

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені Ігоря Сікорського

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА.
КІНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА ТА ДИНАМІКА ТОЧКИ**
Конспект лекцій

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 133 «Галузеве машинобудування»,
спеціалізацією «Інструментальні системи та технології формоутворення
деталей», «Технології комп'ютерного конструювання верстатів, роботів та
машин»*

Київ
«КПІ ім. Ігоря Сікорського»
2018

Теоретична механіка. Кінематика твердого тіла та динаміка точки. Конспект лекцій [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 133 «Галузеве машинобудування», спеціалізації «Інструментальні системи та технології формоутворення деталей», «Технології комп'ютерного конструювання верстатів, роботів та машин» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В. В. Губська, В. Ф. Кришталь. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,9 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 105 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 10 від 21.06.2018 р.)
за поданням Вченої ради факультету авіаційних і космічних систем (протокол № 10 від 30.05.2018 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА.
КІНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА ТА ДИНАМІКА ТОЧКИ**
Конспект лекцій

Укладачі: *Губська Вікторія Володимирівна*, канд. фіз-мат. наук
Кришталь Володимир Федорович, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний
редактор: *Федоров Володимир Миколайович*, канд. техн. наук, доц.

Рецензенти: *Пасічник Віталій Анатолійович*, д-р техн. наук, проф.
Струтинський Василь Борисович, д-р техн. наук, проф.

Мета конспекта лекцій – дати студентам теоретичні знання в галузях: визначення кінематичних параметрів плоскопаралельного, сферичного та складного руху твердого тіла, побудови математичної моделі та складання диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, оволодіти методами їх розв'язання, запису початкових умов руху, дослідження прямолінійних коливань точки, дослідження динаміки відносного руху точки. Конспект поділено на сім тем та 18 лекцій. В кінці кожної теми подано контрольні питання для закріплення отриманих знань.

Зміст

Вступ.....	6
------------	---

Розділ 2. КІНЕМАТИКА

Тема 3.1. Плоскопаралельний рух твердого тіла

Лекція 1	7
1. Кінематичний закон плоскопаралельного руху тіла.....	7
2. Розподіл швидкостей точок плоскої фігури.....	8
3. Способи визначення миттєвого центра швидкостей.....	10
Лекція 2.....	12
4. Теорема Пуансо.....	12
5. План швидкостей.....	12
6. Розподіл прискорень точок плоскої фігури при плоскопаралельному русі.....	14
7. Миттєвий центр прискорень та способи його визначення.....	15
Лекція 3.....	18
8. Приклад.....	18
9. Контрольні запитання.....	22

Тема 3.2. Рух твердого тіла з нерухомою точкою (сферичний рух твердого тіла)

Лекція 4.....	23
1. Рух твердого тіла навколо нерухомої точки.....	23
2. Теорема Ейлера. Кути Ейлера.....	24
3. Визначення напрямних косинусів.....	26
Лекція 5.....	28
4. Регулярна прецесія.....	28
5. Нерегулярна прецесія.....	29
6. Розподіл лінійних швидкостей та прискорень точок тіла.....	31
Лекція 6.....	34
7. Кінематичні рівняння Ейлера.....	34
8. Приклад.....	35
9. Контрольні запитання.....	38

Тема 3.3. Складний рух твердого тіла.

Лекція 7.....	39
1. Основна задача кінематики складного руху твердого тіла.....	39
2. Складання поступальних рухів.....	39
3. Складання обертальних рухів тіла навколо перетинних осей.....	40
4. Пара обертань.....	41
5. Складання обертальних рухів навколо паралельних осей.....	43
Лекція 8.....	45
6. Складання миттєво-поступального і миттєво-обертального рухів.....	45

7. Метод зупинення. Формули Вілліса.....	47
8. Приклад.....	49
9. Контрольні запитання.....	50

Розділ 3. ДИНАМІКА

Тема 4.1. Динаміка вільної матеріальної точки

Лекція 9.....51

1. Вступ. Закони Ньютона.....51
2. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки.....53

Лекція 10.

3. Дві основні задачі динаміки матеріальної точки. Пряма (перша) задача.....55
4. Обернена (друга) задача динаміки матеріальної точки.....57
5. Контрольні запитання.....59

Тема 4.2. Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки. Принцип Даламбера

Лекція 11.....60

1. Динамічне рівняння руху невільної матеріальної системи.....60
2. Типи в'язей та їх рівняння.....61

Лекція 12.....64

3. Принцип Д'Аламбера для матеріальної точки.....64
4. Принцип Д'Аламбера для системи точок.....65
5. Визначення сили інерції матеріальної точки.....68
6. Головний вектор та головний момент сил інерції системи матеріальних точок.....68
7. Контрольні запитання.....70

Тема 4.3. Прямолінійні коливання матеріальної точки

Лекція 13.....72

1. Вступ. Класифікація коливань.....72
2. Вільні коливання матеріальної точки.....72

Лекція 14.....76

3. Вільні коливання з урахуванням сили опору.....76
4. Період та амплітуда вільних згасаючих коливань.....80

Лекція 15.....81

5. Вимушені коливання без врахування сил опору.....81
 - 5.1. Виведення диференціального рівняння вимушених коливань...81
 - 5.2. Випадок $\omega \neq \omega_0$83
 - 5.3. Випадок $\omega \approx \omega_0$. Явище биття.....84
 - 5.4. Випадок $\omega = \omega_0$. Явище резонансу.....86

Лекція 16.....87

6. Вимушені коливання з урахуванням сил опору.....87

6.1 Диференціальне рівняння вимушених коливань.....	87
6.2 Амплітудно-частотна характеристика.....	90
6.3 Фазо-частотна характеристика.....	92
7. Контрольні запитання.....	93
Тема 4.4. Динаміка відносного руху матеріальної точки	
Лекція 17.....	95
1. Динамічне рівняння відносного руху точки.....	95
Лекція 18.....	98
2. Окремі випадки відносного руху точки.....	98
3. Приклад.....	99
4. Контрольні запитання.....	101
Додатки.....	102
1. Таблиця інтегралів деяких елементарних функцій.....	102
2. Методика розв'язання звичайного лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.....	103
Список літератури.....	105

Вступ

Представлений конспект лекцій відповідає кредитному модулю «Теоретична механіка-2» (Кінематика твердого тіла та динаміка точки) дисципліни «Теоретична механіка» спеціальності 133 «Галузеве машинобудування». Для опанування матеріалу, наведеного у конспекті лекцій, згідно робочої програми даного кредитного модуля відводиться 36 аудиторних лекційних годин та 63 години самостійної роботи студентів.

Кредитний модуль «Теоретична механіка-2» є частиною дисципліни Теоретична механіка, у якому вивчають основні поняття та закони механіки; методи і способи визначення кінематичних характеристик складних рухів твердих тіл та окремих їх точок, складання і розв'язання диференціальних рівнянь руху вільної та невільної матеріальної точки, характеристики коливального руху точки.

Вивчення кредитного модуля «Теоретична механіка-2» базується на широкому використанні знань зі статички та кінематики, математичних методів диференціальних та інтегральних обчислень, теорії диференціальних рівнянь, постановки задачі Коші і тому його вивчення вимагає наявності базових знань з елементарної і вищої математики, нарисної геометрії, загальної фізики.

Мета конспекта лекцій – дати студентам теоретичні знання і практичні уміння в галузях: визначення кінематичних параметрів плоскопаралельного, сферичного та складного руху твердого тіла, побудови математичної моделі та складання диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, оволодіти методами їх розв'язання, запису початкових та граничних умов її руху, дослідження прямолінійних коливань точки.

Структурно конспект включає такі частини дисципліни «Теоретична механіка» як «Кінематика твердого тіла» та «Динаміка точки», які поділено на сім тем. Нумерація пунктів відбувається в межах однієї теми. Нумерація формул та рисунків відбувається в межах однієї лекції. Конспект лекцій включає 18 лекцій. В кінці кожної теми подано контрольні питання для закріплення отриманих знань. Лекції 1-10 та 13-16 укладено Кришталем В. Ф., лекції 11-12 та 17-18 укладено Губською В. В.

РОЗДІЛ 2. КІНЕМАТИКА

Тема 3.1. Плоскопаралельний рух твердого тіла

Лекція 1.

1. Кінематичний закон плоскопаралельного руху тіла

Плоскопаралельним (або *плоским*) називається такий рух твердого тіла, при якому всі його точки рухаються у площинах, паралельних деякій даній площині.

Приклади плоскопаралельного руху (ППР) часто зустрічаються в техніці: кочення без ковзання циліндричного колеса, рух шатуна кривошипно-шатунного механізму.

Припустимо, що тіло D здійснює ППР паралельно площині Axy прямокутної системи координат $Axyz$ (рис. 1.1). Розглянемо переріз тіла S , паралельний до площини Axy . Відрізок $[OB]$, який є перпендикулярним до перерізу S , здійснює поступальний рух, тобто, всі кінематичні характеристики точок, що лежать на цьому відрізку, будуть тотожні. Теж саме можна сказати про точки відрізка $[MC]$. Тіло D можна подати як сукупність вказаних відрізків. Звідси робимо висновок, що для вивчення руху всього тіла досить досліджувати як рухається переріз цього тіла S , що утворює деяку плоску фігуру. Зазначимо, відрізок $[OM]$ належить перерізу.

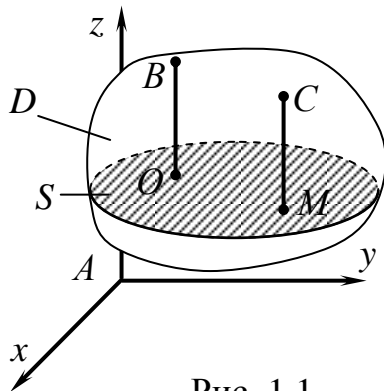


Рис. 1.1

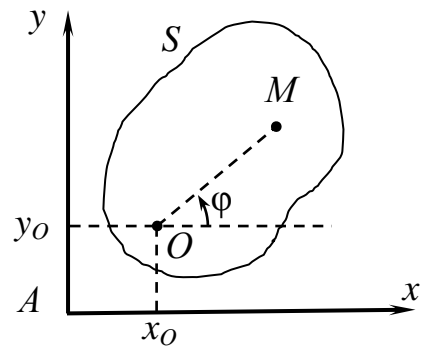


Рис. 1.2

Положення плоскої фігури в площині Axy визначається положенням будь-якого проведеного на цій фігурі відрізка OM (рис. 1.2). У свою чергу, положення відрізка OM визначається координатами x_0 , y_0 точки O та величиною кута φ між відрізком OM і віссю x . Точку O , яку вибрано для визначення положення плоскої фігури, називають *полюсом*.

Закон руху плоскої фігури в її площині, і, відповідно, плоскопаралельного руху твердого тіла у системі координат $Axyz$ визначається трьома рівняннями:

$$x_0 = x(t), \quad y_0 = y(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (1.1)$$

Вирази (1.1) називаються *кінематичним законом плоскопаралельного руху* твердого тіла.

Аналізуючи залежності (1.1), можна зробити висновок, що кут повороту плоскої фігури не залежить від вибору полюса. Це означає, що рух плоскої фігури в її площині є сукупність двох рухів: поступального руху, при якому всі точки рухаються так само, як і полюс O , і обертального руху навколо цього полюса (при цьому фігура обертається навколо осі, що проходить через точку O перпендикулярно площині руху фігури). На цьому ґрунтується створення математичної моделі ППР твердого тіла.

Основними кінематичними характеристиками плоскопаралельного руху твердого тіла є швидкість і прискорення полюса та кутова швидкість і кутове прискорення тіла.

Як полюс можна вибрати будь-яку точку фігури. При зміні точки, вибраної за полюс, характеристики поступальної складової руху змінюються, а характеристики обертальної складової руху залишаються незмінними (оскільки яка-завгодно пряма перерізу, паралельного площині руху буде повертатись на один і той же кут). Відповідно до цього вектори кутової швидкості тіла та кутового прискорення будуть вільними векторами.

2. Розподіл швидкостей точок плоскої фігури

Як зазначалося раніше, плоскопаралельний рух тіла (плоскої фігури) можна подати як сукупність двох рухів: поступального руху разом з полюсом і обертального руху навколо полюса. Відповідно до цього можна сформулювати теорему:

Швидкість будь-якої точки M тіла (плоскої фігури), яке виконує плоскопаралельний рух, дорівнює геометричній (векторній) сумі швидкості довільно вибраної точки O , що прийнята за полюс, і швидкості обертального руху точки M навколо вибраного полюса, тобто

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{OM}. \quad (1.2)$$

При цьому швидкість \vec{v}_{OM} визначається за величиною і напрямом так само, якби тіло здійснювало обертальний рух навколо нерухомої осі, що проходить через точку O , тобто

$$\vec{v}_{OM} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}, \quad (1.3)$$

де $v_{OM} = \omega \cdot OM$, $\vec{v}_{OM} \perp \overrightarrow{OM}$.

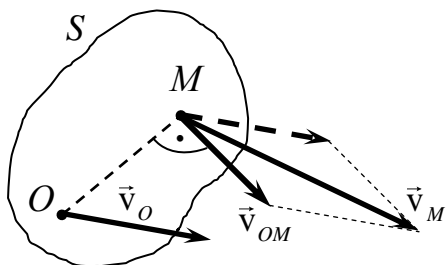


Рис. 1.3

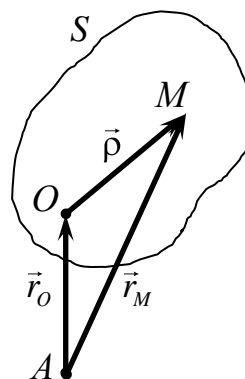


Рис.1.4

Таким чином, швидкість будь-якої точки M тіла визначається, відповідно до рівності (1.2), діагоналю паралелограма, побудованого на векторах \vec{v}_O і \vec{v}_{OM} , як на сторонах (рис. 1.3).

Доведення. Визначимо радіус-вектор точки M відносно полюса A наступним чином: $\vec{r}_M = \vec{r}_O + \vec{\rho}$, де $\vec{r}_M = \overrightarrow{AM}$, $\vec{r}_O = \overrightarrow{AO}$, $\vec{\rho} = \overrightarrow{OM}$ (рис.1.4).

Далі візьмемо похідну за часом від лівої та правої частини цієї формули: $\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}$. За означенням швидкості точки маємо: $\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}_M$,

$\frac{d\vec{r}_O}{dt} = \vec{v}_O$, тобто відповідні похідні – це швидкості точок O та M . Оскільки

вектор $\vec{\rho} = \overrightarrow{OM}$ визначає положення точки M відносно полюса O , то похідна $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ визначає швидкість точки M відносно полюса O , тобто $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_{OM}$.

Враховуючи, що точка M разом з тілом виконує обертальний рух навколо полюса O , отримаємо $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_{OM} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}$.

Таким чином, отримаємо $\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{OM} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}$.

Наслідки до теореми.

1. *Теорема Грасхгофа: Проекції швидкостей двох різних точок тіла на пряму, яка з'єднує ці точки, рівні між собою.*

Припустимо, що дано дві довільні точки A і B твердого тіла. Тоді, обираючи за полюс точку A , справедлива формула $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}$, відповідно до якої має місце побудова, зображена на рис. 1.5. Проектуючи обидві частини цієї векторної рівності на пряму AB , з урахуванням, що вектор \vec{v}_{AB} перпендикулярний прямій AB , знаходимо

$$\text{пр}_{AB} \vec{v}_B = \text{пр}_{AB} \vec{v}_A,$$

або

$$v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha. \quad (1.4)$$

Зрозуміло, що проекції векторів мають однакові знаки.

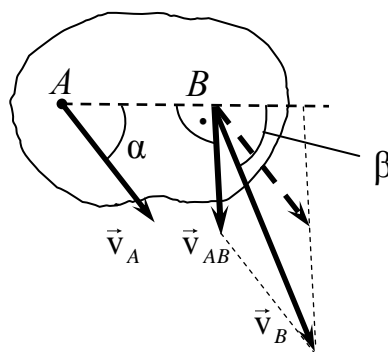


Рис. 1.5

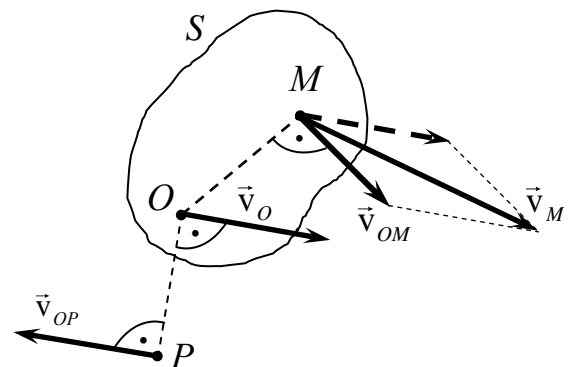


Рис. 1.6

2. *Миттєвий центр швидкостей*. Як випливає з рис.1.3, можна знайти точку у площині руху плоскої фігури, яка матиме в даному положенні швидкість нуль. Дійсно, для точки P , для якої виконується умова $\vec{v}_{OP} = -\vec{v}_O$ (рис.1.6), можна записати $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{v}_{OP} = \vec{v}_O + (-\vec{v}_O) = 0$. Така точка називається *миттєвий центр швидкостей* (МЦШ). Якщо в цій точці розмістити полюс, то розподіл швидкостей інших точок тіла відповідає обертальному руху тіла навколо МЦШ. Тобто, МЦШ можна назвати також миттєвим центром обертань. Вісь обертання тіла, яка проходить через МЦШ називається миттєвою віссю обертання. Вектор кутової швидкості тіла, у цьому випадку, називають вектором миттєвої кутової швидкості $\vec{\omega}_{OP}$.

3. Способи визначення миттєвого центра швидкостей.

а) Аналітичний спосіб.

Нехай для фігури S , яка виконує плоскопаралельний рух відома швидкість \vec{v}_A точки A та кутова швидкість $\vec{\omega}$ (рис.1.7).

Виберемо за полюс точку P , яка є шуканим МЦШ, і на підставі теореми про розподіл швидкостей запишемо:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{PA},$$

де $\vec{v}_{PA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PA}$, причому $\vec{v}_{PA} \perp \overrightarrow{PA}$.

Оскільки швидкість полюса P в даний момент часу дорівнює нулю $\vec{v}_P = 0$, то права частина теореми представляється одним доданком \vec{v}_{PA} :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{PA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PA}.$$

Звідси визначимо $PA = v_A / \omega$.

Таким чином, для визначення МЦШ, перпендикулярно до вектора \vec{v}_A через точку A проводимо пряму l . Повертаючись від вектора швидкості \vec{v}_A проти стрілки годинника, що відповідає напрямку вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$, відкладаємо на прямій l відрізок PA . Точка P є шуканим МЦШ.

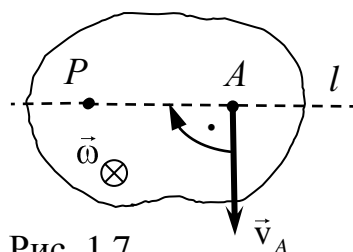


Рис. 1.7

Зазначимо, що миттєвий центр швидкостей може бути розташований як на самій фігурі, так і поза її межами.

б) Графічний (геометричний) спосіб.

Нехай задано швидкість точки A і пряма l вздовж якої рухається точка B деякої плоскої фігури (рис.1.8). У цьому випадку миттєвий центр швидкостей визначається як точка перетину перпендикулярів (рис.1.9),

проведених з точок A і B до вектора швидкості точки A та напрямку швидкості точки B . Така побудова ґрунтується на тому, що з виразів для векторів швидкостей точок $\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{PA}$, $\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{PB}$, випливає: $\vec{v}_A \perp \vec{PA}$, $\vec{v}_B \perp \vec{PB}$.

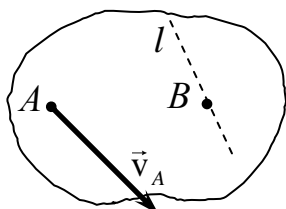


Рис.1.8

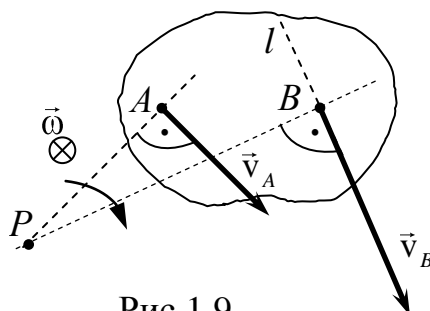


Рис.1.9

Вказані формули дозволяють записати співвідношення:

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}, \quad (1.5)$$

з якого визначається величина кутової швидкості плоскої фігури та швидкості точки B . Напрямок кутової швидкості можна визначити за напрямом швидкості точки A – з рисунка випливає, що вектор $\vec{\omega}$ напрямлений перпендикулярно до площини рисунка від читача. Цей напрям відповідає повороту плоскої фігури навколо МЦШ за годинниковою стрілкою.

в) Частинні випадки. Припустимо, що вектори швидкостей точок A і B плоскої фігури паралельні і протилежні (рис. 1.10, а), різні співнапрямлені (рис. 1.10,б) та рівні (рис. 1.10,в).

У перших двох випадках МЦШ визначається як точка перетину прямої, що проходить через кінці векторів швидкостей та прямої AB , до якої перпендикулярні вектори швидкостей. Напрямок кутової швидкості визначається на підставі напрямку швидкостей, а величина визначається з формули (1.5).

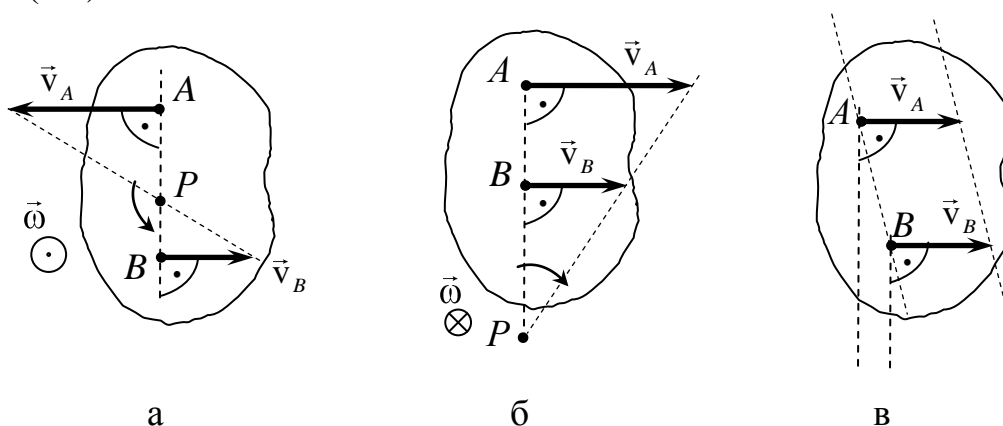


Рис. 1.10.

У третьому випадку, коли швидкості точок A та B паралельні і пряма AB не перпендикулярна \vec{v}_A , миттєвий центр швидкостей знаходиться в

нескінченності (перпендикуляри до швидкостей паралельні). Це означає, що кутова швидкість обертання фігури $\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_A}{\infty} = 0$ і швидкості точок A , B та інших точок рівні. Такий рух плоскої фігури називають *миттєво поступальним*.

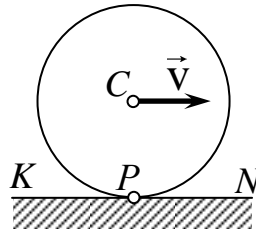


Рис. 1.11

г) Плоскопаралельний рух тіла здійснюється шляхом кочення без ковзання по нерухомій поверхні KN (рис. 1.11). У цьому випадку МЦШ визначається як точка дотику P тіла і поверхні.

Лекція 2.

4. Теорема Пуансо

Сукупність миттєвих центрів швидкостей, віднесених до нерухомої системи координат, називається *нерухомою центроїдою*. Сукупність миттєвих центрів швидкостей, віднесених до рухомої системи координат, називається *рухомою центроїдою*. Так, на рис. 1.11 нерухомою центроїдою є пряма KN , а рухомою – коло радіуса CP .

Теорема. При плоскопаралельному русі тіла, рухома центроїда котиться по нерухомій без ковзання.

5. План швидкостей

Планом швидкостей називається креслення, за допомогою якого графічним способом визначаються лінійні швидкості точок тіла при плоскопаралельному русі.

Основою для побудови плану швидкостей є теорема про розподіл швидкостей (1.2).

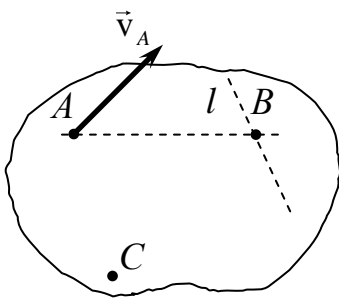


Рис.2.1, а

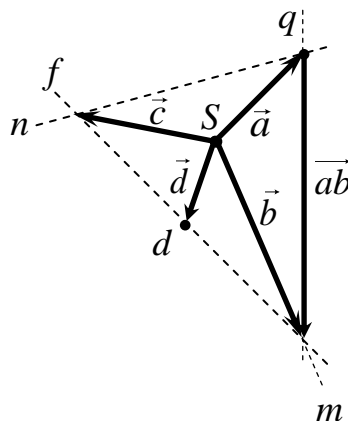


Рис.2.1, б

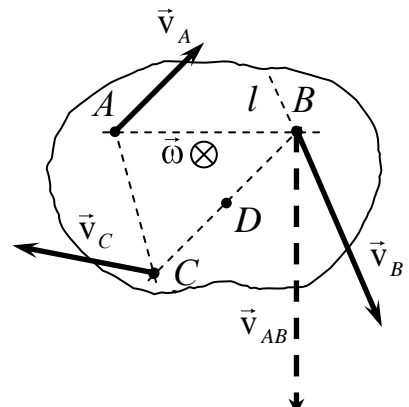


Рис.2.1, в

Визначимо швидкості всіх точок фігури D (рис. 2.1,а), якщо відомі: вектор швидкості \vec{v}_A точки A і пряма l , вздовж якої напрямлений вектор швидкості точки B .

Скористаємось формулами (1.2) і (1.3). Визначимо спочатку швидкість точки B . Оберемо за полюс точку A . Тоді

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}; \quad (a)$$

$$\vec{v}_{AB} \perp AB. \quad (b)$$

Будуємо рівність (a) за відомим вектором \vec{v}_A , напрямом вектора \vec{v}_B ($\vec{v}_B \parallel l$) і напрямом \vec{v}_{AB} ($\vec{v}_{AB} \perp AB$). Від довільної точки S площини (рис. 2.1,б) у заданому масштабі відкладаємо вектор \vec{a} ($\vec{a} = \vec{v}_A$). Через кінець цього вектора проводимо пряму q перпендикулярну до прямої AB . Далі, через точку S проводимо пряму t паралельну до прямої l . Точка перетину прямих l та q визначає кінець векторів швидкостей \vec{v}_B та \vec{v}_{AB} . З отриманого трикутника дістанемо

$$\vec{b} = \vec{v}_B; \quad \vec{ab} = \vec{v}_{AB}. \quad (c)$$

План швидкостей дозволяє визначити кутову швидкість плоскої фігури. У рівності (a) $\vec{v}_{AB} = \vec{\omega} \times \vec{AB}$, звідки отримаємо величину $\omega = \frac{v_{AB}}{AB} = \frac{ab}{AB}$. Напрямок кутової швидкості знаходимо перенесенням вектора $\vec{v}_{AB} = \vec{ab}$ у точку B на фігурі (рис. 2.1,в). Умовний поворот фігури навколо полюса A , який відповідає напрямку \vec{v}_{AB} , здійснюється за стрілкою годинника. Це означає, що вектор $\vec{\omega}$ напрямлений від читача.

Для визначення швидкості довільної точки C , з'єднаємо її прямими лініями з точками A та B (рис. 2.1,в). Послідовно виберемо полюс в точках A і B . Отримаємо:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{AC}, \quad (d)$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{BC}. \quad (e)$$

На плані швидкостей через кінці векторів \vec{a} та \vec{b} проводимо прямі n та f , паралельні швидкостям \vec{v}_{AC} і \vec{v}_{BC} (які відповідно перпендикулярні до прямих AC і BC): $n \perp AC$, $f \perp BC$. Точка перетину прямих n і f визначає кінець вектора $\vec{c} = \vec{v}_C$. Початок вектора $\vec{c} = \vec{v}_C$ знаходиться в точці S (рис.2.1,б).

Як видно з побудови, трикутник утворений прямими qnf на плані швидкостей подібний до $\triangle ABC$ плоскої фігури і повернутий відносно нього на кут $\pi/2$. Ця властивість дозволяє за допомогою плану швидкостей визначити швидкість довільної точки плоскої фігури. Зокрема, для точки D , яка ділить сторону BC навпіл, швидкість $\vec{d} = \vec{v}_D$ визначається як вектор проведений з точки S до точки d на прямій f (дана пряма проходить через кінці векторів $\vec{b} = \vec{v}_B$ та $\vec{c} = \vec{v}_C$).

6. Розподіл прискорень точок плоскої фігури при плоскопаралельному русі

Розподіл прискорень точок тіла визначається наступною теоремою: *прискорення будь-якої точки тіла при плоскопаралельному русі дорівнює векторній сумі прискорення довільно вибраного полюса і прискорення обертального руху точки навколо полюса:*

$$\vec{w}_M = \vec{w}_O + \vec{w}_{OM} \quad (2.1)$$

Прискорення обертального руху точки \vec{w}_{OM} навколо полюса O складається з двох доданків: обертального прискорення і доцентрового прискорення

$$\vec{w}_{OM} = \vec{w}_{OM}^{об} + \vec{w}_{OM}^{дц} \quad (2.2)$$

де

$$\vec{w}_{OM}^{об} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM}, \quad (2.3)$$

$$\vec{w}_{OM}^{дц} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}). \quad (2.4)$$

Вказані формули можна отримати диференціюванням виразу (1.2) з урахуванням (1.3):

$$\frac{d}{dt} \vec{v}_M = \frac{d}{dt} \vec{v}_O + \frac{d}{dt} \vec{v}_{OM} \quad (2.5)$$

Тут $\frac{d}{dt} \vec{v}_M = \vec{w}_M$, $\frac{d}{dt} \vec{v}_O = \vec{w}_O$, $\frac{d}{dt} \vec{v}_{OM} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM})$. Оскільки $\frac{d}{dt} \vec{\omega} = \vec{\varepsilon}$,

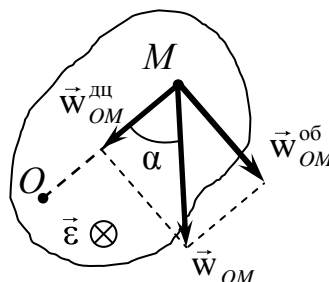
$\frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} = \vec{v}_{OM} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}$, отримаємо для третьої похідної:

$$\frac{d}{dt} \vec{v}_{OM} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}). \quad (2.6)$$

Перший доданок правої частини (2.6) є вектор направлений перпендикулярно до векторів $\vec{\varepsilon}$ та \overrightarrow{OM} (рис.2.2), тобто по дотичній до кола радіусом OM центром якого є точка O . За аналогією з обертанням тіла навколо нерухомої осі, цей вектор називається вектором обертального прискорення точки M відносно полюса O :

$$\vec{w}_{OM}^{об} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM}.$$

Рис. 2.2



Використовуючи відому формулу векторної алгебри $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, другий доданок (2.6) можна записати так

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}) = -\omega^2 \overrightarrow{OM}$. Цей вектор буде спрямований від точки M до точки O та відповідати доцентровому прискоренню точки M в її обертанні навколо полюса O : $\vec{w}_{OM}^{лц} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM})$. Таким чином, векторна сума $\vec{w}_{OM} = \vec{w}_{OM}^{об} + \vec{w}_{OM}^{лц}$ визначає прискорення обертального руху точки M навколо полюса O .

Величини векторів $\vec{w}_{OM}^{об}$ та $\vec{w}_{OM}^{лц}$ визначаються з урахуванням напрямків вектора кутового прискорення $\vec{\epsilon}$ та кутової швидкості $\vec{\omega}$, які перпендикулярні до радіуса-вектора \overrightarrow{OM} :

$$w_{OM}^{об} = \epsilon \cdot OM, \quad w_{OM}^{лц} = \omega^2 \cdot OM.$$

Таким чином, теорема про розподіл прискорень точок тіла, яке здійснює плоскопаралельний рух доведена.

Слід зауважити, що особливості вектора \vec{w}_{OM} (рис. 2.2) визначаються наступними наслідками доведеної теореми:

1) Кут α між вектором \vec{w}_{OM} і прямою OM може змінюватись в межах від 0 до $\pi/2$. Його величину можна знайти за формулою

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w_{OM}^{об}}{w_{OM}^{лц}} = \frac{\epsilon}{\omega^2}, \quad (2.7)$$

з якої випливає, що кут α не залежить від вибору полюса та точки M , а залежить від кінематичних характеристик обертального руху тіла.

Кут α відкладається від вектора \vec{w}_{OM} до прямої OM за напрямком обертання плоскої фігури, якщо $\vec{\omega}$ і $\vec{\epsilon}$ співнапрямлені, і в протилежному напрямку, якщо $\vec{\omega}$ і $\vec{\epsilon}$ мають різні знаки.

2) Модуль вектора \vec{w}_{OM} дорівнює

$$w_{OM} = OM \cdot \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}.$$

Звідси отримуємо

$$\frac{w_{OM}}{OM} = \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}, \quad (2.8)$$

тобто відношення прискорення обертального руху точки навколо полюса до відстані між даною точкою і полюсом не залежить від вибору полюса та самої точки, а залежить від кінематичних характеристик обертального руху тіла.

7. Миттєвий центр прискорень та способи його визначення

З теореми про розподіл прискорень точок плоскої фігури (2.1) випливає, що у випадках, коли ω і ϵ одночасно не дорівнюють нулю, існує така точка площини руху, прискорення якої у даний момент часу дорівнює нулю. Дійсно, можна підібрати точку Q , для якої виконується умова $\vec{w}_O = -\vec{w}_{OQ}$ (рис.2.3). Тоді $\vec{w}_Q = 0$. Ця точка називається *миттєвим центром прискорень* (МЦП). Якщо розмістити полюс у миттєвому центрі прискорень, то розподіл прискорень кожної точки плоскої фігури відповідає обертальному руху навколо МЦП. Тобто, вектор прискорення

\vec{w}_M довільної точки M утворює визначений за (2.7) кут α з прямою, що з'єднує точку M з миттєвим центром прискорень.

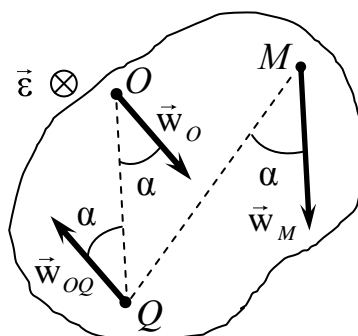


Рис.2.3

Розглянемо способи визначення миттєвого центра прискорень.

1) *Аналітичний спосіб*. Нехай відоме прискорення \vec{w}_A точки A (рис.2.4,а), а також $\vec{\omega}$ і $\vec{\epsilon}$. За (2.7) обчислимо кут α і, згідно з напрямом $\vec{\epsilon}$, через точку A проведемо пряму AQ , яка утворює з вектором \vec{w}_A кут α (рис.2.4,б). У випадку напрямку вектора $\vec{\epsilon}$ до читача, кут α відкладається від вектора \vec{w}_A проти руху стрілки годинника. Якщо вектор $\vec{\epsilon}$ напрямлений від читача, кут α відкладається від вектора \vec{w}_A за рухом стрілки годинника. Положення миттєвого центра прискорень на побудованій прямій знаходимо, обчисливши відстань AQ з формули (2.8):

$$AQ = w_A / \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}.$$

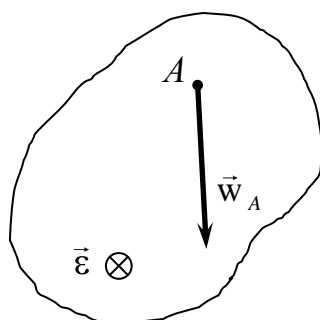


Рис.2.4, а

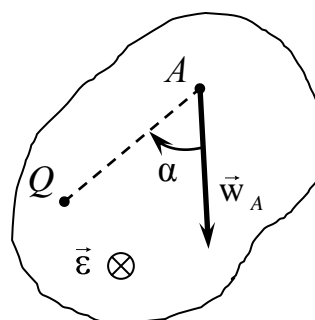


Рис.2.4, б

2) *Графічний спосіб*. Припустимо, що відомі прискорення \vec{w}_A і \vec{w}_B двох точок A і B плоскої фігури (рис.2.5,а). Для визначення МЦП – точки Q , визначимо кут α , який не залежить від вибору полюса. Обираємо точку A за полюс. На підставі (2.1) можна записати:

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}_{AB},$$

$$\text{звідки } \vec{w}_{AB} = \vec{w}_B - \vec{w}_A = \vec{w}_B + (-\vec{w}_A).$$

Кут α визначиться як кут між вектором \vec{w}_{AB} і прямою AB (рис.2.5,б). Далі, проведемо з точок A та B прямі AQ і BQ , які утворюють кути α з векторами \vec{w}_A і \vec{w}_B , причому поворот від прискорень \vec{w}_A і \vec{w}_B до прямих AQ і BQ здійснюється в тому ж напрямку як і поворот від прискорення \vec{w}_{AB} до прямої AB . Точка Q перетину прямих AQ і BQ – шуканий миттєвий центр прискорень.

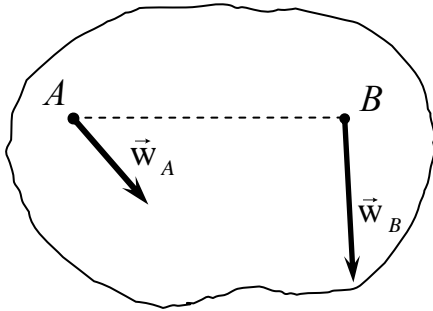


Рис.2.5, а

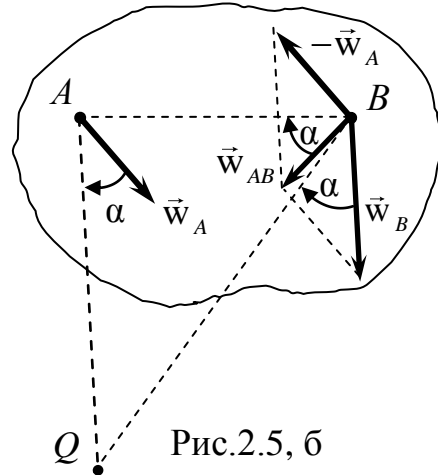


Рис.2.5, б

Знаючи положення миттєвого центра прискорень та прискорення однієї точки плоскої фігури, можна знайти напрями і модулі прискорень довільних її точок. Наприклад, прискорення точки C знаходимо, з'єднавши точку C з точкою Q і відкладаючи від цього відрізка кут α у напрямі, оберненому до напрямку найкоротшого переходу від \vec{w}_C до AC . На підставі (2.8) прискорення всіх точок плоскої фігури при плоскопаралельному русі зв'язані між собою пропорцією

$$\frac{w_A}{AQ} = \frac{w_B}{BQ} = \frac{w_C}{CQ} = \dots = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.9)$$

Таким чином, миттєвий центр прискорень дає змогу повністю вирішити питання про розподіл прискорень точок при плоскопаралельному русі твердого тіла.

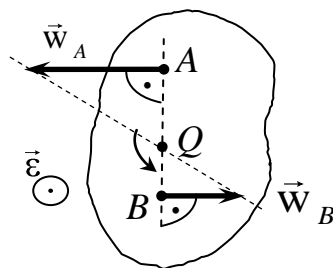


Рис. 2.6, а

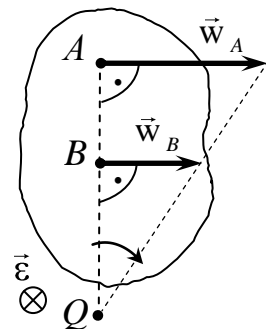


Рис. 2.6, б

в) *Частинні випадки.* Припустимо, що вектори прискорень точок A і B плоскої фігури паралельні і протилежні (рис. 2.6,а) або різні співнаправлені (рис. 2.6,б).

У цих двох випадках МЦП, точка Q , визначається як точка перетину прямої, що проходить через кінці векторів прискорень та прямої AB , до якої перпендикулярні вектори прискорень. Оскільки кут α дорівнює $\pi/2$, то на підставі (2.7) отримаємо $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \rightarrow \infty$, звідки $\omega = 0$. Величину кутового прискорення можна визначити з формули (2.8), а його напрям визначається на підставі напрямку прискорень.

Припустимо, що вектори прискорень точок A і B плоскої фігури лежать на одній прямій, паралельні і протилежні (рис. 2.7,а) або різні співнаправлені (рис. 2.7,б).

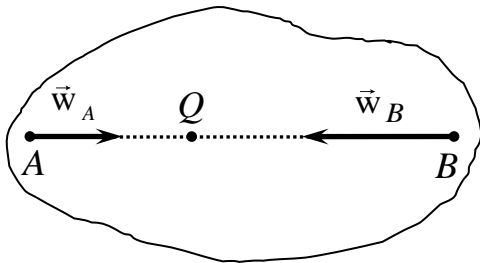


Рис. 2.7, а

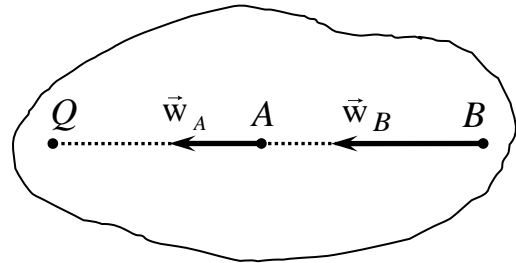


Рис. 2.7, б

У цих двох випадках МЦП, точка Q , визначається як точка прямої AB , відстань до якої знаходиться за формулою (2.9):

$$\frac{AQ}{BQ} = \frac{w_A}{w_B}.$$

Оскільки кут $\alpha = 0$, то на підставі (2.7) отримаємо $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 0 = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 0$, звідки $\varepsilon = 0$. Величину кутової швидкості можна визначити з формули (2.8)

$$\omega = \frac{w_A}{AQ} = \frac{w_B}{BQ}.$$

Лекція 3.

8. Приклад.

Багатоланковий механізм в певний момент часу займає положення, яке зображено на рис.3.1,а. Кутова швидкість кривошипа OA $\omega_0 = 10$ рад/сек, $OA = 2$ см, $AB = 50$ см, $BC = 10$ см, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 12^\circ$. Знайти швидкість і

прискорення точки B , а також кутову швидкість і кутове прискорення ланки AB , в цей момент часу.

Розв'язання: Швидкість точки A знайдемо, розглядаючи обертальний рух ланки OA :

$$v_A = \omega_0 \cdot OA = 200 \text{ см/с}.$$

Вектор \vec{v}_A напрямлений перпендикулярно до ланки OA в сторону, що відповідає напрямку її повороту (проти стрілки годинника).

Для визначення швидкості точки B і кутової швидкості ланки AB будемо її миттєвий центр швидкостей: в точках A і B проводимо прямі AP і BP , перпендикулярні до векторів \vec{v}_A і напрямку руху точки B відповідно (рис.3.1,б).

Точка P перетину цих прямих – миттєвий центр швидкостей ланки AB . Величину швидкості точки B і кутової швидкості ланки ω_{AB} знаходимо з співвідношення

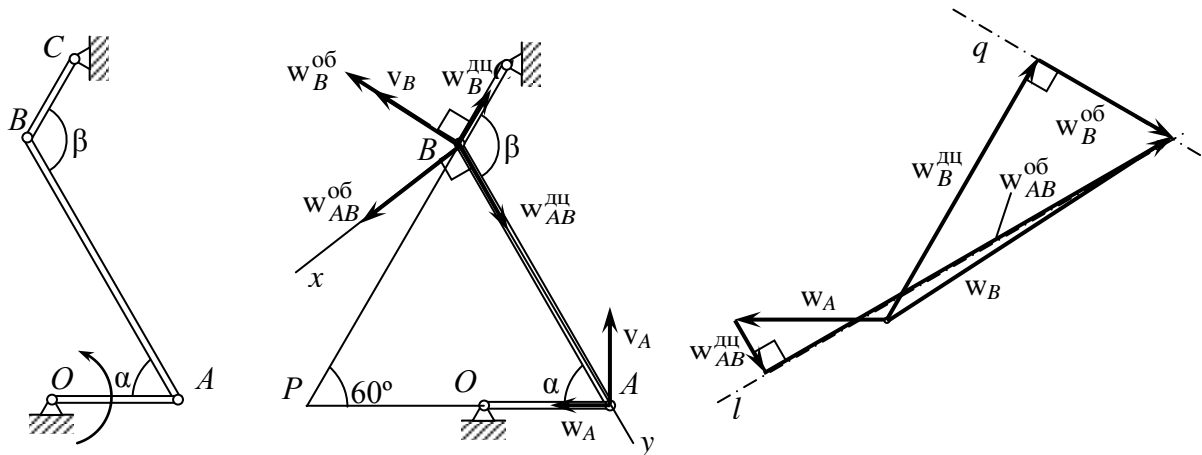


Рис.3.1,а

Рис.3.1,б

Рис.3.1,в

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \omega_{AB}. \quad (1)$$

Напрямок повороту ланки AB навколо миттєвого центра швидкостей відповідає напрямку вектора швидкості \vec{v}_A , вектор кутової швидкості $\vec{\omega}_{AB}$ ланки AB напрямлений перпендикулярно до площини рисунка від читача. Вектор \vec{v}_B перпендикулярний до прямої PB і узгоджується за напрямком з поворотом шатуна AB .

Нескладні геометричні розрахунки дозволяють знайти $AP=AB=50$ см, $BP=50$ см. Тоді з (1):

$$v_B = 200 \text{ см/с}; \quad \omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = 4 \text{ рад/с}.$$

За означенням кутового прискорення, для шатуна маємо $\varepsilon_{AB} = \dot{\omega}_{AB}$. Але кутову швидкість ω_{AB} визначено тільки для даного моменту часу і як функція часу вона невідома, оскільки у виразі

$$\varepsilon_{AB} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_A}{AP} \right) = v_A \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{AP} \right),$$

відстань AP до миттєвого центра швидкостей під час руху механізму змінюється за невідомим законом.

Тому визначимо спочатку прискорення точки B , після чого знайдемо ε_{AB} іншим способом.

Виберемо полюс в точці A і за теоремою про розподіл прискорень отримаємо

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}_{AB}^{об} + \vec{w}_{AB}^{лц}. \quad (2)$$

Оскільки ланка OA обертається рівномірно, то $w_{A\tau} = 0$ і прискорення точки A визначиться так:

$$\begin{aligned} \vec{w}_A &= \vec{w}_{A\tau} + \vec{w}_{An} = \vec{w}_{An}; \\ w_{An} &= \omega_0^2 \cdot OA = 2000 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Вектор \vec{w}_A напрямлений від точки A до точки O .

Вектор $\vec{w}_{AB}^{лц}$ має напрям від точки B до полюса A і дорівнює

$$w_{AB}^{лц} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 800 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{w}_{AB}^{об} = \vec{\varepsilon}_{AB} \times \overrightarrow{AB}$ перпендикулярний до ланки AB , але обчислити його величину неможливо, тому що наразі невідоме значення ε_{AB} .

Виберемо систему координат Bx і By з початком в точці B і запишемо рівність (2) в проекціях на осі Bx і By (напрямок $\vec{w}_{AB}^{об}$ вибираємо заздалегідь):

$$\begin{aligned} w_{Bx} &= w_{An} \sin \alpha + w_{AB}^{об}, \\ w_{By} &= -w_{An} \cos \alpha + w_{AB}^{лц}. \end{aligned} \quad (3)$$

Кількість невідомих у цій системі перевищує кількість рівнянь. Для складання додаткових рівнянь запишемо прискорення точки B відносно полюса C :

$$\vec{w}_B = \vec{w}_B^{об} + \vec{w}_B^{лц}, \quad (4)$$

де $\vec{w}_B^{об} = \vec{\varepsilon}_{CB} \times \overrightarrow{CB}$, $\vec{w}_B^{лц} = \vec{\omega}_{CB} \times \vec{\omega}_{CB} \times \overrightarrow{CB}$. $\vec{\varepsilon}_{CB}$, $\vec{\omega}_{CB}$ - кутове прискорення та кутова швидкість ланки CB . Кутову швидкість $\vec{\omega}_{CB}$ ланки CB визначимо на підставі співвідношення

$$\omega_{CB} = \frac{v_B}{CB} = 20 \text{ рад/с}.$$

Тоді

$$w_B^{лц} = \omega_{CB}^2 \cdot CB = 4000 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{w}_B^{лц}$ має напрям від точки B до полюса C .

Вектор $\vec{w}_B^{об}$ перпендикулярний до ланки CB , але обчислити його величину неможливо, оскільки невідоме значення кутового прискорення ϵ_{CB} .

Вважаючи, що вектор $\vec{w}_B^{об}$ напрямлений так, як показано на рис.3.1,б, спроектуємо рівність (4) на осі системи координат Bxy :

$$\begin{aligned} w_{Bx} &= w_B^{об} \cdot \cos 60^\circ - w_B^{лп} \cdot \cos 30^\circ, \\ w_{By} &= -w_B^{об} \cdot \sin 60^\circ - w_B^{лп} \cdot \sin 30^\circ. \end{aligned} \quad (5)$$

Оскільки ліві частини рівнянь (3) та (5) рівні, то рівними будуть і праві частини:

$$\begin{aligned} w_{An} \sin \alpha + w_{AB}^{об} &= w_B^{об} \cdot \cos 60^\circ - w_B^{лп} \cdot \cos 30^\circ, \\ -w_{An} \cos \alpha + w_{AB}^{лп} &= -w_B^{об} \cdot \sin 60^\circ - w_B^{лп} \cdot \sin 30^\circ. \end{aligned} \quad (6)$$

Розв'язуємо систему рівняння (6) відносно $w_{AB}^{об}$ та $w_B^{об}$:

$$\begin{aligned} w_B^{об} &= -1200\sqrt{3} \text{ см/с}^2, \\ w_{AB}^{об} &= -3600\sqrt{3} \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Від'ємні знаки в отриманих виразах означають, що дійсний напрям векторів знайдених прискорень протилежний до вказаного на рисунку.

Підстановка отриманих значень у рівняння (3) або (5) дозволяє знайти прискорення w_B :

$$\begin{aligned} w_{Bx} = w_{An} \sin \alpha + w_{AB}^{об} &= 1000\sqrt{3} - 3600\sqrt{3} = -2600\sqrt{3} \text{ см/с}^2, \\ w_{By} &= -w_{An} \cos \alpha + w_{AB}^{лп} = -1000 + 800 = -20 \text{ см/с}^2, \\ w_B &= \sqrt{w_{Bx}^2 + w_{By}^2} = 4507,8 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Зазначимо, що маючи значення $w_{AB}^{об}$ та $w_B^{об}$ знаходимо також модулі кутових прискорень ланок механізму:

$$\begin{aligned} \epsilon_{AB} &= \frac{w_{AB}^{об}}{AB} = 72\sqrt{3} \text{ рад/с}^2, \\ \epsilon_{CB} &= \frac{w_B^{об}}{CB} = 120\sqrt{3} \text{ рад/с}^2. \end{aligned}$$

Напрямок вектора кутового прискорення ϵ_{AB} визначається на підставі векторного добутку $\vec{w}_{AB}^{об} = \vec{\epsilon}_{AB} \times \vec{AB}$, і в данному випадку він напрямлений перпендикулярно до площини рисунка від читача.

Зазначимо, що спосіб за яким було визначено прискорення точки B називається аналітичним. Розв'язати задачу можна також графічним методом, побудувавши *план прискорень*. Для цього, згідно вибраного масштабу прискорень, будуємо рівність (2), в якій повністю відомі вектори \vec{w}_A і $\vec{w}_{AB}^{лп}$, а також відома пряма вздовж якої напрямлений вектор $\vec{w}_{AB}^{об}$ (рис.3.1,в). Від точки B відкладаємо послідовно вектор \vec{w}_A і вектор $\vec{w}_{AB}^{лп}$. Через кінець останнього проводимо пряму l перпендикулярну до ланки AB

(вона збігається з напрямком $\vec{w}_{AB}^{об}$). Далі будуємо рівність (4). Тут нам відомий вектор $\vec{w}_B^{лц}$ та пряма вздовж якої напрямлений вектор $\vec{w}_B^{об}$. Починаючи також з точки B , відкладаємо спочатку вектор $\vec{w}_B^{лц}$, а потім проводимо через його кінець пряму q перпендикулярну до ланки CB . Точка перетину K цієї прямої з прямою l визначає кінець вектора $\overrightarrow{BK} = \vec{w}_B$, який і є шуканим прискоренням точки B . На плані прискорень вектори \vec{w}_B , $\vec{w}_{AB}^{об}$ та $\vec{w}_B^{об}$ отримуємо в тому ж масштабі, що і вектори \vec{w}_A та $\vec{w}_{AB}^{лц}$.

9. Контрольні запитання

1. Як можна представити плоскопаралельний рух твердого тіла?
2. Дайте означення плоскопаралельного руху твердого тіла.
3. Які основні кінематичні характеристики плоскопаралельного руху твердого тіла?
4. Які кінематичні характеристики плоскопаралельного руху твердого тіла не залежать від вибору полюса?
5. Як визначається швидкість довільної точки плоскої фігури за теоремою про розподіл швидкостей?
6. Сформулюйте теорему Грасхгофа.
7. Що називається миттєвим центром швидкостей?
8. Як розподілені швидкості точок плоскої фігури відносно МЦШ?
9. Скільки миттєвих центрів швидкостей може мати плоска фігура у певний момент часу?
10. Які кінематичні характеристики плоскопаралельного руху твердого тіла треба задати для аналітичного визначення МЦШ?
11. Які кінематичні характеристики плоскопаралельного руху твердого тіла треба задати для графічного способу визначення МЦШ?
12. На якому співвідношенні ґрунтується побудова плану швидкостей?
13. Як визначити величину та напрям миттєвої кутової швидкості тіла з плану швидкостей?
14. У якому випадку рух плоскої фігури називають миттєво поступальним?
15. Що називається рухомою та нерухомою центроїдами?
16. Як визначається прискорення довільної точки плоскої фігури за теоремою про розподіл прискорень?
17. Що називається миттєвим центром прискорень?
18. Як розподілені прискорення точок плоскої фігури відносно МЦП?
19. Які кінематичні характеристики плоскопаралельного руху твердого тіла треба задати для аналітичного визначення МЦП?
20. Які кінематичні характеристики плоскопаралельного руху твердого тіла треба задати для графічного способу визначення МЦП?

Тема 3.2. Рух твердого тіла з нерухомою точкою (сферичний рух твердого тіла).

Лекція 4.

1. Рух твердого тіла навколо нерухомої точки

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої точки називається рух при якому тільки одна точка тіла увесь час залишається нерухомою.

Рух тіла, що має нерухому точку, можна розглядати як частинний випадок руху вільного твердого тіла.

Прикладом вказаного руху тіла є рух гіроскопа. Гіроскоп – важке тіло, яке обертається з досить великою кутовою швидкістю навколо певної осі. Слово «гіроскоп» в перекладі з грецької мови означає: гірос – обертання, скопейн – спостерігаю. Термін введено Жаном Леоном Фуко у 1852 р.

На рис.4.1 подано конструкцію гіроскопа з двохосьовим кардановим підвісом: а – зовнішнє карданове кільце з вертикальною віссю повороту, б – внутрішнє карданове кільце з горизонтальною віссю повороту, в – маховик (гіроскоп), який обертається з великою кутовою швидкістю навколо осі (головної осі), що закріплена на внутрішньому кардановому кільці.

Основними властивостями гіроскопа є:

- незмінність напрямку головної осі обертання в інерціальному просторі при поворотах основи;
- прецесія головної осі обертання при дії моменту сил, що намагається змінити напрям вказаної осі.

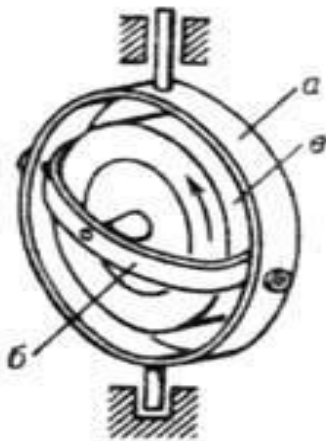


Рис.4.1

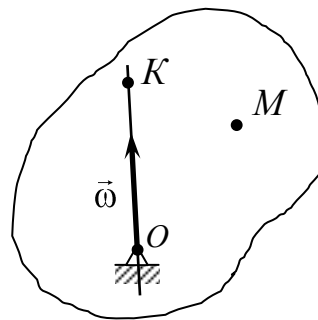


Рис.4.2

Зауважимо, що відома іграшка «дзига» також є гіроскопом.

Розглянемо деяке тверде тіло точка O якого нерухома. За теоремою про розподіл швидкостей точок вільного твердого тіла, швидкість довільної точки M тіла є сума швидкості полюса та швидкості обертального руху цієї точки навколо полюса

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{OM}. \quad (4.1)$$

Оберемо полюс в нерухомій точці O (рис.4.2). Тоді швидкість довільної точки такого тіла запишеться так

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}_{OM}. \quad (4.2)$$

Як відомо, усі точки осі обертання мають нульову швидкість. Припустимо, що точка K належить осі обертання. Тоді виконується умова $\vec{v}_K = 0$, з якої випливає $\vec{\omega} \parallel \overrightarrow{OK}$. Тобто вектор кутової швидкості напрямлений вздовж осі обертання тіла. Оскільки вісь обертання тіла з нерухомою точкою змінює свій напрямок, то вона називається *миттєвою віссю обертання*, а $\vec{\omega}$ - *вектором миттєвої кутової швидкості*.

Таким чином, миттєвою віссю обертання тіла називається вісь, швидкість усіх точок якої у даний момент часу дорівнює нулю.

Миттєва вісь обертання описує в просторі дві конічні поверхні.

Сукупність (геометричне місце) миттєвих осей обертання віднесених до нерухомої системи координат, називається *нерухомим аксоїдом*. Сукупність миттєвих осей обертання віднесених до рухомої системи координат, називається *рухомим аксоїдом*. Аксоїди мають спільну твірну.

Теорема Пуансо: *При обертальному русі тіла з нерухомою точкою рухомий аксоїд котиться по нерухомому без ковзання.*

2. Теорема Ейлера. Кути Ейлера.

Визначення параметрів, які дозволяють встановити положення тіла з нерухомою точкою, можна здійснити за **теоремою Ейлера**: *довільне переміщення тіла навколо нерухомої точки можна здійснити за допомогою трьох послідовних обертань навколо трьох перетинних осей, що проходять через нерухому точку.*

Продемонструємо цю теорему. Нехай осі прямокутної декартової системи координат $O\xi\eta\zeta$ є нерухомими, а осі системи координат $Ox_1y_1z_1$ – незмінно зв'язаними з тілом, тобто рухомими. В початковому положенні відповідні осі вказаних систем координат збігаються.

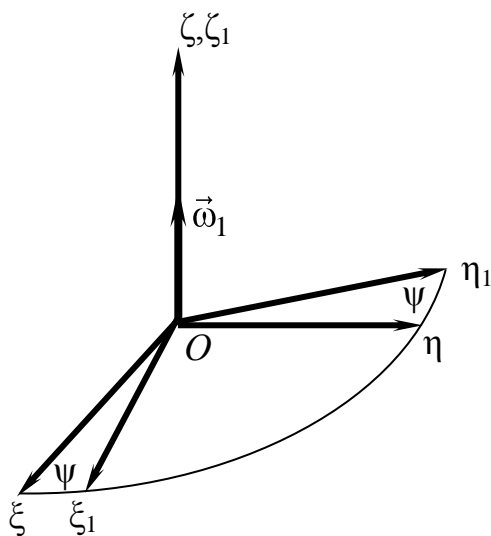


Рис.4.3

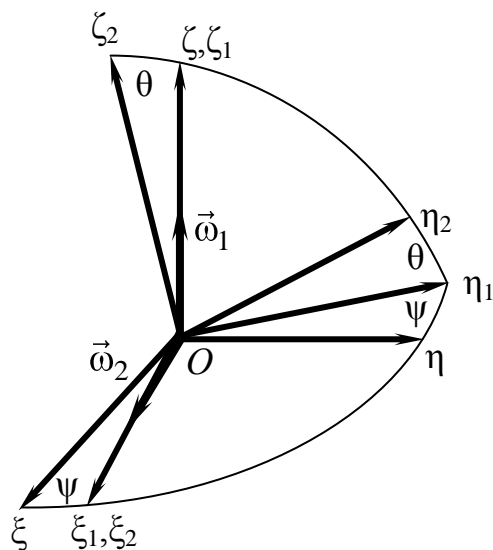


Рис.4.4

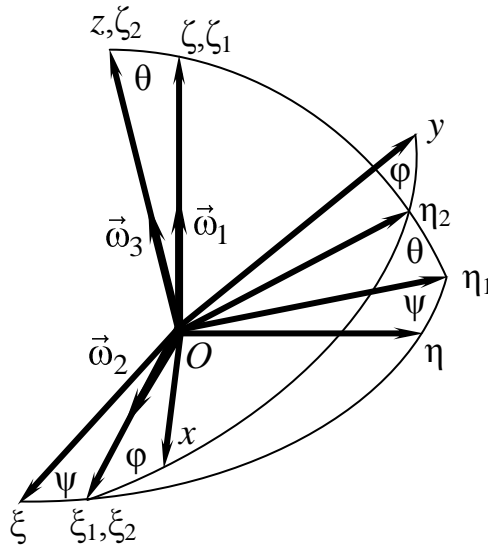


Рис.4.5

Перший поворот тіла (рис.4.3) виконаємо навколо осі $O\zeta$ на кут ψ . Кут ψ називається *кут прецесії*, а вісь $O\zeta$ – вісь прецесії. Нове положення тіла визначається осями $O\xi_1\eta_1\zeta_1$. Другий поворот тіла виконаємо (рис.4.4) навколо осі $O\xi_1$ (називається лінією вузлів) на кут θ , який називається *кут нутації*. У цьому випадку положення тіла визначається осями $O\xi_2\eta_2\zeta_2$. Третій поворот виконаємо (рис.4.5) навколо осі $O\zeta_2$ на кут ϕ (*кут власного обертання*).

Таким чином, положення тіла з нерухомою точкою у кожний момент часу визначається сукупністю трьох кутів, які називаються кутами Ейлера. Відповідно, *кінематичний закон руху тіла з нерухомою точкою* буде заданий, якщо кут прецесії (ψ), кут нутації (θ) і кут власного обертання (ϕ) будуть задані як функції часу:

$$\begin{aligned}\psi &= \psi(t); \\ \theta &= \theta(t); \\ \phi &= \phi(t).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Вектор миттєвої кутової швидкості тіла є геометричною сумою векторів кутових швидкостей, які відповідають кожному повороту, і визначається з виразу

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3.\tag{4.4}$$

Скористаємось тим, що вектори кутових швидкостей $\vec{\omega}_1 = \vec{k}\dot{\psi}$ та $\vec{\omega}_3 = \vec{k}_2\dot{\phi}$ лежать в одній площині ($O\eta_1\zeta_1\zeta_2$), яка перпендикулярна до осі $O\xi_1$, вздовж якої напрямлений вектор $\vec{\omega}_2 = \vec{i}_1\dot{\theta}$. Вектори \vec{k} , \vec{i}_1 , \vec{k}_2 - одиничні вектори відповідних осей повороту $O\zeta$, $O\xi_1$, $O\zeta_2$. Введемо вектор

$$\vec{\omega}_{13} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_3.$$

Модуль цього вектора дорівнює $\omega_{13}^2 = \omega_1^2 + \omega_3^2 + 2\omega_1\omega_3 \cos(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_3)$.
 Оскільки $\vec{\omega}_{13} \perp \vec{\omega}_2$ та $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_3 = \theta$, то

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + 2\omega_1\omega_3 \cos \theta. \quad (4.5)$$

3. Визначення напрямних косинусів.

Положення координатних осей $Oxyz$, зв'язаних з тілом, по відношенню до нерухомих осей $O\xi\eta\zeta$ або до осей $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ чи $O\xi_2\eta_2\zeta_2$, які відповідають вибраній послідовності поворотів, визначається відповідними напрямними косинусами. Їх можна знайти за однією з основних формул сферичної тригонометрії або користуючись матрицями переходу між системами координат.

3.1. Використання основної формули сферичної тригонометрії.

Фігура, що утворюється трьома дугами великих кіл на відповідній сферичній поверхні, називається сферичний трикутник (рис.4.6). Кутів величини відповідних плоских кутів a, b, c , які утворюються осями $O\xi, O\eta, O\zeta$, що виходять з центру сфери та перетинають її поверхню у вершинах сферичного трикутника є сторонами сферичного трикутника. Для цих сторін має місце теорема косинусів, яка є однією з основних формул сферичної тригонометрії:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A, \quad (4.6)$$

де A – лінійний кут двогранного кута, що лежить проти сторони a сферичного трикутника.

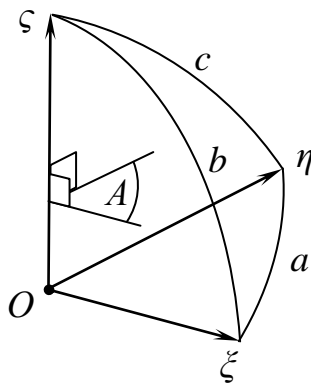


Рис.4.6

3.2. Використання матриць переходу.

Для встановлення зв'язку між координатами будь-якого вектора у різних системах координат потрібно визначити співвідношення для напрямних косинусів між осями цих систем координат. Зробимо це на прикладі деякого вектора $\vec{b} = \overrightarrow{OM}$. Під вектором \vec{b} можна розуміти вектори кутових швидкостей, радіуси-вектори точок, вектори прискорень.

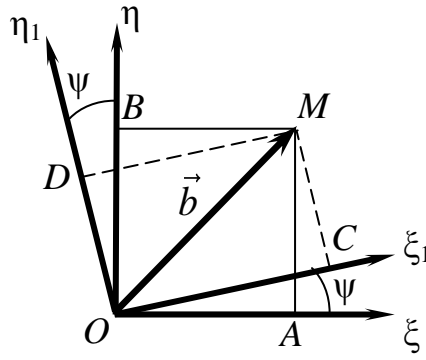


Рис.4.7

Нехай задано проекції цього вектора на осі (рис.4.7), наприклад, системи координат $O\xi\eta\zeta$: $\vec{b} = \{b_\xi, b_\eta, b_\zeta\}$. Виразимо проекції $\{b_{\xi_1}, b_{\eta_1}, b_{\zeta_1}\}$ цього вектора на осі іншої системи координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ через задані. На підставі рис. 4.7 можна записати:

$$\begin{aligned} b_{\xi_1} &= OC = OA \cdot \cos\psi + AM \cdot \sin\psi = b_\xi \cdot \cos\psi + b_\eta \cdot \sin\psi + b_\zeta \cdot 0, \\ b_{\eta_1} &= OD = -BM \cdot \sin\psi + OB \cdot \cos\psi = -b_\xi \cdot \sin\psi + b_\eta \cdot \cos\psi + b_\zeta \cdot 0, \\ b_{\zeta_1} &= b_\zeta. \end{aligned} \quad (4.6)$$

У матричній формі це співвідношення подається так

$$\vec{b}_{\xi_1\eta_1\zeta_1} = C_1(\psi) \vec{b}_{\xi\eta\zeta}, \quad (4.7)$$

де матриця

$$C_1(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

визначає поворот навколо осі $O\zeta$ на кут ψ .

Нехай $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - одиничні вектори системи координат $O\xi\eta\zeta$ та $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ - одиничні вектори системи координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$. Кожний рядок матриці $C_1(\psi)$ можна розглядати як напрямні косинуси одиничних векторів $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ нової системи координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ в системі координат $O\xi\eta\zeta$, тобто можна скласти таблицю:

	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
\vec{i}_1	$\cos\psi$	$\sin\psi$	0
\vec{j}_1	$-\sin\psi$	$\cos\psi$	0
\vec{k}_1	0	0	1

Припустимо тепер, що здійснено поворот на кут θ навколо осі $O\xi_1$, який визначає перехід від системи координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ до $O\xi_2\eta_2\zeta_2$ (рис.4.8).

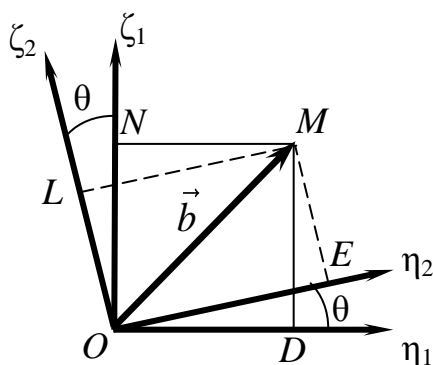


Рис.4.8

Відповідна таблиця напрямних косинусів між осями системи координат $O\xi_2\eta_2\zeta_2$ та $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ подається у вигляді:

	\vec{i}_1	\vec{j}_1	\vec{k}_1
\vec{i}_2	$\cos\theta$	$\sin\theta$	0
\vec{j}_2	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	0
\vec{k}_2	0	0	1

У свою чергу, відповідна матриця переходу має вигляд

$$C_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а проекції вектора $\vec{b} = \overrightarrow{OM}$ на осі системи координат $O\xi_2\eta_2\zeta_2$ визначаються з залежності

$$\vec{b}_{\xi_2\eta_2\zeta_2} = C_2(\theta) \cdot C_1(\psi) \cdot \vec{b}_{\xi_1\eta_1\zeta_1},$$

де вираз $C_2(\theta) \cdot C_1(\psi)$ є добуток відповідних матриць.

Лекція 5

4. Регулярна прецесія

На практиці часто зустрічається випадок руху тіла з нерухомою точкою, коли кут нутації θ сталий ($\theta = \text{const}$).

Рух тіла з нерухомою точкою, при якому кут власного обертання φ і кут прецесії ψ є лінійними функціями часу, а кут нутації θ залишається сталим, називається *регулярною прецесією*. Тоді кутове прискорення $\vec{\epsilon}$

легко знайти з наступних міркувань. Вектор $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ – можна розглядати як швидкість точки K (рис.5.1), яка викреслює годограф вектора $\vec{\omega} = \overrightarrow{OK}$, тобто

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\overrightarrow{OK}}{dt} = \vec{v}_K.$$

Обертання вектора OK навколо осі прецесії $O\zeta$ відбувається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_e$, яку можна вважати переносною. Тому, на підставі формули Ейлера запишемо

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{OK} = \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{OK}.$$

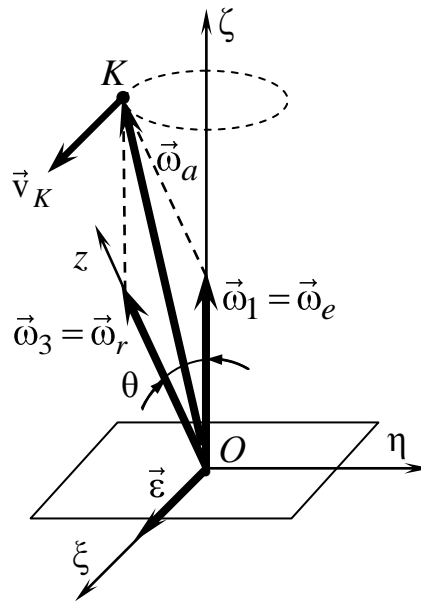


Рис.5.1

Повертаючись до фізичного змісту вектора $\overrightarrow{OK} = \vec{\omega}$, отримаємо

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}. \quad (5.1)$$

Неважко побачити, що обертання тіла навколо осі власного обертання Oz можна подати як відносний рух з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_r$. Тоді рух тіла з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ - це абсолютний рух:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r. \quad (5.2)$$

Після підстановки останнього виразу у (5.1) маємо

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r. \quad (5.3)$$

Враховуючи $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_a - \vec{\omega}_r$, з (5.2) одержимо

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_a \times \vec{\omega}_r. \quad (5.4)$$

5. Нерегулярна прецесія

При поданні прецесії як сукупності переносного руху з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_e = \dot{\psi}$ та відносного руху з кутовою швидкістю власного обертання $\vec{\omega}_r = \dot{\phi}$, вектор миттєвої кутової швидкості можна подати так

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r. \quad (5.5)$$

Тоді вектор миттєвого кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ можна визначити за формулою

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}_a}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}_a}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_a, \quad (5.6)$$

де $\frac{d'\vec{\omega}_a}{dt}$ - похідна від вектора $\vec{\omega}_a$ в рухомій системі координат, $\vec{\omega}_e$ - кутова швидкість рухомої системи координат (кутова швидкість обертання осі Oz навколо вертикалі $O\zeta$). У випадку регулярної прецесії модулі векторів $\vec{\omega}_e$ та $\vec{\omega}_r$ не змінюються, відповідно, не змінюється модуль вектора $\vec{\omega}_a$, звідки отримаємо $\frac{d'\vec{\omega}_a}{dt} = 0$. Тоді з формули (5.6) отримуємо формулу (5.1).

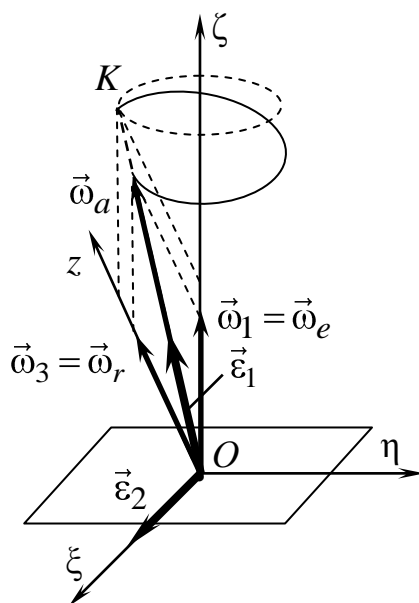


Рис.5.2

При зміні величин векторів $\vec{\omega}_e$ або $\vec{\omega}_r$ порушується означення регулярної прецесії, діагональ паралелограма, побудованого на цих векторах змінюється, тобто для вектора $\vec{\omega}_a$ має місце умова:

$$\frac{d'\vec{\omega}_a}{dt} \neq 0.$$

Припустимо, що діагональ паралелограма, побудованого на векторах $\vec{\omega}_e$ та $\vec{\omega}_r$, тобто вектор $\vec{\omega}_a$, в площині $O\zeta z$ змінюється тільки за величиною, а його напрям відносно осей Oz та $O\zeta$ не міняється. Тоді

вектор $\frac{d'\vec{\omega}_a}{dt}$ буде напрямлений вздовж діагоналі вказаного паралелограма (рис.5.2).

Введемо позначення

$$\frac{d'\vec{\omega}_a}{dt} = \vec{\varepsilon}_1.$$

Позначимо також через $\vec{\varepsilon}_2$ другий доданок формули (5.6)

$$\vec{\varepsilon}_2 = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_a.$$

Зазначимо, що за властивістю векторного добутку вектор $\vec{\varepsilon}_2$ буде перпендикулярний до площини векторів $(\vec{\omega}_e; \vec{\omega}_a)$.

Таким чином, вектор миттєвого кутового прискорення можна подати у вигляді

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2, \quad (5.7)$$

причому $\vec{\varepsilon}_1 \perp \vec{\varepsilon}_2$.

6. Роподіл лінійних швидкостей та прискорень точок тіла.

Нехай тіло D здійснює рух з нерухомою точкою O , а його миттєва кутова швидкість та кутове прискорення - $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$. Припустимо, що з тілом D незмінно зв'язана система координат $Oxyz$, тобто вона є рухомою. Будемо вважати, що вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ спрямований, у даний момент часу, вздовж осі Oz (рис.5.3) та лінія ℓ є годограф вектора $\vec{\omega}$.

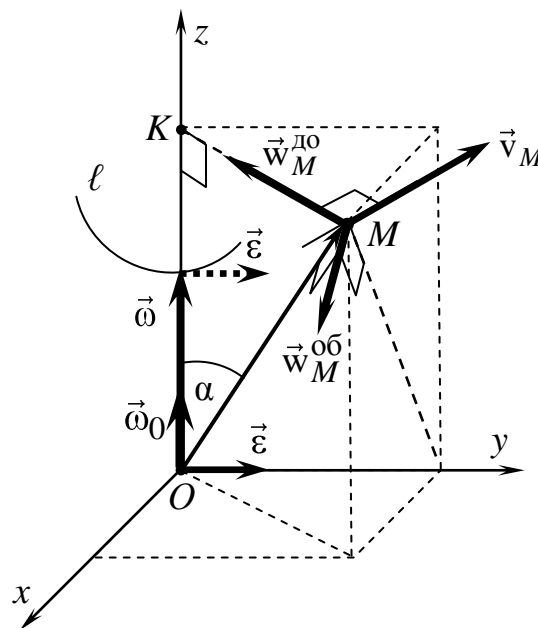


Рис.5.3

Швидкість точки $M(x, y, z)$ тіла D визначається за формулою

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}. \quad (5.8)$$

Звідси величина швидкості: $|\vec{v}_M| = |\vec{\omega}| \cdot |\overrightarrow{OM}| \cdot \sin(\hat{\vec{\omega}, \overrightarrow{OM}})$. Напрямок вектора швидкості точки M знаходиться згідно властивостей векторного добутку, тобто він перпендикулярний до площини векторів $\vec{\omega}$ та \overrightarrow{OM} і утворює з ними праву трійку (рис.5.3).

В проекціях на рухомі осі вектор швидкості подається так

$$\vec{v}_M = \vec{i}v_{Mx} + \vec{j}v_{My} + \vec{k}v_{Mz}, \quad (5.9)$$

де \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – орти рухомої системи координат $Oxyz$, а проекції швидкості

$$\begin{aligned} v_{Mx} &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_{My} &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_{Mz} &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Розподіл лінійних прискорень в тілі з нерухомою точкою визначається формулою, яку отримаємо диференціюванням (5.8) за часом

$$\vec{w}_M = \vec{w}_M^{\text{об}} + \vec{w}_M^{\text{до}}, \quad (5.11)$$

Причому

$$\vec{w}_M^{\text{об}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{OM} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM} \quad (5.12)$$

- обертальне прискорення,

$$\vec{w}_M^{\text{до}} = \vec{\omega} \times \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}_M = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}) \quad (5.13)$$

- доосьове прискорення точки M тіла D .

Модуль обертального прискорення визначається з виразу

$$|\vec{w}_M^{\text{об}}| = |\vec{\varepsilon}| \cdot |\overrightarrow{OM}| \cdot \sin(\hat{\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{OM}}).$$

Оскільки вектор миттєвого кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$, при русі тіла з нерухомою точкою, не збігається з вектором миттєвої кутової швидкості $\vec{\omega}$ (див. п.5 та п.6 даної лекції), то вектор $\vec{w}_M^{\text{об}}$ не лежить на одній прямій зі швидкістю точки M . Це значить, що вектор $\vec{w}_M^{\text{об}}$ не збігається з вектором тангенціального прискорення $\vec{w}_{M\tau}$ точки M .

У випадку здійснення тілом регулярної прецесії кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ визначається за однією з формул (5.1), (5.3) або (5.4). Якщо прецесія нерегулярна зі сталим кутом нутації, то кутове прискорення можна подати за формулою (5.7):

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2,$$

де $\vec{\varepsilon}_1 = \frac{d'\vec{\omega}}{dt}$, $\vec{\varepsilon}_2 = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r = \vec{\omega} \times \vec{\omega}_r$. Тоді обертальне прискорення точки приймає вигляд

$$\vec{w}_M^{об} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM} = (\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2) \times \overrightarrow{OM} = \vec{\varepsilon}_1 \times \overrightarrow{OM} + \vec{\varepsilon}_2 \times \overrightarrow{OM} = \vec{w}_{M1}^{об} + \vec{w}_{M2}^{об}.$$

Складові $\vec{w}_{M1}^{об}$ та $\vec{w}_{M2}^{об}$ визначаються згідно правил векторного множення.

В свою чергу вектор доосьового прискорення $\vec{w}_M^{до} = \vec{\omega} \times \vec{v}_M$ спрямований по найкоротшому шляху до миттєвої осі повороту тіла D . Дійсно, згідно відомої властивості подвійного векторного добутку, можна записати

$$\begin{aligned} \vec{w}_M^{до} &= \vec{\omega} \times \vec{v}_M = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{OM}) - \overrightarrow{OM}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = \\ &= \vec{\omega} \cdot |\vec{\omega}| \cdot |\overrightarrow{OM}| \cos(\hat{\vec{\omega}, \overrightarrow{OM}}) - \omega^2 \overrightarrow{OM}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Вектор $\vec{\omega}$ подамо як добуток одиничного вектора $\vec{\omega}_0$, що визначає напрям миттєвої осі та коефіцієнта $|\vec{\omega}|$:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 \cdot |\vec{\omega}|.$$

В свою чергу, відрізок $OK = |\overrightarrow{OM}| \cos(\hat{\vec{\omega}, \overrightarrow{OM}})$ є проекцією радіуса-вектора точки M на миттєву вісь, тобто є катетом прямокутного трикутника OKM , де точка K – вершина прямого кута. Тоді останню частину формули (5.14) можна перетворити до вигляду

$$\begin{aligned} \vec{w}_M^{до} &= \vec{\omega} \cdot |\vec{\omega}| \cdot |\overrightarrow{OM}| \cos(\hat{\vec{\omega}, \overrightarrow{OM}}) - \omega^2 \overrightarrow{OM} = \vec{\omega}_0 |\vec{\omega}| \cdot |\vec{\omega}| \cdot OK - \omega^2 \overrightarrow{OM} = \\ &= \omega^2 \overrightarrow{OK} - \omega^2 \overrightarrow{OM} = \omega^2 \overrightarrow{MK} = -\omega^2 \overrightarrow{KM}. \end{aligned}$$

З останнього добутку випливає, що доосьове прискорення точки M тіла D спрямоване по найкоротшому шляху (перпендикулярно) до миттєвої осі обертання.

Таким чином, розподіл швидкостей точок в тілі з нерухомою точкою збігається з розподілом швидкостей в тілі, яке обертається навколо осі, напрям якої визначається вектором кутової швидкості $\vec{\omega}$. Оскільки ця вісь в процесі руху тіла змінює положення в просторі, відповідно до закону руху тіла, вона називається *миттєвою віссю обертання*. Вектор $\vec{\omega}$ називається вектор миттєвої кутової швидкості.

Розподіл прискорень точок тіла з нерухомою точкою не збігається з розподілом прискорень в тілі, яке обертається навколо нерухомої осі. Відмінність викликана тим, що вісь обертання тіла змінює своє положення в просторі, і відповідно, вектор *миттєвого кутового прискорення* $\vec{\varepsilon}$, який змінює своє положення, не паралельний вектору кутової швидкості. Як наслідок, вектор обертального прискорення точки тіла (5.12) не паралельний до вектора швидкості (5.8) даної точки. Вектор доосьового прискорення точки (5.13) напрямлений по найкоротшому шляху до миттєвої осі обертання тіла і його величина пропорційна найкоротшій відстані до миттєвої осі і квадрату миттєвої кутової швидкості.

Лекція 6

7. Кінематичні рівняння Ейлера

Кінематичними рівняннями Ейлера називаються проекції кутової швидкості тіла, що має нерухому точку, на осі рухомої або нерухомої системи координат в залежності від кутів Ейлера.

В лекції 4 було отримано формулу (4.4), тобто зроблено висновок, що абсолютна кутова швидкість тіла дорівнює

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 = \vec{k}\dot{\psi} + \vec{i}_1\dot{\theta} + \vec{k}_2\dot{\phi}, \quad (6.1)$$

де \vec{k} , \vec{i}_1 , \vec{k}_2 – орти осей Ейлера $O\zeta$, $O\xi_1$, $O\zeta_2$ відповідно (рис.6.1, а).

Для визначення модуля вектора $\vec{\omega}$ необхідно знайти його проекції на осі ортогональної системи координат (рухомої $Oxyz$ або нерухомої $O\xi\eta\zeta$). Це дозволить отримати кінематичні рівняння Ейлера.

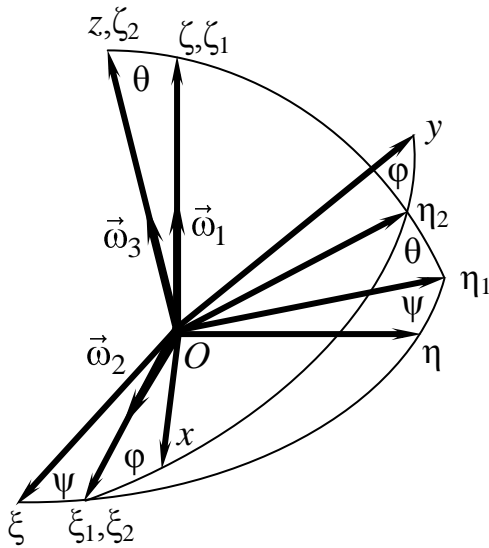


Рис.6.1,а

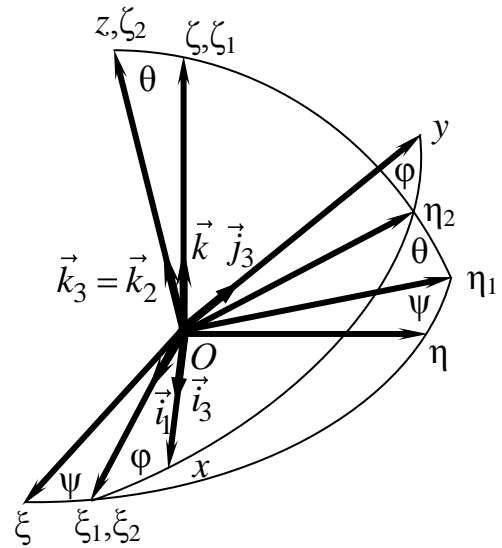


Рис.6.1,б

Знайдемо вказані проекції на осі рухомої системи координат $Oxyz$ жорстко зв'язаної з тілом. Нехай ортами системи координат $Oxyz$ є вектори \vec{i}_3 , \vec{j}_3 , \vec{k}_3 (рис.6.1,б). Тоді проекції вектора $\vec{\omega}$ знайдемо з формул:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \vec{\omega} \cdot \vec{i}_3 = \vec{k} \cdot \vec{i}_3 \dot{\psi} + \vec{i}_1 \cdot \vec{i}_3 \dot{\theta} + \vec{k}_2 \cdot \vec{i}_3 \dot{\phi}; \\ \omega_y &= \vec{\omega} \cdot \vec{j}_3 = \vec{k} \cdot \vec{j}_3 \dot{\psi} + \vec{i}_1 \cdot \vec{j}_3 \dot{\theta} + \vec{k}_2 \cdot \vec{j}_3 \dot{\phi}; \\ \omega_z &= \vec{\omega} \cdot \vec{k}_3 = \vec{k} \cdot \vec{k}_3 \dot{\psi} + \vec{i}_1 \cdot \vec{k}_3 \dot{\theta} + \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_3 \dot{\phi}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Скалярні добутки, які стоять у правих частинах формул (6.2) є косинусами кутів між відповідними осями координат. Їх можна визначити, наприклад, за формулою сферичної тригонометрії (4.6). Маємо:

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{i}_3 &= \cos(\widehat{O\zeta, Ox}) = \sin\theta \cdot \sin\varphi, & \vec{i}_1 \cdot \vec{i}_3 &= \cos(\widehat{O\xi_1, Ox}) = \cos\varphi, \\ \vec{k}_2 \cdot \vec{i}_3 &= \cos(\widehat{O\zeta_2, Ox}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{k} \cdot \vec{j}_3 &= \cos(O\hat{\zeta}, Oy) = \sin\theta \cdot \cos\varphi, & \vec{i}_1 \cdot \vec{j}_3 &= \cos(O\hat{\xi}_1, Oy) = -\sin\varphi, \\
\vec{k}_2 \cdot \vec{j}_3 &= \cos(O\hat{\zeta}_2, Oy) = 0 \\
\vec{k} \cdot \vec{k}_3 &= \cos(O\hat{\zeta}, Oz) = \cos\theta, & \vec{i}_1 \cdot \vec{k}_3 &= \cos(O\hat{\xi}_1, Oz) = 0, \\
\vec{k}_2 \cdot \vec{k}_3 &= \cos(O\hat{\zeta}_2, Oz) = 1.
\end{aligned}$$

Підставимо записані вирази у формули (6.2), отримаємо:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\psi} \sin\theta \cdot \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi, \\
\omega_y &= \dot{\psi} \sin\theta \cdot \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi, \\
\omega_z &= \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\phi}.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Співвідношення (6.3) називаються кінематичними рівняннями Ейлера. Зазначимо, що величину вектора кутової швидкості можна визначити з виразу

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}.$$

Формули (6.3) дозволяють знайти компоненти вектора кутового прискорення $\vec{\epsilon}$, які визначаються як похідні від компонент вектора $\vec{\omega}$, тобто

$$\epsilon_x = \dot{\omega}_x, \epsilon_y = \dot{\omega}_y, \epsilon_z = \dot{\omega}_z.$$

$$\text{Тоді } \epsilon = \sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2}.$$

8. Приклад.

Конус з нерухомою вершиною O котиться по горизонтальній площині без ковзання (рис.6.2). Радіус основи конуса $R=20$ см, кут при вершині конуса – 60° . Центр основи конуса – точка O_1 – рухається рівномірно і здійснює повний оберт навколо вертикальної осі за 4 сек. Визначити кутову швидкість і кутове прискорення конуса, а також швидкість і прискорення точок A і B .

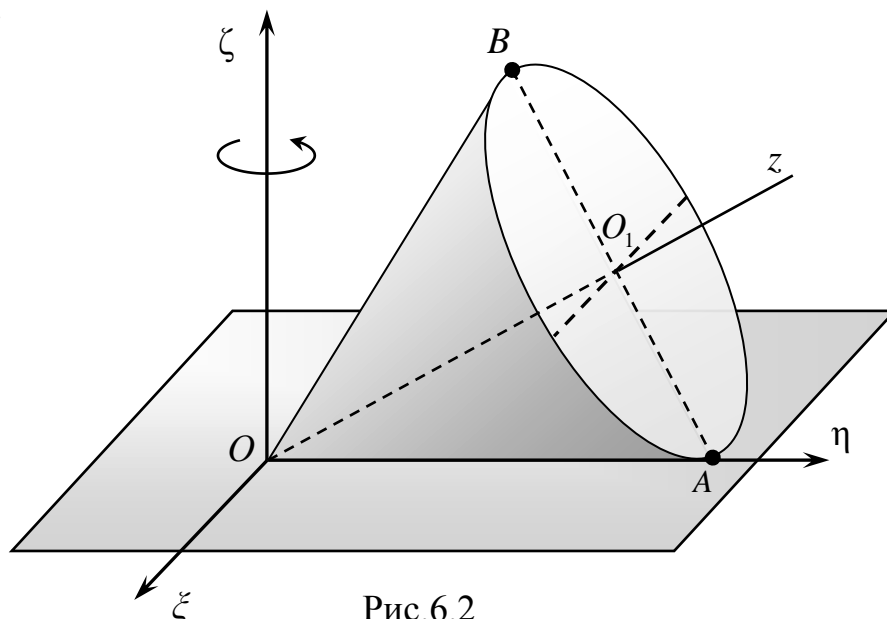


Рис.6.2

Розв'язання. З горизонтальною площиною зв'яжемо нерухому систему координат $O\xi\eta\zeta$, з висотою конуса – рухому вісь Oz . З теореми Пуансо випливає, що бічна поверхня конуса – рухомий аксоїд, а площина $O\xi\eta$ – нерухомий. Для розв'язання задачі потрібно визначити миттєву вісь обертання та осі Ейлера, вздовж яких напрямлені вектори кутових швидкостей прецесії та власного обертання. Миттєва вісь обертання, усі точки якої у даний момент часу мають нульову швидкість, збігається з твірною конуса OA , що дотикається до нерухомої горизонтальної площини і належить осі $O\eta$. На цій осі лежить вектор $\vec{\omega}$. Вісь $O\zeta$ є віссю прецесії, рух конуса навколо осі прецесії будемо вважати переносним. Тоді на осі $O\zeta$ лежить вектор $\vec{\omega}_e$. Вісь Oz – вісь власного обертання, рух конуса навколо цієї осі вважаємо відносним. На осі Oz буде лежати вектор $\vec{\omega}_r$. Кут між віссю $O\zeta$ та Oz – кут нутації θ – залишається незмінним під час руху тіла, тобто має місце випадок регулярної прецесії.

Зв'язок між кутовими швидкостями визначається виразом

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r. \quad (a)$$

Оскільки вісь Oz робить повний оберт навколо осі $O\zeta$ за 4 сек, то

$$\omega_e = 2\pi/4 = \pi/2 \text{ 1/с.}$$

Відповідно до напрямку обертання конуса навколо осі Oz вектор $\vec{\omega}_e$ буде напрямлений вздовж осі Oz вгору (рис.6.3).

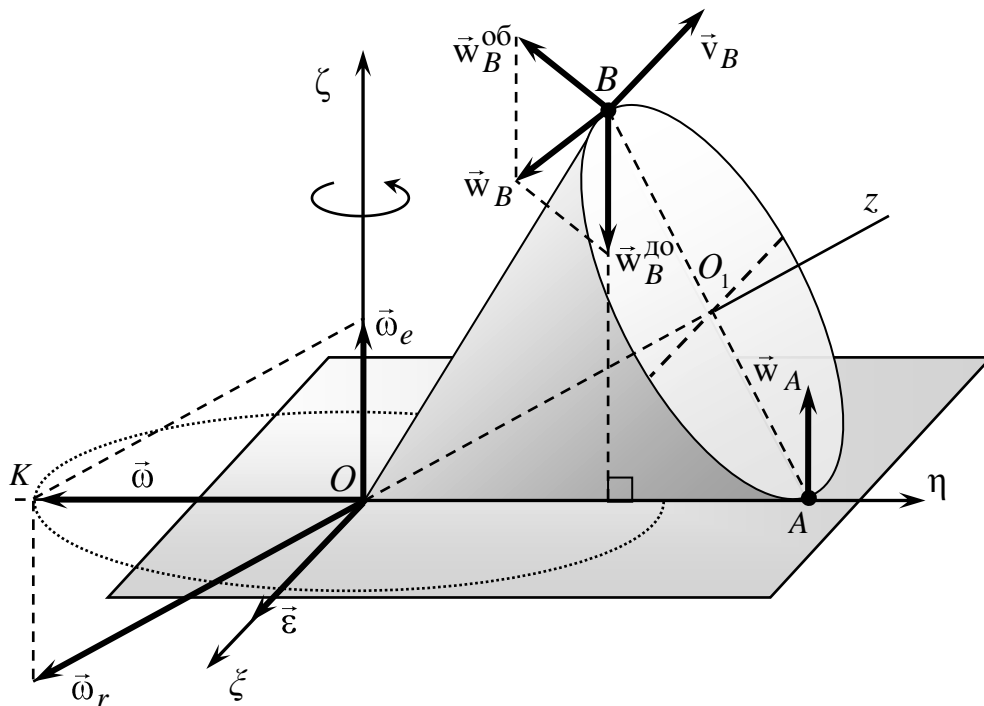


Рис.6.3

На підставі (a) будемо паралелограм кутових швидкостей: через кінець відомого вектора $\vec{\omega}_e$ проводимо пряму паралельну з віссю власного обертання до перетину з миттєвою віссю (рис.6.3). Через знайдену точку

перетину проводимо пряму паралельну з віссю прецесії до перетину з віссю власного обертання. В побудованому паралелограмі зображуємо вектори кутових швидкостей $\vec{\omega}$ та $\vec{\omega}_r$. З рисунка знаходимо

$$\omega_r = 2\omega_e = \pi \text{ 1/c}, \quad \omega = \omega_r \cos 30^\circ = \sqrt{3}\pi/2 \text{ 1/c}. \quad (b)$$

Кутове прискорення $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ розглядаємо як швидкість точки K , яка викреслює годограф вектора $\vec{\omega}$. Тоді

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{OK} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}. \quad (c)$$

Паралелограм кутових швидкостей знаходиться в площині $O\eta\zeta$. Годографом вектора $\vec{\omega}$ є коло, описане точкою K в площині $O\xi\eta$. Вектор $\vec{\varepsilon}$ спрямований по дотичній до цього кола і, згідно з (c), перпендикулярний до $\vec{\omega}_e$ і $\vec{\omega}$, тобто вздовж осі $O\xi$. Модуль цього вектора дорівнює:

$$\varepsilon = \omega_e \cdot \omega \cdot \sin 90^\circ = \sqrt{3}\pi^2/4 \text{ 1/c}.$$

Швидкості точок A і B визначимо на підставі формули (5.8). Швидкість точки A дорівнює нулю, оскільки вона знаходиться на миттєвій осі обертання. Швидкість точки B :

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OB},$$

її величина

$$v_B = \omega \cdot OB \cdot \sin 120^\circ = 30\pi \text{ см/с}.$$

Виходячи з властивостей векторного добутку, вектор швидкості точки B в даному положенні конуса паралельний і протилежно напрямлений до осі $O\xi$.

Прискорення точки A визначимо на підставі формули (5.11):

$$\vec{w}_A = \vec{w}_A^{\text{об}} + \vec{w}_A^{\text{до}}.$$

Обертальна складова прискорення точки A

$$\vec{w}_A^{\text{об}} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OA},$$

її величина

$$w_A^{\text{об}} = \varepsilon \cdot OA \cdot \sin 90^\circ = \frac{\sqrt{3}\pi^2}{4} \cdot 40 = 10\sqrt{3}\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Відповідно до властивостей векторного добутку, вектор $\vec{w}_A^{\text{об}}$ спрямований, паралельно до осі $O\xi$ вгору.

Доосьове прискорення точки A дорівнює

$$\vec{w}_A^{\text{до}} = \vec{\omega} \times \vec{v}_A.$$

Оскільки \vec{v}_A дорівнює нулю, то $\vec{w}_A^{\text{до}} = 0$.

Таким чином, повне прискорення точки A $\vec{w}_A = \vec{w}_A^{\text{об}}$.

Прискорення точки B визначаємо аналогічно:

$$\vec{w}_B = \vec{w}_B^{\text{об}} + \vec{w}_B^{\text{до}},$$

де обертальна складова прискорення цієї точки дорівнює

$$\vec{w}_B^{\text{об}} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OB},$$

а її величина

$$w_B^{\text{об}} = \varepsilon \cdot OB \cdot \sin 90^\circ = \frac{\sqrt{3}\pi^2}{4} \cdot 40 = 10\sqrt{3}\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Доосьове прискорення точки B

$$\vec{w}_B^{\text{до}} = \vec{\omega} \times \vec{v}_B,$$

його величина

$$w_B^{\text{до}} = \omega \cdot v_B \cdot \sin 90^\circ = \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \cdot 30\pi = 15\sqrt{3}\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Складові вектора \vec{w}_B розташовані в площині $O\eta\zeta$. Вектор $\vec{w}_B^{\text{об}}$ перпендикулярний до OB , вектор $\vec{w}_B^{\text{до}}$ спрямований вздовж найкоротшої відстані від точки B до миттєвої осі обертання.

Модуль повного прискорення точки B можна знайти скориставшись теоремою косинусів. Оскільки кут між $\vec{w}_B^{\text{об}}$ і $\vec{w}_B^{\text{до}}$ дорівнює 120° , отримаємо:

$$w_B = \sqrt{w_B^{\text{об}^2} + w_B^{\text{до}^2} + 2 \cdot w_B^{\text{об}} \cdot w_B^{\text{до}} \cdot \cos 120^\circ} = 5\sqrt{21}\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

9. Контрольні запитання

1. Дайте означення руху твердого тіла навколо нерухомої точки.
2. Як можна представити рух твердого тіла з нерухомою точкою?
3. Які основні кінематичні характеристики руху твердого тіла з нерухомою точкою?
4. Як визначити вісь миттєвого обертання тіла з нерухомою точкою?
5. Що таке нерухомий та рухомий аксоїд?
6. Яка послідовність і назва кутів Ейлера?
7. Як записується формула сферичної тригонометрії для визначення напрямного косинусу?
8. Проекціям якого вектора відповідає рядок таблиці напрямних косинусів між осями систем координат?
9. Який рух тіла є регулярною прецесією?
10. Як визначається кутове прискорення твердого тіла у випадку регулярної прецесії?
11. Як напрямлені складові кутового прискорення твердого тіла у випадку нерегулярної прецесії?
12. Як спрямовані складові прискорення довільної точки твердого тіла, що має нерухому точку?
13. Чому обертальне прискорення довільної точки твердого тіла, що має нерухому точку, не напрямлене вздовж вектора швидкості цієї точки?
14. Які співвідношення називаються кінематичними рівняннями Ейлера?
15. Чи дорівнюють нулю прискорення точок миттєвої осі обертання твердого тіла, що має нерухому точку?

Тема 3.3. Складний рух твердого тіла.

Лекція 7

1. Основна задача кінематики складного руху твердого тіла

Складним рухом твердого тіла називається рух, який складається одночасно з двох або більшої кількості складових рухів. При здійсненні найпростіших рухів тверде тіло приймає участь тільки у одному русі: поступальному або обертальному навколо нерухомої осі. Складний рух є таким, коли абсолютно тверде тіло бере участь одночасно принаймні у двох рухах: поступальних, обертальних навколо паралельних осей, чи осей, що перетинаються, у поступальному і обертальному і т.п.

Основна задача кінематики складного руху абсолютно твердого тіла – це встановлення у кожний момент часу залежностей між основними кінематичними характеристиками рухів, що складаються, і визначення характеру результуючого руху твердого тіла.

Поняття абсолютного, переносного і відносного рухів, які вводились при вивченні складного руху матеріальної точки, можна використати у випадку складного руху твердого тіла. При складанні, припустимо, двох рухів, один з них вважається переносним, другий – відносним.

2. Складання поступальних рухів

Нехай тіло D рухається поступально зі швидкістю \vec{v}_2 відносно системи координат $Oxyz$, яка в свою чергу теж поступально рухається з швидкістю \vec{v}_1 відносно нерухомої системи координат $A\xi\eta\zeta$ (рис.7.1).

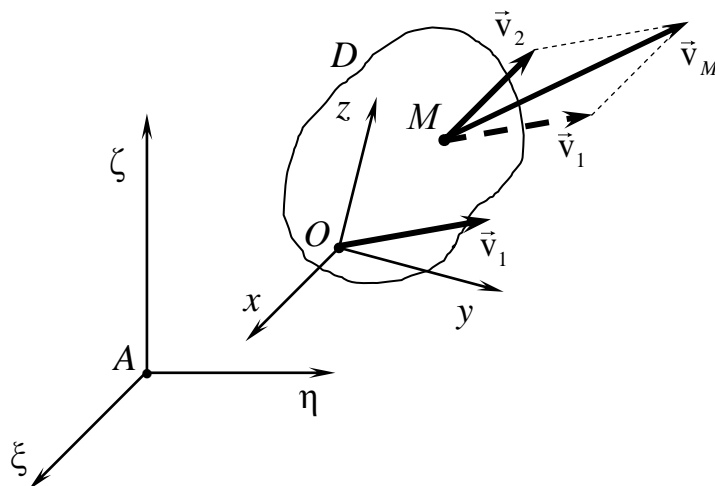


Рис.7.1

Абсолютну швидкість довільної точки M тіла, яка виконує складний рух, визначимо за відомою теоремою про додавання швидкостей:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \quad (7.1)$$

Якщо тіло умовно зупинити у рухомій системі координат $Oxyz$, то довільна точка M тіла здійснює разом з тілом тільки переносний рух зі швидкістю $\vec{v}_M = \vec{v}_1 = \vec{v}_e$.

У свою чергу, якщо умовно зупинити рухому систему координат $Oxyz$ відносно нерухомої, то довільна точка M тіла здійснює відносний рух зі швидкістю $\vec{v}_M = \vec{v}_2 = \vec{v}_r$. Отже,

$$\vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{v}_1 + \vec{v}_2. \quad (7.2)$$

Оскільки точка M є довільною тіла D , то вираз (7.2) має місце для будь-якої точки тіла D , тобто абсолютний рух даного твердого тіла є поступальним.

При складанні довільної кількості поступальних рухів має місце вираз

$$\vec{v}_a = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i. \quad (7.3)$$

Таким чином, має місце теорема: *Сукупність декількох поступальних рухів твердого тіла є поступальний рух, швидкість якого дорівнює векторній сумі швидкостей складових рухів.*

3. Складання обертальних рухів тіла навколо перетинних осей.

Припустимо, що тіло D обертається в системі координат $Oxyz$ навколо осі Oz з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$, а система координат $Oxyz$ обертається навколо осі $O\xi$ нерухомої системи $O\xi\eta\zeta$ з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$ (рис.7.2). Обертання тіла D навколо осі Oz назовемо відносним рухом, а навколо осі $O\xi$ – переносним.

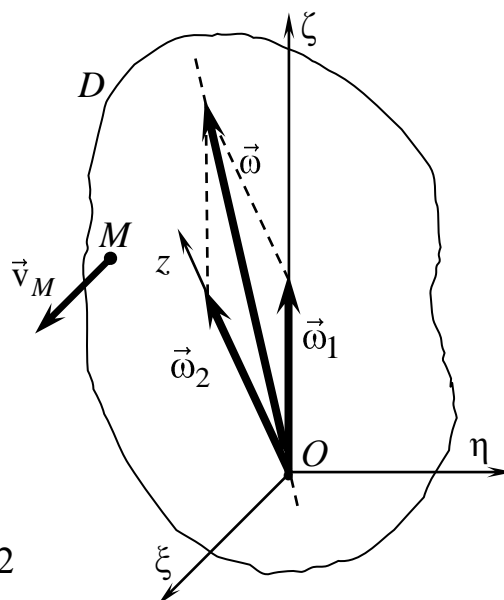


Рис.7.2

Візьмемо довільну точку M тіла D – вона здійснює складний рух. Її абсолютну швидкість визначимо за теоремою про додавання швидкостей:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \quad (7.4)$$

Умовно зупинимо тіло D у рухомій системі координат $Oxyz$. Тоді точка M разом з тілом D обертається навколо осі Oz і має швидкість $\vec{v}_M = \vec{v}_e = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{OM}$.

Якщо умовно зупинити рухому систему координат $Oxyz$ відносно нерухомої $O\xi\eta\zeta$, то довільна точка M тіла D здійснює рух зі швидкістю $\vec{v}_M = \vec{v}_r = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{OM}$ навколо осі Oz . Таким чином,

$$\vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{OM} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}. \quad (7.5)$$

Оскільки швидкість довільної точки M тіла D визначається за формулою (7.5), то у випадку однієї нерухомої точки O рух тіла D можна подати як обертальний навколо миттєвої осі, що проходить через точку O . Миттєва вісь обертання визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{\omega}_1$ та $\vec{\omega}_2$:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2.$$

Отже, доведено твердження:

Сукупність двох миттєвих обертальних рухів твердого тіла навколо перетинних осей, є обертальний рух навколо миттєвої осі, що проходить через точку перетину осей відносного і переносного обертань, з кутовою швидкістю, яка дорівнює векторній сумі кутових швидкостей складових рухів:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \quad (7.6)$$

Сукупність n обертань навколо осей, що перетинаються в одній точці, еквівалентна одному обертанню з миттєвою кутовою швидкістю

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i. \quad (7.7)$$

4. Пара обертань

Парою обертань (рис.7.3) називається рух тіла, який є сукупністю двох обертальних рухів твердого тіла навколо паралельних осей з рівними за модулем, протилежними за напрямом та паралельними кутовими швидкостями ($\vec{\omega}_2 = -\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}$).

Припустимо, що тіло D обертається в системі координат $Oxyz$ навколо осі Oz з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$, а система координат $Oxyz$ обертається навколо осі Az нерухомої системи $A\xi\eta\zeta$ з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$, яка задовольняє умову $\vec{\omega}_2 = -\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}$ (рис.7.3). Обертання тіла D навколо осі Az назвемо переносним рухом, а навколо осі Oz – відносним.

Довільна точка M тіла D здійснює складний рух і її абсолютну швидкість визначимо за теоремою про додавання швидкостей:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \quad (7.8)$$

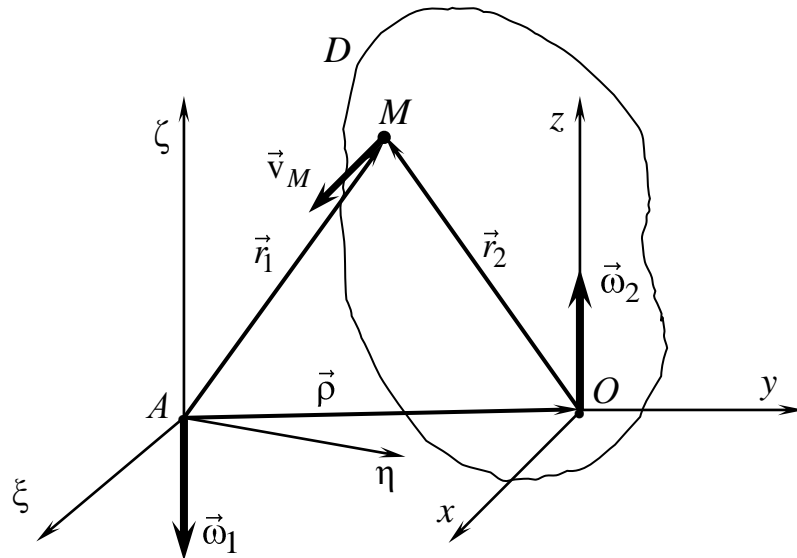


Рис.7.3

Умовно зупинимо тіло D у рухомій системі координат $Oxyz$, що відповідає $\vec{\omega}_2 = 0$. Тоді швидкість довільної точки M відповідає переносному рухові тіла D навколо осі $A\xi$: $\vec{v}_M = \vec{v}_e = \vec{\omega}_1 \times \overline{AM}$.

При умові зупинення рухомої системи координат $Oxyz$ відносно нерухомої, що відповідає $\vec{\omega}_1 = 0$, швидкість довільної точки M відповідає відносному обертальному рухові тіла D навколо осі O : $\vec{v}_M = \vec{v}_r = \vec{\omega}_2 \times \overline{OM}$.

Таким чином, після підстановки виразів для \vec{v}_e та \vec{v}_r у формулу (7.8), отримаємо

$$\vec{v}_M = \vec{\omega}_1 \times \overline{AM} + \vec{\omega}_2 \times \overline{OM} = \vec{\omega}_1 \times (\overline{AM} - \overline{OM}) = \vec{\omega}_1 \times \overline{AO}. \quad (7.9)$$

З формули (7.9) випливає, що швидкість довільної точки тіла не залежить від вибору цієї точки і є для усіх точок однаковою. Приходимо до висновку, що рух тіла є поступальним. Таким чином, пара обертань надає тілу поступального руху.

Векторний добуток (7.9) запишемо так

$$\vec{v}_M = \vec{\omega}_1 \times \overline{AO} = -\vec{\omega}_2 \times \overline{AO} = \overline{AO} \times \vec{\omega}_2 = \overline{AO} \times \vec{\omega},$$

або

$$\vec{v} = \overline{AO} \times \vec{\omega}, \quad (7.10)$$

де вектор \vec{v} називається *моментом пари обертань*.

Теорема: *пара обертань еквівалентна миттєво-поступальному руху зі швидкістю, що дорівнює моменту пари обертань.*

Вектор момента пари обертань є вільний вектор. З цього випливає:

- 1) сукупність декількох пар обертань тіла еквівалентна одній парі, тобто поступальному руху;
- 2) будь-який миттєво-поступальний рух можна розглядати як пару обертань.

Модуль момента пари обертань дорівнює

$$v = \omega \cdot OA \cdot \sin(\overrightarrow{OA}, \vec{\omega}).$$

Найкоротша відстань між осями обертання Oz і $A\zeta$ називається *плечем пари* h , тобто

$$v = \omega \cdot h,$$

де $h = OA \cdot \sin(\overrightarrow{OA}, \vec{\omega}).$

5. Складання обертальних рухів навколо паралельних осей.

Нехай тіло обертається в системі координат $Oxyz$ навколо осі Oz з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$, а система координат $Oxyz$ обертається навколо осі $A\zeta$ нерухомої системи $A\xi\eta\zeta$ з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$, яка паралельна до $\vec{\omega}_2$ (рис.7.4). Обертання навколо осі Oz назвемо відносним рухом, а навколо осі $A\zeta$ – переносним. Припустимо, що кутові швидкості $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ напрямлені в один бік і площина Oxy рухається у площині $A\xi\eta$.

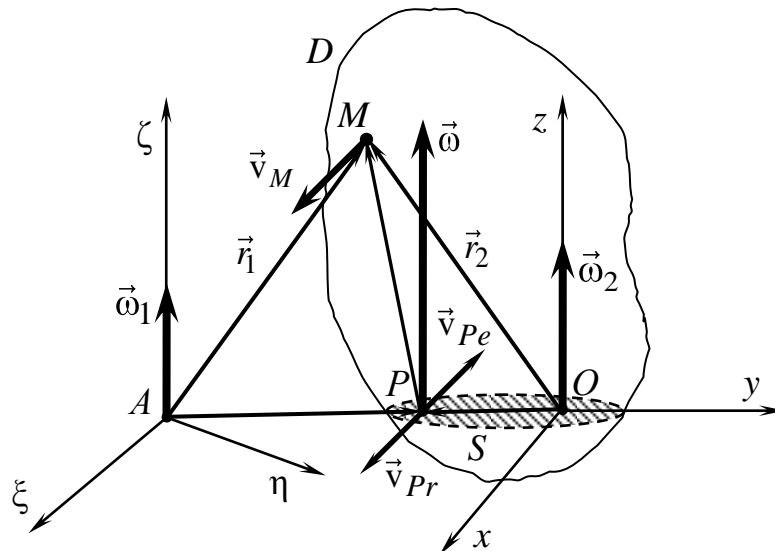


Рис.7.4.

Абсолютну швидкість довільної точки M тіла визначимо за теоремою про додавання швидкостей:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2. \quad (7.8)$$

Як впливає з рисунка, вектори відносної і переносної швидкостей точок, що лежать на прямій AO , колінеарні і протилежно напрямлені. Отже, існує така точка P , абсолютна швидкість якої дорівнює нулю:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{Pe} + \vec{v}_{Pr} = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{AP} + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{OP} = 0, \quad (7.9)$$

тобто P – миттєвий центр обертання перерізу S тіла площиною Oxy .

Вектори \vec{v}_{Pe} і \vec{v}_{Pr} перпендикулярні до AO , їх модулі відповідно дорівнюють

$$\vec{v}_{Pe} = \omega_1 \cdot AP, \quad \vec{v}_{Pr} = \omega_2 \cdot OP$$

і на підставі (7.9)

$$\omega_1 \cdot AP = \omega_2 \cdot OP$$

або

$$\frac{AP}{OP} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (7.10)$$

З формули (7.10) випливає, що точка P ділить відрізок AO внутрішнім способом на частини, обернено пропорційні модулям кутових швидкостей складових рухів.

Швидкість довільної точки M тіла, з урахуванням (7.9), дорівнює

$$\vec{v}_M = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 = \vec{\omega}_1 \times (\vec{AP} + \vec{PM}) + \vec{\omega}_2 \times (\vec{OP} + \vec{PM}) = \vec{\omega}_1 \times \vec{PM} + \vec{\omega}_2 \times \vec{PM}$$

або

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{PM},$$

де $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$.

Таким чином, сукупність двох миттєвих обертальних рухів твердого тіла навколо паралельних осей, які не утворюють пару обертань, є миттєвий обертальний рух навколо осі, яка паралельна даним, з кутовою швидкістю, що дорівнює векторній сумі кутових швидкостей складових рухів. Миттєва вісь обертання ділить відстань між осями складових обертань обернено пропорційні величинам кутових швидкостей внутрішнім способом, якщо вектори кутових швидкостей співнаправлені та зовнішнім способом, якщо протилежні.

Приклад. Припустимо, що тіло D обертається навколо осі $O_2 z_2$ з кутовою швидкістю $\omega_2 = 5$ рад/с (рис.7.5), яка у свою чергу обертається навколо паралельної осі $O_1 z_1$ з кутовою швидкістю $\omega_1 = 10$ рад/с у протилежному напрямку. Відстань між осями обертання дорівнює 20 см. Визначити кутову швидкість результуючого руху та відстань від миттєвої осі обертання до осі $O_1 z_1$.

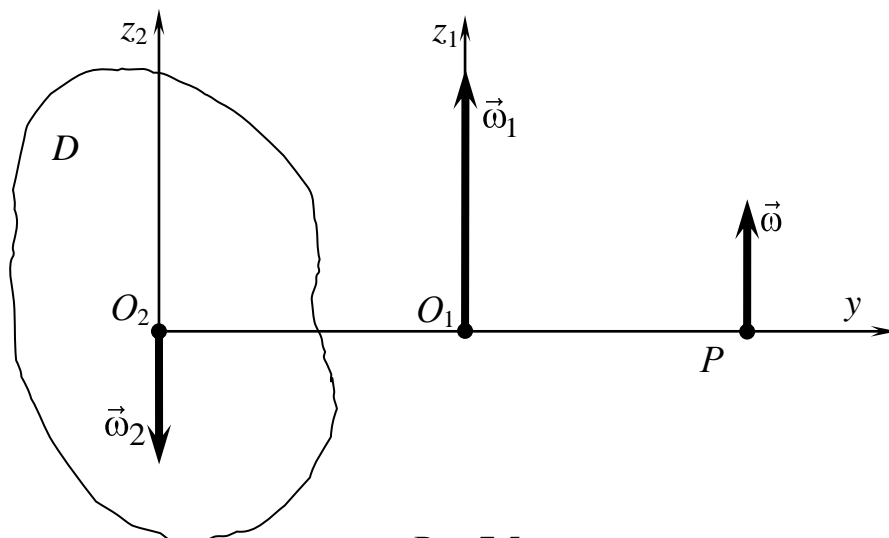


Рис.7.5.

За сформульованою теоремою, оскільки $\vec{\omega}_1 \uparrow \downarrow \vec{\omega}_2$, миттєва вісь ділить відстань між осями складових обертань зовнішнім чином, у співвідношенні

$$\frac{O_1P}{O_2P} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

або

$$\frac{O_1P}{O_2P} = \frac{1}{2}.$$

Виконання цієї умови можливе, якщо точка P розташована праворуч від осі $O_1 z_1$ на відстані 20 см.

Величина кутової швидкості результуючого руху дорівнює $\omega = |\omega_1 - \omega_2| = 5$ рад/с

Лекція 8.

6. Складання миттєво-поступального і миттєво-обертального рухів.

Припустимо, що тіло обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо осі Oz рухомої системи координат $Oxyz$, яка рухається поступально зі швидкістю \vec{v} в нерухомій системі координат $A\xi\eta\zeta$. Розглянемо два випадки складання вказаних рухів тіла.

а) *Вектор швидкості поступального руху і вектор кутової швидкості обертання тіла перпендикулярні.*

Вважаємо відносним рухом обертання навколо осі Oz з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ та переносним рухом – поступальний рух системи координат $Oxyz$ зі швидкістю \vec{v} , при цьому $\vec{v} \perp \vec{\omega}$ (рис.8.1).

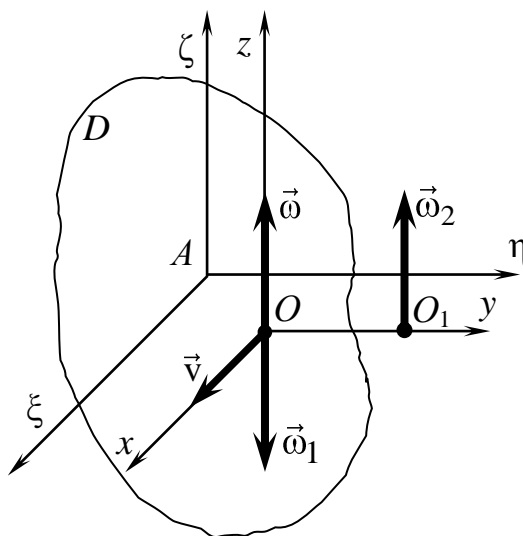


Рис.8.1.

Миттєво-поступальний рух тіла подамо як пару обертань $\vec{\omega}_1; \vec{\omega}_2$, момент якої дорівнює швидкості поступального руху:

$$\vec{v} = \vec{O_1O} \times \vec{\omega}_1,$$

де $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2 = -\vec{\omega}$.

Плече пари обертань O_1O визначається з виразу

$$O_1O = \frac{v}{\omega}. \quad (8.1)$$

Зазначимо, що вектори $\vec{\omega}$ та $\vec{\omega}_1$ починаються у точці O , тобто $\vec{\omega} + \vec{\omega}_1 = 0$. Залишається вектор $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}$ з початком у точці O_1 , тобто рух тіла буде миттєво-обертальним навколо осі, яка проходить через точку O_1 . Таким чином, маємо теорему:

Сукупність миттєво-поступального і миттєво-обертального рухів твердого тіла, з вектором швидкості поступального руху перпендикулярним до вектора кутової швидкості обертального руху, буде обертальним рухом навколо миттєвої осі, паралельної до осі заданого обертання, з тією ж кутовою швидкістю. Миттєва вісь обертання знаходиться від даної осі на відстані, що визначається (8.1).

б) Вектор швидкості поступального руху і вектор кутової швидкості обертального руху не перпендикулярні.

Вважаємо обертання тіла D з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо осі Oz системи координат $Oxyz$ відносною складовою руху. Поступальний рух системи координат $Oxyz$ зі швидкістю \vec{v} в нерухомій системі координат $A\xi\eta\zeta$ - переносною складовою. Нехай вектори \vec{v} і $\vec{\omega}$ утворюють кут α (рис.8.2,а).

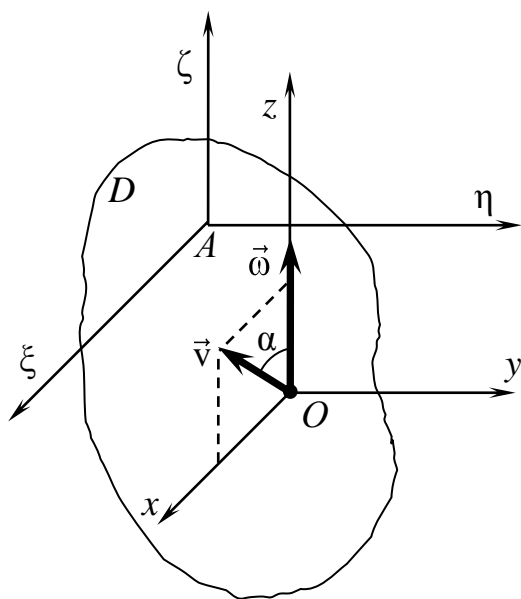


Рис.8.2, а

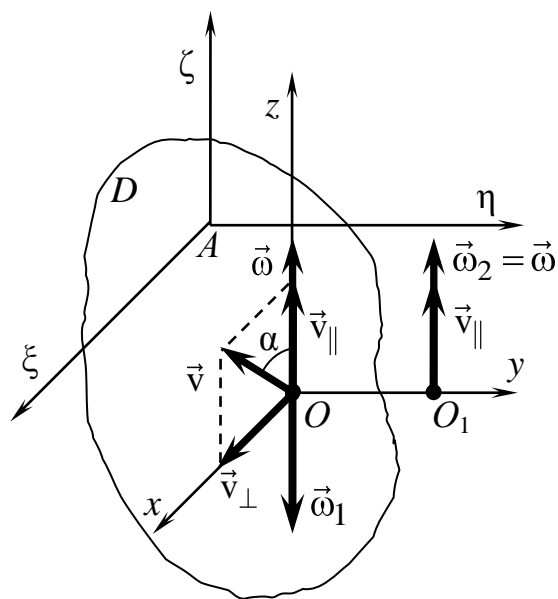


Рис.8.2, б

Вектор \vec{v} подамо як швидкість двох поступальних рухів у площині Oxz

$$\vec{v} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel},$$

де $v_{\perp} = v \cdot \sin \alpha$, $v_{\parallel} = v \cdot \cos \alpha$ (рис.8.2, б).

Швидкість \vec{v}_{\perp} розглядаємо як момент пари обертань і замінимо, відповідно, парою обертань $\vec{\omega}_1; \vec{\omega}_2$ з плечем

$$OO_1 = \frac{v_{\perp}}{\omega} = \frac{v \cdot \sin \alpha}{\omega}, \quad (8.2)$$

причому $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2 = -\vec{\omega}$.

Оскільки вектори $\vec{\omega}$ та $\vec{\omega}_1$ починаються в одній точці, їх можна скласти: $\vec{\omega} + \vec{\omega}_1 = 0$. Тоді в точці O маємо один вектор швидкості \vec{v}_{\parallel} поступального руху. В точці O_1 на відстані OO_1 , що дорівнює плечу пари обертань (8.2), знаходиться вектор $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}$, який напрямлений вздовж миттєвої осі обертання. Вектор швидкості \vec{v}_{\parallel} як вільний вектор переносимо в точку O_1 і тоді в цій точці будуть розташовані паралельні вектори \vec{v}_{\parallel} та $\vec{\omega}$ (рис.8.2,б)).

Таким чином, *сукупність миттєво-поступального і миттєво-обертального рухів, коли вектор швидкості поступального руху не перпендикулярний до вектора кутової швидкості обертального руху тіла, є миттєво-гвинтовий рух, або кінематичний гвинт.*

Кінематичний гвинт – це рух, який є сукупністю обертального та поступального рухів тіла з вектором кутової швидкості паралельним до вектора швидкості миттєво-поступального руху, напрямленими вздовж однієї осі. Вісь, вздовж якої напрямлені відповідні вектори, називається *миттєвою гвинтовою віссю*.

7. Метод зупинення. Формули Віллеса.

Метод зупинення – це метод визначення кутових швидкостей окремих елементів *планетарних або епіциклічних механізмів*. Планетарний (епіциклічний) механізм складається з циліндричних або конічних коліс, які обертаються навколо нерухомих або рухомих осей. Колеса, які обертаються навколо рухомих осей називають сателітами. Ці елементи здійснюють складний рух. Інші елементи механізму, які надають сателітам переносний рух, називають коромислом (водилом).

Вочевидь, оскільки центри сателітів рухомі, то при визначенні їх кутових швидкостей не можна використовувати тільки умову рівності швидкостей точок дотику коліс, як це робиться в простих передачах (рис.8.3):

$$v_K = \omega_1 \cdot R_1 = \omega_2 \cdot R_2,$$

звідки

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{R_2}{R_1}, \quad (8.3)$$

де R_1, R_2 – радіуси коліс. Знак $+$ у формулі (8.3) обирається у випадку однакового напрямку обертання коліс (внутрішнє зачеплення, рис.8.3, а), а знак $-$ у випадку різного напрямку обертання коліс (зовнішнє зачеплення, рис.8.3, б).

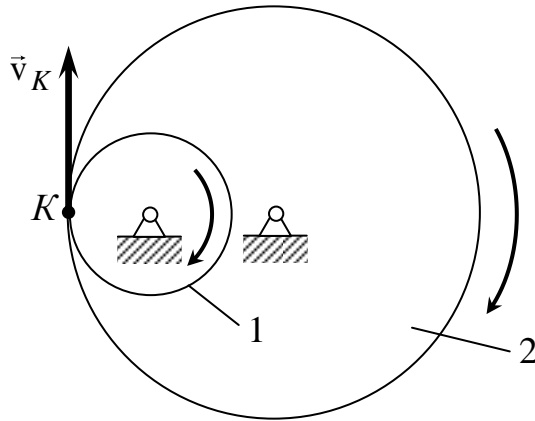


Рис.8.3, а

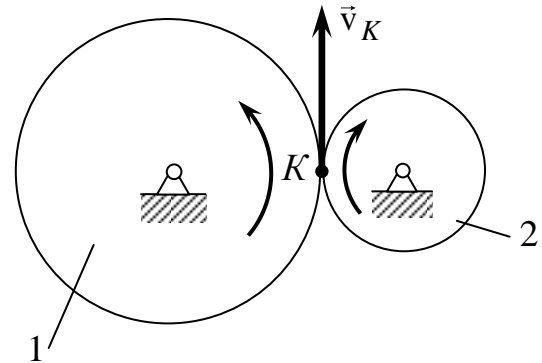


Рис.8.3, б

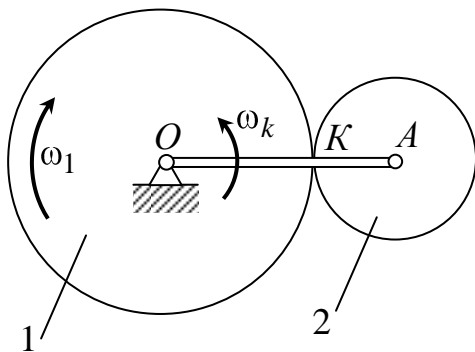


Рис.8.4, а

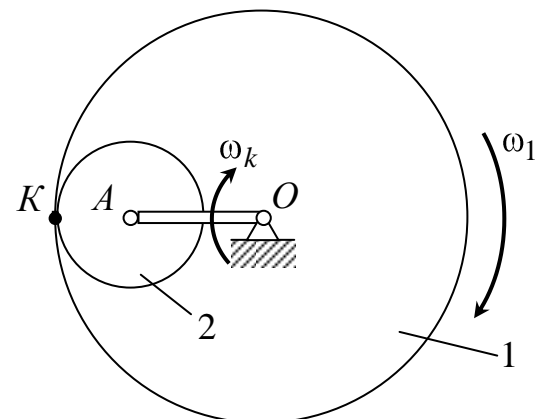


Рис.8.4, б

Для визначення кутових швидкостей сателітів планетарного механізму (тіло 2 на рис.8.4) потрібно умовно «зупинити» їх центри шляхом зміни нерухомої системи координат спостерігача на рухому систему координат, зв'язану з тілом, яке надає переносний рух сателітам – коромислом. Математично ця дія реалізується відніманням кутової швидкості коромисла від кутових швидкостей усіх елементів механізму. Далі використовується умова рівності швидкостей точок дотику коліс в рухомій системі координат, тобто відносних швидкостей:

$$v_{Kr} = (\omega_i - \omega_k) \cdot R_i = (\omega_{i+1} - \omega_k) \cdot R_{i+1},$$

звідки

$$\frac{\omega_i - \omega_k}{\omega_{i+1} - \omega_k} = (-1)^n \frac{R_{i+1}}{R_i} \quad (8.4)$$

Співвідношення (8.4) називають формулами Вілліса. В них позначено через R_i, R_{i+1} радіуси відповідних коліс, які знаходяться у зачепленні; ω_k –

кутова швидкість коромисла; ω_i, ω_{i+1} – абсолютні кутові швидкості коліс; $\omega_i - \omega_k$, $\omega_{i+1} - \omega_k$ – відносні кутові швидкості коліс. Показник степеня $n=1$ відповідає зовнішньому зачепленню (рис.8.4,а) та $n=2$ – внутрішньому зачепленню (рис.8.4,б).

В планетарних передачах (рис.8.4) кривошип OA , що має задану кутову швидкість ω_k , є коромислом, а рухоме колесо 2 – сателітом, тобто виконує складний рух: обертається навколо двох паралельних осей.

При розв'язуванні задач з використанням методу зупинення рекомендується скласти таблицю кутових швидкостей ланок механізму до і після зупинення.

8. Приклад.

На рисунку 8.4,а зображено планетарний механізм, який використовується для отримання великих кутових швидкостей при малих обертах провідного вала з'єднаного з кривошипом OA . Кривошип OA обертається навколо нерухомої осі O з кутовою швидкістю $\omega_k = 2$ 1/с. Колесо 2, насаджено на кінець кривошипа OA , котиться без ковзання по рухомому колесу 1, вільно насадженому на вісь O , яке обертається з кутовою швидкістю $\omega_1 = 10$ 1/с у напрямку протилежному до обертання кривошипа OA . Знайти кутову швидкість колеса 2, якщо радіуси коліс 1 і 2 відповідно дорівнюють $R_1 = 10$ см, $R_2 = 5$ см.

Для розв'язування задачі визначимо коромисло. В нашому випадку це кривошип OA . Далі, від кутових швидкостей усіх тіл механізму віднімемо кутову швидкість кривошипа OA та складемо таблицю кутових швидкостей елементів механізму до і після "зупинення":

Кутові швидкості тіл	1	2	3
до зупинення	ω_1	ω_2	ω_k
після зупинення	$\omega_1 - \omega_k$	$\omega_2 - \omega_k$	$\omega_k - \omega_k = 0$

Наступним кроком шукаємо тіла, які знаходяться у зачепленні: колесо 1 та 2. Оскільки зачеплення зовнішнє, запишемо формулу Вілліса

$$\frac{\omega_1 - \omega_k}{\omega_2 - \omega_k} = -\frac{R_2}{R_1},$$

звідки знаходимо

$$\omega_2 = \omega_k - (\omega_1 - \omega_k) \frac{R_1}{R_2}.$$

Вважаючи напрям обертання коромисла додатнім, отримаємо

$$\omega_2 = 2 - (-10 - 2) \frac{10}{5} = 26 \text{ 1/с.}$$

Отже, колесо 2 отримало кутову швидкість в 13 разів більшу за кутову швидкість кривошипа з тим же напрямом обертання.

9. Контрольні запитання

1. Дайте означення складного руху твердого тіла.
2. Що є результатом складання двох поступальних рухів тіла?
3. Який прийом використовується при визначенні результуючого руху, що є сукупністю двох поступальних рухів твердого тіла?
4. Який рух є результатом складання двох обертальних рухів твердого тіла навколо перетинних осей?
5. У якому випадку сукупність двох обертальних рухів твердого тіла створює поступальний рух?
6. Як визначається момент пари обертань?
7. Який рух твердого тіла є результатом складання двох обертальних рухів з паралельними та співнапрямленими кутовими швидкостями?
8. Який рух твердого тіла є результатом складання двох обертальних рухів з паралельними та протилежними кутовими швидкостями?
9. Як визначається положення вектора кутової швидкості результуючого руху твердого тіла, що є сукупністю обертальних рухів навколо паралельних осей з протилежними та нерівними векторами кутових швидкостей?
10. Який рух виконує тверде тіло в результаті складання поступального та обертального руху з перпендикулярними векторами швидкостей?
11. Як називається рух, що є результатом складання поступального та обертального рухів тіла з з неперпендикулярними векторами швидкостей?
12. Який прийом використовується при визначенні результату складання поступального та обертального рухів твердого тіла?
13. Які форми руху може виконувати тверде тіло?
14. Для яких механічних систем використовується метод зупинення?
15. Що таке коромисло?
16. У чому полягає фізичний зміст методу зупинення?
17. Що таке внутрішнє та зовнішнє зачеплення зубчастих коліс?
18. Як записується формула Вілліса для зовнішнього зачеплення?
19. Що таке сателіт?
20. Від чого залежить кількість формул Вілліса при дослідженні руху механічної системи?

Розділ 3. ДИНАМІКА
Тема 4.1. Динаміка вільної матеріальної точки
Лекція 9.

1. Вступ. Закони Ньютона.

Динаміка – розділ теоретичної механіки, у якому вивчаються властивості механічних рухів з урахуванням сил, які викликають цей рух.

В основі динаміки лежать закони (аксіоми, постулати) Ньютона. Вперше ці закони або аксіоми руху були викладені І. Ньютоном (Isaac Newton) в роботі «Математичні початки натуральної філософії», яка була опублікована в Англії у 1687 році. Переклад на російську мову цієї праці було виконано академіком О. М. Криловим та надруковано у 1916 році.

Спираючись на російське видання [5], перший закон формулюється Ньютоном так: *усяке тіло продовжує утримуватись у своєму стані спокою або рівномірного та прями́лінійного руху, поки та оскільки воно не змушується прикладеними силами змінювати цей стан*. Формулювання першого закону Ньютона, який називають також законом інерції, можна також подати наступним чином [6]: *Ізольована матеріальна точка (тіло) зберігає стан спокою або рівномірного прями́лінійного руху до того часу, поки дія інших сил не виведе її з цього стану*.

Зазначимо, що ізольованою матеріальною точкою (тілом) називають точку, взаємодією якої з іншими тілами можна знехтувати.

З формулювання першого закону Ньютона випливає важлива властивість матеріальних тіл - властивість інертності, тобто збереження ними початкового стану спокою або рівномірного руху при відсутності будь-яких чинників, які можуть цей стан змінити. Властивість інертності не залежить від вибору системи відліку. Але потрібно зауважити, що система відліку, в якій досліджується стан рівномірного руху або спокою матеріального тіла, які вимірюються певними кінематичними характеристиками, також повинна перебувати у стані спокою (бути «абсолютною та нерухомою») або рухатись рівномірно та прями́лінійно. Така система відліку називається *інерціальною* або галілеєвою.

Другий важливий висновок з першого закону Ньютона – він вказує на причину зміни механічного руху – дію сил. Тобто, у випадку будь-якого криволінійного руху або прями́лінійного нерівномірного руху на точку діє сила.

Кількісна залежність між силою та зміною механічного руху визначається другим законом Ньютона. Формулювання, яке дає І. Ньютон, виглядає так: *Зміна кількості руху пропорційна прикладеній силі та відбувається у напрямку тієї прямої, вздовж якої ця сила діє*.

За кількість руху приймають величину, яка дорівнює: $\vec{q} = m\vec{v}$, де m - маса точки (тіла), \vec{v} - її швидкість. Поняття маси вперше введено Ньютоном та формулюється ним так: маса є кількість матерії в тілі, яка встановлюється пропорційно густині та об'єму. Сучасне визначення маси, як і Ньютона, також

демонструє її незалежність від вибору системи відліку та прикладених сил і показує способи її визначення: *маса – це фізична величина, яка визначає вміст речовини у тілі та характеризує його інертні та гравітаційні властивості.*

Другий закон Ньютона у сучасних джерелах [6] формулюється так: *Бистрота зміни кількості руху матеріальної точки (або похідна за часом від кількості руху точки) дорівнює силі прикладеної до точки:*

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{F}. \quad (9.1)$$

У випадку сталої маси тіла

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \quad (9.2)$$

або

$$m\vec{w} = \vec{F}, \quad (9.3)$$

де \vec{w} – прискорення точки.

Вираз (9.3) називають основним законом динаміки матеріальної точки.

Зазначимо, що одиниці вимірювання маси, часу та довжини в системі СІ прийняті за основні одиниці механіки. За одиницю вимірювання маси приймається *кілограм* (кг). Одиницею вимірювання сили є *ньютон* (Н), тобто сила, яка надає тілу масою 1 кг прискорення 1 м/с² у напрямку дії сили. За одиницю довжини приймається *метр* (м), за одиницю часу – *секунда* (с).

Третій закон Ньютона, який називають також *законом рівності дії та протидії*, вказує на джерело виникнення сили – взаємодію тіл: *Усяка дія породжує рівну за величиною і протилежну напрямлену протидію.*

Так, якщо тіло *B* діє на тіло *A* з силою \vec{F} (рис.9.1), то за сформульованим законом тіло *A* створює протидію \vec{F}' , яка прикладена до тіла *B* і задовольняє умову $\vec{F}' = -\vec{F}$.

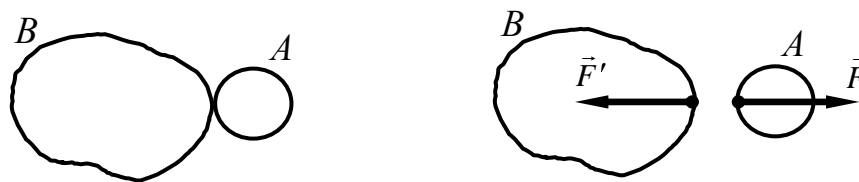


Рис.9.1

Зазначимо, що взаємодія між тілами може бути як контактною, так і здійснюватись за допомогою полів (гравітаційних, електромагнітних).

У випадку одночасної взаємодії тіла з іншими тілами, говорять про дію на дане тіло деякої системи сил $\{\vec{F}\}_{i=1}^n$, де n – кількість сил. Спираючись на аксіому Ньютона про паралелограм сил () та другий закон Ньютона, можна сформулювати *закон незалежності дії сил* (принцип суперпозиції):

Прискорення точки, яке викликається дією декількох сил дорівнює векторній сумі прискорень, кожне з яких викликається окремо взятою силою:

$$\vec{w} = \frac{\vec{F}}{m} = \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) \frac{1}{m} = \sum_{i=1}^n \frac{\vec{F}_i}{m} = \sum_{i=1}^n \vec{w}_i, \quad (9.4)$$

де $\vec{w}_i = \frac{\vec{F}_i}{m}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Співвідношення (9.4) запишемо у формі (9.3), яка використовується для складання динамічних рівнянь руху матеріальної точки

$$m\vec{w} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (9.5)$$

2. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

На підставі основного рівняння динаміки матеріальної точки (9.3) та принципу суперпозиції можна записати диференціальні (динамічні) рівняння руху точки у векторній, координатній або натуральній формі, в залежності від способу задання руху досліджуваної точки.

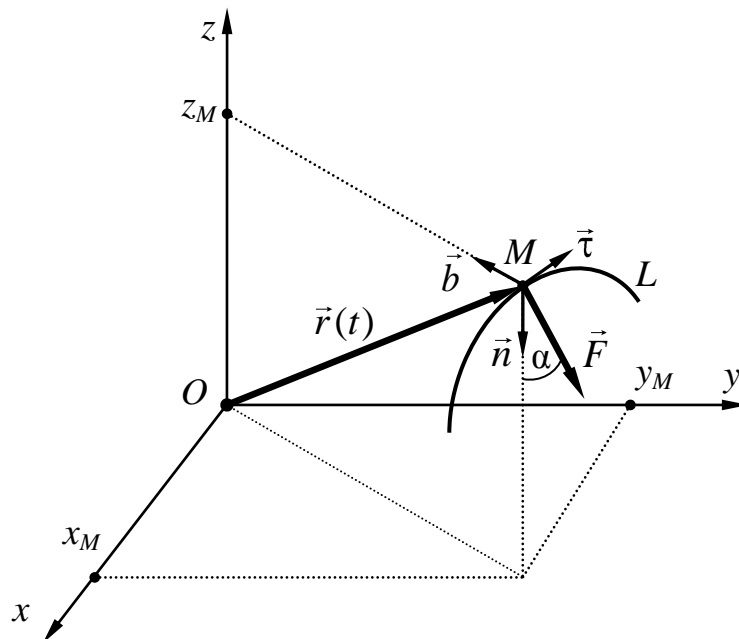


Рис.9.2

Припустимо, що рух вказаної точки задано векторним способом, тобто її положення у будь-який момент часу визначається радіусом-вектором

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

відносно деякого полюса O (рис.9.2). В цьому випадку швидкість та прискорення точки подаються як перша та друга похідна за часом від радіуса-вектора точки

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t), \quad \vec{w} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t),$$

а прикладені до точки сили вважаються залежними від часу, положення точки та її швидкості

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i(t, \vec{r}, \vec{v}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Залежність сили від прискорення може виникнути при русі в рідині тіла певного об'єму та має зміст приєднаної до тіла деякої маси рідини, тому тут цей випадок розглядатись не буде.

Тоді диференціальні рівняння руху матеріальної точки у векторній формі запишуться так

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}), \quad (9.6)$$

де $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ – рівнодійна системи сил, прикладених до точки.

У випадку координатного способу задання руху точки її положення задається сукупністю деяких функцій часу, які є координатами точки у вибраній системі відліку. Припустимо, що задано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ (рис.9.2) і положення точки визначається її координатами $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Тоді диференціальні рівняння руху в координатній формі можна отримати проектуванням (9.5) на осі системи координат $Oxyz$

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum_{i=1}^n F_{ix}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{y} &= \sum_{i=1}^n F_{iy}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} &= \sum_{i=1}^n F_{iz}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \end{aligned} \quad (9.7)$$

де $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_x$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = v_y$, $\dot{z} = \frac{dz}{dt} = v_z$ – проекції швидкості точки;

$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = w_x$, $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = w_y$, $\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2} = w_z$ – проекції прискорення точки;

$\sum_{i=1}^n F_{ix}$, $\sum_{i=1}^n F_{iy}$, $\sum_{i=1}^n F_{iz}$ – суми проекцій рівнодійної сил, прикладених до точки, на осі системи координат $Oxyz$.

Нехай відома траєкторія L точки і її положення на цій траєкторії визначається дуговою координатою $s = s(t)$ відносно деякого початку відліку, що знаходиться на траєкторії (рис.9.2). В цьому випадку кажуть про

натуральний спосіб задання руху точки. Спроекуємо (9.5) на осі натуральної системи координат $M\tau nb$, де M – рухома точка:

$$\begin{aligned} mw_{\tau} &= \sum_{i=1}^n F_{i\tau}, \\ mw_n &= \sum_{i=1}^n F_{in}, \\ mw_b &= \sum_{i=1}^n F_{ib} \end{aligned}$$

та врахуємо, що $w_{\tau} = \dot{v} = \ddot{s}$ – дотичне прискорення точки, $w_n = v^2/\rho = \dot{s}^2/\rho$ – нормальне прискорення точки; $w_b = 0$. Тоді диференціальні рівняння руху точки в натуральній формі або формі Ейлера можна записати так

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= \sum_{i=1}^n F_{i\tau}(t, s, \dot{s}), \\ m \frac{\dot{s}^2}{\rho} &= \sum_{i=1}^n F_{in}(t, s, \dot{s}), \\ 0 &= \sum_{i=1}^n F_{ib}(t, s, \dot{s}), \end{aligned} \quad (9.8)$$

де ρ – радіус кривини траєкторії, $\sum_{i=1}^n F_{i\tau}$, $\sum_{i=1}^n F_{in}$, $\sum_{i=1}^n F_{ib}$ – проекції рівнодійної сил, які вважаються залежними від часу, дугової координати та швидкості точки, на осі натуральної системи координат $M\tau nb$.

Лекція 10.

3. Дві основні задачі динаміки матеріальної точки. Пряма (перша) задача динаміки матеріальної точки.

Прямою або першою основною задачею динаміки матеріальної точки називають наступну задачу: *за відомим кінематичним законом руху точки та її масою визначити рівнодійну сил, прикладених до точки.*

При координатному способі задання руху матеріальної точки перша основна задача динаміки розв'язується на підставі рівнянь (9.7), тобто

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z}, \quad (10.1)$$

звідки визначається модуль рівнодійної сили

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad (10.2)$$

та напрямні косинуси

$$\cos(\vec{F}, Ox) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\vec{F}, Oy) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(\vec{F}, Oz) = \frac{F_z}{F}, \quad (10.3)$$

які дозволяють знайти напрям вектора рівнодійної.

При натуральному способі задання руху матеріальної точки рівнодійну сил можна визначити, застосовуючи рівняння (9.8):

$$F_\tau = m\ddot{s}, \quad F_n = m \frac{\dot{s}^2}{\rho},$$

звідки $F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}$. Вектор рівнодійної \vec{F} лежить у дотичній площині $M\tau n$ (рис.9.2) і утворює кут α з напрямком нормалі до траєкторії точки. Вказаний кут визначають з виразу:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_\tau}{F_n} = \frac{\ddot{s}\rho}{\dot{s}^2} = \frac{\dot{\nu}\rho}{v^2}.$$

Розглянемо методику розв'язання першої задачі динаміки на наступному **прикладі**: Точка масою 2 кг рухається за законом $x(t) = 2t$, $y(t) = 2t^2$. Визначити силу, під дією якої рухається точка.

Спершу визначаємо спосіб задання руху точки: з умови випливає, що рух точки здійснюється у площині Oxy , тобто задано координатним способом. Аналіз закону руху показує, що під час руху точка перебуває тільки у першій чверті координатної площини.

Далі, за заданим законом руху, визначимо проекції прискорення точки на координатні осі :

$$w_x = \ddot{x} = 0, \quad w_y = \ddot{y} = 4,$$

а потім проекції сил

$$F_x = m\ddot{x} = 0, \quad F_y = m\ddot{y} = 8.$$

Модуль сили дорівнює $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 8$, а напрямні косинуси

$$\cos(\vec{F}, \hat{Ox}) = 0, \quad \cos(\vec{F}, \hat{Oy}) = 1.$$

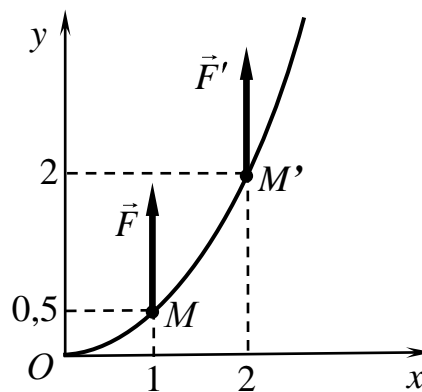


Рис.10.1.

З отриманих результатів випливає, що величина і напрям вектора сили не змінюється з часом. Зобразимо вектор сили на рисунку. Для цього визначимо рівняння траєкторії точки шляхом виключення часу t з рівнянь руху. Отримаємо рівняння параболи

$$y = \frac{1}{2}x^2,$$

та зображуємо відповідну криву у першій чверті координатної площини Oxy (рис.10.1). Відповідно до знайдених значень напрямних косинусів зображуємо вектор сили.

4. Обернена (друга) задача динаміки матеріальної точки

Оберненою або другою основною задачею динаміки матеріальної точки називається *задача визначення невідомого кінематичного закону (рівняння) руху точки за заданими силами та масою точки*. Розв'язання даної задачі полягає в інтегруванні відповідних диференціальних рівнянь руху точки, використовуючи прийоми теорії звичайних диференціальних рівнянь.

Нехай рух точки задано координатним способом в прямокутній декартовій системі відліку та диференціальні рівняння руху записано у формі (9.7). Припустимо, що ці рівняння шляхом певних перетворень подаються як повні диференціали деяких функцій:

$$\frac{d}{dt} f_1(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} f_2(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} f_3(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0,$$

або у згорнутому вигляді

$$\frac{d}{dt} f_i(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Нескладно бачити, що

$$f_i(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10.4)$$

де C_i , $i = 1, 2, 3$ - сталі інтегрування.

Вирази (10.4) називаються *першими інтегралами* системи диференціальних рівнянь (9.7).

Припускаючи, що для системи рівнянь (10.4) також можливе подання у вигляді повних диференціалів

$$\frac{d}{dt} g_i(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

отримаємо

$$g_i(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) = C_{i+3}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10.5)$$

Вирази (10.5) називаються *другими інтегралами* системи рівнянь (9.7) і утримують шукані функції x , y , z та сталі інтегрування C_1, C_2, \dots, C_6 .

Якщо (10.5) допускають розв'язання відносно шуканих величин, отримаємо

$$\begin{aligned}x &= x(t, C_1, \dots, C_6), \\y &= y(t, C_1, \dots, C_6), \\z &= z(t, C_1, \dots, C_6).\end{aligned}\tag{10.6}$$

Визначення конкретного закону руху з усієї множини можливих законів руху відбувається за відомих сталих інтегрування C_1, C_2, \dots, C_6 . Для їх знаходження використовуються *початкові умови*: значення координат точки та проекцій її швидкості у початковий момент часу t_0 :

$$\begin{aligned}x(t_0) &= x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0, \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \quad \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0.\end{aligned}\tag{10.7}$$

Зазначимо, що сукупність системи диференціальних рівнянь (9.7) та початкових умов (10.7) називається в теорії диференціальних рівнянь *задачею Коші*.

Значення початкових умов (10.7) підставляємо у (10.6) та похідні за часом від функцій (10.6):

$$\begin{cases} x_0 = x(t_0, C_1, \dots, C_6), \\ y_0 = y(t_0, C_1, \dots, C_6), \\ z_0 = z(t_0, C_1, \dots, C_6), \\ \dot{x}_0 = \dot{x}(t_0, C_1, \dots, C_6), \\ \dot{y}_0 = \dot{y}(t_0, C_1, \dots, C_6), \\ \dot{z}_0 = \dot{z}(t_0, C_1, \dots, C_6). \end{cases}\tag{10.8}$$

Далі розв'язуємо отриману систему рівнянь (розв'язок в явній формі не завжди існує) відносно $C_j = C_j(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$, $j = 1, 2, \dots, 6$. Знайдені значення сталих інтегрування підставляємо у (10.6) та остаточно знаходимо шуканий закон руху $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

При *натуральному способі* шуканий закон руху після інтегрування першого рівняння $m\ddot{s} = F_\tau$ системи (9.8), якщо це можливо, має вигляд $s = s(t_0, C_1, C_2)$. Сталі інтегрування C_1, C_2 визначаються з урахуванням початкових умов $s(t_0) = s_0$, $v_\tau(t_0) = \dot{s}_0$, з системи рівнянь

$$\begin{cases} s_0 = s(t_0, C_1, C_2), \\ \dot{s}_0 = \dot{s}(t_0, C_1, C_2). \end{cases}\tag{10.9}$$

Друге рівняння системи (9.6)

$$m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n$$

дозволяє визначити радіус кривини траєкторії як функцію часу.

Розв'язання оберненої задачі динаміки при *векторному способі* задання руху проводиться аналогічно і вимагає задання початкових умов у формі

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \quad \dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0.\tag{10.10}$$

При розв'язанні оберненої задачі динаміки рекомендується притримуватись наступної методики:

1. Визначаємо об'єкт дослідження – матеріальну точку і зображуємо його в поточному положенні.
2. Вводимо систему відліку, осі якої зображуємо на рисунку. При можливості, додатній напрям осей напрямляємо у бік руху точки.
3. Визначаємо початкові умови руху точки.
4. Зображуємо на рисунку активні сили та реакції в'язей (для невіЛЬНОї матеріальної точки).
5. Складаємо динамічні (диференціальні) рівняння руху точки користуючись основним законом динаміки точки та законом незалежності дії сил.
6. Інтегруємо отримані рівняння руху. Визначаємо сталі інтегрування, використовуючи початкові умови і отриманий загальний розв'язок.
7. Записуємо кінематичний закон руху матеріальної точки.

5. Контрольні запитання

1. Що вивчає розділ теоретичної механіки – динаміка?
2. Які висновки можна зробити з першого закону Ньютона? Яке він має формулювання?
3. У чому полягає властивість інертності тіла?
4. Сформулюйте другий закон Ньютона, використовуючи поняття кількості руху.
5. Який висновок можна зробити з третього закону Ньютона та як він формулюється?
6. Як формулюється закон незалежності дії сил?
7. У яких системах відліку виконуються закони Ньютона?
8. Як записуються диференціальні рівняння руху точки у векторній та координатній формах?
9. Як подається форма Ейлера запису диференціальних рівнянь руху матеріальної точки?
10. Які величини повинні бути відомими, а які треба визначити у прямій задачі динаміки точки? В оберненій?
11. Від чого залежить кількість перших або других інтегралів рівнянь руху точки?
12. Що таке задача Коші?
13. Дайте означення маси тіла.
14. Що таке початкові умови і як вони визначаються у випадку координатного способу запису руху точки?
15. Як формулюються початкові умови у випадку векторного та натурального способу задання руху точки?
16. Від чого залежить кількість початкових умов?
17. Яка методика розв'язання першої задачі динаміки?
18. Вкажіть методику розв'язання другої задачі динаміки?

Тема 4.2. Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки. Принцип Даламбера.

Лекція 11.

1. Динамічне рівняння руху невільної матеріальної точки.

Вважаємо, що невільна матеріальна точка M маси m рухається під дією активної сили \vec{F} . На точку накладено в'язь, дію якої заміняємо реакцією \vec{R} , згідно аксіоми про звільнення від в'язей. Рівнодійна прикладених до точки сил дорівнює \vec{R} .

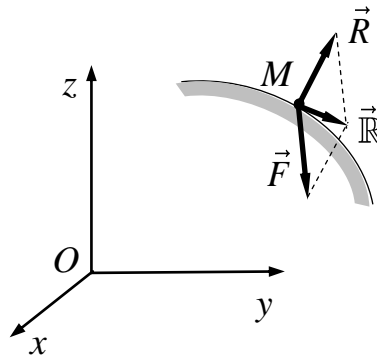


Рис. 11.1

Таким чином тепер точку M можна розглядати як вільну і застосувати основний закон динаміки точки:

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{R}. \quad (11.1)$$

Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки в координатній формі, в проекціях на осі декартової системи координат $Oxyz$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + R_x, \\ m\ddot{y} &= F_y + R_y, \\ m\ddot{z} &= F_z + R_z. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Визначимо, як формулюються дві основні задачі динаміки точки, пряма та обернена, у випадку невільної матеріальної точки.

Пряма, або перша основна задача: Задано масу m та кінематичні рівняння руху $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Невідомими в цьому випадку є проекції активних сил F_x , F_y , F_z та реакцій в'язі R_x , R_y , R_z , тобто при наявності трьох рівнянь (11.2) маємо 6 невідомих величин.

Обернена, або друга, основна задача: Потрібно визначити кінематичні рівняння руху матеріальної точки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, а також проекції реакцій в'язей R_x , R_y , R_z , якщо задано її масу m , прикладену до неї силу \vec{F} і початкові умови руху. Отже задача має також 6 невідомих.

Таким чином, оскільки невідомих величин більше ніж рівнянь, для розв'язання основної задачі динаміки невільної матеріальної точки потрібні додаткові співвідношення. Для того, щоб отримати додаткові співвідношення, потрібно ввести рівняння в'язей.

2. Типи в'язей та їх рівняння

В'язь називається *стаціонарною*, якщо час t не входить явно в її рівняння, а входять лише координати точки:

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0. \quad (11.3)$$

В'язь називається *нестационарною*, якщо до її рівняння входить час.

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0. \quad (11.4)$$

В'язь називається *утримувальною*, або *двосторонньою*, якщо для кожного переміщення точки можна вказати протилежне.

Прикладом системи з двосторонньою в'яззю є матеріальна точка, що утримується за допомогою абсолютно жорсткого стрижня.

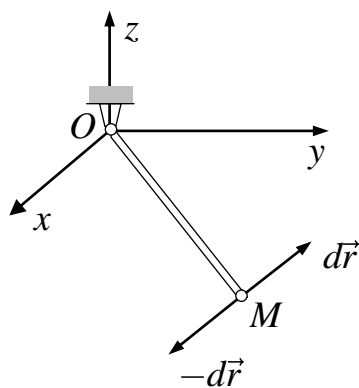


Рис. 11.2

Нехай OM – жорсткий стрижень, точка M – точка з координатами $M(x_M, y_M, z_M)$. Рівняння в'язі в цьому випадку має вигляд: $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = l^2$, тобто рівняння сфери, яку описує точка M в процесі руху. Для кожного нескінченно малого переміщення $d\vec{r}$ при цьому можна вказати протилежне переміщення $-d\vec{r}$.

В'язь називається *неутримувальною*, якщо існують такі переміщення точки, для яких не можна вказати протилежне.

Неутримувальні в'язі аналітично визначаються нерівностями. Кінематична неутримувальна в'язь визначається умовою:

$$f(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) \geq 0. \quad (11.5)$$

Якщо виконується строга нерівність (11.5), то кажуть, що точки системи не перебувають на в'язі.

Фізичними прикладами неутримувальних в'язей є поверхні твердих тіл, а також нитки, мотузки і т. д. Поверхні твердих тіл можуть обмежувати рух системи матеріальних точок лише в напрямках внутрішніх нормалей і в напрямках, дотичних до поверхні. Останні обмеження пов'язані з наявністю

сил тертя. Поверхня тіла не обмежує руху точок матеріальної системи в напрямку зовнішніх нормалей до поверхні тіла. Точки матеріальної системи можуть залишати поверхню тіла в напрямках її зовнішніх нормалей. Тому в'язь, фізично обумовлена наявністю поверхні тіла, називається *неутримувальною*, або *односторонньою*. Отже, одностороння або неутримувальна в'язь, обмежуючи рух точок системи в деякому напрямку, не обмежує їх рух в протилежному напрямку.

Наприклад, нитка обмежує рух точок системи перебуваючи натягнутою. Нитка не накладає обмежень на рух точок матеріальної системи, що призводять до складання нитки (рис.11.3).

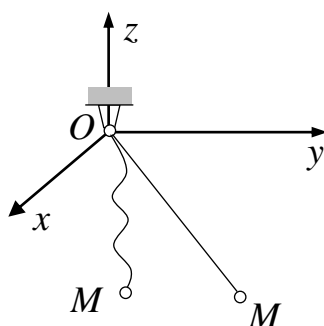


Рис. 11.3.

Нехай OM – нерозтяжна нитка, точка M – точка з координатами $M(x_M, y_M, z_M)$. Рівняння в'язі в цьому випадку має вигляд:

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 \leq l^2.$$

В'язі, в рівняння яких входять тільки координати точок системи і, можливо, час, називаються *геометричними*. Вони представлені рівняннями (11.3), (11.4). Якщо в рівняння в'язей входять швидкості точок системи, вони називаються *кінематичними*. Рівняння нестационарної кінематичної в'язі записується таким чином:

$$f(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) = 0.$$

Кінематична неутримуюча в'язь визначається умовою:

$$f(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) \geq 0. \quad (11.6)$$

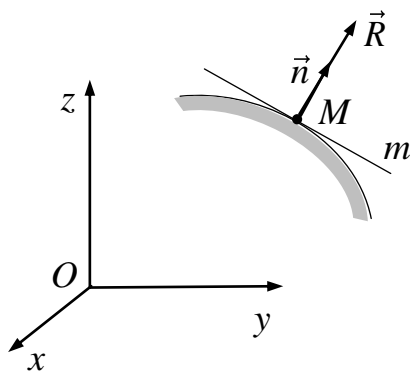


Рис. 11.4.

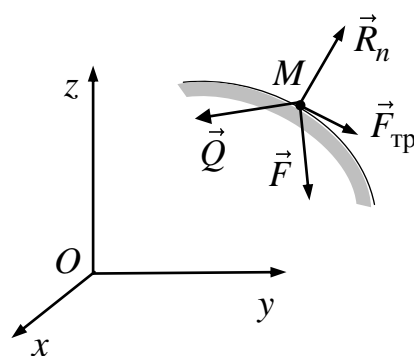


Рис. 11.5.

Усі геометричні та кінематичні в'язі, рівняння яких можна проінтегрувати, називаються *голономними*.

Кінематичні в'язі, які не можна проінтегрувати, називаються *неголономними*.

Ідеальними в'язями називаються в'язі, властивості яких дозволяють наперед вказати напрям реакції.

Абсолютно гладка поверхня (рис. 11.4.) є ідеальною в'яззю, оскільки відомий напрям її реакції – він збігається з напрямом нормалі $\vec{R} \parallel \vec{n}$.

На рис. 11.5 зображено неідеальну в'язь – шорстку поверхню. Напрямок реакції такої поверхні невідомий, оскільки до складу реакції входить сила тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$, величина якої наперед невідома. Реакція шорсткої поверхні буде визначатись за формулою:

$$\vec{R} = \vec{R}_\tau + \vec{R}_n = \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N}.$$

Припустимо, що рух точки обмежено ідеальною в'яззю. Нехай $f(x, y, z) = 0$ – її рівняння. Тоді

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\}$$

є вектор, напрямлений вздовж зовнішньої нормалі \vec{n} . Нехай \vec{N} – реакція цієї в'язі, яка напрямлена по нормалі. Отже маємо

$$\vec{N} \parallel \overrightarrow{\text{grad}} f.$$

Звідси випливає співвідношення:

$$\frac{N_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{N_y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{N_z}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \lambda, \quad (11.7)$$

де λ – невизначений *множник Лагранжа*, який може бути функцією координат і часу. Тоді з (11.7) отримаємо співвідношення:

$$\begin{aligned} R_x &= N_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ R_y &= N_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ R_z &= N_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Підставимо (11.8) в (11.2), отримаємо:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Ці рівняння називаються рівняннями Лагранжа I роду і дозволяють визначити невідомі величини як першої, так і другої задачі динаміки точки. Так, у випадку розв'язання першої задачі динаміки точки – невідомими величинами є F_x , F_y , F_z , λ ; у вирадку другої задачі динаміки точки – невідомими є $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, λ .

Лекція 12

3. Принцип Д'Аламбера для матеріальної точки

Рівняння руху невільної матеріальної точки відносно інерціальної системи відліку під дією прикладених активних сил і реакцій в'язей має вигляд:

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{R}, \quad (12.1)$$

де \vec{F} - рівнодійна активних сил; \vec{R} - рівнодійна реакцій в'язей.

Формально перепишемо рівність (12.1):

$$\vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{w}) = 0. \quad (12.2)$$

Силою інерції (даламберовою) матеріальної точки називають добуток маси точки на вектор прискорення, взятий з протилежним знаком, тобто

$$\vec{\Phi} = -m\vec{w}. \quad (12.3)$$

З введенням поняття сили інерції $\vec{\Phi} = -m\vec{w}$ основне рівняння динаміки точки приводиться до рівняння, яке має вигляд рівняння рівноваги:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0. \quad (12.4)$$

що відповідає принципу Д'Аламбера, який формулюється наступним чином: у кожний момент часу для рухомої матеріальної точки векторна сума активних сил, реакцій в'язей та сил інерції дорівнює нулю.

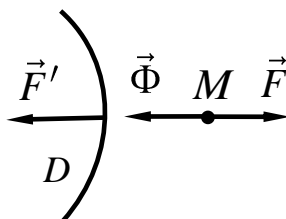


Рис. 12.1

Пояснимо фізичний зміст появи даламберової сили інерції на прикладі вільної матеріальної точки M масою m , на яку діє деяка сила \vec{F} з боку тіла D (рис.12.1). За другим законом Ньютона, внаслідок дії тіла D точка M набуває прискорення \vec{w} , напрямом якого такий самий, як і прикладеної до точки сили \vec{F}

$$m\vec{w} = \vec{F}.$$

Зазначимо, що точка починає рухатись прискорено. В свою чергу, до тіла D , буде прикладена, за третім законом Ньютона, сила протидії $\vec{F}' = -\vec{F}$, яка з урахуванням другого закону Ньютона дорівнює $\vec{F}' = -\vec{F} = -m\vec{w}$ або $\vec{F}' = -m\vec{w} = \vec{\Phi}$. Тобто протидія точки M , яка прикладена до тіла D , дорівнює силі інерції $\vec{\Phi}$. Цю силу називають *ньютонівською силою інерції*.

У свою чергу, при розв'язанні задач силу інерції уявно прикладають до досліджуваної точки, та записують рівняння руху точки у формі умови рівноваги системи сил $\{\vec{F}, \vec{\Phi} = \vec{F}'\}$. Уявно прикладену до точки (а отже, – фіктивну) силу, яка дорівнює силі протидії, називають *даламберовою силою інерції* і позначають $\vec{\Phi}$. «Прикладаючи» останню до точки, замість прискореного руху можна розглядати «рівновагу» точки.

Таким чином, за допомогою принципу Д'Аламбера динамічну задачу (для матеріальної точки) можна звести формально до відповідної статичної задачі, тобто до застосування умов рівноваги відповідної системи збіжних сил. В загальному випадку отримуємо три рівняння проєкцій сил на три взаємно перпендикулярні осі.

Зазначимо, що принцип Д'Аламбера надає відомі зручності при розв'язанні прямої задачі динаміки точки, але при розв'язанні оберненої задачі краще використовувати диференціальні рівняння руху.

Зауваження: при використанні цього принципу необхідно пам'ятати, що сила інерції завжди напрямлена у бік, протилежний прискоренню.

При розв'язанні задач за допомогою принципу Д'Аламбера рекомендується дотримуватися такої послідовності.

1. Виділити точку, рух якої досліджується, і зобразити її на рисунку.
2. Показати всі активні (задані) сили, що діють на точку.
3. Звільнити точку від в'язей, замінити в'язі відповідними реакціями, які також вказати на рисунку.
4. Додати до отриманої системи сил силу інерції.
5. Розглянути утворену «зрівноважену» систему сил і скласти для неї необхідні рівняння руху у формі рівнянь «рівноваги».
6. Знайти шукані величини і проаналізувати отриманий розв'язок.

4. Принцип Д'Аламбера для системи точок

Застосування принципу Д'Аламбера до механічної системи (до кожної її точки) дає можливість надати диференціальним рівнянням руху всієї системи вигляд рівнянь статички. Цей метод отримав назву *метода кінестатики*, він полягає в наступному: *якщо до діючих на механічну систему сил додати сили інерції, то отримана система сил буде знаходитися у «рівновазі»*.

Доведемо принцип Д'Аламбера для механічної системи. Розглянемо систему, яка складається з матеріальних точок M_1, M_2, \dots, M_n (рис. 12.2).

Якщо вона невільна, відкинемо в'язі та замінимо їх дію відповідними реакціями.

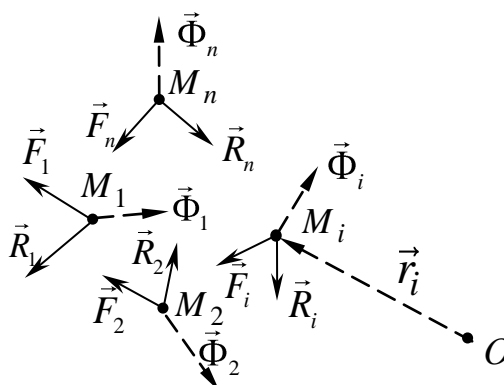


Рис. 12.2

На рис. 12.2 показано прикладені до кожної точки системи рівнодійну активних сил \vec{F}_i , рівнодійну реакцій зовнішніх в'язей \vec{R}_i^e і рівнодійну реакцій внутрішніх в'язей \vec{R}_i^{6H} . Оскільки кожна точка системи після цього стає вільною, запишемо для i -тої точки системи рівність (12.4):

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i^e + \vec{R}_i^{6H} + \vec{\Phi}_i = 0. \quad (12.4)$$

Складаючи усі рівності (12.4) за індексом i , дістанемо

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i^e + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i^{6H} + \sum_{i=1}^n \vec{\Phi}_i = 0, \quad (12.5)$$

Позначимо $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}$ – головний вектор активних сил; $\sum_{i=1}^n \vec{R}_i^e = \vec{R}^e$ – головний вектор реакцій зовнішніх в'язей; оскільки внутрішні сили створюють систему сил дії та протидії, головний вектор реакцій внутрішніх в'язей дорівнює нулю $\sum_{i=1}^n \vec{R}_i^{6H} = 0$, $\sum_{i=1}^n \vec{\Phi}_i = \vec{\Phi}$ – головний вектор сил інерції.

Тоді рівність (12.5) запишеться у вигляді:

$$\vec{F} + \vec{R}^e + \vec{\Phi} = 0, \quad (12.6)$$

Рівність (12.6) показує, що у кожний момент часу для рухомої системи точок векторна сума головних векторів активних сил, реакцій зовнішніх в'язей та головного вектора сил інерції дорівнює нулю.

Складемо векторне рівняння головних моментів. Виберемо довільний центр O , проведемо з нього в i -ту точку M_i системи радіус-вектор $\vec{r}_i = \overrightarrow{OM_i}$, домножимо його векторно на кожен доданок рівності (12.4) та просумуємо отримані рівності за кількістю точок:

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{R}_i^e + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{R}_i^{6H} + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{\Phi}_i = 0. \quad (12.7)$$

Позначимо:

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{M}_O^F \quad - \text{ головний момент активних сил}$$

відносно полюса O ;

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{R}_i^e = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{R}_i^e) = \vec{M}_O^R \quad - \text{ головний момент реакцій зовнішніх}$$

в'язей відносно полюса O ;

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{R}_i^{6H} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{R}_i^{6H}) = 0 \quad - \text{ головний момент реакцій внутрішніх}$$

в'язей відносно полюса O , який дорівнює нулю, оскільки внутрішні сили створюють систему сил дії та протидії;

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{\Phi}_i = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{\Phi}_i) = \vec{M}_O^\Phi \quad - \text{ головний момент сил інерції відносно}$$

полюса O .

Отже, (12.7) запишемо у вигляді:

$$\vec{M}_O^F + \vec{M}_O^R + \vec{M}_O^\Phi = 0. \quad (12.8)$$

Рівняння (12.6), (12.8) виражають *принцип Д'Аламбера* для системи матеріальних точок: у кожен момент часу для рухомої системи точок векторна сума головних векторів активних сил, реакцій зовнішніх в'язей та сил інерції дорівнює нулю. Разом з тим векторна сума головних моментів активних сил, реакцій зовнішніх в'язей та сил інерції відносно вибраного полюса дорівнює нулю.

Оскільки головний вектор і головний момент внутрішніх сил дорівнюють нулю, то рівняння руху системи точок записуються у вигляді (в залежності від вибору центра зведення: полюса O або центра мас C)

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{R}^e + \vec{\Phi} = \vec{0}, \\ \vec{M}_O^F + \vec{M}_O^R + \vec{M}_O^\Phi = \vec{0}, \end{cases} \quad (12.9)$$

Проекції цих рівнянь на осі координат називаються *рівняннями кінетостатики*:

$$\begin{cases} F_x + R_x^e + \Phi_x = 0, \\ F_y + R_y^e + \Phi_y = 0, \\ F_z + R_z^e + \Phi_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} M_x^F + M_x^R + M_x^\Phi = 0, \\ M_y^F + M_y^R + M_y^\Phi = 0, \\ M_z^F + M_z^R + M_z^\Phi = 0 \end{cases}$$

З цих рівнянь можна отримати диференціальні рівняння руху твердого тіла, якщо підставити в них вирази головного вектора і головного моменту сил інерції.

5. Визначення сил інерції матеріальної точки .

Розглянемо матеріальну точку M масою m . Нехай l – траєкторія точки M (рис. 12.3). Запишемо силу інерції точки: $\vec{\Phi} = -m\vec{w}$. Оскільки точка здійснює криволінійний рух, то прискорення запишеться як: $\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n$. Тоді сила інерції також буде складатись з нормальної і тангенціальної складових:

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_\tau + \vec{\Phi}_n. \quad (12.10)$$

Тут $\vec{\Phi}_\tau = -m\vec{w}_\tau$, $\Phi_\tau = mw_\tau = m\ddot{s}$, $\vec{\Phi}_n = -m\vec{w}_n$, $\Phi_n = mw_n = m\frac{v^2}{\rho} = m\frac{\dot{s}^2}{\rho}$, s – дугова координата, $\vec{\Phi}_\tau$ та $\vec{\Phi}_n$ – дотична та відцентрова складова сили інерції матеріальної точки.

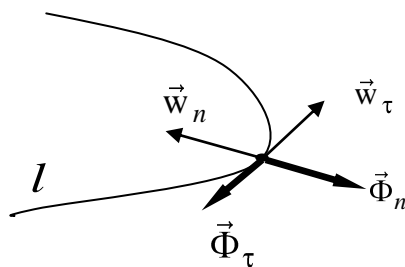


Рис. 12.3

6. Головний вектор та головний момент сил інерції системи матеріальних точок

Розглянемо систему матеріальних точок M_i з масами m_i , які рухаються з прискореннями \vec{w}_i ($i=1, 2, \dots, n$). Сили інерції окремих точок цієї системи дорівнюють $\vec{\Phi}_i = -m_i\vec{w}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$). Визначимо головний вектор та головний момент сил інерції цієї системи точок.

Головний вектор сил інерції дорівнює

$$\vec{\Phi} = \sum_{i=1}^n \vec{\Phi}_i = -\sum_{i=1}^n m_i \vec{w}_i. \quad (12.11)$$

Нехай точка C – центр ваги даної системи точок. Тоді її положення відносно деякого полюса O визначається як центр системи паралельних сил ваги $\vec{P}_i = m_i \vec{g}$ за формулою

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n P_i \vec{r}_i}{P} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i g \vec{r}_i}{mg} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}, \quad (12.12)$$

де $\vec{r}_i = \overline{OM}_i$ - радіуси-вектори матеріальних точок M_i відносно полюса O ,
 $\vec{r}_C = \overline{OC}$ - радіус-вектор центра ваги.

Для точок сталої маси з (12.11), приймаючи до уваги (12.12), знайдемо

$$\vec{\Phi} = -\sum_{i=1}^n m_i \vec{w}_i = -\sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i = -\frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = -\frac{d^2}{dt^2} m \vec{r}_C = -m \vec{w}_C. \quad (12.13)$$

Оскільки маса системи незмінна, отримаємо

$$\vec{\Phi} = -m \vec{w}_C. \quad (12.14)$$

Таким чином, *головний вектор сил інерції дорівнює добутку маси системи точок та прискорення центра мас узятому зі знаком мінус.*

Для визначення головного момента сил інерції оберемо за полюс точку O та скористаємось означенням головного момента сил

$$\vec{M}_O^\Phi = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{\Phi}_i = -\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{w}_i = -\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \frac{d}{dt} \vec{v}_i = -\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i). \quad (12.15)$$

Для подальшого перетворення (12.15) візьмемо похідну за часом від добутку $\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$. Маємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) &= \frac{d}{dt} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \\ &= \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i). \end{aligned}$$

Враховуючи це, остання сума формули (12.15) запишеться у вигляді

$$\vec{M}_O^\Phi = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{\Phi}_i = -\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i. \quad (12.16)$$

Сума, яка стоїть під знаком похідної, в теоретичній механіці називається *кінетичний момент системи точок* відносно полюса O :

$$\vec{K}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i, \quad (12.17)$$

а окремий доданок цієї суми – *момент кількості руху матеріальної точки* відносно полюса O :

$$\vec{k}_O = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i. \quad (12.18)$$

За означенням, моментом кількості руху матеріальної точки відносно полюса O називається *векторний добуток радіуса-вектора матеріальної точки відносно полюса O та її кількості руху.*

Таким чином, *головний момент сил інерції системи точок відносно деякого полюса O дорівнює похідній за часом від кінетичного моменту цієї системи точок відносно полюса O , узятому зі знаком мінус:*

$$\vec{M}_O^\Phi = -\frac{d}{dt} \vec{K}_O = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i. \quad (12.19)$$

Зазначимо, що при поступальному русі системи точок швидкості точок будуть однаковими і дорівнювати швидкості центра ваги: $\vec{v}_i = \vec{v}_C$, ($i=1, 2, \dots, n$). Тоді головний момент сил інерції можна записати так

$$\begin{aligned}\vec{M}_O^\Phi &= -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_C = \\ &= -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_C = -\frac{d}{dt} \left(\left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{v}_C \right).\end{aligned}$$

Внутрішня сума згідно (12.2) дорівнює

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = m \vec{r}_C,$$

де \vec{r}_C - радіус-вектор центра мас систем точок відносно вибраного полюса.

Якщо за полюс обрати точку C – сам центр мас, тоді $\vec{r}_C = \overrightarrow{CC} = 0$, звідки

$$\vec{M}_O^\Phi = 0.$$

Таким чином, при поступальному русі система сил інерції системи точок зводиться тільки до головного вектора:

$$\vec{\Phi} = -m \vec{w}_C. \quad (12.20)$$

При розв'язанні задач з застосуванням методу кінетостатики рекомендується наступна послідовність дій.

1. Зобразити на рисунку активні сили, прикладені до кожної з матеріальних точок.

2. Застосувавши аксіому про звільнення від в'язей (при наявності в'язей), показати реакції в'язей, накладених на кожну з точок системи.

3. Додати до діючих сил головний вектор і головний момент фіктивних сил інерції.

4. Вибрати відповідну систему координат.

5. Скласти рівняння руху точок системи у формі аналітичних умов рівноваги – рівнянь кінетостатики.

6. Розв'язати складену систему рівнянь кінетостатики, визначити шукані величини.

7. Контрольні запитання:

1. В чому полягає пряма, або перша основна задача динаміки невільної матеріальної точки?
2. В чому полягає обернена, або друга, основна задача динаміки невільної матеріальної точки?
3. Як записати диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки в координатній формі?
4. Яка в'язь називається стаціонарною? Записати рівняння стаціонарної в'язі.
5. В якому випадку в'язь називається нестаціонарною? Записати рівняння нестаціонарної в'язі.

6. Які в'язі називається утримувальними (або двосторонніми) і неутримувальними. Як вони виражаються математично?
7. Навести приклади утримувальних і неутримувальних в'язей.
8. Чим відрізняються геометричні і кінематичні в'язі?
9. Які в'язі називаються голономними?
10. Які в'язі називаються ідеальними та неідеальними?
11. Навести приклади ідеальних та неідеальних в'язей.
12. Що являє собою множник Лагранжа?
13. Як формулюються рівняння Лагранжа I роду?
14. Яким чином спрощуються пряма та обернена задачі із застосуванням рівнянь Лагранжа I роду?
15. Скільки невідомих величин для прямої і оберненої задачі залишається після застосування рівнянь Лагранжа I роду?
16. Що називають даламберовою силою інерції?
17. Як формулюється принцип Д'Аламбера для матеріальної точки?
18. У чому полягає фізичний зміст принципу Д'Аламбера?
19. Чому рівновагу, в якій перебуває матеріальна точка при застосуванні до неї принципу Д'Аламбера, називають фіктивною?
20. Якою є послідовність дій при розв'язанні задач за допомогою принципу Д'Аламбера для матеріальної точки?
21. Як називається метод розв'язання задач із застосуванням принципу Д'Аламбера до механічної системи?
22. Як формулюється принцип Д'Аламбера для системи матеріальних точок?
23. Як записуються векторні рівняння руху системи матеріальних точок у формі умов «рівноваги»?
24. Як записуються рівняння кінетостатики?
25. Якою є сила інерції матеріальної точки, якщо вона здійснює криволінійний рух?
26. Як можна визначити головний вектор сил інерції системи матеріальних точок?
27. Як можна визначити головний момент сил інерції системи матеріальних точок?
28. Чому дорівнюють головний вектор та головний момент сил інерції при поступальному русі системи точок?
29. Якою є послідовність дій при розв'язанні задач за методом кінетостатики для системи матеріальних точок?

Тема 3.3. Прямолінійні коливання матеріальної точки

Лекція 13

1. Вступ. Класифікація коливань.

Важливою для дослідження формою руху матеріальної точки є коливальний рух. Коливання матеріальної точки – це процес почергового зростання і спадання в часі значень деякої величини, що визначає положення точки і супроводжується виникненням відновлюваної сили.

Коливання поділяють на періодичні та неперіодичні, стаціонарні (параметри коливань не змінюються з часом) та нестаціонарні, детерміновані та випадкові (параметри коливань змінюються в результаті деяких випадкових подій).

За характером збурення коливання поділяють на вільні, змушені, автоколивання, параметричні.

Вільними, або власними коливаннями точки називаються її коливання під дією відновлюваної сили, зумовлені початковим відхиленням точки від положення рівноваги або наданням їй початкової швидкості. *Відновлювана* (поновлювана) *сила* – це сила, яка повертає точку в положення рівноваги. Прикладом відновлюваної сили є сила тяжіння у випадку коливань математичного маятника, або сила пружності у випадку коливань тіла на пружині. *Положення рівноваги* – це положення, в якому точка може перебувати нескінченно довго. Положення рівноваги називається *стійким*, якщо точка повертається в нього при наданні їй певних малих переміщень або певних малих значень швидкості. Положення рівноваги називається *нестійким*, якщо точка залишає його при наданні їй будь-яких нескінченно малих переміщень або нескінченно малих значень швидкостей.

Змушені коливання – це коливання, які відбуваються під дією збурювальної сили прикладеної до точки (силове збурення) або внаслідок певного переміщення системи координат, у якій відбувається коливальний рух точки (кінематичне збурення).

Автоколивання – це коливання, які відбуваються при постійному надходженні енергії в механічну систему, кількісне надходження якої визначається самими коливаннями.

Параметричні коливання – це коливання, які виникають при зміні якого-небудь параметра коливальної системи в результаті зовнішнього впливу.

2. Вільні коливання матеріальної точки.

Нехай є тіло M масою m , що прикріплюється до нижнього кінця вертикальної невагомої пружини (рис.13.1), верхній кінець якої закріплено на нерухомій поверхні. Вважаємо, що довжина вільної (ненавантаженої) пружини дорівнює l_0 , а її коефіцієнт пружності – c . Припустимо, що тілу M

надали певну початкову швидкість \vec{v}_0 у вертикальному напрямку та певне переміщення з положення рівноваги.

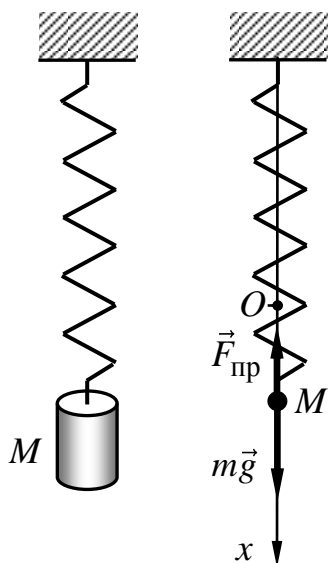


Рис.13.1

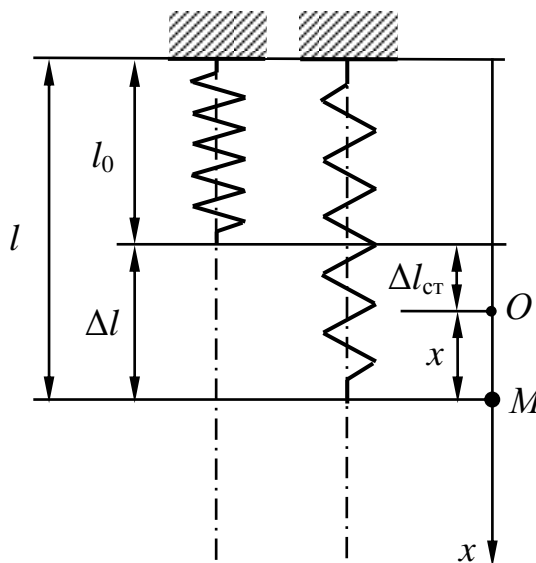


Рис.13.2

Визначимо закон руху тіла M вздовж вертикалі.

Складемо диференціальне рівняння руху тіла M . Оскільки в умовах даної задачі розмірами тіла M можна нехтувати, вважаємо його матеріальною точкою. Вважаючи, що рух вказаної точки відбувається тільки вздовж вертикалі, вводимо вісь Ox спрямовану вертикально вниз (рис.13.1). Початок відліку координатної осі Ox обираємо у положенні рівноваги точки M (збігається зі станом спокою при відсутності коливань та називається *положення статичної рівноваги*). Зображуємо точку M на додатніх значеннях осі Ox і вважаємо, що вона рухається в додатньому напрямку цієї осі. Ці припущення дозволяють спростити процес отримання диференціального рівняння. Далі визначаємо прикладені сили. До точки прикладається сила тяжіння, яка дорівнює $m\vec{g}$ і напрямлена вниз. Оскільки точка M прикріплена до пружини, дію останньої заміняємо силою пружності $\vec{F}_{\text{пр}}$.

Величина сили пружності, за законом Гука, пропорційна деформації пружини Δl і дорівнює $F_{\text{пр}} = c \cdot \Delta l$. Деформацію, або подовження, пружини визначаємо як різницю між поточною довжиною пружини l і довжиною пружини в ненапруженому стані l_0 , тобто $\Delta l = l - l_0$ (рис.13.2). Поточна довжина пружини l , як впливає з рисунка, складається з довжини ненавантаженої пружини l_0 , статичної деформації $\Delta l_{\text{ст}}$ до положення статичної рівноваги (точка O) від дії сили ваги тіла M та деформації, яка викликається переміщенням тіла M від точки O і яка дорівнює його поточній координаті x . Тобто маємо

$$l = l_0 + \Delta l_{\text{ст}} + x.$$

Тоді повна деформація (подовження) пружини дорівнює

$$\Delta l = l - l_0 = \Delta l_{\text{ст}} + x, \quad (13.1)$$

а величина сили пружності

$$F_{\text{пр}} = c(\Delta l_{\text{ст}} + x). \quad (13.2)$$

Величина змінної x є невідомою і вона визначає закон руху точки M . Оскільки вирази для сил відомі і відома маса точки, задача визначення змінної x є оберненою задачею динаміки точки.

На підставі основного закону динаміки матеріальної точки отримаємо:

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{пр}}. \quad (13.3)$$

Проектуємо векторне рівняння (13.3) на вісь Ox та врахуємо (13.2)

$$m\ddot{x} = mg - c(\Delta l_{\text{ст}} + x). \quad (13.4)$$

При перебуванні точки M в стані рівноваги, виконується умова

$$0 = mg - c\Delta l_{\text{ст}},$$

звідки отримаємо вираз для статичної деформації пружини

$$\Delta l_{\text{ст}} = mg / c.$$

Підстановка $\Delta l_{\text{ст}}$ у (13.4) дозволяє спростити це рівняння:

$$m\ddot{x} = m\cancel{g} - m\cancel{g} - cx$$

та отримати

$$m\ddot{x} + cx = 0.$$

Останнє рівняння, після ділення на m усіх членів, переписується у вигляді

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (13.5)$$

і називається *диференціальним рівнянням вільних коливань*.

У цьому рівнянні позначено $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$. Величина

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (13.6)$$

називається *коловою частотою коливань* і дорівнює кількості коливань точки за інтервал часу, який дорівнює 2π секунд. Одиницею вимірювання колової частоти є радіан за секунду: $[\omega_0] = \text{рад/с}$. Кількість коливань точки за одну

секунду називається *частотою коливань* і визначається так: $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

Одиницею вимірювання частоти коливань є герц: $[\nu] = 1/\text{с} = \text{Гц}$.

Доповнюємо рівняння (13.5) початковими умовами

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = v_0, \quad (13.7)$$

Загальний розв'язок звичайного лінійного диференціального однорідного рівняння (13.5) другого порядку зі сталими коефіцієнтами записується так:

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \quad (13.8)$$

де C_1, C_2 , - сталі інтегрування.

Підстановка початкової умови за координатою у (13.8), враховуючи $t = t_0 = 0$, дозволяє одержати

$$x_0 = C_1.$$

Для визначення C_2 знаходимо похідну за часом від (13.8)

$$\dot{x} = -\omega_0 C_1 \sin \omega_0 t + \omega_0 C_2 \cos \omega_0 t$$

та підставляємо у цей вираз початкову умову за швидкістю при $t = t_0 = 0$.
Маємо

$$\dot{x}_0 = \omega_0 C_2.$$

Отже, знаходимо сталі інтегрування

$$C_1 = x_0, C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}. \quad (13.9)$$

З урахуванням (13.9), розв'язок (13.8) набуває вигляду

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t,$$

аналіз якого показує, що вільні коливання виникають тільки за умови існування ненульових початкових умов.

Якщо в (13.8) зробити підстановку

$$\begin{aligned} C_1 &= A \sin \beta, \\ C_2 &= A \cos \beta \end{aligned} \quad (13.10)$$

та згорнути отриманий вираз, одержимо

$$x = A \sin(\omega_0 t + \beta). \quad (13.11)$$

Тут A визначається піднесенням до квадрату обох частин рівностей (13.10), їх додаванням та взяттям квадратного кореня

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}.$$

В свою чергу, ділення першої рівності (13.10) на другу дозволяє знайти α :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{C_1}{C_2}.$$

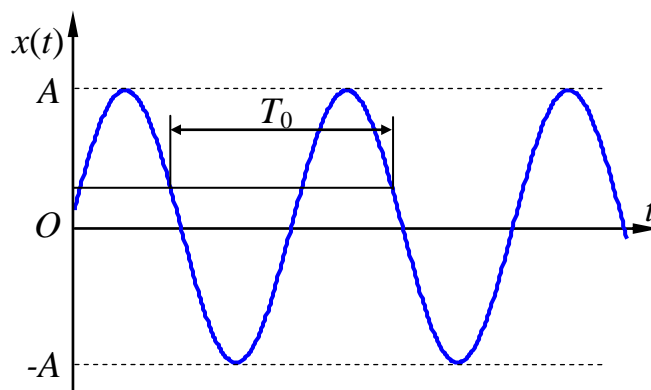


Рис.13.3

Величина A називається *амплітудою* коливань (рис.13.3) і визначає найбільше відхилення точки від положення рівноваги (або центру

коливань), величинна β називається *початковою фазою* коливань. З урахуванням (13.9) маємо

$$A = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}, \quad \beta = \arctg \frac{x_0 \omega_0}{\dot{x}_0}.$$

З виразів (13.8) та (13.11) випливає, що розв'язок диференціального рівняння вільних коливань описується гармонічними функціями, тобто відбуваються гармонічні коливання з частотою ω_0 , яку називають *власною частотою* вільних коливань.

Проміжок часу між двома послідовними проходженнями точкою одного і того ж положення в одному й тому ж напрямку називається *періодом коливань*, який можна визначити на підставі виразу (13.11). Оскільки функція синус має період $T(\sin t) = 2\pi$, то:

$$T(\sin \omega_0 t) = T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (13.8)$$

Період і, відповідно, частота коливань, які описуються диференціальним рівнянням (13.5) не залежать від амплітуди коливань. Ця властивість називається *ізохронністю* коливань.

Лекція 14.

3. Вільні коливання з урахуванням сили опору.

Вважаємо, що рух деякого тіла M відомої маси m , прикріпленого до вертикальної пружини з коефіцієнтом пружності c , відбувається у середовищі, яке створює опір рухові тіла (рис.14.1). Величина опору визначається силою опору, яка протилежна до напрямку руху тіла та

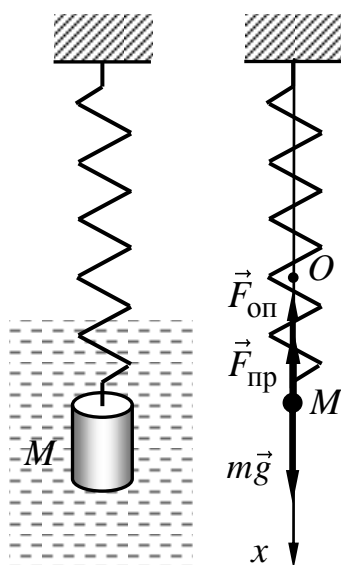


Рис.14.1

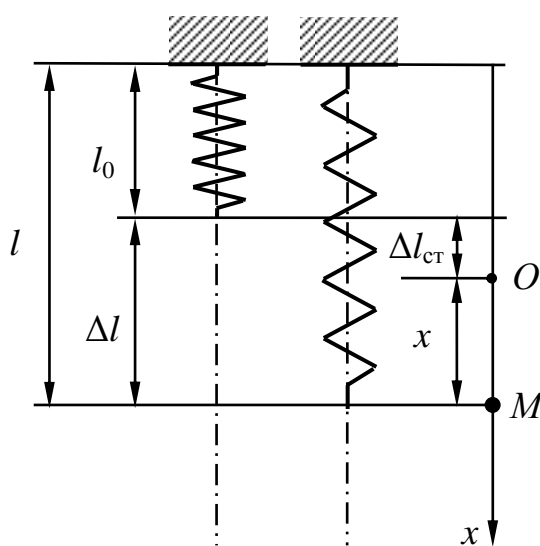


Рис.14.2

пропорційна першому степеню швидкості для відносно невеликих величин швидкостей:

$$\vec{F}_{\text{оп}} = -\alpha \vec{v}. \quad (14.1)$$

Коефіцієнт пропорційності α називають *коефіцієнтом в'язкого тертя*.

Виходячи з формули (14.1), його одиниця вимірювання є $[\alpha] = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$.

Зазначимо, що при русі тіла в рідині у вертикальному напрямку потрібно враховувати силу Архімеда, яка дорівнює вазі витісненого тілом об'єму рідини. Виштовхуючи тіло, архімедова сила впливає на положення рівноваги тіла.

У нашому випадку припускаємо, що тіло рухається у газоподібному середовищі, яке створює тільки силу опору.

Припустимо, що тілу M надали початкову швидкість або початкове відхилення від положення рівноваги у вертикальному напрямку. Визначимо закон руху такого тіла. Нехтуючи розмірами тіла M в даних умовах, вважаємо його матеріальною точкою.

Введемо вісь координат Ox , напрямлену вниз (рис.14.2), початок відліку якої збігається з положенням рівноваги точки M . Зображуємо точку M на додатніх значеннях осі Ox та припускаємо, що точка рухається у додатньому напрямку цієї осі. Вкажемо прикладені сили: силу тяжіння $m\vec{g}$, силу пружності $\vec{F}_{\text{пр}}$ та силу опору $\vec{F}_{\text{оп}}$. Динамічне рівняння руху точки запишеться так

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{пр}} + \vec{F}_{\text{оп}}. \quad (14.2)$$

Проектуємо це рівняння на вісь Ox

$$m\ddot{x} = mg - c(\Delta l_{\text{ст}} + x) - \alpha \dot{x}$$

та враховуємо умову рівноваги ($x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$)

$$0 = mg - c\Delta l_{\text{ст}},$$

яка дозволяє знайти

$$\Delta l_{\text{ст}} = mg / c$$

та спростити рівняння:

$$m\ddot{x} = mg - mg - cx - \alpha \dot{x}.$$

Після перенесення доданків з шуканою функцією x у ліву сторону, отримаємо:

$$m\ddot{x} + \alpha \dot{x} + cx = 0. \quad (14.3)$$

Після ділення рівняння (14.3) на m дістанемо *диференціальне рівняння вільних коливань точки з урахуванням сили опору*, яка пропорційна першому степеню швидкості:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (14.4)$$

де $h = \frac{\alpha}{2m}$ - коефіцієнт згасання або *відносний коефіцієнт демпфірування*

коливань (коефіцієнт відносного опору), $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$.

Для розв'язання оберненої задачі динаміки точки, доповнюємо (14.4) початковими умовами:

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = v_0, \quad (14.5)$$

Загальний розв'язок звичайного лінійного однорідного диференціального рівняння (14.4) залежить від коренів

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2} \quad (14.6)$$

відповідного характеристичного рівняння:

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = 0, \quad (14.7)$$

та може записуватись у трьох формах, враховуючи співвідношення між параметрами h та ω_0 .

У випадку великого опору $h > \omega_0$ (корені характеристичного рівняння дійсні і різні) загальний розв'язок рівняння (14.4) приймає вигляд

$$x = e^{-ht} (C_1 e^{pt} + C_2 e^{-pt}), \quad (14.8)$$

який також можна записати через гіперболічні функції

$$x = e^{-ht} (B_1 \text{ch} pt + B_2 \text{sh} pt).$$

Тут C_1, C_2 або B_1, B_2 - сталі інтегрування, через p позначено величину

$$p = \sqrt{h^2 - \omega_0^2}.$$

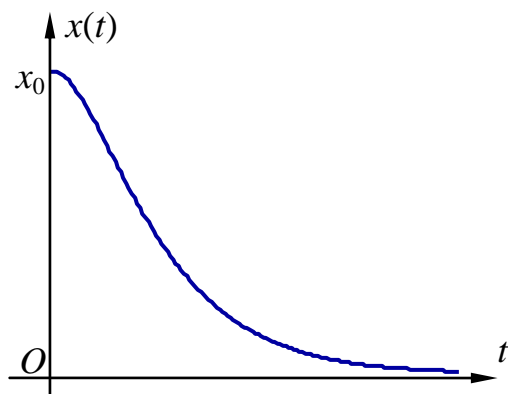


Рис.14.3

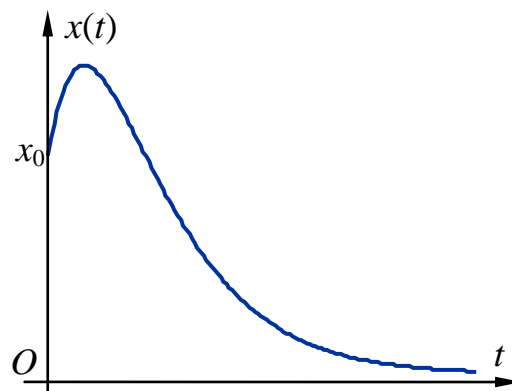


Рис.14.4

Сталі інтегрування C_1, C_2 визначаються підстановкою початкових умов (14.5) у розв'язок (14.8) та похідну від нього за часом

$$\dot{x} = -he^{-ht} (C_1 e^{pt} + C_2 e^{-pt}) + pe^{-ht} (C_1 e^{pt} - C_2 e^{-pt}).$$

Отримуємо два рівняння

$$x_0 = C_1 + C_2, \quad \dot{x}_0 = -h(C_1 + C_2) + p(C_1 - C_2),$$

звідки знаходимо

$$C_1 = \frac{x_0(p+h) + \dot{x}_0}{2p}, \quad C_2 = \frac{x_0(p-h) - \dot{x}_0}{2p}.$$

Аналіз виразу (14.8) показує, що функції $e^{-ht}e^{pt}$ та $e^{-ht}e^{-pt}$ спадні і при $t \rightarrow \infty$ маємо $x \rightarrow 0$. На рис.14.3 подано графік зміни координати x для додатніх значень початкового відхилення x_0 точки M від положення рівноваги. Рух, який відповідає розв'язку (14.8), носить *неколивальний* характер і тому називається *аперіодичним*.

У випадку $h = \omega_0$ (корені характеристичного рівняння кратні) загальний розв'язок рівняння (14.4) записується у формі

$$x = e^{-ht}(C_1 + C_2 t), \quad (14.9)$$

а сталі інтегрування визначаються з виразів

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \dot{x}_0 + hx_0.$$

З (14.9) випливає, що при $t \rightarrow \infty$ маємо $x \rightarrow 0$, тобто точка прямує до положення рівноваги. Рух точки M , як і в попередньому випадку, носить *неколивальний* характер і є *аперіодичним*. Графік залежності координати x від часу подано на рис.14.4 і він аналогічний графіку рис.14.3.

У випадку $h < \omega_0$ (випадок малого опору) корені характеристичного рівняння набувають комплексних значень і є різними

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2} = -h \pm i\sqrt{\omega_0^2 - h^2},$$

де i – комплексна одиниця.

Відповідно, загальний розв'язок диференціального рівняння (14.4) подається у вигляді

$$x = e^{-ht}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) \quad (14.10)$$

або, з використанням формул (13.10), так

$$x = Ae^{-ht} \sin(\omega_1 t + \beta), \quad (14.11)$$

де позначено

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}.$$

Сталі інтегрування C_1, C_2 визначаються підстановкою початкових умов (14.5) у загальний розв'язок (14.10) та похідну від нього за часом:

$$\dot{x} = -he^{-ht}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) + \omega_1 e^{-ht}(-C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_1 t).$$

З двох рівнянь знаходимо

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 + x_0 h}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}}.$$

Для розв'язку у формі (14.11) маємо

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + x_0 h}{\omega_0^2 - h^2}\right)^2}, \quad \beta = \arctg \frac{C_1}{C_2} = \arctg \frac{x_0 \sqrt{\omega_0^2 - h^2}}{\dot{x}_0 + x_0 h}.$$

З формули (14.11) випливає, що рух точки M є коливальним, амплітудні значення якого зменшуються з часом, а період цих коливань дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}}. \quad (14.12)$$

Величину $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$ називають *коловою (циклічною) частотою згасаючих коливань*.

4. Період та амплітуда вільних згасаючих коливань.

Проаналізуємо вираз (14.12). Винесемо за корінь квадрат колової частоти:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - h^2/\omega_0^2}} = T_0 \left(1 - \frac{h^2}{\omega_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (14.13)$$

де T_0 - період вільних коливань без урахування сили опору. Для малих значень $\frac{h}{\omega_0}$ зробимо розклад функції (14.13) у ряд Маклорена

$$T = T_0 \left(1 - \frac{h^2}{\omega_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = T_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h^2}{\omega_0^2} + \dots\right). \quad (14.14)$$

З останнього виразу випливає, що сила опору збільшує період коливань точки у порівнянні з періодом вільних коливань при відсутності опору. Відповідно, для колової частоти коливань має місце співвідношення $\omega_1 < \omega_0$.

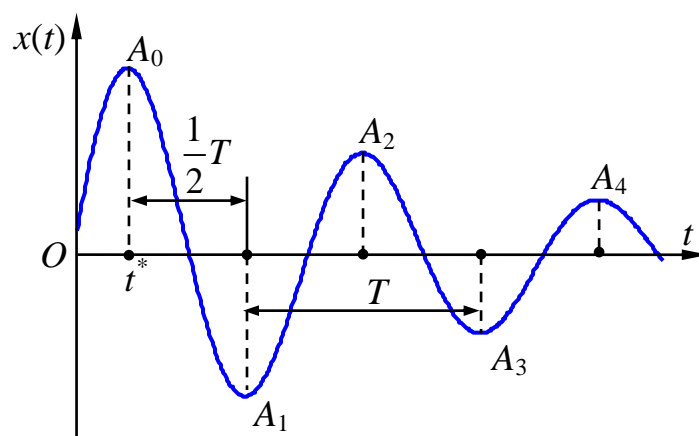


Рис.14.5

Розглянемо далі характер зміни амплітуд вільних коливань з урахуванням сили опору. Графік залежності координати x від часу, яка визначається формулою (14.11), подано на рис.14.5. З аналізу рис.14.5 та

формули (14.11) впливає, що амплітудні значення A_n координати x досягаються при $\sin(\omega_1 t + \beta) = \pm 1$, що відповідає моментам часу $t = t^* + \frac{n}{2}T$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, де T - період згасаючих коливань (14.12).

Відповідні значення амплітуд A_n дорівнюють:

$$\begin{aligned} A_0 &= A e^{-ht^*}, \\ A_1 &= A e^{-h(t^* + 0,5T)} = A e^{-ht^*} e^{-0,5hT} = A_0 e^{-0,5hT}, \\ A_2 &= A e^{-h(t^* + T)} = A e^{-h(t^* + 0,5T)} e^{-0,5hT} = A_1 e^{-0,5hT}, \\ &\dots, \\ A_n &= A_{n-1} e^{-0,5hT}. \end{aligned} \quad (14.15)$$

На підставі записаних виразів робимо висновок, що амплітуди вільних згасаючих коливань утворюють геометричну прогресію, знаменник якої дорівнює

$$\eta = q = e^{-0,5hT}. \quad (14.16)$$

Величину η називають *декрементом коливань* або *фактором згасання*. Декремент коливань характеризує швидкість зменшення амплітудних значень змущених коливань. Модуль натурального логарифма декремента коливань

$$\eta = |\ln q| = 0,5hT$$

називається *логарифмічним декрементом коливань*.

Лекція 15.

5. Вимушені коливання без врахування сил опору.

Вимушеними (змущеними) коливаннями називаються коливання точки під дією *збурювальної* сили при наявності відновлюваної сили.

5.1. Виведення диференціального рівняння вимушених коливань.

Припустимо, що на деяке тіло M відомої маси m , яке прикріплене до вертикальної пружини (рис.15.1) з коефіцієнтом пружності c , діє вертикальна *збурювальна* сила Q , що змінюється за гармонічним законом

$$Q = Q(t) = M_0 \cos \omega t + N_0 \sin \omega t.$$

Даний вираз можна згорнути, використовуючи підстановку

$$M_0 = H_0 \sin \beta, \quad N_0 = H_0 \cos \beta.$$

Тоді маємо

$$Q = Q(t) = H_0 \sin(\omega t + \beta), \quad (15.1)$$

де $H_0 = \sqrt{M_0^2 + N_0^2}$ - амплітудне значення збурювальної сили, ω - частота збурювальної сили, β - початкова фаза збурювальної сили, яка визначається з виразу $\operatorname{tg} \beta = M_0 / N_0$.

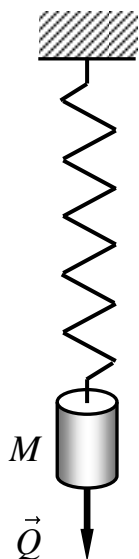


Рис.15.1

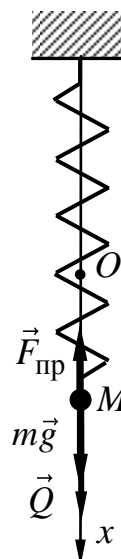


Рис.15.2

Для складання диференціального рівняння руху, спрямуємо вниз вісь координат Ox (рис.15.2), початок відліку якої розташуємо в положенні рівноваги тіла M . Припустимо, що тілу M надали початкову швидкість або початкове відхилення від положення рівноваги у вертикальному напрямку. Нехтуючи розмірами тіла M в даних умовах, вважаємо його матеріальною точкою та визначимо закон її руху.

Зображуємо точку M на додатніх значеннях осі Ox та припускаємо, що точка рухається у додатньому напрямку цієї осі. Вкажемо прикладені до точки M сили: силу тяжіння $m\vec{g}$, силу пружності $\vec{F}_{\text{пр}}$ та збурювальну силу \vec{Q} . Динамічне рівняння руху точки запишеться так

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{пр}} + \vec{Q}. \quad (15.2)$$

Проектуємо це рівняння на вісь Ox :

$$mw = mg - F_{\text{пр}} + Q,$$

підставимо у нього $w = \ddot{x}$ та $F_{\text{пр}} = c(\Delta l_{\text{ст}} + x)$, одержимо

$$m\ddot{x} = mg - c(\Delta l_{\text{ст}} + x) + Q. \quad (15.3)$$

З врахуванням умови рівноваги

$$0 = mg - c\Delta l_{\text{ст}},$$

яку можна отримати з (15.3) при $x = \ddot{x} = 0$, знаходимо

$$\Delta l_{\text{ст}} = mg / c$$

та спрощуємо рівняння:

$$m\ddot{x} = \cancel{mg} - \cancel{mg} - cx + Q.$$

Це рівняння можна переписати у вигляді

$$m\ddot{x} + cx = H_0 \sin(\omega t + \beta),$$

яке після ділення на масу записується так

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = H \sin(\omega t + \beta), \quad (15.4)$$

де $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$, $H = \frac{H_0}{m}$.

Доповнюємо отримане рівняння початковими умовами:

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = v_0.$$

Загальний розв'язок звичайного лінійного неоднорідного диференціального рівняння (15.4) другого порядку з постійними коефіцієнтами подається у вигляді суми загального розв'язку x_1 відповідного однорідного диференціального рівняння та частинного розв'язку x_2 неоднорідного рівняння, тобто

$$x = x_1 + x_2 \quad (15.5)$$

Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння записується у формі

$$x_1 = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t. \quad (15.6)$$

При визначенні частинного розв'язку x_2 можливі три випадки

$$\omega \neq \omega_0; \quad \omega \approx \omega_0; \quad \omega = \omega_0.$$

5.2. Випадок $\omega \neq \omega_0$.

Розглянемо перший випадок, коли частота вільних коливань не дорівнює частоті збурювальної сили ($\omega \neq \omega_0$). Частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$x_2 = B_1 \cos(\omega t + \beta) + B_2 \sin(\omega t + \beta). \quad (15.7)$$

Тут B_1, B_2 – сталі коефіцієнти, які визначаються підстановкою x_2 у рівняння (15.4):

$$\begin{aligned} & -\omega^2 B_1 \cos(\omega t + \beta) - \omega^2 B_2 \sin(\omega t + \beta) + \\ & + \omega_0^2 B_1 \cos(\omega t + \beta) + \omega_0^2 B_2 \sin(\omega t + \beta) = H \sin(\omega t + \beta). \end{aligned}$$

Порівнюючи коефіцієнти при $\cos(\omega t + \beta)$ та $\sin(\omega t + \beta)$ у лівій та правій частині цього виразу, отримаємо алгебраїчні рівняння для визначення B_1, B_2 :

$$\begin{aligned}\cos(\omega t + \beta): \quad & -\omega^2 B_1 + \omega_0^2 B_1 = 0, \\ \sin(\omega t + \beta): \quad & -\omega^2 B_2 + \omega_0^2 B_2 = H,\end{aligned}$$

звідки

$$B_1 = 0, \quad B_2 = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

відповідно

$$x_2 = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \beta). \quad (15.8)$$

Загальний розв'язок рівняння (15.4) отримуємо додаванням (15.8) та (15.6):

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \beta). \quad (15.9)$$

Сталі C_1 та C_2 визначаємо з формули (15.9) та формули, отриманої диференціюванням (15.9) за часом, з урахуванням початкових умов $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, $t_0 = 0$ і дорівнюють

$$C_1 = x_0 - \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \beta, \quad C_2 = \frac{1}{\omega_0} (\dot{x}_0 - \frac{H\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \beta). \quad (15.10)$$

Підставимо (15.10) у (15.9) та подамо x у вигляді:

$$\begin{aligned}x = & x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \\ & - \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} (\sin \beta \cos \omega_0 t + \frac{\omega}{\omega_0} \cos \beta \sin \omega_0 t) + \\ & + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \beta).\end{aligned} \quad (15.11)$$

Аналіз (15.11) показує, що розв'язок рівняння (15.4) представляє собою суперпозицію трьох груп доданків: перший рядок формули (15.11) відповідає вільним незгасаючим коливанням, другий рядок відповідає коливанням з частотою вільних (власних) коливань, які викликаються збудовальною силою та третій рядок (15.11) відповідає вимушеним коливанням точки M .

З формули (15.11) також випливає, що вимушені коливання існують при нульових початкових умовах $x_0 = \dot{x}_0 = 0$.

5.3. Випадок $\omega \approx \omega_0$. Явище биття.

Розглянемо другий випадок, коли частота вільних коливань близька за значенням до частоти збудовальної сили ($\omega \approx \omega_0$), але їй не дорівнює. У

цьому випадку частинний розв'язок x_2 також шукаємо у вигляді (15.7). Для збудовальної сили у вигляді (15.1) отримаємо розв'язок у формі (15.11). У ньому покладемо: $\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1$. Тоді при нульових початкових умовах ($x_0 = \dot{x}_0 = 0$) з формули (15.11) одержимо

$$x = -\frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega_0 t + \beta) + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \beta).$$

Застосовуючи відоме співвідношення $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$, останній вираз запишемо так

$$x = \frac{2H}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t + \beta\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right).$$

Уводячи позначення

$$A(t) = \frac{2H}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right)$$

та враховуючи $\omega + \omega_0 \approx 2\omega$, отримаємо

$$x = A(t) \cos(\omega t + \beta). \quad (15.12)$$

Рух, що відповідає виразу (15.12), є коливальним, частота якого дорівнює частоті збудовальної сили і амплітуда $A(t)$ якого періодично змінюється з

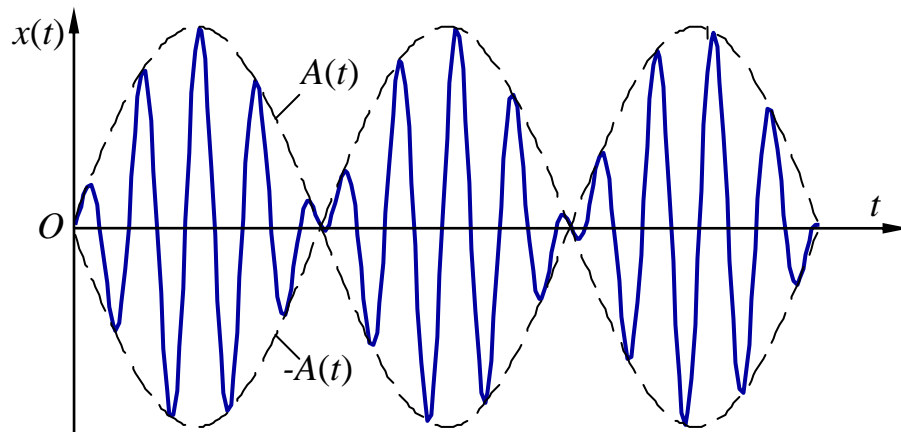


Рис.15.3

частотою, що дорівнює половині різниці частоти збудовальної сили та частоти вільних коливань $\frac{\omega - \omega_0}{2}$ (рис.15.3). Це явище називається *биттям*.

5.4. Випадок $\omega = \omega_0$. Явище резонансу.

Розглянемо третій випадок, коли частота вільних коливань дорівнює частоті збурювальної сили ($\omega = \omega_0$). Тут якісно змінюється характер коливань - виникає *резонанс*. У цьому випадку загальний розв'язок диференціального рівняння (15.4) подається у вигляді суми загального розв'язку (15.6) відповідного однорідного диференціального рівняння та частинного розв'язку x_2 неоднорідного рівняння, який записується у формі

$$x_2 = t B_1 \cos(\omega t + \beta) + B_2 \sin(\omega t + \beta) \quad (15.13)$$

де B_1, B_2 – сталі коефіцієнти, які визначаються підстановкою x_2 у рівняння (15.4).

Розв'язок (15.13) рівняння (15.4) для випадку $\omega = \omega_0$ також можна отримати з виразу (15.11), використовуючи граничний перехід $\omega \rightarrow \omega_0$. Дійсно, при нульових початкових умовах ($x_0 = \dot{x}_0 = 0$), одержимо

$$x = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left(-\frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} (\sin \beta \cos \omega_0 t + \frac{\omega}{\omega_0} \cos \beta \sin \omega_0 t - \sin(\omega t + \beta)) \right). \quad (15.14)$$

Оскільки вказаний граничний перехід приводить до невизначеності типу $\frac{0}{0}$, скористаємось правилом Лопіталя та знайдемо границю відношення похідних від функцій, що стоять у чисельнику та знаменнику виразу (15.14), за змінною ω . Маємо

$$\begin{aligned} x &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left(-\frac{H}{-2\omega} \left(\frac{1}{\omega_0} \cos \beta \sin \omega_0 t - t \sin(\omega t + \beta) \right) \right) = \\ &= \frac{H}{2\omega_0^2} \cos \beta \sin \omega_0 t - \frac{H}{2\omega_0} t \cos(\omega_0 t + \beta). \end{aligned} \quad (15.15)$$

Останній доданок виразу (15.15) відповідає змушеним коливанням у випадку резонансу. Частота та період цих коливань дорівнюють відповідно частоті ω_0 і періоду $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ вільних коливань. Як впливає з (15.15),

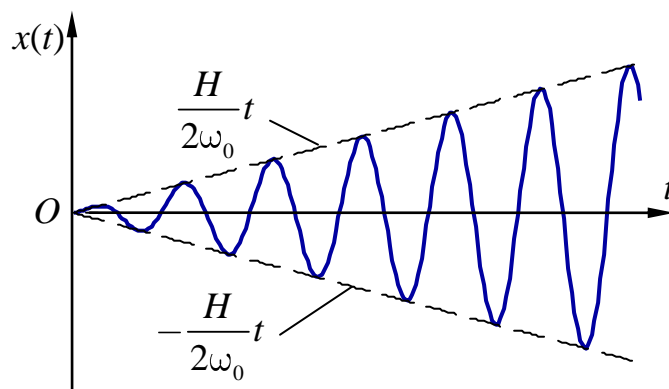


Рис.15.4

амплітуда змущених коливань у випадку резонансу $A = \frac{H}{2\omega_0} t$ зростає лінійно з часом (рис.15.4). Фаза змущених коливань, яка визначається аналізом другого доданка формули (15.15), на резонансі відстає від фази збурювальної сили (15.1) на величину $\pi/2$, оскільки виконується рівність

$$-\cos(\omega_0 t + \beta) = \sin(\omega_0 t + \beta - \frac{\pi}{2}).$$

Лекція 16.

6. Вимушені коливання з урахуванням сил опору.

6.1 Диференціальне рівняння вимушених коливань.

Припустимо, що тіло M маси m прикріплюється до вертикальної пружини (рис.16.1) з коефіцієнтом пружності c і знаходиться у середовищі, яке створює силу опору пропорційну першому степеню швидкості тіла $\vec{F}_{\text{оп}} = -\alpha \vec{v}$. Нехай на тіло M також діє вертикальна збурювальна сила Q , що змінюється за гармонічним законом

$$Q = Q(t) = M_0 \cos \omega t + N_0 \sin \omega t = H_0 \sin(\omega t + \beta). \quad (16.1)$$

Тут $H_0 = \sqrt{M_0^2 + N_0^2}$, $\tan \beta = M_0 / N_0$.

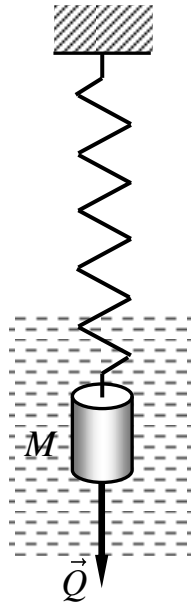


Рис.16.1

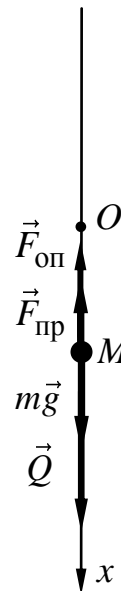


Рис.16.2

Вводимо вісь координат Ox (рис.16.2), початок відліку якої розташуємо в положенні рівноваги тіла M . Припустимо, що тілу M надали початкову швидкість або початкове відхилення від положення рівноваги у

вертикальному напрямку. Розмірами тіла M в даних умовах нехтуємо і вважаємо його матеріальною точкою.

Для визначення закону руху точки M зображуємо її на додатніх значеннях осі Ox та припускаємо, що точка в даний момент часу рухається у додатньому напрямку цієї осі. Вкажемо прикладені до точки M сили: силу тяжіння $m\vec{g}$, силу пружності $\vec{F}_{\text{пр}}$, силу опору $\vec{F}_{\text{оп}} = -\alpha\vec{v}$ та збурювальну силу \vec{Q} . Динамічне рівняння руху точки запишеться так

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{пр}} + \vec{F}_{\text{оп}} + \vec{Q}. \quad (16.2)$$

Проектуємо це рівняння на вісь Ox :

$$mw = mg - F_{\text{пр}} - F_{\text{оп}} + Q,$$

підставимо у нього $w=\ddot{x}$, $F_{\text{пр}} = c(\Delta l_{\text{ст}} + x)$ та $F_{\text{оп}} = \alpha v = \alpha\dot{x}$, одержимо

$$m\ddot{x} = mg - c(\Delta l_{\text{ст}} + x) - \alpha\dot{x} + Q. \quad (16.3)$$

З врахуванням умови рівноваги

$$0 = mg - c\Delta l_{\text{ст}},$$

яку можна отримати з (16.3) при $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$, знаходимо

$$\Delta l_{\text{ст}} = mg / c$$

та спрощуємо рівняння:

$$m\ddot{x} = mg - mg - cx - \alpha\dot{x} + Q.$$

Це рівняння можна переписати у вигляді

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = H_0 \sin(\omega t + \beta),$$

і після ділення на масу отримаємо

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = H \sin(\omega t + \beta), \quad (16.4)$$

де $h = \frac{\alpha}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$, $H = \frac{H_0}{m}$.

Доповнюємо рівняння (16.4) початковими умовами:

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = v_0.$$

Загальний розв'язок звичайного лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами (16.4) подається у вигляді суми загального розв'язку x_1 відповідного однорідного диференціального рівняння та частинного розв'язку x_2 неоднорідного рівняння, тобто

$$x = x_1 + x_2 \quad (16.5)$$

Тут розв'язок x_1 записується в одній з форм (14.8), (14.9) або (14.10) в залежності від співвідношення параметрів h та ω_0 . Частинний розв'язок x_2 шукаємо у вигляді

$$x_2 = B_1 \cos(\omega t + \beta) + B_2 \sin(\omega t + \beta). \quad (16.6)$$

Сталі коефіцієнти B_1, B_2 визначаються підстановкою x_2 у рівняння (16.4):

$$\begin{aligned} & -\omega^2 B_1 \cos(\omega t + \beta) - \omega^2 B_2 \sin(\omega t + \beta) + \\ & + 2h - \omega B_1 \sin(\omega t + \beta) + \omega B_2 \cos(\omega t + \beta) + \\ & + \omega_0^2 B_1 \cos(\omega t + \beta) + \omega_0^2 B_2 \sin(\omega t + \beta) = H \sin(\omega t + \beta). \end{aligned}$$

Порівнюючи коефіцієнти при $\cos(\omega t + \beta)$ та $\sin(\omega t + \beta)$ у лівій та правій частині цього виразу, запишемо алгебраїчні рівняння для визначення B_1, B_2 :

$$\begin{aligned} \cos(\omega t + \beta): \quad & -\omega^2 B_1 + 2h\omega B_2 + \omega_0^2 B_1 = 0, \\ \sin(\omega t + \beta): \quad & -\omega^2 B_2 - 2h\omega B_1 + \omega_0^2 B_2 = H, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) B_1 + 2h\omega B_2 &= 0, \\ -2h\omega B_1 + (\omega_0^2 - \omega^2) B_2 &= H, \end{aligned}$$

звідки

$$B_1 = -\frac{2h\omega H}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}, \quad B_2 = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)H}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}.$$

Використовуючи підстановку

$$B_1 = A \sin \gamma, \quad B_2 = A \cos \gamma.$$

вираз (16.6) приводиться до форми

$$x_2 = A \sin(\omega t + \beta + \gamma), \quad (16.7)$$

де A - амплітуда змушених коливань, γ - зсув фази змушених коливань по відношенню до збурювальної сили (16.1):

$$A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}} \cdot H, \quad (16.8)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{B_1}{B_2} = -\frac{2h\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (16.9)$$

Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (16.4) має вигляд

$$x = x_1 + \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}} \sin(\omega t + \beta + \gamma). \quad (16.10)$$

Зауважимо, що складова x_1 включає сталі інтегрування C_1, C_2 . Для їх визначення треба підставити початкову умову за координатою ($t_0 = 0$,

$x(t_0)=x_0$) у вираз (16.10) та початкову умову за швидкістю ($t_0 = 0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$) у співвідношення, що є похідною за часом від виразу (16.10), і далі розв'язати систему двох алгебраїчних рівнянь відносно невідомих C_1 та C_2 .

Зазначимо також, що розв'язок x_1 , записаний в одній з форм (14.8), (14.9) або (14.10), включає множник e^{-ht} , який є спадною функцією та через деякий інтервал часу прямує до нуля $x_1 \rightarrow 0$. Це дозволяє вважати, що через певний інтервал часу розв'язок рівняння (16.4) визначається тільки змушеними коливаннями: $x = x_2$ і зосередитись на їх дослідженні, яке включає дослідження амплітуди A та зсуву фази γ як функцій колової частоти збурювальної сили.

6.2 Амплітудно-частотна характеристика.

Введемо величину $A_0 = \frac{H}{\omega_0^2} = \frac{m}{c} \cdot \frac{H_0}{m} = \frac{H_0}{c}$, яка визначає статичне відхилення точки M від положення рівноваги (статичну деформацію пружини) при дії сили сталої величини H_0 . Відношення амплітуди змушених коливань (16.8) на частоті ω до статичного відхилення A_0 під дією сталої сили такої самої величини називається *коефіцієнтом динамічності* і дорівнює

$$\mu = \frac{A}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4\varepsilon^2 z^2}}, \quad (16.11)$$

де $z = \frac{\omega}{\omega_0}$ - безвимірний частота коливань, $\varepsilon = \frac{h}{\omega_0}$ - безвимірний коефіцієнт відносного опору або коефіцієнт демпфірування.

Вираз (16.11) дозволяє записати амплітуду змушених коливань у формі

$$A = \mu A_0.$$

Дослідимо підкорінний вираз формули (16.11). Введемо позначення

$$y = (1-z^2)^2 + 4\varepsilon^2 z^2,$$

зробимо заміну $z^2 = u$ та дослідимо на екстремум функцію

$$y(u) = (1-u)^2 + 4\varepsilon^2 u. \quad (16.12)$$

Для визначення точок екстремума візьмемо похідну y'_u та прирівняємо її до нуля

$$y'_u = -2(1-u) + 4\varepsilon^2 = 0.$$

Звідси одержимо

$$u = 1 - 2\varepsilon^2, \quad (16.13)$$

що відповідає одній точці екстремума. Характер екстремума визначимо взяттям другої похідної

$$y''_u = 2 > 0.$$

Оскільки значення другої похідної y''_u додатне, точка екстремуму (16.13) є точкою мінімуму для функції $y = y(u)$ або точкою максимуму для коефіцієнта динамічності (16.11). Підстановка (16.12) у (16.11) з урахуванням (16.13) дозволяє отримати значення цього максимуму

$$\mu_{\max} = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \quad (16.14)$$

З формули (16.13) випливає, що максимум коефіцієнта динамічності досягається для безвимірної частоти, яка визначається виразом

$$z = \omega/\omega_0 = \sqrt{1-2\varepsilon^2} \quad (16.15)$$

або для колової частоти збурювальної сили

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-2\varepsilon^2}. \quad (16.16)$$

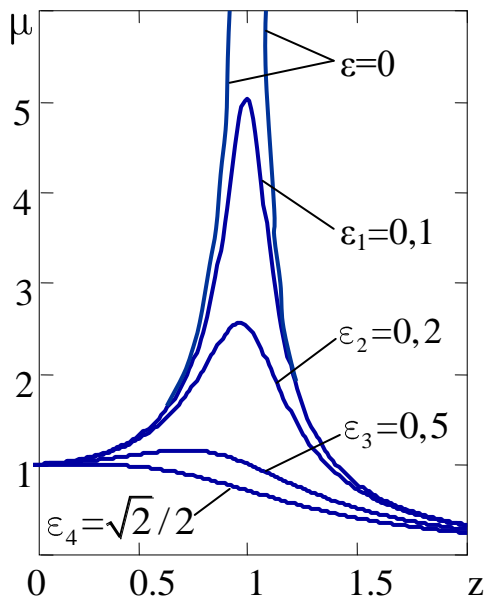


Рис.16.3

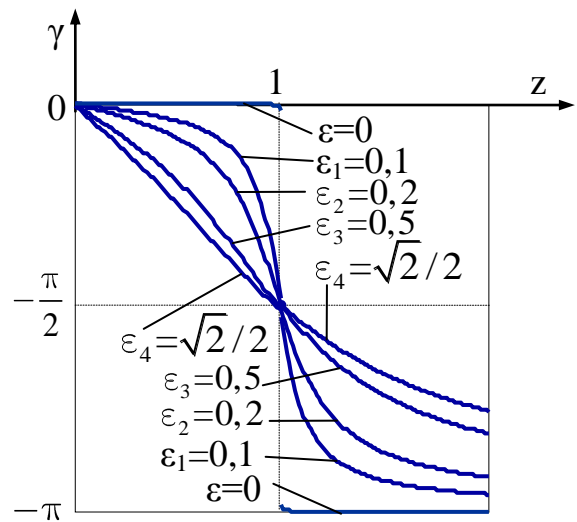


Рис.16.4

На рис.16.3 показано графіки залежності коефіцієнта динамічності $\mu = \mu(z)$ від безвимірної частоти збурювальної сили $z = \omega/\omega_0$ для значень коефіцієнта відносного опору $\varepsilon_1 = 0,1$, $\varepsilon_2 = 0,2$, $\varepsilon_3 = 0,5$ та $\varepsilon_4 = \sqrt{2}/2$. Відповідні максимальні значення коефіцієнта динамічності визначаються з формули (16.14), дорівнюють $\mu_{\max 1} = 5,02$, $\mu_{\max 2} = 2,55$, $\mu_{\max 3} = 1,15$ та

$\mu_{\max 4} = 1$. Ці значення досягаються на частотах $z_1 = 0,989$, $z_2 = 0,959$, $z_3 = 0,707$ та $z_4 = 0$.

Залежність коефіцієнта динамічності (16.11) (або амплітуди змущених коливань A) від частоти збурювальної сили ω називається *амплітудно-частотною характеристикою*.

Таким чином, можна зробити наступні висновки:

1. З формули (16.11) випливає, що для безвимірної частоти $z = 0$ коефіцієнт динамічності μ дорівнює одиниці.
2. При зміні безвимірної частоти z від 0 до 1 коефіцієнт динамічності зростає і набуває максимальне значення (16.14).
3. Максимальне значення коефіцієнта динамічності прямує до нескінченності на частоті $z = 1$, якщо $\varepsilon = 0$. Тобто має місце явище резонансу. При зростанні коефіцієнта відносного опору ε значення μ_{\max} зменшуються.
4. Значення безвимірної частоти (16.15), на якій досягається максимум коефіцієнта динамічності μ_{\max} називається безвимірної резонансною частотою, а відповідне значення колової частоти (16.16) - резонансною частотою. Безвимірна резонансна частота залежить від коефіцієнта відносного опору ε і зменшуються від одиниці до нуля при зміні коефіцієнта ε від 0 до $\sqrt{2}/2$. У випадку невеликих значень ε безвимірна частота резонансу лежить у лівому околі точки $z = 1$. Для значень коефіцієнта відносного опору $\varepsilon \geq \sqrt{2}/2$ явище резонансу не спостерігається.
5. При зростанні значень безвимірної частоти від 1 до нескінченності коефіцієнт динамічності зменшується і прямує до нуля.

6.3 Фазо-частотна характеристика.

Залежність зсуву фази змущених коливань γ від безвимірної частоти збурювальної сили z або колової частоти ω , яка визначається формулою (16.9), називається *фазо-частотною характеристикою*.

З формули (16.9) з урахуванням

$$z = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \varepsilon = \frac{h}{\omega_0},$$

маємо

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{2h\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\frac{2\varepsilon z}{1 - z^2}, \quad (16.17)$$

звідки

$$\gamma = -\operatorname{arctg} \frac{2\varepsilon z}{1-z^2} \quad (16.18)$$

З формули (16.18), для будь-яких значень коефіцієнта відносного опору ε , при $z=0$ отримаємо $\gamma=0$, при одержимо $\gamma=-\frac{\pi}{2}$. Якщо $\varepsilon=0$, то для безвимірних частот $z>1$ маємо $\gamma=-\pi$. Якщо $\varepsilon>0$, то для $z>1$ маємо $\gamma \rightarrow -\pi$.

Графіки залежності зсуву фази змущених коливань γ від безвимірної частоти збурювальної сили для значень величини коефіцієнта відносного опору $\varepsilon=0$, $\varepsilon_1=0,1$, $\varepsilon_2=0,2$, $\varepsilon_3=0,5$ та $\varepsilon_4=\sqrt{2}/2$ наведено на рис.16.4.

Аналіз графіків дозволяє зробити наступні висновки:

1. З формули (16.18) випливає, що зсув фази γ змущених коливань (16.7) на інтервалі значень від 0 до 1 дорівнює нулю при $\varepsilon=0$ та прямує до значення $-\frac{\pi}{2}$ при $\varepsilon>0$.
2. На частоті $z=1$, тобто під час резонансу, зсув фази γ змущених коливань (16.7) досягає точне значення $-\frac{\pi}{2}$, тобто відстає від фази збурювальної сили на $\frac{\pi}{2}$.
3. При зростанні безвимірної частоти z від одиниці до нескінченності зсув фази γ змущених коливань дорівнює $-\pi$ у випадку $\varepsilon=0$ та асимптотично прямує до значення $-\pi$ якщо $\varepsilon>0$. Це означає, що на частотах набагато більших значення $z=1$ змущені коливання відбуваються у протифазі до збурювальної сили.

7. Контрольні запитання

1. Що називають вільними або власними коливаннями?
2. Яка сила називається відновлюваною?
3. Як поділяються коливання за характером збурення?
4. Як подається сила пружності при складанні рівнянь коливального руху точки?
5. Що таке статичне подовження пружини?
6. Як записується диференціальне рівняння вільних коливань точки?
7. Чому дорівнює колова частота вільних коливань?
8. В яких одиницях вимірюється частота?
9. Як подається розв'язок диференціального рівняння вільних коливань?
10. Як визначається амплітуда коливань та період?

11. Які коливання називають ізохронними?
12. Як впливає вибір початку відліку осі координат на форму диференціального рівняння коливального руху?
13. Як записується диференціальне рівняння вільних коливань з урахуванням сили опору?
14. Як записати характеристичне рівняння до диференціального рівняння вільних коливань з урахуванням сили опору?
15. Як подається розв'язок диференціального рівняння вільних коливань у випадку великого опору та кратних коренів характеристичного рівняння?
16. Як подається загальна форма сталих інтегрування диференціального рівняння вільних коливань у випадку кратних коренів характеристичного рівняння?
17. Як подається розв'язок диференціального рівняння вільних коливань у випадку малого великого опору?
18. Як записується диференціальне рівняння вільних коливань з урахуванням сили опору?
19. Як записати характеристичне рівняння до диференціального рівняння вільних коливань з урахуванням сили опору?
20. Як подається розв'язок диференціального рівняння вільних коливань у випадку великого опору та кратних коренів характеристичного рівняння? Чи має він коливальний характер?
21. Як подається загальна форма сталих інтегрування диференціального рівняння вільних коливань у випадку кратних коренів характеристичного рівняння?
22. Як подається розв'язок диференціального рівняння вільних коливань у випадку малого опору?
23. Чому дорівнює відношення двох послідовних амплітуд вільних згасаючих коливань у випадку малого опору?
24. Як впливає опір на період та частоту вільних згасаючих коливань?
25. З яких форм коливань складається розв'язок диференціального рівняння змушених коливань при відсутності опору?
26. Як подається частинний розв'язок диференціального рівняння змушених коливань у резонансному випадку?
27. Що таке явище биття?
28. Чому дорівнює амплітуда змушених коливань з урахуванням сили опору?
29. Що таке амплітудно-частотна характеристика?
30. Як виглядає фазо-частотна характеристика змушених коливань?
31. Як впливає опір на резонансну частоту та зміну фази змушених коливань?

Тема 4.4. Динаміка відносного руху матеріальної точки

Лекція 17.

1. Динаміка відносного руху точки.

Розв'язання багатьох технічних задач потребує дослідження та визначення параметрів руху об'єктів відносно рухомої системи координат. Встановимо основний закон динаміки і рівняння руху матеріальної точки в рухомій системі координат, спираючись на закони динаміки абсолютного руху.

В основі динаміки абсолютного руху матеріальної точки знаходяться перший та другий закони Ньютона. Знайдемо зв'язок між добутком маси точки на відносне прискорення і силами, прикладеними до точки.

Розглянемо рух матеріальної точки M масою m , на яку діє сила \vec{F} . Вважаємо, що рух матеріальної точки M обмежено в'яззю, тобто вона є невідільною. За аксіомою про звільнення від в'язей замінимо в'язь її реакцією \vec{R} .

Вважаємо також, що точка M здійснює складний рух, тобто рух цієї точки відносно деякої нерухомої системи координат $A\xi\eta\zeta$ є абсолютним (рис.17.1), а відносно рухомої системи координат $Oxyz$ – відносним. Характер переносного руху встановлюється рухом рухомої системи координат відносно нерухомої. Будемо вважати, що рухома система координат обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_e$ та кутовим прискоренням $\vec{\epsilon}_e$ відносно нерухомою, а її початок відліку, точка O , має швидкість \vec{v}_O та прискорення \vec{w}_O .

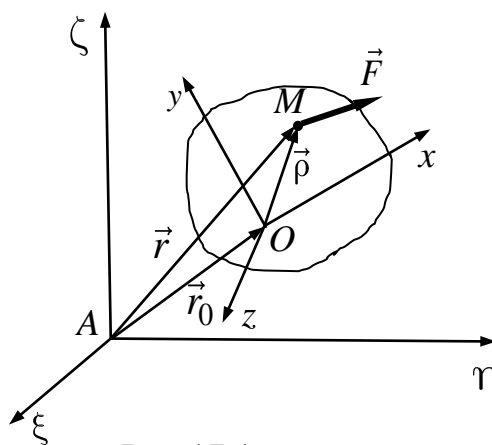


Рис.17.1

Запишемо рівняння руху невідільної матеріальної точки:

$$m\vec{w}_a = \vec{F} + \vec{R}. \quad (17.1)$$

Абсолютне прискорення точки \vec{w}_a визначається за теоремою Коріоліса:

$$\vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_c. \quad (17.2)$$

Підставимо вираз (2) в (1), отримаємо:

$$m\vec{w}_e + m\vec{w}_r + m\vec{w}_c = \vec{F} + \vec{R}. \quad (17.3)$$

Рівняння відносного руху можна записати:

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + (-m\vec{w}_e) + (-m\vec{w}_c) + \vec{R}. \quad (17.4)$$

Вектори $\vec{\Phi}_e = -m\vec{w}_e$, $\vec{\Phi}_c = -m\vec{w}_c$ називають відповідно переносною і коріолісовою силами інерції. Використавши ці позначення, рівняння (4) набуде форми основного рівняння динаміки:

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c. \quad (17.5)$$

Отже, з рівняння (17.5) випливає, що для складання диференціального рівняння руху матеріальної точки в неінерціальній системі координат у формі другого закону Ньютона треба до активних сил і реакцій в'язей, які діють на точку, додати умовно переносну і коріолісову силу інерції. (Зазначимо, що *інерціальною* називається система координат, в якій точка, на яку не діють жодні сили, рухається рівномірно і прямолінійно).

Будемо припускати, що рівність (17.5) виражає другий закон Ньютона для відносного руху. Відповідно задача про визначення руху точки відносно рухомої системи координат формально приведена до задачі про визначення руху відносно нерухомої системи.

Рівняння (17.5) називають основним рівнянням динаміки відносного руху матеріальної точки. Згідно з цим рівнянням можна так сформулювати закон відносного руху: *добуток маси точки на прискорення її відносного руху дорівнює векторній сумі сил, що прикладені до точки, і двох сил інерції – переносної і коріолісової.*

Вектори переносної $\vec{\Phi}_e$ і коріолісової $\vec{\Phi}_c$ сил інерції - це фіктивні сили, які треба прикласти до точок тіла, щоб воно рухалось без прискорення. Вони мають назву *ейлерові сили інерції* і використовуються при дослідженні руху тіл в неінерціальних системах відліку. Після введення цих сил для опису відносного руху точки можна застосувати другий закон Ньютона. Довільну систему координат можна вважати нерухомою, прикладаючи до точки дві вказані вище сили інерції.

Якщо між матеріальною точкою і тілом, з яким пов'язана рухома система координат, існує фізичний зв'язок, то сили \vec{F}_e і \vec{F}_c - фізична реальність, але ці сили прикладені не до матеріальної точки (що знаходиться в складному русі), а до тіла, що обумовлює переносний рух і з яким пов'язана рухома система координат (тому ці сили називають фіктивними). У цьому випадку рівність (17.5) можна розглядати як своєрідне поширення принципу Даламбера на задачу визначення відносного руху точки.

Якщо не існує фізичного зв'язку між рухомою точкою і тілом, з яким пов'язана рухома система координат, то в цьому випадку сили \vec{F}_e і \vec{F}_c слід розглядати як деякі умовні величини, що вводяться в рівняння (17.5) формально. Фізичних сил, рівних \vec{F}_e і \vec{F}_c , не існує.

Рівняння (17.5) в обох випадках слід розглядати як основу деякої методики вивчення відносного руху за допомогою його фіктивного приведення до абсолютного руху.

Щоб обчислити переносну і коріолісову сили інерції, треба визначити спочатку переносне прискорення і прискорення Коріоліса. Нагадаємо формули для їх визначення:

$$\begin{aligned}\vec{w}_e &= \vec{w}_O + \vec{w}_{OM}^{oc} + \vec{w}_{OM}^{ob} = \\ &= \vec{w}_O + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r}) + \vec{\epsilon}_e \times \vec{r} \\ \vec{w}_c &= 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r.\end{aligned}\quad (17.6)$$

Тут \vec{v}_r - відносна швидкість точки M .

Основному рівнянню (17.5) динаміки відносного руху матеріальної точки у векторній формі відповідають три рівняння в скалярній формі, записані в проекціях на осі рухомої системи координат, наприклад $Oxyz$:

$$mw_{rx} = F_x + R_x + \Phi_{ex} + \Phi_{cx},$$

$$mw_{ry} = F_y + R_y + \Phi_{ey} + \Phi_{cy},$$

$$mw_{rz} = F_z + R_z + \Phi_{ez} + \Phi_{cz},$$

де $w_{rx} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$, $w_{ry} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$, $w_{rz} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$ - проекції відносного прискорення точки на осі рухомої системикоординат. Проекції Ейлерових сил інерції \vec{F}_e і \vec{F}_c на осі координат визначаються за відповідними проекціями прискорення переносного руху \vec{w}_e та прискорення Коріоліса \vec{w}_c з (17.6).

У випадку, якщо відносний рух точки M задано натуральним способом, тобто відома траєкторія відносного руху точки, а положення

задається дуговою координатою $s = s(t)$, рівняння відносного руху точки M подаються в проекціях на осі натуральної системи координат $M\tau nb$, яка зв'язана з траєкторією:

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= F_\tau + R_\tau + \Phi_{e\tau} + \Phi_{c\tau}, \\ m \frac{\dot{s}^2}{\rho} &= F_n + R_n + \Phi_{en} + \Phi_{cn}, \\ 0 &= F_b + R_b + \Phi_{eb} + \Phi_{cb}. \end{aligned}$$

Тут через ρ позначено радіус кривини траєкторії точки M .

Лекція 18.

2. Окремі випадки відносного руху точки. Умови відносного спокою. Принцип відносності класичної динаміки.

Аналізуючи рівняння (17.5), розглянемо наступні чотири окремі випадки:

1. Матеріальна точка відносно рухомої системи координат $Ox\eta z$ здійснює рівномірний прямолінійний рух. Тоді відносна швидкість $\vec{v}_r = \overrightarrow{\text{const}}$, а відносне прискорення $\vec{w}_r = 0$. Отже, на основі (17.5) дістанемо:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c = 0. \quad (18.1)$$

2. Якщо досліджувана точка перебуває у спокої відносно рухомої системи координат, то її відносна швидкість $\vec{v}_r = 0$ і відносне прискорення $\vec{w}_r = 0$. Тоді на основі (17.5) запишемо:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e = 0. \quad (18.2)$$

Ця рівність виражає умову відносної рівноваги матеріальної точки, яка формулюється так: при відносній рівновазі матеріальної точки векторна сума активних сил, що діють на матеріальну точку, реакцій в'язей і переносної сили інерції дорівнює нулю.

3. Якщо рухома система координат здійснює поступальний рух, тобто $\vec{\omega}_e = 0$, то прискорення Коріоліса дорівнює нулю $\vec{w}_c = 0$ і коріолісова сила інерції також $\vec{\Phi}_c = 0$. Тоді рівняння (17.5) набуває вигляду:

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e. \quad (18.3)$$

4. Якщо рухома система координат $Ox\eta z$ є інерціальною, тобто вона рухається рівномірно і прямолінійно ($\vec{v}_e = \overrightarrow{\text{const}}$, $\vec{\omega}_e = 0$), здійснюючи поступальний рух, то на нуль обертаються дві сили інерції: $\vec{\Phi}_e = 0$ і $\vec{\Phi}_c = 0$. Тоді основне рівняння динаміки відносного руху набуде вигляду:

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + \vec{R} \quad (18.4)$$

Користуючись приведеним вище означенням інерціальних систем і співвідношенням (17.5), можна стверджувати, що існування однієї інерціальної системи тягне за собою існування нескінченної множини таких систем. Дійсно, якщо існує хоч одна інерціальна система, то всяка інша система, що рухається відносно інерціальної системи поступально, так, що рух її початку буде рівномірним і прямолінійним, є також інерціальною. В цій системі $\vec{\Phi}_e = 0$, $\vec{\Phi}_c = 0$ і другий закон Ньютона, а значить і закон інерції, будуть мати ту форму, яка складає основу класичної механіки. Також в цих системах зберігається третій закон Ньютона. Відповідно у всіх інерціальних системах механічні явища описуються законами класичної механіки.

Порівнюючи вираз (18.4) з рівнянням для невільної точки в абсолютному русі $m\vec{w} = \vec{F} + \vec{R}$, приходимо до висновку, що за формою вони збігаються. Отже, другий закон Ньютона справедливий у даному випадку і для відносного руху матеріальної точки. Це виражає принцип відносності класичної динаміки, встановлений Г. Галілеєм у 1630 р.:

За однакових початкових умов механічні рухи здійснюються однаково в нерухомих системах координат і в тих, що рухаються поступально, рівномірно та прямолінійно, тобто описуються однаковими рівняннями.

Отже, всі положення динаміки Ньютона справедливі для будь-якої інерціальної системи координат.

3. Приклад.

Встановити закон руху точки M , що рухається вздовж гладкого стрижня OA (рис.18.1), якщо маса точки $m = 2$ кг, довжина стрижня $OA = 1$ м. Стрижень обертається навколо осі, що проходить через його кінець, з кутовою швидкістю $\omega = 4 \text{ с}^{-1}$. У початковий момент часу ($t = 0$) точка M знаходиться на відстані $0,6$ м від точки O , $v_M \text{ } t=0 = 0$.

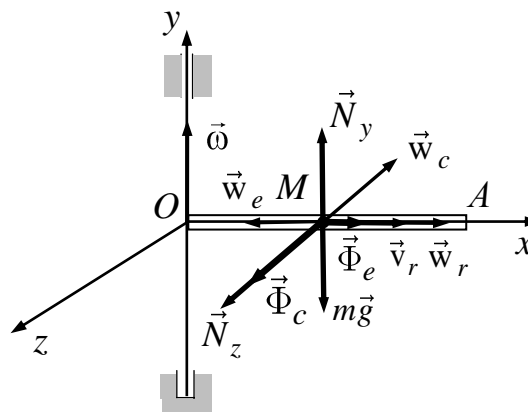


Рис. 18.1

Розв'язання. Згідно з умовою задачі, розглядається відносний рух матеріальної точки M по стрижню OA , що обертається. Уздовж цього стрижня спрямуємо рухому вісь Ox . На точку M діє сила ваги $\vec{P} = m\vec{g}$ і нормальна реакція стрижня \vec{N} . Відносна швидкість точки дорівнює $v_r = \frac{dx}{dt}$, відносне прискорення - $w_r = \frac{d^2x}{dt^2}$. Введемо сили інерції. Оскільки переносним є обертальний рух навколо осі Oy з постійною кутовою швидкістю $\omega_e = \omega = 4 \text{ c}^{-1}$, то $\varepsilon_e = 0$. Отже, переносна сила інерції $\vec{\Phi}_e$ буде відцентровою силою (див.рис. 18.1), що рівна $\Phi_e = m\omega^2$, оскільки радіусом обертання є $r = OM = x$.

Прискорення Кориоліса визначається за формулою: $\vec{w}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$, а Кориолісова сила інерції $\vec{\Phi}_c = -m\vec{w}_c$. З малюнка видно, що вектор $\vec{\Phi}_c$ перпендикулярний до осі Ox , тому проекція $\Phi_{cx} = 0$. Спроектувавши всі сили на осі $Oxyz$, матимемо

$$\begin{aligned} Ox: m \frac{d^2x}{dt^2} &= \Phi_e, \\ Oy: N_y - mg &= 0, \\ Oz: \Phi_c + N_z &= 0. \end{aligned} \quad (18.5)$$

З другого і третього рівнянь (18.5) можна визначити складові реакції трубки. Враховуючи вираз переносної сили інерції, отримаємо з першого рівняння:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m\omega^2.$$

З урахуванням значення $\omega = 4 \text{ рад/с}$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 16x = 0. \quad (18.6)$$

Відповідне характеристичне рівняння запишеться так

$$p^2 - 16 = 0,$$

звідки знаходимо корені $p_{1,2} = \pm 4$. Отже, загальний розв'язок рівняння (18.6) має вигляд:

$$x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-4t} \quad (18.7)$$

Для визначення сталих C_1 і C_2 знайдемо похідну за часом від (18.7):

$$\frac{dx}{dt} = 4 C_1 e^{4t} - C_2 e^{-4t} \quad (18.8)$$

та підставимо початкові умови

$$x(0) = 0,6; \quad \dot{x}(0) = 0.$$

в рівності (18.7) та (18.8). Дістанемо систему рівнянь для визначення C_1 і C_2 :

$$C_1 + C_2 = 0,6;$$

$$C_1 - C_2 = 0.$$

Звідси знаходимо $C_1 = C_2 = 0,3$. З урахуванням значень C_1 і C_2 закон руху точки M уздовж стрижня, що обертається матиме вигляд:

$$x = 0,3 e^{4t} + e^{-4t} = 0,6 \cosh 4t.$$

4. Контрольні запитання:

1. Який рух матеріальної точки називається відносним, переносним, абсолютним?
2. Яка система відліку називається інерціальною?
3. Як записується рівняння відносного руху матеріальної точки?
4. Що являють собою переносна і коріолісова сили інерції?
5. Яку ще назву мають переносна і коріолісова сили інерції?
6. Який фізичний зміст ейлерових сил інерції?
7. Який зв'язок має рівняння відносного руху матеріальної точки з принципом Д'Аламбера?
8. Сформулювати рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки в скалярній формі.
9. Сформулювати рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки в натуральній системі координат.
10. Як обчислити ейлерові сили інерції?
11. Як зміниться рівняння відносного руху, якщо матеріальна точка здійснює рівномірний прямолінійний рух?
12. Який вигляд буде мати рівняння відносного руху якщо розглядувана точка перебуває у спокої відносно рухомої системи координат?
13. Як зміниться рівняння відносного руху точки, якщо рухома система координат здійснює поступальний рух?
14. Якого вигляду набуде рівняння відносного руху точки, якщо рухома система координат рухається рівномірно і прямолінійно?
15. У чому полягає принцип відносності класичної динаміки?

1. Таблиця інтегралів деяких елементарних функцій

$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	$\int \operatorname{sh} t dt = \operatorname{ch} t + C$
$\int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int \operatorname{th} t dt = \ln(\operatorname{ch} t) + C$
$\int \frac{dt}{t} = \ln t + C$	$\int \operatorname{cth} t dt = \ln \operatorname{sh} t + C, t \neq 0$
$\int e^t dt = e^t + C$	$\int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{th} t + C$
$\int a^t dt = \frac{a^t}{\ln a} + C, a \neq -1$	$\int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = -\operatorname{cth} t + C, t \neq 0$
$\int \sin t dt = -\cos t + C$	$\int \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C, a \neq 0$
$\int \cos t dt = \sin t + C$	$\int \frac{dt}{a^2 - t^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+t}{a-t} \right + C, a \neq 0$
$\int \operatorname{tg} t dt = -\ln \cos t + C, t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$	$\int \frac{dt}{a^2 - t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arth} \frac{t}{a} + C, t < a$
$\int \operatorname{ctg} t dt = \ln \sin t + C, t \neq k\pi$	$\int \frac{dt}{t^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{t+a}{t-a} \right + C, a \neq 0$
$\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\operatorname{ctg} t + C, t \neq k\pi$	$\int \frac{dt}{t^2 - a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{t}{a} + C, t > a$
$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C, t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$	$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{a} + C, t < a$
$\int \cos t dt = \sin t + C$	$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 + t^2}} = \ln(t + \sqrt{a^2 + t^2}) + C$
$\int \operatorname{ch} t dt = \operatorname{sh} t + C$	$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - a^2}} = \ln \left t + \sqrt{t^2 - a^2} \right + C, t > a$

2. Методика розв'язання звичайного лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Розглянемо диференціальне рівняння, що має вигляд:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t). \quad (1)$$

Вважаємо також, що для нього задано наступні початкові умови:

$$t = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Відомо, що розв'язок неоднорідного рівняння (1) подається як сума загального розв'язку x_1 відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку x_2 неоднорідного рівняння

$$x = x_1 + x_2.$$

Для визначення розв'язку x треба виконати наступні кроки.

1. Записати характеристичне рівняння для відповідного однорідного рівняння ($\ddot{x}_1 + 2h\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0$) у вигляді

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (2)$$

2. Знайти корені характеристичного рівняння (2)

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}. \quad (3)$$

В залежності від співвідношення величин h і ω_0 загальний розв'язок x_1 відповідного однорідного рівняння може мати вигляд, наведений у наступній таблиці:

Співвідношення параметрів h і ω_0 :	Корені характеристичного рівняння (λ_1 і λ_2):	Вигляд розв'язку x_1
$h > \omega_0$	<ul style="list-style-type: none"> дійсні і різні: $\lambda_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2},$ $\lambda_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$	$x_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} =$ $= e^{-ht} \left(C_1 e^{\sqrt{h^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{h^2 - \omega_0^2} t} \right)$
$h = \omega_0$	<ul style="list-style-type: none"> дійсні рівні: $\lambda_1 = \lambda_2 = -h$	$x_1 = e^{-ht} (C_1 + C_2 t)$
$h < \omega_0$	<ul style="list-style-type: none"> комплексно-спряжені: $\lambda_{1,2} = -h \pm i\sqrt{\omega_0^2 - h^2} = -h \pm i\omega_*,$ <p>де $\omega_*^2 = \omega_0^2 - h^2$</p>	$x_1 = e^{-ht} (C_1 \cos \omega_* t + C_2 \sin \omega_* t)$
$h = 0$	<ul style="list-style-type: none"> чисто уявні: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ 	$x_1 = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$

3. Частинний розв'язок x_2 неоднорідного рівняння (1) слід шукати у вигляді, що відповідає правій частині $f(t)$:

- якщо $f(t) = \text{const}$, то у вигляді сталої A , тобто $x_2 = A$;
- якщо $f(t) = ae^{\alpha t}$, то $x_2 = Ae^{\alpha t}$;
- якщо $f(t) = a \sin \omega t + \beta$ або $f(t) = a \cos \omega t + \beta$ (при цьому $\omega \neq \omega_0$, $h \neq 0$), то у вигляді

$$x_2 = A \sin \omega t + \beta + B \cos \omega t + \beta ;$$

якщо ж $h = 0$, то

для $f(t) = a \sin \omega t + \beta$ слід взяти $x_2 = A \sin \omega t + \beta$,

а для $f(t) = b \cos \omega t + \beta \rightarrow x_2 = B \cos \omega t + \beta$;

якщо $\omega = \omega_0$ разом з $h = 0$ (випадок *резонансу*), то у вигляді

$$x_2 = t [A \sin \omega t + \beta + B \cos \omega t + \beta] .$$

Загалом, якщо права частина диференціального рівняння має так званий спеціальний вигляд:

$$f(t) = \left[a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \dots + a_1 t + a_0 \cos \omega t + \right. \\ \left. + b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0 \sin \omega t \right] e^{\alpha t} ,$$

то при умові, що число $\alpha + i\omega$ не корінь характеристичного рівняння (2), частинний розв'язок x_2 набуває вигляду

$$x_2 = \left[A_m t^m + A_{m-1} t^{m-1} + \dots + A_1 t + A_0 \cos \omega t + \right. \\ \left. + B_m t^m + B_{m-1} t^{m-1} + \dots + B_1 t + B_0 \sin \omega t \right] e^{\alpha t} .$$

При умові, що число $\alpha + i\omega$ є корінь характеристичного рівняння (2) кратності r , частинний розв'язок x_2 подається так

$$x_2 = t^r \left[A_m t^m + A_{m-1} t^{m-1} + \dots + A_1 t + A_0 \cos \omega t + \right. \\ \left. + B_m t^m + B_{m-1} t^{m-1} + \dots + B_1 t + B_0 \sin \omega t \right] e^{\alpha t} .$$

4. Підставити вираз x_2 у вихідне рівняння (взявши необхідні похідні) і, прирівнявши коефіцієнти при однакових функціях зліва і справа від знаку рівності, знайти шукані коефіцієнти A , B , і т. д.

5. Розв'язки x_1 і x_2 скласти в загальний розв'язок рівняння (1):

$$x = x_1 + x_2 .$$

6. Знайти першу похідну від x за часом.

7. Підставити у знайдені вирази для x і \dot{x} значення початкових умов $t = 0$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ і знайти із отриманих рівнянь сталі інтегрування C_1 і C_2 .

8. Записати і проаналізувати отриманий вираз $x(t)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 1, Т. 2. – М.: Наука, 1984. –Т. 1 – 512 с., Т. 2 – 624 с.
2. Кильчевский Н.А., Ремизова Н.И., Кильчевская Е.Н. Основы теоретической механики. – К.: Вища школа, 1986. – 296 с.
3. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. Т. 1. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
4. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 1. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
5. Ньютон И. Математические начала натуральной философии / А.°Н.°Крилов: Собр. Тр. –М.: Л.: Изд-во АН СССР, 1936. Т. VII. – 696 с.
6. Павловский М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
7. Савин Г.Н., Путята Т.В., Фрадлин Б.Н. Курс теоретической механики. – К.: Вища школа, 1973. – 359 с.
8. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М.: Высш. шк., 2001. – 416 с.
9. Теоретическая механика. Статика. Кинематика: Учебник/ Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф.; Под общ. Ред. М.А.Павловского. - К.: Вища школа, 1989 – 351 с.
10. Теоретическая механика. Динамика: Учебник/ Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф.; Под общ. Ред. М.А.Павловского. - К.: Вища школа, 1990 – 480 с
11. Теоретическая механика: Збірник задач/ О. С. Апостолук, В. М. Воробйов, Д. І. Ільчишина та ін. За ред. М. А. Павловського. – К.: Техніка, 2007. – 400 с.