

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”**

**А.Є. БАБЕНКО, С.Л. БОЙКО, О.О. БОРОНКО, Я.І. ЛАВРЕНКО, С.І. ТРУБАЧЕВ**

**ХВИЛЬОВІ ЗУБЧАСТІ ПЕРЕДАЧІ**

**МОНОГРАФІЯ**

**КИЇВ – 2017**

Рецензенти:

д-р техн. наук, проф. О.Є. Богініч

д-р техн. наук, проф. С.О. Піскунов

рекомендовано до друку вченою радою Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (протокол № 10 від 06.11.2017 р. )

<b>Ш-</b>	<b>Бабенко А.Є. Хвильові зубчасті передачі: Монографія / А.Є.Бабенко, С.Л.Бойко, О.О.Боронко, Я.І.Лавренко, С.І.Трубачев. – Нац.техн.ун-т України «КПІ імені Ігоря Сікорського». –Київ: А, 2017. – 112с.</b>
-----------	--

## ISBN

Монографію присвячено створенню та обґрунтуванню ефективної розрахункової моделі гнучкого колеса і зубчастого вінця ГК хвильової зубчастої передачі. В результаті проведених досліджень на основі варіаційно-сіткових методів створена методика уточненого розрахунку напружено-деформованого стану гнучкого колеса продемонстрована на прикладі ХЗП-160. Вирішена задача про НДС зубчастого вінця, як тривимірна задача теорії пружності, яка дозволила встановити характер розподілення напружень, як по профілю так і утворюючого вінця.

На основі створеної розрахункової моделі чисельно визначена резонансна частота та виявлено вплив «денця» на жорсткість та резонансну частоту ГК типу «стакан».

## ISBN

УДК 539.3

© А.Є.Бабенко, С.Л. Бойко, О.О.Боронко

© Я.І.Лавренко, С.І.Трубачев, 2017

© НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»

© ТзОВ «Видавництво А», 2017

## ЗМІСТ

Позначення	5
Вступ	6
1. Аналіз і постановка проблеми розрахунку гнучкого колеса зубчастого вінця гнучкого колеса хвильової передачі	7
2. Чисельне дослідження напружено – деформованого стану гнучкого колеса і зубчастого вінця гнучкого колеса хвильової зубчастої передачі	14
2.1 Форма деформації гнучкого колеса	14
2.2 Розподіл навантаження між зубами	16
2.3 Вибір розрахункової схеми і методики розрахунку гнучкого колеса хвильової зубчастої передачі	24
3. Основні співвідношення варіаційно – сіткового методу для дослідження напружено – деформованого стану оболонкових конструкцій	33
3.1 Класична теорія коливань тонких оболонок	33
3.1.1 Геометрія і класифікація оболонок	33
3.2 Варіаційне формулювання завдання про напружено – деформований стан тонких оболонок і зведення її до задачі мінімізації	36
3.3 Побудова скінченномірних просторів	37
3.4 Використання методу по координатного спуску (МПС) у варіаційно – сіткових схемах при розрахунку оболонкових систем	39
3.5 Розрахунок тонких оболонок	42
3.6 Розв’язок тестових задач	50
3.7 Жорсткість обода	56
3.8 Динамічні навантаження в гнучкому колесі, викликані зміною його форми в часі	66
3.9 Результати розрахунку напружено – деформованого стану гнучкого колеса	68

4.	Експериментальне дослідження відповідності вибору розрахункових моделей для визначення напружено – деформованого стану гнучкого колеса і зубчастого вінця гнучкого колеса	80
4.1	Основні поняття методу фото пружності	80
4.2	Методика проведення експерименту на плоских зубчастих зразках	86
4.3	Результати експериментального дослідження плоских зразків	92
4.4	Методика проведення експерименту на об'ємних моделях	96
4.5	Результати експериментального дослідження об'ємних моделей	100
	Висновок	104
	Список використаних джерел	105
	Додаток	107

## ПОЗНАЧЕННЯ

Для скорочення запису в роботі прийняті наступні позначення:

ГК – гнучке колесо;

ГХД – генератор хвиль деформації;

ЖК – жорстке колесо;

КСП – координатно-синхронний поляризатор;

МПС – метод покоординатного спуску;

НДС – напружено-деформований стан;

СЛАР – система лінійних алгебраїчних рівнянь;

ХЗП – хвильова зубчаста передача;

ХП – хвильова передача.

## ВСТУП

Підвищення потужностей машин і обладнання, при одночасному зменшенні їхніх габаритних розмірів, металомісткості, енергоспоживання і вартості, є актуальною проблемою машинобудування в Україні. Тому, останнім часом різко зросли вимоги до навантажувальної здатності, швидкохідності, жорсткості та точності механічних приводів, що займають важливе місце в конструкції машини. Відомо, що найкращих показників по масогабаритних характеристиках приводу можна досягти, якщо застосовувати двигуни з великою швидкістю обертання і механічні передачі з великим передатним відношенням і високим коефіцієнтом корисної дії (ККД), наприклад, хвильові передачі.

Підвищити навантажувальну здатність і зменшити габаритні розміри ХП можна шляхом одночасного включення в роботу гнучких елементів. Таким чином, робота спрямована на створення нової високоефективної передачі та математичної моделі її розрахунку, вирішує важливу науково-технічну задачу і є актуальною на даний час.

Хвильова передача є елементом високих технологій. Її використання дуже ефективно при створенні нової техніки. У розвинутих країнах хвильові передачі широко досліджуються і застосовуються. При цьому результати досліджень цих передач, особливо теоретичні, не публікуються. У СНД більшість результатів досліджень з ХП опубліковані до 1985 р. і стосуються звичайної хвильової передачі з генератором кочення і з одним гнучким колесом. При цьому можна стверджувати, що можливості підвищення швидкохідності, навантажувальної здатності, крутильної жорсткості такої передачі практично вичерпані, тому що геометрія зачеплення і конструктивні параметри ХП стали близькі до оптимальних. Однак, розробка методики розрахунку гнучких елементів ХП дозволяє одержати більш економічний механічний привід.

## РОЗДІЛ 1

### АНАЛІЗ І ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ РОЗРАХУНКУ ГНУЧКОГО КОЛЕСА ЗУБЧАСТОГО ВІНЦЯ ГНУЧКОГО КОЛЕСА ХВИЛЬНОЇ ПЕРЕДАЧІ

Поява хвильових передач послужила поштовхом до їх досліджень і появи численних статей та інформації з даного питання.

Завдяки своїм специфічним, властивим тільки їй особливостям і перевагам, хвильова передача за короткий проміжок часу набула поширення практично в усіх галузях народного господарства.

Хвильові зубчасті передачі (ХЗП) складаються з трьох елементів: жорсткого колеса, гнучкого колеса і генератора хвиль деформації.

Жорстке колесо (ЖК) є товстостінним жорстким кільцем з внутрішніми шліцьовими зубами. Воно зазвичай функціонує як зафіксований або необертальний елемент, але у певних пристроях може використовуватися як вихідний обертальний елемент.

Гнучке колесо (ГК), що має зуби на зовнішній поверхні, є нежорстким гнучким тонкостінним циліндричним колесом у вигляді стакану, який в околі менше жорсткого колеса та має на два зубці менше ніж у попередньо згаданого. Воно зазвичай служить вихідним обертальним елементом, але може використовуватися як зафіксований необертальний елемент, у випадку коли вихід здійснюється через жорстке колесо.

Генератор хвиль деформації (ГХД) – овальний кулачок, поміщений у блок кулькових підшипників кочення. Він зазвичай функціонує як вхідний обертальний елемент. Коли ГХД введений в отвір гнучкого колеса, він надає йому форму овалу. Тим самим примушує зовнішні зуби гнучкого колеса зачіплятися з внутрішніми зубами жорсткого колеса в двох місцях, рівних по відстані від відповідного кола на  $180^\circ$ , внаслідок чого робоче зубчасте зачеплення досягається в точках зачеплення.

За останні роки вийшло у світ немало робіт, в яких розглянуті питання проектування і застосування хвильових передач, також проведені дослідження по усіх проблемах в цій області. Проте на сьогодні ще не можна стверджувати, що хоч б одна їхня проблема була повністю вирішена.

Аналізуючи найменування і об'єм зарубіжних публікацій по хвильовим передачам, стає очевидним, що велика частина з них має рекламний характер. Значна частина робіт присвячена опису особливостей застосування хвильових передач в різних приводах спеціального призначення. Такі відомості характерні особливо для робіт Великобританії, США, Японії.

Часто для вдосконалення і збільшення ресурсу роботи конструкції хвильової передачі, велику увагу приділяють дослідженню конструктивних елементів цієї передачі на міцність.

Експериментальна і теоретична робота [1] показала, що при раціональному виборі параметрів, хвильова передача здатна витримати навантаження, які значно перевищують експлуатаційні без проскакування.

Кінематична точність хвильових передач впливає на режим роботи, довговічність, зміну розподілу навантаження на зуби і інші параметри ХП. А наявність зубчастого вінця гнучкого колеса в цілому впливає на напружено-деформований стан колеса і на рівень місцевих напружень, виникаючих в западинах зубців.

Для оцінки тих змін, які вносяться зубцями вінця в картину розподілу напружень, пропонується введення коефіцієнта концентрації напружень в западинах зубів. Визначення даного коефіцієнта ведеться по різному. Існує припущення, що форма вершини зуба практично не впливає на концентрацію напружень, крім того, помітно не впливає кут профілю зуба. Існує теоретичне визначення концентрації напружень та визначення методом скінчених елементів. Проте точність останнього методу в деяких випадках недостатня.

Врахування концентрації напружень при розрахунках зубчастих передач на міцність викладена в [2]. Загальні відомості по коефіцієнту концентрації напружень і деформацій наведено в роботі [3], але по ньому важко підібрати аналог зубчастого



вінця гнучкого колеса хвильової передачі. Відомо, що гнучке колесо в зоні зубчастого вінця сприймає спільну дію напружень згину, розтягування та напружень від передачі навантаження через зубці. Концентрація напружень від передачі навантаження через зубці носить той же характер. Крім того, ці напруження складають не більше 20-30% від сумарних розтягуючих напружень на зовнішній поверхні гнучкого колеса [3] і мають місце в зоні стискання, а найбільші напруження в гнучкому колесі виникають в зоні облягання гнучким колесом форми хвилеутворювача. Ефект концентрації напружень в зубчастому вінці гнучкого колеса був експериментально досліджений в роботі [4].

Є суперечливі відомості по впливу товщини стінки гнучкого колеса на рівень концентрації напружень в западинах зубів. Наприклад один автор відзначає, що ефективний коефіцієнт концентрації напружень падає зі збільшенням товщини стінки гнучкого колеса і зростає при збільшенні модуля зачеплення. Деякі автори вказують на зниження напружень в западинах зубів із зростанням відношення товщини гнучкого колеса до висоти зубців. Дехто вказує на зворотний зв'язок коефіцієнта концентрації з товщиною стінки гнучкого колеса, а саме: концентрація напружень збільшується із зростанням товщини стінки гнучкого колеса.

Коефіцієнти концентрації напружень, визначені різними авторами для зубчастого вінця гнучкого колеса хвильової передачі, не співпадають і мають досить істотні відмінності за величиною. Відомо, що найбільш інтенсивний знос відбувається в період припрацювання, але і він призводить лише до незначної зміни форми зуба, що не може істотно позначатися на напружено-деформованому стані зубчастого вінця і гнучкого колеса в цілому. Головною причиною виходу з ладу хвильових передач є руйнування стінки гнучкого колеса внаслідок утворення розвитку втомної тріщини в западині зуба, що підтверджено в ході стендових експлуатаційних випробувань хвильових передач.

Дія знакозмінних напружень на зовнішній поверхні гнучкого колеса призводить до утворення тріщини. Експериментальна робота [4] показує, що причиною зародження втомної тріщини є високий рівень концентрації напружень в зоні зубчастого вінця.

Огляд конструкцій гнучких коліс хвильових зубчастих передач дозволяє зробити висновок, що найбільш високі здібності навантажень і ККД, мають передачі з гнучким колесом типу стакан.

При розрахунку гнучких коліс хвильових передач використовуються, як правило, лінійні теорії. Враховуючи, що переміщення серединних поверхонь гнучких коліс звичайне того ж порядку, що і їх товщина, в роботі [5] досліджена похибка лінійних теорій для цього випадку та доведена коректність їх застосування.

Дослідження напружено - деформованого стану гнучких коліс відбувається по декількох напрямках. До них відносяться: теоретичні дослідження напружень в гнучкому колесі, тензометрування гнучких коліс, визначення коефіцієнтів концентрації напружень і т.д.

По теоретичному дослідженню напружень в гнучкому колесі розглядаються гладкі оболонки без урахування впливу зубчастого вінця або зубчасте колесо без оболонки. При дослідженні напружень в гнучкому колесі методом тензометрування практично неможливо розмістити тензодатчики в передбачуваному місці зародження тріщин, тобто в западині між зубами. Тому датчики поміщалися на гладкій частині гнучкого колеса, що давало картину розподілу напружень тільки для цієї частини або спилювалися декілька зубів для розміщення тензодатчика, або інший штучний прийом, що дозволяв розмістити датчик в місці, що цікавить, але спричинив конструктивні зміни гнучкого колеса, що позначалося на якості отримуваної інформації.

Найбільш використовуваним є метод фотопружності [4] при статичних випробовуваннях моделей зубчастих коліс.

Основну систему для розрахунку напруженого стану гнучкого колеса, типу стакан, що має діафрагмове приєднання до вихідного валу, тобто через дно стакану, з відносною товщиною стінок в межах (0,01- 0,015) і завдовжки (0,5-1,5) від його діаметру ,можна отримати, розділивши його на циліндр і діафрагму.

Осьова протяжність зони дії згинаючого моменту, виникаючого в стакані в місці з'єднання циліндричної оболонки з діафрагмою, впливає на деформований стан колеса.

Обід гнучкого колеса під зубчастим вінцем рекомендується робити потовщеним з метою поліпшення умов зачеплення. Проте надмірне потовщення зубчастого обода призводить до збільшення радіальних сил, необхідних для деформації колеса і збільшенню напружень в ньому, а незначне потовщення не виконує завдань поліпшення зачеплення.

Основними складовими повних напружень, діючих в зубчастому вінці гнучкого колеса, є: колові напруження згину обода колеса при деформації його генератором хвиль; окружні напруження згину обода колеса від навантаження, діючого на зуби; дотичні напруження в ободі зубчастого вінця від крутного моменту, що передається.

Для визначення номінальних напружень, що виникають в гнучкому колесі при деформації його генератором, розглядається тонке кільце, використовуючи диференціальні рівняння зігнутої осі кільця і відомі залежності для нейтральної лінії. Для визначення номінальних напружень згину обода від навантаження, виділяється найбільш навантажений елемент, шириною рівною кроку зубців. Цей елемент розглядається як пластина, навантажена нерівномірно розподіленим згинаючим моментом, два краї якої шарнірно закріплені, один затиснений, а інший вільний.

Номінальні напруження від крутного моменту, що передається, визначаються по відомій залежності для кручення оболонок. У роботі [6], наслідуючи відомий прийом, що полягає в розділенні складних деталей на ряд простіших, при розрахунку гнучкого колеса, типу стакан, прийнято, згідно В.М.Чижову і Е.П.Амосовой, поділити його на наступні три частини: зубчастий обід, оболонку і діафрагму. Обід розглядається як тонке кільце з використанням теорії тонких кілець. Зуби "розмазуються", а їх вплив враховується введенням в розрахунок коефіцієнта посилення обода зубами по Ю.Б.Синкевичу Н.М.Шоломову або іншим аналогічним чином. Оболонка досить добре задовольняє умовам застосування безмоментної теорії оболонок. Діафрагма розглядається як тонка кругла пластина, що не відповідає реальній конструкції. Для визначення невідомих розподілених осьових і дотичних навантажень, прикладених до неї з боку оболонки, використана система

диференціальних рівнянь теорії безмоментної оболонки по В. В. Новожилову і загальне диференціальне рівняння за умов нерозтяжності її серединної поверхні і відсутності поверхневого навантаження.

Розробці і розвитку різних методів розрахунку оболонок присвячена велика кількість робіт, що відрізняються прийнятими гіпотезами і видом функцій. Кожній гіпотезі відповідають свої диференціальні рівняння, що вимагають спеціального вивчення і розробки методів їх рішення.

Одним з недоліків такого підходу також є неможливість спільного розрахунку оболонки з діафрагмою, що вносить відому похибку в картину розподілу напружень в гнучкому колесі, а також не враховується частина оболонки, що знаходиться перед зубчастим вінцем в колесах, типу стакан. Тому наступним кроком для розрахунку напружено-деформованого стану гнучкого колеса хвильової зубчастої передачі стало застосування чисельних методів, що спираються на використання сучасної обчислювальної техніки.

До теперішнього часу виконаний великий об'єм досліджень по розробці методів і алгоритмів розрахунку оболонкових конструкцій.

Основні зусилля спрямовані на розробку ефективних методів розрахунку складних оболонкових конструкцій, чому ,значною мірою, сприяє прогрес в розвитку обчислювальної техніки і поява потужних ЕОМ. Останній чинник визначив широке застосування чисельних методів розрахунку оболонок, в розвиток яких великий вклад внесли А.В.Александров, П. М.Варавак, Д.В.Вайберг, Я.М.Григоренко, В. І. Мяченков, Р. Мелош, О. Зенкевич, Дж.Клаф, К.Белл і інші вчені [7, 8, 9].

Чисельні методи розрахунку розвиваються за наступними основними напрямками. Перший - на кінечно - різницевій апроксимації дозволяючих диференціальних рівнянь; другий - на використанні варіаційно - сіткового підходу (метод скінчених елементів) і третій - на зведенні крайової задачі для диференціальних рівнянь до інтегрального рівняння по межі області з подальшим чисельним рішенням (метод граничних елементів).

В літературі зустрічаються роботи, в яких метод скінчених елементів використовується для розрахунку напружень гнучкого зубчастого вінця хвильової передачі. Проте його застосування у кожному конкретному випадку має певні складнощі і особливості.

В роботі [5] при виборі моделі для розрахунку напружено-деформованого стану в зубчастому вінці нехтують кривизною вінця і модель розглядається як фрагмент рейки з прямолінійною бічною поверхнею.

Нині широке поширення отримав варіаційно-сітковий метод розрахунку оболонок, який є найбільш універсальним методом рішення задач механіки суцільних середовищ [9, 10, 11]. Успішне застосування цього методу визначається тим, що він поєднує в собі переваги варіаційних і сіткових методів. Використання варіаційних постановок задач дозволяє ослабити вимоги до гладкості шуканого рішення, оскільки у функціонал входять похідні нижчих порядків, ніж у вихідні диференціальні рівняння. Остання обставина розширює клас допустимих функцій при побудові наближених рішень. Також є можливим побудова наближених рішень при допомозі кусочно гладких локалізованих функцій. Варіаційна постановка задачі дозволяє виключити із спеціального розгляду граничні умови. Зі свого боку, сіткові методи спрощують відомі труднощі, пов'язані з вибором базисних функцій у варіаційних методах.

Крім того, завдяки свободі, що з'являється, у виборі сіток, вузли можна розташовувати густіше в тих частинах області що цікавить дослідника.

Ефективність варіаційно - сіткового методу слабо залежить від геометрії області, характеру граничних умов, закону зміни властивостей середовища і зовнішньої дії на об'єкт .

## РОЗДІЛ 2

# ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО – ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ГНУЧКОГО КОЛЕСА І ЗУБЧАСТОГО ВІНЦЯ ГНУЧКОГО КОЛЕСА ХВИЛЬОВОЇ ЗУБЧАСТОЇ ПЕРЕДАЧІ

Як відзначалося раніше, хвильові передачі відрізняються підвищеною підатливістю обода одного з коліс, а саме гнучкого колеса, найбільш відповідальної і оригінальної ланки хвильової зубчастої передачі.

Тому визначення достовірної картини розподілу напружень в гнучкому колесі підтверджують численні дослідження в його критичній області - зубчастому вінці є важливим завданням. При відомому напружено-деформованому стані об'єкту термін служби конструкцій може бути досить достовірно визначений за допомогою кривих або формул витривалості, що враховують фізико-механічні властивості і спосіб обробки матеріалу, з якого виготовлена конструкція.

При цьому відомості про напружений стан конструкції в критичних зонах повинні бути якомога точніші, оскільки навіть 20% -ва похибка при визначенні напружено-деформованого стану може привести до помилки більш ніж в 2 рази при оцінці терміну служби конструкцій [8].

### 2.1. Форма деформації гнучкого колеса

Хвильова передача зберігає працездатність при різних формах і розмірах деформації гнучкого колеса. Відомі форми деформації згідно із законом  $w = w_0 \cos 2\varphi$ : по еліпсу, з евольвентними ділянками; з ділянками обмеженими по дугах кола; по кільцю, деформованому системою зосереджених сил і т. д.

Будь-яка з форм деформації може бути отримана при кулачковому генераторі. Кулачок генератора виконують по набутій формі деформації гнучкого колеса. Кулачковий генератор краще за інших зберігає задану форму деформації і тому є найбільш вживаним.

Розглянемо передачу з генератором кулачкового типу з формою деформації 4-ма зосередженими силами (Рис.2.1).

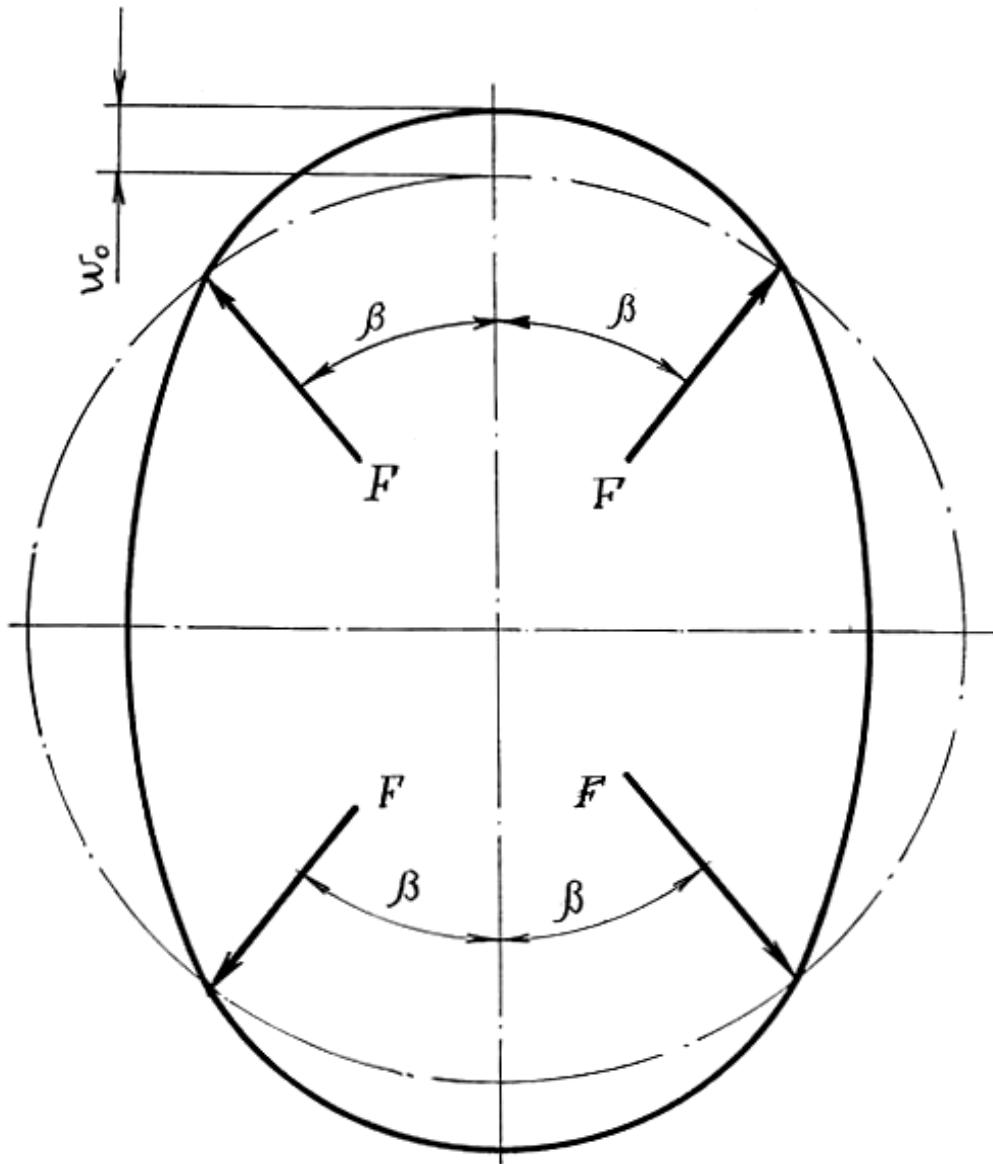


Рис.2.1 Форма деформування 4-ма силами

Ця форма деформації описується рівняннями:

- для ділянки  $0 \leq \varphi \leq \beta$ :

$$w = \left[ A \cos \varphi + \varphi \sin \beta \sin \varphi - \frac{4}{\pi} \right] C, \quad (2.1)$$

$$v = - \left[ A \sin \varphi + \sin \beta (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) - \left( \frac{4}{\pi} \right) \varphi \right] C.$$

- для ділянки  $\beta \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ :

$$w = \left[ B \sin \varphi + \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \varphi \cos \beta \cos \varphi - \frac{4}{\pi} \right] C, \quad (2.2)$$

$$v = - \left[ B \cos \varphi + \frac{\pi}{2} \cos \beta \sin \varphi - \cos \beta (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) - \left( \frac{4}{\pi} \right) \varphi + 2 \right] C.$$

- для обох ділянок коефіцієнти:

$$\begin{aligned} A &= \sin \beta + \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) \cos \beta, \\ B &= \cos \beta + \beta \sin \beta, \\ C &= \frac{w_0}{A} - \frac{4}{\pi}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

де  $w$  - радіальне переміщення контура ГК;

$v$  - окружне переміщення контура ГК;

$w_0 = k_w m$ , де  $m$  - модуль зубів, а  $k_w$  вибирається з таблиці 2.1 (розрахунки хвильових редукторів 7000.00.00PP), залежно від діаметру  $D$  ГК. Кут  $\beta$  вибирається згідно таблиці 2.2., залежно від передатного відношення  $i$  передачі.

Таблиця 2.1.

$D$	50	80	100	125	160	200	250
$k_w$	0,8	1,1	1,15	1,2	1,27	1,35	1,44

Таблиця 2.2.

$i$	60-120	120-150	більше 150
$\beta$	25	30	35

## 2.2. Розподіл навантаження між зубами

З'ясування закону розподілу навантаження, яке передається між зубами, що знаходяться в зачепленні, має дуже велике значення для уточнення геометричного розрахунку навантаженого хвильового зачеплення, розрахунку здатності навантаження зубців, ККД і нагріву передачі, а також для розрахунку обода гнучкого колеса і деталей генератора на міцність і жорсткість.



Існує практичний розрахунок навантажень на зубчастий вінець гнучкого колеса у якому початковим є положення про те, що навантаження на кожну пару контактуючих зубів гнучкого і жорсткого коліс пропорційна переміщенню точки прикладення цього навантаження, що виникає в результаті деформації обох зубів пари і обода гнучкого колеса (деформація обода жорсткого колеса не враховується). Коефіцієнтом пропорційності є жорсткість системи: пара зубів - ділянка обода гнучкого колеса (під зубом).

В загальному вигляді наводиться формула для визначення нормального зусилля, що передається кожною парою зубів залежно від проміжку (натягу) між ними, жорсткості системи і величини навантаження на передачу. Далі визначаються усі компоненти, що входять у вказану формулу. Проміжки між зубами спочатку розглядаються в ненавантаженій передачі (до і після введення кулачка генератора), причому форма кулачка розглядається в загальному вигляді.

Зазори визначаються по голівках зубців жорсткого і гнучкого коліс. Далі визначаються інші переміщення точки контакту зубів внаслідок згину, стиску і зсуву, виходячи з рівності енергії деформації роботи зовнішніх сил. Для зуба жорсткого колеса крім того враховується його переміщення внаслідок закладення в обід, а для гнучкого - внаслідок деформації обода.

Переміщення обода гнучкого колеса визначається виходячи з розрахунку вінця гнучкого колеса, де це колесо розглядається як кільце, що лежить на пружній основі і урівноважене потоком дотичних сил. На жаль в цьому практичному розрахунку відсутнє експериментальне підтвердження отриманих результатів.

Також необхідно відмітити визначення сил при взаємодії ланок хвильової передачі в роботах Алфутова Н.А. і Кленикова С. С. [12]. Для розкриття статичної невизначеності автори застосовують метод сил. Але у більшості робіт, присвячених питанню визначення сил в зачепленні, застосовуються трудомісткі методи або експериментальні залежності. Не усі роботи доведені до форми, зручної в інженерних розрахунках. Тому для вирішення задачі використаємо наближені залежності, що підтвердженні експериментально [13] та використовуються для практичних інженерних розрахунків.

Навантаження на зуби для передачі з кулачковим генератором хвиль на підставі експериментальних досліджень, можна приблизно апроксимувати графіком, зображеним на рис. 2.2.

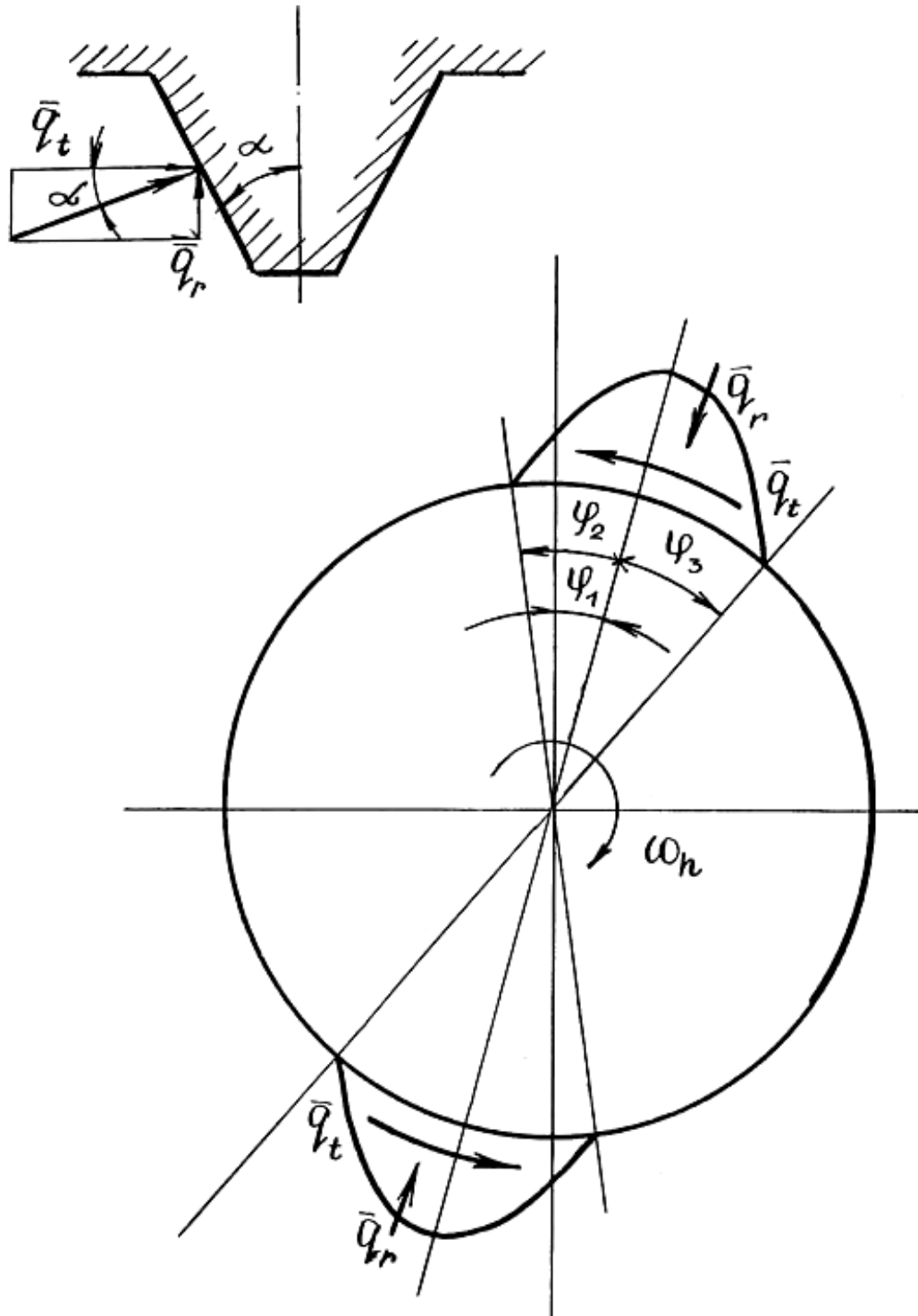


Рис.2.2 Розподіл навантаження по зубах гнучкого колеса

Кути  $\varphi_2$  і  $\varphi_3$  визначають розмір зони зачеплення, а кут  $\varphi_1$  координує розташування цієї зони відносно великої осі генератора осі симетрії навантаження,

$\tilde{q}_r$  і  $\tilde{q}_n$  - колова і радіальна складові розподіленого навантаження в зачепленні, на ділянках обмежених кутами які апроксимуються залежностями:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{r_2} &= q_{t\max} \cos \frac{\pi}{2\varphi_2} (\varphi - \varphi_1) \\ \tilde{q}_{r_3} &= q_{t\max} \cos \frac{\pi}{2\varphi_3} (\varphi - \varphi_1) \\ \tilde{q}_{n_2} &= q_{t\max} \cos \frac{\pi}{2\varphi_2} (\varphi - \varphi_1) \operatorname{tg} \alpha_{cp} \\ \tilde{q}_{n_3} &= q_{t\max} \cos \frac{\pi}{2\varphi_3} (\varphi - \varphi_1) \operatorname{tg} \alpha_{cp}\end{aligned}\tag{2.4}$$

де  $\tilde{q}_r$  - розподілене колове навантаження на одиницю дуги кола і ширини зубчастого вінця;

$\tilde{q}_n$  - відповідне радіальне навантаження;

$\alpha_{cp}$  - кут профілю зуба.

Величина  $\tilde{q}_{t\max}$  пов'язана з моментом навантаження передачі залежністю

$$q_{t\max} = \frac{\pi T_2}{[(\varphi_2 + \varphi_3) D^2 b_w]}\tag{2.5}$$

де  $D$  - діаметр гнучкого колеса;

$b_w$  - робоча ширина зубчастого вінця;

$T_2$  - крутний момент.

Для передач з найбільш поширеними значеннями  $w_0 = (1 \div 1,4)t$  можна рекомендувати  $\varphi_2 = \frac{\pi}{8}$ ,  $\varphi_1 = -\frac{\pi}{12}$ .

Дія зовнішнього розподіленого навантаження на вінець гнучкого колеса моделювалася статично еквівалентними зосередженими зусиллями, прикладеними у вузлах на сітці дискретизації гнучкого колеса. Методика визначення зосереджених зусиль полягала в наступному.

Розглянемо елементарний відрізок, отриманий в результаті дискретизації вінця гнучкого колеса (ГК) (рис. 2.3). Координати вузлів позначимо через  $(r, \varphi_i)$  і

$(r, \varphi_j)$ . Вважалося, що зовнішні навантаження діють по нормалі і дотичній до відрізка і апроксимуються лінійними залежностями від кута  $\varphi$ , тобто

$$\begin{aligned} q_n(\varphi) &= q_n^{(0)} + q_n^{(1)}\varphi; \\ q_\tau(\varphi) &= q_\tau^{(0)} + q_\tau^{(1)}\varphi; \end{aligned} \quad (2.6)$$

де  $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_j]$ .

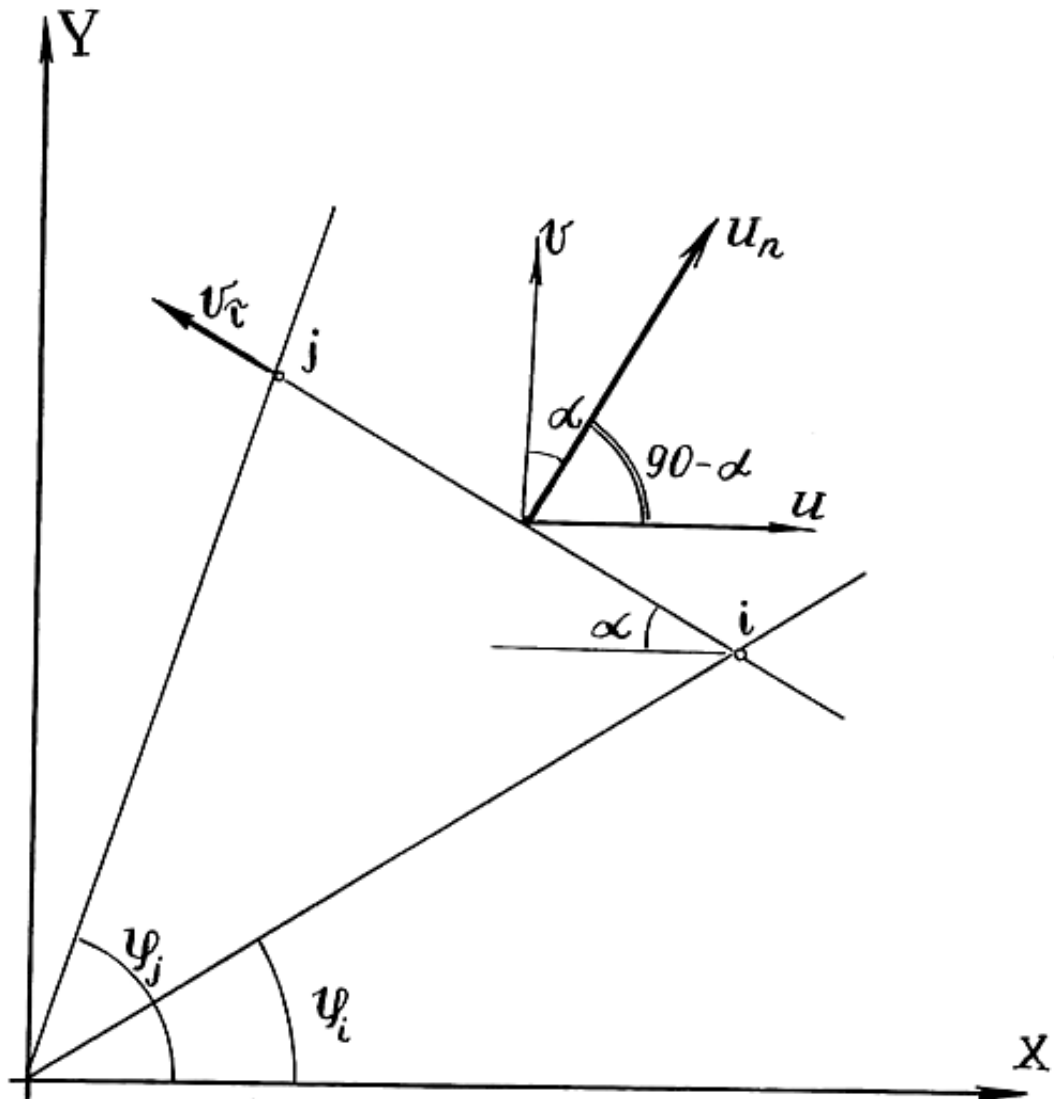


Рис.2.3 Елементарний відрізок дискретизації

Для визначення коефіцієнтів  $q_n^{(0)}$ ,  $q_n^{(1)}$ ,  $q_\tau^{(0)}$ ,  $q_\tau^{(1)}$  запишемо (2.6) у вигляді

$$\begin{cases} q_{n_i} = q_n^{(0)} + q_n^{(1)}\varphi_i, \\ q_{n_j} = q_n^{(0)} + q_n^{(1)}\varphi_j, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} q_{\tau_i} = q_{\tau}^{(0)} + q_{\tau}^{(1)} \varphi_i, \\ q_{\tau_j} = q_{\tau}^{(0)} + q_{\tau}^{(1)} \varphi_j, \end{cases} \quad (2.8)$$

Віднімаючи друге рівняння з першої системи (2.7), отримаємо

$$\begin{aligned} q_{n_i} - q_{n_j} &= q_n^{(1)} \cdot \varphi_i - q_n^{(1)} \cdot \varphi_j, \\ q_{n_i} - q_{n_j} &= q_n^{(1)} (\varphi_i - \varphi_j), \\ q_n^{(1)} &= \frac{q_{n_i} - q_{n_j}}{\varphi_i - \varphi_j}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

Підставляючи (2.9) в перше рівняння системи (2.8), маємо:

$$q_{n_i} = q_n^{(0)} + \frac{q_{n_i} - q_{n_j}}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi_i, \quad (2.10)$$

$$q_n^{(0)} = q_{n_i} - \frac{q_{n_i} - q_{n_j}}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi_i = \frac{q_{n_i} \varphi_i - q_{n_j} \varphi_i - q_{n_i} \varphi_i + q_{n_j} \varphi_i}{\varphi_i - \varphi_j} = \frac{-q_{n_i} \varphi_j + q_{n_j} \varphi_i}{\varphi_i - \varphi_j} = \frac{q_{n_j} \varphi_i - q_{n_i} \varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j}.$$

Для  $q_{\tau}^{(0)}$  і  $q_{\tau}^{(1)}$  розрахунки ведуться аналогічно. Таким чином, коефіцієнти  $q_n^{(0)}$ ,  $q_n^{(1)}$ ,  $q_{\tau}^{(0)}$ ,  $q_{\tau}^{(1)}$  набувають вигляду:

$$\begin{aligned} q_n^{(0)} &= \frac{q_{n_j} \varphi_i - q_{n_i} \varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j}, \\ q_n^{(1)} &= \frac{q_{n_i} - q_{n_j}}{\varphi_i - \varphi_j}, \\ q_{\tau}^{(0)} &= \frac{q_{\tau_j} \varphi_i - q_{\tau_i} \varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j}, \\ q_{\tau}^{(1)} &= \frac{q_{\tau_i} - q_{\tau_j}}{\varphi_i - \varphi_j}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Відмітимо, що сплайн апроксимація (2.6), (2.11) забезпечує безперервність розподілу зовнішнього навантаження по усьому вінцю гнучкого колеса.

Для знаходження зосереджених зусиль у вузлах дискретизації необхідно визначити роботу прикладеного навантаження (2.4) на переміщеннях  $u_n$  і  $u_{\tau}$ .

Очевидно, що

$$A = \int_{\phi_i}^{\phi_j} [q_n(\varphi)u_n(\varphi) + q_\tau(\varphi)u_\tau(\varphi)] d\varphi \quad (2.12)$$

Де  $u_n$  - нормальні,  $u_\tau$  - дотичні переміщення. Оскільки вузловими невідомими в задачі є переміщення відносно глобальної системи координат виразимо  $u_n$  і  $u_\tau$  через  $u$  і  $v$ .

$$u_n = u \cdot \sin \alpha + v \cdot \cos \alpha, \quad (2.13)$$

$$u_\tau = v \cdot \sin \alpha + u \cdot \cos \alpha,$$

$\alpha$  - кут між глобальною і локальною системою координат. Закон зміни переміщень в межах відрізка приймається лінійним, тобто

$$u = u_0 + u_1\varphi, \quad (2.14)$$

$$v = v_0 + v_1\varphi,$$

$$\text{де } \varphi \in [\varphi_i, \varphi_j].$$

Коефіцієнти  $u_0, v_0, u_1, v_1$  знаходимо аналогічно (2.11)  $u_0 = \frac{u_j\varphi_i - u_i\varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j}$ ;

$$u_1 = \frac{u_i - u_j}{\varphi_i - \varphi_j},$$

$$v_0 = \frac{v_j\varphi_i - v_i\varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j}, \quad (2.15)$$

$$v_1 = \frac{v_i - v_j}{\varphi_i - \varphi_j}.$$

Підставляючи (2.13), (2.14), в (2.12) і враховуючи (2.6), маємо:

$$A = \int_{\phi_i}^{\phi_j} \left[ (q_n^{(0)} + q_n^{(1)}\varphi)(u \sin \alpha + v \cos \alpha) + (q_\tau^{(0)} + q_\tau^{(1)}\varphi)(v \sin \alpha - u \cos \alpha) \right] d\varphi. \quad (2.16)$$

З урахуванням (2.11) і (2.15) представимо роботу  $A$  як суму робіт нормальних  $A_n$  і дотичних робіт  $A_\tau$ , отримаємо:

$$A_n = \int_{\phi_i}^{\phi_j} \left( \frac{q_{n_j}\varphi_i - q_{n_i}\varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j} + \frac{q_{n_j} - q_{n_i}}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi \right) \cdot \left[ \left( \frac{u_j\varphi_i - u_i\varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j} + \frac{u_j - u_i}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi \right) \sin \alpha + \right. \\ \left. + \left( \frac{v_j\varphi_i - v_i\varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j} + \frac{v_j - v_i}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi \right) \cos \alpha \right] d\varphi, \quad (2.17)$$

$$A_\tau = \int_{\varphi_i}^{\varphi_j} \left( \frac{q_{\tau_j} \varphi_i - q_{\tau_i} \varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j} + \frac{q_{\tau_j} - q_{\tau_i}}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi \right) \cdot \left[ \left( \frac{v_j \varphi_i - v_i \varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j} + \frac{v_j - v_i}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi \right) \sin \alpha + \right. \\ \left. + \left( \frac{u_j \varphi_i - u_i \varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j} + \frac{u_j - u_i}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi \right) \cos \alpha \right] d\varphi.$$

Вузлові зусилля визначаються по формулах:

$$\begin{aligned} FX_i &= \frac{\partial A}{\partial u_i}, \\ FX_j &= \frac{\partial A}{\partial u_j}, \\ FY_i &= \frac{\partial A}{\partial v_i}, \\ FY_j &= \frac{\partial A}{\partial v_j}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

де  $A = A_n + A_\tau$ .

Продиференціювавши і зробивши можливі перетворення, отримуємо:

$$\begin{aligned} FX_i &= \sin \alpha \left[ \frac{q_{n_j} \varphi_i - q_{n_i} \varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi_j + \frac{1}{2} (\varphi_j + \varphi_i) \left( \frac{q_{n_i} - q_{n_j}}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi_j - \frac{q_{n_j} \varphi_i - q_{n_i} \varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j} \right) - \frac{1}{3} \frac{q_{n_i} - q_{n_j}}{\varphi_i - \varphi_j} (\varphi_j^2 + \varphi_j \varphi_i + \varphi_i^2); \right. \\ FX_j &= \sin \alpha \left[ -\frac{q_{n_j} \varphi_i - q_{n_i} \varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi_i + \frac{1}{2} (\varphi_j + \varphi_i) \left( \frac{q_{n_j} \varphi_i - q_{n_i} \varphi_j}{\varphi_i - \varphi_j} - \frac{q_{n_i} - q_{n_j}}{\varphi_i - \varphi_j} \varphi_i \right) + \frac{1}{3} \frac{q_{n_i} - q_{n_j}}{\varphi_i - \varphi_j} (\varphi_j^2 + \varphi_j \varphi_i + \varphi_i^2); \right. \\ FY_i &= FX_i \operatorname{ctg} \alpha; \\ FY_j &= FX_j \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Повні зусилля у вузлах визначаємо шляхом підсумовування зусиль від кожного відрізка, що утворює цей вузол.

$$\begin{aligned} FX_i &= FX_{iN} + FX_{i(N-1)}; \\ FY_i &= FY_{iN} + FY_{i(N-1)}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

де  $i = 1, 2, \dots, NP$  - номер вузла

$N = 1, 2, \dots, NP - 1$  - номер відрізка

$NP$  – кількість вузлів дискретизації

### 2.3. Вибір розрахункової схеми і методики розрахунку гнучкого колеса хвильової зубчастої передачі

Частіше від усього гнучке колесо виконується у вигляді гнучкого стакану, тонкої циліндричної оболонки, з'єднаної з ступицею за допомогою діафрагми, як правило плоскої, із ступінчастим потовщенням в зоні з'єднання зі ступицею. На протилежному від "денця" торці стакану по периметру нарізується зубчастий вінець, причому стінка стакану під вінцем виконується потовщеною. Перед зубчастим вінцем від торця залишається вузька смужка завтовшки, рівній товщині стінки стакану в зоні відсутності зубчастого вінця.

При розрахунках гнучких коліс ХЗП як правило робиться ряд допущень, що дозволяє в тому або іншому ступені спростити рішення задачі. Необхідність цих допущень обумовлена специфічністю хвильових зубчастих передач.

В нашому випадку при виборі математичної моделі приймаються наступні допущення. Потовщену зону діафрагми, що служить місцем кріплення ступиці вхідного валу, можна не розглядати, вважаючи межу діафрагми від цього потовщення жорстко зацімленою, оскільки різниця в товщині, а отже, жорсткості істотно відрізняються. Враховуючи також, що маломодульність і велике число зубців не дають можливості будувати модель з урахуванням зубів на гнучкому колесі у зв'язку з виникаючими обчислювальними труднощами, передбачається проведення "розмазування" зубців вінця, тобто товщина гладкого кільця під зубчастим вінцем приймається такою, щоб виконувалася рівність жорсткостей його і зубчастого вінця як за наявності зубців. При складанні скінченно-елементної схеми істотна увага приділялась на точність відтворення реальної геометрії діафрагми з отворами, згідно реальної конструкції ГК. Ці отвори збільшують податливість діафрагми, а також поліпшують реалізацію змашування хвильової зубчастої передачі.

В якості прикладу розглядається гнучке колесо серійної хвильової передачі ХЗП-160:

- передатне відношення  $i = 204$
- число зубців на ГК  $z = 408$



- число зубців на ЖК  $z_{жк} = 410$
- модуль зачеплення  $m = 0,4$
- коефіцієнт зміщення вихідного контуру  $\chi = 4$
- крутний момент  $T_2 = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$
- генератор хвиль деформації - кулачковий;
- гнучке колесо типу «стакан».

Дискретизація розрахункової моделі проводилася на трикутні елементи. Точність дискретизації по відношенню до реальної конструкції досягається точним заданням координат вузлів, що лежать на межі області та густої сітки. На рисунках 2.4, 2.5, 2.6 показана дискретизація "денця" гнучкого колеса ХЗП-160 з різною густиною сітки, що дозволило вибрати найменшу густоту, прийнятну для точності розрахунку.

Густина сітки розбиття бічної поверхні ГК виконувалася відповідно до частоти розбиття "денця". Число вузлів і трикутників після дискретизації при різних густині сітки наведені в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

Вид дискретизації	Число вузлів			Число трикутників		
	денце	оболонка	колесо	денце	оболонка	колесо
I	280	527	807	464	1020	1484
II	504	1125	1629	847	2200	3047
III	689	2013	2702	1212	3960	5172

При дискретизації циліндричної частини гнучкого колеса (рис.2.7) дотримувалася відповідність меж дискретизації ділянки розташування зубчастого вінця з геометрією його реального розташування. Ця умова дозволила припустити, що переміщення, що передаються генератором хвиль, розподіляються по усій зоні розташування зубчастого вінця, оскільки ширина кулачкового генератора хвиль більше ширини вищезгаданої зони. Крім того, на гнучке колесо в результаті взаємодії зубів гнучкого і жорсткого коліс хвильової передачі діють сили від

зачеплення, нормальні і дотичні до профілю зуба, напрям і точка прикладення яких залежать від параметрів хвильової передачі. Дія цих сил призводить до виникнення додаткового згинального моменту в зубчастому вінці гнучкого колеса.

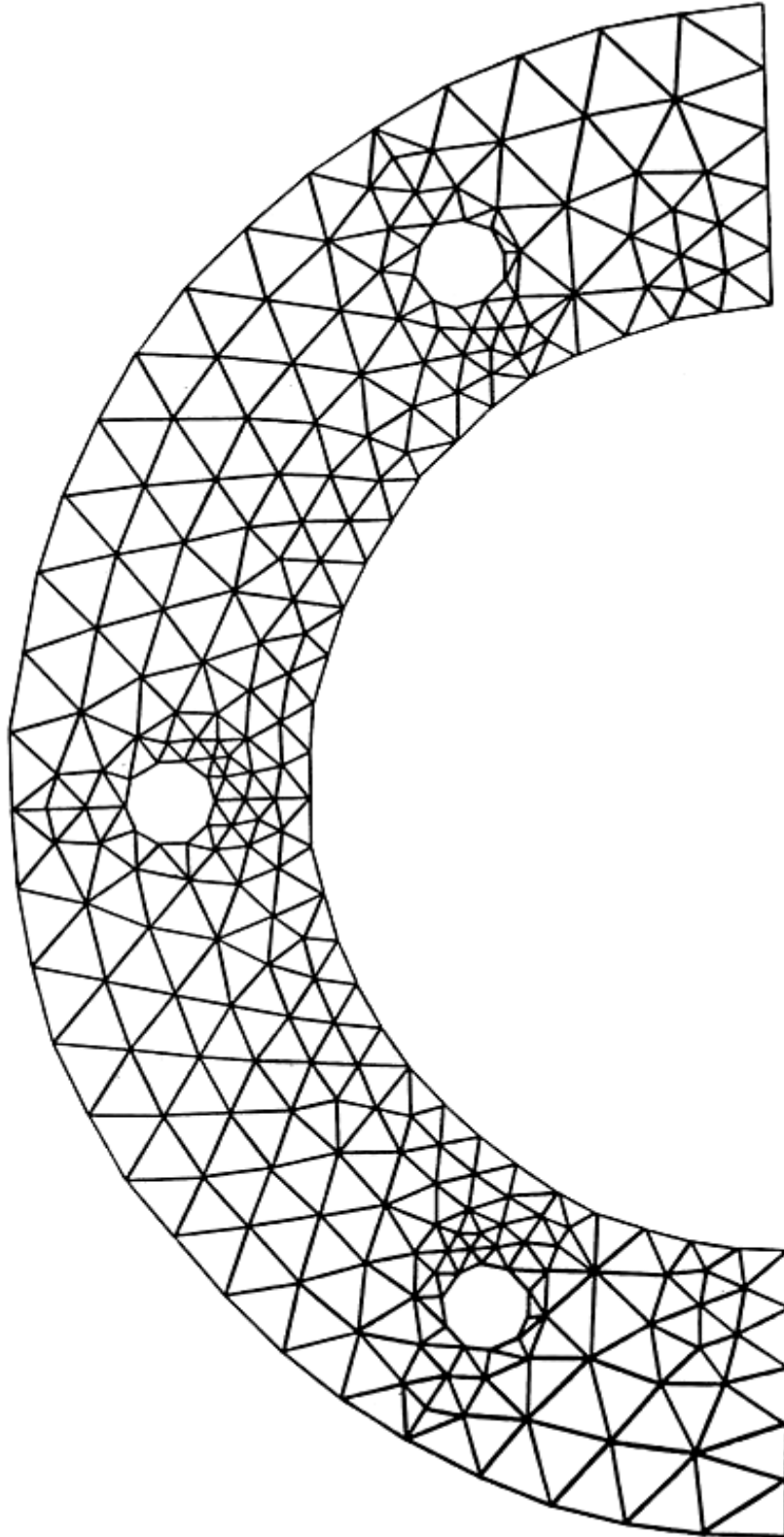


Рис.2.4 Дискритизація «денця» виду I

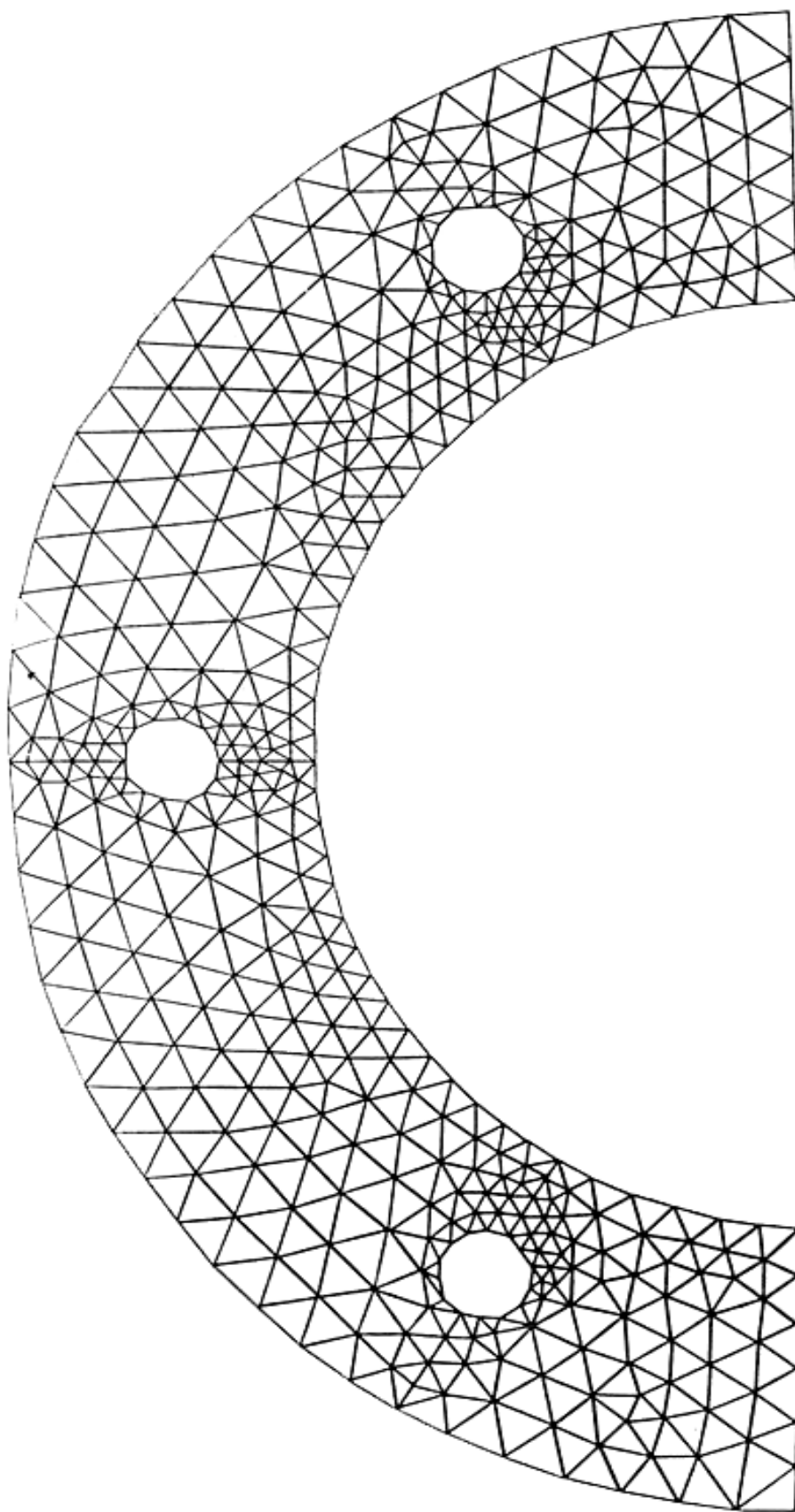


Рис.2.5 Дискритизація «денця» виду II.

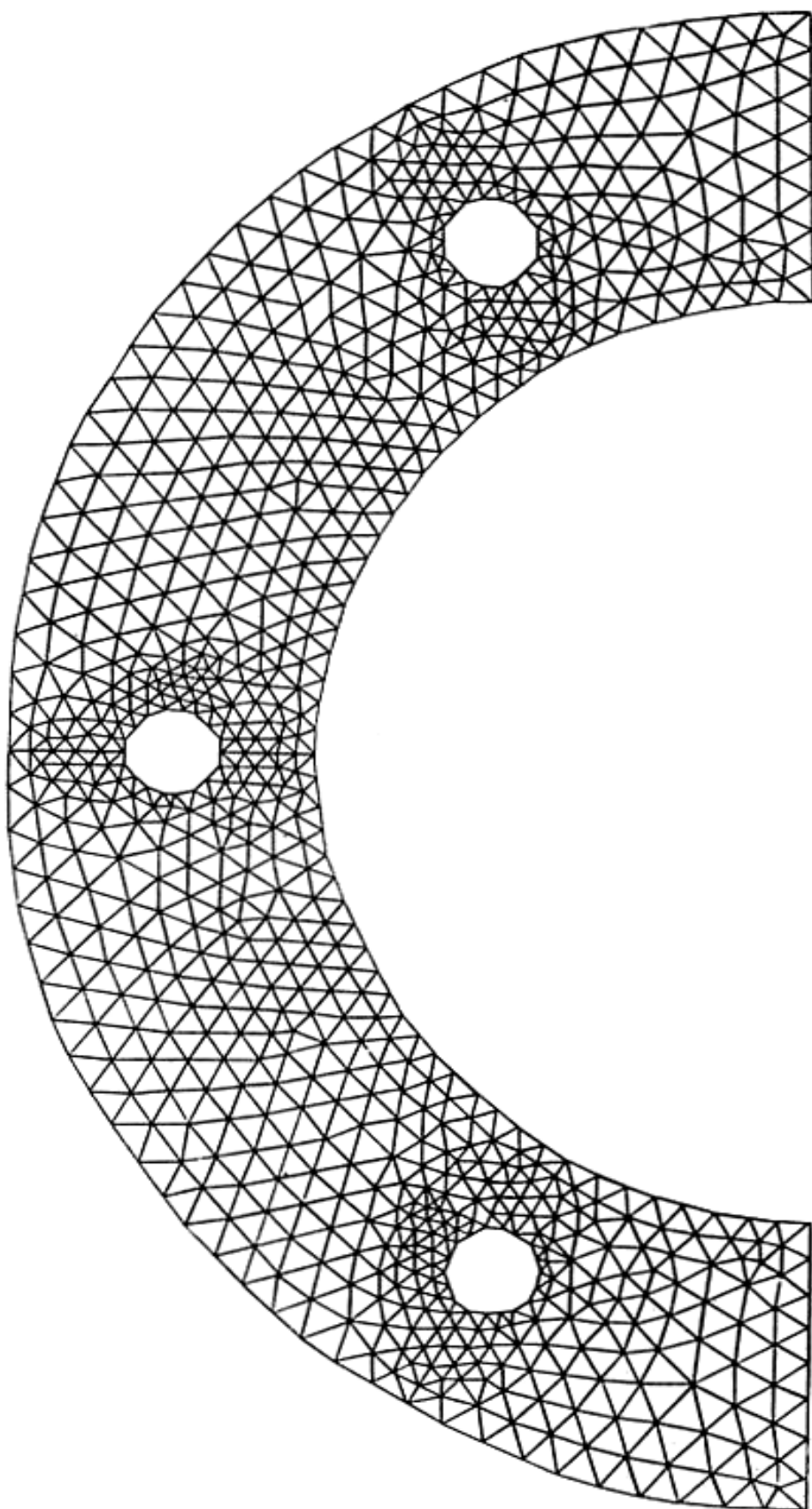


Рис.2.6 Дискритизація «денця» виду III.

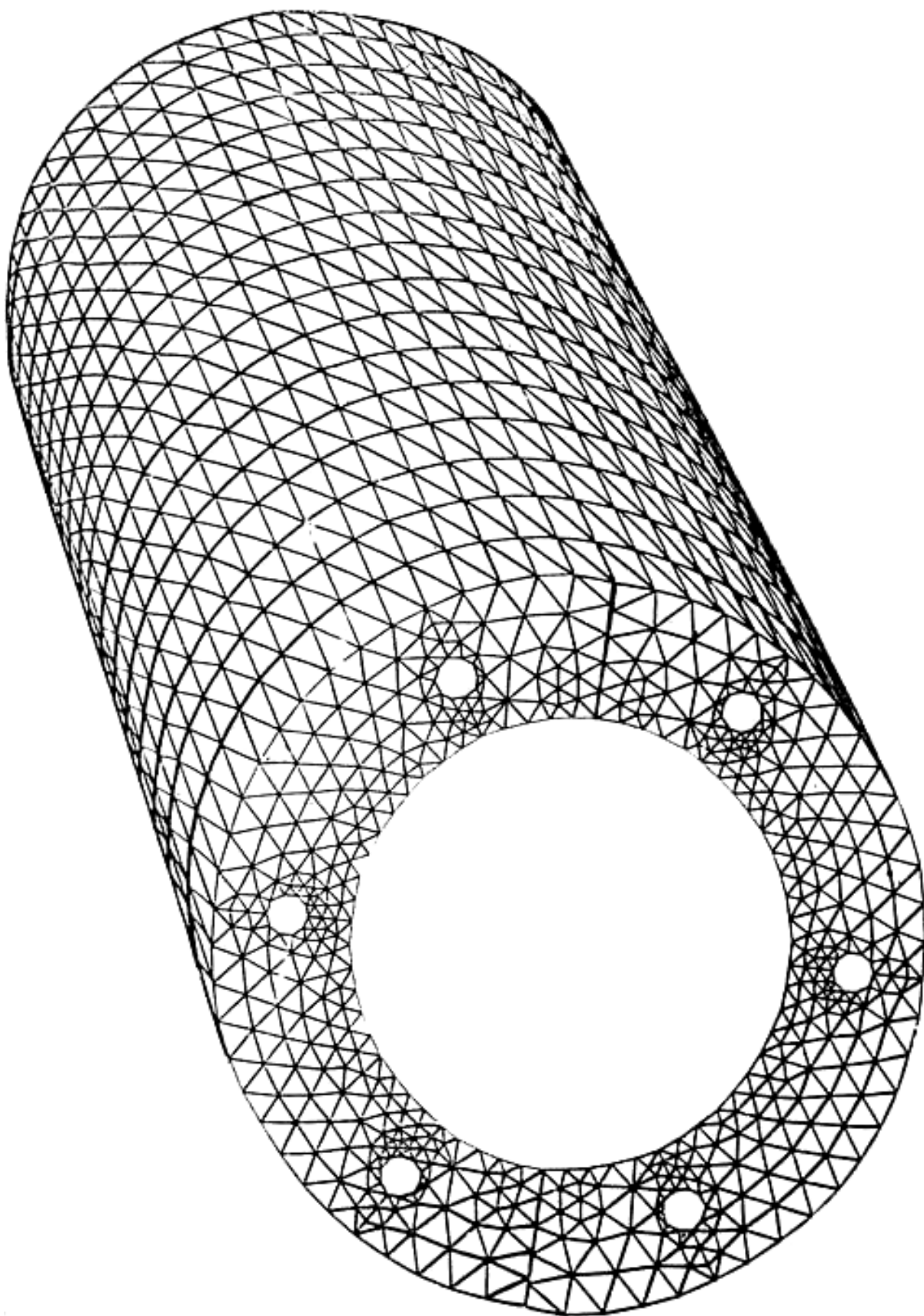
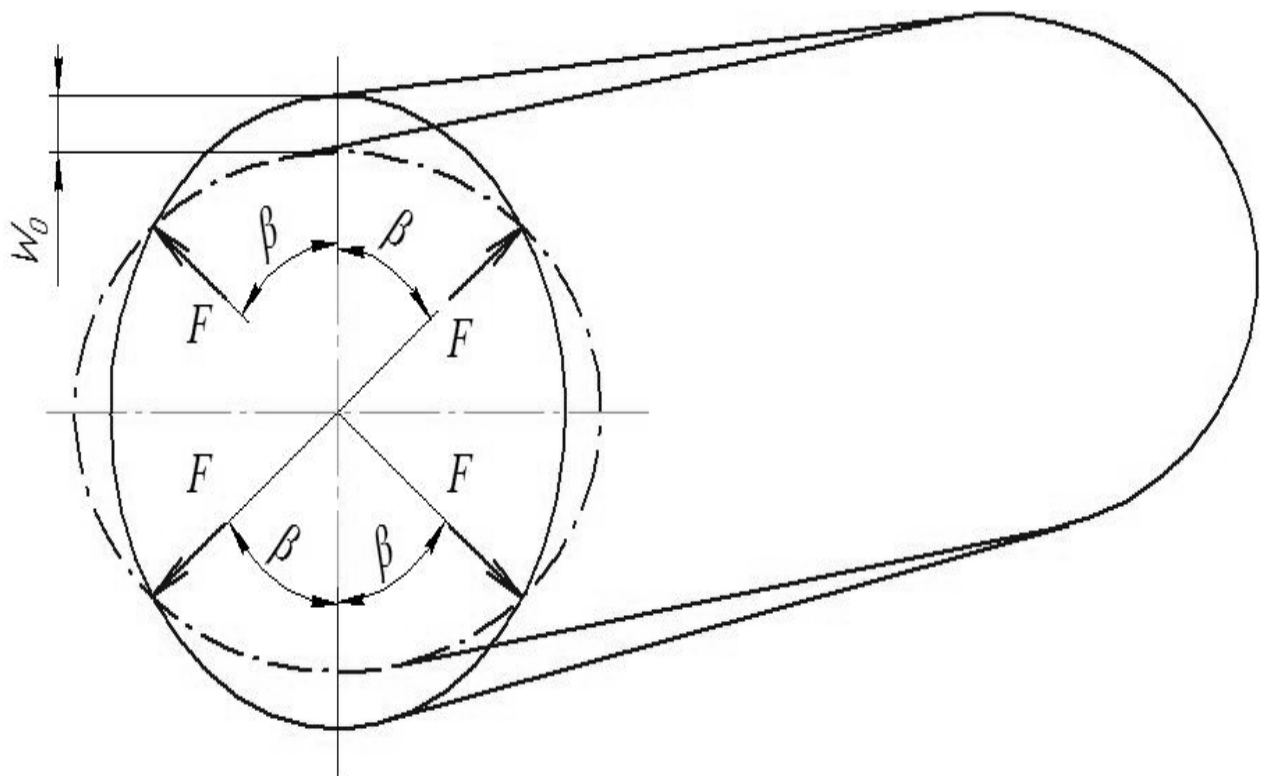


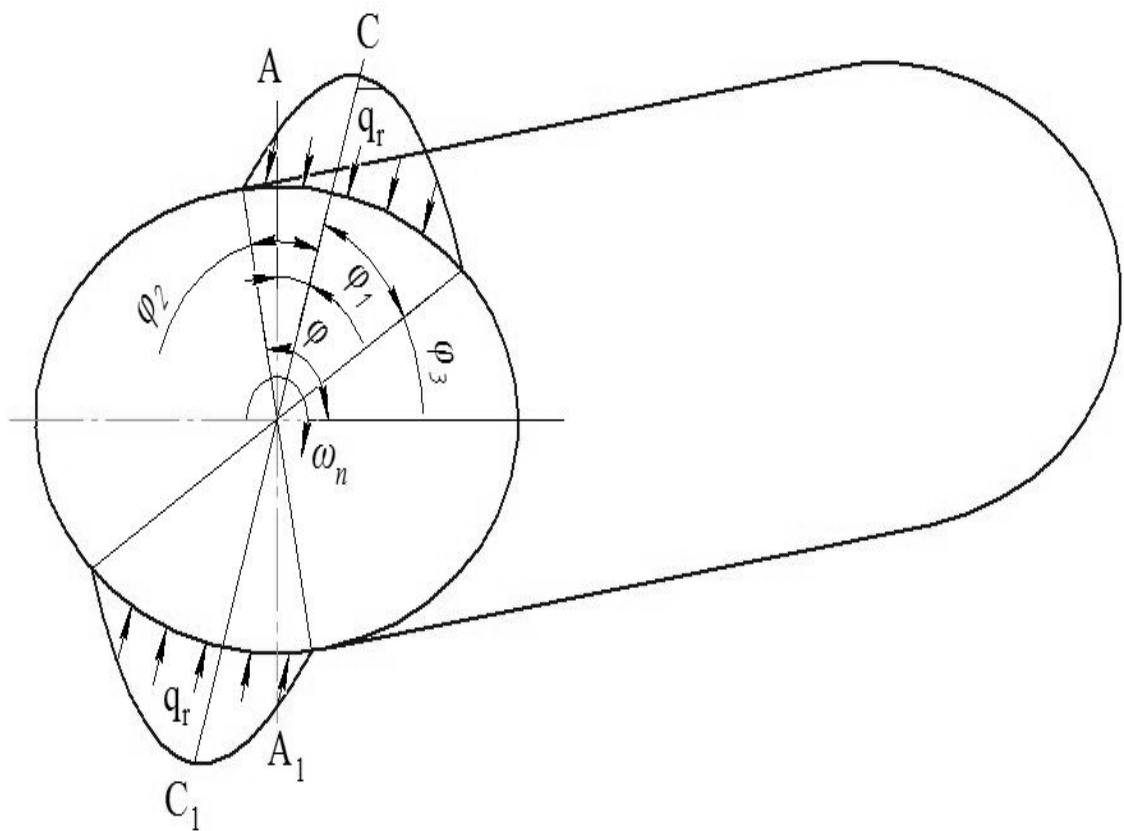
Рис.2.7 Дискретизація гнучкого колеса ХЗП-160

Використаємо підхід для визначення напружено-деформованого стану ГК, що складається з двох етапів. На першому етапі розраховується гнучке колесо, як оболонка з урахуванням вищезгаданих допущень, на другому етапі вирішується задача визначення напружено-деформованого стану в зубчастому вінці ГК ХЗП як тривимірна задача теорії пружності [14] з використанням рішень першого етапу в якості граничних умов.

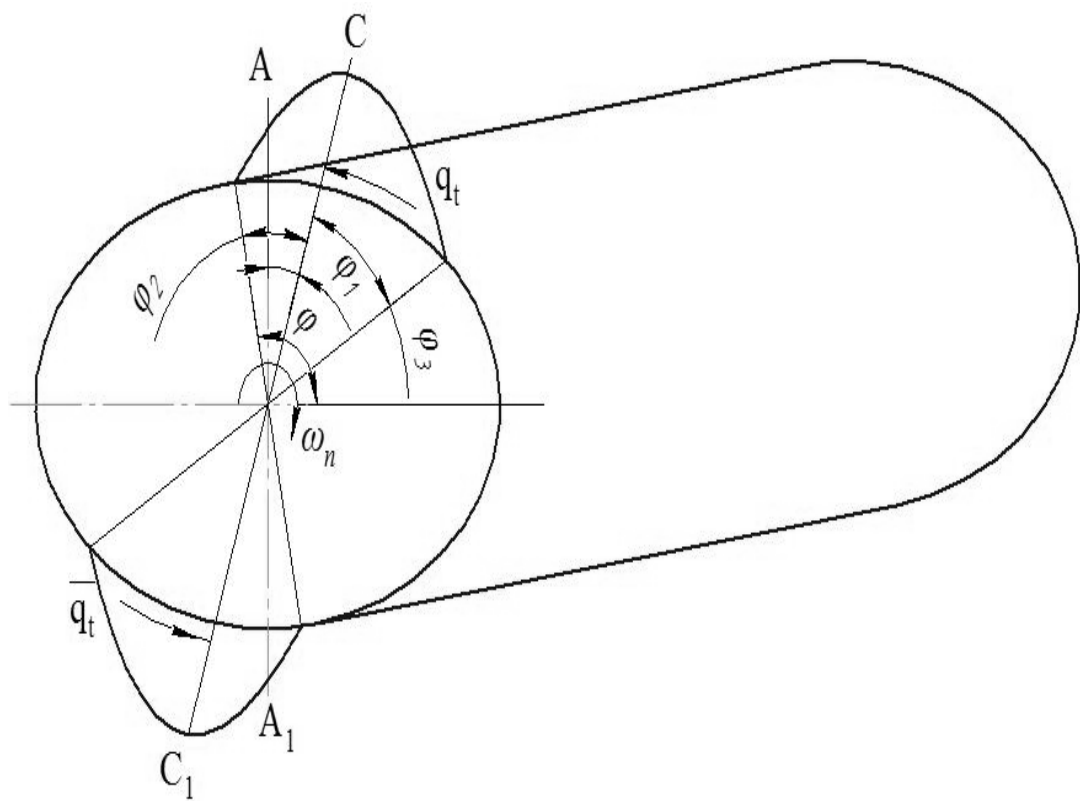
Для зменшення числа невідомих і зважаючи на симетрію гнучкого колеса розглядатимемо половину ГК. Оскільки переміщення, що отримуються ГК від генератора хвиль деформації, мають симетричний розподіл (рис.2.8 а), а навантаження на зуби носить кососиметричний характер (рис.2.8 б, в), то ці задачі вирішувалися незалежно одна від одної з подальшим підсумовуванням зважаючи на лінійність задачі.



а) Генератор хвиль



б) Радіальне навантаження



в) Дотичне навантаження

Рис.2.8 Розрахункова схема

Для вирішення задачі на другому етапі виділимо фрагмент зубчастого вінця гнучкого колеса між двома перерізами, що проходять через середини западин зубців так, щоб між ними були три зуби. Таке число зубців в картині напружень, отриманої в зоні середньої западини, дозволить звести до мінімуму вплив крайових ефектів і підвищити точність розрахунку.

Не дивлячись на малість кроку зубчастого вінця хвильової передачі в порівнянні з радіусом дільного кола кривизною розрахункової моделі нехтувати не будемо, але геометрія профілю цієї передачі ХЗП-160 по ГОСТу 9587-68 дозволяє нехтувати радіусом скруглення під час переходу бічної поверхні зуба в западину, а також прийняти прямолінійність бічної поверхні зуба

Представивши вирізаний фрагмент як тривимірне ступінчасте призматичне тіло, розбиваємо його на кінцеве число шарів площинами, перпендикулярними якій-небудь з базових осей. Перший з перерізів утворює базову площину. В результаті дискретизації базової площини на трикутники отримуємо сітку (рис.2.4), яку відображаємо на кожен подальший переріз. Таким чином, кожен шар виявляється розбитий на призми, що не перетинаються, в основі яких лежать трикутники. Дискретизація базової площини передбачала відповідне згущування в зоні очікуваної концентрації напружень, тобто під час переходу бічної поверхні зуба в западину.

На нижньому контурі виділеного фрагмента, тобто з боку взаємодії ГК з ГХД задаються окружні і радіальні переміщення від генератора (див. розділ 2.1). На торцях задаються в якості граничних переміщень, що отримані при розрахунку ГК як оболонки на першому етапі. Навантаження на зуби задаються згідно розділу 2.2.



### РОЗДІЛ 3

## ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ВАРІАЦІЙНО – СІТКОВОГО МЕТОДУ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО – ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ

### 3.1. Класична теорія коливань тонких оболонок

#### 3.1.1. Геометрія і класифікація оболонок

Тонкою оболонкою називається тіло, обмежене двома поверхнями, відстань між якими (товщина) мала порівняно з іншими розмірами тіла. В подальшому товщина вважається постійною. Якщо оболонка не має кордонів хоча б по одній криволінійній координаті, то вона називається замкненою, в іншому випадку вона буде називатися незамкненою (відкритою).

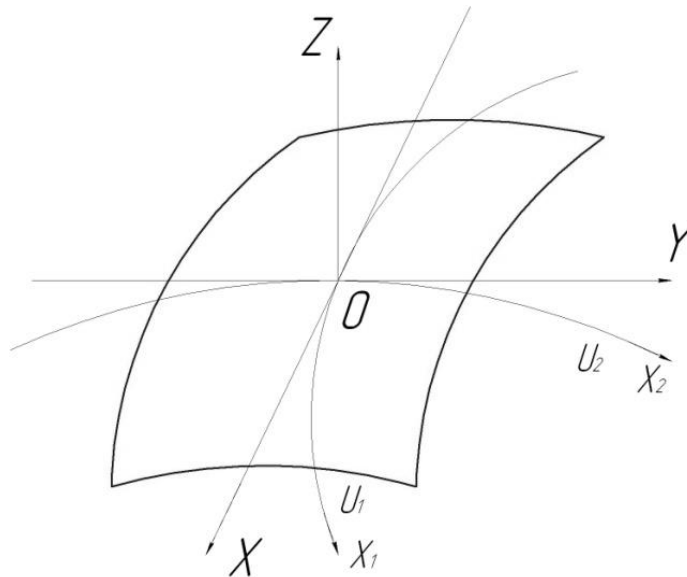


Рис. 3.1 Ортогональна система криволінійних координат

Геометричне місце точок, рівновіддалених від обох граничних поверхонь, називається серединною поверхнею. Форма серединної поверхні та товщина  $h$  визначають геометрію оболонки. У випадку незамкненої оболонки задається ще й граничний контур. На серединній поверхні вибирається ортогональна система криволінійних координат (рис. 3.1):  $OZ$  – перпендикулярна до серединної поверхні, а координатні лінії  $OX_1$  та  $OX_2$  співпадають з лініями головної кривизни  $X_1 = \text{const}$ ,

$X_2 = \text{const}$ . В даному випадку рівняння оболонок приймають більш простий вигляд. Рівняння серединної поверхні задається в векторній або скалярній формі:

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}(x_1 \cdot x_2) \quad (3.1)$$

$$x = x(x_1 \cdot x_2) \sqrt{b^2 - 4ac}; \quad y = y(x_1 \cdot x_2); \quad z = z(x_1 \cdot x_2) \quad (3.1)$$

Лінійний елемент серединної поверхні (довжина дуги) визначається першою квадратичною формою (рис.3.2)

$$dx^2 = H_1^2 dx_1^2 + H_2^2 dx_2^2 \quad (3.3)$$

де  $H_1$ ,  $H_2$  – параметри Ляме (масштабні множники), що зв'язують приріст дуг координатних ліній з приростом криволінійних координат:

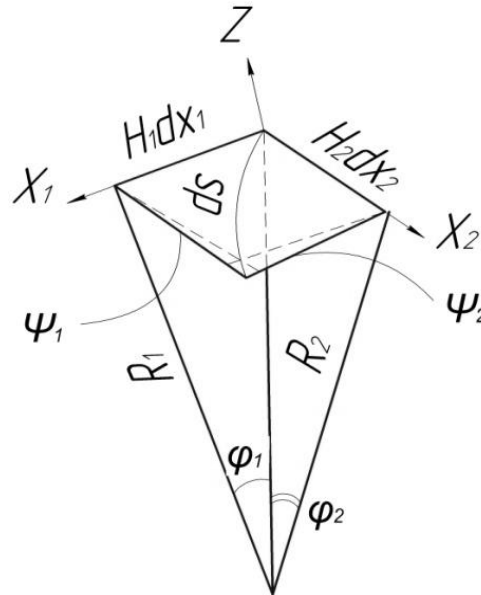


Рис. 3.2 Лінійний елемент серединної поверхні

$$dx_1 = H_1 dx_1 + H_2 dx_2 \quad (3.4)$$

$$H_1^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x_1} \right)^2, \quad (3.5)$$

$$H_2^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^2.$$

Викривлення серединної поверхні характеризується радіусами кривини  $R_1$ ,  $R_2$  нормальних перетинів вздовж координатних ліній (вважаємо, що вони

співпадають з лініями головних кривизн, де  $R_{12} = 0$ ). Одна з головних кривизн

$\phi_1 = \frac{1}{R_1}$ ;  $\phi_2 = \frac{1}{R_2}$  має максимальне, друга – мінімальне значення.

Добуток головних кривизн називається гаусовою кривизною поверхні  $k = \phi_1 \phi_2$  (в загальному випадку  $k = \phi_1 \phi_2 - \phi_{12}^2$ ).

Функції  $H_1 = (x_1, x_2)$ ,  $H_2 = (x_1, x_2)$ ,  $R_1 = (x_1, x_2)$ ,  $R_2 = (x_1, x_2)$  визначають поверхню (з точністю до її положення в просторі) лише в тому випадку, коли вони задовольняють умовам Кодаци та умові Гауса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{H_1}{R_1} \right) &= \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \frac{1}{R_2}, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{H_2}{R_2} \right) &= \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \frac{1}{R_1}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \right) = \frac{H_1 H_2}{R_1 R_2}. \quad (3.7)$$

Оболонки по товщині діляться на тонкі  $\left( \frac{h}{R_{\min}} < \frac{1}{20} \right)$  та товсті  $\left( \frac{h}{R_{\min}} > \frac{1}{20} \right)$ , де

$R_{\min}$  – найменший лінійний радіус її кривизни. Часто оболонки з  $\frac{h}{R_{\min}} = \frac{1}{5} \dots \frac{1}{3}$  розраховують по теорії тонких оболонок. Товсті оболонки розраховують за допомогою тривимірної теорії пружності.

В залежності від гаусової кривизни розрізняють оболонки з додатною (сферична оболонка,  $R_{12} = 0$ ), нульовою (циліндричні, конічні оболонки), від'ємною (сідлообразні оболонки) та змішаною гаусовою кривизною (торообразні оболонки).

По властивостям матеріалу розрізняють ізотропні, анізотропні, пружні, в'язкопружні, фізично нелінійні та інші оболонки.

Оболонки можуть мати і конструктивну анізотропію (шари з різних матеріалів, ребра жорсткості та інше). По відносній величині прогину розрізняються оболонки з малим (геометрично лінійні) та з великим прогином (геометрично нелінійні).

Якщо стріла підйому  $f \leq \frac{a}{5}$ ; для тонкої оболонки  $\left(\frac{h}{R_{\min}} < \frac{1}{20}\right)$ , то оболонка

вважається пологою. Для пологої оболонки можна геометрію її поверхні замінити евклідовою геометрією її проекції на площину (план). Так у випадку прямокутних координат приймається  $H_1 = H_2 = I$ . Найбільший підйом (довжина нормалі) оболонки над планом називається стрілою підйому  $f$ . Найменший розмір плану позначаємо буквою  $a$ .

В залежності від форми плану розрізняють прямокутні, круглі, трикутні та інші оболонки в плані.

Серед замкнутих оболонок варто виділити оболонки обертання, серединна поверхня яких утворюється з обертанням плоскої кривої навколо осі, яка лежить в її площині кривої. В залежності від виду плоскої кривої отримаємо еліпсоїдальні, сферичні, конічні, циліндричні та інші оболонки обертання.

Легкість, висока міцність та економічність оболонок сприяють широкому використанню їх в різних конструкціях.

### **3.2. Варіаційне формулювання задачі про напружено-деформований стан тонких оболонок і зведення її до задачі мінімізації**

Нехай серединна поверхня оболонки займає область  $\Omega$ . При розрахунку напружено-деформованого стану пластинчастої системи передбачається, що деформації відповідають гіпотезам Кірхгофа-Лява. Тоді задача про напружено-деформований стан оболонки у варіаційному формулюванні на основі принципу мінімуму потенціальної енергії може бути сформульована як задача мінімізації квадратичного функціонала: де потрібно знайти переміщення, яке задовольняє умовам

$$u \in V, E(u) = \inf_{v \in V} E(v) \quad (3.8)$$

де  $V$  - безліч допустимих переміщень. Відносно  $V$  передбачається, що воно є Гільбертовим простором. Елементи, що належать простору  $V$ , задовольняють кінематичним граничним умовам і вимогам гладкості шуканого рішення, тобто є кінематично допустимими переміщеннями для оболонкових конструкцій.

Функціонал  $E(v)$  є потенціальною енергією оболонки. Потенціальна енергія оболонки, визначена вектором  $v$ , може бути представлена у вигляді

$$E(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v). \quad (3.9)$$

З енергетичної точки зору  $\frac{1}{2}a(v, v)$  є потенціальною енергією пружної деформації тіла  $\Omega$  і  $f(v)$  – робота зовнішніх сил. Якщо передбачити, що  $V$  – повний простір, симетрична квадратична форма  $a(v, v)$  еліпсна, тобто

$$\exists \gamma > 0, \forall v \in V, \gamma \|v\|_V^2 \leq a(v, v) \quad (3.10)$$

тоді по теоремі про проекцію існує єдиний елемент такий, що

$$a(u, v) = f(v); \forall u; v \in V \quad (3.11)$$

Варіаційне рівняння (3.11) є принципом можливих переміщень для оболонкових систем, справедливих для всіх кінематичних допустимих переміщень  $v$ . З варіаційної властивості, випливаючої з теореми про проекцію, витікає, що рішення задачі (3.8) є єдиним елементом з  $V$ , що доставляє мінімум функціоналу  $E(u)$ , тобто

$$E(u) \leq E(v), \forall v \in V \quad (3.12)$$

Таким чином, рішення варіаційної задачі про мінімізацію квадратичного функціонала (3.9) існує і єдино. Використання варіаційної постановки завдання про напружений-деформований стан оболонки дозволяє будувати наближені рішення при менших припущеннях про гладкість шуканого рішення і коефіцієнтів рівняння. Крім того, варіаційне формулювання завдання дозволяє виключити із спеціального розгляду природні граничні умови.

### 3.3. Побудова скінченномірних просторів

При рішенні задачі мінімізації (3.8) прямими по термінології С.Г. Міхліна [15] методами, безкінечномірний простір  $V$  замінюють деяким скінченномірним простором  $V_h \subset V$  і на ньому шукають систему переміщень, що доставляє мінімум функціоналу. Для побудови скінченномірного простору  $V_h$  можуть бути використані

різні способи. Найширше вживаним в даний час є спосіб, в якому як базисні функції використовуються функції з кінцевим малим носієм [9]. Для їх побудови дискретизацію області  $\Omega$  здійснюють на кінцеве число підобластей  $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$  і на об'єднанні  $\pi_i^h = \bigcup_m \Omega_m$ , що примикають до кожного вузла, будують функції з кінцевим носієм, рівним вибраному об'єднанню. Будь-яка повна лінійно незалежна система функцій такого вигляду приймається як базисні функції. Перевага такого базису полягає в тому, що носії його функції значно менше  $\Omega$  і базис «майже ортогональний».

Нехай  $h = \max_n \left( \frac{mex \Omega_n}{mes \Omega} \right)$ , тоді можна побудувати послідовність

скінченномірних просторів, визначених параметром.

Нехай  $V_h \subset V$  – деяка послідовність скінченномірних просторів, що апроксимують  $V$  в наступному сенсі: для будь-якого  $v \in V$  і будь-якого  $\varepsilon(h) > 0$  існує таке  $\hat{h}$ , що для всіх  $h < \hat{h}$  в  $V_h$  знайдеться елемент  $v_h$ , що апроксимує  $v$  з точністю  $\varepsilon(h)$ , тобто для всіх  $h < \hat{h}$  виконується нерівність:

$$\|v - v_h\| \leq c \inf_{w_h \in V_h} \|v - w_h\|_V \leq \varepsilon(h), \quad (3.13)$$

де  $c$  – деяка стала і  $\varepsilon(h)$  – оцінка погрішності апроксимації,  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Умова (3.13) означає повноту послідовності просторів  $V_h$  і  $V$ .

Для апроксимації переміщень на скінченномірному просторі використовують частино-поліноміальні функції, задані на багатокутниках. Коефіцієнти полінома в кожному багатокутнику вибирають так, щоб забезпечити приналежність всієї функції простору  $V$ . При цьому елемент  $v \in V$  апроксимується з порядком  $p$  ( $p > 0$ ), якщо в  $V_h$  знайдеться такий елемент  $v_h$ , що

$$\|v - v_h\| = O(h^p) \quad (3.14)$$

Нехай  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, N$  – система базисних функцій,  $i$ -й член якого набуває в  $i$ -му вузлі значення 1, а в останніх вузлах сітки перетворюється на нуль

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad (3.15)$$

де  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Кінцевим носієм  $\varphi_i(x)$  є об'єднання підобластей, що примикають до  $i$ -го вузла. Тоді лінійна комбінація

$$v_h = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i(x) \quad (3.16)$$

визначає функцію  $V_h$  всюди в області  $\Omega$  по її вузлових значеннях  $V_i$ . Вибір сітки, а також вибір системи базисних функцій  $\varphi_i(x)$ , що задовольняють умові (3.8) і що визначають спосіб заповнення  $V_h$  неоднозначні. Від вибору сітки і базисних функцій залежить вигляд і властивості виникаючої варіаційно-сіткової схеми для даної варіаційної задачі.

### 3.4. Використання методу покоординатного спуску (МПС) у варіаційно-сіткових схемах при розрахунку оболонкових систем

Для мінімізації функціонала  $E(v)$  на скінченномірному просторі  $R_N$  пропонується використовувати метод покоординатного спуску (МПС) [16, 10]. Для вирішення задачі мінімізації (3.8) використовувався підхід, заснований на ітераційній процедурі послідовної мінімізації відповідного квадратичного функціонала, який досягає мінімального значення на шуканому вирішенні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Оскільки переміщення повинні задовольняти граничним умовам, отримаємо завдання мінімізації з обмеженнями. У багатьох випадках переміщення задаються у вигляді фіксованих величин на частини границі. Підставляючи їх у функціонал, отримаємо завдання мінімізації без обмежень меншої розмірності.

У методі покоординатного спуску розв'язок задачі мінімізації (3.8) шукається шляхом послідовних наближень. Нехай  $v^k$  – вектор переміщень в поточному наближенні. Тоді подальше наближення будується у вигляді

$$\vec{v}^{k+1} = \vec{v}^k + \lambda_i^{k+1} \vec{e}_i, \quad i=1, \dots, N, \quad (3.17)$$

де  $\vec{e}_i$  – одиничний вектор у напрямі компоненти  $\vec{v}_i$  і  $\lambda_i^{k+1}$  – крок. Функціонал на скінченномірному просторі  $R_N$  можна представити у вигляді:

$$E = \sum_n E_n, \quad (3.18)$$

Знаходимо суму по всіх підобластях  $\Omega_n$ .

Підставляючи  $v^{k+1}$  у функціонал (3.18) і враховуючи, що  $E(v^{k+1})$  – квадратична функція, отримаємо:

$$E(v^{k+1}) = E(v^k) + \lambda_i^{k+1} \frac{\partial E}{\partial v_i} + \frac{1}{2} (\lambda_i^{k+1})^2 \frac{\partial^2 E}{\partial v_i^2}. \quad (3.19)$$

В силу «майже ортогонального» базису апроксимуючих функцій виконується співвідношення

$$\frac{\partial E}{\partial v_i} = \sum_{\Omega_m \in \pi_i^h} \frac{\partial E_m}{\partial v_i} + \frac{1}{2} (\lambda_i^{k+1})^2 \sum_{\Omega_m \in \pi_i^h} \frac{\partial^2 E_m}{\partial v_i^2}, \quad (3.20)$$

де сума визначається в (3.20) по областях  $\Omega_m$ , що оточують  $i$ -й вузол. Тоді при переході до " $k+1$ " наближення функціонал отримує приріст

$$\Delta E = \lambda_i^{k+1} \sum_{\Omega_m \in \pi_i^h} \frac{\partial E_m}{\partial v_i} + \frac{1}{2} (\lambda_i^{k+1})^2 \sum_{\Omega_m \in \pi_i^h} \frac{\partial^2 E_m}{\partial v_i^2}, \quad (3.21)$$

де  $M_i$  – кількість підобластей  $\Omega_m$ , що оточують  $i$ -й вузол. З енергетичної точки зору  $\Delta E$  є зміною потенціальної енергії підобластей  $\Omega_m$ , що оточують вузол, в якому  $v_i^k$  отримує приріст  $\lambda_i^{k+1}$  при інших постійних переміщеннях, рівних  $v^k$ , і легко обчислюється, виходячи з цієї інтерпретації.

Величина кроку  $\lambda_i^{k+1}$  визначається формально з умови максимуму зменшення функціонала

$$\frac{\partial \Delta E}{\partial \lambda_i^{k+1}} = 0, \quad (3.22)$$

звідки

$$\lambda_i^{k+1} = \frac{\sum_{\Omega_m \in \pi_i^h} \frac{\partial E_m}{\partial v_i}}{\sum_{\Omega_m \in \pi_i^h} \frac{\partial^2 E_m}{\partial v_i^2}}, \quad (3.23)$$

тоді

$$v_i^{k+1} = v_i^k + \lambda_i^{k+1}. \quad (3.24)$$



При обчисленні подальших компонент вектора переміщень використовується " $k+1$ " наближення. Після визначення всіх компонент вектора  $v^{k+1}$  можна переходити до чергового наближення. Відзначимо, що МПС дозволяє уникнути деяких труднощів, властивих прямим методам вирішення СЛАР (системи лінійних алгебраїчних рівнянь) при чисельній реалізації на ЕОМ.

У МПС нумерація вузлів при дискритизації області довільна, що в цілому зменшує трудомісткість алгоритму. МПС набагато економічніше з точки зору пам'яті ЕОМ, в порівнянні з алгоритмами, що вимагають зберігання матриць жорсткості. Це пояснюється тим, що при чисельній реалізації алгоритму МПС необхідно зберігати вектор рішення в поточному наближенні і одновірні допоміжні масиви. Оскільки МПС є ітераційним алгоритмом, що сходиться, помилки округлення менше позначаються на точності остаточного результату, оскільки виникаючі погрішності на наступних ітераціях виправляються.

Для прискорення збіжності ітераційного процесу використовується метод неповної релаксації. Функціонал на скінченновірному просторі  $R_N$  формально можна записати у вигляді

$$E(v) = \frac{1}{2}(Kv, v) - (f, v), \quad (3.25)$$

де  $K$  – додатньо визначена симетрична матриця,  $\vec{f}$  – вектор вузлового зовнішнього навантаження і  $\vec{v}$  – вектор шуканих переміщень.

Відомо, що мінімізація функціонала (3.25) вирішення СЛАР

$$K\vec{u} = \vec{f} \quad (3.26)$$

еквівалентні задачі. Виходячи з цього, неважко відмітити, що мінімізація функціонала на скінченновірному просторі  $R_N$  методом покоординатного спуску еквівалентна релаксаційному методу вирішення СЛАР, і для прискорення збіжності ітераційного процесу можна застосувати метод неповної релаксації.

Тоді подальше наближення будується у вигляді

$$\vec{v}^{k+1} = \vec{v}^k + \beta \lambda_i^{k+1} \vec{e}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.27)$$

де  $\beta$  – параметр релаксації. Відомо, що при  $\beta \in (0,2)$  ітераційний процес завжди сходиться, і максимальна швидкість збіжності ітераційного процесу досягається при деякому  $\beta = \beta_{opt}$ . Показано, що якщо  $\rho (\rho \in (0,1))$  – спектральний радіус матриці Якобі, оптимальне значення параметра релаксації знаходиться з формули

$$\beta_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}} \quad (3.28)$$

З (3.28) витікає, що в разі квазітрихдіагональної матриці  $K$  вибір  $\beta = \beta_{opt}$  приводить до верхньої релаксації. Показано, що при  $\beta_{opt}$  швидкість ітераційного процесу досягає свого максимуму і по числу ітерацій, необхідних для знаходження рішення задачі із заданою точністю, методом верхньої релаксації в разі квазітрихдіагональної матриці є одним з кращих стаціонарних ітераційних методів.

### 3.5. Розрахунок тонких оболонок

До оболонкових конструкцій на базі варіаційно-сіткового методу можна підійти, використовуючи кусочно-поліноміальне представлення на криволінійних чотирикутниках або трикутниках. Проте, побудова апроксимуючих функцій в цьому випадку пов'язана з певними труднощами і приводить до ефекту жорстких зміщень. Це означає, що якщо вузлам оболонки надати переміщення, що моделюють її переміщення в просторі, як абсолютно твердого тіла, в ній виникнуть напруження, що протирічить фізичній суті. Поява цього ефекту істотно знижує точність розрахунку, а інколи може привести до відсутності збіжності рішення.

Останнім часом при розрахунку оболонкових конструкцій варіаційно-сітковим методом з'явилися тенденції до розгляду оболонок як тривимірних тіл, з використанням співвідношень теорії пружності. Проте безпосереднє використання такого підходу для розрахунку тонких оболонок є менш ефективним, в порівнянні з підходами, заснованими на спеціальних теоріях тонких оболонок. Зокрема, при одношаровій апроксимації оболонки з лінійним законом зміни переміщень по товщині або багатшаровій схемі з лінійною апроксимацією, збіжність має місце, але при цьому невиправдано зростає трудомісткість процесу рішення задачі,

оскільки, згідно теорії тонких оболонок, досить точні результати можна отримати на основі лінійного закону.

Одношарова схема при лінійній апроксимації переміщень по товщині знаходить застосування з урахуванням статичної гіпотези оболонок про рівність нулю напруження стиску і по суті відповідає деякій спеціальній теорії оболонок. Практичне використання такого підходу показує, що при зменшенні товщини оболонки виявляється різке уповільнення збіжності рішень. Суть цього явища розглянута в [17] і пояснюється недостатньо повним обліком властивостей жорстких зміщень.

Вибір апроксимуючих функцій і методика розрахунку оболонкових конструкцій за моментною схемою, заснована на розгляді оболонок як тривимірних тіл, з врахуванням жорстких зміщень, розглянута в [17]. Результати розв'язку різних завдань теорії оболонок показали переваги і ефективність вказаної схеми [17].

У даній роботі для розрахунку тонкостінних оболонкових конструкцій використаний підхід, запропонований Гріном. Передбачається, що поведінка безперервної криволінійної поверхні достатньо точною описується поведінкою поверхні, складеної з малих плоских пластин. Такий підхід для розрахунку тонких оболонок дозволяє виключити з розгляду ефект жорстких зміщень. З фізичних міркувань виходить, що із зменшенням розмірів пластин рішення повинне сходиться, і, як показали чисельні розрахунки, така збіжність спостерігається. При апроксимації довільної оболонки плоскими пластинами використовувалися плоскі трикутники. В результаті оболонка розглядалася як просторова пластинчаста система.

Специфіка роботи тонкостінних конструкцій, типу оболонок, полягає в локалізації ділянок швидкої зміни напружень в місцях де прикладені зосереджені сили і закріплення. При цьому для отримання задовільняючих рішень в районі таких краєвих ефектів необхідна досить дрібна дискретизація з характерним розміром, порядку товщини оболонки. Оскільки використовується досить дрібне розбиття, вживання плоских трикутників, в цьому випадку, сповна виправдано, і похибки геометричної апроксимації зменшуються зі зменшенням сітки. На інших ділянках

конструкції криволінійні трикутники можуть дати певний вигаш в точності при однакових розмірах трикутників. Проте необхідність врахування переміщень трикутника, як жорсткого цілого, значно ускладнює побудову апроксимуючих функцій і приводить до великих витрат машинного часу. У більшості практичних розрахунків точність, що досягається при використанні плоских трикутників для розрахунку оболонок, виявляється сповна прийнятною. Похибка ж, обумовлена тим, що в межах плоского трикутника не враховуються особливості геометрії оболонок, які вносяться при визначенні геометрії оболонки в межах криволінійного трикутника ефектом жорстких зміщень, а при його усуненні порушення інших вимог, є незначними. Крім того, використання плоских трикутників дозволяє досить просто здійснити з'єднання оболонки з підкріплюючими елементами, що не завжди вдається при використанні криволінійних трикутників.

Нехай серединна поверхня оболонкової системи займає область  $\Omega$ . Виберемо для неї глобальну систему координат  $OXYZ$  і здійснимо дискретизацію  $\Omega$  на кінцеве число трикутників  $\Omega = \bigcup \Omega_n$ . Введемо в розгляд локальну систему координат  $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$  так, щоб серединна поверхня кожного трикутника лежала в площині  $\hat{x}, \hat{y}$ . Тоді потенціальна енергія кожного трикутника складається з незалежних між собою енергії плоского напруженого стану і енергії згину. Для апроксимації переміщень в межах трикутника скористаємося раніше наведеними залежностями в локальних координатах. Переміщення серединної поверхні задамо у вигляді лінійних залежностей від координат, а прогин у вигляді неповного кубічного полінома:

$$\begin{aligned}\hat{u}_h &= \frac{1}{2\Delta} \left[ (a_i + b_i x + c_i y) \hat{u}_i + (a_j + b_j x + c_j y) \hat{u}_j + (a_k + b_k x + c_k y) \hat{u}_k \right], \\ \hat{v}_h &= \frac{1}{2\Delta} \left[ (a_i + b_i x + c_i y) \hat{v}_i + (a_j + b_j x + c_j y) \hat{v}_j + (a_k + b_k x + c_k y) \hat{v}_k \right], \\ \omega_h &= a_1 L_i + a_2 L_j + a_3 L_k + a_4 L_i^2 L_j + a_5 L_i^2 L_k + a_6 L_j^2 L_i + \\ &\quad + a_7 L_j^2 L_k + a_8 L_k^2 L_i + a_{10} L_k^2 L_j + 2a_{10} L_i L_j L_k,\end{aligned}\quad (3.29)$$

де в (3.29)  $2\Delta$  – подвоєна площа трикутника

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j; \quad b_i = y_j - y_k; \quad c_i = x_k - x_j \quad (3.30)$$

Коефіцієнти  $a, b, c$  з іншими індексами виходять за допомогою колової перестановки індексів. У формулі (3.30) використані  $L$  – координати

$$\begin{aligned}
a_1 &= \widehat{\omega}_i, \\
a_2 &= \widehat{\omega}_j, \\
a_3 &= \widehat{\omega}_k, \\
a_4 &= \widehat{\omega}_i - \widehat{\omega}_j - b_k \widehat{\phi}_i - c_k \widehat{\psi}_i, \\
a_5 &= \widehat{\omega}_i - \widehat{\omega}_k + b_j \widehat{\phi}_i + c_j \widehat{\psi}_i, \\
a_6 &= \widehat{\omega}_j - \widehat{\omega}_i + b_k \widehat{\phi}_j + c_k \widehat{\psi}_j, \\
a_7 &= \widehat{\omega}_j - \widehat{\omega}_k - b_i \widehat{\phi}_j - c_i \widehat{\psi}_j, \\
a_8 &= \widehat{\omega}_k - \widehat{\omega}_i - b_j \widehat{\phi}_k - c_j \widehat{\psi}_k, \\
a_9 &= \widehat{\omega}_k - \widehat{\omega}_j + b_i \widehat{\phi}_k + c_i \widehat{\psi}_k, \\
a_{10} &= \frac{1}{4} \sum_{s=1}^9 a_s.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

У формулах (3.31)  $\widehat{\phi}_i = \left( \frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial x} \right)_i$ ;  $\widehat{\psi}_i = - \left( \frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial y} \right)_i$  – кути повороту пластини відповідно довкола осей  $x$  і  $y$  в  $i$ -му вузлі. Тоді потенціальна енергія кожного трикутника  $\Omega_m$  запишеться в локальній системі координат у вигляді

$$E(\widehat{u}_i, \dots, \widehat{\psi}_i) = \widehat{E}_h^{nl}(\widehat{u}_i, \widehat{v}_i) + \widehat{E}_h^{32}(\omega_i, \phi_i, \psi_i), \tag{3.32}$$

де вузловими невідомими є переміщення  $\widehat{u}_i, \widehat{v}_i, \widehat{\omega}_i$  у напрямі локальних осей  $\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}$  і повороти нормалі  $\widehat{\phi}_i, \widehat{\psi}_i$  відносно осей  $\widehat{x}, \widehat{y}$  відповідно. Вирази для  $\widehat{E}_h^{nl}, \widehat{E}_h^{32}$  мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\widehat{E}_h^{nl} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \frac{Et}{4\Delta(1-\nu^2)} \left\{ \left[ \left( b_i \widehat{u}_i + b_j \widehat{u}_j + b_k \widehat{u}_k \right)^2 + \left( c_i \widehat{v}_i + c_j \widehat{v}_j + c_k \widehat{v}_k \right)^2 + \right. \right. \\
&+ 2\nu \left( b_i \widehat{u}_i + b_j \widehat{u}_j + b_k \widehat{u}_k \right) \cdot \left( c_i \widehat{v}_i + c_j \widehat{v}_j + c_k \widehat{v}_k \right) + \frac{1-\nu}{2} (b_i \widehat{v}_i + b_i \widehat{v}_i + b_k \widehat{v}_k) + \\
&\left. \left. + \left( c_i \widehat{v}_i + c_j \widehat{v}_j + c_k \widehat{v}_k \right)^2 \right] \right\} - F_{xi} \widehat{u}_i - F_{yi} \widehat{v}_i,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

де  $F_{xi}, F_{yi}$  – приведені до вузлів узагальнені зовнішні навантаження і  $M$  – кількість трикутників, пов'язаних з  $i$ -м вузлом, тобто підсумовування здійснюється по трикутниках, що оточують  $i$ -й вузол.

$$\begin{aligned} \widehat{E}_h^{32} = \sum_{m=1}^M \frac{D}{48\Delta^3} \{ & A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3 + B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + B_1B_2 + \\ & + B_1B_3 + B_2B_3 + \nu [2(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) + A_1B_2 + A_2B_1 + A_2B_3 + A_3B_2 + \\ & + A_1B_3 + A_3B_1] + 2(1-\nu)(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_1C_2 + C_2C_3 + C_1C_3) - \frac{1}{3} \sum_{m=1}^M q\Delta \{ \widehat{\omega}_i + \\ & + \widehat{\omega}_j + \widehat{\omega}_k + \frac{1}{8} [ (b_j - b_k) \widehat{\phi}_i + (b_k - b_i) \widehat{\phi}_j + (b_i - b_j) \widehat{\phi}_k + (c_j - c_k) \widehat{\psi}_i + \\ & + (c_k - c_i) \widehat{\psi}_j + (c_i - c_j) \widehat{\psi}_k ] \} \}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

де

$$\begin{aligned} A_1 &= b_j^2 a_6 + b_k^2 a_8 + 2(b_i b_j a_4 + b_j b_k a_{10} + b_i b_k a_5), \\ A_2 &= b_i^2 a_4 + b_k^2 a_9 + 2(b_i b_j a_6 + b_j b_k a_7 + b_i b_k a_{10}), \\ A_3 &= b_i^2 a_5 + b_j^2 a_7 + 2(b_i b_j a_{10} + b_j b_k a_9 + b_i b_k a_8), \\ B_1 &= c_j^2 a_6 + c_k^2 a_8 + 2(c_i c_j a_4 + c_j c_k a_{10} + c_i c_k a_5), \\ B_2 &= c_i^2 a_4 + c_k^2 a_9 + 2(c_i c_j a_6 + c_j c_k a_7 + c_i c_k a_{10}), \\ B_3 &= c_i^2 a_5 + c_j^2 a_7 + 2(c_i c_j a_{10} + c_j c_k a_9 + c_i c_k a_8), \\ C_1 &= b_j c_j a_6 + b_k c_k a_8 + p_1 a_4 + p_2 a_{10} + p_3 a_5, \\ C_2 &= b_i c_i a_4 + b_j c_j a_9 + p_1 a_6 + p_2 a_7 + p_3 a_{10}, \\ C_3 &= b_i c_i a_5 + b_j c_j a_7 + p_1 a_{10} + p_2 a_9 + p_3 a_8, \\ P_1 &= b_i c_j + b_j c_i, \\ P_2 &= b_j c_k + b_k c_j, \\ P_3 &= b_k c_i + b_i c_k. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Вибираючи як вузлові невідомі переміщення  $u_i, v_i, \omega_i$  у напрямі глобальних осей  $x, y, z$  і  $\varphi_i, \psi_i, \gamma_i$ , довкола осей  $x, y, z$  відповідно, перетворювані до глобальних координат. Для цього скористаємося наступним перетворенням

$$\begin{aligned}
\hat{u}_i &= u_i \cos(\hat{x}, x) + v_i \cos(\hat{x}, y) + \omega_i \cos(\hat{x}, z), \\
\hat{v}_i &= u_i \cos(\hat{y}, x) + v_i \cos(\hat{y}, y) + \omega_i \cos(\hat{y}, z), \\
\hat{\omega}_i &= u_i \cos(\hat{z}, x) + v_i \cos(\hat{z}, y) + \omega_i \cos(\hat{z}, z), \\
\hat{\varphi}_i &= \varphi_i \cos(\hat{x}, x) + \psi_i \cos(\hat{x}, y) + \gamma_i \cos(\hat{x}, z), \\
\hat{\psi}_i &= \varphi_i \cos(\hat{y}, x) + \psi_i \cos(\hat{y}, y) + \gamma_i \cos(\hat{y}, z).
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Підставляючи (3.36) в  $\hat{E}_h(\hat{u}_i, \dots, \hat{\psi}_i)$ , отримаємо

$$E_h(u_i, \dots, \gamma_i) = E_h^{nl}(u_i, v_i, \omega_i) + E_h^{3z}(u_i, \dots, \gamma_i) \tag{3.37}$$

Підсумовуючи  $E_h(u_i, \dots, \gamma_i)$  по всіх трикутниках  $\Omega_n$ , отримаємо вирази для функціонала  $E_h(u_i, \dots, \gamma_i)$  в глобальних координатах. Визначення локальних координат  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  здійснюється аналогічно  $E_h(u_i, \dots, \gamma_i)$  (3.36). Якщо початок локальної і глобальної систем координат збігається, то

$$\begin{aligned}
\hat{x}_i &= x_i \cos(\hat{x}, x) + y_i \cos(\hat{x}, y) + z_i \cos(\hat{x}, z), \\
\hat{y}_i &= x_i \cos(\hat{y}, x) + y_i \cos(\hat{y}, y) + z_i \cos(\hat{y}, z), \\
\hat{z}_i &= x_i \cos(\hat{z}, x) + y_i \cos(\hat{z}, y) + z_i \cos(\hat{z}, z).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Вісь  $\hat{x}$  направлена уздовж сторони трикутника  $ij$ , глобальні координати якої визначаються співвідношеннями:

$$x_{ij} = x_j - x_i; \quad y_{ij} = y_j - y_i; \quad z_{ij} = z_j - z_i. \tag{3.39}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\cos(\hat{x}, x) &= \frac{x_{ji}}{\ell_{ij}}, \\
\cos(\hat{x}, y) &= \frac{y_{ji}}{\ell_{ij}}, \\
\cos(\hat{x}, z) &= \frac{z_{ji}}{\ell_{ij}}, \\
\ell_{ij} &= (x_{ji}^2 + y_{ji}^2 + z_{ji}^2)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Оскільки вісь  $\hat{z}$  направлена перпендикулярно площині трикутника, то відповідно до властивостей векторного добутку напрям  $\hat{z}$  можна визначити як

векторний добуток двох сторін трикутника  $ij$  та  $jk$ . Довжина відповідного вектора дорівнює подвоєній площі трикутника. Таким чином

$$2\Delta = \left( (y_{ji}z_{ki} - z_{ji}y_{ki})^2 + (z_{ji}x_{ki} - x_{ji}z_{ki})^2 + (x_{ji}y_{ki} - y_{ji}x_{ki})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тоді направляючі косинуси осі  $\hat{z}$  визначаються співвідношенням

$$\begin{aligned}\cos(\hat{z}, x) &= \frac{1}{2\Delta} (y_{ji}z_{ki} - z_{ji}y_{ki}), \\ \cos(\hat{z}, y) &= \frac{1}{2\Delta} (z_{ji}x_{ki} - x_{ji}z_{ki}), \\ \cos(\hat{z}, z) &= \frac{1}{2\Delta} (x_{ji}y_{ki} - y_{ji}x_{ki}).\end{aligned}\tag{3.41}$$

Направляючі косинуси осі  $\hat{y}$  виходять як направляючі косинуси вектора, перпендикулярного одночасно осям  $\hat{x}$  і  $\hat{z}$ :

$$\begin{aligned}\cos(\hat{y}, x) &= \cos(\hat{z}, y)\cos(\hat{x}, z) - \cos(\hat{z}, z)\cos(\hat{x}, y), \\ \cos(\hat{y}, y) &= \cos(\hat{z}, z)\cos(\hat{x}, x) - \cos(\hat{z}, x)\cos(\hat{x}, z), \\ \cos(\hat{y}, z) &= \cos(\hat{z}, x)\cos(\hat{x}, y) - \cos(\hat{z}, y)\cos(\hat{x}, x).\end{aligned}\tag{3.42}$$

Якщо всі трикутники, що оточують  $i$ -й вузол компланарні, жорсткість в напрямі  $\gamma_i$  дорівнює нулю, і матриця стає виродженою. Існує декілька способів обійти це. Один з способів полягає в тому, що в якомусь вузлі вводиться деякий довільний коефіцієнт жорсткості [8]. Проте такий спосіб пов'язаний з певними труднощами і незручностями при програмуванні. У роботі [8] пропонується наближений спосіб в якому система фіктивних коефіцієнтів жорсткості задається для всіх трикутників як компланарних, так і не компланарних. В цьому випадку рішення задачі знаходиться мінімізацією деякого функціонала  $E^\alpha(u_i, \dots, \gamma_i)$ , близького до  $E(u_i, \dots, \gamma_i)$ . При дискретизації пластинчастої системи на трикутники фіктивні коефіцієнти жорсткості вводяться так, щоб рівновага в локальних координатах не порушувалася:

$$\hat{E}_h^\alpha = \hat{E}_h(\hat{u}_i, \dots, \hat{\psi}_i) + \frac{1}{2}\alpha Et\Delta(\hat{\gamma}_i^2 + \hat{\gamma}_j^2 + \hat{\gamma}_k^2 - \hat{\gamma}_i\hat{\gamma}_j - \hat{\gamma}_j\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_i\hat{\gamma}_k),\tag{3.43}$$



де  $\alpha = 0$  – деякий коефіцієнт. Перетворюючи  $\hat{E}_h^\alpha(\hat{u}_i, \dots, \hat{\gamma}_i)$  до глобальних координат і сумуючи  $E_h^\alpha(u_i, \dots, \gamma_i)$  по всіх трикутниках, отримуємо вираз для функціонала  $E_h^\alpha(u_i, \dots, \gamma_i)$  в глобальних координатах.

Через те, що додаткові жорсткості вводяться в некомпланарних вузлах, їх величини впливають на остаточний результат. Проте вживання в досить широких межах коефіцієнта мало позначається на точності результату. У практичних розрахунках використовували значення  $\alpha = 0,03$  або нижче. Для визначення напруження в трикутниках необхідно перейти до локальної системи координат, компоненти зусиль і згинальних моментів, можна обчислити по наступних залежностях

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Et}{2\Delta(1-\nu^2)} \left[ (b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k) + \nu (c_i v_i + c_j v_j + c_k v_k) \right], \\ N_y &= \frac{Et}{2\Delta(1-\nu^2)} \left[ (c_i v_i + c_j v_j + c_k v_k) + \nu (b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k) \right], \\ N_{xy} &= \frac{Et}{4\Delta(1-\nu)} \left[ b_i v_i + b_j v_j + b_k v_k + c_i u_i + c_j u_j + c_k u_k \right], \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{D}{6\Delta^2} \sum_{s=1}^3 A_s + \nu B_s, \\ M_y &= \frac{D}{6\Delta^2} \sum_{s=1}^3 B_s + \nu A_s, \\ M_{xy} &= \frac{D}{6\Delta^2} \sum_{s=1}^3 C_s. \end{aligned}$$

де  $t$  – товщина оболонки,  $D$  – циліндрична жорсткість.

Напруження на поверхнях трикутника знаходяться з виразів:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{t} \pm \frac{6M_x}{t^2}, \quad \sigma_y = \frac{N_y}{t} \pm \frac{6M_y}{t^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{N_{xy}}{t} \pm \frac{6M_{xy}}{t^2}, \quad (3.45)$$

де знак «+» відноситься до поверхні  $\hat{z} = \frac{t}{2}$ , а знак «-» – до поверхні  $\hat{z} = -\frac{t}{2}$ . Тоді

згідно [18], головне напруження визначається по формулах:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2. \quad (3.46)$$

Розрахунки напруження в трикутнику визначаються по енергетичній теорії міцності і обчислюються за формулою:

$$\sigma_1 = \max(\sigma_1, \sigma_2), \quad \sigma_2 = \max(\sigma_1, \sigma_2), \quad \sigma_p = \sigma_1^2 - \sigma_2\sigma_1 + \sigma_2^2. \quad (3.47)$$

Формули (3.46), (3.47) дають повне уявлення про напружено-деформований стан пластинчастих систем.

### 3.6. Розв'язок тестових задач

Програми відлагоджувалися і удосконалювалися на тестових і контрольних задачах різної складності. Чисельні результати порівнювалися з отриманими результатами на основі аналітичних або інших методів. Нижче наведено декілька контрольних прикладів, що ілюструють сферу застосування і точність розрахунку.

1. Циліндричний звід. Оболонка знаходиться під дією власної ваги і оперта з торців на жорсткі діафрагми, які перешкоджають переміщенням оболонки в своїй площині. Зважаючи на симетрію в задачі розглядалася четверта частина оболонки (див. рис.3.3). На рис.3.4. показана дискритизація оболонки на трикутники, отримана на основі прямокутної сітки  $7 \times 11$ . Результати розрахунку співставлялися з аналітичним рішенням [8]. На рис.3.5 і 3.6 показані вертикальні та повздовжні переміщення опори, отримані на основі чисельного і аналітичного розв'язків.

2. Згин. Довгий тонкостінний циліндр, навантажений кільцевою силою. Зважаючи на симетрію розглядалася чверть оболонки (рис.3.7). Дискритизація оболонки на трикутники отримана на основі прямокутної сітки  $24 \times 36$ . Результати розрахунку порівнювалися з аналітичним розв'язком (3.48) [19]. На рис.3.6 показані прогин оболонки для випадку чисельного і аналітичного розв'язку.

3. Кручення. Циліндрична оболонка, затиснена на торці і навантажена крутним моментом, на іншому торці. Сітка  $12 \times 72$ . Порівняння з аналітичним рішенням (3.42) наведене в таблиці 3.1.

4. Розтягування. Оболонка аналогічна як і в прикладі 2. Закріплена на одному торці і навантажена розтягуючою силою на іншому. Результати порівнювалися з аналітичним рішенням (3.50), таблиця 3.2.

$$w = -\frac{Pr^2\beta}{2Eh} e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x); \quad (3.48)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{3(1-\mu^2)}{r^2 h^2}};$$

$$v = \frac{M_{kp} x}{2\pi r^2 h G}; \quad (3.49)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$$M_{kp} = NrP;$$

$$v = \frac{L \cdot Lx}{E\Delta F}; \quad L = \frac{\pi r}{2}; \quad (3.50)$$

$$\Delta F = \frac{\pi}{4} \left( \left( r + \frac{h}{2} \right)^2 - \left( r - \frac{h}{2} \right)^2 \right),$$

де

$E$  – модуль Юнга;

$\mu$  – коефіцієнт Пуассона;

$r$  – радіус серединної поверхні оболонки;

$\ell$  – довжина оболонки вздовж твірної;

$L$  – довжина оболонки в круговому напрямі;

$h$  – товщина облонки;

$M_{kp}$  – крутний момент;

$P$  – сила у вузлових точках;

$\Delta F$  – площа поперечного перетину;

$N$  – число вузлів в перетині;

$x$  – поточне значення довжини по твірній;

$G$  – модуль пружності другого роду;

$LI$  – довжина одиничної ділянки по твірній.

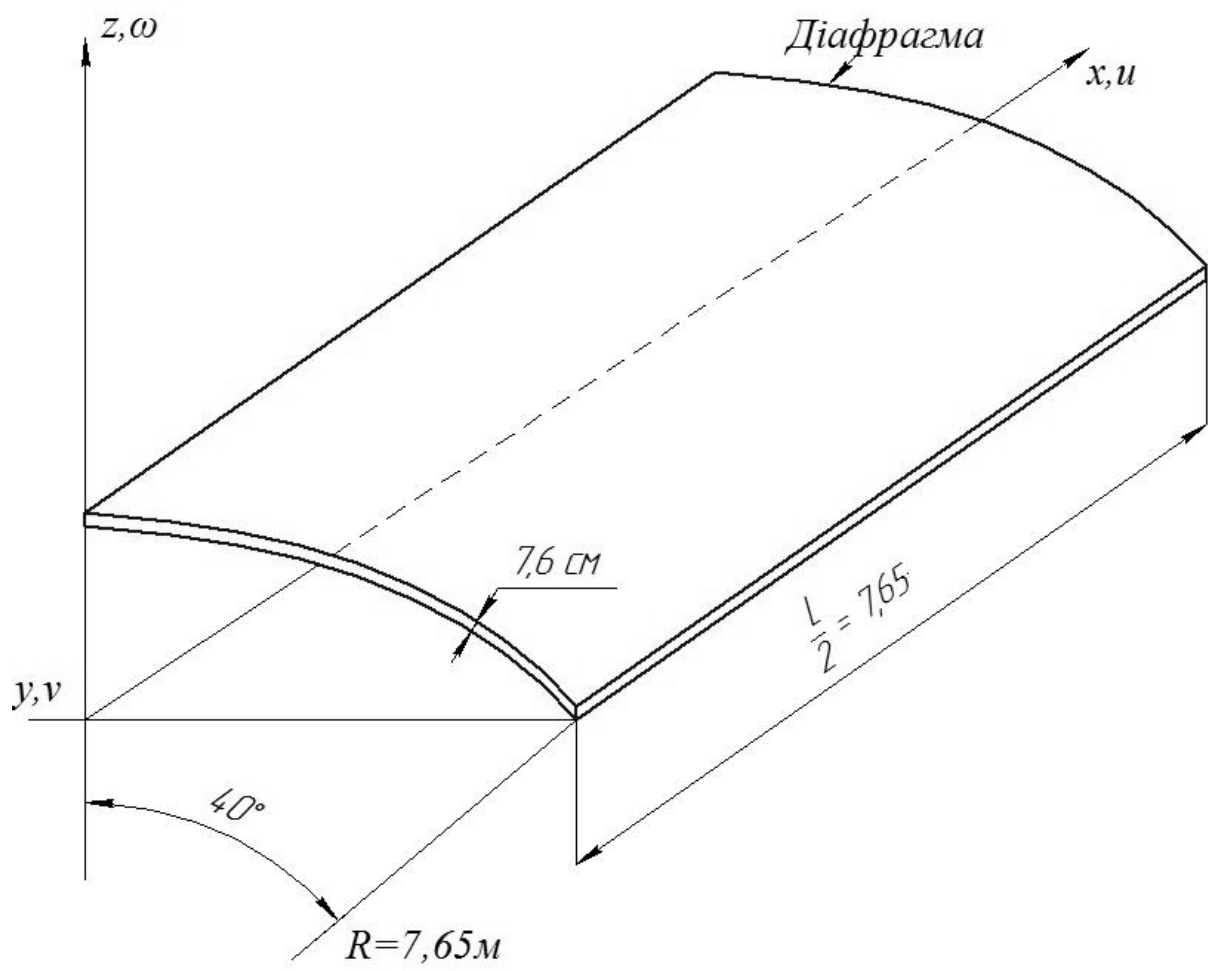


Рис.3.3 Циліндрична поверхня під дією власної ваги.

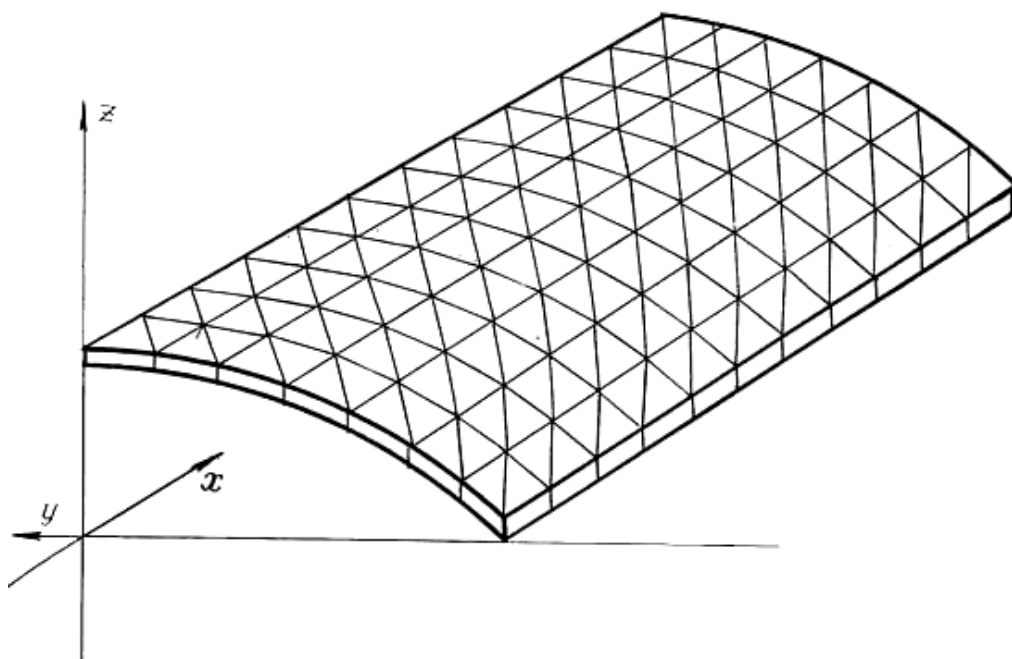


Рис.3.4 Циліндрична поверхня, яка розбита на трикутники (сітка  $7 \times 11$ )

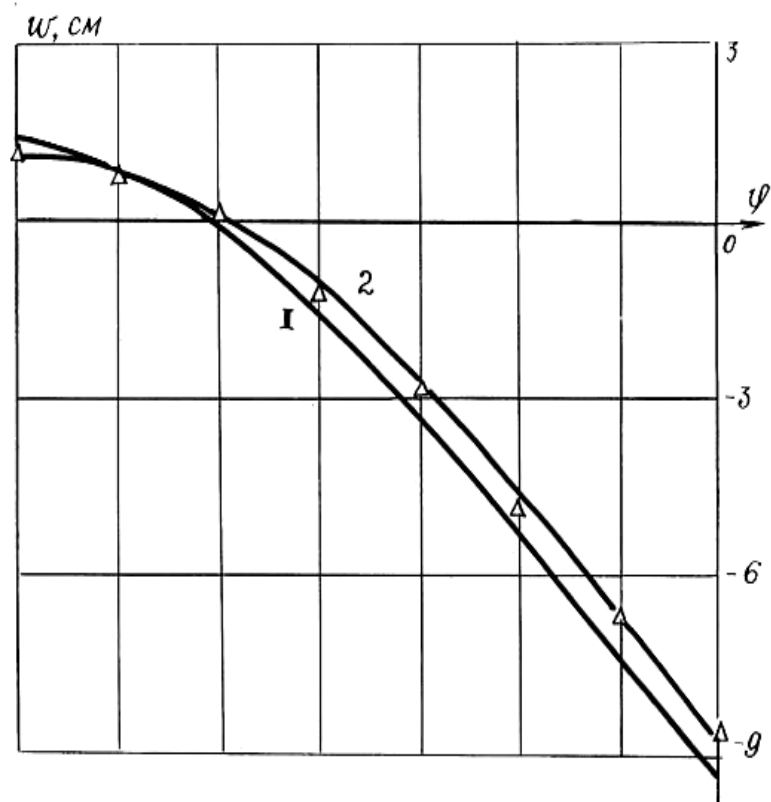


Рис.3.5 Вертикальне переміщення центрального перетину. 1 – аналітичний розв'язок; 2 – чисельний розв'язок.

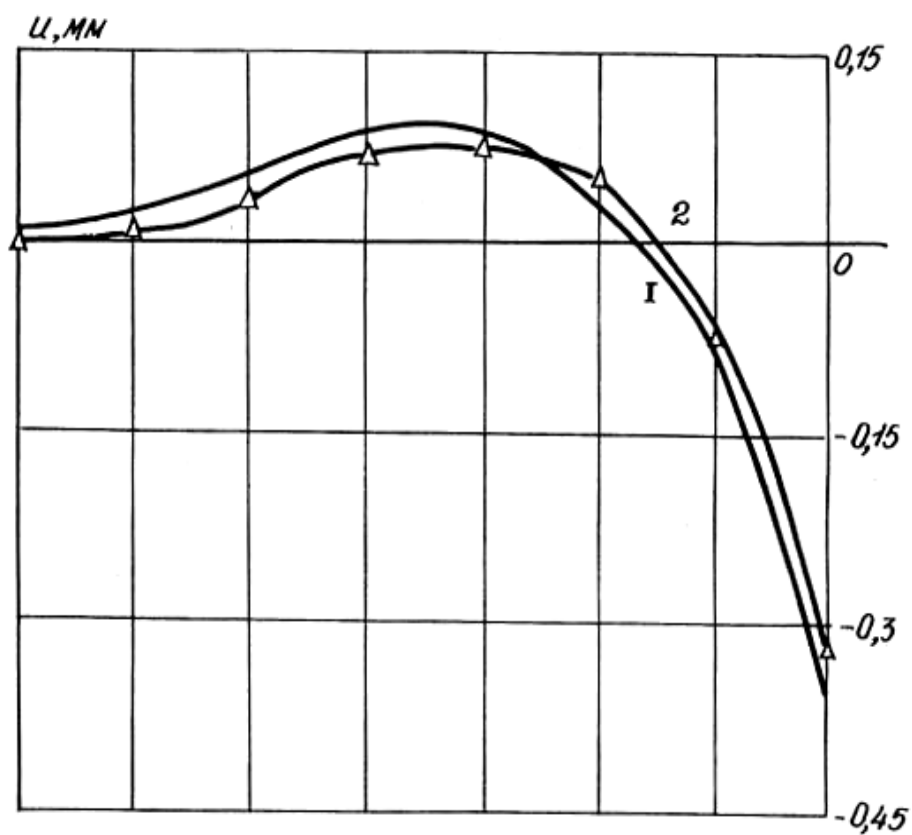


Рис.3.6 Поздовжнє переміщення опори:  
1 – аналітичне рішення; 2 – чисельне рішення.

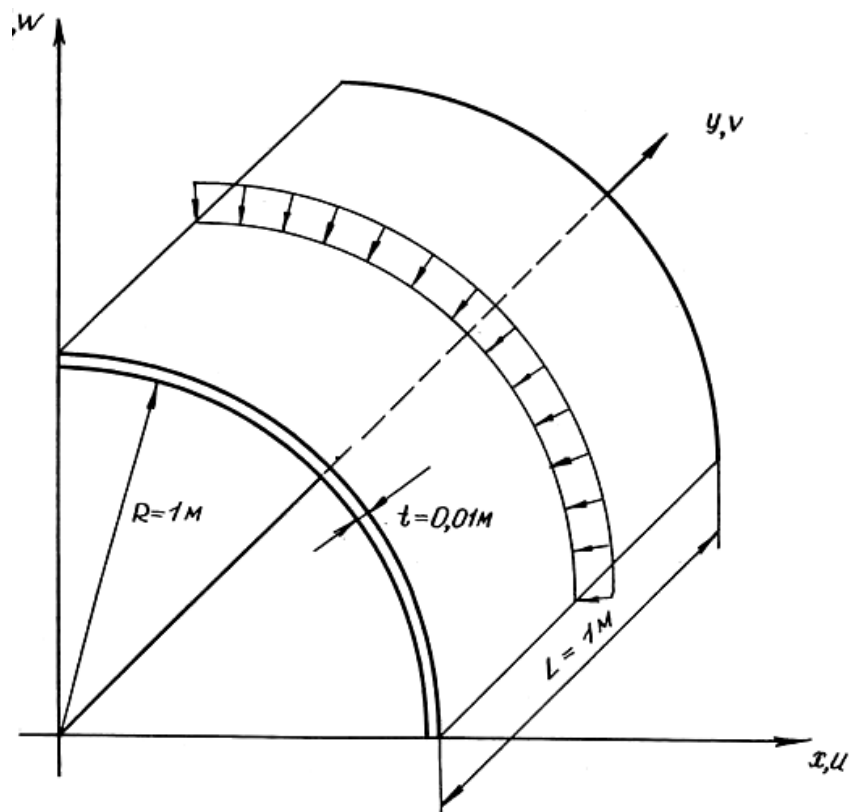


Рис.3.7 Тонкостінний циліндр навантажений кільцевою радіальною силою

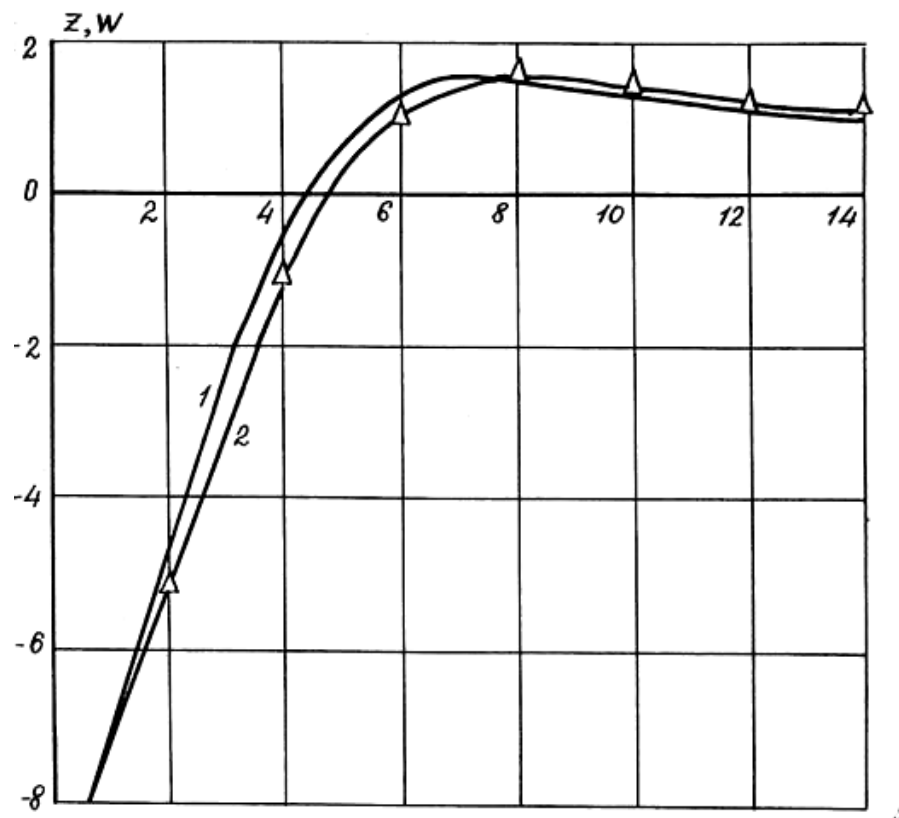


Рис.3.8. Вертикальне переміщення центрального перетину:

1 – аналітичне рішення; 2 – чисельне рішення.

Таблиця 3.1

Д	А	Ч
0,00	0,00	0,00
4,35	0,00487	0,00484
8,70	0,00974	0,00968
13,04	0,01461	0,01454
17,39	0,01947	0,01933
21,74	0,02434	0,02416
26,09	0,02921	0,02898
30,43	0,03408	0,03381
34,78	0,03894	0,03863
39,13	0,04381	0,04346
43,48	0,04868	0,04830
47,83	0,05355	0,05313
52,17	0,05842	0,05797
56,52	0,06329	0,06281
60,87	0,06815	0,06765
65,22	0,07302	0,07249
69,57	0,07789	0,07733
73,91	0,08276	0,08218
78,26	0,08762	0,08702
82,61	0,09249	0,09187
86,96	0,09736	0,09672
91,30	0,10223	0,10157
95,65	0,10710	0,10641
100,0	0,11197	0,11126

Таблиця 3.2

Д	А	Ч
0,00	0,00	0,00
0,09	0,01354	0,01353
18,18	0,02708	0,02706
27,27	0,04063	0,04060
36,36	0,05417	0,05414
45,45	0,06771	0,06767
54,54	0,08126	0,08121
63,64	0,09480	0,09475
72,73	0,10834	0,10829
81,82	0,12188	0,12183
90,91	0,13543	0,13537
100,00	0,14870	0,14891

### 3.7. Жорсткість обода

Гнучке зубчасте колесо, типу стакан, через конструктивні особливості і дрібномодульність зубчастого вінця на ньому, не може бути розраховане з врахуванням геометрії зубців. Тому практично у всіх роботах, де розраховується напружено-деформований стан гнучкого колеса, зубчастий вінець рівномірно розмазується в межах зони його розташування.

Дослідження, проведені різними авторами, показують, що вершини зубів хвилевої передачі виявляються практично не завантаженими, цей факт робить розмазання зубів гнучкого колеса відносно коректною задачею.

Евольвентний профіль з широкою западиною, який ми використовуємо, був розроблений в МДТУ імені М.Е.Баумана і ВНІІ редуктором [20]. Дослідження різних варіантів евольвентних профілів зубів показали переваги профілю зубів з широкою западиною. Такий профіль зубів стандартизований і прийнятий як основний для хвильових редукторів загального призначення.



Геометрія профілю показана на рис.3.9.

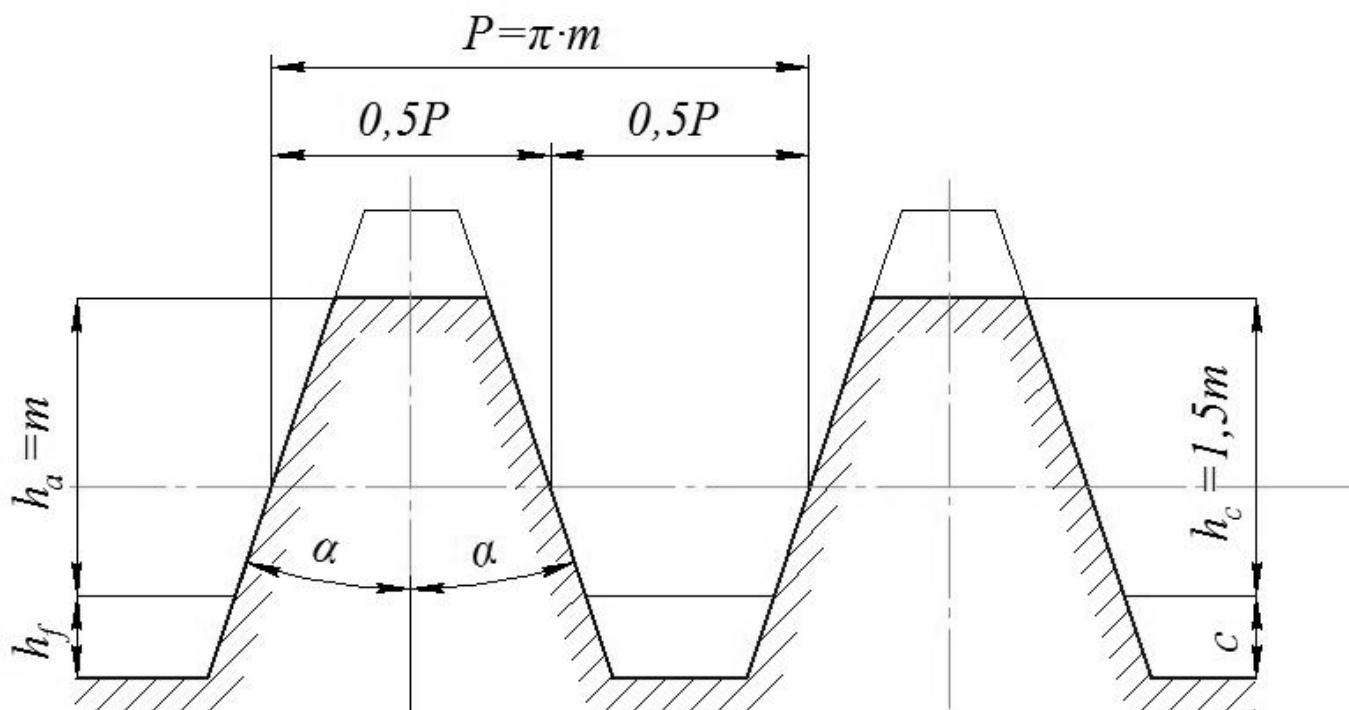


Рис.3.9 Геометрія профілю зубчастого вінця

При великому числі зубців, яке властиве хвильовим передачам, цей профіль без істотних похибок замінюється прямолінійним, також можна знехтувати радіусом скруглення під час переходу похилої поверхні зуба в западину в рамках розв'язання задачі.

Для вирішення поставленої задачі визначення еквівалентної товщини розглянемо елемент перетину зубчастого вінця згідно рис.3.10, як балку змінного перетину. В більшості випадків при визначенні переміщень в балках можна знехтувати впливом поздовжніх деформацій і деформацій зсуву, враховуючи лише переміщення, яке викликається згином і крученням.

Тоді для плоскої системи маємо:

$$\Delta_{ip} = \sum \int \frac{M_i M_p dS}{EJ}, \quad (3.51)$$

де

$M_p$  – посилення в довільному перетині;

$M_i$  – одиничне зусилля в першому напрямі;

$E$  – модуль Юнга;

$J$  – момент інерції перетину;

$\Delta_{ip}$  – переміщення в першому напрямі.

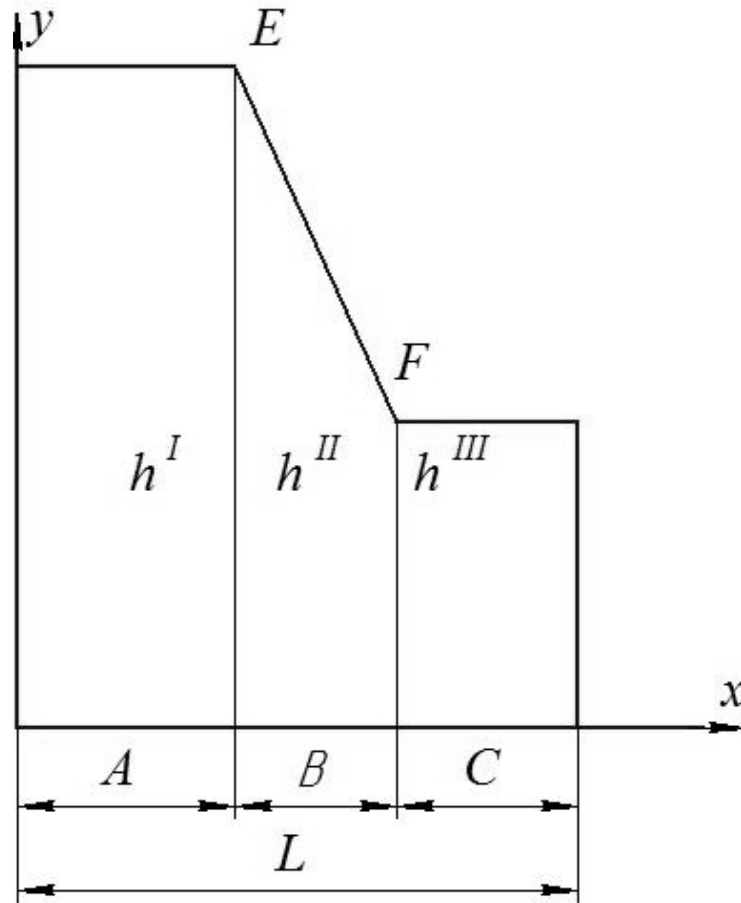


Рис.3.10 Фрагмент зубчастого вінця

Для елементу на рис.3.10 маємо:

$$\Delta_{1p} = \int_0^{\ell} \frac{x dx}{EJ_1}, \quad (3.52)$$

за умови  $M_p = 1$ ,  $M = x$

Для прямокутного елементу еквівалентної жорсткості згідно роботи [16]:

$$\Delta_{2p} = \frac{\ell^2}{2EJ_2}. \quad (3.53)$$

Прийнявши (3.52) і (3.53), отримаємо:

$$\int_0^{\ell} \frac{x dx}{EJ_1} = \frac{\ell^2}{2EJ_2}. \quad (3.54)$$

Враховуючи, що  $J_1 = \frac{bh_1^3}{12}$ ,  $J_2 = \frac{bh_2^3}{12}$  і скоротивши на  $E$ , отримуємо наступний вираз:

$$\int_0^{\ell} \frac{x dx}{h_1^3} = \frac{\ell^2}{2h_2^3}. \quad (3.55)$$

Виділений елемент розбитий на ділянки таким чином:

- ділянка  $a$  – горизонтальна ділянка по половині вершини зуба;
- ділянка  $b$  – відповідає похилій поверхні профілю зуба;
- ділянка  $c$  – горизонтальна ділянка по половині западини зуба;

Згідно рис.3.8 з геометричних міркувань отримаємо:

$$\begin{aligned} a &= 0,25\pi m - m \operatorname{tg} \alpha, \\ b &= 1,5m \tan \alpha + C^* m \operatorname{tg} \alpha, \\ c &= 0,5\pi m - a - b, \\ \ell &= 0,5\pi m, \\ C^* &= \begin{cases} 0,5 & \text{при } m \leq 0,5 \\ 0,35 & \text{при } m > 0,5 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.56)$$

де :

$$\begin{aligned} m &= \frac{d_{\text{но}}}{z_{\delta}}, \\ \alpha &= \arccos \left( \frac{m_0 \cdot \cos \alpha_0}{m} \right), \\ d_{\text{но}} &= (2\chi + z_{\delta}) m_0, \end{aligned}$$

$\chi$  – коефіцієнт зсуву вихідного контура;

$z_{\delta}$  – число зубів гнучкого колеса;

$m_0$  – модуль зачеплення заданий;

$m$  – модуль зачеплення реальний;

$\alpha_0 = \frac{\pi}{9}$  – кут нахилу профілю;

$\alpha$  – кут нахилу профілю реальний.

Оскільки  $h_1 = h(x)$ , то можемо записати:

$$h_1 = \begin{cases} h', & \text{при } 0 \leq x \leq a \\ h''(x), & \text{при } a < x < b \\ h''', & \text{при } b \leq x \leq c \end{cases} \quad (3.57)$$

У виразі (3.57) вхідні в нього величини визначаються таким чином:  $h' = \frac{(D2 - D)}{2}$ ,

де  $D2 = d_{\text{но}} + 2m$  – діаметр кола вершин зубів ГК,  $D$  – внутрішній діаметр ГК.

$h''' = h' - h_3$ , де  $h_3$  – висота зуба, що визначається по формулі:

$$h_3 = 1,5m + C^* m$$

Для визначення  $h''(x)$  задаються координати точок  $E$  і  $F$ .

$$\begin{aligned} X_E &= a, & Y_E &= h', \\ X_F &= a + b, & Y_F &= h'''. \end{aligned}$$

і скориставшись рівнянням прямої, що проходить через дві точки, отримуємо:

$$h''(x) = C_1 x + C_2, \quad (3.58)$$

де

$$C_1 = \frac{Y_F - Y_E}{X_F - X_E} = \operatorname{ctg} \alpha, \quad (3.59)$$

$$C_2 = Y_E - X_E \frac{Y_F - Y_E}{X_F - X_E} = h_1 - a \operatorname{ctg} \alpha,$$

Тоді ліва частина формули (3.55) прийме вид:

$$\int_0^{\ell} \frac{xdx}{h_1^3} = \int_0^a \frac{xdx}{(h')^3} + \int_a^{a+b} \frac{xdx}{(h''(x))^3} + \int_{a+b}^{a+b+c} \frac{xdx}{(h''')^3}. \quad (3.60)$$

Розглянемо другий доданок правої частини в загальному вигляді з врахуванням (3.58), тоді

$$\int \frac{xdx}{(h''(x))^3} = \int \frac{xdx}{(C_1 x + C_2)^3}. \quad (3.61)$$

Зробимо заміну змінних:

$$\begin{aligned} C_1 x + C_2 &= y; \quad dx = \frac{1}{C_1} dy; \quad x = (y - C_2) \frac{1}{C_1}, \\ \int \frac{xdx}{(C_1 x + C_2)^3} &= \int \frac{(y - C_2) dy}{C_1^2 y^3} = \frac{1}{C_1^2} \left[ \int \frac{dy}{y^2} - \int \frac{C_2}{y^3} dy \right] = \frac{1}{C_1^2} \left[ -\frac{1}{y} + \frac{1}{2} \cdot \frac{C_2}{y^2} \right] = \\ &= -\frac{1}{2C_1^2} \left[ \frac{2y - C_2}{y^2} \right] = -\frac{2C_1 x + C_2}{2C_1^2 (C_1 x + C_2)^2}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Перший і третій доданок (3.57) після інтегрування приймуть вигляд:

$$\int \frac{xdx}{(h')^3} = \frac{x^2}{2(h')^3} \quad (3.63)$$

$$\int \frac{xdx}{(h'')^3} = \frac{x^2}{2(h'')^3} \quad (3.64)$$

Запишемо (3.57) з врахуванням (3.58), (3.59), (3.60) і підставивши межі інтегрування, виконавши перетворення з врахуванням (3.56):

$$\int_0^\ell \frac{xdx}{h_1^3} = \frac{1}{2} \left[ \frac{a^2}{(h')^3} + \frac{K - 2b}{(A - b \operatorname{ctg} \alpha)^2} - \frac{K}{A^2} + \frac{\ell^2 - (a + b)^2}{(h' - b \operatorname{ctg} \alpha)^3} \right] \quad (3.65)$$

де

$$A = h' - 2a \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$K = h' \tan \alpha - 3a.$$

Останні компоненти у формулі (3.65) визначаються згідно (3.57). Позначимо праву частину виразу (3.65)  $R$ , тоді підставивши в (3.55) маємо

$$R = \frac{\ell^2}{2h_2^3}, \quad (3.66)$$

звідки

$$h_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{\ell^2}{R}}. \quad (3.67)$$

Значення  $h_2$  – це і є величина, що визначає товщину стінки гнучкого колеса в зоні зубчастого вінця при «розмазуванні» зубів.

Таким чином  $h_{\text{екв}}$ , може бути представлена як функція п'яти змінних:

$$h_{\text{екв}} = f(m, \alpha, z_o, \chi, D),$$

де

$m$  – модуль зачеплення;

$\alpha$  – кут нахилу профілю;

$z_o$  – число зубів ГК;

$D$  – внутрішній діаметр ГК;

$\chi$  – коефіцієнт зсуву.

Для підтвердження міри коректності даного визначення товщини гнучкого колеса був проведений наступний експеримент. З гнучких коліс хвильових передач вирізувався кільцевий елемент, відповідний зубчастому вінцю. Потім даний зразок поміщався в пристрій типу реверсор і навантажувався, дивися рис.3.11. Дані експерименту приведені в таблицях 3.3–3.5.

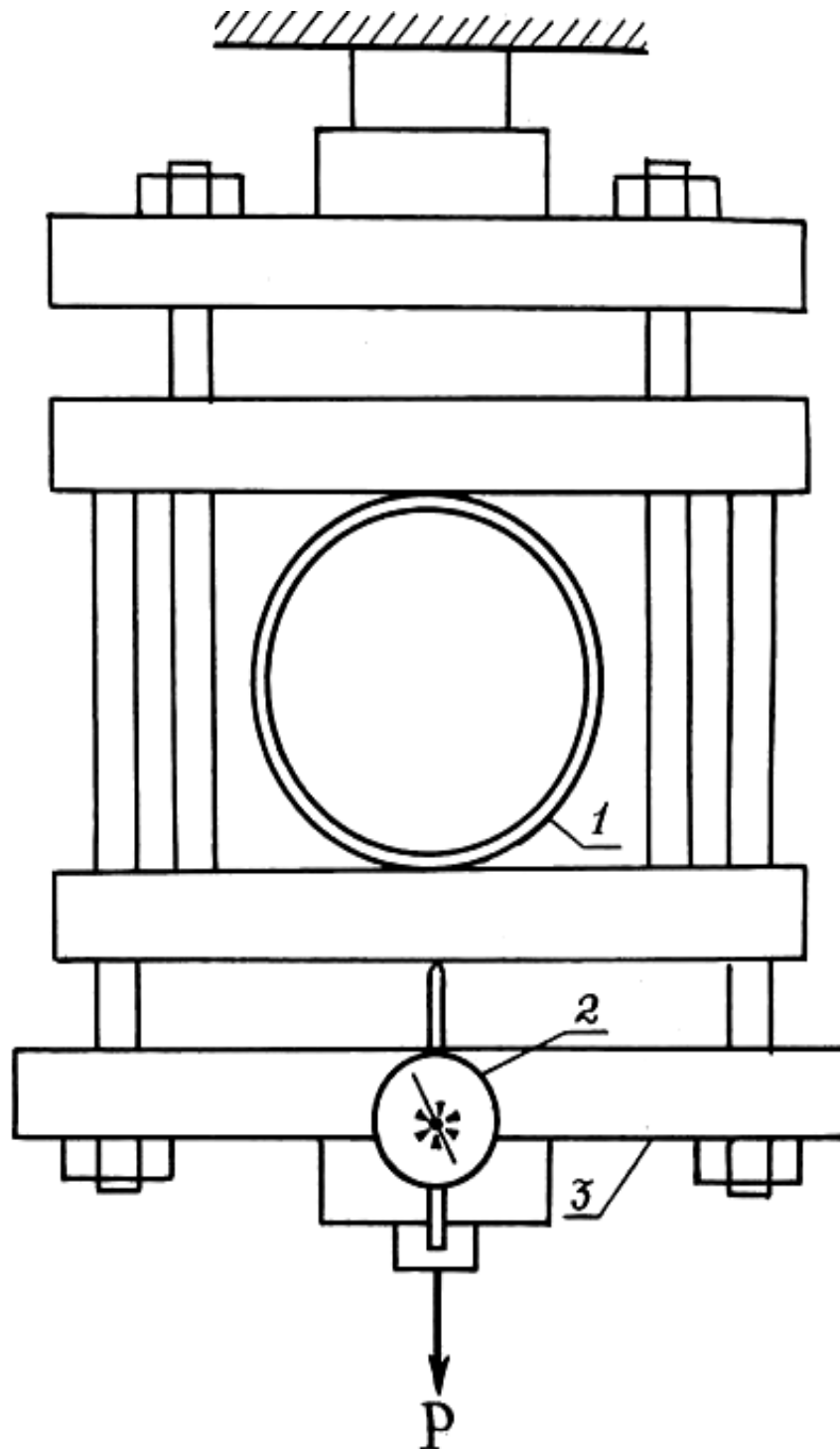


Рис.3.11 Пристрій для навантаження зубчастих кілець:

1 – зубчасте кільце; 2 – індикатор; 3 – реверсор.

Таблиця 3.3

P	L1	L2	L3	LC
3,00	15,920	16,201	15,994	0,000
4,00	16,027	16,301	16,096	0,103
5,00	16,176	16,475	16,277	0,283
6,00	16,248	16,533	16,321	0,327
7,00	16,360	16,620	16,417	0,423
8,00	16,476	16,764	16,551	0,557
9,00	16,587	16,873	16,662	0,668
10,00	16,778	17,051	16,846	0,852
11,00	16,918	17,176	16,982	0,988
12,00	16,989	17,257	17,056	1,062
13,00	17,151	17,437	17,225	1,231
14,00	17,280	17,583	17,366	1,372
15,00	17,404	17,704	17,486	1,492
16,00	17,475	17,745	17,542	1,548
17,00	17,590	17,859	17,655	1,661
18,00	17,776	18,052	17,845	1,851
19,00	17,835	18,123	17,911	1,917
20,00	17,947	18,255	18,044	2,050

Таблиця 3.4

P	L1	L2	L3	LC
0,00	8,899	8,855	8,866	0,000
0,50	8,981	8,929	8,953	0,084
1,00	9,102	9,062	9,077	0,207
1,50	9,223	9,185	9,199	0,329
2,00	9,394	9,353	9,371	0,499
2,50	9,484	9,448	9,473	0,595
3,00	9,662	9,629	9,648	0,773
3,50	9,745	9,711	9,740	0,859

Таблиця 3.5

P	L1	L2	L3	LC
0,00	8,054	8,119	8,082	0,000
0,50	8,153	8,220	8,186	0,101
1,00	8,302	8,373	8,344	0,255
1,50	8,457	8,526	8,502	0,410
2,00	8,624	8,694	8,663	0,575
2,50	8,755	8,839	8,819	0,719
3,00	8,865	8,943	8,910	0,821
3,50	8,986	9,081	9,036	0,949

Використовуючи роботу [16], розглянемо систему, рис.3.12:

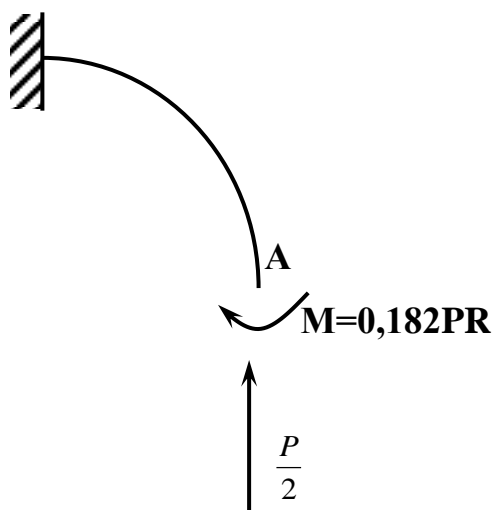


Рис. 3.12

Тоді:

$$M_p = -\frac{P}{2}(1 - \cos \varphi)R + 0,182PR,$$

$$M = -(1 - \cos \varphi)R.$$

Тоді маємо:

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{P}{2}(1 - \cos \varphi)^2 R^2 + 0,182PR(1 - \cos \varphi) \right] R d\varphi =$$



$$= \frac{PR^3}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{2} (1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) - 0,182 PR (1 - \cos \varphi) \right] d\varphi = \quad (3.68)$$

$$= \frac{PR^3}{EJ} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 2(1-0) + \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \right) - 0,182 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \right] = \frac{PR^3}{EJ} \left[ \frac{3}{8} \pi - 1 - 0,091\pi + 0,182 \right],$$

Позначимо:  $B = \left[ \frac{3}{8} \pi - 1 - 0,091\pi + 0,182 \right]$ .

Шукане переміщення  $\Delta_p = 2\Delta_{1p}$  або  $\Delta_p = \frac{PR^3}{EJ} B$ , де

$\Delta_p$  – усереднене переміщення згідно експерименту;

$P$  – навантаження для кроку усереднювання;

$R = \frac{D}{2} + \frac{h}{2}$  – радіус серединної лінії гнучкого колеса;

$E$  – модуль Юнга;

$J = \frac{bh^3}{12}$  – момент інерції;

$b$  – ширина зубчастого вінця.

Перетворюючи формулу (3.68), отримаємо:

$$\Delta_{1p} = \frac{PR^3 12B}{Eb h^3}. \quad (3.69)$$

Підставивши відомі величини в (3.69), знайдемо  $h$  як товщину стінки гнучкого колеса в зоні зубчастого вінця при зубах, що «розмазали». Величини товщини для деяких типорозмірів хвильових зубчастих передач, знайдених аналітично і експериментально, приведені в таблиці 3.6:

Таблиця 3.6

Типорозмір	Товщина		Абсолютна похибка в %
	Аналітично	Експериментально	
ВЗП – 80	1,169	1,156	1,23
ВЗП – 100	1,388	1,411	1,59
ВЗП – 160	2,339	2,307	1,41

Порівняльний аналіз дозволяє зробити висновок про прийнятність даного аналітичного підходу для обчислення товщини гнучкого колеса в зоні зубчастого вінця як гладкої оболонки з жорсткістю еквівалентною наявності зубців, для даного профілю.

### **3.8. Динамічні навантаження в гнучкому колесі, викликані зміною його форми в часі**

Хвильові зубчасті передачі охоплюють усе більш широкі сфери застосування, як по навантаженнях, які передаються, так і по частоті обертання провідної ланки. Вживання високошвидкісних приводів дозволяє передавати великі потужності при менших габаритних розмірах передачі. Відомо, що із зростанням швидкості обертання валу генератора хвиль зростають динамічні навантаження і напруження в гнучкому колесі. Вплив швидкості обертання валу генератора на напружений стан гнучкого колеса оцінюється через коефіцієнт динамічності.

За допомогою теорії пологих оболонок можна визначити вплив динамічної зміни навантаження, викликаного обертанням хвилеутворювача на напружено-деформований стан гнучкого колеса. Чисельний аналіз отриманих виразів дозволяє зробити висновок, що при врахуванні динамічного характеру взаємодії гнучкого колеса з хвилеутворювачем значення внутрішніх силових чинників в гнучкому колесі трохи відрізняються від випадку статичного навантаження. Це дає можливість при розрахунках на міцність гнучких коліс використовувати результати вирішення статистичних завдань, збільшуючи значення отриманих силових чинників на 15-25%.

Збіг однієї з власних частот коливань гнучкого колеса з частотою обертання хвилеутворювача може привести до резонансу. А залежність, що зв'язує першу критичну частоту обертання валу генератора хвиль, з власною частотою коливань гнучкого зубчастого колеса призводить до росту напруження в гнучкому колесі.

При порівнянні теоретичних розрахунків з результатами експериментальних досліджень виявляється, що в області частот, близьких до нижчої, вплив моменту

навантаження на спектр частот незначний. Також при резонансних коливаннях гнучких коліс динамічні напруження в них збільшується в 2-4 рази.

Коефіцієнт динамічності залежить як від частот обертання генератора хвиль, так і від зазорів в зачепленні.

А от напруження в гнучкому колесі хвильової зубчастої передачі зростають із збільшенням швидкості обертання валу генератора хвиль і залежать від розмірів гнучкого колеса. Із збільшенням діаметру гнучкого колеса в ньому зростають напруження, викликані зміною форми гнучкого колеса в часі.

У літературі практично немає рекомендацій для визначення коефіцієнта динамічності в залежності від розмірів гнучкого колеса. Але, у зведеному каталозі систем зубчастої хвильової передачі «ГАРМОНІК ДРАЙВ» (Garmonic Drawe) несуча спроможність передачі, по крутному моменту падає із зростанням швидкості обертання валу генератора хвиль, причому для габаритніших передач ця залежність виражена яскравіше. Відсутність обґрунтування коефіцієнта динамічності у функції розмірів передачі дала підстави до теоретичних та експериментальних досліджень, проведених в даних роботах.

Відомо, що при роботі хвильової передачі гнучке колесо може приймати будь які форми, які задовольняють його силовій рівновазі, і залежать як від деформативних, так і геометричних параметрів ланок передачі. При розрахунку можна допустити можливість резонансу по кожній з форм. Важливим для практики завданням в цьому випадку є визначення нижчої власної частоти коливань гнучкого зубчастого колеса.

Знаходження основної власної частоти, як відомо, може бути зведене до завдання мінімізації відношення Релея-Рітца:

$$\omega^2 = \min_{u \in V} \frac{\Pi(u)}{T(u)} \quad (3.70)$$

$\Pi(u)$  – амплітудне значення потенціальної енергії;

$T(u)$  – величина пропорційна з множителем  $\omega^2$  амплітудному значенню кінетичної енергії;

$V$  – простір допустимих переміщень.

Як контрольний приклад розв'язуємо задачу про знаходження першої нижчої частоти і форми коливань кругової циліндричної оболонки з жорстко защемленими краями. Відношення  $\frac{\ell}{R}=1$ ,  $\frac{R}{h}=100$ , де  $\ell$  – довжина оболонки,  $R$  – радіус,  $h$  – товщина. Схема розбиття на трикутники аналогічно представлений на рис. 2.7, але без «дна». В результаті розбиття отримано 252 вузли і 432 трикутники. Значення першої частоти порівнювалося з експериментальними даними. Для знаходження першої частоти з точністю до 3,4% було потрібно 200 ітерацій. Значення мінімальної частоти експериментально знайденої рівне 29,32 а при розрахунку з використанням «МПС»  $\omega_0 = 30,34$ . Параметр релаксації приймається рівним 1,95.

$$\omega_0 = \omega R \left[ \frac{\rho(1-\mu^2)}{E} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot 10^2 \quad (3.71)$$

Подальший розрахунок проведений для ГК ХЗП-160 на сітці, що має 520 вузлів і 936 трикутників на циліндровій частині показав, що значення першої нижчої частоти, без врахування «дна», рівне 558 рад/сек, з «дном» 529 рад/сек. Наявність «дна» привела до зниження частоти на 5,2%.

### **3.9. Результати розрахунку напружено-деформованого стану гнучкого колеса**

В результаті розрахунку напруженого-деформованого стану гнучкого колеса хвильової передачі ХЗП-160, згідно з методикою, викладеною в розділі 2.3, було отримано на першому етапі, тобто розрахунку ГК як оболонки, наступне: на рис. 3.14, 3.15 показаний розподіл напруження в поперечному перерізі в зоні, відповідній розташуванню зубчастого вінця, при згині і крученні відповідно (див., рис.3.16).

Картина розподілу еквівалентних напружень в «дні» гнучкого колеса представлена на рис 3.12 від згину і 3.13 при крученні. Розподіл напружень  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  в «дні» ГК від згину і при крученні представлені на рис.1-6 додатки.

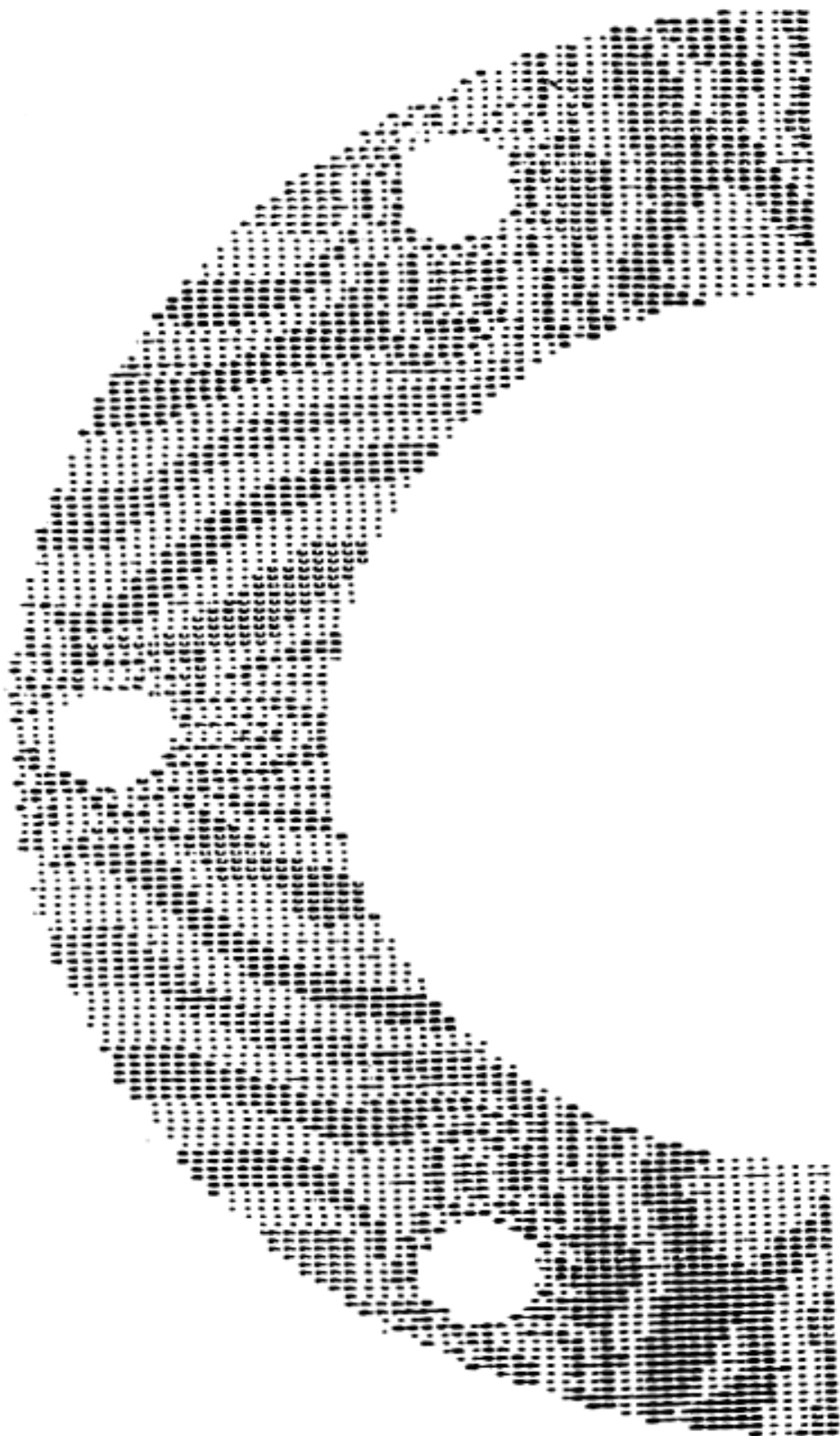


Рис. 3.12 Поле напряжень  $\sigma_{екв}$ .

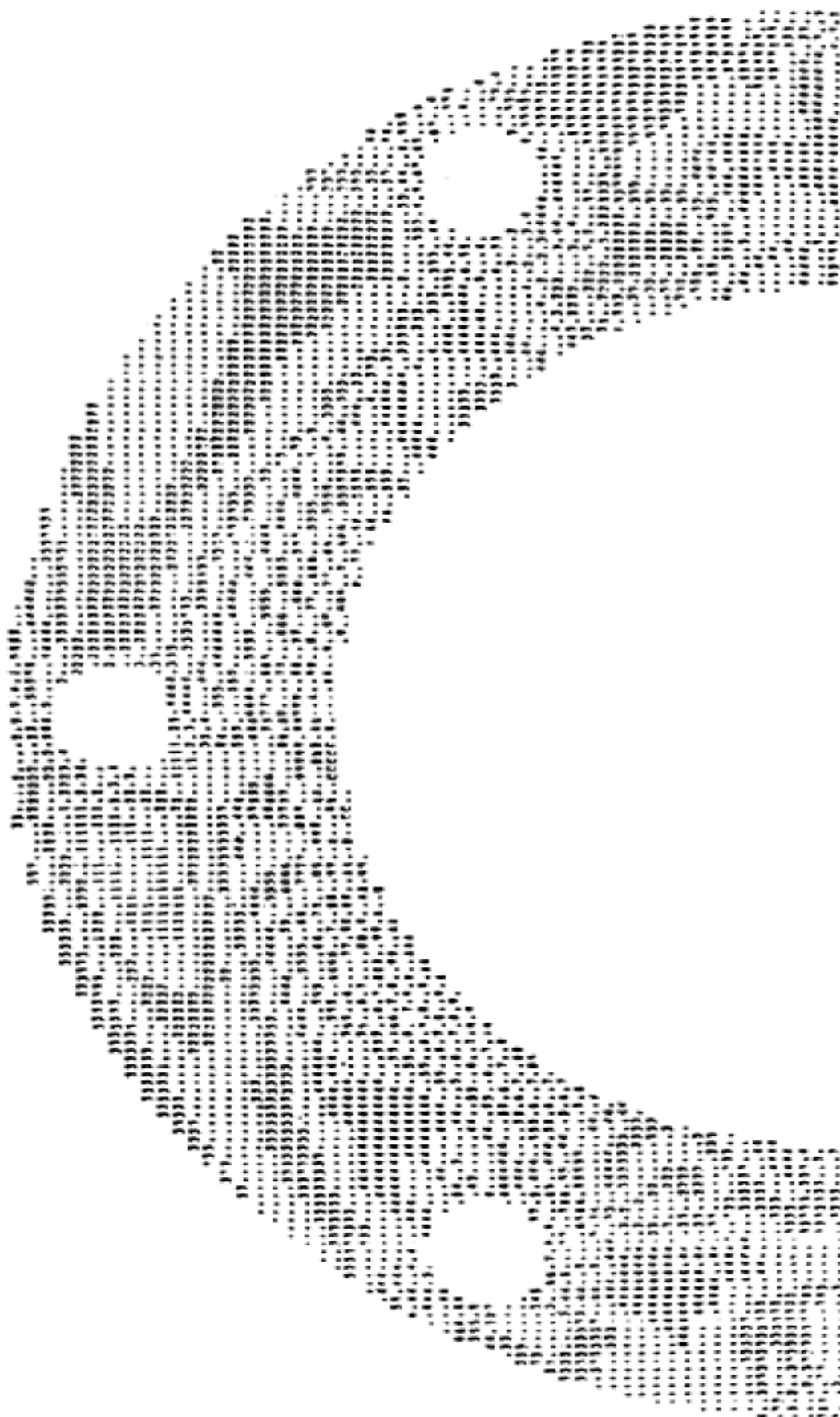


Рис.3.13 Поле напряжень  $\sigma_{\text{экв}}$ .

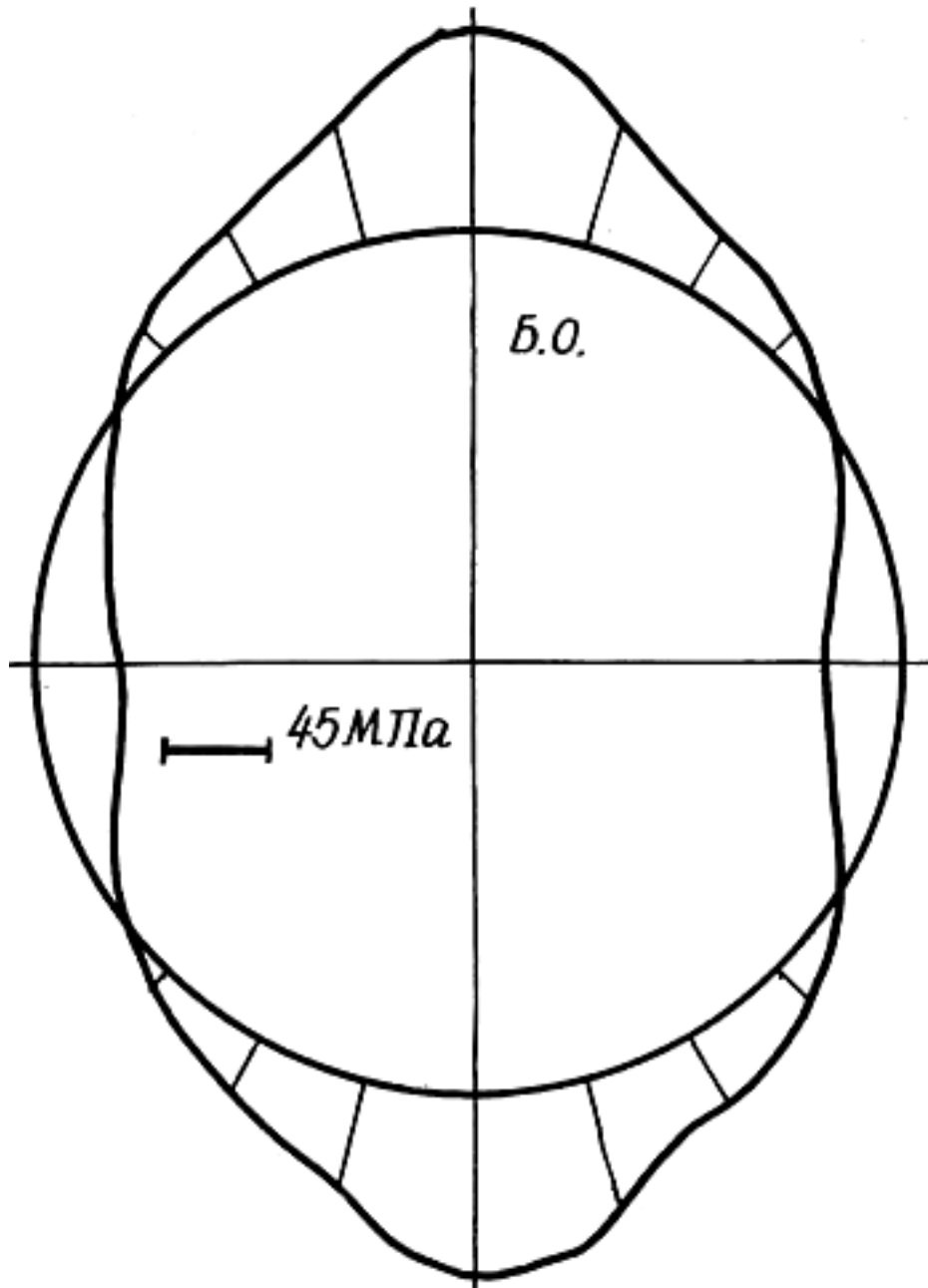


Рис.3.14 Розподіл напружень в ГК, в круговому напрямі,  
у зоні зубчастого вінця. Згин.

Максимальне напруження при згині складає близько 90 МПа на великій осі генератора хвиль, при крученні близько 110 МПа по осі, відповідно максимуму кососиметричного навантаження.

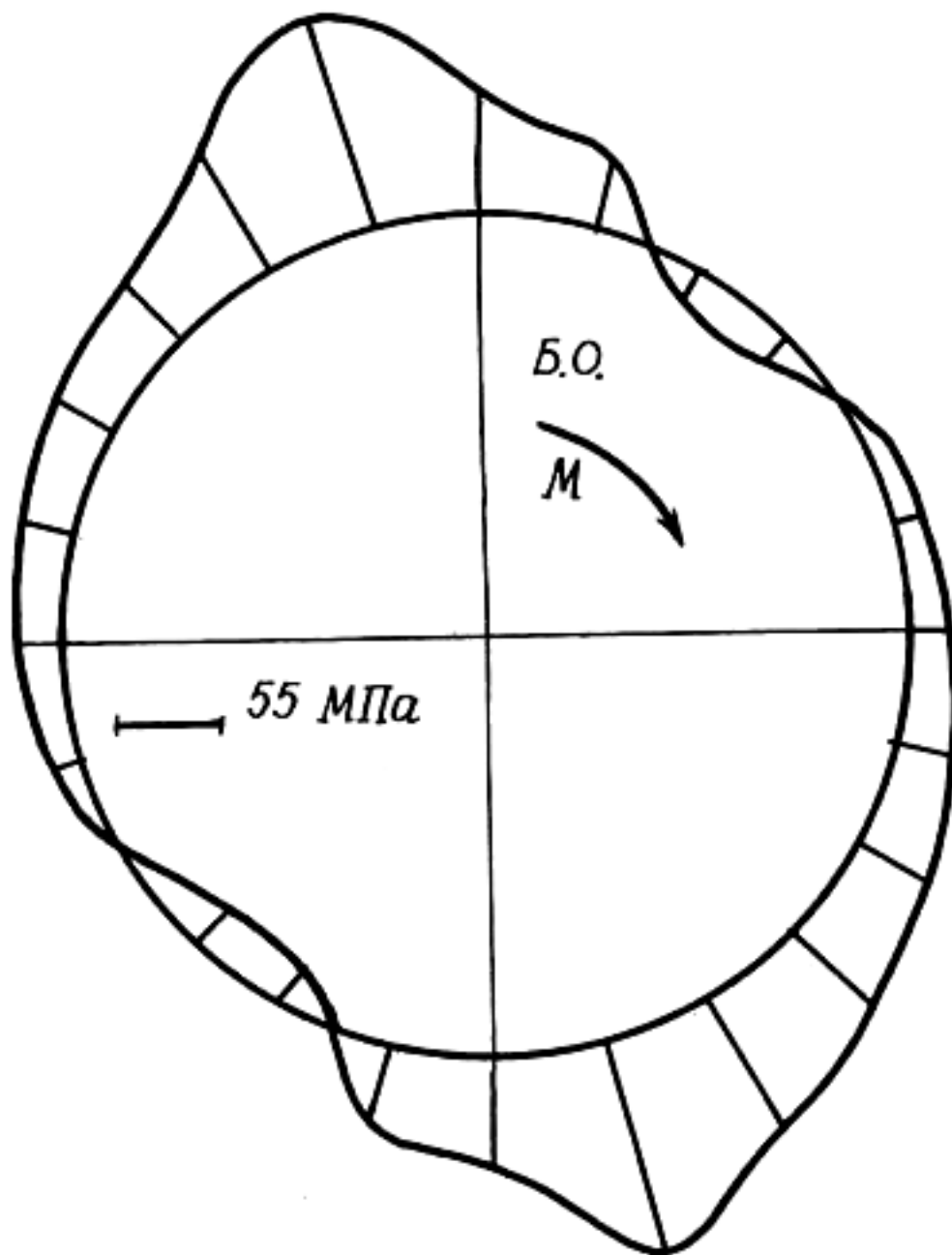


Рис. 3.15 Розподіл напружень в ГК, в круговому напрямі,  
у зоні зубчастого вінця. Кручення

На рис.3.16 представлені графіки зміни напруження в ГК по твірній, яка проходить по великій осі генератора хвиль, і осі максимуму навантаження для згину і кручення відповідно. У двох випадках напруження на обідку перед зоною зубчастого вінця становить 20-30 МПа, в зоні стику "дна" і циліндрової частини колеса – становить 25-40 МПа.



У місці переходу зони, відповідної зубчастому вінцю, в циліндрову частину гнучкого колеса спостерігається стрибок напружень до 140 МПа через різницю товщини при переході та виникненню додаткового згинального моменту. Даний стрибок неможливо відстежити жодними іншими методами.

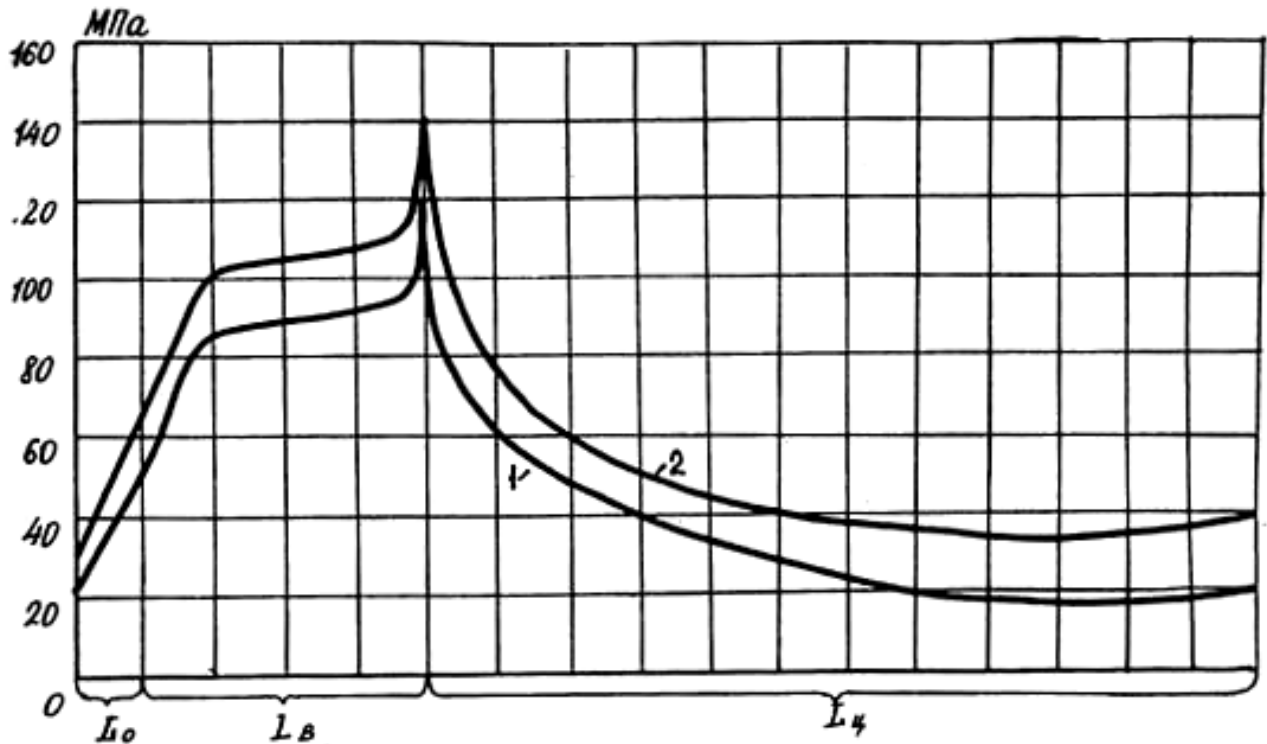


Рис. 3.16 Розподіл напружень в ГК по твірній:

1 – згин; 2 – кручення

При розрахунку зубчастого вінця ГК використовували такі початкові дані як конструкція, фізико-механічні властивості і навантаження хвильової ХЗП-160. Модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона приймалися відповідно  $2,1 \cdot 10^5$  МПа і 0,3. Номінальний момент, який передається 1000 Н·м. Геометрія профілю зубчастого вінця і гнучкого колеса відповідала робочим кресленням. Переміщення, що задаються генератором хвиль деформації кулачкового типу, визначалися згідно розділу 2.1, а зусилля, що виникають в зачепленні, визначалися згідно з методикою, викладеною в розділі 2.2.

При побудові дискретної моделі зубчастого вінця використовувався підхід, описаний в розділі 2.3. В результаті дискретизації на трикутники отримано на базовій площині 1447 вузлів і 2721 елементів. Зубчастий вінець по твірній

розбивався на п'ять рівномірно розташованих перетинів, таким чином, число невідомих в задачі склало 21705. Підготовку даних і розрахунок проводили на ЕОМ. Для вирішення задачі було потрібно 650 ітерацій.

Розв'язок проводився поетапно із записом проміжної інформації про вузлові переміщення на зовнішній пристрій для забезпечення збереження інформації при збої, і на подальших етапах обчислень цей запис використовувався як початкове наближення.

В результаті розрахунку були отримані поля головних напружень. Розрахункові напруження і умови міцності визначалися по енергетичній теорії і теорії Г.С.Писаренко і А.О.Лебедева.

На рис., 3.17-3.21 представлені поля еквівалентних напружень в кожному з п'яти перетинів зубчастого вінця, перпендикулярних до його твірної. Аналіз напружено-деформованого стану дозволив встановити наступне: еквівалентні напруження досягають максимуму в западині зуба зубчастого вінця і не перевищують 136 МПа, на внутрішній стороні гнучкого колеса, тобто по нижній кромці зубчастого вінця напруження не перевищують 31 МПа, в зоні прикладання навантаження вони знаходяться на рівні 100 МПа. По твірній зубчастого вінця, яка проходить по западині зуба розподіл напружень носить слабо виражений сідловидний характер з явною симетрією відносно середини зони розташування вінця. Якісний розподіл напружень у всіх перетинах практично однаковий, кількісно перший, п'ятий і другий, четвертий перерізи збігаються по величині. Розбіжність у величині еквівалентних напружень крайніх перерізів відносно середини знаходяться в межах 25-30%. Оскільки отримані напруження не перевищують тих, що допускаються, то очевидно, що ГК ХЗП-160 при навантаженні 1000 Нм на вихідному валу, є працездатним і має деякий запас міцності.

Результати розрахунку корелюються з результатами експериментальних досліджень [21].

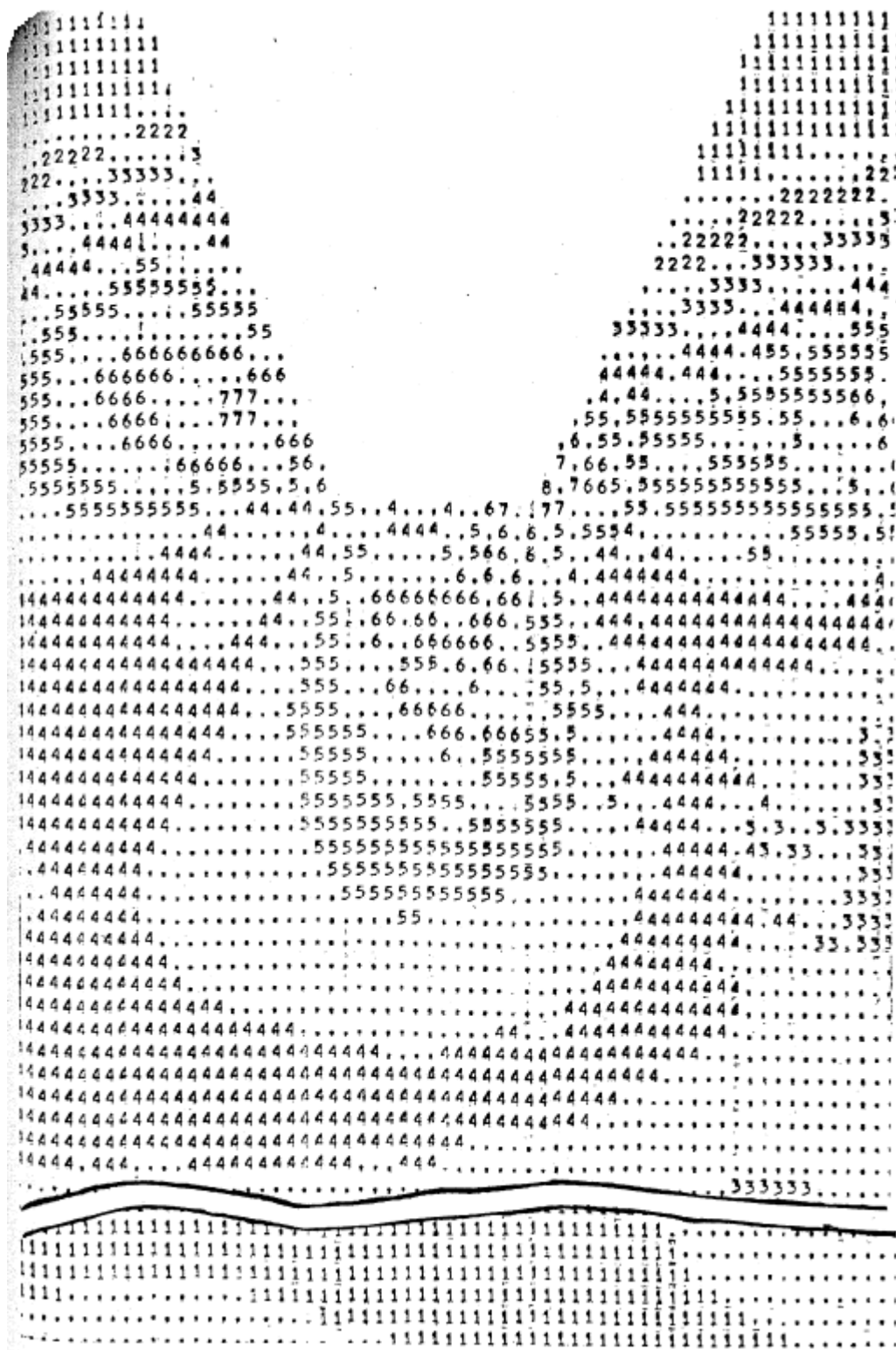


Рис.3.17. Поле  $\sigma_{\epsilon_{кв}}$ . Перший переріз. Умови позначення (МПа):

- |   |        |   |         |   |          |   |          |
|---|--------|---|---------|---|----------|---|----------|
| 1 | 4-13;  | 2 | 22-31;  | 3 | 39-48;   | 4 | 57-66;   |
| 5 | 74-83; | 6 | 92-100; | 7 | 109-118; | 8 | 127-135. |



Рис.3.18. Поле  $\sigma_{\epsilon_{кв}}$ . Другий переріз. Умови позначення (МПа):

- |   |        |   |        |   |         |   |          |
|---|--------|---|--------|---|---------|---|----------|
| 1 | 4-12;  | 2 | 20-28; | 3 | 36-44;  | 4 | 52-60;   |
| 5 | 64-74; | 6 | 82-89; | 7 | 96-104; | 8 | 112-120. |



Рис.3.19. Поле  $\sigma_{екв}$ . Третій переріз. Умови позначення (МПа):

- |   |        |   |        |   |        |   |         |
|---|--------|---|--------|---|--------|---|---------|
| 1 | 4-10;  | 2 | 17-24; | 3 | 31-37; | 4 | 44-51;  |
| 5 | 57-64; | 6 | 71-78; | 7 | 84-91; | 8 | 98-105. |

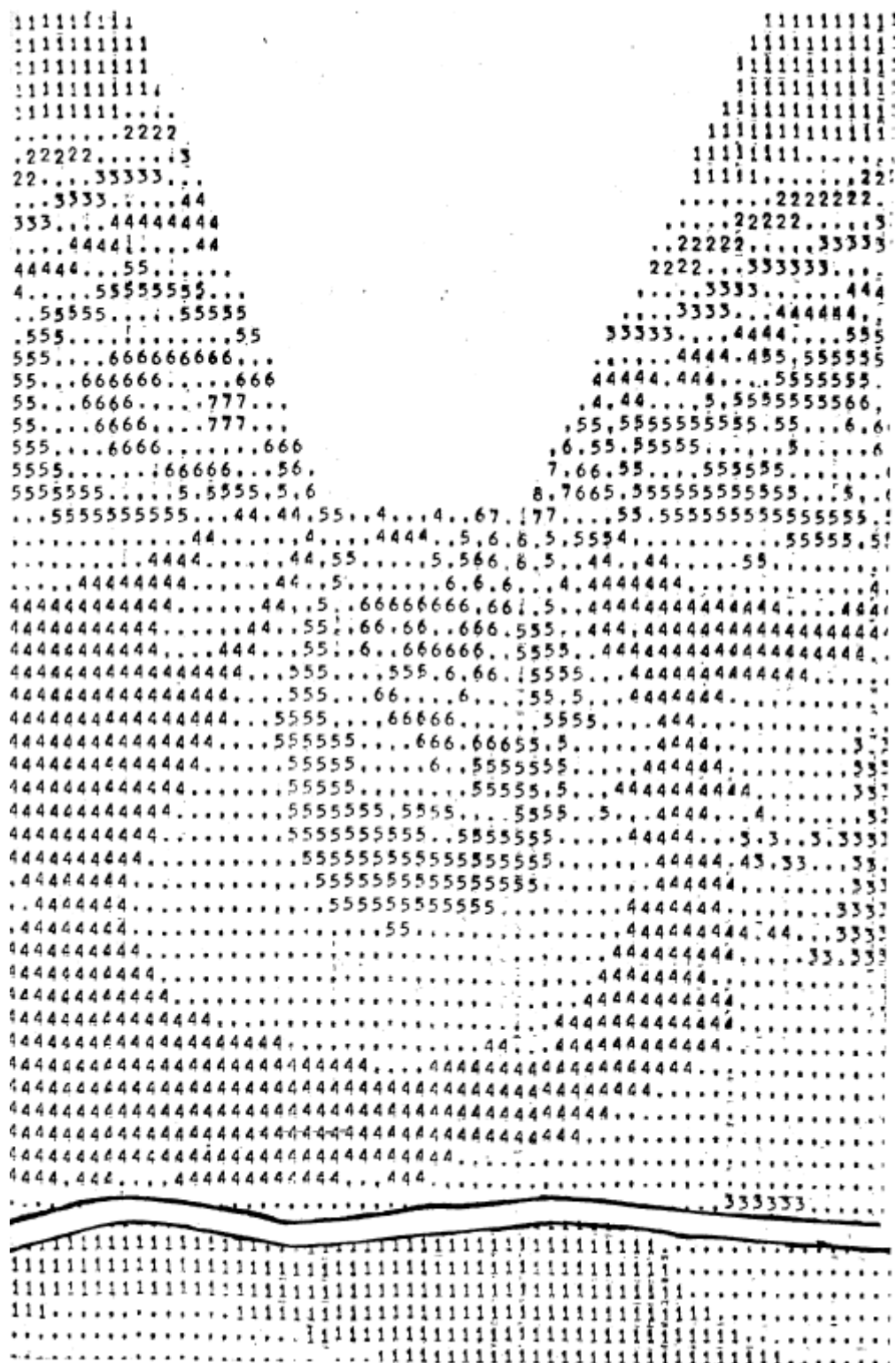


Рис.3.20. Поле  $\sigma_{\epsilon_{кв}}$ . Четвертый переріз. Умови позначення (МПа):

- |   |        |   |        |   |         |   |          |
|---|--------|---|--------|---|---------|---|----------|
| 1 | 4-11;  | 2 | 20-27; | 3 | 35-43;  | 4 | 51-59;   |
| 5 | 66-73; | 6 | 81-88; | 7 | 95-102; | 8 | 110-118. |



Рис.3.21. Поле  $\sigma_{\epsilon_{\text{кв}}}$ . П'ятий переріз. Умови позначення (МПа):

- |   |        |   |        |   |          |   |          |
|---|--------|---|--------|---|----------|---|----------|
| 1 | 3-12;  | 2 | 21-30; | 3 | 38-47;   | 4 | 57-65;   |
| 5 | 73-82; | 6 | 91-99; | 7 | 108-117; | 8 | 126-134. |

## **РОЗДІЛ 4**

### **ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ ВИБОРУ РОЗРАХУНКОВИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО – ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ГНУЧКОГО КОЛЕСА І ЗУБЧАСТОГО ВІНЦЯ ГНУЧКОГО КОЛЕСА**

#### **4.1. Основні поняття методу фотопружності.**

Характер взаємодії специфічних елементів хвильових передач, таких як генератор хвиль, гнучкі і жорсткі колеса, практично не мають аналогів. В той же час, напружений стан гнучкого колеса – основного елементу, що визначає працездатність передачі, – залежить від багатьох чинників, в різній мірі тих, що впливають на дану взаємодію. Математичний опис напруженого стану гнучкого колеса з врахуванням всіх чинників вимагає побудови складних моделей, які не дозволяють отримати інженерних методів оптимізації параметрів, необхідних для розрахунку більшості проєктованих передач, що випускаються. Прості ж моделі спотворюють фізичний зміст взаємодії всіх ланок передачі. Надмірна складність і трудомісткість розрахунку одних моделей і невідповідність фізиці реального навантаження в інших вимагають їх ретельної перевірки.

Проте експериментальне дослідження напружень в сталевому гнучкому колесі є досить складним завданням.

Дійсно, відомо, що максимальне напруження виникає в зубчастому вінці. В той же час малі розміри зубчастого вінця гнучкого колеса в порівнянні з базою тензодатчиків не дозволяють повною мірою використовувати тензометрування для дослідження напружень на навантаженій поверхні, також важко встановити датчики з внутрішньої сторони гнучкого колеса під зубчастим вінцем через те, що тут відбувається контакт з хвилеутворювачем. Використання різноманітних вирізів для установки датчиків створює місцеві зміни жорсткості і концентрації напружень, що унеможлиблює отримати достовірну картину розподілу напружень. Тому в даній роботі дослідження напруженого стану гнучкого колеса проводили поляризаційно-оптичним методом (методом фотопружності) на колесах, виготовлених з оптично



чутливих матеріалів. Суть методу полягає в тому, що прозорі діелектрики під дією навантаження стають оптично анізотропними. Оптична анізотропія пов'язана з напруженнями і може бути досліджена з використанням поляризаційного світла.

Для виміру оптичної різниці ходу використовується інтерференція двох поперечних променів. При цьому може бути виміряна відносна різниця ходу ( $\Delta_1 - \Delta_2$ ) променів з напрямом коливань по  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ . При вимірі відносної різниці ходу створюються умови інтерференції двох променів  $V_1$  і  $V_2$ , що утворюються в кожній точці деформованої двохпроменевопереломлюючої моделі за допомогою полярископа (рис.4.1, 4.2).

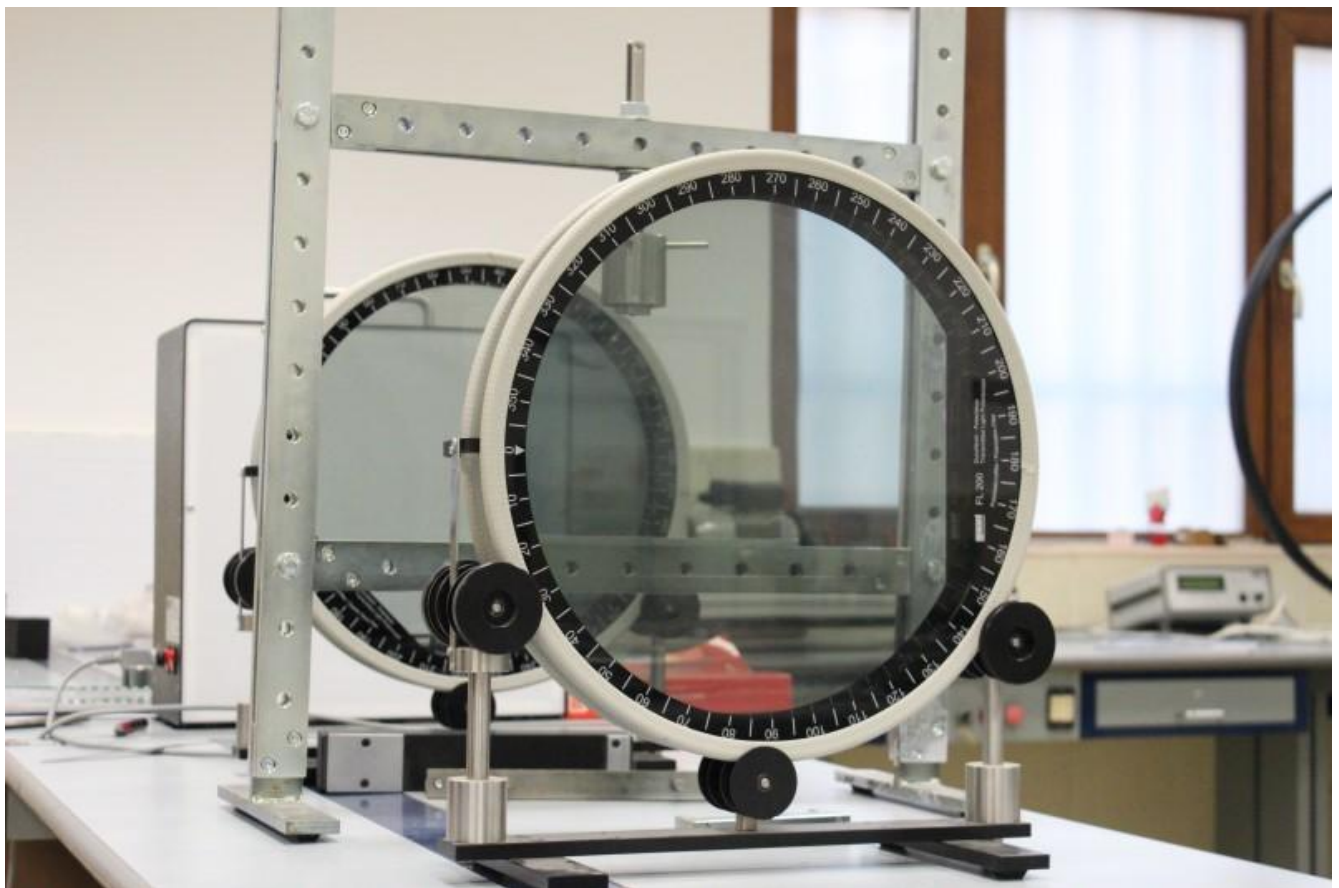


Рис. 4.1 Полярископ. Загальний вигляд

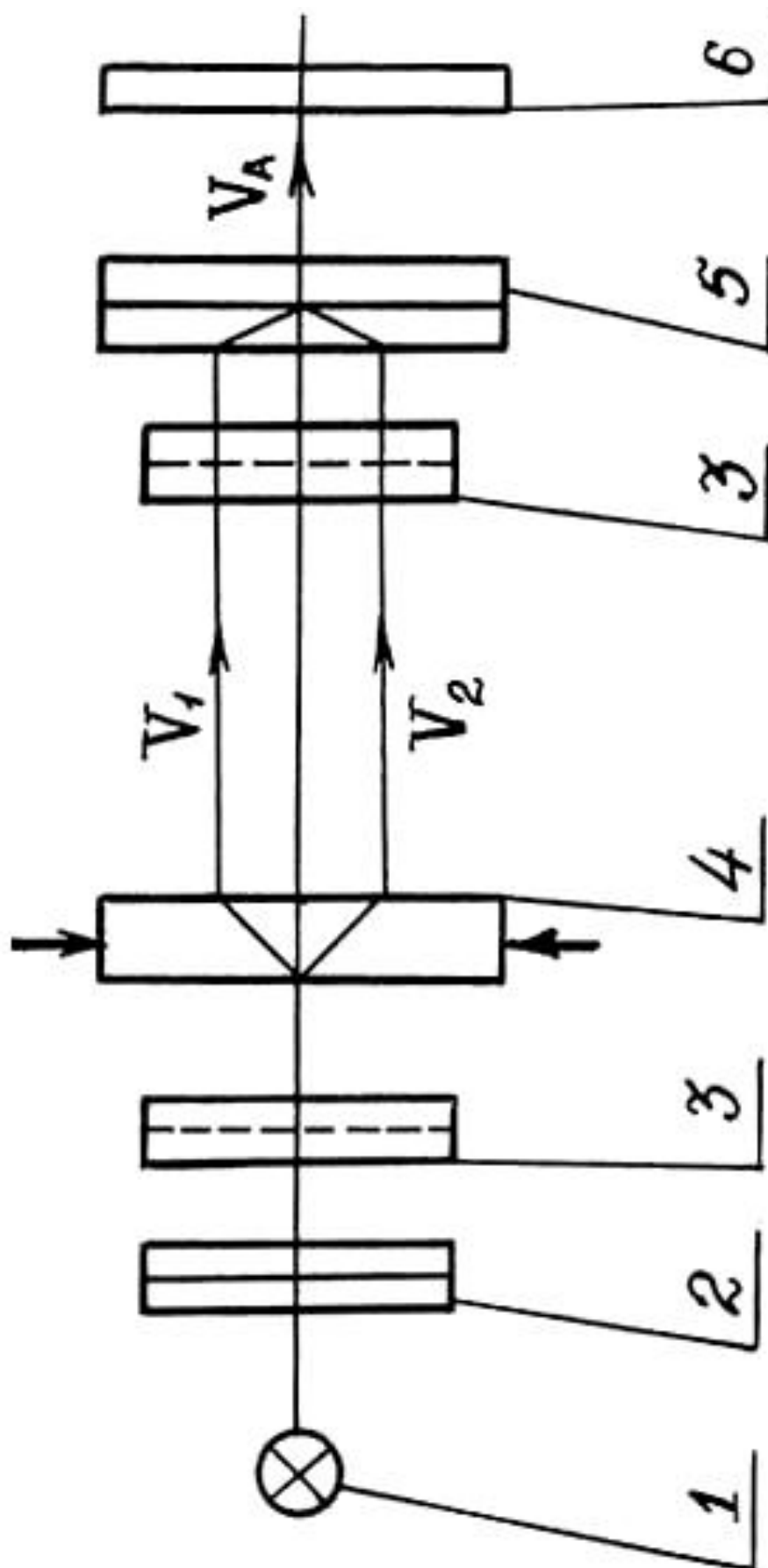


Рис. 4.2 Полярископ. Оптична схема: 1 – джерело світла; 2 – поляризатор; 3 – пластина в чверть хвилі; 4 – модель; 5 – аналізатор; 6 – екран.

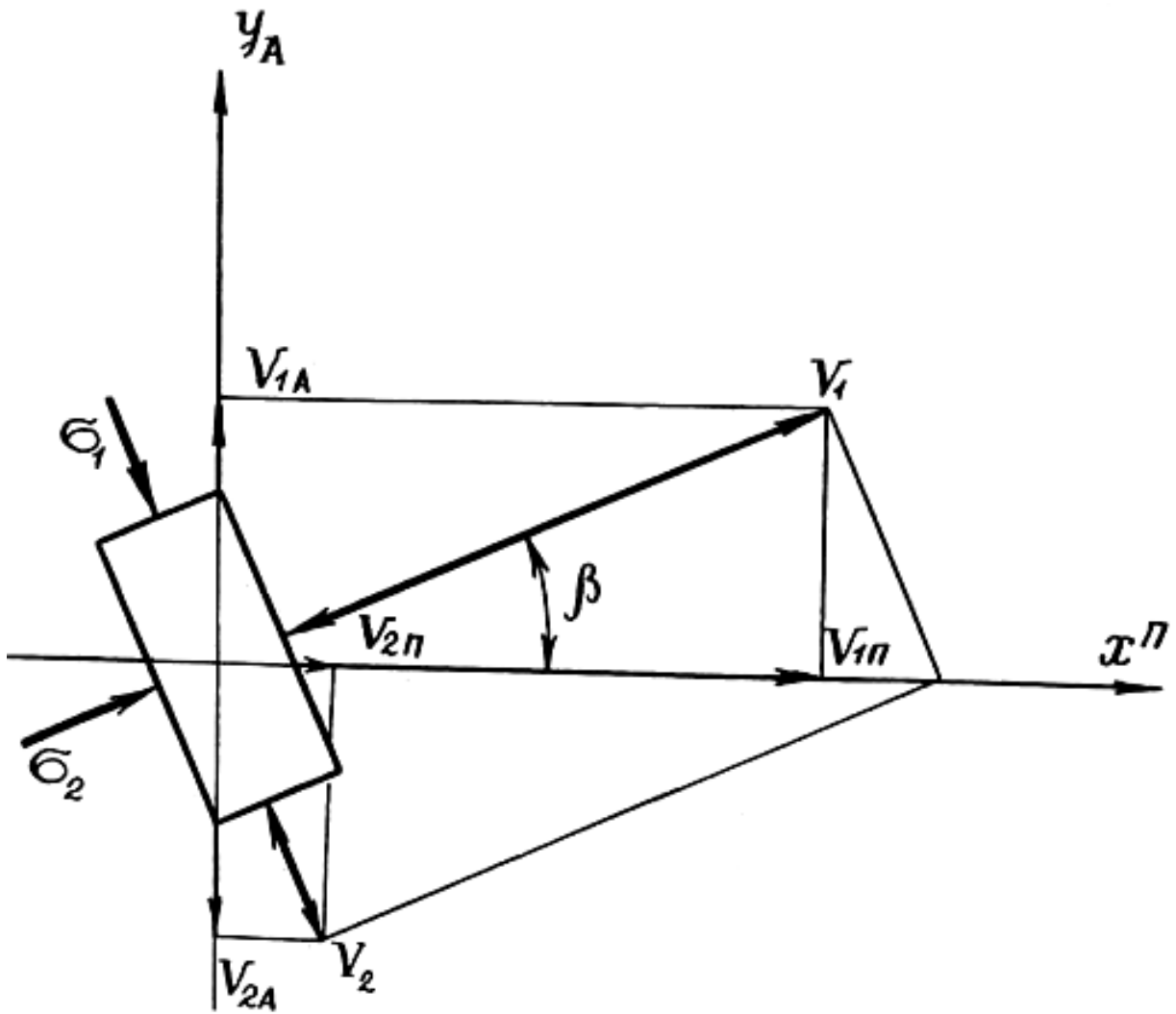


Рис. 4.3 Проходження світла через двохпроменевопереломлюючу модель

Промінь, що виходить з поляризатора лінійно поляризований він розкладається в моделі 4 на дві складові  $V_1$  і  $V_2$  по напрямках головних напружень. Аналізатор 5 пропускає складові цих коливань  $V_{1A}$  і  $V_{2A}$ , що паралельні його осі пропускання, які утворюють інтерференційну картину смуг відносно різниці ходу  $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$  (рис.4.3). Відносна оптична різниця ходу  $\Delta$  пов'язана з головними напруженнями  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  співвідношенням [107, 108]:

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 = ct(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (4.1)$$

де  $c$  – оптичний коефіцієнт;  $t$  – товщина моделі або зрізу.

Вираз (4.1) показує, що по моделі безпосередньо з картини інтерференційних смуг встановлюється різниця головних напружень  $(\sigma_1 - \sigma_2)$ . На вільному контурі, де одне з напружень дорівнює нулю, визначається напруження  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ .

Для визначення величин головних напружень необхідно знати оптичний коефіцієнт, який залежить від матеріалу моделі, довжини хвилі використовуваного джерела світла і способу вимірів. У практиці методу фотопружності як постійна використовується «ціна смуги», яка визначається з торировочного експерименту на моделі, що має точне теоретичне розв'язання (балка в умовах чистого згину) [108].

При визначенні ціни смуги відносної різниці ходу (ізохроми) рівняння (4.1) записується залежно від порядку смуг  $m_n$ :

$$\Delta = m_n \lambda = ct(\sigma_1 - \sigma_2), \quad (4.2)$$

де  $\lambda$  – довжина хвилі світла, звідки

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\lambda}{ct} m_n = \sigma_0^{(t)} m_n. \quad (4.3)$$

Стала  $\sigma_0^{(t)}$  називається ціною смуги моделі і дорівнює величині напружень при порядку смуг, рівному одиниці:

$$\sigma_0^{(t)} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{m_n}. \quad (4.4)$$

Визначена ціна смуг моделі на її товщину  $\sigma_0^{(t)} t = \sigma_0^{(1,0)}$  називається ціною смуги матеріалу, є постійною величиною для даного матеріалу і служить характеристикою його двопробенопереломлюючих властивостей. У даній роботі застосовували оптично чутливі матеріали на основі епоксидної смоли ЕД-20, отвердні метілтетрагідрофталеvim ангідридом (МТГФА) [108]. Основні характеристики цього матеріалу приведені в табл.4.1.

Дослідження плоских моделей проводили при кімнатній температурі, об'ємних - методом «заморожування» деформацій [50, 108]. Для того, щоб уникнути виникнення температурних напружень через наявність елементів різної товщини (швидкість прогрівання матеріалу 5 (мм/год), «заморожування проводили» по плавному режиму, показаному на рис.4.4.

Таблиця 4.1

Основні властивості застосованого оптично чутливого матеріалу		
Марка: ЕД-20 МТГФА		
	Склоподібного стану (плоскі моделі)	Високопластичний стан (об'ємні моделі)
$E$	$3 \cdot 10^3 \text{ МПа}$	$15 \text{ МПа}$
$\mu$	$0,32 - 0,35$	$0,5$
$\sigma_0^{(1,0)}$	$2,8 \frac{\text{МПа}}{\text{см.пол.}}$	$0,034 \frac{\text{МПа}}{\text{см.пол.}}$

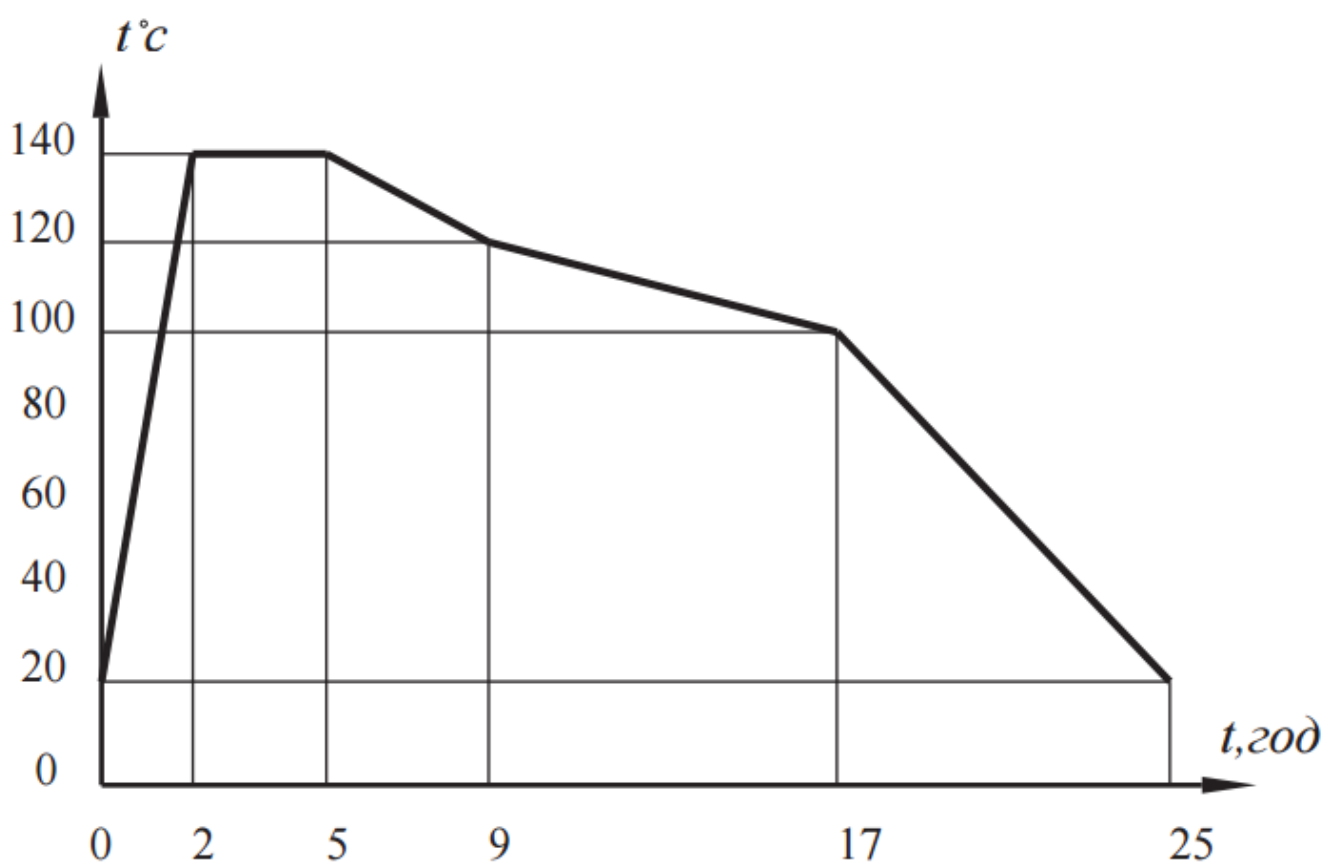


Рис. 4.4 Графік «заморожування» об'ємних моделей.

#### 4.2. Методика проведення експерименту на плоских зубчастих зразках.

Напружений стан в западинах зубів і значення максимальних напружень визначалися по числовому індикатору на координатно-синхронному поляризаторі (КСП) методом компенсації за допомогою компенсатора. Напруження в концентраторі визначали за показниками числового індикатора з подальшим перерахунком в число смуг і знаходженням відповідних значень напружень.

Завантаження зразків проводили при контролі згину зразка. Контроль здійснювався в місці найбільшого згину по центру зразка і в місці кріплення до нерухомої тяги. Контроль згину зразка при ступінчастому додатку навантаження дозволив обмежити зону пружних деформацій зразка.

Подальші дослідження проводилися в області пружних деформацій зі значним запасом по стійкості зразків. Концентрація напружень в западинах визначалася на КСП при навантаженні зразків чистим згином, тобто так, що в поперечних перерізах зразків виникав тільки згинальний момент без перерізуючої сил. Вимірювання напружень проводили по западині, розташованій на осі симетрії зразка. Напруження визначалися у двох точках  $A$  і  $B$  по краях западини і в точці  $C$  по її контуру.

Контроль напружень проводився на гладкій частині зразка в точці  $D$ , протилежній центру досліджуваної западини, тобто проти точки  $C$ . Розташування точок  $A, B, C, D$  представлено на рис.4.6. У кожній з досліджуваних точок проводилося по шість вимірів напруженого стану. Розрахункові значення визначали за допомогою обчислення середнього арифметичного значення вимірів.

Параметри досліджуваних зразків, їх маркування та покази числового індикатора компенсатора наведені в таблиці 4.2. Числові значення показань індикатора при дослідженні на КСП переводилися в число смуг за допомогою залежності:

$$m^* = 39 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{\sin(0,36n_k)}{1,819} \right)^2}} - 1 \right) = 39 f(n_k) \quad (4.5)$$

де  $m^*$  - число смуг;  $n_k$  - покази числового індикатора (див. графу 3-6 табл.4.2), обчислення проводяться в градусах.

Розбіжність значень числа смуг, порахованих за наведеною залежністю з істинним числом смуг, отриманим на основі точних розрахункових залежностей, не перевищує  $\pm 0,05\%$ .

Відношення довжин плечей важеля спеціального завантажувального пристрою становила 1:3,75.

З метою дотримання геометричної подібності форми зуба і перехідної кривої зразків і реальних коліс зразки виготовляли методом обкатки на зубофрезному станку. Схема зразка наведена на рис.4.7, завантажувального пристрою на рис.4.8. Зразки виготовляли з різними товщинами стінки при різних коефіцієнтах зміщення (табл.4.2), відповідно параметрам реальних гнучких коліс.

Для визначення ціни смуги матеріалу для плоских зразків були виготовлені два тарувальних зразка 1-Т і 2-Т, що представляють собою балку постійного квадратного перетину. Завантаження цих зразків здійснювали в тому ж спеціальному пристосуванні, що і зубчастих зразків. Для виключення впливу крайового ефекту часу на визначення ціни смуги проводилися заміри напруженого стану як на одній стороні, так і на іншій стороні зразка. Потім зразок перевертали таким чином, що спочатку стисла сторона А виявлялася розтягнутою, а розтягнута сторона В виявлялася стислою і проводили повторні заміри. Визначення середнього значення по чотирьом зазначеним вимірам дозволило виключити крайовий ефект часу навіть в тому випадку, якщо він був неоднаковим на кожній зі сторін А і В (рис.4.6). Це пояснюється тим, що в першому випадку (до перевертання зразка) крайовий ефект часу сумувався з діючими напруженнями, а в другому випадку (після перевертання зразка) віднімався у них.

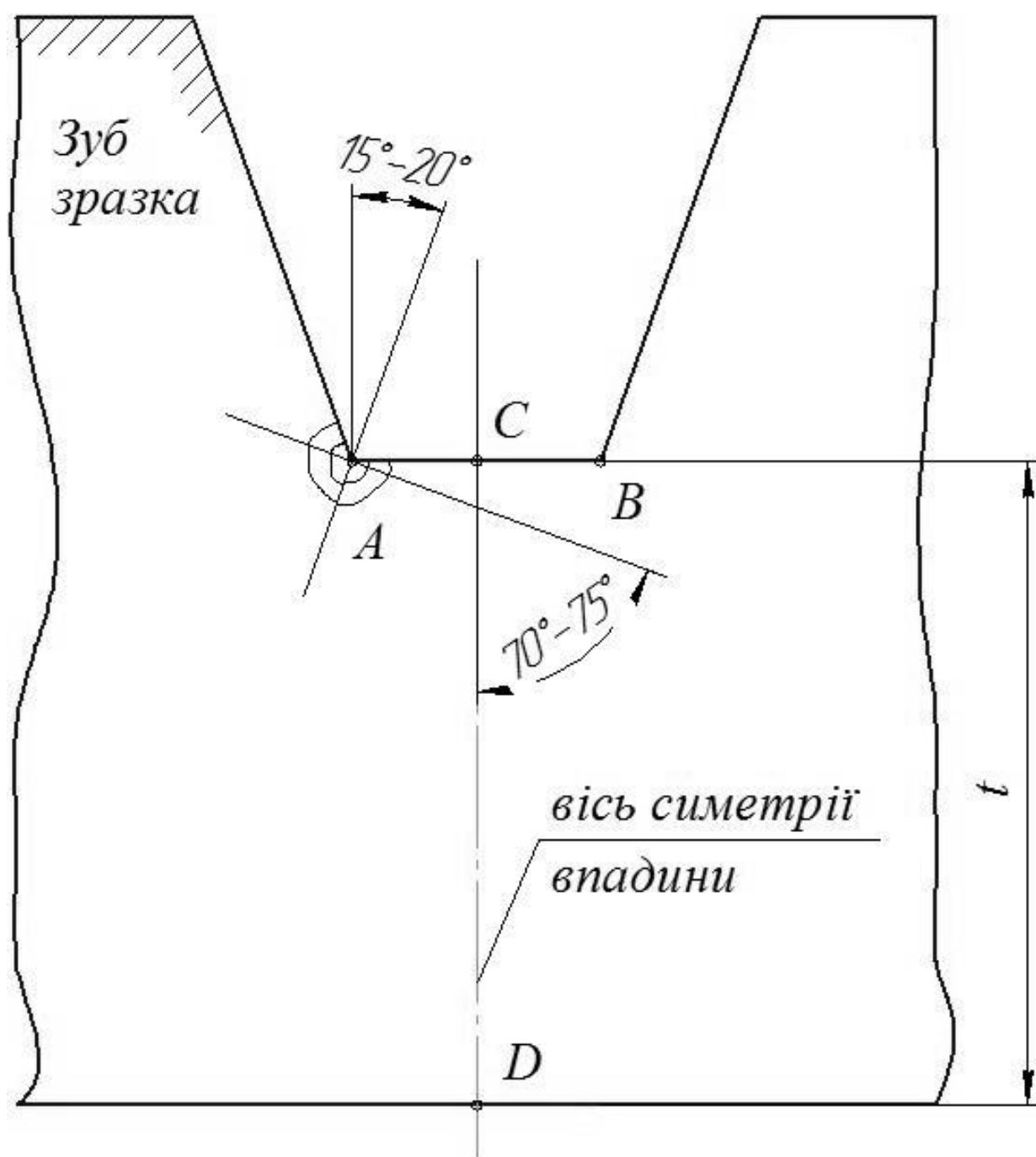


Рис. 4.6 Розташування досліджуваних точок на профілі зубчастого вінця



Таблиця 4.2

№ зразка	Коеф. зміщення	Показання числового індикатора для точок				Товщина стінки зубчастого вінця	Ширина зразка
		А	В	С	Д		
1-1	3,5	139,6	135,1	109,7	87,0	6,35	4,65
1-2		155,7	150,5	126,7	103,5	5,25	4,35
1-3		135,8	135,3	110,8	90,0	6,05	4,35
1-4		167,5	161,8	136,3	111,0	5,10	4,50
1-5		149,2	143,8	121,0	97,8	5,70	4,50
1-6		142,7	135,2	113,2	90,3	6,20	4,30
1-7		143,2	141,5	122,0	98,1	5,55	4,65
1-8		133,8	125,8	105,5	85,0	6,55	4,45
2-1	2,0	156,4	154,9	127,4	107,3	5,20	4,50
2-2		120,4	117,1	99,9	85,7	6,70	4,55
2-3		118,0	117,4	100,8	83,5	6,70	4,40
2-4		127,3	122,9	103,8	88,1	6,40	4,35
2-5		140,4	137,8	116,4	100,7	5,75	4,45
2-6		131,8	126,9	108,0	93,0	6,20	4,40
2-7		140,5	140,3	117,2	99,0	5,65	4,50
2-8		156,4	154,9	127,4	107,3	5,40	4,50
3-1	4,0	135,3	132,6	113,4	93,4	5,95	4,40
3-2		129,1	125,1	106,0	87,3	6,55	4,35
3-3		134,6	132,1	108,5	92,4	6,15	4,40
3-4		148,9	146,4	123,6	105,5	5,40	4,35
3-5		165,3	163,0	131,9	111,9	5,20	4,35
3-6		146,0	141,3	119,0	101,5	5,65	4,35
3-7		159,5	158,2	134,0	114,5	5,10	4,35
3-8		131,2	131,0	108,5	92,0	6,40	4,35

В цьому випадку середні значення напружень на кожній зі сторін зразка не залежать від крайового ефекту часу. Заміри напружень на кожній зі сторін обох зразків до і після перевертання замірялися шість разів. Середньостатистичні значення показників числового індикатора компенсатора і параметри тарованих зразків наведені в таблиці 4.3.

При завантаженні зразка 1-Т на важіль підвішувався вантаж масою  $G = 300$  гр. при завантаженні зразка 2-Т на важіль підвішувався вантаж  $G = 1750$  гр. Для врівноваження важеля на його коротке плече необхідно підвісити вантаж масою в 300 гр., отже, загальне навантаження на зразок становить  $3,75G + 300$  гр. Напруження в тарировочному зразку можуть бути визначені за залежністю :

$$\sigma = \frac{\ell(3,75G + 300)}{2} \bigg/ \frac{bt^2}{6} \quad (4.6)$$

де  $b$  - вершина зразка на просвіт;  $t$  - його товщина;  $\ell$  - відстань між крайніми отворами, коефіцієнт 2 враховує ту обставину, що загальне навантаження на зразок ділиться на два потоки.

Перетворивши (4.6) з урахуванням (4.4), отримаємо:

$$\sigma_0^{(1,0)} = \frac{b}{m} \cdot \frac{\ell(3,75G + 300)6}{bt^2 \cdot 2} = \frac{90(3,75G + 300)}{mt^2}. \quad (4.7)$$

Підставляючи в отриману залежність вихідні дані по таблиці 4.3, отримали:

Для зразка 1-Т

$$\sigma_0^{(1,0)} = \frac{6 \cdot 42750}{2 \cdot 3,17 \cdot 4 \cdot 95^2} = 1649,15;$$

Для зразка 2-Т

$$\sigma_0^{(1,0)} = \frac{6 \cdot 205875}{2 \cdot 3,17 \cdot 4 \cdot 11^2} = 1640,81.$$

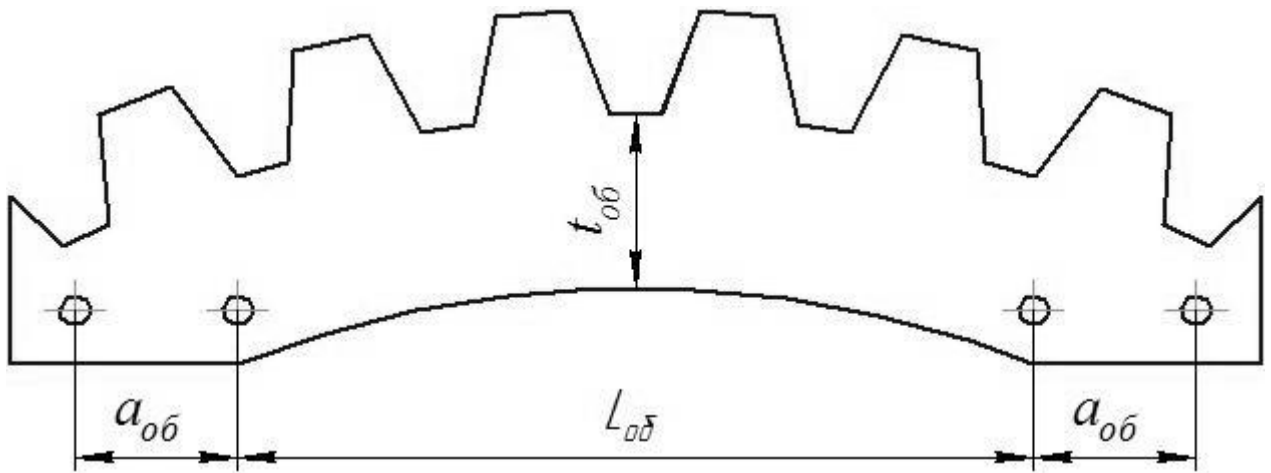


Рис. 4.7 Схема плоского зразка

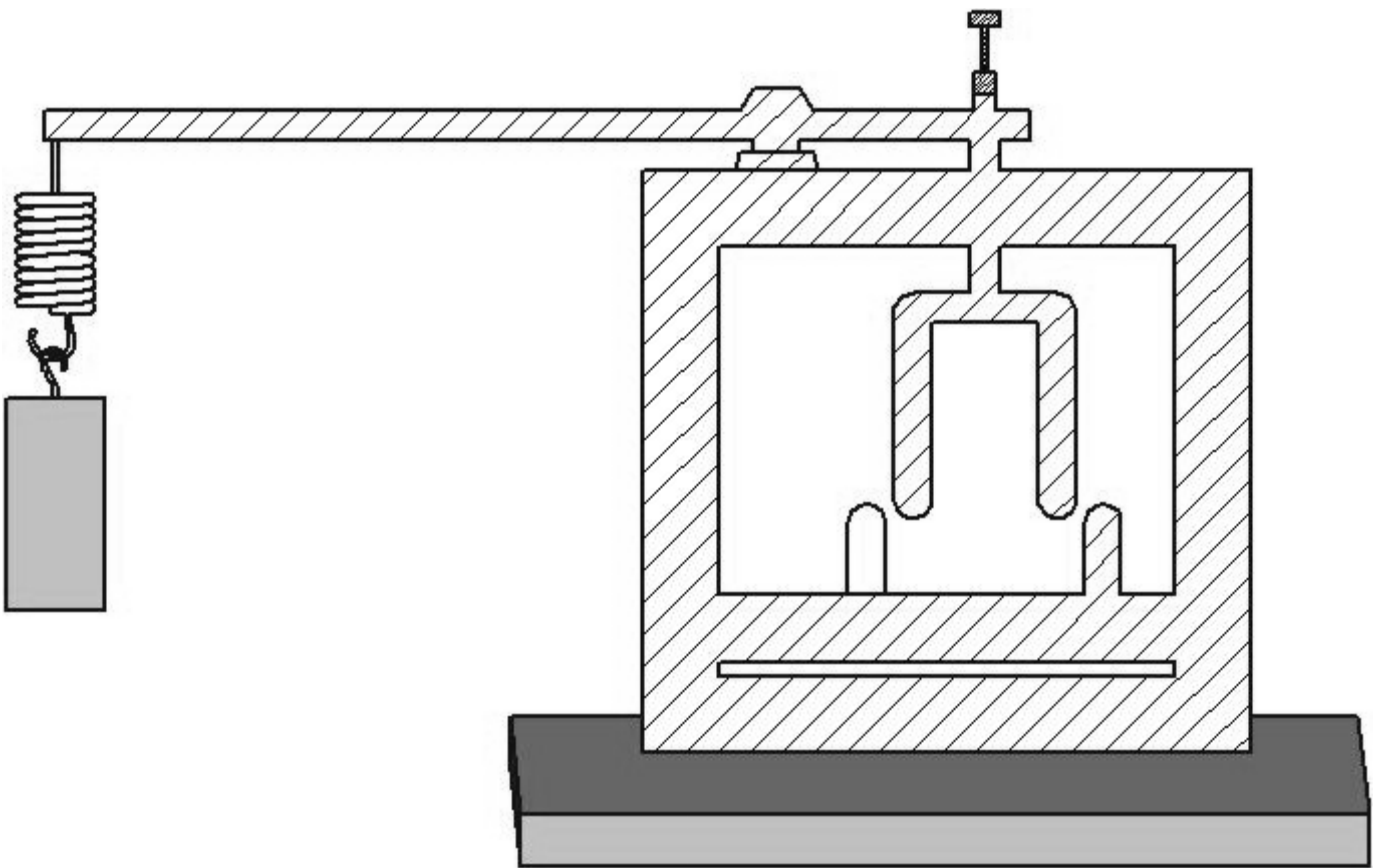


Рис.4.8 Пристрій для навантаження плоских зразків. Загальний вигляд

Середнє значення 1645. Таким чином, з точністю до  $\pm 0,25\%$  приймаємо

$$\sigma_0^{(1,0)} = 1645 \frac{\text{зр}}{\text{мм}^2 \cdot \text{пол.}}$$

Таблиця 4.3

Середньостатистичні значення показників числового індикатора компенсатора,  
число смуг і параметри тарувальних зразків

№ зразка	Показники числового індикатора					Товщина стінки	Ширина зразка	Число смуг	маса гр.
	Для сторони А		Для сторони В		Середнє значення				
	Стиск	Розтяг	Стиск	Розтяг					
1-Т	120,7	122,3	120,0	123,9	121,7	4,95	4,60	3,17	300
2-Т	117,5	122,5	118,3	123,1	120,3	11,0	4,65	3,11	1750

#### 4.3. Результати експериментального дослідження плоских зразків

На всі досліджувані зубчасті зразки діяли однаковим навантаженням. Більше плече важеля навантажувалося вантажем в 300 гр., при цьому навантаження на зразок по кожному потоку становило  $\frac{3,75 \cdot 300 + 300}{2} = 712,5$  гр. Плече прикладання сили, тобто відстань між крайніми отворами в зразку становило 30 мм. Таким чином всі зразки завантажувалися однаковим згинальним моментом, величиною  $712,5 \cdot 30 = 21375$  гр·мм

У даній роботі коефіцієнт концентрації напружень визначався як відношення діючих в зразку напружень до номінальних напружень, визначеним за залежністю

$$\sigma_{ном} = \frac{M}{W}, \quad (4.8)$$

де  $M=21375$  гр·мм – згинальний момент, що діє на зразок;  $W = \frac{bt^2}{6}$  – момент опору перерізу;  $b$  – ширина зразка на просвіт;  $t$  – його товщина. Визначений таким чином коефіцієнт концентрації напружень може бути виражений з урахуванням реально діючих в ньому напружень, формулою

$$K_{\alpha} = \frac{\sigma}{\sigma_{ном}} = \frac{m\sigma_0^{(1,0)} / b}{M/W} = \frac{\sigma_0^{(1,0)}}{6M} m^* t^2. \quad (4.9)$$

Підставляючи в цю залежність значення ціни смуги матеріалу  $\sigma_0^{(1,0)} = 1645$  і згинальний момент  $M = 21375$  *гр·мм*, отримаємо:

$$K_{\alpha} = \frac{1645}{21375 \cdot 6} m^* t^2 = \frac{0,07695 m^* t^2}{6}. \quad (4.10)$$

У свою чергу число смуг пов'язане з показаннями числового індикатора залежністю (4.5). Підставляючи цю залежність у (4.10), отримаємо

$$K_{\alpha} = \frac{1645 \cdot 39}{21375 \cdot 6} f(n_k) = 0,5 f(n_k). \quad (4.11)$$

Середні значення показників числового індикатора по кожній з досліджуваних точок зведені в таблицю 4.2, графу 3-6 оброблялися за залежністю (4.11). У результаті була складена таблиця значень коефіцієнтів концентрацій напружень, тобто таблиця 4.4. Для зручності подальшої обробки результатів експериментальних досліджень у третій графі таблиці наведені найбільші значення коефіцієнтів концентрації напружень, що відповідають точці А - точці, розташованій на найбільш несприятливою з точки зору концентрації напружень, перехідної поверхні западини.

Зміна картини напружено-деформованого стану в зубчастому плоскому зразку в залежності від товщини його під западиною наведено на рис.4.12, 4.13. Наведені значення коефіцієнтів концентрації напружень охоплюють порівняно вузький діапазон товщин і коефіцієнтів зміщення, тому вони вимагають спеціальної статистичної обробки. Одне можна сказати, що наведені значення коефіцієнтів концентрації напружень мають тенденцію до зниження коефіцієнта концентрації напружень при зростанні коефіцієнта зміщення або зменшення товщини стінки.

Таблиця 4.4

№ зразка	Коеф. зміщення	Коефіцієнти концентрації для точок				Товщина стінки зубчастого вінця
		А	В	С	Д	
1-1	3,5	2,085	1,972	1,358	0,877	6,35
1-2		1,704	1,614	1,205	0,833	6,25
1-3		1,806	1,794	1,256	0,850	6,05
1-4		1,797	1,706	1,291	0,895	5,10
1-5		1,876	1,766	1,308	0,883	5,70
1-6		2,063	1,882	1,372	0,898	6,20
1-7		1,663	1,630	1,259	0,842	5,55
1-8		2,063	1,852	1,344	0,898	5,55
2-1	2,0	1,684	1,658	1,194	0,874	5,20
2-2		1,792	1,704	1,270	0,949	6,70
2-3		1,728	1,712	1,292	0,903	6,70
2-4		1,806	1,696	1,245	0,913	6,40
2-5		1,726	1,673	1,241	0,949	5,75
2-6		1,801	1,685	1,258	0,950	6,20
2-7		1,669	1,665	1,214	0,888	5,65
2-8		1,816	1,788	1,287	0,943	5,40
3-1	4,0	1,736	1,676	1,267	0,882	5,95
3-2		1,939	1,834	1,356	0,940	6,55
3-3		1,838	1,779	1,248	0,923	6,15
3-4		1,679	1,633	1,220	0,914	5,40
3-5		1,832	1,794	1,269	0,945	5,20
3-6		1,779	1,688	1,248	0,930	5,65
3-7		1,670	1,649	1,254	0,948	5,10
3-8		1,899	1,899	1,352	0,992	6,40

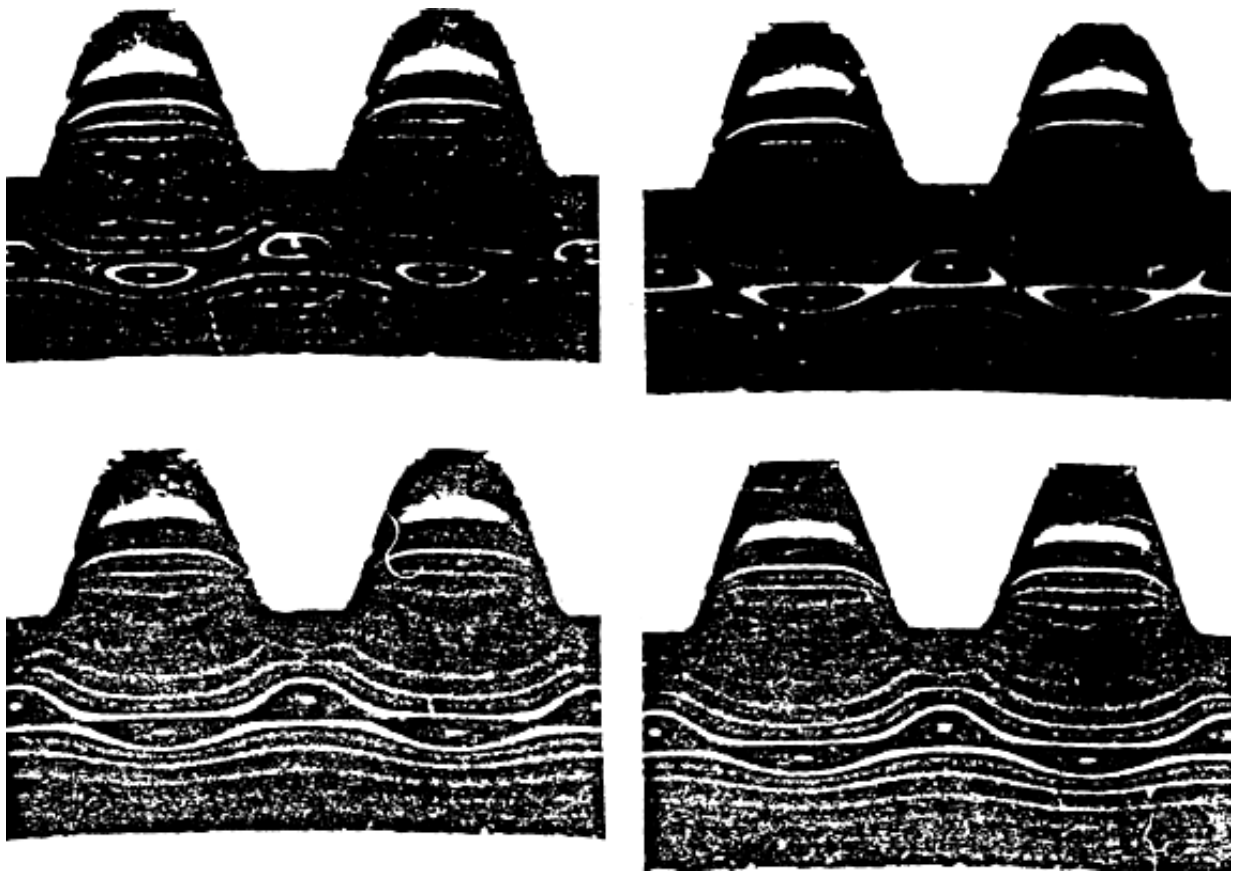


Рис. 4.12 Ізолінії в плоских зразках

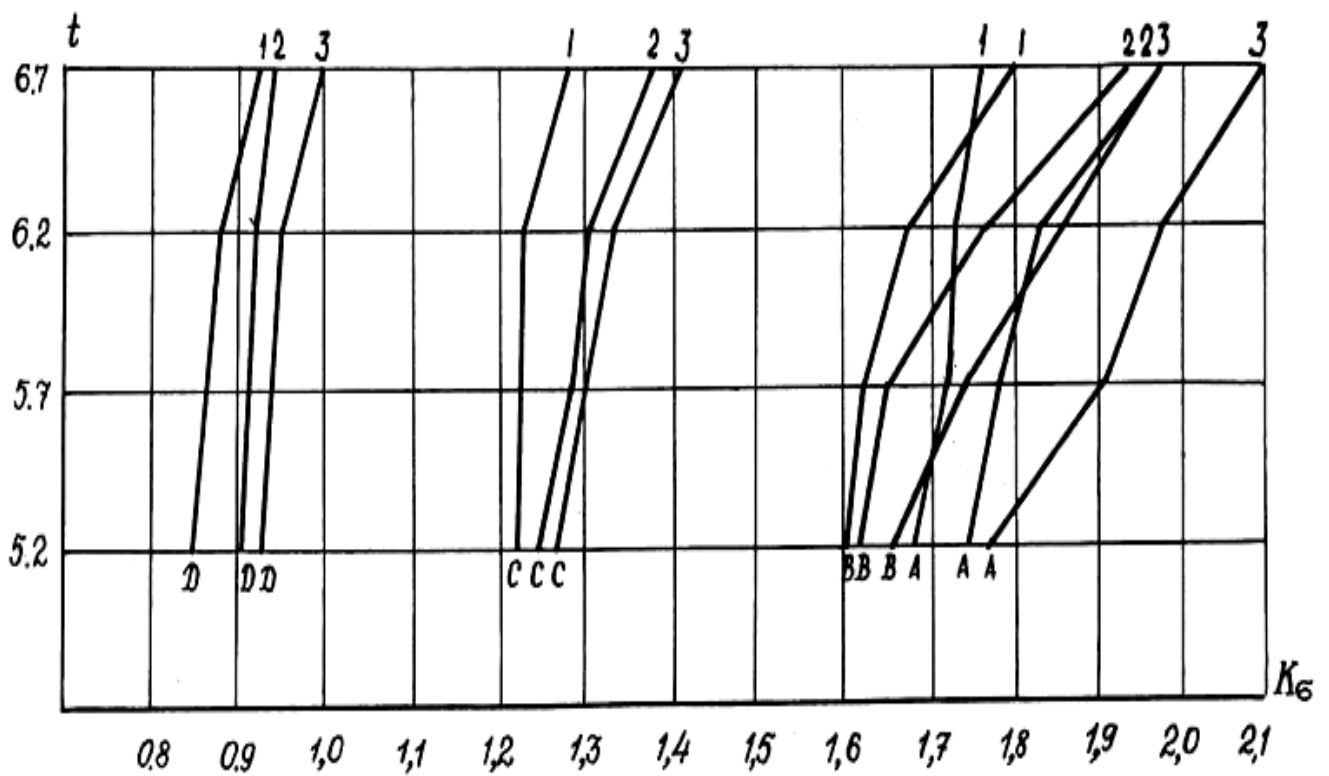


Рис. 4.13 - Вплив геометрії зубчастого вінця на коефіцієнт концентрації напружень

1 – коефіцієнт зсуву 4,0; 2 – коефіцієнт зсуву 3,5; 3 – – коефіцієнт зсуву 2,0

#### 4.4. Методика проведення експерименту на об'ємних моделях

Зрізи об'ємних «заморожених» моделей досліджували за допомогою поляризаційного мікроскопа МІН-7. Порядок інтерференційних смуг визначали в обраних точках зрізів на внутрішній і зовнішній поверхнях кільця за допомогою компенсатора Берека. Точність відліку становила 0,01 смуги.

Визначення ціни смуги об'ємної моделі проводили за допомогою тарувального досвіду при навантаженні диска діаметром 40 мм і товщиною 5 мм, виконаного з того ж матеріалу, що і плоскі моделі (рис.4.14).

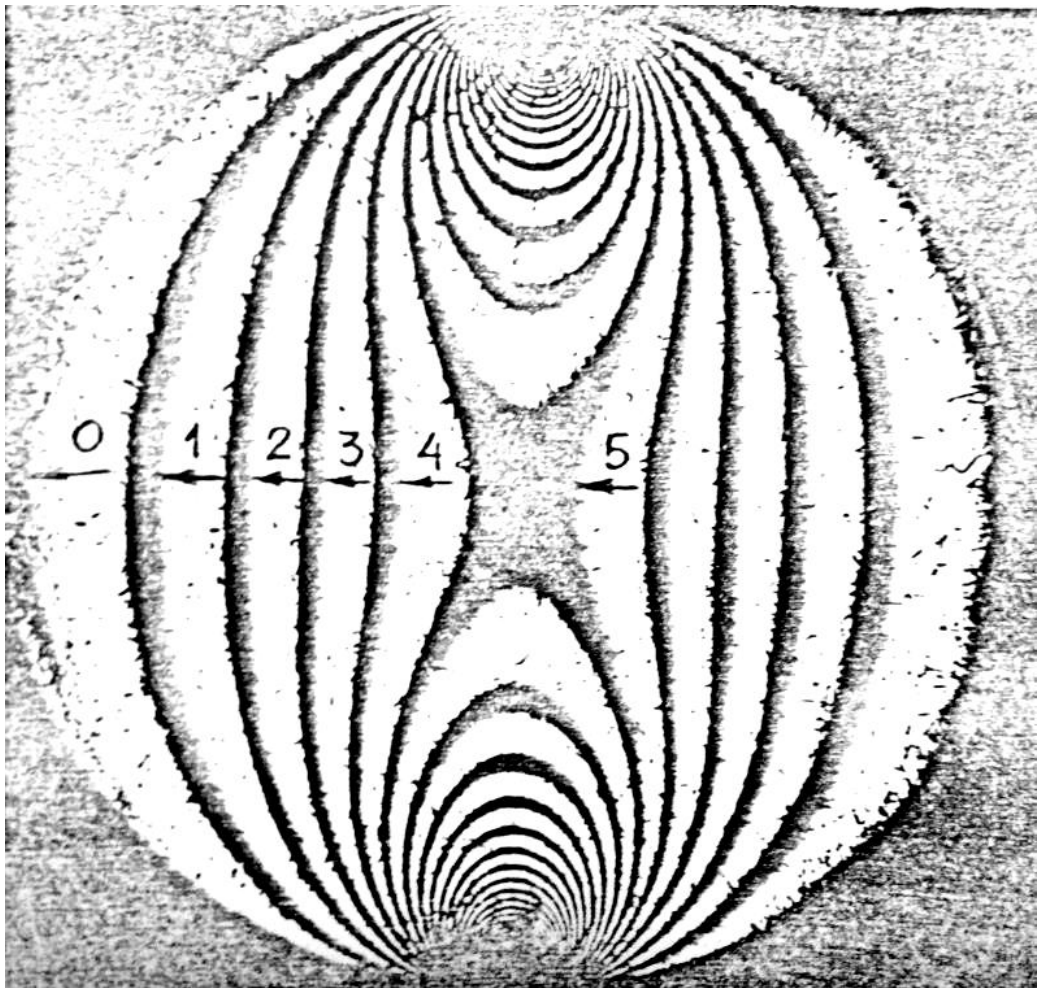


Рис.4.14 Тарувальний диск

Головні напруження в центрі диска визначалися за відомими залежностями:

$$\sigma_1 = \frac{2P}{\pi t D}; \quad \sigma_2 = \frac{6P}{\pi t D}, \quad (4.12)$$



де  $\sigma_2$  - напруження в центрі диска, що збігаються за напрямком з дією сили  $P$ ;  $\sigma_1$  - напруження, перпендикулярні лінії дії сили.

Для центру диска маємо:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = m\sigma_0^{(t)} = \frac{8P}{\pi t D}, \quad (4.13)$$

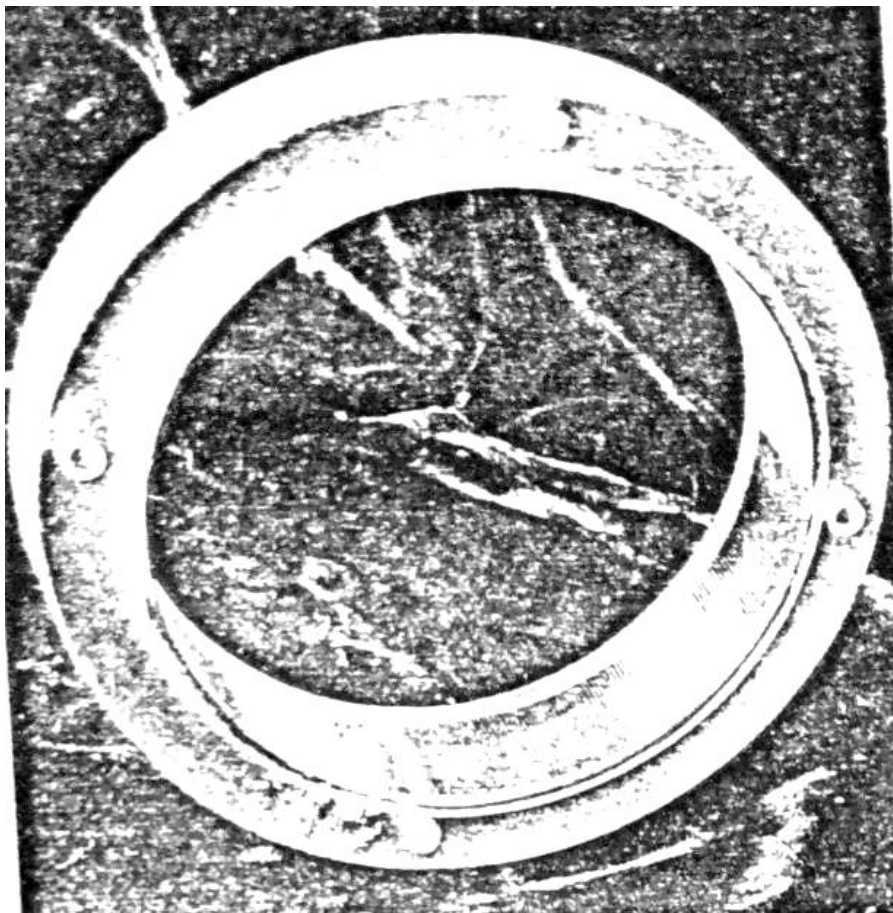
де  $m$  - порядок смуги в центрі диска. Перетворюючи цей вираз, отримаємо:

$$\sigma_0^{(t)} = \frac{8P}{\pi t D m} = \frac{8 \cdot 1100}{3,14 \cdot 5 \cdot 40 \cdot 5} = 2,8 \text{ МПа} / \text{пол}. \quad (4.14)$$

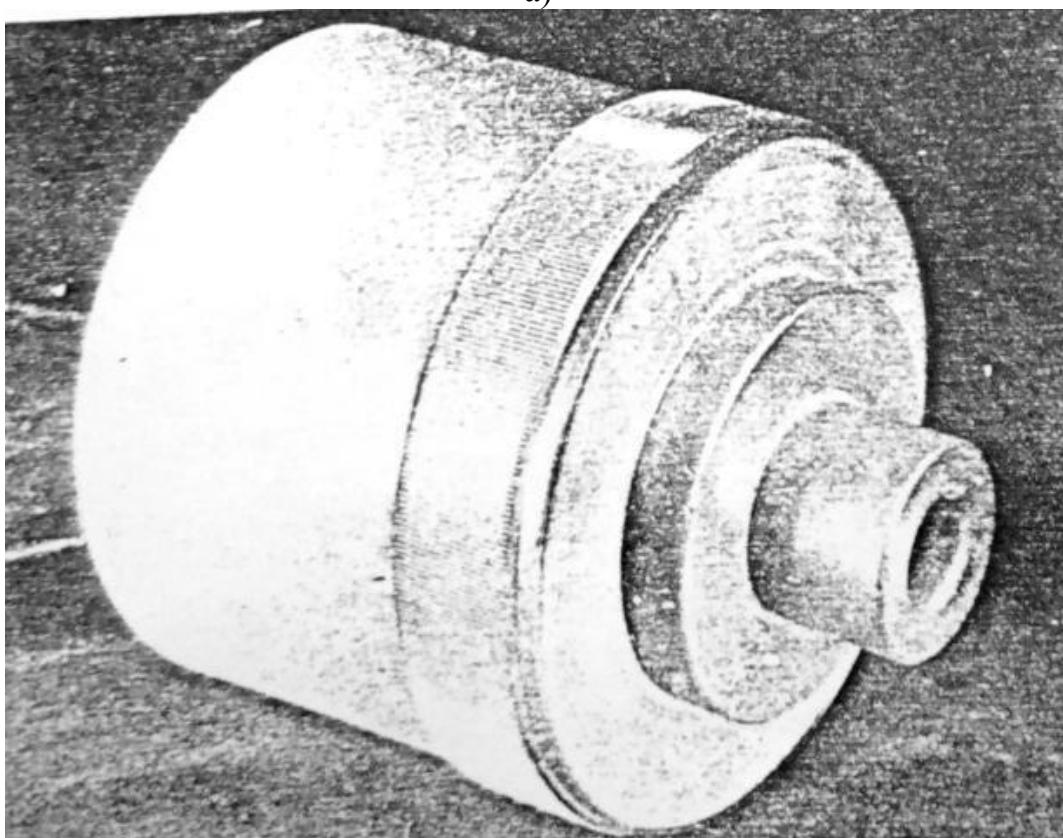
Об'ємні моделі виконуються з повною геометричною подібністю натурі ( $C_L = 1$ ), рис.4.15, 4.16.



Рис.4.15 Об'ємна модель. Загальний вид



а)



б)

Рис.4.16 Об'ємна модель

(а - жорстке колесо, б - генератор хвиль та гнучке колесо в сборці)

Крутний момент моделі  $M_M$  призначали згідно залежності:

$$\frac{M_M}{M_P} = \frac{E_M}{E_P} \quad (4.15)$$

де  $M_P$  - розрахунковий крутний момент сталевого гнучкого колеса, який є аналогом ГК, виготовленого з смоли;  $E_M$  - модуль пружності смоли;  $E_P$  - модуль пружності сталі.

Розрахунковий крутний момент  $M_P$  розраховували за методикою описаною в роботі [50]. Навантажувальний пристрій конструювали таким чином, щоб уникнути температурних напружень, викликаних відмінністю коефіцієнтів температурного розширення застосовуваних матеріалів і виходячи з умов вільного температурного деформування елементів хвильової передачі. Перехід від заміряних напружень на моделях до напружень в натурі здійснювався за відомими залежностями теорії подібності:

$$\sigma_P = \frac{C_P}{C_L^2} \sigma_M \quad (4.16)$$

де  $C_P$ ,  $C_L$  - коефіцієнти силової та геометричної подібностей.

При перенесенні результатів випробування моделей, навантажених зазначеним способом, на сталеві колеса, навантажені в хвильових редукторах, були прийняті наступні допущення:

- напруження гнучких коліс, навантажених через жорстке колесо або за допомогою хвилеутворювача, ідентичні;
- відмінності коефіцієнтів тертя сталь по сталі і смола по смолі не враховувалися;
- статичні напруження в моделях відповідають напруженням в сталевому гнучкому колесі, що працює при невисоких швидкостях;
- напружений стан гнучкого колеса зі смоли при навантаженні відповідає напруженому стану реального гнучкого колеса при навантаженні.

#### **4.5. Результати експериментального дослідження об'ємних моделей**

Визначення рівня напруженого стану моделі гнучкого колеса проводилися по периметру колеса в районі зубчастого вінця, як з боку «дна», тобто в місці переходу зубчастого вінця в циліндричну оболонку, так і з протилежного боку, тобто на гладкому обідку. Крім того, було досліджено перетин по центру циліндричної частини гнучкого колеса і перетин в безпосередній близькості від перехідної поверхні «дна» в циліндр, тобто близько тороїдальної поверхні. Дослідження розподілу напружень по довжині твірної гнучкого колеса проводилися в перерізі, проведеному під кутом відповідним куту рівня найбільших напружень відносно площини великої осі генератора хвиль.

Для проведення досліджень з об'ємною моделлю гнучкого колеса хвильової передачі ХЗП-160 її навантажували за допомогою пристрою, в якому вантаж задає крутний момент жорсткому колесу моделі, яка в свою чергу завантажує гнучке колесо, потім модель «заморожували» відповідно до графіка, наведеному на рис. 4.3, після чого з гнучких коліс вирізали елементи у зацікавлених місцях, описаних вище.

Отримані зрізи досліджувалися за методикою, аналогічною як і для плоских зразків, описаної в розділі 4.2.

Необхідно відзначити, що зрізи, як об'єкт має кінцеву товщину досліджуваної площини, зумовлюють деяке усереднення напружень і спотворення картини напружено-деформованого стану при розгляді зрізу, що включає в себе область з концентратором напружень.

Наводиться нижче напруження отримані при дослідженні моделей, виготовлених зі смоли ЕД-20, знеделеною метілтетрагідрофталевам ангідридом (МТГФА), отримані при навантаженні моделі хвильової передачі відповідним, у перерахунку від моменту передачі зі сталі, номінальним крутним моментом.

На рис.4.17 наведений розподіл напружень у поперечному перетині, в зоні переходу зубчастого вінця в гладку оболочку. З врахуванням усереднення, про яке згадувалось вище, напруження по великій осі генератора склали 40 МПа, а максимальні до 100 МПа (величини для сталевго ГК), причому кут між великою

віссю та віссю, що відповідає максимальним напруженням, приблизно дорівнює куту, що визначає кососиметричність навантаження, що передається на зуб.

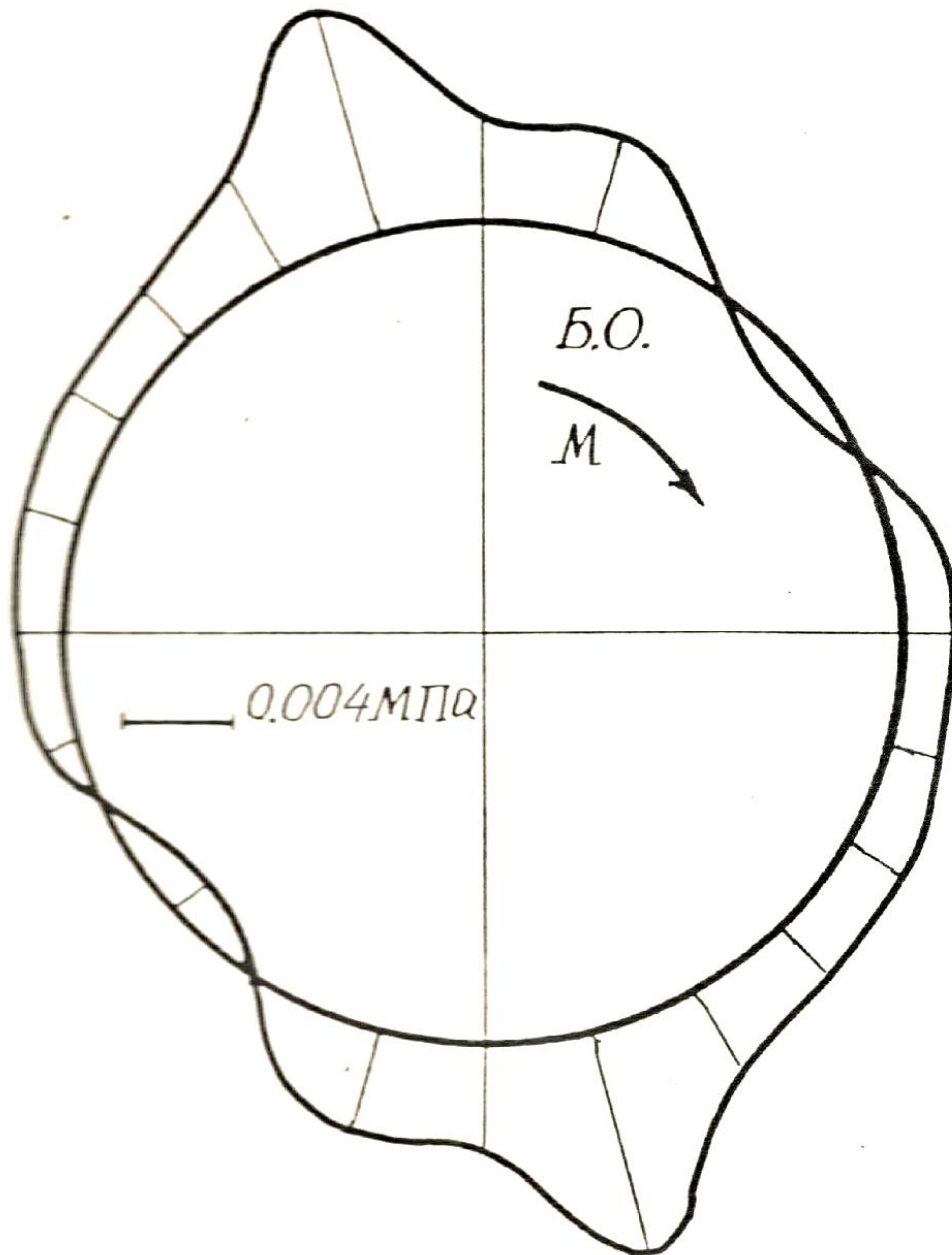


Рис.4.17 Розподіл напружень в ГК моделі, в коловому напрямку

Перетин з зоні зубчатого вінця (рис.4.18) показав, що напруження у впадинах зубців, з врахуванням перерахунку для сталевого ГК, по великій осі склало 100 МПа, а в зоні максимальних – до 200 МПа.

У зв'язку з значними труднощами при розшифруванні напружень у впадинах зубців та на тароїдальній поверхні з врахуванням малості радіусу її кривизни, напруження в цих місцях були визначені з меншою ступінню достовірності. Похибка

при визначенні цих напружень склала  $\pm 15$  МПа в зоні зубчатого вінця та  $\pm 5$  МПа на тароїдальній поверхні, що складає приблизно 10%.

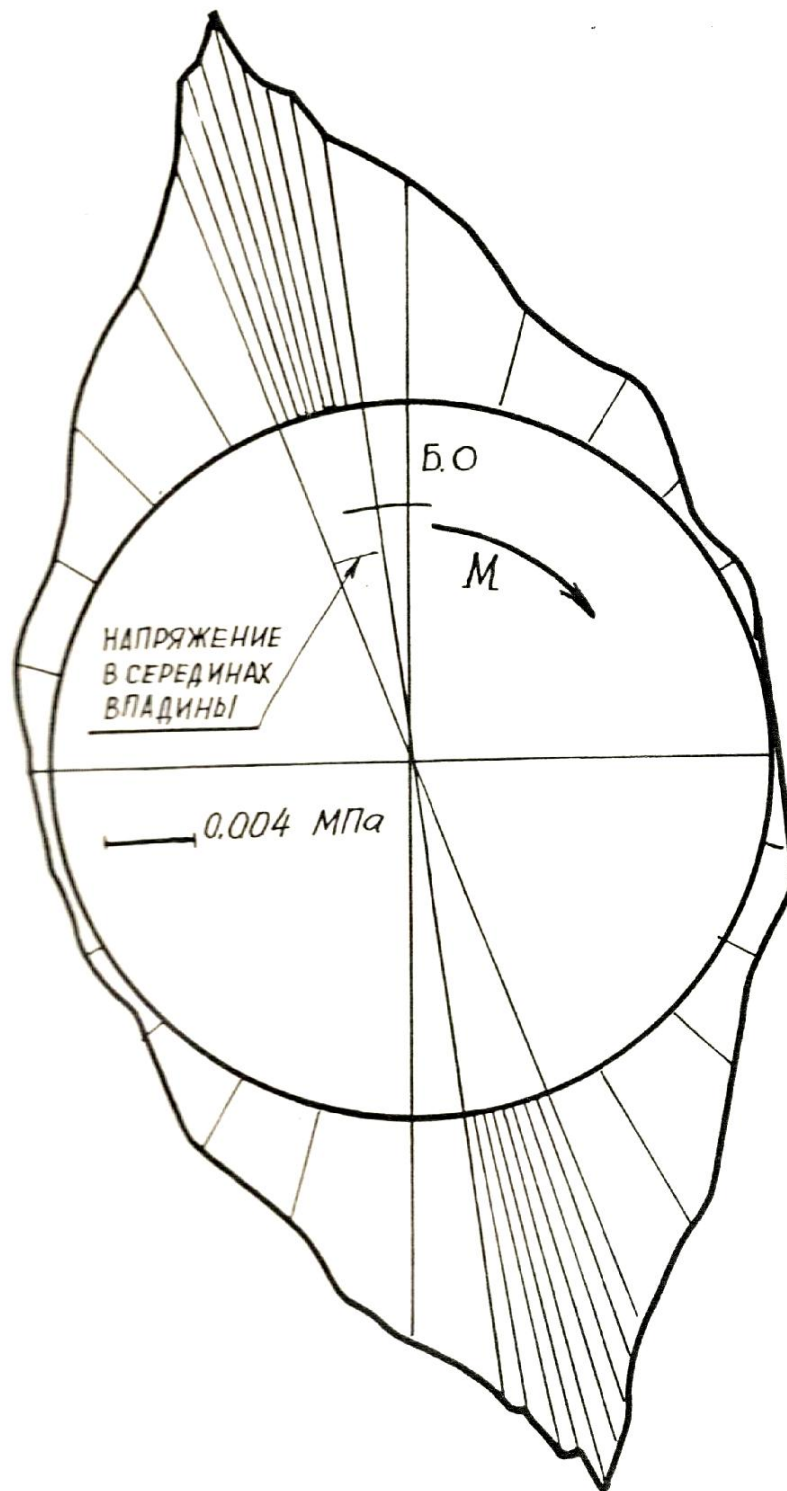


Рис.4.18 Розподіл напружень в ГК моделі,  
в коловому напрямку, в зоні зубчатого вінця

Графік розподілу напружень по утворюючій гнучкого колеса моделі представлений на рис. 4.19. Напруження на гладкому пасу, що передуює зубчастому

вінцю, з вільного краю склали 0,0025 МПа, що для сталевго гнучкого колеса відповідає 30 МПа. У перетині, відповідному центру циліндричної частини, тобто між зубчастим вінцем і «дном», напруження моделі досягали порядку 0,002 МПа, тобто 25 МПа для сталевго, а в зоні, прилеглій до тороїдальної поверхні, порядку 40 МПа, в перетині для сталевго ГК.

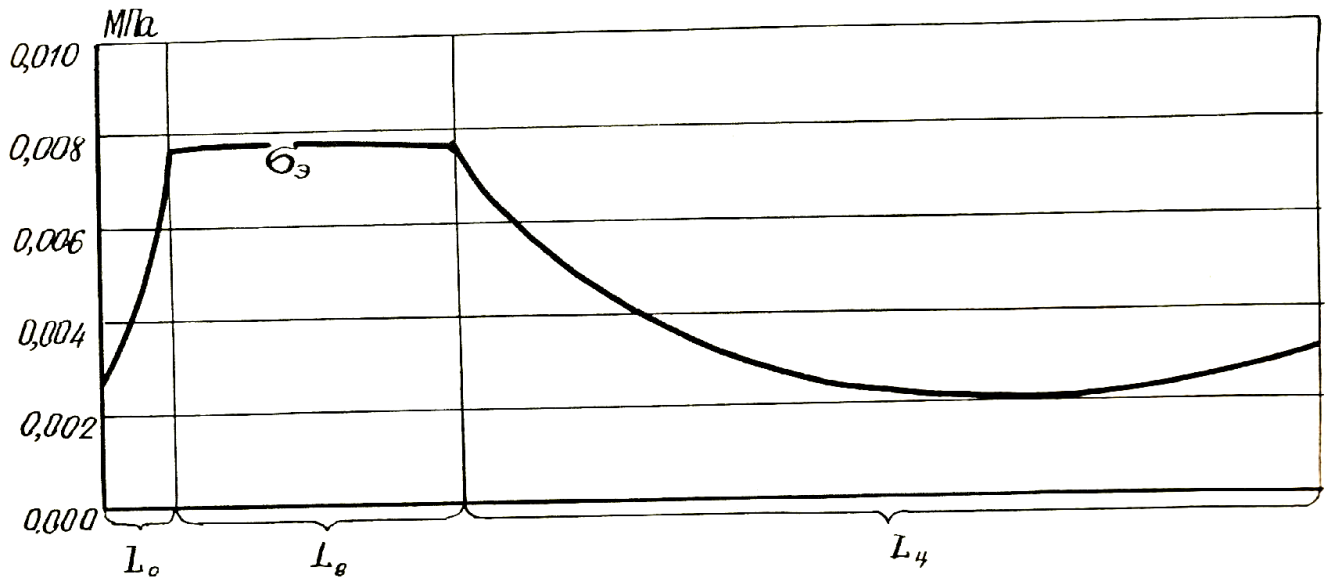


Рис.4.19 Розподіл напружень в ГК моделі по утворюючій

## ВИСНОВОК

Основні результати роботи зводяться до наступного:

- створена та обґрунтована ефективна розрахункова модель гнучкого колеса і зубчастого вінця хвильової зубчастої передачі;
- в результаті проведених досліджень на основі варіаційно-сіткових методів створена методика уточненого розрахунку напружено-деформованого стану гнучкого колеса;
- на базі запропонованої методики з використанням створеної розрахункової моделі розроблений пакет прикладних програм, які дають можливість для проведення чисельних експериментів та інженерних розрахунків;
- на основі створеного пакета прикладних програм виконано чисельне дослідження НДС гнучкого колеса і зубчастого вінця ГК серійної хвильової передачі застосованого до ХЗП-160, отримані поля напружень, які дозволяють дати рекомендації по вдосконаленню конструкції і зробити висновки про їх працездатність;
- чисельний розрахунок дозволив визначити НДС в «денці» гнучкого колеса типу «стакан»;
- вирішена задача про НДС зубчастого вінця, як тривимірна задача теорії пружності, яка дозволила встановити характер розподілення напружень, як по профілю так і утворюючої вінця;
- на основі створеної розрахункової моделі чисельно визначена резонансна частота та виявлено вплив «денця» на жорсткість та резонансну частоту ГК типу «стакан»;
- результати експериментальних досліджень на базі методу фото пружності на плоских зразках-аналогах зубчатого вінця дозволили підтвердити достовірність результатів, отриманих чисельними методами на основі вибраної методики, а також виявити та дослідити вплив геометрії профілю зубчатого вінця ГК хвильової передачі на концентрацію напружень у впадині його зуба;
- Експериментальне дослідження методом фото пружності на об'ємних моделях гнучкого колеса, виконаних на основі теорії подібності, показали високу ступінь кореляції з чисельними результатами експериментів.



## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Волков Д.П., Завьялов В.М., Рубцов И.В. Влияние основных параметров волновой передачи на напряжение в гибком колесе. Сб.науч.тр. Челяб.политехн.ин-та. 1981, № 261. – с. 27-37.
2. Писаренко Г.С., Агарев В.А., Квитка А.Л. и др. Сопротивление материалов. - Киев.: Вища школа, 1979. - 693 с.
3. Иосилевич Г.Б. Концентрация напряжений и деформаций в деталях машин. М. Машиностроение. 1981. - 219 с.
4. Завьялов В.М., Рубцов И.В., Лобкова С.Н. Экспериментальное исследование напряженного состояния гибкого колеса методом фотоупругости //Сборник "Волновые зубчатые передачи и механизмы. - М. - 1985. - с.67-71.
5. Андожский В.Д., Василенок В.Д., Борисов Н.К. О точности некоторых аналитических методов определения напряжений изгиба в зубьях // Известия вузов. Машиностроение. 1981. – №4, с. 33-36.
6. Амосова Э.П., Петров В.В., Апазиди Е.И. Влияние параметров гибкого колес и нагрузки на форму упругой линии зубчатого венца в волновых передачах // Изв. вузов. Машиностроение, 1975, №4, с. 52-56.
7. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. – М.: Наука, 1978. – 287 с.
8. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, I 1975. - 541 с.
9. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. - М.: Наука, 1981. - 416 с.
10. Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Чирков А.Ю. О применении метода покоординатного спуска в вариационно-сеточных схемах при решении задач теории упругости // Пробл.порочности. – 1985. – №9. – с. 102-106.
11. Сахаров А.С., Альтенбах И. Метод конечных элементов в механике твердых тел. - Киев: Вища школа. - 1982. - 478 с.

- 12.Алфутов Н.А., Клеников С.С. Расчет сил взаимодействия упругих элементов волновых передач шаговым методом // Вестник машиностроения, 1978, №7, с. 26-29.
- 13.Иванов М.Н., Финогенов В.А., Бойко Л.С., Чиров А.А. и др.. Волновые передачи (Рекомендации по инженерным расчетам): ВНИИТЭМР. - М. - 1986.- 70с.
- 14.Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Каменичный И.Д., Чирков А.Ю. Эффективный метод решения трехмерной задачи теории упругости для ступенчато-призматических тел. – Киев, 1988. – 9 с. – Рукопись деп. в УкрНИИТИ, № 706 УК88.
- 15.Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. -М.: Наука, 1970. - 512 с.
- 16.Василенко Н.В., Бабенко А.Е., Цыбенко А.С., Чирков А.Ю. Решение задач теории упругости методом покоординатного спуска // Пробл. Прочности. – 1983. – №1. – с. 102-104.
- 17.Сахаров А.С., Кислокий В.Н., Киричевский В.В. и др. Метод конечных элементов в механике твердых тел. - Киев.: Вища школа. - 1982. - 112 с.
- 18.Писаренко Г.С., Агарев В.А., Квитка А.Л. и др. Сопротивление материалов. - Киев.: Вища школа, 1979. - 693 с.
- 19.Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин. – М.: Машиностроение, 1973. – 456 с.
- 20.Иванов М.Н., Финогенов В.А., Бойко Л.С., Чиров А.А. и др.. Волновые передачи (Рекомендации по инженерным расчетам): ВНИИТЭМР. - М. - 1986.- 70с.
- 21.Завьялов В.М., Рубцов И.В., Лобкова С.Н. Экспериментальное исследование напряженного состояния гибкого колеса методом фотоупругости //Сборник "Волновые зубчатые передачи и механизмы. - М. - 1985. - сС.67-71.

## ДОДАТКИ

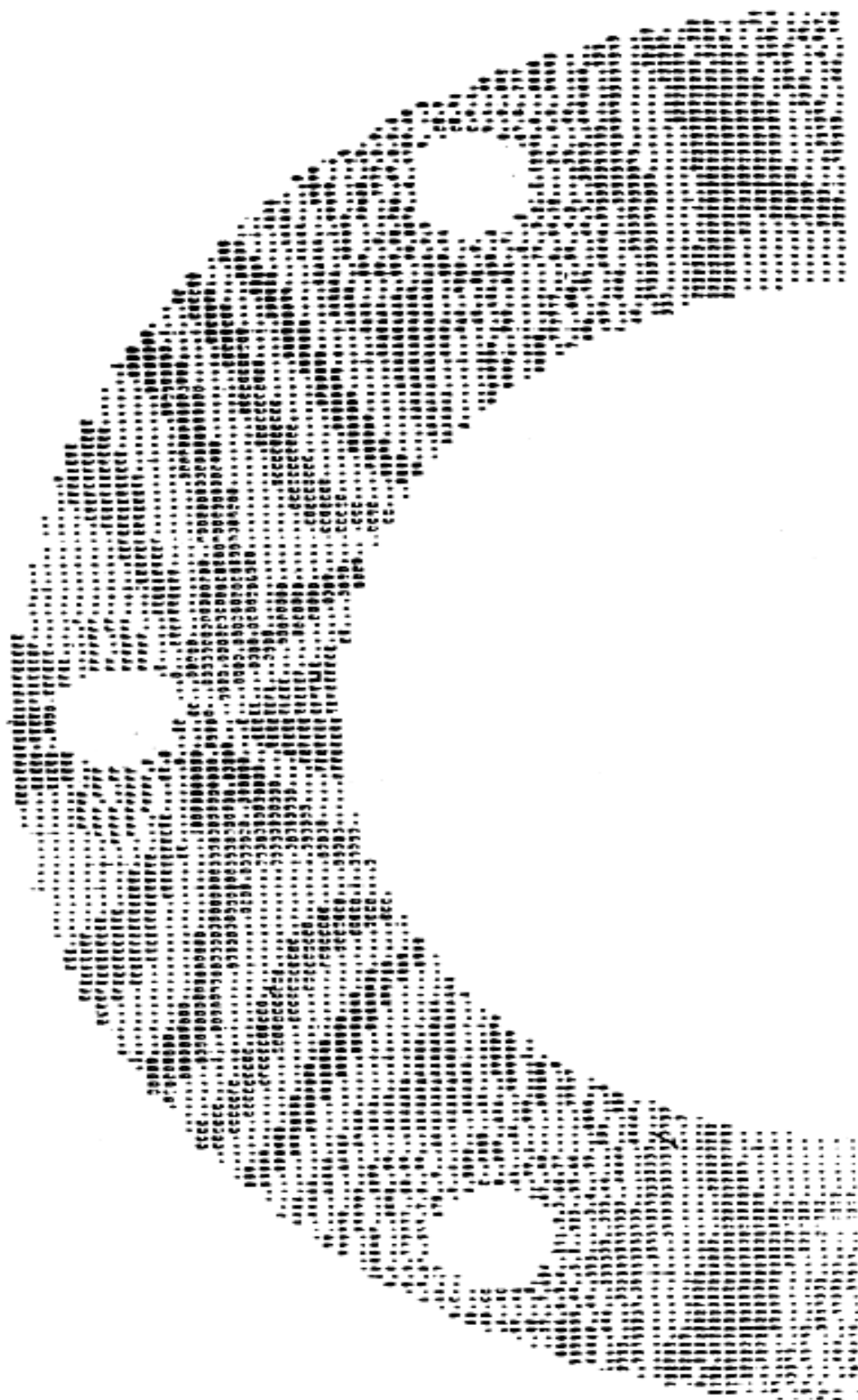


Рис.1 Поле напряжень  $\sigma_x$ .

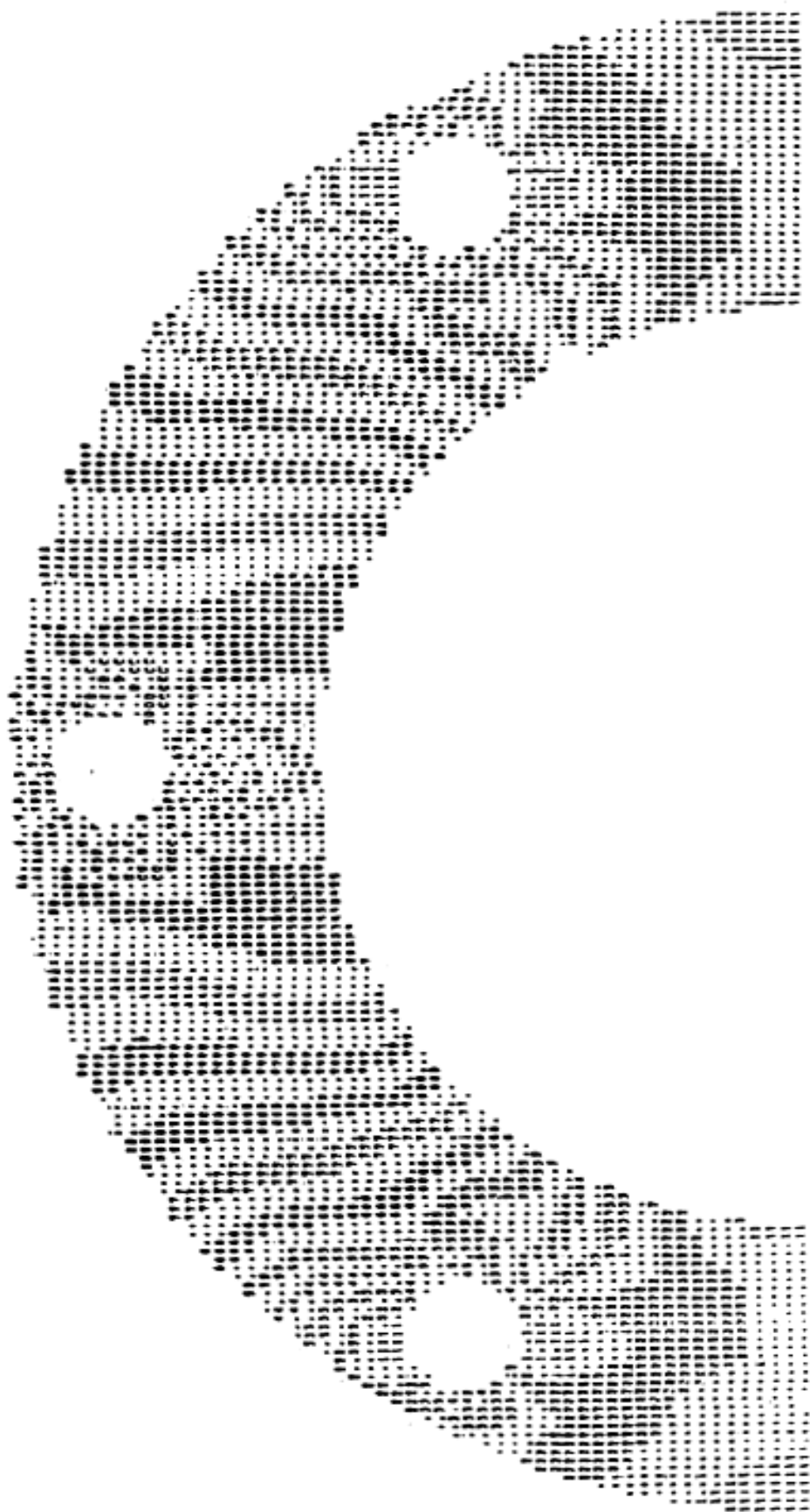


Рис..2 Поле напряжень  $\sigma_y$

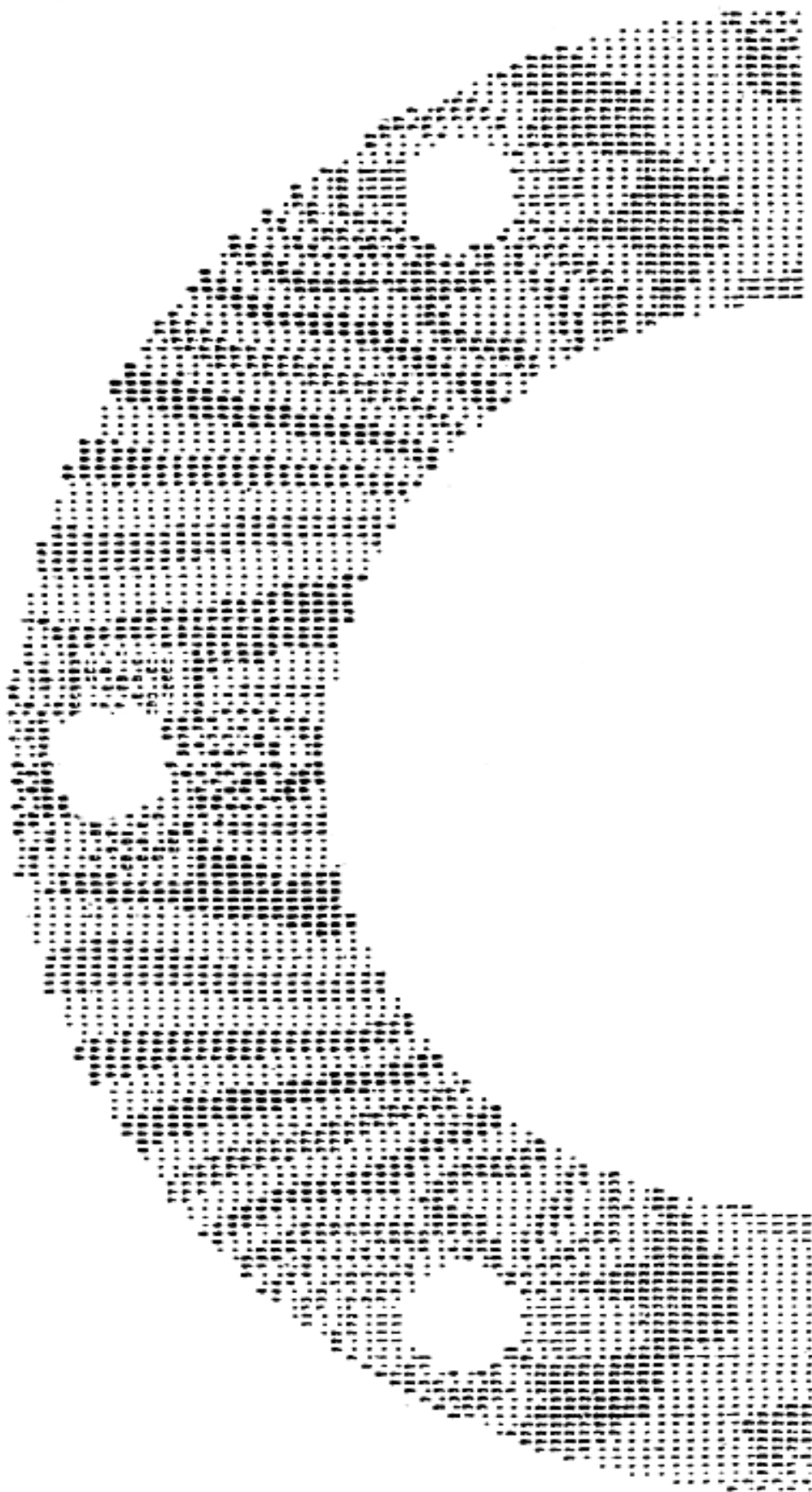


Рис.3 Поле напряжень  $\tau_{xy}$

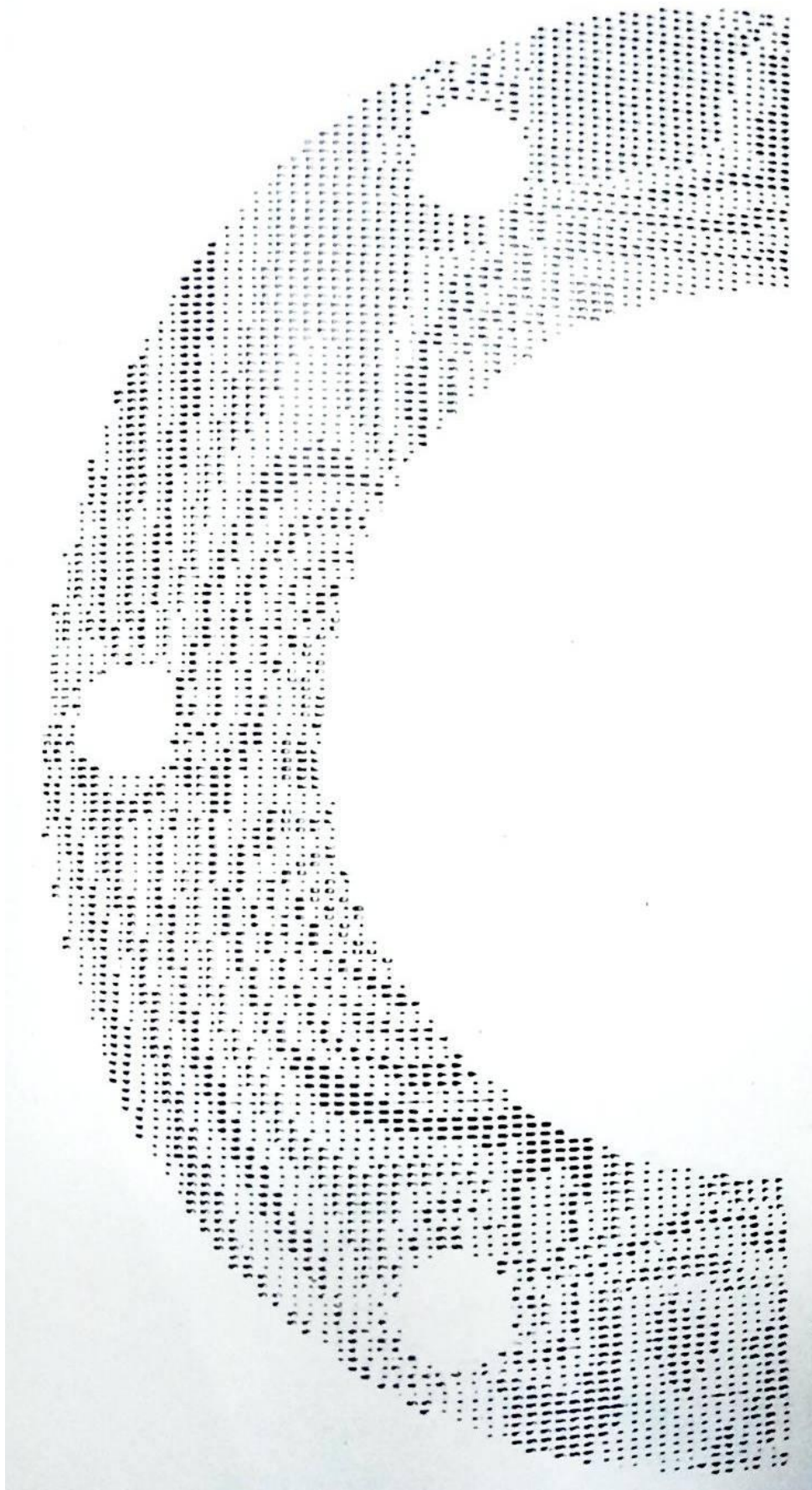


Рис.4. Поле напряжений  $\sigma_x$ , МПа

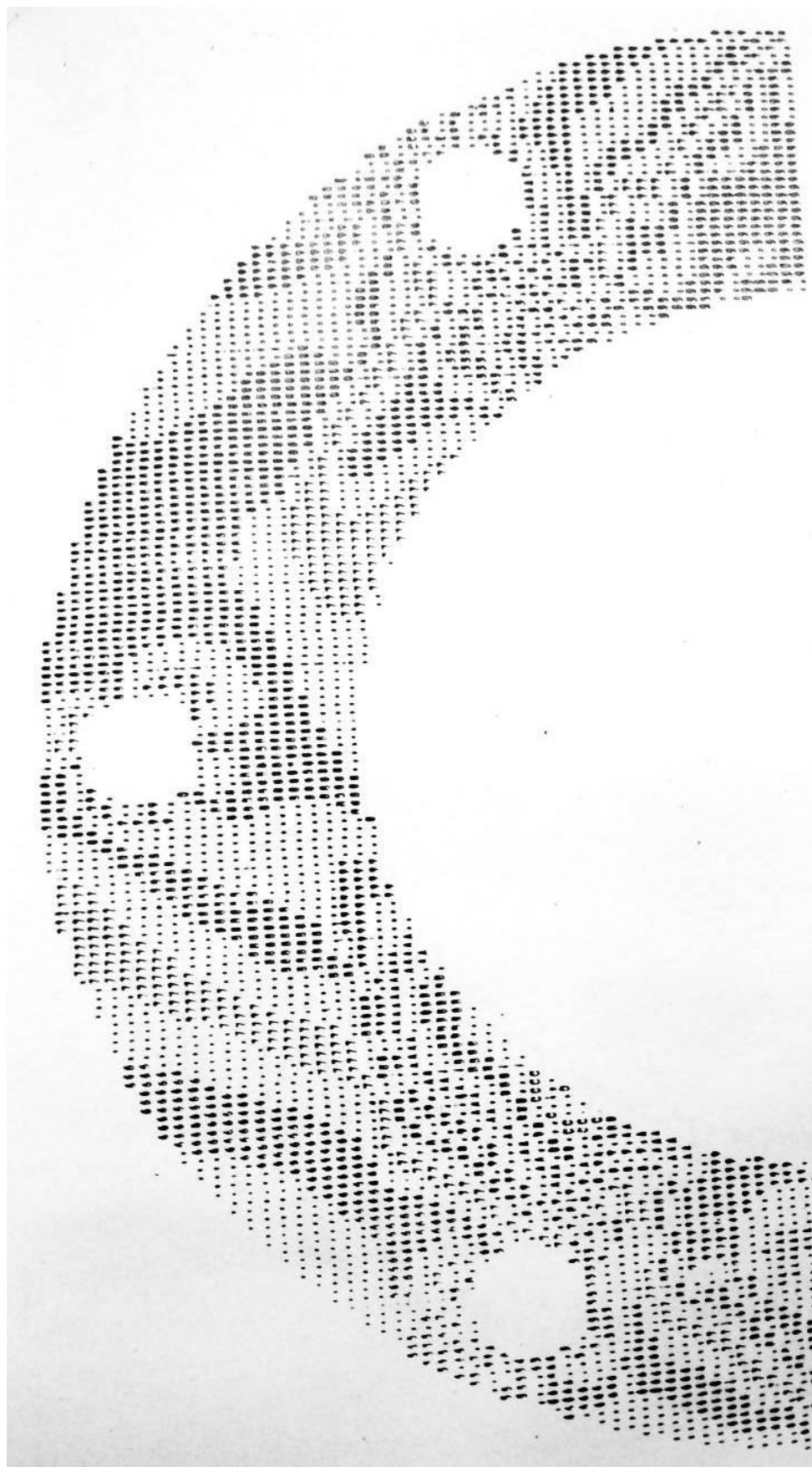


Рис.5. Поле напряжень  $\sigma_y$ , МПа



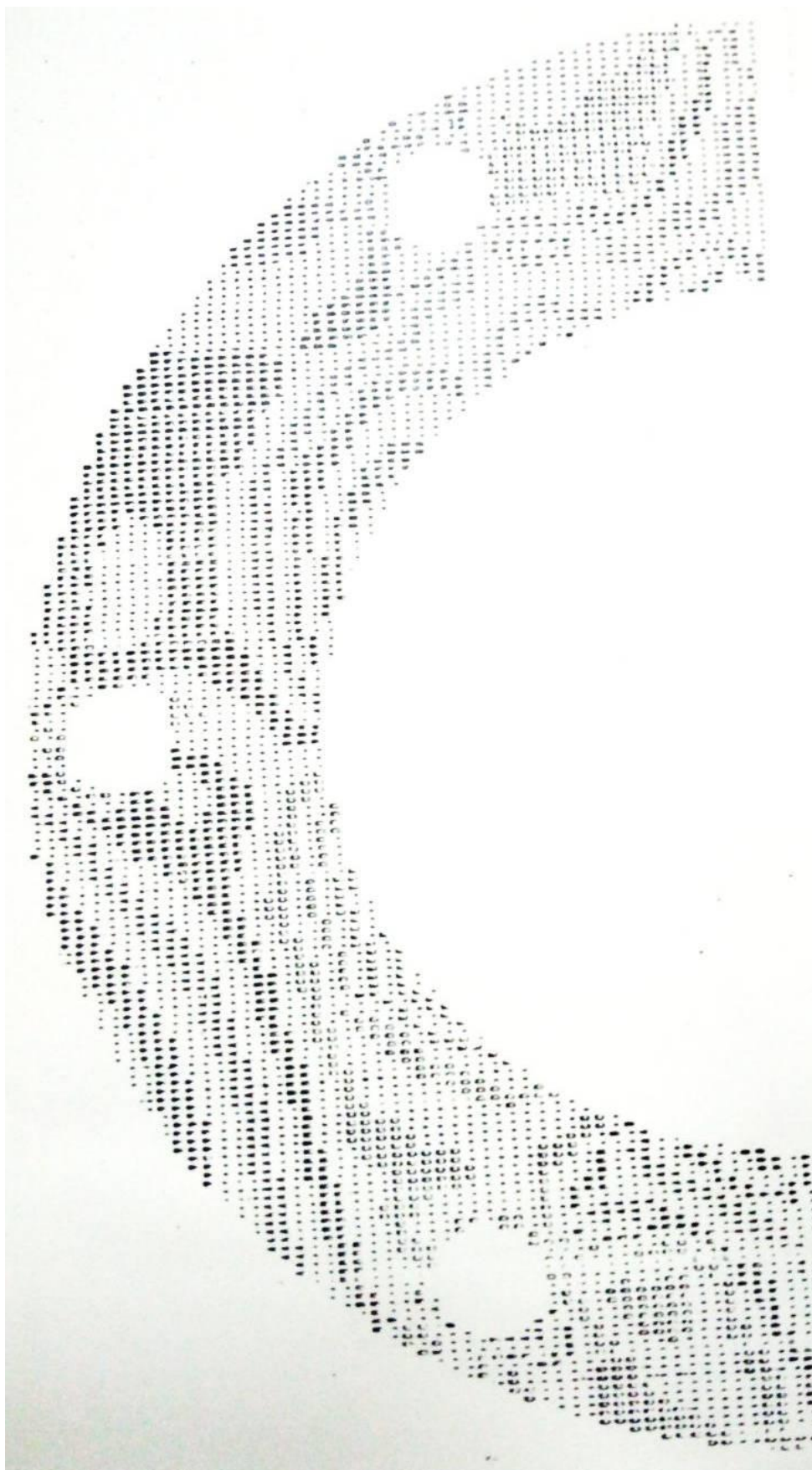


Рис.6. Поле напряжень  $\tau_{xy}$ , МПа