знаходиться на прямій, яка проходить через кінці стержня. В даному випадку це пряма *AB*. Таким чином, права частина арки знаходиться в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, причому лінії дії сили $\vec{P}$ та реакції криволінійного стержня перетинаються у точці *B*. Тоді за теоремою про три сили лінія дії реакції шарніра D проходить через точку B і усі три сили утворюють зрівноважену систему збіжних сил. Умовою рівноваги цієї системи сил є умова

$$\vec{P} + \vec{R}_B + \vec{R}_D = 0.$$

Скориставшись графічною умовою рівноваги (рис.2.7.в) отримаємо:

$$R_D = P\cos 45^\circ = 0{,}5P\sqrt{2} \text{ Н},\ R_B = P\cos 45^\circ = 0{,}5P\sqrt{2} \text{ Н}.$$

Для визначення реакції шарніра *A* потрібно розглянути рівновагу криволінійного стержня *AB* (рис.2.7,г). Застосовуючи послідовно третій закон Ньютона ($\vec{R}_B = -\vec{R}'_B$) та аксіому про дві сили ($\vec{R}_A = -\vec{R}'_B$), приходимо до висновку, що $\vec{R}_A = \vec{R}_B$.

Відповідь: $R_A = R_D = 0{,}5P\sqrt{2}$.

Контрольні запитання

Для самоконтролю засвоєння матеріалу цього практичного заняття пропонуються наступні запитання:

1. Дайте означення системи збіжних сил та її рівнодійної.
2. Визначити графічну умову рівноваги системи збіжних сил.
3. Запишіть аналітичну умову рівноваги системи збіжних сил.
4. Сформулюйте теорему про три сили.
5. Сформулюйте аксіому про звільнення від в'язей.
6. Сформулюйте аксіому про дві сили (тверде тіло).
7. Сформулюйте третій закон Ньютона.
8. Як визначається реакція гнучкої в'язі.
9. Як визначається реакція ідеального стержня.
10. В чому полягає правило багатокутника додавання сил.

Завдання на СРС

Розв'язати задачі 2.27, 2.28, 2.30(б), 2.33, 2.41, 2.43[4]; 1.8, 1.12, 1.13, 1.16, 1.18 [3].

2.3. **Практичне заняття 3.** Рівновага збіжної просторової системи сил (тема 1.2).

Мета заняття

Метою даного заняття є набуття практичних навичок використання аксіоми про звільнення від в'язей, складання аналітичних умов рівноваги системи збіжних сил, застосування методу перерізів для аналізу складеної конструкції.

Методичні прийоми

При розв'язуванні задач цього практичного заняття рекомендується скористатись наступною методикою:

1. Вибираємо об'єкт дослідження (вузол, шарнір, балка, тіло або система тіл), рівновагу якого розглядається. До об'єкта дослідження прикладаються шукані та відомі сили.
2. Зображуємо активні сили, які задані за умовою задачі. Активні сили – це сили, які задані наперед, які можуть викликати рух та реакції в'язей, які не залежать від інших сил.
3. Визначаємо в`язі, які обмежують положення об'єкт дослідження, та за *аксіомою про звільнення від в`язей* звільняємось від них, тобто заміняємо дію в`язей їхніми реакціями.
4. Проводимо аналіз системи сил, прикладеної до об'єкта дослідження. Оскільки об'єкт дослідження знаходиться у рівновазі, то і система сил є зрівноваженою. Застосування аналітичних умов рівноваги представляється доцільним у випадку дослідження просторової системи збіжних сил та у випадку, коли кількість сил перевищує три.

Далі необхідно перевірити відповідність кількості невідомих сил (реакцій) кількості рівнянь рівноваги. Задача повинна бути статично визначеною.

5. Наступним кроком вводимо систему координат $Oxyz$, початок відліку якої рекомендується роміщувати у точці перетину ліній дії сил. Потім записуємо аналітичні умови рівноваги

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0$$

та розв'язуємо отриману систему рівнянь відносно вказаних невідомих. Розв'язки рівнянь дозволяють знайти напрям та модулі невідомих сил.

Комплект завдань

В аудиторії можуть розглядатися, наприклад, задачі 6.3, 6.10[4]; або 1.31, 1.32, 1.34, 1.37, 1.38, приклад 1.12 [3].

Приклад 3.1.

Три невагомих стержні AB, AC і AD з'єднані шарнірно в точці A і за допомогою шарнірів B, C, D прикріплені до горизонтальної підставки (рис. 3.1). Площини трикутників ABC і AOD вертикальні і взаємно перпендикулярні. На вузол A паралельно OD діє сила $P = 0{,}6$ кН. Знайти зусилля в стержнях, якщо $\angle ABO = \angle ACO = 45°$; $\angle ADO = 60°$.

Розв'язання. 1. Виділимо об'єкт дослідження – це точка A, яка утримується трьома стержнями, зусилля в яких треба визначити.

2.Аналізуємо активні сили, які прикладені до вузла A. На вузол A діє активна сила $\vec{P}$.

3.Використовуючи аксіому про звільнення від в'язей, дію стержнів замінимо їх реакціями. Оскільки стержні ідеальні, реакції стержнів напрямлені вздовж прямих, які проходять через їх кінці. Припустимо, що всі стержні розтягнуті, тому на рис.3.1 їхні реакції напрямлені від вузла A.

4. Система сил прикладених до вузла є зрівноваженою системою збіжних сил. В задачі три невідомі $\vec{R}_B, \vec{R}_D, \vec{R}_C$, для визначення яких можна скласти три рівняння рівноваги. Таким чином, задача статично визначена.

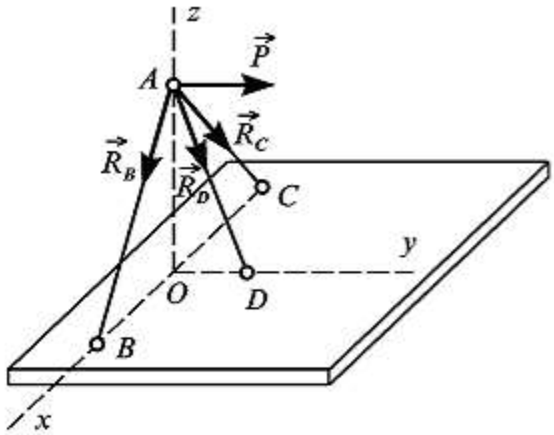


Рис.3.1

5. Вводимо систему координат $Oxyz$ (рис. 3.1) та складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = R_B \cdot \cos 45^\circ - R_C \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = P + R_D \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = -R_B \cdot \cos 45^\circ - R_C \cdot \cos 45^\circ - R_D \cdot \cos 30^\circ = 0.$$

На підставі першого рівняння робимо висновок, що $R_B = R_C$, з другого рівняння знаходимо R_D:

$$R_D = -\frac{P}{\cos 60^\circ} = -2P.$$

Від'ємний знак свідчить, що цей стержень стиснутий, оскільки спочатку припускали, що він розтягнутий. Нарешті, з третього рівняння знайдемо

$$R_B = R_C = -\frac{R_D \cdot \cos 30^\circ}{2\cos 45^\circ}; \quad R_B = R_C = \frac{P \cdot \cos 30^\circ}{\cos 45^\circ} = P\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Додатний знак цих реакцій вказує, що стержні *AB* і *AC* розтягнуті.

Приклад 3.2.

Просторова стержнева конструкція знаходиться у рівновазі під дією сили $\vec{P}$, яка лежить у площині *ABCD* і прикладена у точці *A* під кутом $\alpha = 60^\circ$ до вертикалі. Стержні 1, 2, 4, 5, 6 мають однакову довжину і утворюють кут $\beta = 45^\circ$ з горизонтальною площиною. Визначити зусилля в стержнях, вважаючи їх невагомими та з'єднаними між собою та з опорною площиною точковими шарнірами.

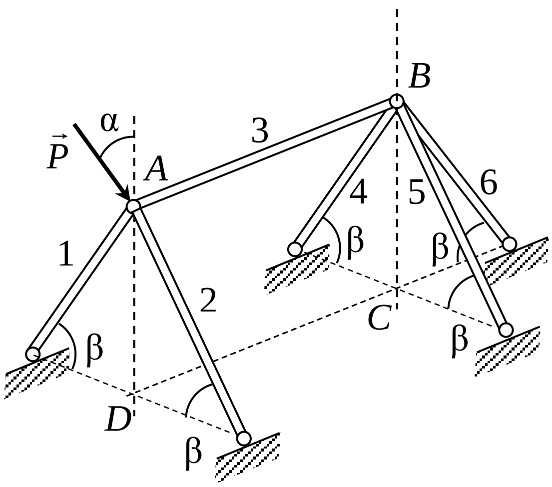


Рис.3.2,а

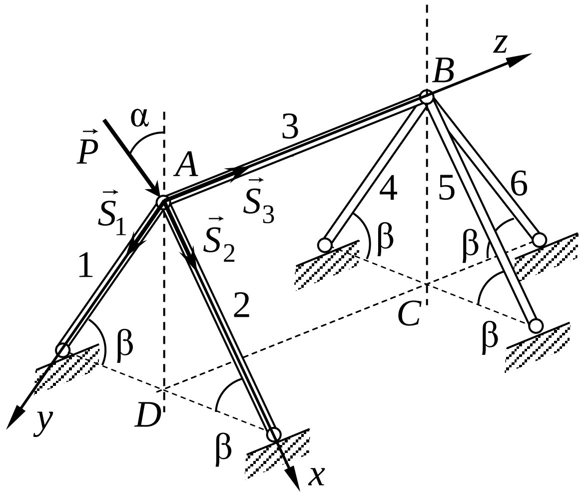


Рис.3.2,б

Розв'язання. За об'єкт дослідження оберемо спочатку точку *A*. На точку *A* діє активна сила $\vec{P}$, і положення точки *A* обмежується стержнями 1, 2, 3, які за аксіомою про звільнення від в'язей заміняємо реакціями – силами напрямленими вздовж осьових ліній стержнів (рис.3.2,б). Вважаємо, що реакції стержнів напрямлені від вузла *A*, тобто вважаємо їх розтягненими. Таким чином, до вузла *A* прикладена просторова зрівноважена система збіжних сил. Вводимо систему координат $Axyz$, осі якої спрямуємо вздовж стержнів 1, 2, 3. Рівняння рівноваги вказаної системи сил запишуться у вигляді:

$$\sum F_{ix} = P\cos\alpha\cos 45^\circ - S_2 = 0,$$
$$\sum F_{iy} = P\cos\alpha\sin 45^\circ - S_1 = 0,$$
$$\sum F_{iz} = P\sin\alpha + S_3 = 0.$$

При складанні першого та другого рівнянь сила $\vec{P}$ проектувалась спочатку на площину Axy, а потім в цій площині на відповідні осі. Розв'язок системи рівнянь:

$$S_1 = S_2 = P\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha = 0,25P\sqrt{2}\,,\; S_3 = -P\sin\alpha = -0,5P\sqrt{3}$$

показує, що реакція стержня 3 напрямлена протилежно до вибраного попередньо. Це означає, що стержень 3 стискається.

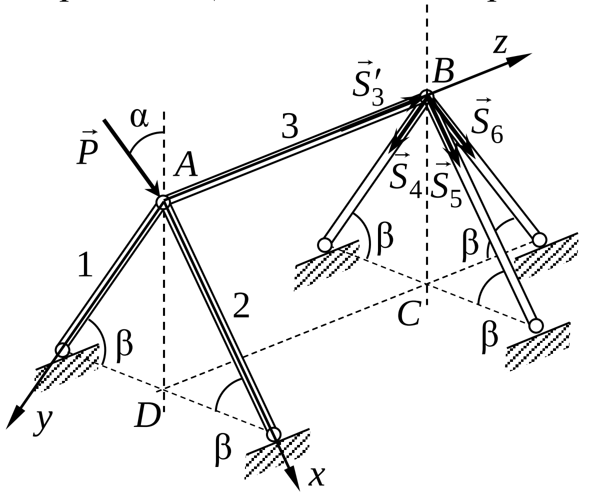


Рис.3.2,в

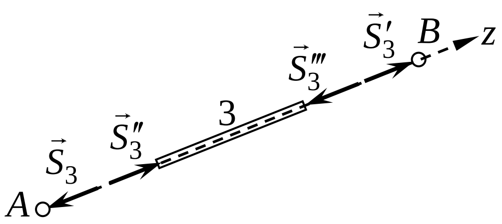


Рис.3.2,г

Для визначення реакцій стержнів 4, 5, 6 розглянемо рівновагу вузла (точки) *B*. За аксіомою про звільнення від в'язей заміняємо стержні реакціями – силами напрямленими вздовж осьових ліній стержнів (рис.3.2,в). Нехай реакції стержнів 4, 5, 6 напрямлені від вузла *B*, тобто вважаємо їх розтягненими. Для визначення напрямку реакції стержня 3 скористаємось методом перерізів – проведемо перерізи у вузлі *A* та у вузлі *B* (рис.3.2,г). Оскільки $\vec{S}_3$, в дійсності, напрямлена до вузла *A*, то на стержень 3 за третім законом Ньютона діє протилежна сила $\vec{S}_3'' = -\vec{S}_3$. Стержень 3 знаходиться у рівновазі під дією двох сил $\vec{S}_3''$ та $\vec{S}_3'''$. За аксіомою про дві сили маємо $\vec{S}_3''' = -\vec{S}_3''$. В свою чергу, до вузла *B* прикладається реакція стержня 3, яку позначимо $\vec{S}_3'$ і яка, за третім законом Ньютона, задовольняє умову $\vec{S}_3' = -\vec{S}_3'''$. В результаті приходимо до висновку, що $\vec{S}_3'$ напрямлена до вузла *B*. Такий самий висновок можна отримати, якщо врахувати напружений стан стержня – стиск. У цьому випадку реакція стержня напрямлена до вузла.

Таким чином, до вузла *B* прикладена просторова зрівноважена система збіжних сил. Скористаємось системою координат $Axyz$. Рівняння рівноваги вказаної системи сил запишуться у вигляді:

$$\sum F_{ix} = S_6 \cos 45^\circ \cos 45^\circ - S_5 = 0,$$
$$\sum F_{iy} = S_6 \cos 45^\circ \sin 45^\circ - S_4 = 0,$$
$$\sum F_{iz} = S_6 \sin 45^\circ + S_3' = 0.$$

Після розвязання отримаємо

$$S_6 = -P \sin\alpha / \sin 45^\circ = -0,5P\sqrt{6}, \qquad S_4 = S_5 = -0,25P\sqrt{6}.$$

Знак мінус у розв'язках показує, що дійсний напрям реакцій стержнів напрямлений протилежно до вказаного на рисунку, тобто стержні 4, 5, 6 стискаються.

Відповідь: $S_1 = S_2 = 0,25P\sqrt{2}$, $S_3 = -0,5P\sqrt{3}$, $S_4 = S_5 = -0,25P\sqrt{6}$, $S_6 = -0,5P\sqrt{6}$.

Контрольні запитання

Для самоконтролю засвоєння матеріалу цього практичного заняття пропонуються наступні запитання.

1. Який метод використовується при дослідженні складених конструкцій?
2. Як виглядають аналітичні умови рівноваги просторової системи збіжних сил?
3. Як визначаються проекції сили на осі просторової системи координат?
4. Яка система сил називається статично визначеною?
5. Як зв'язаний напрям реакції ідеального стержня та його напружений стан?
6. Вкажіть послідовність дій при проектуванні сили на осі просторової системи координат.

Завдання на СРС

Розв'язати задачі 6.4, 6,7 [4], або 1.35, 1.37, 1.39 [3].

2.4. **<u>Практичне заняття 4.</u>** Рівновага довільної плоскої системи сил (тема 1.2).

Мета заняття

Метою даного заняття є набуття умінь проведення аналізу системи сил, прикладених до балок, отримання навичок застосування та запису умов рівноваги довільної плоскої системи сил.

Методичні прийоми

При розв’язуванні задач на дослідження рівноваги довільної плоскої системи сил можна притримуватись наступної послідовності дій:

1. Вибрати об’єкт дослідження (балку, тіло або систему тіл), рівновага якого розглядається.
2. Зобразити активні сили та моменти пар активних сил, які задані за умовою задачі. Активні сили можуть бути задані як зосереджені сили або як розподілене навантаження, тобто як система сил прикладених у кожній точці певного відрізка або дуги. Розподілене навантаження заміняємо еквівалентною системою сил. В багатьох випадках розподілене навантаження зводиться до рівнодійної. У випадку, якщо розподілене навантаження прикладено на відрізку прямої, величина рівнодійної дорівнює площі відповідної фігури утвореної розподіленим навантаженням, а лінія дії рівнодійної проходить через центр ваги відповідної фігури.
3. Визначаємо тип в`язей, які обмежують положення об’єкта дослідження, та за *аксіомою про звільнення від в`язей* звільняємось від них, тобто заміняємо дію в`язей відповідними реакціями. При виконанні цього пункту потрібно ввести систему координат, напрям осей якої вибирають виходячи з умов зручного проектування системи сил. Наприклад, при досліджені рівноваги балок, одну з координатних осей зазвичай напрямляють вздовж балки.
4. Далі проводимо аналіз системи сил, прикладеної до об’єкта дослідження. Оскільки об’єкт дослідження знаходиться у рівновазі, то і система сил є зрівноваженою. З другого боку, система сил розташована у одній площині – площині балки. Умови рівноваги довільної плоскої зрівноваженої системи сил можна записати у вигляді трьох рівнянь. Тут також потрібно з’ясувати, чи є система сил статично визначена, тобто задачу визначення невідомих сил можна розв’язати методами теоретичної механіки.
5. Наступний крок – запис рівнянь рівноваги. Як відомо їх можна записати у трьох формах:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F_i}) = 0$$

або

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F_i}) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\vec{F_i}) = 0$$

або

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F_i}) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\vec{F_i}) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_C(\vec{F_i}) = 0.$$

У випадку використання другої форми рівнянь пряма *AB* не повинна бути перпендикулярна до осі Ox. У випадку використання третьої форми рівнянь точки *A*, *B*, *C* не повинні лежати на одній прямій. Не виконання вказаних вимог приведе до запису лінійно залежних рівнянь.

6. Далі потрібно розв’язати рівняння та визначити числові значення проекцій невідомих сил та моментів. Повне значення реакції в’язі визначається так $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$.

Для перевірки правильності визначення проекцій невідомих сил та моментів рекомендується підставити знайдені величини в рівняння моментів, складене відносно точки, яка не використовувалась в якості полюса. У вказаному рівнянні повинні бути усі визначені невідомі. Зазначимо, що підстановка визначених величин у вказане рівняння перетворює його на тотожність.

Комплект завдань

В аудиторії можуть розв’язуватись задачі 4.15, 4.26, 4.28, 4.30, 4.31 [4] або 2.1, 2.3, приклад 2.2 [3].

Приклад 4.1.

Визначити опорні реакції балки, зображеної на рис. 3.2, якщо *P*=10 кН, $M = 30$ кН·м, $q = 2$ кН/м, $\alpha = 60^{\circ}$, *AB*=3 м, *BC*=2 м, *CD*=2 м.

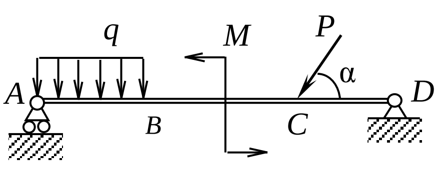


Рис. 4.1

Розв’язання. Для розв’язання задачі використаємо рекомендовану послідовність дій.

Виділяємо об'єкт дослідження – балку *AD* (рис. 4.1).

Вказуємо задані (активні) сили, які прикладені до балки. На балку діє зосереджена сила $\vec{P}$, яка прикладена в точці C, пара сил з моментом M та рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q. Розподілене навантаження заміняємо рівнодійною Q. У даній задачі величину сили Q визначають як площу заштрихованої фігури, а її лінія дії проходить через центр ваги цієї фігури. Таким чином, маємо: $Q = AB \cdot q = 3 \cdot 2 = 6$ кН (рис.4.2).

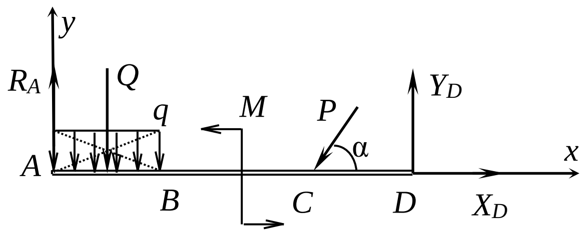


Рис.4.2.

Вводимо систему координат Axy, осі якої зв'язуємо з балкою AD (рис.4.2).

Визначаємо механічні в'язі, накладені на тіло. Для балки в'язями є рухомий шарнір у точці A та нерухомий шарнір у точці D. Застосовуючи, аксіому про звільнення від в'язей, подумки відкидаємо в'язі, замінивши їхню дію на тіло реакціями. Реакція рухомого шарніра $\vec{R}_A$ у точці A напрямлена перпендикулярно до опорної поверхні. Реакція нерухомого шарніра у точці D подається як сума двох взаємоперпендикулярних складових $\vec{R}_D = \vec{X}_D + \vec{Y}_D$, напрямлених вздовж координатних осей у бік їх додатніх значень (рис.4.2).

Проводимо аналіз системи сил, прикладених до балки. Система сил $\{\vec{P}, \vec{Q}, \vec{M}, \vec{R}_A, \vec{X}_D, \vec{Y}_D\}$ є плоскою системою сил. Оскільки балка зрівноважена, то і дана система сил теж зрівноважена і для неї можна скласти три рівняння рівноваги. Зазначимо, що кількість невідомих сил: $\vec{R}_A$, $\vec{X}_D$, $\vec{Y}_D$ не перевищує кількості рівняннь рівноваги, тобто дана система сил є статично визначеною.

Складемо аналітичні рівняння рівноваги плоскої системи сил: два рівняння проекцій сил на осі вибраної системи координат та одне рівняння моментів сил відносно вибраної точки (полюса). Перші два рівняння записують як суми проекцій усіх сил, прикладених до балки, на відповідні осі і прирівнюють нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = -P\cos\alpha + X_D = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = R_A - Q - P\sin\alpha + Y_D = 0.$$

Рівняння моментів сил складають так. Вибираємо точку (полюс), відносно якої будемо визначати моменти сил, наприклад, точку A. Далі визначаємо послідовно моменти усіх сил, прикладених до балки, користуючись робочою формулою:

$$M_A(\vec{F}) = \pm hF,$$

де h – плече сили F, знак “+” відповідає уявному повороту балки від дії сили F навколо обраного полюса A проти стрілки годинника, знак “–“ – за стрілкою годинника.

Для сили $\vec{R}_A$ маємо:

$$M_A(\vec{R}_A) = 0,$$

оскільки плече цієї сили відносно точки A дорівнює нулю.

Моменти інших сил записуємо так:

$$M_A(\vec{Q}) = -0{,}5\cdot AB\cdot Q, \qquad M_A(\vec{P}) = -AC\cdot \sin\alpha\cdot P,$$

$$M_A(\vec{Y}_D) = AD\cdot Y_D, \qquad M_A(\vec{X}_D) = 0.$$

Оскільки пара сил, яка прикладена до балки, еквівалентна моменту, і її дія може повернути балку проти стрілки годинника, відповідний момент записуємо у вигляді доданка M зі знаком “+”. Таким чином, рівняння моментів сил має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = -Q\cdot\frac{1}{2}AB + M - P\sin\alpha\cdot AC + Y_D\cdot AD = 0,$$

і відповідно, система рівнянь рівноваги балки AD

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = -P\cos\alpha + X_D = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = R_A - Q - P\sin\alpha + Y_D = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} M_{iA} = -Q\cdot\frac{1}{2}AB + M - P\sin\alpha\cdot AC + Y_D\cdot AD = 0. \end{cases}$$

Розв’язуємо отримані рівняння і обчислюємо невідомі величини

$$X_D = P\cos\alpha = 5\text{кН}; \qquad Y_D = \frac{1}{AD}\left(Q\cdot\frac{1}{2}AB - M + P\sin\alpha\cdot AC\right) = 3{,}19 \text{ кН}.$$

Підставляємо значення Y_D у друге рівняння

$$R_A = Q + P\sin\alpha - Y_D = 11{,}47 \text{ кН}.$$

Значення повної реакції у точці D дорівнює

$$R_D = \sqrt{X_D^2 + Y_D^2} = 5{,}93 \text{ кН}.$$

В якості перевірки запишемо рівняння моментів сил відносно уявної точки E, яка розташована на відстані 1 м по вертикалі вгору від точки B. Маємо:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iE} = -R_A \cdot AB + Q \cdot \frac{1}{2} AB + M - P\cos\alpha \cdot BE - P\sin\alpha \cdot BC +$$
$$+Y_D \cdot BD + X_D \cdot BD = 0 .$$

Нескладно впевнитись, що підстановка знайдених значень перетворює останній вираз на тотожність.

Приклад 4.2

Визначити опорні реакції балки (рис. 4.3), яка утримується заробкою в точці *A*. В точці *C* до балки прикріпляється невагома нитка, яка перекинута через нерухомий блок *D* і з'єднана з вантажем вагою $G = 2$ кН. До балки прикладається пара сил з моментом $M = 30$ кН·м та розподілене навантаження, максимальне значення якого $q_{max} = 2$ кН/м. Врахувати, що $\alpha = 60^\circ$, *AB*=2 м, *BC*=3 м.

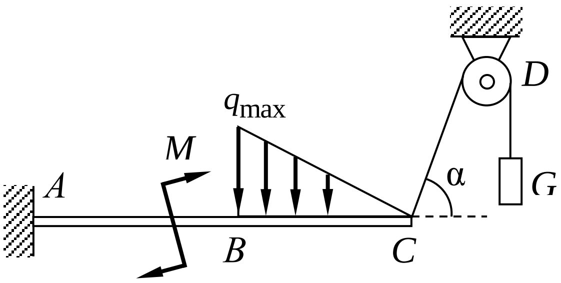
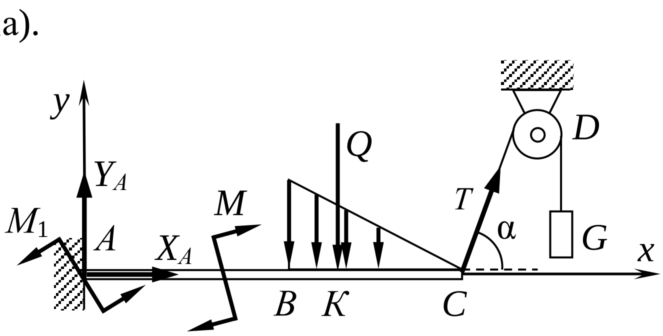


Рис. 4.3

Розв'язання. Розв'язання задачі проведемо за рекомендованою раніше методикою. Виділяємо об'єкт дослідження – балку *AC* (рис. 4.4). Вказуємо задані (активні) сили, які прикладені до балки. На балку діє пара сил з моментом *M* та розподілене навантаження інтенсивність якого утворює епюру у вигляді трикутника з максимальним значенням $q_{max} = 2$ кН/м. Розподілене навантаження заміняємо рівнодійною *Q*. Величину сили *Q* визначають як площу епюри (заштрихованої фігури), а її лінія дії проходить через центр ваги цієї фігури – в даному випадку через точку перетину медіан. Таким чином, маємо: $Q = 0{,}5 \cdot BC \cdot q_{max} = 3$ кН, $BK = 1$ м (рис.4.4,а).

Рис. 4.4,а



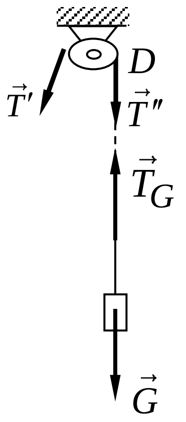


Рис.4.4, б

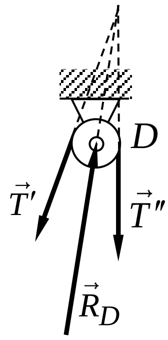


Рис.4.4, в

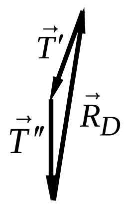


Рис.4.4, г

Вводимо систему координат Axy, осі якої зв'язуємо з балкою AC (рис.4.4,а).

Визначаємо механічні в'язі, накладені на балку. Для балки в'язями є заробка у точці A та нитка у точці C. Застосовуючи, аксіому про звільнення від в'язей, відкидаємо в'язі, замінивши їхню дію на тіло реакціями. Реакція заробки зводиться до сили $\vec{R}_A$ та пари сил з моментом $\vec{M}_1$. Сила $\vec{R}_A$ подається як сума двох взаємно перпендикулярних складових $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$, напрямлених вздовж координатних осей у бік їх додатніх значень (рис.4.4,а). Реакція гнучкої в'язі (нитки) – сила натягу $\vec{T}$, напрямлена вздовж нитки від об'єкта дослідження. Сила натягу $\vec{T}$ буде дорівнювати у даному випадку вазі вантажа G.

Дійсно, враховуючи невагомість та нерозтяжність нитки, до блока D буде прикладатись сила натягу $\vec{T}'$, яка дорівнює $\vec{T}' = -\vec{T}$ (рис.4.4,б) та сила натягу $\vec{T}''$. Застосовуючи теорему про три сили до системи сил $\vec{T}'$, $\vec{T}''$ та реакції шарніра $\vec{R}_D$ блока D (рис.4.4, в), нескладно прийти до висновку, що система сил $\vec{T}'$, $\vec{T}''$ та $\vec{R}_D$ є збіжною. З графічної умови рівноваги (рис.4.4, г) цієї системи сил отримаємо $\left|\vec{T}'\right| = \left|\vec{T}''\right|$. За третім законом Ньютона, сила натягу $\vec{T}''$ буде рівна і протилежна до сили натягу $\vec{T}_G$, яка прикладається до частини нитки з вантажем G (рис.4.4, б). Оскільки нитка з вантажем зрівноважені двома силами, то за аксіомою про дві сили $\vec{T}_G = -\vec{G}$. Таким чином, приходимо до висновку, що $\left|\vec{T}\right| = \left|\vec{G}\right|$.

Проводимо аналіз системи сил, прикладених до балки. Система сил $\{\vec{Q}, \vec{M}, \vec{T}, \vec{M}_1, \vec{X}_A, \vec{Y}_A\}$ є плоскою системою сил. Оскільки балка

зрівноважена, то і дана система сил теж зрівноважена і для неї можна скласти три рівняння рівноваги

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0.$$

Зазначимо, що кількість невідомих $\vec{M}_1, \vec{X}_A, \vec{Y}_A$ не перевищує кількості рівняннь рівноваги, тобто дана система сил є статично визначеною.

Система рівнянь рівноваги балки *AC* має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = X_A - T\cos\alpha = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = Y_A - Q + T\sin\alpha = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = M_1 - M - Q\cdot(AB + \frac{1}{3}\cdot BC) + T\sin\alpha\cdot AC = 0.$$

Розв'язуємо отримані рівняння і обчислюємо невідомі величини

$$X_A = T\cos\alpha = G\cos\alpha = 1\text{кН}; \qquad Y_A = Q - T\sin\alpha = Q - G\sin\alpha = 1{,}27\ \text{кН};$$

$$M_1 = M + Q\cdot(AB + \frac{1}{3}\cdot BC) - T\sin\alpha\cdot AC = 30{,}34\ \text{кН}.$$

Значення повної реакції у точці *A* дорівнює

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 1{,}62\ кН.$$

В якості перевірки рекомендується підставити знайдені невідомі у рівняння моментів сил відносно уявної точки *E*, розташованої на відстані 1 м вгору від точки *C*.

$$\sum M_{iE} = M_1 - M - Y_A\cdot AC + X_A\cdot EC + Q\cdot KC + T\cos\alpha\cdot EC = 0.$$

Контрольні запитання

1. Скільки існує форм запису рівнянь рівноваги плоскої системи сил?
2. Дайте означення момента сили відносно точки.
3. Як визначається плече сили відносно точки?
4. В якому випадку момент сили відносно точки дорівнює нулю?
5. Яка аксіома використовується при визначенні реакцій в'язей?
6. Як визначається реакція рухомого та нерухомого шарніра?
7. Як визначається реакція заробки?
8. Яким чином розподілене навантаження приводиться до рівнодійної?
9. Чим активні сили відрізняються від реакцій в'язей?

10 Яка система сил називається статично визначеною?

Завдання на СРС

Для засвоєння матеріалу рекомендується розв'язати задачі 4.7, 4.8, 4.14, 4.17, 4.25, 4.29 [4] або 2.2, 2.4, 2.5 [3].

2.5. <u>**Практичне заняття 5.**</u> Рівновага складеної системи тіл (тема 1.2).

Мета заняття

Метою заняття є засвоєння методів розв'язання задач на дослідження рівноваги складених балок.

Методичні прийоми

При розв'язуванні задач, в яких досліджується рівновага системи твердих тіл (складені балки), недостатньо розглядати рівновагу всієї конструкції в цілому, оскільки для неї можна скласти лише три рівняння рівноваги у випадку дії плоскої системи сил. При цьому кількість невідомих зовнішніх сил може перевищувати кількість вказаних рівнянь.

Однак, це не є підставою вважати таку задачу статично невизначеною, оскільки за допомогою метода перерізів можна розділити конструкцію на окремі частини - тверді тіла і скласти рівняння рівноваги для кожного тіла окремо. При цьому до невідомих додаються внутрішні сили. Якщо переріз зроблено через внутрішній шарнір, то, у випадку дослідження плоскої системи сил, до невідомих додаються дві складові реакції. Кількість додаткових рівнянь для відокремленої частини дорівнює трьом. Таким чином, статичну невизначеність можна зменшити на одиницю.

Задача буде статистично визначеною, якщо кількість рівнянь рівноваги для всієї системи і окремих її частин буде не менша за кількість усіх невідомих.

Комплект завдань

В аудиторії рекомендується розглянути задачі 4.33, 4.34, 4.41 [4], 2.7, 2.8 [3].

Приклад 5.1

Застосовуючи аналітичні умови рівноваги визначити опорні реакції конструкції, що складається з двох тіл (рис. 5.1). До конструкції прикладено рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q=2 Н/м, пара сил з моментом $M = 4$ Н·м. У точці B до конструкції за допомогою невагомої нитки, перекинутої через блок, прикріпляється вантаж вагою G=5 Н (тертям у блоці знехтувати). Визначити опорні реакції R_A, R_E і силу тиску в точці C балок одна на одну, якщо AC = 2 м, BC = 2 м, CD = 3 м, DE=1 м, α=45°, β=30°.

Розв'язання. Для розв'язання задачі потрібно дотримуватися наступної послідовності дій.

1 . Розглянемо рівновагу усієї конструкції.

2. Проведемо аналіз активних сил, прикладених до конструкції: до неї прикладається пара сил з моментом M, та рівномірно розподілене вздовж ділянки BD навантаження (система паралельних сил) інтенсивністю q= =2 Н/м.

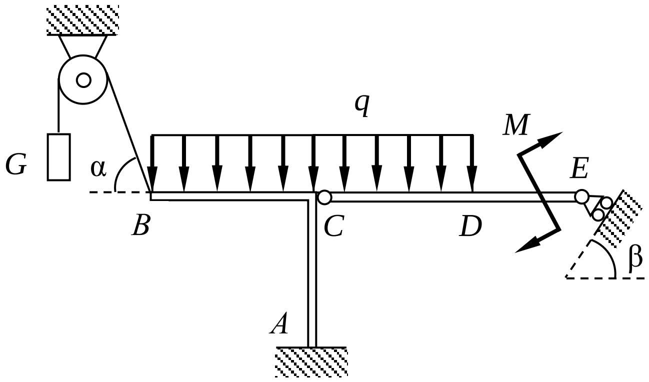


Рис. 5.1.

Замінимо це навантаження статично еквівалентною зосередженою силою $\vec{Q}$. Величина цієї сили дорівнює $Q = BD \cdot q = 5 \cdot 2 = 10$ Н (рис.5.2), а її лінія дії проходить через центр ваги фігури утвореної розподіленим навантаженням, у нашому випадку – точку перетину діагоналей прямокутника.

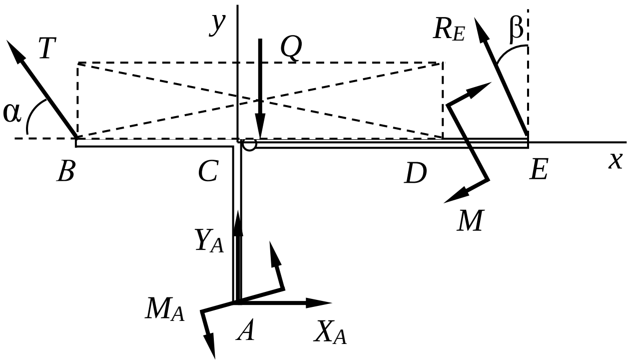


Рис. 5.2.

3. В’язями для конструкції є жорстке защемлення у точці A, рухома опора у точці E та невагома нерозтяжна нитка у точці B.

Для зручності введемо систему координат Cxy (рис.5.2).

За аксіомою про звільнення від вязей, заміняємо їх дію відповідними реакціями: опору A – реакцією $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$ та парою сил з невідомим моментом $\vec{M}_A$; опору E – реакцією $\vec{R}_E$, напрямленою перпендикулярно до опорної площини; невагому нитку – силою натягу $\vec{T}$. Оскільки блок, через

який перекинуто нитку, знаходиться у рівновазі і тертя в осі його повороту відсутнє, сила натягу нитки $\vec{T}$ за величиною дорівнює вазі вантажа G.

4. Таким чином, конструкція знаходиться у рівновазі під дією довільної плоскої системи сил { $\vec{Q}$, $\vec{M}$ $\vec{R}_E$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{M}_A$}. Аналітичні умови рівноваги такої системи сил складаються з наступних трьох рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = X_A - R_E \sin\beta - T\cos\alpha = 0; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = Y_A + R_E \cos\beta - Q + T\sin\alpha = 0; \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} M_{iC} = -Q\cdot\left(\frac{BD}{2} - BC\right) - M + M_A + \\ + X_A \cdot AC + R_E \cdot CE\cos\beta - T\sin\alpha\cdot BC = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

Очевидно, що ці рівняння містять чотири невідомі. Для розв’язання задачі потрібно мати додаткові рівняння. Їх можна отримати, якщо скористатись методом перерізів і розглянути рівновагу однієї з частин конструкції, наприклад CE.

Проводимо переріз через точку C і частину AB вважаємо в’яззю для CE. Оскільки у точці C циліндричний шарнір, то дія відкинутої частини подається так $\vec{R}_C = \vec{X}_C + \vec{Y}_C$ (рис.5.3).

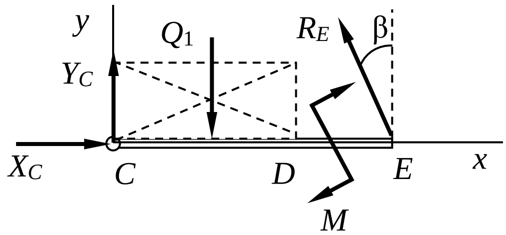


Рис. 5.3.

Для складання рівнянь рівноваги балки CE визначимо рівнодійну $\vec{Q}_1$ рівномірно розподіленого навантаження на ділянці CD. Її величина дорівнює $Q_1 = CD\cdot q = 3\cdot 2 = 6$ Н, а лінія дії проходить через центр ваги прямокутника, утвореного розподіленим навантаженням на цій ділянці (рис.5.3).

Рівняння рівноваги балки CE запишемо у проекціях на осі Cxy, за центр моментів оберемо точку C:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = X_C - R_E \sin\beta = 0; \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = Y_C + R_E \cos\beta - Q_1 = 0; \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iC} = -Q_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot CD - M + R_E \cdot CE\cos\beta = 0\,. \qquad (6)$$

Ці рівняння утримують додаткові невідомі $\vec{X}_C$ та $\vec{Y}_C$, які з'явилися внаслідок використання методу перерізів, але загальна кількість невідомих (шість) дорівнює кількості рівнянь системи (1) – (6). Таким чином, задача є статично визначеною.

5. Розвязуємо систему рівняннь рівноваги (1) – (6) і визначаємо невідомі:

$$R_E = \frac{1}{CE\cos\beta}(Q_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot CD + M) = 3{,}75 \text{ Н};$$

$$X_C = R_E \sin\beta = 1{,}88 \text{ Н}; \qquad Y_C = Q_1 - R_E\cos\beta = 2{,}75 \text{ Н};$$

$$X_A = R_E\sin\beta + T\cos\alpha = 5{,}41 \text{ Н}; \qquad Y_A = Q - R_E\cos\beta - T\sin\alpha = 3{,}21 \text{ Н};$$

$$M_A = T \cdot BC \cdot \sin\alpha - X_A \cdot AC - R_E \cdot CE \cdot \cos\beta + M + Q(\frac{BD}{2} - BC) = -7{,}75 \text{ Н·м}.$$

Реакція опори у точці A дорівнює $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 6{,}29$ Н, M_A= =–7,75 Н·м, тиск у внутрішньому шарнірі: $R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = 3{,}32$ Н.

Зауваження. Дану задачу можна розв'язати відразу роблячи переріз через шарнір C і розглянувши окремо рівновагу частини ACB, а потім CE. Системи сил, прикладених до частини ACB та CE зображені, відповідно, на рис.5.3 та рис.5.4.

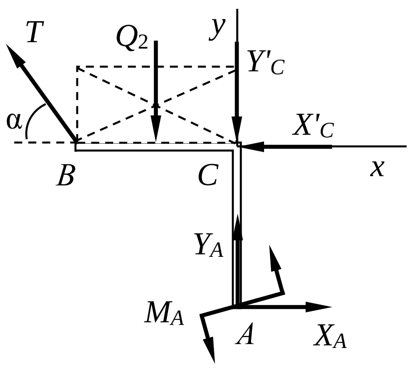


Рис. 5.4.

Треба зазначити, що реакція $\vec{R}'_C = \vec{X}'_C + \vec{Y}'_C$ у шарнірі C, яка прикладається до частини ACB при відкинутій частині CE, на підставі третього закону Ньютона, задовольняє умові:

$$\vec{R}'_C = -\vec{R}_C, \text{ звідки } \vec{X}'_C = -\vec{X}_C\,,\ \vec{Y}'_C = -\vec{Y}_C\,.$$

Враховуючи ці співвідношення, рівняння рівноваги частини ACB запишуться так:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = X_A - X_C - T\cos\alpha = 0; \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = Y_A - Y_C - Q_2 + T\sin\alpha = 0; \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iC} = Q_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BC + M_A + X_A \cdot AC - T\sin\alpha \cdot BC = 0\,, \tag{9}$$

де Q_2 – сила, яка еквівалентна розподіленому на ділянці BC навантаженню. Величина цієї сили: $Q_2 = BC{\cdot}q = 2{\cdot}2 = 4$ Н .

Система рівнянь (4) - (9) є замкненою відносно шуканих невідомих $\{\vec{X}_A,\ \vec{Y}_A,\ \vec{M}_A,\ \vec{X}_C,\ \vec{Y}_C,\ \vec{R}_E\}$, тобто їх можна визначити не використовуючи додаткові співвідношення. Спочатку визначаються невідомі X_C , Y_C , R_E , а потім з рівнянь (7) - (9) маємо реакції жорсткого защемлення:

$$X_A = X_C + T\cos\alpha = 5{,}41 \text{ Н};$$

$$Y_A = Y_C + Q_2 - T\sin\alpha = 3{,}21 \text{ Н};$$

$$M_A = -Q_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BC - X_A \cdot AC + T\sin\alpha \cdot BC = -7{,}75 \text{ Н·м},$$

що збігається з попередніми результатами.

Контрольні запитання

1. Яка система сил є статично визначеною?
2. Який метод дозволяє в деяких випадках зробити задачу статично визначеною?
3. В яких випадках метод, вказаний в п.2, не змінює статичну невизначеність задачі?
4. Скільки рівнянь рівноваги можна скласти для плоскої системи сил, прикладеної до конструкції з трьох частин?
5. Плоска система сил прикладена до конструкції з двох частин, з’єднаних шарніром. Одна частина утримується жорсткою заробкою, а друга – нерухомим шарніром. Чи буде задача визначення невідомих реакцій статично визначена?

Завдання на СРС

Рекомендується розв’язати задачі 4.32, 4.38 [4]; 2.6, 2.9 [3].

2.6. <u>**Практичне заняття 6.**</u> Рівновага довільної плоскої системи сил з урахуванням сил тертя (тема 1.2).

Мета заняття

Метою цього заняття є засвоєння методів розв’язання задач статики з урахуванням сил тертя спокою та визначення умов рівноваги котка з урахуванням тертя кочення.

Методичні прийоми

При розв’язанні задач на вказану тему, потрібно нагадати (провести опитування або експрес-контроль) фізичний зміст сили тертя спокою, сили тертя ковзання, поняття конуса тертя, тертя кочення та моменту тертя кочення.

В задачах на вказану тему можуть досліджуватись умови порушення стану рівноваги механічної системи, викликані досягненням силою тертя спокою її граничного значення. Це означає, що рівняння рівноваги механічної системи потрібно доповнити умовою (умовами), що накладається на величину сили тертя спокою. Ця умова записується у вигляді нерівності

$$F_{\text{тр}} < (F_{\text{тр}})_{\max} = f_0 \cdot N,$$

де f_0 - коефіцієнт тертя спокою, безвимірна величина; N - нормальна складова реакції шорсткої поверхні до якої дотикається тіло.

В задачах на дослідження рівноваги котків, стан рівноваги досягається при умові виконання двох умов: умови при якій відсутнє проковзування котка відносно опорної поверхні

$$F_{\text{тр}} < (F_{\text{тр}})_{\max} = f_0 \cdot N,$$

де $F_{\text{ðð}}$ - величина сили тертя зчеплення, та умови відсутності кочення

$$M_{\text{тр.к}} \le M_{\text{тр.к}\max} = \delta \cdot N .$$

Тут δ - коефіцієнт тертя кочення; $M_{\text{тр.к}}$, $M_{\text{тр.к}\max}$ - момент тертя кочення та його максимальне значення.

Комплект завдань

В аудиторіїї рекомендується розв’язати задачі [4]: 5.11, 5,26, 5.28; [3]: 1.23, 1.28.

Приклад 6.1.

Механічна схема конструкції (рис.6.1,а) включає два вантажі вагою P_1 = 4 кН і P_2 = 6 кН, які з’єднані тросом і розташовані на похилій

шорсткій поверхні. Визначити стан системи двох тіл, якщо α = 30^0, а коефіцієнти тертя спокою тіл f_1 = 0,4, f_2 = 0,8.

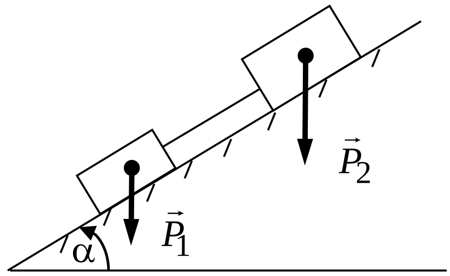


Рис. 6.1,а

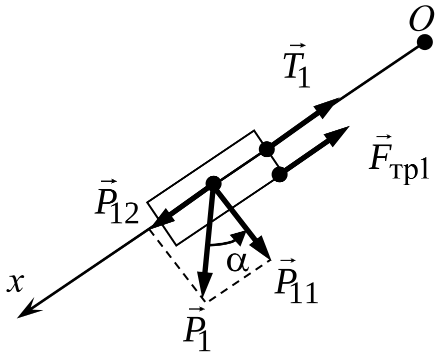


Рис. 6.1,б

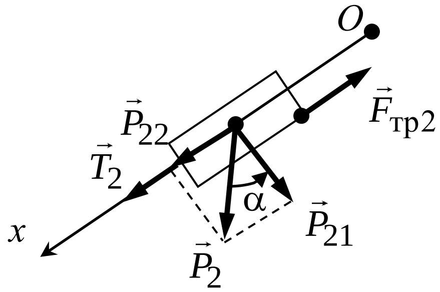


Рис. 6.1, в

Розв'язання. Розглянемо рівновагу вантажу P_1 в напрямку осі Ox (рис.6.1,б), прийнявши $F_{тр1} = (F_{тр1})_{max}$:

$$P_{12} - T_1 - F_{тр1} = 0, \qquad (6.1)$$

де $P_{12} = P_1 \sin 30^0$; T_1 - сила натягу троса;

$F_{тр1} = (F_{тр1})_{max} = f_1 \cdot P_{11} = f_1 \cdot P_1 \cos 30^0$ - сила тертя.

З рівняння (6.1) отримаємо

$T_1 = P_{12} - F_{тр1} = P_1 \sin 30^0 - f_1 P_1 \cos 30^0 = 4 \cdot 0,5 - 0,4 \cdot 4 \cdot 0,866 = 0,614$ кН.

За величиною $T_1 > 0$, отже при відсутності троса вантаж P_1 не буде знаходитися у стані рівноваги, оскільки при куті $\alpha = 30^0$ умова рівновагі тіла $P_{12} - (F_{тр1})_{max} = 0$ не виконується.

Вантаж P_1 з'єднано тросом з вантажем P_2, тому його стан спокою можна забезпечити за допомогою вантажу P_2, якщо для сили тертя $\vec{F}_{тр2}$ останнього буде виконуватись нерівність

$$0 < F_{тр2} \le (F_{тр2})_{max} = f_2 P_2 \cos 30^0 = 0,8 \cdot 6 \cdot 0,866 = 4,157 \text{ кН}.$$

Величину сили тертя $\vec{F}_{\text{тр}2}$ визначимо, якщо розв'яжемо рівняння рівноваги тіла P_2 у проекціях на вісь Ox (рис.6.1,в):

$$F_{\text{тр}2} = T_2 + P_{22}, \qquad (6.2)$$

де $T_2 = T_1$; $P_{22} = P_2 \sin 30^0$.

З (6.2) буде: $F_{\text{тр}2} = T_1 + P_2 \sin 30^0 = 0{,}614 + 6 \cdot 0{,}5 = 3{,}614$ (кН). Отже для заданих механічних і геометричних параметрів систем двох тіл отримано, що сила тертя $\vec{F}_{\text{тр}2}$ вантажу P_2 задовольняє умові його рівноваги за наявності нерівної нулю сили натягу троса від вантажу P_1. Її величина є достатньою для забезпечення особистої рівноваги, а також утримання у спокої і тіла P_1, тобто рівноваги системи двох тіл в цілому.

З рівнянь (6.1), (6.2) можна визначити кут α, при якому матиме стан граничної рівноваги системи вантажів:

$$T_2 + P_{22} = (F_{\text{тр}2})_{\max}$$

або
$$P_1 \sin\alpha - f_1 \cdot P_1 \cos\alpha + P_2 \sin\alpha = f_2 \cdot P_2 \cos\alpha,$$

або
$$\alpha = arctg \frac{f_1 \cdot P_1 + f_2 \cdot P_2}{P_1 + P_2}. \qquad (6.3)$$

Формулу (6.3) використовують на практиці при побудові розглянутої на рис.6.1,а механічної конструкції: визначенні геометричних і механічних параметрів опорної поверхні, вантажів та ін.

Приклад 6.2.

Визначити значення кута α (рис.6.2), при якому циліндр вагою P і радіусом R = 5 см знаходиться на похилій шорсткій площині у граничній рівновазі при коченні, якщо $f_0 = 0{,}1$; а $\delta = 0{,}05$ см.

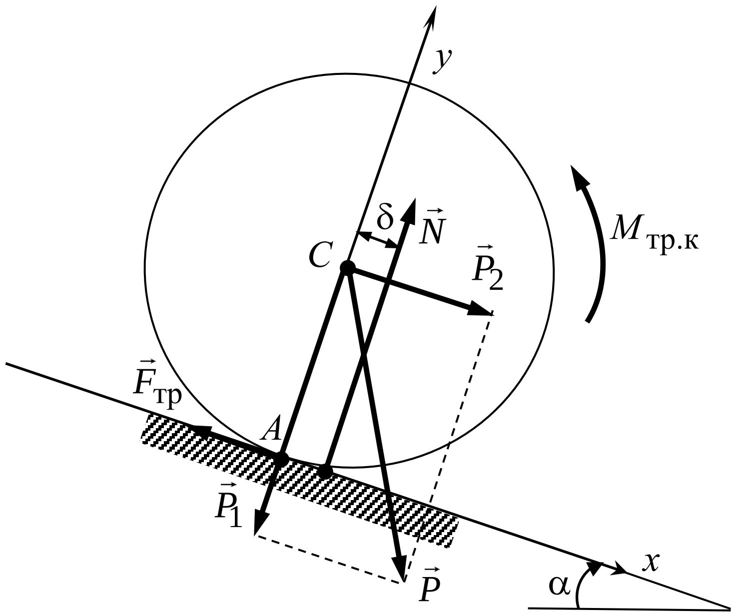


Рис.6.2

Розв’язання. Складемо рівняння рівноваги циліндра:

$$\sum F_{kx} = P_2 - F_{\text{тр}} = 0, \qquad \sum F_{ky} = N - P_1 = 0,$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = -R \cdot P_2 + M_{\text{тр.к}} = 0 \qquad (6.4)$$

де $P_1 = P\cos\alpha$; $P_2 = P\sin\alpha$; $\vec{N}$ - нормальна складова реакції площини; $M_{\text{тр.к}}$ - момент тертя кочення циліндра. При рівновазі циліндра буде виконуватись $M_{\text{тр.к}} \le M_{\text{тр.к max}} = \delta \cdot N$.

З другого рівняння системи (6.4) отримаємо $N = P_1 = P\cos\alpha$. Тоді третє рівняння в умовах граничної рівноваги набуде вигляду

$$-R \cdot P\sin\alpha + \delta \cdot P\cos\alpha = 0,$$

звідки

$$tg\alpha = \frac{\delta}{R} = \frac{0{,}05}{5} = 0{,}01,$$

отже, $\alpha = arctg\,0{,}01 = 0^0 35'$.

З першого рівняння маємо $F_{\text{тр}} = P_2 = P\sin\alpha$. Для зображеної на рис. 6.2 механічної схеми максимальна величина сили тертя спокою

$$\left(F_{\text{тр}}\right)_{\max} = f_0 \cdot N = f_0 \cdot P\cos\alpha = \left(f_0 / tg\alpha\right) \cdot P\sin\alpha = 10P\sin\alpha.$$

Отже, враховуючи, що сила тертя в умові граничної рівноваги циліндра при коченні (коли $\alpha = 0^0 35'$) задовольняє нерівності $F_{\text{тр}} < \left(F_{\text{тр}}\right)_{\max}$, по площині циліндр ковзати не буде.

Приклад 6.3.[10]

Кран-балка 2, яка закріплена на циліндричній втулці, може переміщуватись вздовж вертикальної круглої колони 1 діаметром $d = 0{,}2$ м. Висота втулки $DE = L = 0{,}5$ м. Нехтуючи вагою кран-балки, визначити мінімальну відстань s від вертикальної осьової лінії колони OO_1 до вантажа *A*, при якій кран-балка 2 залишається в рівновазі відносно колони. Прийняти вагу вантажа рівною P, коефіцієнт тертя f між колоною та втулкою дорівнює 0,1 (рис.6.3,а).

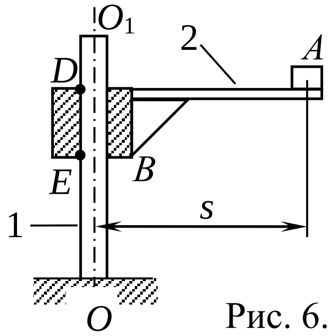


Рис. 6.3, а

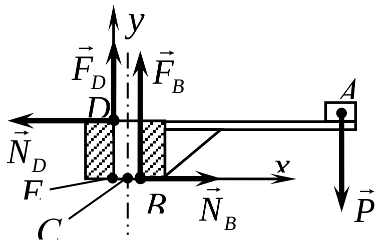


Рис. 6.3, б

Розв’язання. В якості об’єкта рівноваги обираємо кран-балку 2 разом з вантажем *A* вагою *P* (рис.6.3,б). Рух кран-балки обмежено однією в’яззю – колоною. Реакція колони подається силами, які діють на втулку в точках *B* та *D*. Оскільки тіла шорсткі, то кожна реакція розкладається на дотичну складову до поверні колони та нормальну:

$$\vec{R}_B = \vec{R}_{B\tau} + \vec{R}_{Bn} = \vec{F}_{B\text{тр}} + \vec{N}_B, \qquad \vec{R}_D = \vec{R}_{D\tau} + \vec{R}_{Dn} = \vec{F}_{D\text{тр}} + \vec{N}_D.$$

Дотичні складові реакцій є сили тертя і напрямлені вгору, протилежно до можливого руху кран-балки під дією сили ваги.

Таким чином, до кран-балки прикладається довільна плоска зрівноважена система сил. Умови рівноваги такої системи сил подаються трьома рівняннями. В якості системи координат оберемо осі Exy.

Тоді з першого рівняння

$$\sum X_i = N_B - N_D = 0,$$

знаходимо, що $N_B = N_D$, тобто нормальні складові реакцій утворюють пару сил. Враховуючи, що $F_{\text{тр}} = fN$, отримаємо: $F_{B\text{тр}} = fN_B = fN_D = F_{D\text{тр}}$. Величину сил тертя визначимо з другого рівняння проекцій сил на вісь Ey:

$$\sum Y_i = F_B + F_D - P = 0.$$

Знаходимо $F_B = F_D = 0{,}5P$.

Третє рівняння умов рівноваги, - рівняння моментів сил, дозволяє визначити величину нормальних складових реакцій:

$$\sum M_C = L \cdot N_D + r \cdot F_{B\text{тр}} - r \cdot F_{D\text{тр}} - (s+r) \cdot P = 0, \; CB = CE = d/2 = r.$$

Приймаючи до уваги, що $F_{B\text{тр}} = F_{D\text{тр}}$, отримаємо

$$N_D = N_B = (s+r) \cdot P/L.$$

Як відомо, тіло під дією сили тертя знаходиться в стані спокою, якщо величина цієї сили не перевищує її граничне значення, тобто виконується умова

$$F_{B,D\text{тр}} \le \left(F_{\text{тр}}\right)_{\max} = f \cdot N_{B,D}.$$

Після підстановки в наведену нерівність виразів для сил, знайдемо

$$0{,}5P \le f \cdot (s+r) \cdot P/L,$$

звідки

$$s \ge 0{,}5L/f - r.$$

Приклад 6.4.[10]

На рис.6.4 зображена кінематична схема механизму подавання електродного дроту в зону зварювання. Барабан 1 охоплюється дротом 2 на дузі 90°, ролик 3 притискається до барабану силою $F = 10$ Н. Ролик 4 до барабана не притискається. Коефіцієнт тертя дроту по барабану $f = 0{,}1$. Визначити найбільшу силу натягу дроту між барабаном 1 та котушкою 5.

Розв'язання. Розглянемо барабан 1, на який в точці A діє сила тертя спокою $\vec{F}_A$, викликана шорсткістю поверхонь барабана 1 та ролика 3, яка залежить від сили $\vec{F}$ нормального тиску (рис.6.4, б). Сила $\vec{F}_A$ забезпечує проштовхування електродного дроту під час обертання барабана 1

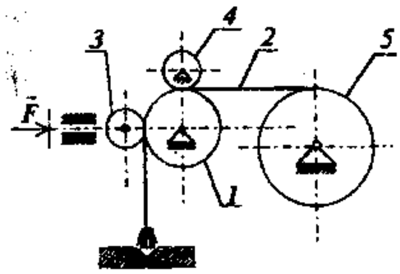


Рис.6.4, а

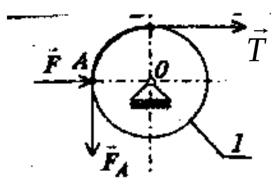


Рис.6.4, б

В точці B на барабан 1 діє натяг $\vec{T}$ дроту, який потрібно визначити. Між силами $\vec{F}_A$ и $\vec{T}$ існує залежність, що визначається формулою Ейлера:

$$T = F_A \cdot e^{f\varphi},$$

де f - коефіцієнт тертя, а φ - кут охоплення дротом барабана, визначений в радіанах. В нашому випадку $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, сила $F_A = f \cdot F$, тому

$$T = F_A e^{f\varphi} = F_A e^{0{,}1\frac{\pi}{2}} = 1{,}17 \text{ Н}.$$

Завдання на СРС

Для самостійної роботи рекомендується розв'язати задачі [4]: 5.7, 5.8, 5.27, 5.30; [3]: 1.26, 1.29.

Контрольні запитання

1. В якому випадку виникає сила тертя спокою та чому вона дорівнює?
2. Яке граничне значення сили тертя спокою?
3. Який геометричний зміст має коефіцієнт тертя спокою?
4. Що таке конус тертя?
5. Що є причиною виникнення тертя кочення?
6. Яка умова відсутності проковзування котка при коченні по шорсткій поверхні?
7. Чому дорівнює момент пари сил тертя кочення?
8. Який геометричний зміст коефіцієнта тертя кочення?
9. Яка умова нерухомості котка на шорсткій поверхні?
10. Які значення набуває сила тертя при коченні котка з проковзуванням?

2.7. **Практичне заняття 7.** Рівновага довільної просторової системи сил. Рівновага валів (тема 1.2).

Мета заняття

Метою цього заняття є засвоєння методики складання рівнянь рівноваги просторової системи сил прикладеної до валу, набуття умінь визначення моментів сил відносно координатних осей.

Методичні прийоми

При розв'язуванні задач на дослідження рівноваги довільної просторової системи сил рекомендується використовувати наступну методику:

1. Вибрати об'єкт дослідження (вал, пластину, тіло), рівновага якого досліджується.
2. Ввести просторову систему координат, напрям осей якої вибирають виходячи з умов зручного проектування системи сил.
3. Зобразити активні сили та моменти пар активних сил, які задані за умовою задачі.
4. Визначити тип в`язей, які обмежують положення об'єкта дослідження, та за *аксіомою про звільнення від в`язей* звільнитись від них, тобто замінити дію в`язей відповідними реакціями.
5. Далі провести аналіз системи сил, прикладеної до об'єкта дослідження. Оскільки об'єкт дослідження знаходиться у рівновазі, то і система сил є зрівноваженою. З другого боку, система сил розташована у просторі. Умови рівноваги довільної просторової зрівноваженої системи сил можна записати у вигляді шести рівнянь. Тут також потрібно з'ясувати, чи є система сил статично визначена, тобто задачу визначення невідомих сил можна розв'язати методами теоретичної механіки.

5. Наступний крок – запис рівнянь рівноваги. Як відомо їх можна записати у формі:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_x(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_y(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i) = 0.$$

Зазначимо, що при складанні рівнянь моментів рекомендується використовувати правило визначення момента сили відносно осі. У цьому випадку потрібно зобразити задану конструкцію у проекції на площину, перпендикулярну до осі відносно якої визначаються моменти сил. Потім спроектувати задану систему сил на вказану площину і визначити моменти спроектованих сил відносно точки перетину осі та площини. Зазначену процедуру потрібно провести три рази.

6. Далі потрібно розв'язати складені рівняння та визначити числові

значення проекцій невідомих сил та моментів. Повне значення реакцій в'язей визначається так $R_i = \sqrt{R_{ix}^2 + R_{iy}^2 + R_{iz}^2}$.

Комплект завдань

Для роботи в аудиторії пропонується розв'язати задачі з групи [4]: 8.16, 8.31, 8.36; [3]: приклад 4.2, задачі 4.2, 4.8.

Приклад 7.1.

Горизонтальний вал трансмісії (рис. 7.1,а) несе шків B пасової передачі і може обертатися у підшипниках A і C. Радіус шківа дорівнює $r_B = 0,2$ м. До валу прикладений момент пари сил M величиною 20 Нм. Натяги гілок паса на шківі $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$, причому, $T_1 = 200$Н. Натяг гілки паса $\vec{T}_2$ утворює кут $\alpha = 30^\circ$ з вертикаллю. Розміри вала дорівнюють: $AB = 1$м, $BC = 0,5$м. Система перебуває у рівновазі. Визначити натяг T_2 та реакції підшипників A і C.

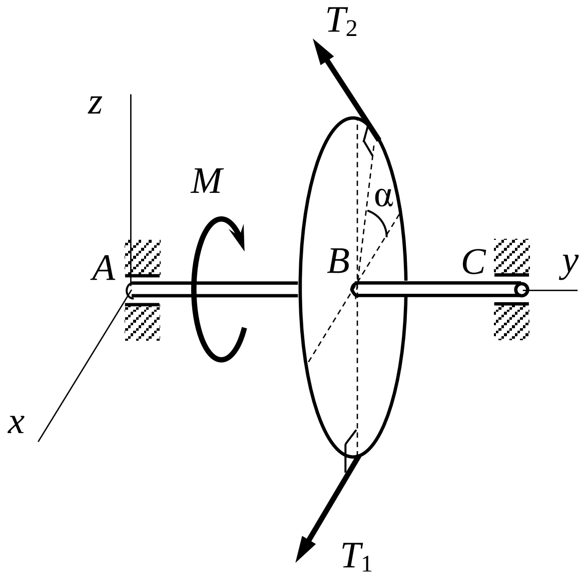


Рис.7.1, а.

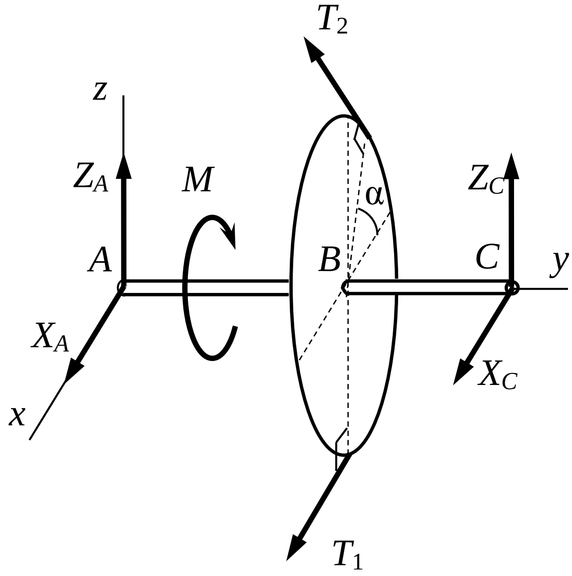


Рис.7.1, б.

Розв'язування. Розглянемо рівновагу вала AC із шківом B. Звільнимо вал від в'язей, замінивши їх відповідними реакціями. У підшипниках реакції розташовані у площинах, які перпендикулярна до осі вала AC. Таким чином, реакції підшипників A і C розташовані, відповідно, у площині xAz та у площині, що паралельна до неї і проходить через точку C. Невідомий вектор кожної реакції підшипників у площині визначається двома проекціями на осі Ax і Az, як це показано на рис. 7.1,б. Таким чином, маємо довільну просторову зрівноважену систему сил.

Аналітичні умови рівноваги отриманої системи сил складаються з трьох рівнянь проекцій сил на координатні осі:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = X_A + X_C + T_1 + T_2 \sin\alpha = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = Z_A + Z_C + T_2 \cos\alpha = 0,$$

та трьох рівнянь моментів сил відносно координатних осей. Для складання рівнянь моментів сил відносно координатних осей, скористаємось робочим правилом визначення моменту сили відносно осі:

а) провести площину, перпендикулярну до цієї осі;

б) спроектувати силу на проведену площину;

в) розглядаючи цю проекцію як вектор, визначити її момент відносно точки перетину осі з проведеною площиною.

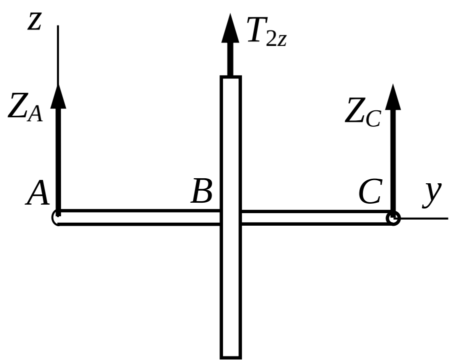


Рис.7.2,а

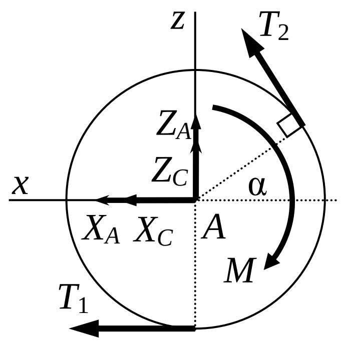


Рис.7.2,б

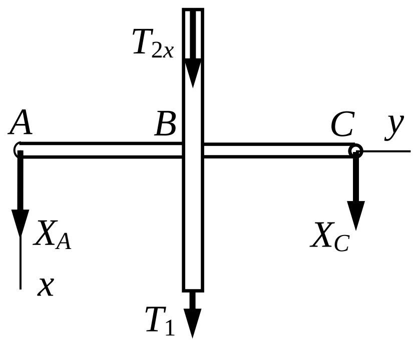


Рис.7.2,в

Визначаючи моменти системи сил відносно осі Ax, спроектуємо задану систему сил на площину Ayz (рис.7.2,а), та знайдемо моменти отриманих проекцій відносно точки A:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = Z_C \cdot AC + T_2 \cos\alpha \cdot AB = 0.$$

Для визначення моментів системи сил відносно осі Ay спроектуємо цю систему сил на площину Axz (рис.7.2,б), при цьому вважаємо, що вісь Ay напрямлена в бік читача. Отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iy} = -T_1 \cdot r_B + T_2 \cdot r_B - M = 0.$$

На рис. 7.2,в показано проекції системи сил на площину Axy, вісь Az спрямована на читача. Рівняння моментів сил відносно осі Az має вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iz} = -X_C \cdot AC - T_1 \cdot AB - T_2 \cdot \sin\alpha \cdot AB = 0 .$$

Як бачимо з отриманої системи рівнянь рівноваги, друге рівняння відсутнє, оскільки серед сил, що прикладені до тіла, немає таких, які б могли бути спроектовані на вісь y (тобто всі сили лежать у площинах, що перпендикулярні осі y). Проте, дана система сил є статично визначеною, оскільки число невідомих величин $\left\{\vec{T}_2, \vec{X}_A, \vec{X}_C, \vec{Z}_A, \vec{Z}_C\right\}$ дорівнює числу рівнянь рівноваги – 5.

Якщо підставити у дану систему рівнянь числові значення величин, які задані, і розв'язати ці рівняння відносно невідомих, отримаємо наступні відповіді:
$T_2 = 300\,\text{Н};\ X_A = -116{,}6\,\text{Н};\ Z_A = -86{,}6\,\text{Н};\ X_C = -233{,}3\,\text{Н};\ Z_C = -173{,}2\,\text{Н}.$

Від'ємний знак невідомих величин X_A, Z_A, X_C, Z_C означає, що відповідні складові реакцій мають протилежний напрямок до вказаного на рисунку.

Максимальні значення реакцій підшипників у точках A і C визначаться з виразів:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{(-116{,}6)^2 + (-86{,}6)^2} = 145{,}2\,\text{Н},$$
$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Z_C^2} = \sqrt{(-233{,}3)^2 + (-173{,}2)^2} = 290{,}6\,\text{Н}.$$

Приклад 7.2. Визначити реакції опор зрівноваженого вала *AD*, зображеного на рисунку 7.3 та силу *t*. Вал утримується за допомогою підшипників, розташованих в точках *A* та *D*. На валу, перпендикулярно до його осі, жорстко закріплено два шківи. Радіуси великого та малого шківів дорівнюють відповідно *R*=0,6 м та *r*=0,2 м. Сили *P*, *P'* та *T* лежать у площині шківів та мають наступні величини: *P*=*P'*=5 Н, *T*=50 Н. Вага вала дорівнює *G*=50 Н. Прийняти *AB*=0,4 м, *BC*=0,3 м, *CD*=0,2 м, α=30°.

Розв'язання. Для розв'язання задачі скористаємось

1. Виділяємо об'єкт рівноваги. У даній задачі це буде вал *AD* зі шківами.

2. Вказуємо активні сили, які діють на вал: сила ваги *G*, пара сил (*P*, *P'*), активні сили *T* та *t* (рис.7.3,б).

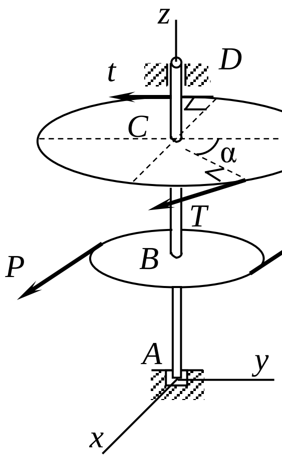


Рис.7.3,а

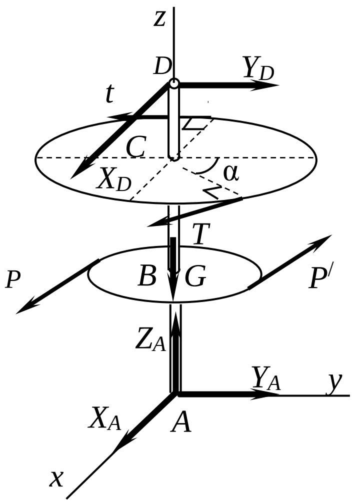


Рис.7.3,б

3. Визначаємо в’язі, які накладені на вал. Ними є підшипник з підп’ятником в точці A та підшипник у точці D, який можна вважати циліндричним шарніром. Застосувавши аксіому про звільнення від в’язей, в’язі подумки відкидаємо, замінюючи їхню дію на вал реакціями. Скористаємось прямокутною декартовою системою координат з початком у точці A, яка показана на рис.7.3,б. Реакція підшипника A невідома як за величиною, так і за напрямом, тому подаємо її у вигляді трьох невідомих складових, спрямованих у додатних напрямах осей координат: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$ (рис.7.3,б). Реакція підшипника D лежить у площині, перпендикулярній до осі підшипника, тому її подамо у вигляді двох складових $\vec{X}_D$, $\vec{Y}_D$.

4. Проводимо аналіз системи сил, що діють на вал. Оскільки вал звільнений від в’язей, він є вільним твердим тілом, що знаходиться в рівновазі під дією довільної просторової системи сил. Така система сил має шість аналітичних умов рівноваги:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{xi} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} M_{yi} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} M_{zi} = 0.$$

У даній задачі шість алгебраїчних невідомих: X_A, Y_A, Z_A, X_D, Y_D, t. Рівнянь рівноваги також шість. Отже, задача статично визначена.

5. Складаємо рівняння рівноваги вала. Для зручності розв’язання задачі рекомендуємо спроектувати систему сил, зображену на рис.7.3,б, на координатні площини: Ayz (рис.7.4), а потім на Axz і Axy (відповідно рис.7.5, 7.6).

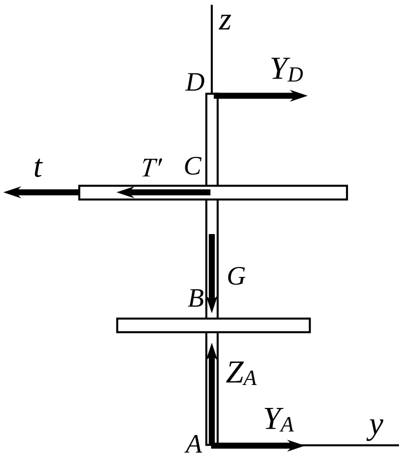


Рис.7.4

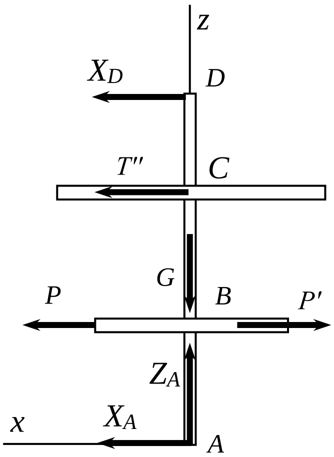


Рис.7.5

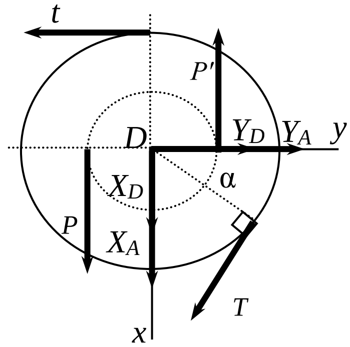


Рис.7.6

Запишемо алгебраїчні суми проекцій сил на координатні осі, прирівнявши їх до нуля; одержимо перші три рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0; \qquad X_A - X_D + T\cdot\cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

(інші сили перпендикулярні до осі Ax);

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0; \qquad Y_A + Y_D - t - T\cdot\sin\alpha = 0, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 0; \qquad Z_A - G = 0. \qquad (3)$$

Для складання рівнянь моментів сил відносно координатних осей, скористаємось робочим правилом: для визначення моменту сили відносно осі треба:

а) провести площину, перпендикулярну до цієї осі;

б) спроектувати силу на проведену площину;

в) розглядаючи цю проекцію як вектор, визначити її момент відносно точки перетину осі з проведеною площиною.

Це правило пояснюється так: якщо розкласти силу на дві складові – одну паралельну до осі, а другу їй перпендикулярну, легко можна помітити, що обертального руху валу (тілу) навколо осі може надати тільки складова, перпендикулярна до осі. Отже, ця складова створить момент відносно осі, рівний добутку величини даної складової та найкоротшої відстані від лінії її дії до осі. Знак моменту визначається напрямом можливого обертання: якщо з додатнього напряму осі обертання, викликане силою, бачимо таким, що воно відбувається проти

руху годинникової стрілки, то знак моменту додатній, якщо за годинниковою стрілкою, – то від’ємний. Зазначимо, якщо сила і вісь лежать в одній площині (паралельні чи перетинаються), то момент сили відносно осі дорівнює нулю.

Складемо рівняння моментів сил відносно осей координат. Відносно осі Ax момент створюють тільки сили $\vec{Y}_D$, $\vec{t}$, $\vec{T}$, інші сили або паралельні до осі, або її перетинають (див. рис.7.3). Скористаємось робочим правилом визначення момента сили: проведемо площину Ayz, перпендикулярну до осі Ax, та спроектуємо на неї усі сили (рис.7.4). Сили $\vec{Y}_D$, $\vec{t}$ виявляються такими, що лежать у цій площині, а сила $\vec{T}$ має проекцію $T'=T\cdot\sin\alpha$. При цьому плече сили $\vec{Y}_D$ дорівнює AD, а сил $\vec{t}$, $\vec{T}'$ – AC. Одержимо рівняння:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{xi} = -Y_D \cdot AD + t \cdot AC + T\sin\alpha \cdot AC = 0. \tag{4}$$

Складемо рівняння моментів сил відносно осі Ay. Щоб визначити моменти сил, скористаємось рис.7.5, де вже спроектовано сили на площину Axz, перпендикулярну до осі Ay. У площину Axz проектуються сили $\vec{T}$ та $\vec{X}_D$, їхні проекції $T''=T\cdot\cos\alpha$ та X_D мають плече, відповідно, AC та AD відносно точки A перетину площини Axz та осі Ay. Зазначимо, що сили $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, $\vec{Y}_D$, $\vec{t}$ не створюють момент відносно осі Ay, оскільки вони паралельні до цієї осі або її перетинають. Момент пари сил (P, P') напрямлений паралельно осі Az і, відповідно, він на вісь Ay не проектується, тобто вказана пара сил не створює момент відносно осі Ay. Рівняння моментів відносно осі Ay запишеться так:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{yi} = X_D \cdot AD + T\cos\alpha \cdot AC = 0. \tag{5}$$

Спроектуємо всі сили на площину Axy (рис.7.6) та складемо останнє рівняння, враховуючи, що пара сил (P, P') створює додатній момент відносно осі Az величиною $2P\cdot r$, а плечі сил $\vec{t}$ та $\vec{T}$, відповідно дорівнюють r та R:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{zi} = 2P \cdot r + t \cdot R - T \cdot R = 0. \tag{6}$$

З шести складених рівнянь (1) – (6) знайдемо шість невідомих:

з (3): $Z_A = G = 50\,\text{Н}$,

з (5): $X_D = -\dfrac{AC}{AD} T\cos\alpha = -\dfrac{0,7}{0,9} \cdot 50 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx -33,68$ Н,

з (6): $t = T - \dfrac{2 \cdot P \cdot r}{R} = 50 - \dfrac{2 \cdot 5 \cdot 0,2}{0,6} \approx 46,67$ Н,

з (1): $X_A = X_D - T\cos\alpha = -\frac{7}{9}\cdot 25\sqrt{3} - 50\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -76,98$ Н,

з (4): $Y_D = t\cdot\frac{AC}{AD} + T\cdot\frac{AC}{AD}\sin\alpha = 20\cdot\frac{0,7}{0,9} + 50\cdot\frac{0,7}{0,9}\cdot 0,5 = 35$ Н,

з (2): $Y_A = -Y_D + t + T\sin\alpha = -35 + 46,67 + 50\cdot 0,5 = 36,67$ Н.

або:

$X_A = -76,98$ Н, $Y_A = 36,67$ Н, $Z_A = 50$ Н,

$X_D = -33,68$ Н, $Y_D = 35$ Н, $t = 46,67$ Н.

Від'ємні знаки показують, що відповідні складові сил напрямлені протилежно до вказаних на рис.7.3. Модулі реакцій опор знайдемо з виразів

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{(-76,98)^2 + (36,67)^2 + (50)^2} = 98,85\,\text{Н},$$

$$R_D = \sqrt{X_D^2 + Y_D^2} = \sqrt{(-33,68)^2 + (35)^2} = 48,57\,\text{Н}.$$

Завдання на СРС

Для самостійної роботи рекомендується розв'язати задачі [4]: 8.17, 8.33, 8.34; [3]: 4.6, 4.9.

Контрольні запитання

Для засвоєння матеріалу практичного заняття пропонується відповісти на наступні запитання:

1. Як записуються векторні умови рівноваги тіла, що перебуває під дією довільної просторової системи сил?
2. Як записуються аналітичні умови рівноваги тіла, що перебуває під дією довільної просторової системи сил?
3. Яка кількість невідомих сил може бути в статично визначеній просторовій системі сил?
4. Сформулюйте означення момента сили відносно осі та вкажіть до якого типу векторів він відноситься.
5. В чому полягає робоче правило визначення момента сили відносно осі?
6. В якому випадку сила не створює момент відносно осі?
7. Як визначити проекції на координатні осі довільно напрямленої сили?
8. Як подається реакція підшипника з підп'ятником?
9. Як подається реакція просторової заробки?
10. Як напрямлений вектор момента пари сил та до якого типу векторів він відноситься?

2.8. **Практичне заняття 8.** Рівновага довільної просторової системи сил. Рівновага пластин (тема 1.2).

Мета заняття

Метою цього заняття є засвоєння методики складання рівнянь рівноваги просторової системи сил прикладеної до пластин, набуття умінь визначення моментів сил відносно координатних осей.

Методичні прийоми

При розв'язуванні задач на дослідження рівноваги довільної просторової системи сил рекомендується використовувати наступну методику:

1. Вибрати об'єкт дослідження, рівновага якого досліджується.
2. Ввести просторову систему координат, напрям осей якої вибирають виходячи з умов зручного проектування системи сил.
3. Зобразити активні сили та моменти пар активних сил, які задані за умовою задачі.
4. Визначити тип в`язей, які обмежують положення об'єкта дослідження, та за *аксіомою про звільнення від в`язей* звільнитись від них, тобто замінити дію в`язей відповідними реакціями.
5. Далі провести аналіз системи сил, прикладеної до об'єкта дослідження. Оскільки об'єкт дослідження знаходиться у рівновазі, то і система сил є зрівноваженою. З другого боку, система сил розташована у просторі. Умови рівноваги довільної просторової зрівноваженої системи сил можна записати у вигляді шести рівнянь. Тут також потрібно з'ясувати, чи є система сил статично визначена, тобто задачу визначення невідомих сил можна розв'язати методами теоретичної механіки.

5. Наступний крок – запис рівнянь рівноваги. Як відомо їх можна записати у формі:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_x(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_y(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i) = 0.$$

Зазначимо, що при складанні рівнянь моментів рекомендується використовувати правило визначення момента сили відносно осі. У цьому випадку потрібно зобразити задану конструкцію у проекції на площину, перпендикулярну до осі відносно якої визначаються моменти сил. Потім спроектувати задану систему сил на вказану площину і визначити моменти спроектованих сил відносно точки перетину осі та площини. Зазначену процедуру потрібно провести три рази.

6. Далі потрібно розв'язати складені рівняння та визначити числові

значення проекцій невідомих сил та моментів. Повне значення реакцій в'язей визначається так $R_i = \sqrt{R_{ix}^2 + R_{iy}^2 + R_{iz}^2}$.

Комплект завдань

Для роботи в аудиторії рекомендується розв'язати задачі [4]: 8.21, 8.24; [3]: приклад 4.1, приклад 4.3, задача 4.1.

Приклад 8.1.

Однорідна прямокутна рама *ABCD* вагою $P = 200$ Н прикріплена до стіни за допомогою сферичного шарніра *A* та петлі *B* і утримується в горизонтальному положенні мотузкою *CE,* яка прив'язана в точці *C* рами та в точці *E* стіни, що знаходиться на одній вертикалі з *A*. Зазначимо, що $\alpha = \angle ECA = \angle BAC = 30^\circ$. Визначити опорні реакції рами та натяг мотузки (рис.8.1,а).

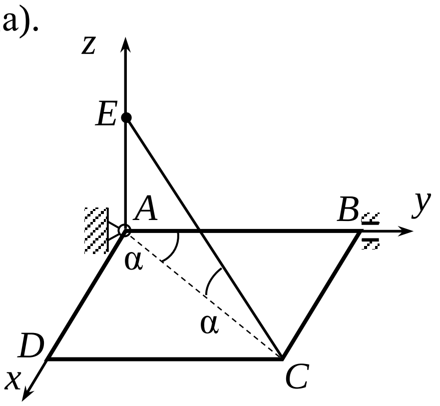


Рис.8.1,а

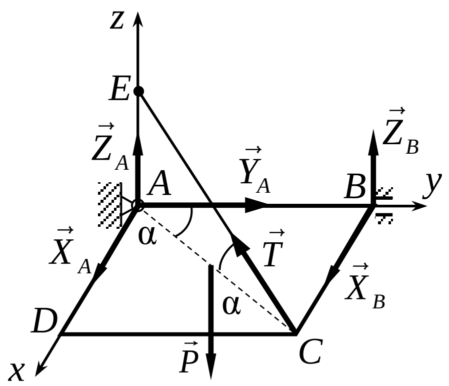


Рис.8.1,б

Розв'язання. Розглянемо рівновагу рами *ABCD*. До неї прикладена активна сила тяжіння $\vec{P}$ в точці *O* перетину діагоналей прямокутника. Крім цього, до рами прикладається реакція сферичного шарніра $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A + \vec{Z}_A$, яка розкладається на три складові, реакція петлі *B*, що подається як сума двох взаємноперпендикулярних складових, розташованих перпендикулярно до осі *Ay* петлі $\vec{R}_B = \vec{X}_B + \vec{Z}_B$, та натяг мотузки $\vec{T}$, спрямований від точки *C* до *E* (рис.8.1,б).

Система сил $\left\{\vec{P}, \vec{T}, \vec{X}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{Z}_B\right\}$ є довільною просторовою зрівноваженою системою сил, для неї можна скласти шість рівнянь рівноваги. Оскільки кількість невідомих сил дорівнює шести, то ця система сил є статично визначена.

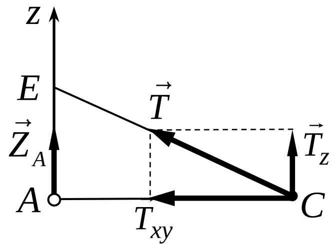
Складемо рівняння рівноваги, запишемо суми проекцій сил на координатні осі.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = X_A + X_B - T \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = Y_A - T \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = Z_A + Z_B - P + T \cdot \sin\alpha = 0.$$

При визначені проекцій сили натягу на горизонтальні осі здійснювалось подвійне проектування.

Рис.8.2



При складанні рівнянь моментів відносно координатних осей потрібно скористатись правилом визначення момента відносно осі. Врахуємо, що силу натягу можна розкласти у площині *ACE* на дві складові (рис.8.2): вертикальну $T_z = T\sin\alpha$ та горизонтальну $T_{xy} = T\cos\alpha$, напрямлену вздовж діагоналі *CA*. Остання складова не створює моментів відносно жодної осі, оскільки проходить через точку *A*.

Таким чином, рівняння моментів сил набувають вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = Z_B \cdot AB + T\sin\alpha \cdot AB - P \cdot 0.5 \cdot AB = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iy} = P \cdot 0.5 \cdot AD + T \cdot \sin\alpha \cdot AD = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iz} = -X_B \cdot AB = 0.$$

Розв'язуємо отримані шість рівнянь відносно невідомих, отримаємо наступні відповіді

$$X_A = \frac{\sqrt{3}}{4}P, \quad Y_A = \frac{3}{4}P, \quad Z_A = \frac{1}{2}P, \quad T = P, \quad X_B = 0, \quad Z_B = 0.$$

Модулі реакцій опор дорівнюють

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = \frac{1}{2}P\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4} + 1} = P, \qquad R_B = 0.$$

Завдання на СРС

Для самостійної роботи рекомендується розв’язати задачі [4]: 8.25, 8.28, [3]: 4.5, 4.7.

Контрольні запитання

Для засвоєння матеріалу практичного заняття рекомендується скористатись контрольними запитаннями практичного заняття 7.

2.9. **<u>Практичне заняття 9.</u>** Визначення центра ваги твердого тіла (тема 1.3).

Мета заняття

Метою заняття є набуття умінь визначення центрів ваги однорідних твердих тіл у вигляді пластин та об’ємів.

Теоретичні відомості

Центр ваги системи точок є центр паралельних сил ваги, який не змінює своє положення при повороті усіх сил на один і той же кут в одному і тому ж напрямку. Позначають центр ваги буквою C.

Радіус-вектор центра ваги $\vec{r}_C$ системи точок вагою P_i кожна $i=1,...,n$, n - кількість точок, визначають згідно формули

$$\vec{r}_C = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \cdot P_i , \qquad (1)$$

де $P=\sum_{i=1}^{n} P_i$ - вага системи точок, $\vec{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ - радіус-вектор i-ї точки. Проекції радіуса-вектора центра ваги системи точок (координати центра ваги) на осі прямокутної декартової системи координат мають вигляд

$$x_C = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_i; \qquad y_C = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot P_i; \qquad z_C = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot P_i . \qquad (2)$$

Для однорідних тіл розподілених у просторі, питома вага (густина) γ яких є величина стала, координати центра ваги визначають за формулами:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \Delta V_i}{V}; \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \Delta V_i}{V}; \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot \Delta V_i}{V}; \qquad (3)$$

або

$$x_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} x \cdot dV; \qquad y_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} y \cdot dV; \qquad z_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} z \cdot dV \cdot \qquad (4)$$

У формулах (3), (4) позначено: $V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i$ - об’єм тіла, ΔV_i - складові частини розбиття об’єму тіла, $\{x_i, y_i, z_i\}$ - координати центра ваги i-ї частини ΔV_i об’єму тіла.

Центр ваги однорідного плоского тіла, товщина якого не змінюється, розташованого в координатній площині Oxy, визначають за формулами:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{C_i} \cdot \Delta S_i ; \qquad x_C = \frac{1}{S}\int_{(S)} x \cdot dS; \qquad y_C = \frac{1}{S}\int_{(S)} y \cdot dS , \qquad (5)$$

$$\vec{r}_C = \frac{1}{S}\int\limits_{(S)} \vec{r}\cdot dS\,; \qquad x_C = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} x_{C_i}\cdot\Delta S_i\,; \qquad y_C = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} y_{C_i}\cdot\Delta S_i\,; \tag{6}$$

де x_{C_i}, y_{C_i} - координати центра ваги ΔS_i i-ї частини розбиття площі пластини $S = \sum\limits_{i=1}^{n}\Delta S_i$.

Суму попарних добутків площі кожного елемента плоскої фігури на відстань від центра ваги цього елемента до деякої осі, яка лежить у площині фігури, називають статичним моментом плоскої фігури відносно цієї осі. Зокрема, статичні моменти плоскої фігури відносно осей Ox і Oy, відповідно, дорівнюють

$$M_x = \sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\cdot y_{C_i}\,; \qquad M_y = \sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\cdot x_{C_i}\,. \tag{7}$$

Тоді для координат центра ваги плоскої фігури отримаємо

$$x_C = \frac{M_y}{S}\,; \qquad y_C = \frac{M_x}{S}\,. \tag{8}$$

Центр ваги криволінійного однорідного стержня знаходять за формулами:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\cdot\Delta\ell_i\,;$$

$$x_C = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\Delta\ell_i\,; \qquad y_C = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{n} y_i\cdot\Delta\ell_i\,; \qquad z_C = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{n} z_i\cdot\Delta\ell_i\,; \tag{9}$$

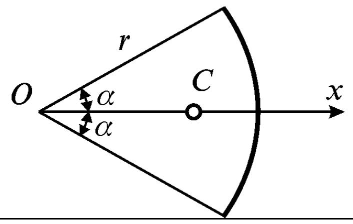
або

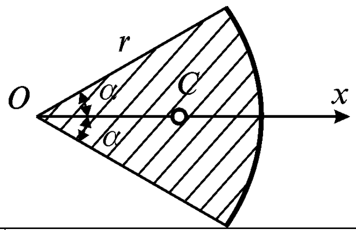
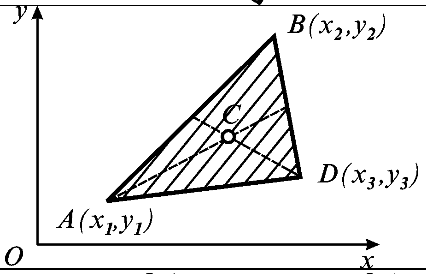
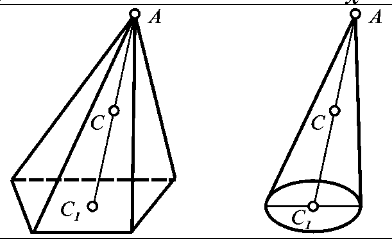
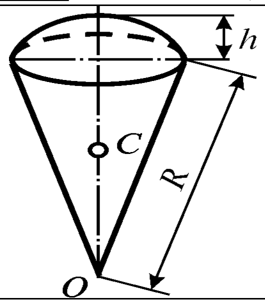
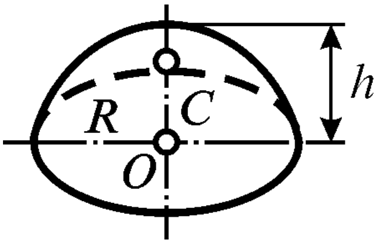
$$\vec{r}_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)}\vec{r}\cdot d\ell\,;$$

$$x_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} x\cdot d\ell\,; \qquad y_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} y\cdot d\ell\,; \qquad z_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} z\cdot d\ell\,, \tag{10}$$

де L - довжина стержня; $\Delta\ell_i$ - довжина i-ї частини стержня, $\{x_i, y_i, z_i\}$ - координати центра ваги i-ї частини $\Delta\ell_i$ довжини стержня.

Центри ваги деяких найпростіших геометричних фігур наведено у таблиці [3]:

Фігура		Центр ваги
Дуга кола		$x_C = OC = \dfrac{r\cdot\sin\alpha}{\alpha}$, r - радіус дуги; α - кут (рад)

Фігура		Центр ваги
Коловий сектор		$x_C = OC = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot \sin\alpha}{\alpha}$, r - радіус дуги; α - кут (рад)
Трикутник		$x_C = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$; $y_C = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$.
Піраміда і конус		C_1 - центр ваги основи $CC_1 = \frac{1}{4} AC_1$
Кульовий сектор		$OC = \frac{3}{8}(2R - h)$ R - радіус; h - висота кульового сектора.
Кульовий сегмент		$OC = \frac{3}{4} \cdot \frac{\left(2R^2 - h^2\right)}{3R - h}$, R- радіус; h - висота кульового сегмента.

Методичні прийоми

У випадку визначення центра ваги однорідного тіла складної форми рекомендується його об'єм або площу подати як сукупність об'ємів V_i або площ S_i, центри ваги $C_i(x_i, y_i, z_i)$ яких можна визначити користуючись відомими формулами. Тоді координати центра ваги просторового тіла (11) та плоскої фігури (12) можна визначити так

$$x_C = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot V_i; \qquad y_C = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot V_i; \qquad z_C = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot V_i; \qquad (11)$$

$$x_C = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot S_i; \qquad y_C = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot S_i; \tag{12}$$

де $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$, $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$.

У випадку визначення центра ваги однорідного тіла з порожнинами або вирізами користуються наступним способом. Спочатку визначають координати центра ваги та об'єм (площу) тіла припускаючи, що порожнина або виріз заповнені такою ж речовиною як і все тіло. Потім визначають координати центра ваги та об'єм (площу) порожнини (виріза). Остаточно, при визначені координат центра ваги заданого тіла об'єм порожнини враховують зі знаком мінус:

$$x_C = \frac{1}{V_0 - V_v}\left(x_0 \cdot V_0 - x_v \cdot V_v\right), \qquad y_C = \frac{1}{V_0 - V_v}\left(y_0 \cdot V_0 - y_v \cdot V_v\right),$$

$$z_C = \frac{1}{V_0 - V_v}\left(z_0 \cdot V_0 - z_v \cdot V_v\right),$$

а при визначені координат центра ваги заданої плоскої фігури, площу виріза враховують зі знаком мінус:

$$x_C = \frac{1}{S_0 - S_v}\left(x_0 \cdot S_0 - x_v \cdot S_v\right), \qquad y_C = \frac{1}{S_0 - S_v}\left(y_0 \cdot S_0 - y_v \cdot S_v\right),$$

де V_0 (S_0) - об'єм (площа) тіла з заповненими порожнинами (вирізами); V_v (S_v) - об'єм (площа) порожнини (виріза); x_0, y_0, z_0 - координати центра ваги суцільного тіла; x_v, y_v, z_v - координати центра ваги порожнини (виріза), заповненої матеріалом тіла.

Для визначення координат центра ваги тіла складної форми, яка не подається як сукупність більш простих, та у випадку неоднорідного тіла, питома вага якого є змінною $\gamma = \gamma(x, \ y, \ z)$, використовують інтегрування:

$$x_C = \frac{1}{P}\int_{(V)} x \cdot \gamma(x, y, z)\, dV; \qquad y_C = \frac{1}{P}\int_{(V)} y \cdot \gamma(x, y, z)\, dV;$$

$$z_C = \frac{1}{P}\int_{(V)} z \cdot \gamma(x, y, z)\, dV.$$

Комплект завдань

Для роботи в аудиторії пропонується розв'язати задачі з групи [4]: 9.6, 9.7, 9.16, 9.19, 9.20; [3]: 4.21, 4.24, приклад 4.13, приклад 4.11.

Приклад 9.1. [3]

Знайти координати центра ваги плоскої фігури, що зображена на рис. 9.1. Розміри наведено в см.

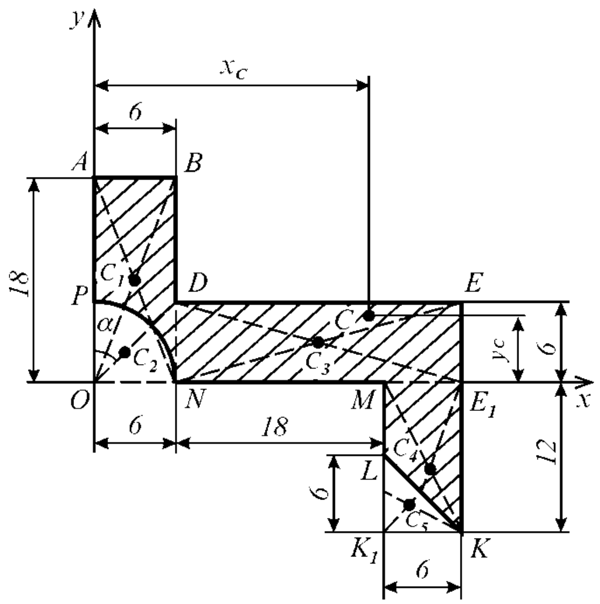


Рис.9.1.

Розв'язання. Для розв’язання задачі введемо систему координат Oxy та подамо дану фігуру як сукупність фігур та вирізів більш простої форми. Дану фігуру можна подати як п’ять простих фігур (рис. 9.1):

1. Прямокутник $OABN$ з центром ваги в точці $C_1(x_1, y_1)$:

$$S_1 = OA \cdot AB = 18 \cdot 6 = 108 \text{ см}^2; \qquad x_1 = \frac{1}{2}AB = 3 \text{ см}; \qquad y_1 = \frac{1}{2}OA = 9 \text{ см}.$$

2. Виріз у формі кругового сектора ONP ($R = 6$ см, $\alpha = \frac{\pi}{4}$) з центром ваги $C_2(x_2, y_2)$. Його площа та довжина відрізка OC_2 дорівнюють:

$$S_2 = \alpha \cdot R^2 = \frac{\pi}{4}R^2 = 28{,}3 \text{ см}^2, \qquad OC_2 = \frac{2}{3}R\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = 3{,}6 \text{ см}.$$

Тоді: $x_2 = OC_2 \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 2{,}55$ см; $\qquad y_2 = OC_2 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 2{,}55$ см.

3. Прямокутник DEE_1N з центром ваги в точці $C_3(x_3, y_3)$:

$$S_3 = DE \cdot EE_1 = 24 \cdot 6 = 144 \text{ см}^2;$$

$$x_3 = ON + \frac{NE_1}{2} = 6 + 12 = 18 \text{ см}; \qquad y_3 = \frac{EE_1}{2} = 3 \text{ см}.$$

4. Прямокутник E_1KK_1M з центром ваги в точці $C_4(x_4, y_4)$:

$$S_4 = E_1K \cdot KK_1 = 12 \cdot 6 = 72 \text{ см}^2;$$

$$x_4 = OM + \frac{ME_1}{2} = 24 + 3 = 27 \text{ см}; \qquad y_4 = -\frac{E_1K}{2} = -6 \text{ см}.$$

5. Трикутний виріз KK_1L з центром ваги в точці $C_5(x_5, y_5)$:

$$S_5 = \frac{1}{2} KK_1 \cdot K_1L = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18 \text{ см}^2;$$

$$x_5 = \frac{x_L + x_K + x_{K_1}}{3} = \frac{24 + 30 + 24}{3} = 26 \text{ см};$$

$$y_5 = \frac{y_L + y_K + y_{K_1}}{3} = \frac{-6 - 12 - 12}{3} = -10 \text{ см}.$$

Координати центра ваги заданої плоскої фігури знаходимо за формулами (площі вирізів беремо зі знаком мінус):

$$x_C = \frac{x_1 \cdot S_1 - x_2 \cdot S_2 + x_3 \cdot S_3 + x_4 \cdot S_4 - x_5 \cdot S_5}{S_1 - S_2 + S_3 + S_4 - S_5} =$$

$$= \frac{3 \cdot 108 + 2{,}55(-28{,}3) + 18 \cdot 144 + 7 \cdot 72 + 26 \cdot (-18)}{108 - 28{,}3 + 144 + 72 - 18} = 15{,}55 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{y_1 \cdot S_1 - y_2 \cdot S_2 + y_3 \cdot S_3 + y_4 \cdot S_4 - y_5 \cdot S_5}{S_1 - S_2 + S_3 + S_4 - S_5} =$$

$$= \frac{9 \cdot 108 + 2{,}55 \cdot (-28{,}3) + 3 \cdot 144 + (-6) \cdot 72 + (-10) \cdot (-18)}{108 - 28{,}3 + 144 + 72 - 18} = 3{,}89 \text{ см}.$$

Відповідь: $x_C = 15{,}55$ см; $y_C = 3{,}89$ см.

Завдання на СРС

Для самостійної роботи рекомендується розв’язати задачі [4]: 9.3, 9.5, 9.13, 9.17, 9.24; [3]: 4.22, 4.26, 4.28, 4.30.

Контрольні запитання

Для засвоєння матеріалу практичного заняття рекомендується відповісти на наступні запитання:

1. Дайте визначення центра системи паралельних сил та запишить формулу для визначення його радіуса-вектора.
2. Запишіть формули для визначення координат центра системи паралельних сил в просторі.
3. Дайте визначення центра ваги системи точок та твердого тіла. Як знайти координати центра ваги тіла в загальному випадку.
4. Як визначаються координати центра ваги однорідного тіла?
5. Як визначаються координати центра ваги однорідної пластини?
6. Як визначаються координати центра ваги однорідної лінії?
7. Що називається статичним моментом площі відносно координатної осі?
8. Якою формулою визначається положення центра ваги колового сектора?
9. Якою формулою визначається положення центра ваги дуги кола?
10. Як визначається положення центра ваги тіла складної форми?

2.10. <u>**Практичне заняття 10.**</u> Зведення систем сил до найпростішого вигляду (тема 1.3).

Мета заняття

Метою цього заняття є набуття умінь визначення головного вектора та головного момента довільної системи сил, статичних інваріантів системи сил, закріплення на практиці випадків зведення системи сил до найпростішого вигляду, отримання рівняння гвинтової осі.

Методичні прийоми

Розв'язування задач з цієї теми грунтується на знаннях основної теореми статики (теорема Пуансо), статичних інваріантів, воно потребує знання випадків зведення довільної системи сил до найпростішого вигляду та володіння поняттями кінематичний гвинт і центральна гвинтова вісь.

При розв'язуванні задач на цю тему рекомендується до застосування наступна методика:

1.Ввести систему координат в осях якої будуть визначатись головний вектор та головний момент заданої системи сил.

2. Визначити головний вектор $\vec{F}$ заданої системи сил за його проекціями на осі введеної системи координат:

$$F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}\,; \qquad F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}\,; \qquad F_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}\,.$$

3. Визначити головний момент $\vec{M}_O$ заданої системи сил за його проекціями на осі введеної системи координат :

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} M_x(\vec{F}_i); \qquad M_y = \sum_{i=1}^{n} M_y(\vec{F}_i); \qquad M_z = \sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i).$$

4. Визначити перший статичний інваріант $I_1 = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ заданої системи сил

5. Для заданої системи сил визначити другий статичний інваріант

$$I_2 = \vec{F} \cdot \vec{M}_O = F_x M_x + F_y M_y + F_z M_z\,.$$

6. На підставі аналізу отриманих результатів, визначити до якого випадку зводиться задана система сил:

а) у випадку, коли головний вектор $\left|\vec{F}\right| \neq 0$, головний момент $\left|\vec{M}_O\right| = 0$, статичні інваріанти $I_2 = 0$, система сил зводиться до рівнодійної. Рівняння лінії дії рівнодійної визначається з виразу:

$$\frac{x}{F_x} = \frac{y}{F_y} = \frac{z}{F_z};$$

б) у випадку, коли головний вектор $\left|\vec{F}\right| = 0$, головний момент $\left|\vec{M}_O\right| \neq 0$, статичні інваріанти $I_1 = I_2 = 0$, система сил зводиться до пари сил з моментом $\vec{M}_O$;

в) у випадку, коли головний вектор $\left|\vec{F}\right| = 0$, головний момент $\left|\vec{M}_O\right| = 0$, статичні інваріанти $I_1 = I_2 = 0$, система сил зрівноважена;

г) у випадку, коли головний вектор $\left|\vec{F}\right| \neq 0$, головний момент $\left|\vec{M}_O\right| \neq 0$, статичні інваріанти $I_1 \neq 0,\ I_2 = 0$, система сил зводиться до рівнодійної, рівняння лінії дії якої має вигляд

$$\frac{M_x - (yF_z - zF_y)}{F_x} = \frac{M_y - (zF_x - xF_z)}{F_y} = \frac{M_z - (xF_y - yF_x)}{F_z};$$

г) у випадку, коли головний вектор $\left|\vec{F}\right| \neq 0$, головний момент $\left|\vec{M}_O\right| \neq 0$, статичні інваріанти $I_1 \neq 0,\ I_2 \neq 0$, система сил зводиться до силового гвинта. Рівняння центральної гвинтової осі записується у формі

$$\frac{M_x - (yF_z - zF_y)}{F_x} = \frac{M_y - (zF_x - xF_z)}{F_y} = \frac{M_z - (xF_y - yF_x)}{F_z}.$$

Комплект завдань

Для роботи в аудиторії пропонується розв’язати задачі з групи [4]: 7.3, 7.5, 7.7; [3]: 4.11, 4.12, 4.14.

Приклад 10.1.

Для заданої системи сил (рис.10.1), де P_1 = 10 Н, P_2 = 15 Н, P_3 = 20 Н та a=0,5 м, визначити головний вектор та головний момент. З’ясувати, до якої найпростішої системи сил зводиться дана система сил.

Розв'язування. Розвяжемо задачу у наступній послідовності:

1. Вводимо прямокутну декартову систему координат *Oxyz*. Початок системи координат виберемо в точці *O*, додатні напрями осей позначено на рис.10.2.

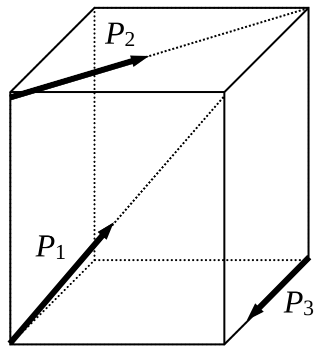


Рис.10.1

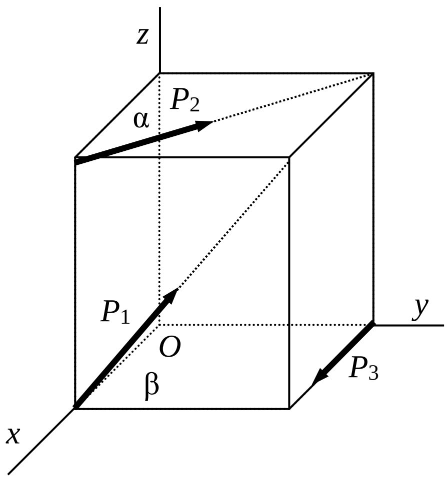


Рис.10.2

2. Визначаємо головний вектор даної системи сил $\vec{F} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3$ за його проекціями:

$$F_x = -P_2\cos\alpha + P_3;$$
$$F_y = P_1\cos\beta + P_2\sin\alpha;$$
$$F_z = P_1\sin\beta.$$

Оскільки кути α=β=45°, маємо: F_x= 9,39 Н, F_y= 17,68 Н, F_z= 7,07 Н.

Модуль головного вектора

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ = 21,23 Н.

Напрямні косинуси:

$\cos(\vec{F}\,\hat{,}\,Ox) = \frac{F_x}{F}$ =0,44; $\cos(\vec{F}\,\hat{,}\,Oy) = \frac{F_y}{F}$ =0,83; $\cos(\vec{F}\,\hat{,}\,Oz) = \frac{F_z}{F}$ =0,33.

3. Визначаємо головний момент даної системи сил відносно центра O:

$$M_x = -a\cdot P_2\sin\alpha;$$
$$M_y = -a\cdot P_1\sin\beta - a\cdot P_2\cos\alpha;$$
$$M_z = a\cdot P_1\cos\beta + a\cdot P_2\sin\alpha - a\cdot P_3.$$

Враховуючи, що α=β=45°, одержимо:

M_x= − 5,30 Н·м, M_y= − 8,84 Н·м, M_z= − 1,16 Н·м.

Модуль головного моменту відносно точки O

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 10{,}37 \text{ Н·м}.$$

Напрямні косинуси:

$$\cos(\vec{M}\,\hat{,}\,Ox) = \frac{M_x}{M} = -0{,}51; \qquad \cos(\vec{M}\,\hat{,}\,Oy) = \frac{M_y}{M} = -0{,}85;$$

$$\cos(\vec{M}\,\hat{,}\,Oz) = \frac{M_z}{M} = -0{,}11.$$

4. Визначимо другий статичний інваріант даної системи сил:

$$I_2 = \vec{F}\cdot\vec{M}_O = F_x\cdot M_x + F_y\cdot M_y + F_z\cdot M_z = -214{,}26 \text{ Н}^2\text{·м}.$$

Оскільки другий статичний інваріант не дорівнює нулю, це дає підстави стверджувати, що дана система сил зводиться до силового гвинта (динами).

5. Визначимо рівняння центральної гвинтової осі.

$$\frac{M_x-(yF_z-zF_y)}{F_x}=\frac{M_y-(zF_x-xF_z)}{F_y}=\frac{M_z-(xF_y-yF_x)}{F_z}.$$

Підставимо визначені числові значення проекцій головного вектора та головного момента:

$$-0{,}56-0{,}51y+1{,}88z=-0{,}50-0{,}53z+0{,}39x=-0{,}16-0{,}25x+1{,}33y.$$

Попарний розгляд цього співвідношення дозволяє отримати рівняння гвинтової осі як пряму, що є перетином двох площин:

$$x+1{,}88y-6{,}0z+0{,}16=0;$$
$$x-0{,}46y-0{,}18z-0{,}12=0.$$

Визначимо координати точки перетину гвинтової осі та площини Oxy. Покладемо у останніх двох співвідношеннях $z=0$. Одержимо:

$$x+1{,}88y+0{,}16=0;$$
$$x-0{,}46y-0{,}12=0.$$

Тоді координати шуканої точки: $x=0{,}065$, $y=-0{,}12$.

Завдання на СРС

Для самостійної роботи рекомендується розв’язати задачі [4]: 7.2, 7.10, [3]: 4.15, 4.20.

Контрольні запитання

Для засвоєння матеріалу практичного заняття рекомендується відповісти на наступні запитання:

1. Дайте визначення головного вектора і головного момента довільної системи сил.
2. Запишіть формули для визначення координат головного вектора і головного момента довільної системи сил.
3. Чому рівні головний вектор і головний момент плоскої довільної системи сил, що за визначенням еквівалентна нулю?
4. Як визначаються перший та другий статичні інваріанти?
5. Дайте визначення кінематичного гвинта.
6. У якому випадку система сил зводиться до рівнодійної?
7. Які окремі випадки зустрічаються при зведенні просторової системи сил до найпростішої?
8. Як записується рівняння лінії дії рівнодійної?
9. Як записується рівняння центральної гвинтової осі?
10. Які випадки зведення до найпростішого вигляду плоскої системи сил?

2.11. **Практичне заняття 11.** Траєкторія точки (тема 2.1).

Мета заняття

Метою даного заняття є вивчення трьох способів описування руху точки: векторний, координатний та натуральний та визначення траєкторії точки згідно цих способів задання.

Методичні прийоми

Задачі на визначення траєкторії точки поділяються на два типи:

- визначення траєкторії в декартовій системі координат;
- складання рівнянь руху точки, виходячи з її геометричного положення, а потім з них визначення траєкторії точки.

Теоретичні відомості

Нехай точка рухається в системі відліку, що вважається нерухомою. Розглянемо три способи описування цього руху: векторний, координатний і натуральний.

При векторному способі задання руху точки M її положення визначається радіусом-вектором відносно деякої фіксованої точки O (рис. 11.1), причому цей вектор є векторною функцією часу, тобто

$$\vec{r} = \vec{r}\left(t\right). \tag{11.1}$$

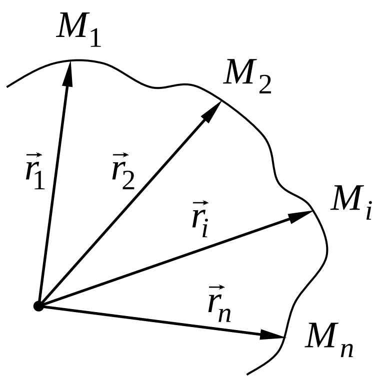


Рис. 11.1

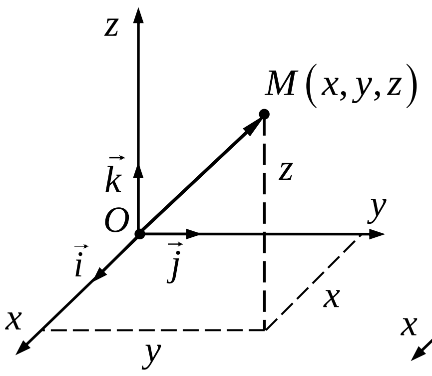


Рис. 11.2

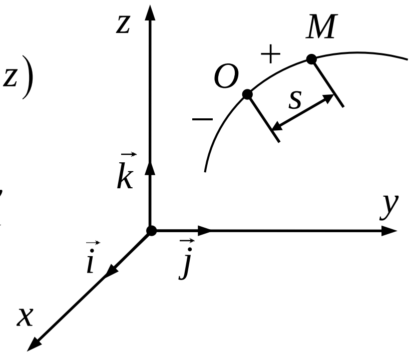


Рис. 11.3

Функція $\vec{r}\left(t\right)$ вважається однозначною, неперервною і принаймні двічі диференційовною. Співвідношення (11.1) називається кінематичним рівнянням руху точки у векторній формі.

Лінія, яку описує під час руху кінець вектора $\vec{r}\left(t\right)$ у просторі називається траєкторією руху точки. Рухи за траєкторіями поділяються на прямолінійні і криволінійні.

Особливістю координатного способу описування положення точки M у довільний момент часу є визначення її координат у вибраній системі координат (декартовій, сферичній, циліндричній тощо), незмінно

пов'язаній з тілом відліку. У прямокутній декартовій системі координат положення точки M визначається координатами x, y, z (рис. 11.2) як функціями часу:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \; z = z(t) \qquad (11.2)$$

Функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ вважаються однозначними, неперервними і принаймні двічі диференційовними. Співвідношення (11.2) називаються кінематичними рівняннями руху точки у координатній декартовій формі.

Зв'язок між векторним і координатним способами задання руху точки визначається співвідношенням:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\,, \qquad (11.3)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орти системи координат $Oxyz$ (рис. 11.2).

При натуральному способі задання руху точки M вважається, що траєкторія точки відома. Положення точки M у вибраній системі відліку визначають (рис. 11.3) просторова крива (траєкторія точки), початок відліку O дугової координати s, додатний напрямок відліку дугової координати і дугова координата s на кривій. При русі точки M дугова координата s змінюється з часом:

$$s = s(t)\,. \qquad (11.4)$$

Комплект завдань

В аудиторії можуть розглядатися, наприклад, задачі 10.2 (1,2,4), 10.3(1) [4], приклад 5.3 [3] (визначити траєкторію).

Наведемо приклад розв'язання задачі на визначення траєкторії точки.

Приклад 11.1 (10.3 (1) [4])

Побудувати траєкторію точки, радіус-вектор якої змінюється згідно рівнянню

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{e}\,, \qquad (1)$$

де $\vec{r}_0$ і $\vec{e}$ – постійні, задані вектори, $\vec{i}$ та $\vec{j}$ – координатні орти.

Розв'язання. Зазначимо, що рівняння руху (1) представлено за допомогою векторного способу задання. Введемо систему координат Oxy з ортами $\vec{i}, \vec{j}$. Використовуючи формули (11.2), (11.3), запишемо рівняння (1) в проекціях на осі цієї системи координат:

$$x = x_0 + e_x \cdot t\,; \qquad (2)$$

$$y = y_0 + e_y \cdot t\,. \qquad (3)$$

де e_x, e_y - проекції вектора $\vec{e}$ на осі системи координат Oxy.

Виділимо параметр t з рівняння (2) і підставимо його в (3):

$$t = \frac{x - x_0}{e_x};$$

$$y - y_0 = (x - x_0) \cdot \frac{e_y}{e_x}. \qquad (4)$$

(4) являє собою рівняння напівпрямої (промінь), паралельної вектору $\vec{e}$, з початковою точкою $M_0(\vec{r}_0)$ (тобто $M_0(x_0; y_0)$) (рис. 11.4).

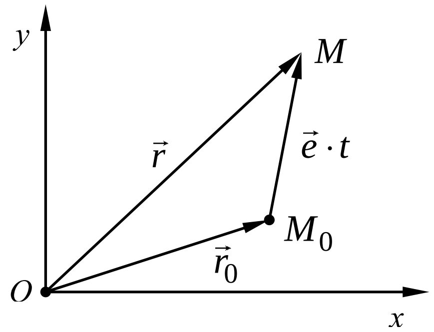


Рис. 11.4

Приклад 11.2. (10.2 (4) [4])

За даними рівняннями руху точки знайти рівняння її траєкторії в координатній формі та вказати на малюнку напрям руху.

$$x = 2 - 3\cos 5t; \quad y = 4\sin 5t - 1. \qquad (5)$$

Розв'язання.Рівняння (5) представлено в параметричному вигляді, де параметром виступає час t. Щоб побудувати траєкторію точки в координатній формі, тобто записати у вигляді залежності $y = y(x)$ виключимо з рівнянь руху (5) параметр t, виділимо тригонометричну одиницю з вказаних рівнянь. Для цього послідовно виконаємо наступні кроки.

1). Виділимо з першого рівняння $\cos 5t$, а з другого $\sin 5t$:

$$\cos 5t = \frac{-x + 2}{3};$$

$$\sin 5t = \frac{y + 1}{4}.$$

2). Підведемо до квадрату праві і ліві частини рівнянь:

$$\cos^2 5t = \left(\frac{-x + 2}{3}\right)^2;$$

$$\sin^2 5t = \left(\frac{y + 1}{4}\right)^2.$$

3). Складемо ліві і праві частини рівнянь і, приймаючи до уваги те, що $\sin^2 5t + \cos^2 5t = 1$ отримаємо шукане рівняння траєкторії:

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1.$$

Крива, яку описує отримане рівняння – еліпс, центр якого зсунутий відносно початку координат на дві одиниці в додатну сторону осі Ox і на одиницю у від'ємну сторону осі Oy. Побудуємо його на координатній площині (рис.11.5):

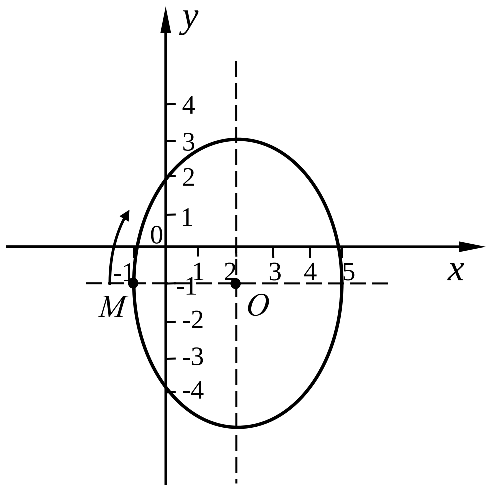


Рис. 11.5

Визначимо з якої точки почався рух. Для цього з рівняння (5) визначимо координати точки в момент часу $t=0$:

$$x=2-3\cos 5t=2-3\cdot 1=-1,\ (\cos 0=1)$$
$$y=4\sin 5t-1=4\cdot 0-1=-1,\ (\sin 0=0)$$

Отже, рух почався з точки з координатами $(-1;-1)$.

Приклад 11.3 (10.2 (5) [4])

За даними рівняннями руху точки знайти рівняння її траєкторії в координатній формі та вказати на малюнку напрям руху.

$$x=\text{ch}t=\frac{1}{2}\left(e^t+e^{-t}\right);\quad y=\text{sh}t=\frac{1}{2}\left(e^t-e^{-t}\right). \tag{6}$$

Розв'язання. Рівняння (6) представлено в параметричному вигляді, де параметром є час t. Щоб побудувати траєкторію точки в координатній формі, тобто записати у вигляді залежності $y=y(x)$ виключимо з рівнянь руху (6) параметр t. Для цього послідовно виконаємо наступні кроки.

1) Перетворимо рівняння наступним чином:

$$2x=\left(e^t+e^{-t}\right);\qquad 2y=\left(e^t-e^{-t}\right).$$

2). Підведемо до квадрату праві і ліві частини рівнянь:

$$(2x)^2=\left(e^t+e^{-t}\right)^2;\qquad (2y)^2=\left(e^t-e^{-t}\right)^2.$$

3). Віднімемо ліві і праві частини рівнянь і після перетворень отримаємо шукане рівняння траєкторії:

$$4x^2 - 4y^2 = \left(e^t + e^{-t}\right)^2 - \left(e^t - e^{-t}\right)^2 =$$

$$= e^{2t} + 2e^{2t}e^{-2t} + e^{-2t} - e^{2t} + 2e^{2t}e^{-2t} - e^{-2t};$$

$$4x^2 - 4y^2 = 4;$$

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Крива, яку визначає отримане рівняння – гіпербола. Визначимо з якої точки почався рух. Для цього з рівняння (6) визначимо координати точки в момент часу $t = 0$:

$$x(t=0) = \mathrm{ch}(0) = \frac{1}{2}\left(e^0 + e^0\right) = 1; \qquad y(t=0) = \mathrm{sh}0 = \frac{1}{2}\left(e^0 - e^0\right) = 0.$$

Отже, рух почався з точки з координатами $(1;0)$, а траєкторією точки є верхня частина правої гілки гіперболи. Побудуємо її на координатній площині (рис.11.6):

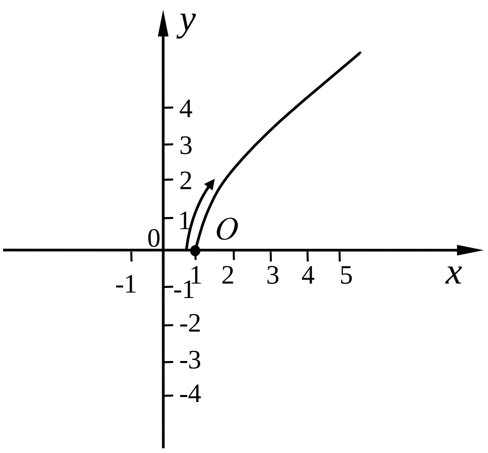


Рис. 11.6

Завдання на СРС

Для самостійної роботи рекомендується розв’язати задачі [4]: 10.2 (3,5), 10.12, [3]: 5.1, 5.2 (скласти рівняння руху).

Контрольні запитання

Пропонуються такі запитання для самоконтролю засвоєння матеріалу цього практичного заняття.

1. Які способи задання руху вам відомі?

2. Які кроки треба зробити для визначення початкового положення точки при координатному способі задання її руху?

3. Яким чином визначається напрямок подальшого руху точки із початкового положення?

4. Як знайти рівняння траєкторії точки?

2.12. <u>Практичне заняття 12.</u> Швидкість та прискорення точки (тема 2.1).

Мета заняття

Метою даного заняття є знаходження швидкості та прискорення точки при векторному та координатному способі задання.

Методичні прийоми

Задачі, що стосуються прямолінійного руху точки, можна поділити на групи:

- визначення швидкості й прискорення точки за допомогою диференціювання рівняння прямолінійного руху;
- визначення закону зміни швидкості та руху на підставі відомого прискорення і початкових значень координати та швидкості шляхом інтегрування.

Задачі про криволінійний рух поділяють на групи:

- визначення швидкості та прискорення точки з рівнянь руху в декартовій системі координат;
- складання рівнянь руху точки, виходячи з її геометричного положення, а потім з них визначення траєкторії, швидкості та прискорення точки.

Теоретичні відомості

При векторному способі задання руху швидкість точки:

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}\,, \tag{12.1}$$

а прискорення

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}\,. \tag{12.2}$$

Якщо рух точки задано координатним способом, то модуль швидкості

$$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2}\,, \tag{12.3}$$

причому проекції вектора швидкості на відповідні осі описуються рівняннями

$$\mathrm{v}_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x},\ \mathrm{v}_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y},\ \mathrm{v}_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}\,. \tag{12.4}$$

Модуль прискорення при координатному способі задання руху точки

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,, \tag{12.5}$$

де проекції вектора прискорення на осі координат

$$a_x = \frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = \ddot{x}, \; a_y = \frac{d\mathrm{v}_y}{dt} = \ddot{y}, \; a_z = \frac{d\mathrm{v}_z}{dt} = \ddot{z}. \quad (12.6)$$

Напрямні косинуси векторів швидкості та прискорення визначаються виразами

$$\cos\left(\vec{\mathrm{v}}, \vec{i}\right) = \frac{\mathrm{v}_x}{\mathrm{v}}, \; \cos\left(\vec{\mathrm{v}}, \vec{j}\right) = \frac{\mathrm{v}_y}{\mathrm{v}}, \; \cos\left(\vec{\mathrm{v}}, \vec{k}\right) = \frac{\mathrm{v}_z}{\mathrm{v}}, \quad (12.7)$$

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{i}\right) = \frac{a_x}{a}, \; \cos\left(\vec{a}, \vec{j}\right) = \frac{a_y}{a}, \; \cos\left(\vec{a}, \vec{k}\right) = \frac{a_z}{a}. \quad (12.8)$$

Комплект завдань

В аудиторії можуть розглядатися, наприклад, задачі 11.4, 12.2, 12.4 [4], пр.5.1, пр.5.3 [3] різного ступеня складності.

Приклад 12.1 ([3]).

Положення точки на площині визначається радіусом-вектором $\vec{r} = 0{,}3t^2\vec{i} + 0{,}1t^3\vec{j}$. Визначити швидкість і прискорення точки у момент часу $t = 2$ с.

Розв’язання. Використовуючи співвідношення (11.3), запишемо рівняння руху в координатній формі (11.2):

$$x(t) = 0{,}3t^2, \quad y(t) = 0{,}1t^3.$$

Застосувавши рівняння (12.3), (12.4), визначимо швидкість точки

$$\mathrm{v}_x = \dot{x} = 0{,}6t, \; \mathrm{v}_y = \dot{y} = 0{,}3t^2,$$

$$\mathrm{v}_x\big|_{t=2\text{с}} = 1{,}2, \; \mathrm{v}_y\big|_{t=2\text{с}} = 1{,}2,$$

$$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2} = \sqrt{1{,}2^2 + 1{,}2^2} = 1{,}7 \text{ м/с}.$$

За формулами (12.5), (12.6) розраховуємо прискорення точки

$$a_x = \dot{\mathrm{v}}_x = \ddot{x} = 0{,}6, \; a_y = \dot{\mathrm{v}}_y = \ddot{y} = 0{,}6t,$$

$$a_x\big|_{t=2\text{с}} = 0{,}6, \; a_y\big|_{t=2\text{с}} = 1{,}2,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0{,}6^2 + 1{,}2^2} = 1{,}34 \text{ м/с}^2.$$

Приклад 12.2 ([3])

Визначити траєкторію точки М шатуна кривошипно-шатунного механізму, якщо $OA = 40$ см, $AM = MB = 40$ см, $\varphi = \frac{\pi}{6}t$ (t – в секундах).

Розв'язання.

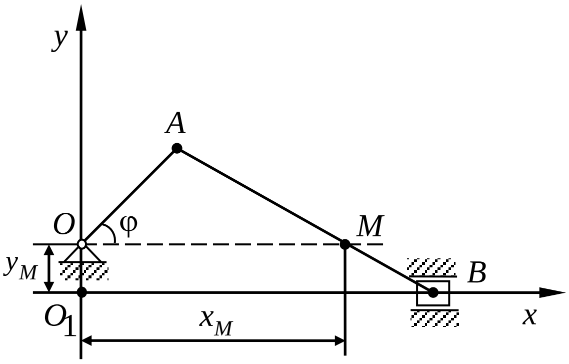


Рис. 12.1

Складемо рівняння руху точки М виходячи з геометричних міркувань:

$$x_M = OA\cos\varphi + AM\cos\varphi = 40\cos\frac{\pi}{6}t + 40\cos\frac{\pi}{6}t = 80\cos\frac{\pi}{6}t,$$

$$y_M = MB\sin\varphi = 40\sin\frac{\pi}{6}t.$$

Отже, $x_M = 80\cos\frac{\pi}{6}t$, $y_M = 40\sin\frac{\pi}{6}t$.

Визначимо рівняння траєкторії точки М шляхом виключення з рівнянь руху параметра t:

$$\cos\frac{\pi}{6}t = \frac{x_M}{80},\ \sin\frac{\pi}{6}t = \frac{y_M}{40}.$$

Основну тригонометричну залежність запишемо у вигляді:

$$\cos^2\frac{\pi}{6}t + \sin^2\frac{\pi}{6}t = 1$$

або

$$\frac{{x_M}^2}{80^2} + \frac{{y_M}^2}{40^2} = 1.$$

Отже, траєкторією точки М є еліпс з півосями 80 см і 40 см (рис. 12.2)

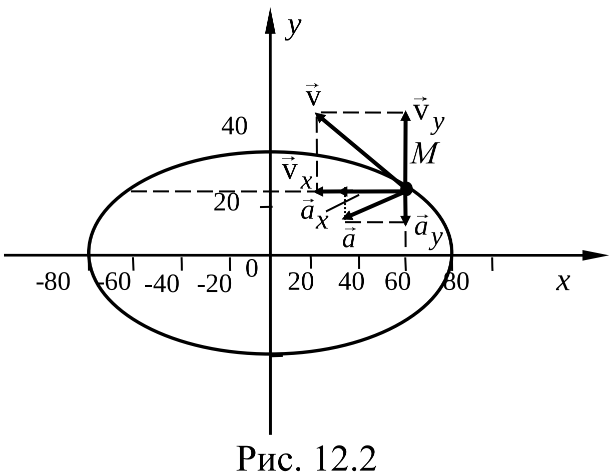


Рис. 12.2

Проекції вектора швидкості точки М на осі координат

$$\mathrm{v}_x = \dot{x}_M = -\frac{\pi}{6} 80 \sin\frac{\pi}{6} t,\quad \mathrm{v}_x\big|_{t=1\text{с}} = -6{,}67\pi,$$

$$\mathrm{v}_y = \dot{y}_M = \frac{\pi}{6} 40 \cos\frac{\pi}{6} t,\quad \mathrm{v}_y\big|_{t=1\text{с}} = 5{,}77\pi.$$

Модуль швидкості

$$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2} = 8{,}82\pi \text{ см/с.}$$

Проекції прискорення точки на осі координат

$$a_x = \dot{\mathrm{v}}_x = \ddot{x}_M = -\frac{\pi^2}{36} \cdot 80 \cos\frac{\pi}{6} t,\quad a_y = \dot{\mathrm{v}}_y = \ddot{y}_M = -\frac{\pi^2}{36} \cdot 40 \sin\frac{\pi}{6} t,$$

$$a_x\left(t = 1\text{с}\right) = -\frac{\pi^2}{36} \cdot 80 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -1{,}92\pi^2,\quad a_y\left(t = 1\text{с}\right) = -\frac{\pi^2}{36} \cdot 40 \cdot \frac{1}{2} = -0{,}55\pi^2.$$

Модуль прискорення точки

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(-1{,}92\pi^2\right)^2 + \left(-0{,}55\pi^2\right)^2} = 1{,}997\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Вектори швидкості і прискорення та їх проекції а осі координат показані на рис. 12.2.

Завдання на СРС

Для самостійної роботи рекомендується розв’язати задачі [4]: 11.3, 12.6, [3]: 5.1, 5.2 (визначити швидкість і прискорення).

Контрольні запитання

Пропонуються такі запитання для самоконтролю засвоєння матеріалу цього практичного заняття.

1. Як визначається швидкість точки при векторному способі задання її руху?
2. Як визначається швидкість точки при координатному способі задання руху точки?
3. Як визначається прискорення точки при векторному і координатному способах задання її руху?
4. Як визначаються напрямні косинуси векторів швидкості і прискорення точки при координатному способі задання її руху?

2.13. <u>Практичне заняття 13.</u> Рівномірний та рівнозмінний рух точки (тема 2.1).

Мета заняття

Метою даного заняття є знаходження швидкості та прискорення точки за натуральним способом задання руху.

Методичні прийоми

Задачі, що стосуються визначення величини і напряму швидкості, дотичного і нормального прискорень, якщо задано закон її руху по траєкторії, розв'язуються за допомогою диференціювання рівняння руху. Таким чином визначається швидкість і дотичне прискорення. Нормальне прискорення визначається окремо за відповідною формулою.

Задачі на визначення величини і напряму швидкості, дотичного і нормального прискорень при рівномірному і рівнозмінному русі розв'язуються за допомогою відповідних законів зміни швидкості і руху, а також відомих початкових значень координати та швидкості.

Теоретичні відомості

При натуральному способі задання руху точки модуль швидкості визначають так:

$$\vec{v} = \vec{\tau}\frac{ds}{dt}, \tag{13.1}$$

причому вектор швидкості спрямований вздовж дотичної ($\vec{\tau}$ – орт дотичної) до траєкторії. Орт дотичної $\vec{\tau}$
направлений в бік збільшення дугової координати.
Проекція вектора швидкості точки на напрям дотичної визначається з виразу

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{13.2}$$

При русі точки M у напрямку зростання дугової координати $v = \dot{s} > 0$ і вектор $\vec{v}$ спрямований так, як і вектор $\vec{\tau}$ (рис. 13.1). При русі точки M у напрямку зменшення дугової координати $v = \dot{s} < 0$ і, відповідно, вектор $\vec{v}$ спрямований у бік, протилежний орту $\vec{\tau}$.

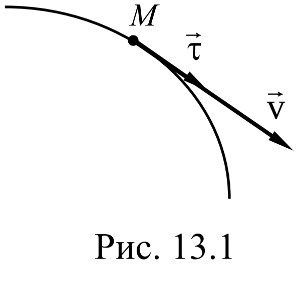


Рис. 13.1

Зауважимо, що дугова координата точки s у загальному випадку відрізняється від шляху σ, що пройшла точка по траєкторії. Шлях можна обрахувати за формулою:

$$\sigma = \int_{t_1}^{t_2} |ds|,$$

Зміну дугової координати:

$$s(t) = \pm \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

Прискорення точки можна визначити його проекціями на натуральні осі координат, що зв'язані з траєкторією рухомої точки і утворені ортами дотичної ($\vec{\tau}$), нормалі ($\vec{n}$) та бінормалі ($\vec{b}$):

$$a_\tau = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \ddot{s}, \; a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{\rho}, \; a_b = 0, \tag{13.3}$$

де ρ – радіус кривини траєкторії в даній точці.

Теорема. Повне прискорення точки дорівнює векторній сумі дотичного (тангенціального) і нормального прискорень точки:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \tag{13.4}$$

Зауважимо, що вектор дотичного або тангенціального прискорення $\vec{a}_\tau$ точки M спрямований вздовж дотичної до траєкторії в бік збільшення дугової координати при $a_\tau > 0$, а при $a_\tau < 0$ – в бік зменшення дугової координати. Вектор нормального прискорення $\vec{a}_n$ точки M спрямований у бік угнутості траєкторії точки до центра її кривини (тобто збігається за напрямом з вектором нормалі $\vec{n}$) (рис. 13.2).

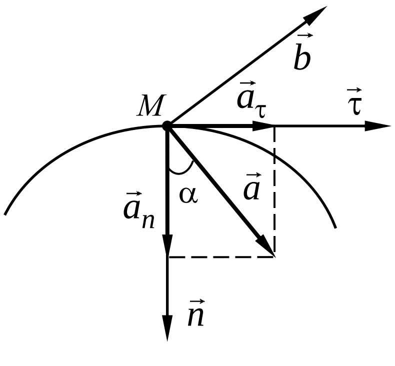


Рис. 13.2

Дотичне прискорення точки характеризує зміну швидкості за модулем, а нормальне прискорення – зміну швидкості за напрямом.

Якщо рух точки заданий координатним способом (11.2), то радіус кривини траєкторії можна отримати за формулою

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{\sqrt{a^2 - a_\tau^2}} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 - a_\tau^2}}. \tag{13.5}$$

Тут повне прискорення точки a визначається з виразу (12.5), а дотична складова прискорення

$$a_\tau = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{\pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}. \tag{13.6}$$

На підставі двох останніх формул радіус кривини

$$\rho = \frac{v^3}{\sqrt{a^2 v^2 - (\vec{v} \cdot \vec{a})^2}}. \tag{13.7}$$

Рівномірним називається рух точки по траєкторії, при якому числове значення швидкості увесь час залишається постійним: $v_\tau = \text{const}$.

Тоді

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = 0.$$

Якщо рівномірний рух криволінійний, то прискорення точки буде представлено лише нормальною складовою $\vec{a} = \vec{a}_n$ і $a = a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$. У даному випадку прискорення обумовлене тільки зміною вектора швидкості точки за напрямом.

Якщо рівномірний рух точки відбувається по прямолінійній траєкторії, то $\rho = \infty$ і, відповідно $a_n = 0$. Отже в цьому випадку $a = 0$. Зазначимо, що рівномірний прямолінійний рух є єдиним рухом, у якому прискорення точки увесь час дорівнює нулю.

Закон рівномірного руху можна визначити з формули (13.2), проінтегрувавши її і беручи до уваги, що в початковий момент часу $t_0 = 0$ точка має координату s_0. Маємо $s - s_0 = vt$.

Остаточно знаходимо закон рівномірного руху точки у вигляді:

$$s = s_0 + vt. \tag{13.8}$$

Рівнозмінним називається рух точки по траєкторії, при якому дотичне прискорення залишається увесь час постійним: $a_\tau = \text{const}$.

Вважаючи, що при $t_0 = 0$ виконується $s = s_0$ і $v = v_0$, інтегруємо перше рівняння (13.3). Отримаємо закон зміни швидкості точки при рівнозмінному русі:

$$v = v_0 + a_\tau t. \tag{13.9}$$

Інтегруючи (13.9) за часом отримаємо закон рівнозмінного руху точки:

$$s = \frac{a_\tau t^2}{2} + \mathrm{v}_0 t + s_0 \qquad (13.10)$$

Якщо модуль швидкості зростає, то рух називається *прискореним,* а якщо зменшується – *уповільненим.*

У випадку рівнозмінного прямолінійного руху точки $a_n = 0$ і у виразах (13.9), (13.10) варто приймати $a_\tau = a = \mathrm{const}$.

Комплект завдань

В аудиторії можуть розглядатися, наприклад, задачі 12.7, 12.9, 12.19 [4], пр.5.2, пр.5.4 [3].

Наведемо приклад розв'язання задач на визначення швидкості та прискорення точки при натуральному способі задання руху.

Приклад 13.1 ([3]).

Точка рухається по колу радіуса $R = 40$ см. Закон її руху по траєкторії $s = 20\sin\pi t$. Визначити величину і напрям швидкості, дотичного і нормального прискорень, а також повне прискорення у момент часу $t = 3$ с.

Розв'язання. Рух точки заданий натуральним способом. Тому швидкість точки

$$\mathrm{v} = \dot{s} = \left(20\sin\pi t\right)' = 20\pi\cos\pi t,$$

$$\mathrm{v}\big|_{t=3\text{с}} = -20\pi \text{ см/с}.$$

Знак «мінус» означає, що вектор швидкості точки напрямлений в бік, протилежний зростанню дугової координати.

Дотичне і нормальне прискорення точки:

$$a_\tau = \dot{\mathrm{v}} = \ddot{s} = -20\pi^2 \sin\pi t,$$

$$a_\tau\big|_{t=3\text{с}} = 0,$$

$$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R} = \frac{\left(-20\pi\right)^2}{40} = 10\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Прискорення $a_\tau = 0$, тому повне прискорення точки $a = a_n = 10\pi^2$ см/с^2.

Приклад 13.2 (12.7 [4]).

Потяг, маючи початкову швидкість 54 км/год, пройшов 600 м за перші 30 с. Вважаючи рух потяга рівнозмінним, визначити швидкість та прискорення потяга в кінці тридцятої секунди, якщо рух потяга відбувається на заокругленні радіуса R=1 км.

Розв'язання. Рух потяга, як зазначено в умові, рівнозмінний, тобто такий, при якому дотичне прискорення залишається увесь час постійним:

$a_\tau = \text{const}$. Запишемо спочатку закон зміни швидкості точки при рівнозмінному русі:

$$\text{v} = \text{v}_0 + a_\tau t, \qquad (1)$$

(формула (13.9)). Тут $\text{v}_0 = 15$ м/с (54 км/год = 15 м/с) – початкова швидкість, $t = 30$ с – час. v – швидкість в кінці тридцятої секунди, а також дотичне прискорення $a_\tau = \dfrac{d\text{v}}{dt}$ є поки що невідомими.

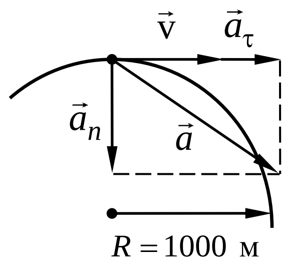


Рис. 13.3

Далі запишемо закон рівнозмінного руху точки:

$$s = \frac{a_\tau t^2}{2} + \text{v}_0 t + s_0, \qquad (2)$$

(формула (13.10)), де $s = 600$ м – відстань, яку пройшов потяг до тридцятої секунди, тобто значення натуральної (дугової) координати в цей момент, s_0 - початкова відстань або початкове значення натуральної координати, будемо вважати її рівною нулеві.

З рівності (2) знайдемо a_τ:

$$a_\tau(t = 30\text{с}) = \frac{600 - 450}{900} \cdot 2 = \frac{1}{3} \text{ м/с}^2.$$

Вектор дотичного прискорення співнапрямлений з вектором швидкості (рис. 13.3), оскільки отримане значення додатнє.

Підставимо отримане прискорення в рівність (1), звідки визначимо швидкість:

$$\text{v}(t = 30\text{с}) = 10 + 15 = 25 \text{ м/с}.$$

Визначимо нормальне прискорення за другою формулою (13.3):

$$a_n = \frac{\text{v}^2}{R} = \frac{625}{1000} = 0{,}625 \text{ м/с}^2,$$

де R – радіус кривини траєкторії. Вектор нормального прискорення напрямлений до центру кривини траєкторії (рис. 13.3).

Визначимо прискорення потяга:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 0{,}708 \text{ м/с}^2.$$

Приклад 13.3 (12.19 [4]).

На дротяне коло радіуса 10 см надіто колечко *M*; через нього проходить стрижень *OA*, який рівномірно обертається навколо точки *O*, що лежить на тому самому колі; кутова швидкість стрижня така, що він обертається на прямий кут за 5 с. Визначити швидкість і прискорення колечка *M* (рис. 13.4).

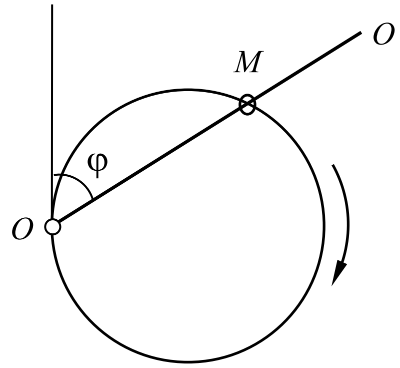


Рис. 13.4

Розв'язання. Оскільки стержень *OA* обертається навколо точки *O*, як зазначено в умові, рівномірно, то кутова швидкість обертання постійна ($\omega = \text{const}$). Кутова швидкість стрижня така, що він обертається на кут $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ за 5 с, отже її можна визначити за формулою:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{\pi}{2 \cdot 5} = \frac{\pi}{10} \text{ рад/с.} \tag{3}$$

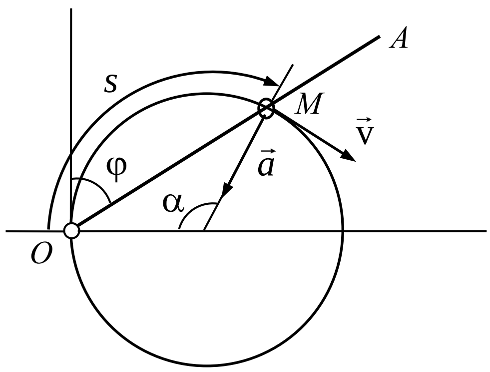


Рис. 13.5

Рух точки *M* можна задати натуральним способом. Вона проходить відстань s від початкового положення до кінцевого по дузі кола (рис. 13.5), яку можна задати як:

$$s = R \cdot \alpha . \tag{4}$$

З геометричних міркувань кут α можна визначити як $\alpha = 2\varphi$. Підставимо це в (13.14) і, використовуючи (13.13), маємо:

$$s = R \cdot 2\varphi = 10 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{10} t = 2\pi t . \tag{5}$$

Співвідношення (5) визначає закон руху точки M по траєкторії. Використовуючи формулу (13.2) визначимо швидкість руху точки M:

$$\mathrm{v} = \frac{ds}{dt} = 2\pi \text{ см/с.}$$

Використовуючи формули (13.3) визначимо дотичне і нормальне прискорення точки M:

$$a_\tau = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = 0\,;$$

$$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R} = \frac{4\pi^2}{10} = 0{,}4\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Отже рух точки М по дуговій траєкторії рівномірний криволінійний. Повне прискорення точки М складається лише з нормального (рис. 13.5): $a = a_n = 0{,}4\pi^2$ см/с^2.

Завдання на СРС

Для самостійної роботи рекомендується розв'язати задачі [4]: 12.13, 12.18, [3]: 5.3, 5.4.

Контрольні запитання

Пропонуються такі запитання для самоконтролю засвоєння матеріалу цього практичного заняття.

1. Як визначається швидкість і прискорення точки при натуральному способі задання її руху?

2. Записати всі відомі формули для знаходження радіусу кривизни траєкторії точки?

3. Записати формулу визначення шляху точки по траєкторії?

4. Дати визначення рівномірного і рівнозмінного руху. Як визначаються швидкість і прискорення точки при рівномірному і рівнозмінному русі?

2.14. <u>Практичне заняття 14.</u> Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі (тема 2.2).

Мета заняття

Метою даного заняття є визначення кінематичних характеристик обертального рівномірного та рівнозмінного руху: кутової швидкості, кутового прискорення. Визначення швидкості і прискорення окремої точки тіла при обертальному русі навколо нерухомої осі.

Методичні прийоми

Задачі, що стосуються визначення величини кутової швидкості, кутового прискорення при рівномірному і рівнозмінному обертанні розв'язуються за допомогою відповідних законів зміни кутової швидкості і кута повороту, а також відомих початкових значень кута повороту та кутової швидкості.

Задачі на визначення величини і напряму швидкості окремої точки тіла, дотичного і нормального прискорень при обертальному русі навколо осі розв'язуються за планом:

- знаходження кутової швидкості за допомогою диференціювання рівняння руху;
- визначення лінійної швидкості окремої точки тіла за формулою Ейлера;
- знаходження дотичного і нормального прискорень окремої точки тіла за відповідними формулами.

Теоретичні відомості

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому будь-яка пряма, проведена в тілі, залишається при русі паралельною своєму початковому напряму, тобто не повертається. Розглянемо рух механізму, що складається з двох кривошипів однакової довжини, насаджених на вали O_1 й O_2 і з'єднаних спарником *AB.* (Рис. 14.1). Очевидно, що при всіх положеннях механізму чотирикутник O_1ABO_2 залишається паралелограмом. Отже, спарник *AB* завжди паралельний прямій O_1O_2, і його рух поступальний.

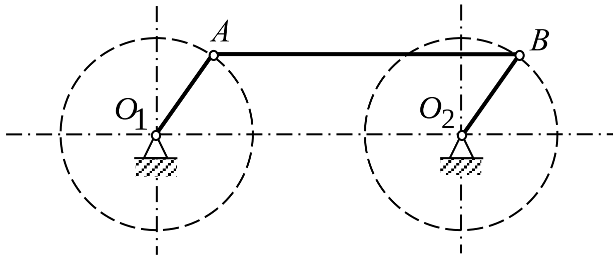


Рис. 14.1

Властивості поступального руху тіла визначаються теоремою: при поступальному русі твердого тіла всі його точки описують геометрично однакові (такі, що при накладанні збігаються) траєкторії і мають у кожний момент часу однакові за модулем і напрямом швидкості та прискорення.

З теореми випливає, що поступальний рух твердого тіла цілком визначається рухом будь-якої однієї з його точок. Отже, опанування кінематики поступального руху зводиться до вивчення кінематики точки, нами вже розглянутої.

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий його рух, при якому всі точки, що лежать на деякій прямій, незмінно зв'язаній з тілом, залишаються під час руху нерухомими (рис. 14.2). Ця пряма називається віссю обертання (пряма *AB* на рис. 14.2). Траєкторіями всіх точок тіла, що не лежать на осі обертання, є кола, площини яких перпендикулярні до осі обертання, а центри лежать на цій осі.

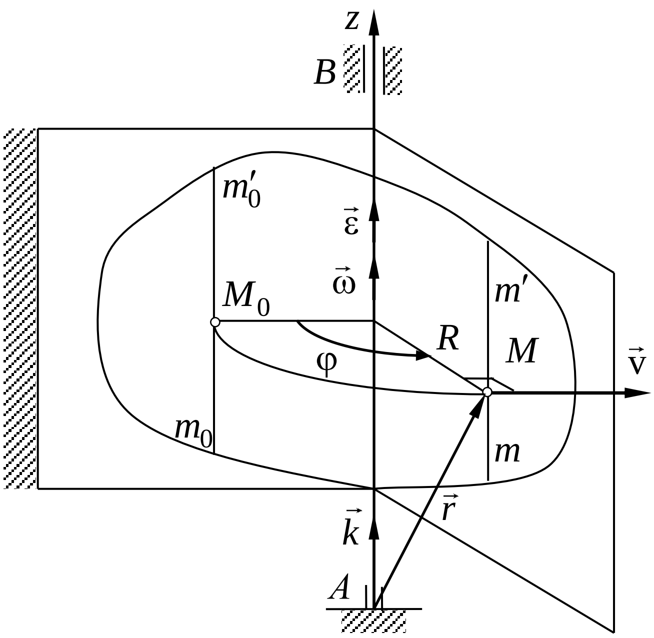


Рис. 14.2

Положення тіла при його обертанні навколо нерухомої осі визначається кутом повороту φ, який безперервно змінюється в часі:

$$\varphi = \varphi(t). \tag{14.1}$$

Вираз (14.1) називається кінематичним рівнянням обертального руху тіла навколо нерухомої осі.

Кутова швидкість характеризує зміну з часом кута повороту твердого тіла і дорівнює першій похідній за часом від кута повороту φ, тобто

$$\omega = \dot{\varphi}. \tag{14.2}$$

Розмірність кутової швидкості – рад/с. У техніці кутову швидкість часто визначають числом обертів за хвилину, позначаючи цю величину через n об/хв. Оскільки за один оберт тіло повертається на кут 2π рад, а 1 хв = 60 с, то

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}. \qquad (14.3)$$

Якщо кутова швидкість тіла весь час його руху залишається постійною ($\omega = \text{const}$), то обертання тіла називається *рівномірним*. При цьому кут повороту змінюється пропорційно часу:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \qquad (14.4)$$

де φ_0 – початковий кут повороту.

Кутову швидкість тіла зображують у вигляді ковзного вектора $\vec{\omega}$, модуль якого дорівнює $|\dot{\varphi}|$ і який спрямований уздовж осі обертання у той бік, звідки видно, що обертання відбувається проти ходу годинникової стрілки (рис. 14.2).

Кутове прискорення характеризує зміну з часом кутової швидкості тіла, а його числове (алгебричне) значення дорівнює першій похідній від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту тіла за часом:
$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$. (14.5)

Розмірність кутового прискорення – рад/с^2. Кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$, як і кутову швидкість тіла $\vec{\omega}$, зображують ковзним вектором, напрямленим уздовж осі обертання.

Коли тіло обертається *прискорено*, то величини напрям вектора $\vec{\varepsilon}$ збігається з напрямом вектора $\vec{\omega}$. Коли тіло обертається *сповільнено*, то вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ напрямлені уздовж осі обертання в протилежні боки.

Якщо кутове прискорення тіла за весь час руху залишається постійним ($\varepsilon = \text{const}$), то обертання називається *рівнозмінним*.

Отже, для рівнозмінного обертання:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \qquad (14.5)$$

Швидкість будь-якої точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, називається *лінійною*. Її обчислюють за *формулою Ейлера*:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \qquad (14.6)$$

$$v = \omega r \sin\alpha = \omega R$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки, швидкість якої визначається, відносно полюса, що знаходиться на осі повороту тіла (рис. 14.2). Якщо $R = r\sin\alpha$ – позначити радіус обертання точки (найкоротша відстань від точки до осі обертання), то швидкість точки можна визначити за формулою:

$$v = \omega R. \qquad (14.7)$$

Лінійна швидкість точки напрямлена по дотичній до кола радіуса R у бік обертання, тому перпендикулярна до радіуса обертання R (рис. 14.2).

Повне прискорення точки дорівнює сумі обертального і доосьового прискорень (рис. 14.3):

$$\vec{a} = \vec{a}^{\text{об}} + \vec{a}^{\text{до}}, \tag{14.8}$$

де обертальне прискорення

$$\vec{a}^{\text{об}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \tag{14.9}$$

спрямоване по дотичній до траєкторії точки, а до осьове визначається з виразу

$$\vec{a}^{\text{до}} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) \tag{14.10}$$

і спрямоване до осі повороту тіла за найкоротшою відстанню (по нормалі до траєкторії точки тіла у бік угнутості).

Прискорення може бути визначене з виразів:

$$a^{\text{об}} = \varepsilon R,\ \ a^{\text{до}} = \omega^2 R. \tag{14.11}$$

У зв'язку з тим, що $\vec{a}^{\text{об}} \perp \vec{a}^{\text{до}}$, модуль повного прискорення визначаємо за формулою:

$$a = \sqrt{\left(a^{\text{об}}\right)^2 + \left(a^{\text{до}}\right)^2} = \sqrt{\left(\varepsilon R\right)^2 + \left(\omega^2 R\right)^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \tag{14.12}$$

З рис. 14.3 видно, що

$$\text{tg}\alpha = \frac{a_A^{\text{об}}}{a_A^{\text{до}}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}\,. \tag{14.13}$$

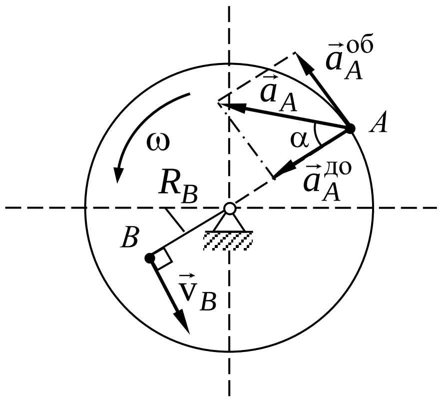


Рис. 14.3

Комплект завдань

В аудиторії можуть розглядатися, наприклад, задачі 13.5, 13.7, 13.15, 13.18 [4], приклади 6.1, 6.2, 6.3 [3].

Приклад 14.1 (13.5 [4]).

Вал починає обертатись рівноприскорено зі стану спокою; в перші 5 с він здійснює 12,5 обертів. Якою буде його кутова швидкість по закінченні п'ятої секунди?

Розв'язання. За умовою задачі вал обертається рівноприскорено, тому застосовуємо формулу рівноприскореного обертального руху (14.5):

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

де φ – це кут повороту на п'ятій секунді, φ_0 – початкове значення кута повороту, яке для даної задачі приймемо рівним нулеві, ω_0 – початкове значення кутової швидкості, яке для даної задачі також рівне нулеві, оскільки за умовою рух почався зі стану спокою. ε – кутове прискорення, $t = 5$ с – час.

Оскільки вал здійснив 12,5 обертів, а кожен оберт становить 2π рад, то відповідно кут, на який повернувся вал за 5 с:

$$\varphi = 2\pi \cdot 12{,}5 = 25\pi \text{ рад}.$$

Підставимо це значення в (14.12), формула набуде вигляду:

$$12{,}5 \cdot 2 \cdot \pi = \frac{\varepsilon \cdot 25}{2},$$

звідки $\varepsilon = 2\pi$ рад/с^2.

Кутову швидкість вала через 5 с можна визначити за першою формулою (14.5) , яка для нашого випадку набуде вигляду $\omega = \varepsilon t$:

$$\omega = \varepsilon t\left(t = 5\text{с}\right) = 10\pi \text{ рад/с}.$$

Приклад 14.2 ([3]).

Для спарника *AB* механізму, показаному на рис. 14.4, визначити швидкість і прискорення точки *C*, яка є серединою *AB*, якщо $\varphi = 2t$ рад, а $O_1A = O_2B = 1$ м, *AB*=2 м.

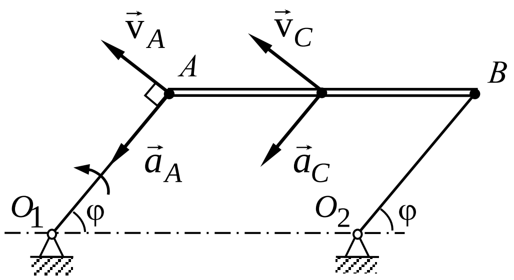


Рис. 14.4

Розв'язання. Спарник *AB* рухається поступально, тобто швидкості й прискорення руху всіх його точок однакові. Тому можна визначити швидкість і прискорення однієї його точки, а саме точки А, що також належить кривошипу O_1A, який обертається навколо осі O_1:

$$v_A = \omega \cdot O_1A.$$

Кутову швидкість кривошипа O_1A визначимо як першу похідну від кута його повороту φ:

$$\omega = \dot{\varphi} = 2 \text{ рад/с}.$$

Тоді $v_A = 2 \cdot 1 = 2$ м/с. Отже, $v_C = v_A = 2$ м/с.

Прискорення точки А

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\text{об}} + \vec{a}_A^{\text{до}},$$

де $a_A^{\text{до}} = \omega^2 \cdot O_1A$; $a_A^{об} = \varepsilon \cdot O_1A$.

Оскільки $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$, то отримаємо $a_A^{\text{об}} = 0$,

$$a_A = a_A^{\text{до}} = 2^2 \cdot 1 = 4 \text{ м/с}^2.$$

Отже, $a_C = a_A = 4$ м/с^2.

Приклад 14.3 (13.5 [4]).

Вантаж *A*, підвішений до нитки *AB* (Рис. 14.5), яка намотана на барабан, опускається рівноприскорено після стану спокою, при цьому приводить у рух барабан. За перші 3 с барабан робить 9 обертів. Визначити в кінці п'ятої секунди швидкість і прискорення точки ободу барабана, а також вантажу *A*, якщо діаметр барабана $D = 30$ см.

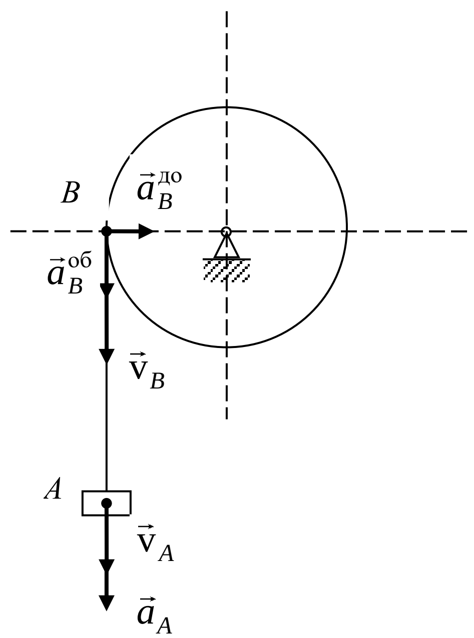


Рис.14.5

Розв'язання. Приймаємо $\varphi_0 = 0$. При обертанні з стану спокою початкова кутова швидкість барабана $\omega_0 = 0$. Тому

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{1}$$

$$\omega = \varepsilon t. \tag{2}$$

При t=3 с кут $\varphi = 2\pi \cdot 9$ рад. Отже, за формулою (1) визначаємо ε:

$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{2 \cdot 2\pi \cdot 9}{3^2} = 4\pi \text{ рад/с}^2.$$

Скориставшись залежністю (2), розрахуємо кутову швидкість в кінці п'тої секунди:

$$\omega\left(t=5c\right)=4\pi\cdot5=20\pi\ \text{рад/с}^2.$$

Визначимо прискорення точки В на п'ятій секунді:

$$\vec{a}_B=\vec{a}_B^{\,\text{об}}+\vec{a}_B^{\,\text{до}},$$

$$a_B^{\text{до}}=R\omega^2=0{,}15\cdot400\pi^2=591{,}6\ \text{м/с}^2,$$

$$a_B^{\text{об}}=R\varepsilon=0{,}15\cdot4\pi=1{,}88\ \text{м/с}^2,$$

$$a_B=\sqrt{\left(a_B^{\text{до}}\right)^2+\left(a_B^{\text{об}}\right)^2}\approx591{,}6\ \text{м/с}^2.$$

Швидкість точки B у кінці п'ятої секунди

$$\mathrm{v}_B=R\omega=0{,}15\cdot20\pi\approx9{,}42\ \text{м/с}.$$

Модуль повного прискорення точки приблизно дорівнює модулю до осьового прискорення. Швидкість вантажу дорівнює швидкості точки ободу барабана, тобто $\mathrm{v}\left(t=5c\right)=9{,}42$ м/с. Прискорення вантажу дорівнює обертальному прискоренню точки ободу: $a_A=a_A^{\text{об}}=1{,}88$ м/с^2. Таким чином, $\mathrm{v}=9{,}42$ м/с, $a_B=591$ м/с^2, $a_A=1{,}88$ м/с^2.

Завдання на СРС

Для самостійної роботи рекомендується розв'язати задачі [4]: 13.4, 13.14, 13.17, [3]: 6.2, 6.3, 6.11.

Контрольні запитання

Пропонуються такі запитання для самоконтролю засвоєння матеріалу цього практичного заняття.

1 Чи може точка тіла, що здійснює поступальний рух, рухатися по колу?

2. Чи можна звести кінематику поступального руху твердого тіла до кінематики точки?

3. Який вигляд мають траєкторії точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі?

4. Чому вектор кутового прискорення при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі напрямлений по тій самій осі, що і вектор кутової швидкості?

5. Чому у випадку обертання тіла навколо нерухомої осі обертальна складова прискорення еквівалентна тангенціальному прискоренню, а нормальна – до- осьовому?

2.15. <u>Практичне заняття 15.</u> Синтез найпростіших рухів твердого тіла (тема 2.2).

Мета заняття

Метою даного заняття є вивчення перетворення однієї найпростішої форми руху в іншу, а також визначення кінематичних характеристик руху при таких перетвореннях.

Методичні прийоми

Задачі, в яких застосовуються механізми для перетворення однієї найпростішої форми руху в іншу, називаються задачами на перетворення найпростіших рухів твердого тіла.

На практиці зустрічаються три групи таких задач:

- перетворення одного поступального руху в інший поступальний;
- перетворення обертального руху відносно однієї осі в обертальний рух відносно іншої осі;
- перетворення обертального руху в поступальний і навпаки.

Теоретичні відомості

Відомо, що для передачі обертального руху від одного тіла до іншого (перше називається провідним, а друге – веденим) використовуються передавальні механізми. Якщо осі провідного і веденого валів паралельні або перетинаються, то обертання можна передати за допомогою фрикційної або зубчастої передачі. При цьому зчеплення може бути як зовнішнім (рис. 15.1), так і внутрішнім (рис. 15.2).

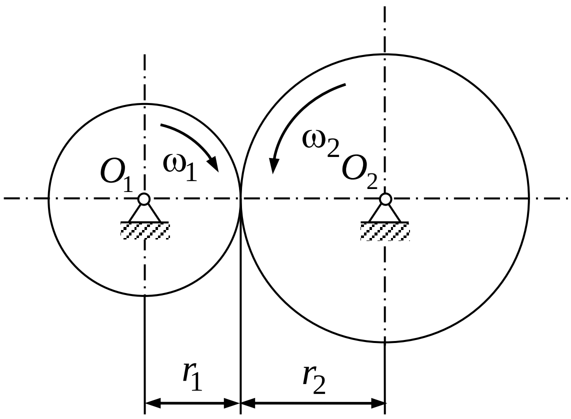


Рис. 15.1

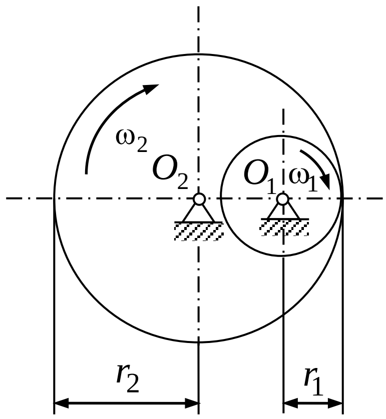


Рис. 15.2

Перетворення обертальних рухів з паралельними осями можна реалізувати також за допомогою пасових або ланцюгових передач. При цьому пасова передача з неперехресним рухом паса (рис. 15.3) еквівалентна внутрішньому зубчастому або фрикційному зчепленню, а за перехресним рухом паса (рис. 15.4) – зовнішньому зчепленню.

При внутрішньому зчепленні і неперехресній пасовій передачі напрями обертання обох коліс збігаються. У разі внутрішнього зчеплення і перехресної пасової передачі напрями обертання коліс протилежні.

Швидкості на ободах зубчатих коліс, які знаходяться у зчепленні, рівні між собою. Швидкості точок на ободах шківів пасової передачі також рівні між собою. Таким чином,

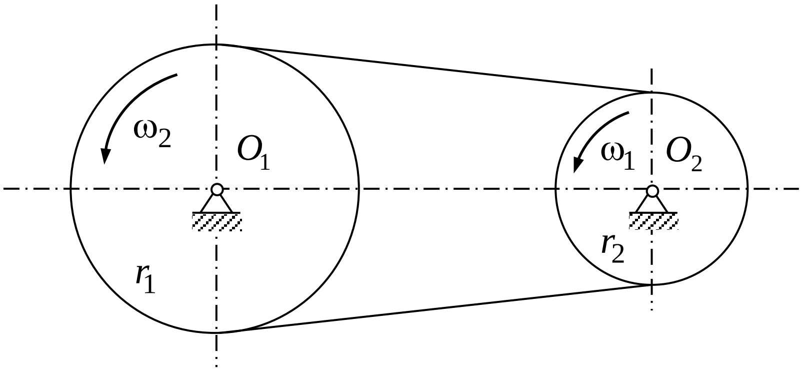


Рис. 15.3

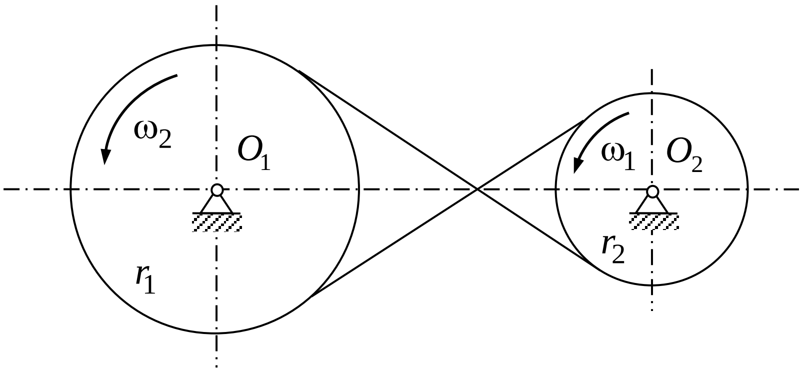


Рис. 15.4

$$\mathrm{v} = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \tag{15.1}$$

Звідки

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \tag{15.2}$$

Отже, кутові швидкості коліс зубчастих, фрикційних, а також пасових та ланцюгових передач обернено пропорційні радіусам коліс.

Відношення кутової швидкості провідного колеса до кутової швидкості веденого колеса називають передавальним числом:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \tag{15.3}$$

Якщо врахувати, що число зубців пропорційне довжині кіл, а отже, й радіусам, то передавальне число можна визначити через відповідне відношення числа зубців:

$$u = \frac{z_2}{z_1}.$$

При розв'язуванні задач на цю тему слід використовувати формули кінематики як точки, так і твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

Комплект завдань

В аудиторії можуть розглядатися, наприклад, задачі 14.1, 14.3, 14.5 [4], приклади 6.6, 6.7 [3].

Приклад 15.1 ([3]).

Редуктор (рис. 15.1) забезпечує обертання валів *I* і *II*, які мають спільну геометричну вісь, з різними кутовими швидкостями. Визначити число обертів за хвилину вала *II*, що відповідає частоті обертання вала *I,* якщо $n_1 = 40$ об/хв, а число зубців коліс $z_1 = 12$, $z_2 = 60$, $z_3 = 20$, $z_4 = 80$.

Розв'язання. Передавальне число редуктора

$$u = \frac{\omega_I}{\omega_{II}}$$

При цьому кутові швидкості провідного і веденого валів дорівнюють кутовим швидкостям з'єднаних з ними коліс, а саме:

$$\omega_I = \omega_1, \omega_{II} = \omega_4.$$

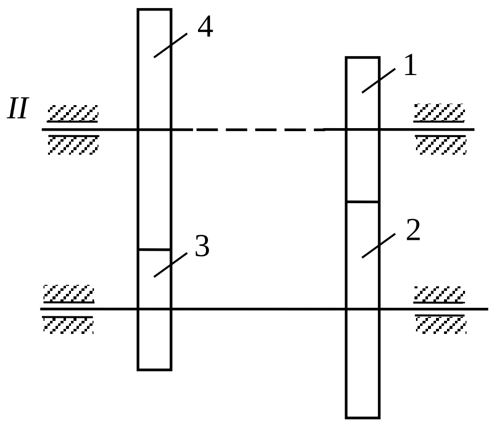


Рис. 15.5

Відношення кутових швидкостей першої пари *(1-2)* зчеплених зубчастих коліс:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Аналогічно для другої пари *(3-4)* зчеплених коліс записуємо:

$$\frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_4}{z_3}.$$

Колеса *2* і *3* жорстко зчеплені на спільному валу, тому $\omega_2 = \omega_3$. Перемноживши отримані вирази, одержимо:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3}; \ \ \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

Останній вираз визначає передавальне число редуктора, який складається з двох пар коліс *1-2* і *3-4*.

Враховуючи, що $\omega_4 = \dfrac{2\pi n_4}{60}$, а $\omega_1 = \dfrac{2\pi n_I}{60}$, знаходимо

$$n_4 = n_I \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} = 20 \text{ об/хв.}$$

Приклад 15.2 ([3]).

Визначити для конічної передачі (рис. 15.2) кутову швидкість обертання навколо нерухомої осі OO_2 колеса *2* радіуса $r_2 = 1$ м, якщо колесо *1* радіуса $r_1 = 0{,}5$ м обертається навколо нерухомої осі OO_1 з кутовою швидкістю $\omega_1 = 2$ рад/с. Обчислити швидкість точки *A*, віддаленої на $\dfrac{r_2}{2}$ від осі обертання OO_2.

Розв'язання. Визначимо кутову швидкість колеса *2* за співвідношенням

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1},$$

Звідки

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{r_2} = \frac{2 \cdot 0{,}5}{1} = 1 \text{рад/с.}$$

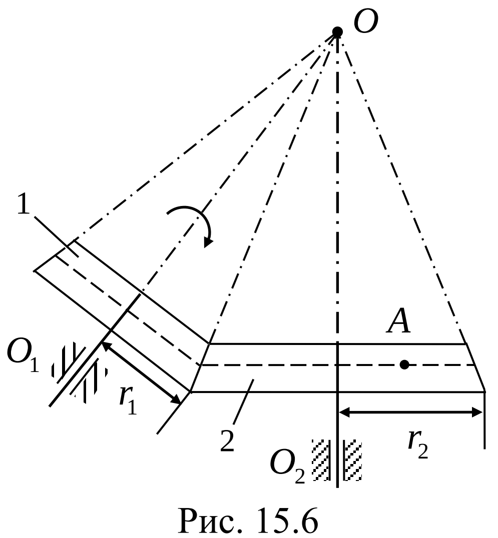


Рис. 15.6

Швидкість точки *A* колеса *2* знайдемо за формулою

$$\text{v}_A = \omega_2 \frac{r_2}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ м/с}.$$

Таким чином, $\omega_2 = 1$ рад/с, $\text{v}_A = 0{,}5$ м/с.

Приклад 15.3 (6.14 [3]).

Механізм складається з двох блоків *1* та *2* (рис. 15.7), які обертаються навколо нерухомих осей. Блоки з'єднані нерозтяжним пасом. Рух передається вантажу *D*. Швидкість вантажу *C* змінюється за законом $\text{v}_C = 36t^2$ см/с, радіуси блоків $R_1 = 40$ см, $r_1 = 30$ см, $R_2 = 25$ см, $r_2 = 10$ см. Визначити для моменту часу $t = 1{,}2$ с швидкість вантажу *D* і прискорення точки *M*, яка належить блоку *2*.

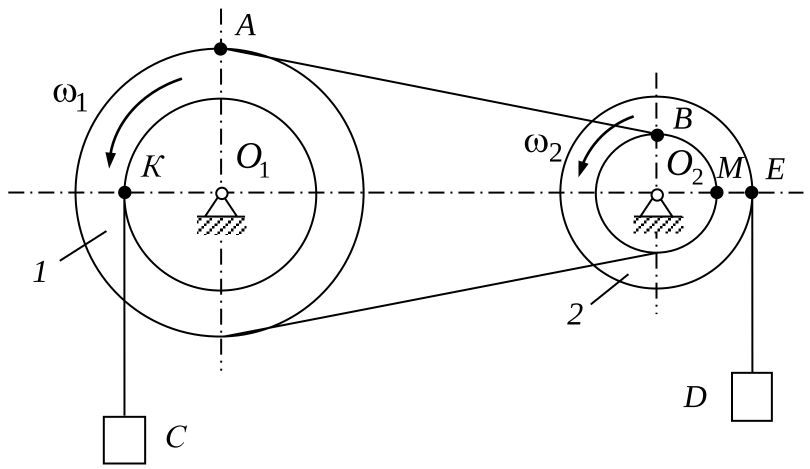


Рис. 15.7

Розв'язання. Вантаж C рухається поступально зі швидкістю $\text{v}_C = 36t^2$ см/с. Оскільки за умовою нитки нерозтяжні, то $\text{v}_C = \text{v}_K$. За формулою Ейлера кутова швидкість тіла *1*, яке здійснює обертальний рух:

$$\omega_1 = \frac{\text{v}_C}{r_1} = \frac{36t^2}{30} = 1{,}2t^2 \text{ с}^{-1}.$$

Швидкість точки *A* можна визначити наступним чином:

$$\text{v}_A = \omega_1 R_1 = 1{,}2t^2 \cdot 40 = 48t^2 \text{ см/с}.$$

Оскільки паси нерозтяжні, то швидкості в точках *A* і *B* рівні: $\text{v}_A = \text{v}_B$, причому швидкість точки *B*: $\text{v}_B = \omega_2 \cdot r_2$. Отже, з рівності швидкостей можна визначити кутову швидкість тіла *2*:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 \cdot R_1}{r_2} = \frac{1{,}2t^2 \cdot 40}{10} = 4{,}8t^2 \text{ с}^{-1}.$$

За формулою Ейлера визначимо швидкість точки *E*:

$$v_A = \omega_2 R_2 = 4{,}8t^2 \cdot 25 = 120t^2 \text{ см/с}.$$

Підставимо час: $v_E(t = 1{,}2\text{с}) = 120 \cdot 1{,}2^2 = 172{,}8$ см/с. Оскільки нитки, якими підвішено вантаж, нерозтяжні, то $v_E = v_D = 172{,}8$ см/с.

Визначимо прискорення точки *M*, яка здійснює обертальний рух. Прискорення при цьому являє собою суму дотичного і нормального прискорень: $\vec{a}_M = \vec{a}_M^{\text{об}} + \vec{a}_M^{\text{до}}$. Знайдемо їх:

$$a_M^{\text{об}} = a_M^{\tau} = (\dot{v}_M) = 48 \cdot 2t = 96t = 115{,}2 \text{ см/с}^2;$$

$$a_M^{\text{до}} = a_M^{n} = \frac{v_M^2}{r_2} = \frac{(48 \cdot 1{,}44)^2}{10} = 477{,}7 \text{ см/с}^2.$$

Прискорення точки *M* дорівнює:

$$a_M = \sqrt{\left(a_M^{\text{об}}\right)^2 + \left(a_M^{\text{до}}\right)^2} = \sqrt{(115{,}2)^2 + (477{,}7)^2} = 491{,}4 \text{ см/с}^2.$$

Завдання на СРС

Для самостійної роботи рекомендується розв’язати задачі [4]: 14.2, 14.4, 14.9; [3]: 6.15, 6.16.

Контрольні запитання

Пропонуються такі запитання для самоконтролю засвоєння матеріалу цього практичного заняття.

1. За якою формулою можна перейти при обчисленні кутової швидкості від обертів за хвилину до радіанів за секунду?
2. Чи можете Ви навести приклади механізмів, що перетворюють обертальний рух у поступальний?
3. Яке співвідношення між лінійними швидкостями має місце у механізмі із шестірнями?
4. Чому кількість зубів у шестірнях, що знаходяться у зчепленні, має бути пропорційна їхнім діаметрам?
5. Як у пасових передачах досягти того, щоб колеса обертались у протилежних напрямках?

2.16. <u>Практичне заняття 16.</u> Складний рух точки. Поступальний переносний рух (тема 2.3).

Мета заняття

Метою даного заняття є набуття навичок визначення кінематичних характеристик (абсолютної швидкості, абсолютного прискорення) складного руху точки за умови, що переносний рух є поступальним.

Методичні прийоми

Розв'язання задач кінематики складного руху передбачає отримання кінематичних характеристик точки у будь-який момент часу t.

Послідовність розв'язання задач кінематики складного руху точки може бути така:

1) вводимо дві системи координат, одну з них приймаємо за нерухому ($A\xi\eta\zeta$), а другу за рухому ($Oxyz$), яка жорстко зв'язана з рухомим тілом;

2) розкладаємо абсолютний рух точки на два складових рухи відносний і переносний;

3) визначаємо відносний рух точки. Для цього уявно зупиняємо переносний рух. Знаходимо положення, швидкість і прискорення точки у відносному русі для заданого моменту часу за правилами кінематики точки;

4) визначаємо переносний рух, для чого уявно зупиняємо точку в її відносному русі. Знаходимо швидкість і прискорення переносного руху точки за правилами кінематики точки твердого тіла як швидкість і прискорення тієї точки рухомої системи координат, жорстко зв'язаної з цим тілом, з якою в даний момент часу збігається досліджувана точка;

5) застосовуємо теорему про додавання швидкостей (16.3) і визначаємо абсолютну швидкість точки;

6) за теоремою про додавання прискорень (16.4) визначаємо абсолютне прискорення точки. У ряді випадків для визначення модуля абсолютного прискорення точки доцільно використовувати метод проекцій. Нагадаємо, що цей метод полягає у послідовному проектуванні a_a векторного виразу (16.4) на осі нерухомої системи координат, в результаті чого отримуємо проекції абсолютного прискорення на вказані осі $a_{a\xi}$, $a_{a\eta}$, $a_{a\varsigma}$. Далі знаходимо модуль абсолютного прискорення за відомою формулою

$$a_a = \sqrt{a_{a\xi}{}^2 + a_{a\eta}{}^2 + a_{a\zeta}{}^2}.$$

Теоретичні відомості

Нехай точка М рухається у рухомій системі координат $Oxyz$, яка здійснює певний рух відносно нерухомої системи координат $A\xi\eta\zeta$. У даному випадку йдеться про складний рух точки.

Рух точки у нерухомій системі координат $A\xi\eta\zeta$ називають *абсолютним*. Відповідно абсолютними називають траєкторію, швидкість і прискорення цієї точки (рис. 16.1).

Рух точки у рухомій системі координат $Oxyz$ називають *відносним*. Відносними називають траєкторію, швидкість і прискорення цієї точки.

Рух рухомої системи координат $Oxyz$ (або жорстко зв'язаного з нею тіла *G*) відносно нерухомої системи відліку $A\xi\eta\zeta$ є для рухомої точки *переносним* рухом, тобто *це рух тієї точки рухомої системи координат, з якою в даний момент часу збігається рухома точка М*. Відповідно швидкість і прискорення точки, жорстко зв’язаної з рухомою системою координат, в якій у даний момент часу знаходиться рухома точка, називають переносними.

Для кінематичних характеристик точки *М* будемо використовувати такі позначення:

$\vec{v}_a$ і $\vec{a}_a$ – абсолютні швидкість та прискорення;

$\vec{v}_r$ і $\vec{a}_r$ – відносні швидкість та прискорення;

$\vec{v}_e$ і $\vec{a}_e$ – переносні швидкість та прискорення;

$\vec{\rho}$ – радіус-вектор точки *М* у рухомій системі координат, а *x*, *y*, *z* – його проекції на осі цієї системи (тобто координати точки *М*);

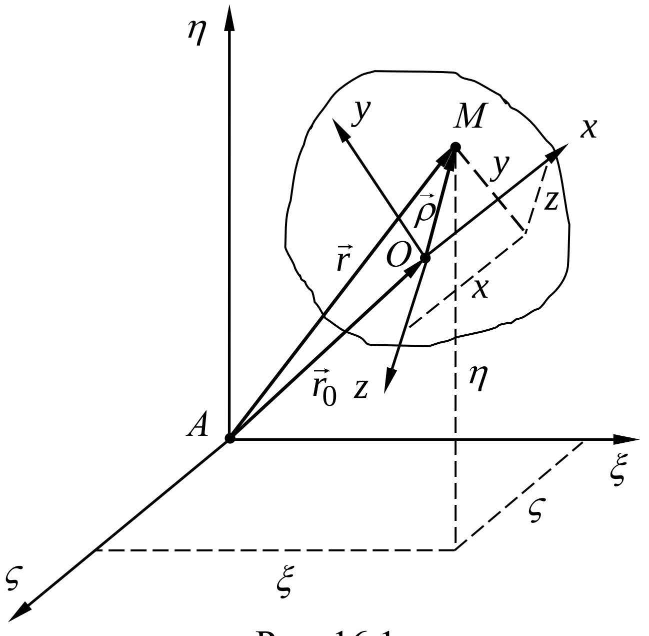


Рис. 16.1

$\vec{r}$ – радіус-вектор точки *М* у нерухомій системі координат, а ξ, η, ζ – його проекції на осі цієї системи (тобто координати точки *М* у нерухомій системі).

Залежності від часу координат точки M у нерухомій системі координат $A\xi\eta\zeta$

$$\xi = \xi(t),\ \eta = \eta(t),\ \zeta = \zeta(t), \tag{16.1}$$

враховуючи введені системи відліку, називають *кінематичними рівняннями абсолютного руху* точки.

Аналогічні залежності у рухомій системі координат

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \tag{16.2}$$

називають *кінематичними рівняннями відносного руху* точки.

Основною задачею кінематики складного руху є встановлення залежностей між кінематичними характеристиками абсолютного, переносного та відносного рухів.

Теорема про додавання швидкостей. Абсолютна швидкість $\vec{v}_a$ точки при складному русі дорівнює векторній сумі відносної $\vec{v}_r$ та $\vec{v}_e$ переносної швидкостей:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e. \tag{16.3}$$

Теорема про додавання прискорень (теорема Коріоліса). Абсолютне прискорення точки при складному русі дорівнює векторній сумі відносного, переносного прискорень та прискорення Коріоліса, тобто

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \tag{16.4}$$

Останній доданок у (16.4) називають прискоренням Коріоліса:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r. \tag{16.5}$$

Розглянемо умови, за яких прискорення Коріоліса дорівнює нулеві. Для цього запишемо модуль $\vec{a}_c$, користуючись правилом векторного добутку:

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r). \tag{16.6}$$

Отже, $a_c = 0$, якшо:

1) вектор ω_e дорівнює нулеві, тобто переносний рух є поступальним;

2) у даний момент часу відносна швидкість $\vec{v}_r = 0$;

3) $\sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 0$, тобто вектори $\vec{\omega}_e$ та $\vec{v}_r$ є колінеарними.

Комплект завдань

В аудиторії можуть розглядатися, наприклад, задачі 23.1, 23.5, 23.7 [4], приклад 7.5 [3].

Приклад 16.1 ([3]).

Візок D рухається поступально за законом $\xi(t) = 10\pi t^2$ см. По дузі радіуса R = 5 см переміщується точка M за законом $OM = s(t) = 5\pi t^2$ см.

Визначити абсолютне прискорення точки M в положенні, показаному на рис. 7.2.

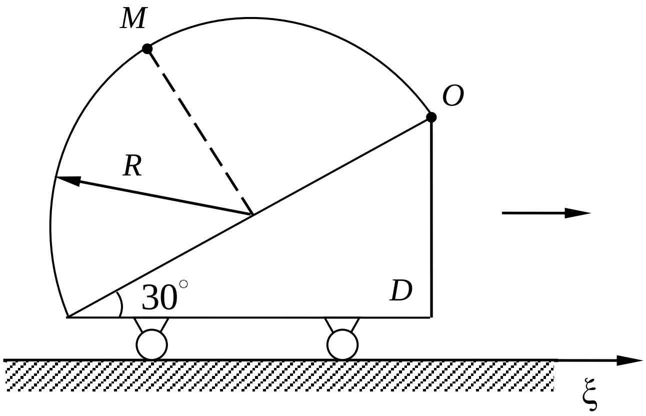


Рис. 16.2

Розв'язання. Вводимо дві системи координат: $O_1\xi\eta$ - нерухому; O_2xy - рухому, зв'язану з тілом (рис. 16.3).

За об'єкт дослідження вибираємо точку M, яка знаходиться у складному русі. Відносним рухом точки M є криволінійний рух по дузі радіуса R за законом $s_r = OM = s(t) = 5\pi t$ см. Визначимо відносну швидкість:

$$\text{v}_r = \dot{s}_r = 5\pi \text{ см/с.}$$

Вектор відносної швидкості напрямлений по дотичні до дуги радіуса R у бік руху, тобто від точки O. Відносно прискорення точки M подамо як векторну суму дотичного (тангенціального) $\vec{a}_{r\tau}$ та нормального $\vec{a}_{rn}$ прискорень:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_{r\tau} + \vec{a}_{rn},$$

які обчислюються за формулами

$$a_{r\tau} = \ddot{s}_r = \dot{\text{v}}_r = 0$$

$$a_{rn} = \frac{\text{v}_r^2}{\rho} = \frac{(5\pi)^2}{5} = 5\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Переносний рух — поступальний рух візка D за законом $\xi = 10\pi t^2$. Переносні швидкість і прискорення точки M визначаємо як швидкість і прискорення точки тіла, з якою збігається точка M, тому

$$\text{v}_e = \dot{\xi} = 20\pi t \text{ см/с},\ a_e = \ddot{\xi} = 20\pi \text{ см/с}^2.$$

Визначаємо прискорення Коріоліса

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{\text{v}}_r.$$

Оскільки переносний рух не обертальний, тобто $\omega_e = 0$, то $a_c = 0$.

Всі вектори показано на рис. 15.8. За теоремою Коріоліса запишемо

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c, \text{ або } \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e,$$

$$a_a = \sqrt{a_e^2 + (a_r^n)^2 + 2a_e a_r^n \cos 60^\circ};$$

$$a_a = \sqrt{(20\pi)^2 + (5\pi^2)^2 + 2\cdot 20\pi \cdot 5\pi^2 \cdot \frac{1}{2}} = 97{,}3\,\text{см/с}^2.$$

Таким чином, $a_a = 97{,}3\,\text{см/с}^2$.

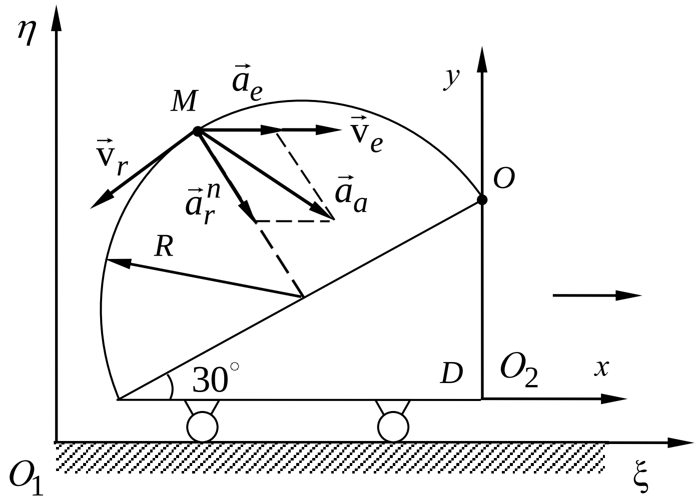


Рис. 16.3

Завдання на СРС

Для самостійної роботи рекомендується розв’язати задачі [4]: 23.2, 23.8, 23.10, [3]: 7.3, 7.6.

Контрольні запитання

Пропонуються такі запитання для самоконтролю засвоєння матеріалу цього практичного заняття.

1. В яких випадках рух точки потрібно розглядати як складний?
2. У чому полягає основна задача кінематики складного руху точки?
3. За якою теоремою визначається абсолютна швидкість точки при її складному русі?
4. За якою теоремою і формулою визначається абсолютне прискорення точки при її складному русі, якщо переносний рух поступальний?
5. Чому дорівнює прискорення Коріоліса точки при її складному русі, якщо переносний рух поступальний, пояснити чому?

2.17. <u>Практичне заняття 17.</u> Складний рух точки. Обертальний переносний рух (тема 2.3).

Мета заняття

Метою заняття є набуття умінь визначення кінематичних характеристик (абсолютної швидкості, абсолютного прискорення) складного руху точки за умови, що переносний рух є обертальним.

Методичні прийоми

Розв'язання задач кінематики складного руху передбачає отримання кінематичних характеристик точки у будь-який момент часу t.

Послідовність розв'язання задач кінематики складного руху точки може бути така:

1) вводимо дві системи координат, одну з них приймаємо за нерухому ($A\xi\eta\zeta$), а другу за рухому ($Oxyz$), яка жорстко зв'язана з рухомим тілом;

2) розкладаємо абсолютний рух точки на два складових рухи відносний і переносний;

3) визначаємо відносний рух точки. Для цього уявно зупиняємо переносний рух. Знаходимо положення, швидкість і прискорення точки у відносному русі для заданого моменту часу за правилами кінематики точки;

4) визначаємо переносний рух, для чого уявно зупиняємо точку в її відносному русі. Знаходимо швидкість і прискорення переносного руху точки за правилами кінематики точки твердого тіла як швидкість і прискорення тієї точки рухомої системи координат, жорстко зв'язаної з цим тілом, з якою в даний момент часу збігається досліджувана точка;

5) застосовуємо теорему про додавання швидкостей (16.3) і визначаємо абсолютну швидкість точки;

6) визначаємо прискорення Коріоліса за формулами (16.5) і (16.6);

7) за теоремою про додавання прискорень (16.4) визначаємо абсолютне прискорення точки.

Комплект завдань

В аудиторії можуть розглядатися, наприклад, задачі 23.27, 23.29, 23.41, 23.47 [4], 7.4, 7.7, 7.8 [3].

Приклад 17.1 (23.27 [4]).

По радіусу диска, що обертається навколо осі O_1O_2 з кутовою швидкістю $\omega = 2t$ рад/с в напрямі від центра диску до його ободу рухається точка M по закону $OM = 4t^2$. Радіус OM складає з віссю O_1O_2

кут 60°. Визначити величину абсолютної швидкості і абсолютного прискорення точки M в момент $t = 1$ с.

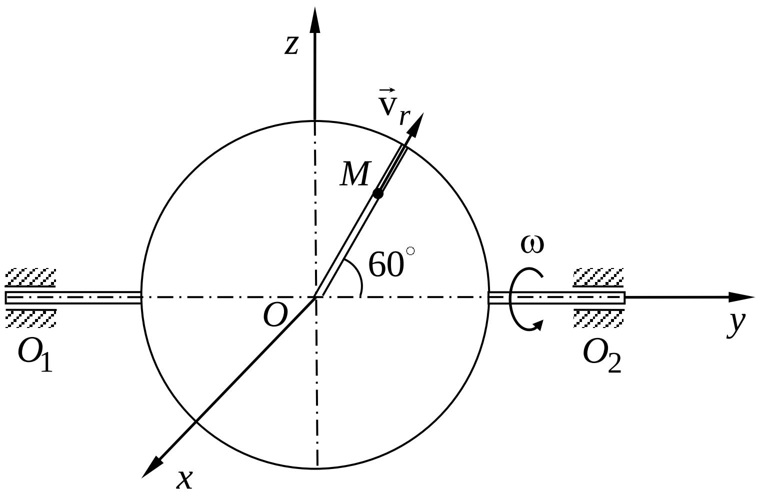


Рис. 17.1

Розв'язання. Розглянемо рух точки M як складний. Введемо дві системи координат: нерухому $A\xi\eta\zeta$ і рухому $Oxyz$, яку жорстко зв'яжемо з диском (рис. 17.2).

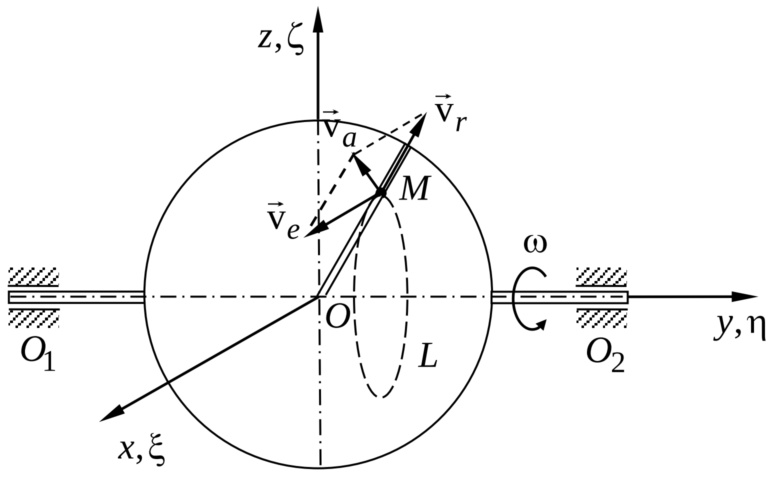


Рис. 17.2

Визначимо положення точки M в заданий момент часу:

$$OM = 4t^2 \left(t = 1\text{с}\right) = 4 \text{ см}.$$

Відносним рухом точки M є її прямолінійний рух вздовж радіуса OA за законом $s = OM = 4t^2$ см. Визначаємо відносну швидкість і прискорення точки M за правилами кінематики точки, що здійснює рух по прямолінійній траєкторії. Маємо відповідно

$$\mathrm{v}_r = \dot{s} = 8t \text{ см/с}, \qquad a_r = \ddot{s} = \dot{\mathrm{v}}_r = 8 \text{ см/с}^2.$$

В момент часу $t = 1$с:

$$v_r = 8\,\text{см/с}, \qquad a_r = 8 \text{ см/с}^2.$$

Додатнє значення a_r означає, що напрям $\vec{a}_r$ співнапрямлений з вектором швидкості $\vec{v}_r$ (рис. 17.3).

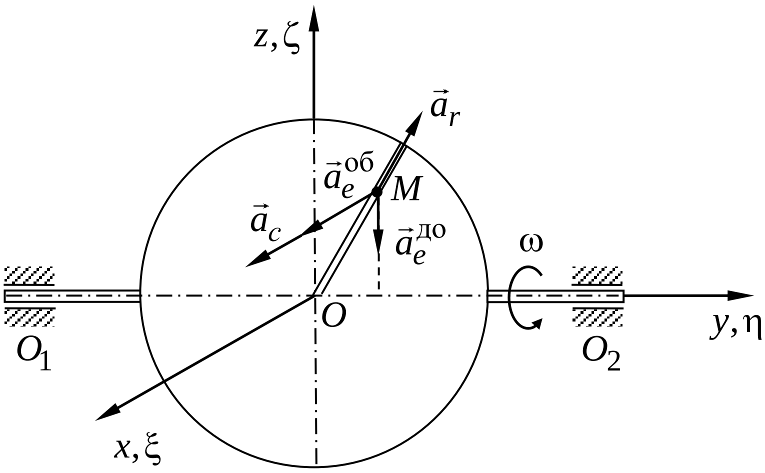


Рис. 17.3

Переносний рух – обертальний рух диска навколо нерухомої осі O_1O_2 з кутовою швидкістю $\omega = 2t$ рад/с.

Переносними швидкістю і прискоренням точки будуть швидкість і прискорення тієї точки пластини, з якою в даний момент збігається досліджувана точка *M*. Отже,

$$v_e = \omega_e \cdot MK,$$

де ω_e – модуль кутової швидкості пластини; *MK* – найкоротша відстань від точки *M* до осі O_1O_2 (радіус обертання точки):

$$MK = OM \sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ см}.$$

Для часу $t = 1$ с маємо:

$$\omega_e = 2t\left(t = 1\text{с}\right) = 2 \text{ рад/с}, \qquad v_e = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\,\text{см/с}.$$

Переносне прискорення точки М:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{об} + \vec{a}_e^{до},$$

де $a_e^{до} = \omega_e^2 \cdot MK$; $a_e^{об} = \varepsilon_e \cdot MK$; $\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = 2\,\text{рад/с}^2$.

Для $t = 1\text{с}$ отримаємо:

$$a_e^{об} = \varepsilon_e \cdot MK = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ см/с}^2, \qquad a_e^{до} = \omega_e^2 \cdot MK = 4 \cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \text{ см/с}^2.$$

Додатні знаки величин v_e і $a_e^{об}$ вказують на те, що вектори переносної швидкості $\vec{v}_e$ і переносного обертального прискорення $\vec{a}_e^{об}$ напрямлені у бік, що відповідає напряму обертання тіла навколо O_1O_2

(рис. 17.2, 17.3), тобто паралельно додатному напряму осі $O\xi$ по дотичній до кола L (рис. 17.2).

Визначаємо прискорення Коріоліса за формулою

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{\mathrm{v}}_r\,,$$

відповідно його модуль для $t = 1\,\text{с}$:

$$a_c = \omega_e \mathrm{v}_r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{\mathrm{v}}_r) = \omega_e \mathrm{v}_r \sin 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}\ \text{см/с}^2.$$

За правилом векторного добутку вектор $\vec{a}_c$ напрямлений вздовж осі Ox (рис. 17.3).

Визначаємо абсолютну швидкість точки M як геометричну суму відносної і переносної швидкостей:

$$\vec{\mathrm{v}}_a = \vec{\mathrm{v}}_r + \vec{\mathrm{v}}_e;$$

Оскільки вектори $\vec{\mathrm{v}}_r$ і $\vec{\mathrm{v}}_e$ взаємно перпендикулярні, то

$$\mathrm{v}_a = \sqrt{\mathrm{v}_r^2 + \mathrm{v}_e^2} = 10{,}58\ \text{см/с}.$$

Абсолютне прискорення точки знаходимо за теоремою Коріоліса

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c,$$

або

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e^{\,\text{об}} + \vec{a}_e^{\,\text{до}} + \vec{a}_c\,.$$

Спроектуємо цю рівність на осі системи координат $Oxyz$:

$$a_x = a_e^{\text{об}} + a_c = 20\sqrt{3}\ \text{см/с}^2; \qquad a_y = a_r \cdot \cos 60^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4\ \text{см/с}^2;$$

$$a_z = a_r \cdot \sin 60^\circ - a_e^{\text{до}} = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 8 \cdot \sqrt{3} = -4\sqrt{3}\ \text{см/с}^2;$$

Знайдемо абсолютне прискорення:

$$a_a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(20\sqrt{3}\right)^2 + (4)^2 + \left(-4\sqrt{3}\right)^2} = 35{,}55\ \text{см/с}^2.$$

Завдання на СРС

Для самостійної роботи рекомендується розв'язати задачі [4]: 23.14, 23.16, 23.30, 23.36, 23.48; [3]: 7.9, 7.10, 7.11.

Контрольні запитання

Пропонуються такі запитання для самоконтролю засвоєння матеріалу цього практичного заняття.

1. За якою теоремою визначається абсолютне прискорення точки при її складному русі, якщо переносний рух обертальний?
2. За якою формулою визначається прискорення Коріоліса точки при її складному русі?
3. Які є два способи визначення напряму прискорення Коріоліса точки при її складному русі?

2.18. <u>Практичне заняття 18.</u> Складний рух точки. Синтез простого і складного рухів точки (тема 2.3).

Мета заняття

Метою заняття є набуття умінь визначення кінематичних характеристик (абсолютної швидкості, абсолютного прискорення) складного руху точки за умови, що переносний рух є обертальним.

Методичні прийоми

Розв'язання задач кінематики складного руху передбачає отримання кінематичних характеристик точки у будь-який момент часу t.

Послідовність розв'язання задач кінематики складного руху точки може бути така:

1) вводимо дві системи координат, одну з них приймаємо за нерухому ($A\xi\eta\zeta$), а другу за рухому ($Oxyz$), яка жорстко зв'язана з рухомим тілом;

2) розкладаємо абсолютний рух точки на два складових рухи відносний і переносний;

3) визначаємо відносний рух точки. Для цього уявно зупиняємо переносний рух. Знаходимо положення, швидкість і прискорення точки у відносному русі для заданого моменту часу за правилами кінематики точки;

4) визначаємо переносний рух, для чого уявно зупиняємо точку в її відносному русі. Знаходимо швидкість і прискорення переносного руху точки за правилами кінематики точки твердого тіла як швидкість і прискорення тієї точки рухомої системи координат, жорстко зв'язаної з цим тілом, з якою в даний момент часу збігається досліджувана точка;

5) застосовуємо теорему про додавання швидкостей (16.3) і визначаємо абсолютну швидкість точки;

6) визначаємо прискорення Коріоліса за формулами (16.5) і (16.6);

7) за теоремою про додавання прискорень (16.4) визначаємо абсолютне прискорення точки.

Комплект завдань

В аудиторії можуть розглядатися приклади 7.12 [3], 22.17, 22.20, 22.21, 23.71 [4].

Приклад 18.1 (22.17 [4]).

В кулісному механізмі при качанні кривошипа OC навколо осі O, перпендикулярної до площини малюнка, повзун A, переміщуючись вздовж кривошипу OC, приводить в рух стержень AB, що рухається в вертикальних направляючих K. Відстань $OK = l$. Визначити швидкість

руху повзуна A відносно кривошипа OC в функції від кутової швидкості ω і кута повороту φ кривошипа (рис. 18.2).

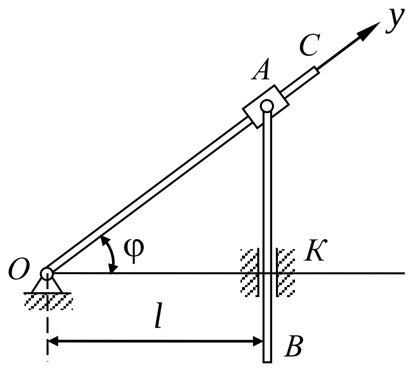
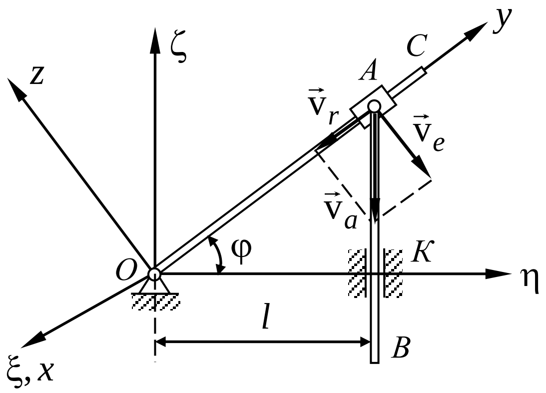


Рис. 18.1

Розв'язання. Розглянемо рух точки A як складний. Введемо дві системи координат: нерухому $O\xi\eta\zeta$ і рухому $Oxyz$, яку жорстко зв'яжемо з стержнем OC (рис. 18.2).



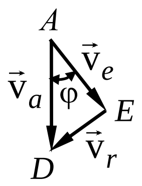


Рис. 18.2

Рис. 18.3

Відносним рухом точки A є її прямолінійний рух вздовж стержня OC. Переносний рух – обертальний рух стержня OC навколо нерухомої точки O.

Визначаємо співвідношення між відносною і переносною швидкостями точки A з трикутника ADE (рис. 18.3):

$$\text{v}_r = \text{v}_e \cdot \text{tg}\varphi. \qquad (1)$$

Переносна швидкість це швидкість тієї точки пластини, з якою в даний момент збігається досліджувана точка A. Отже,

$$\text{v}_e = \omega \cdot OA,$$

де ω – модуль кутової швидкості пластини; OA – радіус обертання точки:

$$OA = \frac{l}{\cos\varphi}.$$

Підставимо це значення в формулу (17.2):

$$v_e = \frac{\omega \cdot l}{\cos\varphi}.$$

Підставимо переносну швидкість в формулу (1):

$$v_r = \frac{\omega \cdot l}{\cos\varphi} \cdot \mathrm{tg}\varphi.$$

Приклад 18.2.

По дузі OA кола, радіуса $R = 2$ м, рухається точка M за законам $OM = 5\pi t$ метрів. При цьому тіло обертається навколо осі O_1. Визначити абсолютні швидкість і прискорення точки M для положення, яке показано на рис. 18.3. В даний момент часу кутова швидкість пластини $\omega_e = 2$ рад/с, а кутове прискорення $\varepsilon_e = 3$ рад/с^2.

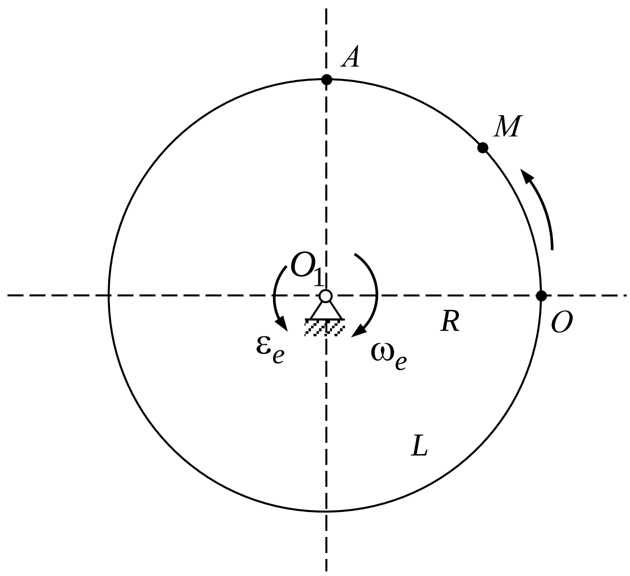


Рис. 18.3

Розв'язання. Рух точки M складний. Введемо дві системи координат: нерухому $O_1\xi\eta\zeta$ і рухому O_1xyz, яка жорстко зв'язана з тілом D (рис. 18.4).

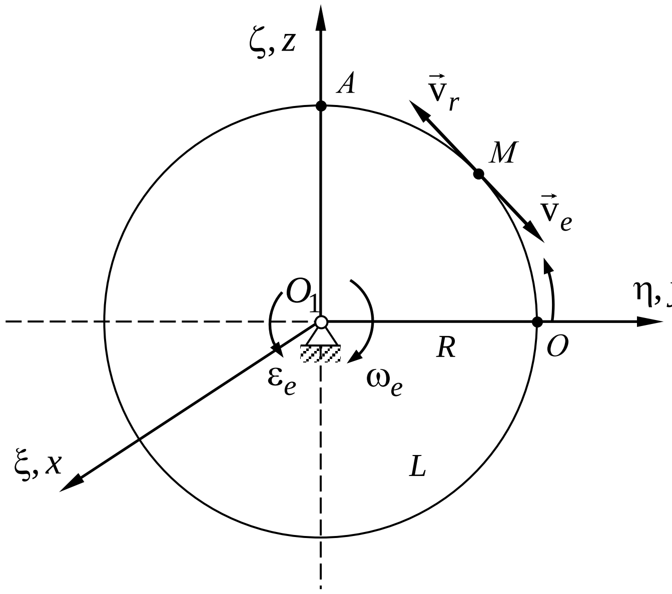


Рис. 18.4

Відносним рухом точки *M* є її рух по дузі *OA* радіуса R = 2 м кола *L* за законом $OM = 5\pi t$, а переносним – обертальний рух кола навколо осі $O_1\xi$. Визначаємо відносні швидкість і прискорення точки *M* за правилами кінематики точки, що здійснює рух по колу. Маємо

$$v_r = OM' = 5\pi \text{ м/с},$$

$$\vec{a}_r = \vec{a}_{r\tau} + \vec{a}_{rn},$$

де $a_{r\tau} = OM'' = 0$; $a_{rn} = \dfrac{v_r^2}{R} = \dfrac{25\pi^2}{2} = 12{,}5\pi^2$ м/с^2.

Переносні швидкість і прискорення точки *M* – швидкість і прискорення тієї точки кола *L*, з якою вданий момент збігається досліджувана точка *M*. Оскільки коло здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі O_1, то

$$v_e = \omega_e R,$$

або

$$v_e = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м/с},$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\text{об}} + \vec{a}_e^{\text{до}},$$

де $a_e^{\text{до}} = \omega_e^2 \cdot R = 2^2 \cdot 2 = 8$ м/с^2, $a_e^{\text{об}} = \varepsilon_e \cdot R = 3 \cdot 2 = 6$ м/с^2.

Напрям вектора $\vec{a}_e^{\text{об}}$ відповідає напряму ε_e (рис. 18.5).

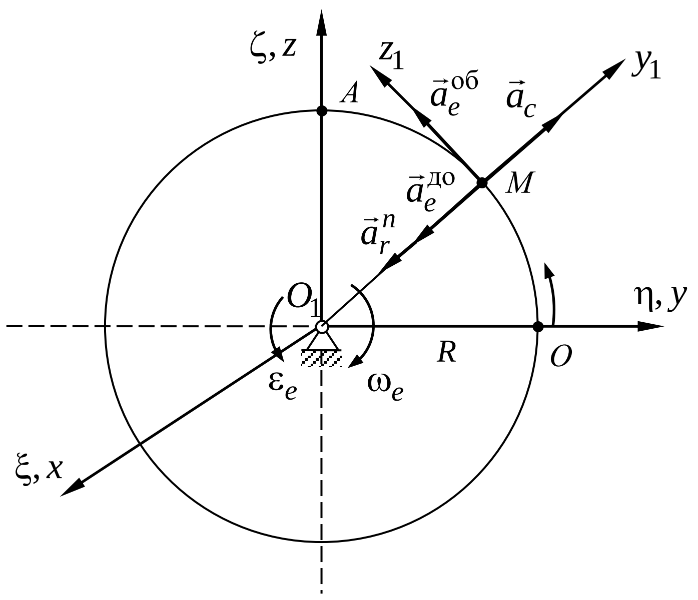


Рис. 18.5

Прискорення Коріоліса

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{\mathrm{v}}_r\,,$$

його модуль

$$a_c = 2\omega_e \cdot \mathrm{v}_r \sin 90^\circ = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 20\pi\ \text{м/с}^2.$$

Напрямки всіх складових абсолютного прискорення точки M показано на рис. 18.5. За теоремами про додавання швидкостей і прискорень одержимо

$$\vec{\mathrm{v}}_a = \vec{\mathrm{v}}_r + \vec{\mathrm{v}}_e\,,$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c\,.$$

Отже,

$$\mathrm{v}_a = \mathrm{v}_r - \mathrm{v}_e = 5\pi - 0{,}4 \approx 15{,}3\ \text{м/с}.$$

Спроектуємо прискорення на осі додаткової системи координат My_1z_1

$$a_{z_1} = a_e^{\text{об}} = 36\ \text{м/с}^2,$$

$$a_{y_1} = a_e^{\text{до}} + a_r^n - a_c = 8 + 12{,}5\pi^2 - 20\pi = 68{,}4\ \text{м/с}^2.$$

$$a_a = \sqrt{\left(a_{y_1}\right)^2 + \left(a_{z_1}\right)^2} \approx 68{,}7\,\text{м/с}^2.$$

Таким чином, результати розрахунку: $\mathrm{v}_a = 15{,}3$ м/с, $a_a = 68{,}7$ м/с^2.

Завдання на СРС

Для самостійної роботи рекомендується розв’язати задачі [4]: 22.25, 22.26, 23.23, 23.25.

Контрольні запитання

1. Як визначити абсолютне прискорення точки, якщо і відносний і переносний рухи є обертальними?

2. В яких випадках коріолісове прискорення дорівнює нулю?

3. Чому при русі точки в напрямку до північного і південного полюсів Землі коріолісове прискорення буде напрямлене в різні боки?

4. Поясніть чому в північній півкулі Землі підмивається правий берег великих річок, а в південній – навпаки?

Список літератури

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с. http://tm.kpi.ua/node/23.
2. Павловский М. А., Акинфиева Л. Ю., Бойчук О. Ф. Теоретическая механика. Статика. Кинематика. – К.: Вища шк., 1989. – 351 с.
3. Теоретична механіка: Збірник задач / О. С. Апостолюк, В. М. Воробйов, Д. І. Ільчишина та ін.; За ред. М.А. Павловського. - К.: Техніка, 2007. – 400 с. http://tm.kpi.ua/node/23 .
4. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике.- М.: Наука, 1986.-448 с.
5. Яблонский А. А. и др. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. - М.: Высш. шк., 1985. - 368 с.
6. Теоретична механіка – 1[Електронний ресурс]: методичні рекомендації до виконання розрахунково-графічної роботи для студентів механіко-машинобудівного інституту напрямів підготовки 6.050502 «Інженерна механіка», 6.050503 «Машинобудування» всіх форм навчання / НТУУ «КПІ» ; уклад. Т. М. Можаровська, В. Ф. Кришталь. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,62 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2014. – 32 с. – Назва з екрана. – Доступ : http://ela.kpi.ua/handle/123456789/9728
7. Айзенберг Т. Б. и др. Руководство к решению задач по теоретической механике. - М.: Высш. шк., 1963. – 420 с.
8. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. Т.1. - М.: Наука, 1979. – 272 с.
9. Бать М.И., Джанелидзе М.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. М.: Наука. Т. 2, 1972.
10. Иванова Л. К., Линкин Л. Д., И. М. Чертов, Л. М. Шальда, Теоретическая механика в примерах и задачах сварочного производства, Киев, НМК ВО,1992.-88 с.
11. Кришталь В. Ф., Левчук К. Г. Практикум для студентів напряму 6.050502 Інженера механіка. Теоретична механіка. Статика. Навчальний посібник. – Київ: НТУУ «КПІ». 2010, 70 с. http://ela.kpi.ua/handle/123456789/619 .