УДК 519.21

ОЦІНКА ПАРАМЕТРІВ ЗМІЩЕННЯ ТОЧКОВОГО ПРОЦЕСУ ПУАССОНА.

Є. С. Романяк[1, a]

[1] *Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Фізико-технічний інститут*

Анотація

Одним з основних питань, що виникають при вивченні чи практичному застосуванні точкових процесів Пуассона, є оцінка параметрів випадкового зашумлення. У даній статті розглядатиметься випадкове та рівномірне зміщення точок у крузі певного невідомого радіуса, для якого будується оцінка. Оберненою задачею є за відомим радіусом зміщення провести відновлення оригінального процесу, маючи лише його зашумлену реалізацію.

Ключові слова: точковий процес Пуассона, оцінка максимальної правдоподібності, оцінка методу моментів

Вступ

Точковий процес Пуассона, з одного боку, є достатньо простою в описовому плані моделлю, а з іншого – досить розповсюдженою у таких галузях як екологія, геостатистика, кібербезпека тощо. Процес Пуассона на площині можна розглядати як значення певної величини чи кількість об'єктів, що наносяться на карту. Шуми чи випадкові зміщення виникають природним чином через похибку спостереджень. Тому на практиці часто доводиться зустрічатися із зашумленими реалізаціями точкових процесів Пуассона.

Перша частина роботи буде присвячена формальній постановці задачі та необхідних теорем, що використовуватимуться у подальшому дослідженні. Друга та третя частина присвячені прямій задачі – оцінка радіусу зміщення.

1. Формальна постановка задачі та необхідні факти

1.1. Необхідні теореми

Наступні теореми, що наводяться без доведення, є теоретичним обгрунтуванням того, що точкові процеси Пуассона зі сталою інтенсивністю залишаються такими при дії випадкових шумів чи при обмеженні області розгляду.

Теорема 1. *Нехай X – процес Пуассона на кулі $B(0,R)$ зі сталою інтенсивністю λ, $\{\xi_i\}$ – набір незалежних рівномірно розподілених випадкових величин на відрізку $[0,r]$. Тоді процес $\tilde{X} = \{X_i + \xi_i, X_i \in X\}$ – процес Пуассона на кулі $B(0,R+r)$ з мірою інтенсивності*

$$\mu(B) = \lambda \int_B (h_1 * h_2)(u)\,du \quad \forall B \in B(0,R+r)$$

де

$$h_1(u) = \frac{1}{\pi R^2}\mathbb{1}\{u \in B(0,R)\}$$

$$h_2(u) = \frac{1}{\pi r^2}\mathbb{1}\{u \in B(0,r)\},$$

а "$*$" – операція згортки функцій.

Дана теорема є частковим випадком більш загальної **теореми про маркування**. Фактично вона означає, що випадкові зсуви не порушують "пуассоновість" нашого процесу, але змінюють, взагалі кажучи, його інтенсивність.

Зазвичай при вивченні властивостей точкових процесів ми обмежуємося лише певною областю у просторі станів процесу. Таке "обмеження" Пуассонівського процесу знову ж таки можна розглядати як процес Пуассона. Цей факт фіксує наступна теорема.

Теорема 2 (про обмеження). *Визначимо процес Y наступним чином:*

$$Y = \tilde{X} \cap B(0,R).$$

Тоді Y можна розглядати як:

1) *процесс Пуассона на кулі $B(0,R+r)$ з мірою інтенсивності*
$$\mu_Y(B) = \mu(B \cap B(0,R)) \quad \forall B \in B(0,R+r),$$
2) *процесс Пуассона на кулі $B(0,R)$ з мірою інтенсивності*
$$\tilde{\mu_Y}(B) = \mu(B) \quad \forall B \in B(0,R)$$

Коли мова йде про випадкові зміщення точок процесу, то ми неминуче стикаємося з поняттям **крайового ефекту (edge effect)**. Він виникає, коли у результаті зашумлення деякі точки процесу зникають з області дослідження.

Теорема 3. *Нехай Z – незалежний від Y процес Пуассона на кулі $B(0,R+r)$ з інтенсивністю*

$$\mu_z(B) = \mu(B \cap K(0,R,R+r)).$$

[a] zhenia97.romanticized@gmail.com

Тоді $\tilde{X} \stackrel{d}{=} Y + Z$, *причому*

$$\mu_{Y+Z}(B) = \mu_Y(B) + \mu_Z(B) = \mu(B).$$

1.2. Постановка задачі

1.2.1. Пряма задача

Отже, нехай X – реалізація процесу Пуассона на кулі $B(0,R)$. Процес $\tilde{X}$ утворено наступним перетворенням: $\tilde{X} = \{X_i + \xi_i, X_i \in X\}$, $\{\xi_i\} \sim U(0,r)$ – незалежні і однаково розподілені випадкові величини. а процес Y є обмеженням $\tilde{X}$ на кулі $B(0,R)$. Тоді необхідно побудувати оцінку $\hat{r}$ параметру максимального зміщення точки.

1.2.2. Обернена задача

В оберненій задачі дослідник має лише зашумлений точковий процес Y та відомий радіус зміщення r. Маючи ці дані, необхідно відновити процес X, точніше, навести одну з можливих реалізацій оригінального процесу X, провівши випадкову симуляцію зсуву.

2. Застосування методу моментів для отримання оцінки

Нехай та Y – реалізації точкових процеси Пуассона, причому Y є зашумленою версією X. Будемо вважати, що $|Y| < |X|$, тобто деякі точки були втрачені. Позначимо через ζ кількість втрачених точок, що є випадковою величиною.

Лема 1. *Величина* ζ *має розподіл Пуассона з параметром* $\mu(K(0,R,R+r))$, *де* $K(0,R,R+r)$ *область між кругами з центрами у початку координат та радіусами* R *та* $R+r$, $\mu(\cdot)$ *– міра інтенсивності процесу* X.

Нехай $|X| = n, |Y| = m$ – кількість точок у реалізаціях процесів X та Y. Тоді знаходження оцінки $\hat{r}$ за допомогою методу моментів зводиться до розв'язання рівняння: $n - m = \mu(K(0,R,R+\hat{r}))$ відносно $\hat{r}$, оскільки за лемою 1 $\mu(K(0,R,R+r))$ є середнє число точок в області $K(0,R,R+r)$, тобто середня кількість втрачених точок.

Далі, виконаємо деякі перетворення:

$$\mu(K(0,R,R+r)) = \lambda \int_K (h_1 * h_2)(u)\,du,$$

$$(h_1 * h_2)(u) = \int_{\mathbb{R}^2} h_1(u-v) h_2(v)\,dv =$$

$$\int_{\substack{||u-v|| \le R,\\ ||v|| \le r}} \frac{1}{(\pi R r)^2} du dv =$$

$$\frac{1}{(\pi R r)^2} S(B(u,R) \cap B(0,R)),$$

де $S(\cdot)$ – площа.

За допомогою чисельних методів можна порахувати площу і таким чином, розв'язати вихідне рівняння.

3. Застосування методу максимальної правдоподібності

Якщо $n = m$, то використовувати метод моментів не є доцільним. Замість нього, ми звертаємося до іншого розповсюдженного методу оцінки параметрів – методу максимальної правдоподібності.

3.1. Побудова ймовірнісної моделі

Простором реалізації процесу для простоти вважатимемо евклідів простір $\mathbb{R}^2$. Нехай $W \subset \mathbb{R}^2$ – область така, що $|W| < \infty$. Покладемо

$$\Omega^X = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n^X,$$

де

$$\Omega_n^X = W^n$$

– n-й декартів степінь множини W.

Таким чином, ми визначаємо простір станів процесу $\mathbf{X}$. У якості σ-алгебри $\mathcal{F}$ візьмемо борелеву σ-алгебру $\mathcal{B}(\Omega_n^X)$. Задамо ймовірнісну міру $P_n^X(\cdot)$ як таку, що визначає сумісний розподіл точок процесу за умови, що їхня загальна кількість дорівнює n.

$$P_n^X(\Delta_1, ..., \Delta_n) = \frac{|\Delta_1 \cap W|}{|W|} \cdot ... \cdot \frac{|\Delta_n \cap W|}{|W|}$$

Фактично, такий вибір ймовірнісної міри зумовлений тим, як генерують процес Пуассона. Спочатку, потрібно згенерувати число n – кількість точок процесу, згідно розподілу Пуассона, тобто $p_n = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \exp^{-\lambda}, n = \overline{0,\infty}$, а далі рівномірним та незалежним чином згенерувати n точок в області W. Оскільки множина точок реалізації процесу X $(x_1, ..., x_n)$ є невпорядкованою, то така міра має давати однкову вагу всім $n!$ перестановкам точок $(x_1, ..., x_n)$. Таким чином, міра $P_n^X(\cdot)$ має бути симетричною.

$$[P_n^X(\cdot)]^{sym} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} P_n^X(\Delta_{\sigma(1)}, ..., \Delta_{\sigma(n)}),$$

де S_n – множина усіх перестановок розміру n.

Покладемо $\Phi = \bigcup_n \Phi_n$, де $\Phi_n = \Omega_n^X \times (\mathbb{R}^2)^n \times S_n$. Тоді, при фіксованому n, на просторі Φ_n визначимо наступну випадкову величину (вектор):

$$y(X, \xi_1, ..., \xi_n, \sigma) = (x_{\sigma(1)} + \xi_1, ..., x_{\sigma(n)} + \xi_n).$$

Фактично, цей вектор задає реалізацію процесу Y при фіксованому значенні n. Кожній точці процесу X у відповідність ставиться точка процесу Y згідно перестановки σ, а потім кожна точка незалежним та випадковим чином зміщується згідно розподілу шуму. Для нашого випадку $\xi_1, ..., \xi_n$ – н.о.р., $\xi_i \sim U(B(0,R))$, де R - невідомий параметр, для якого необхідно отримати оцінку.

З врахуванням введених вище позначень, ми можемо записати умовний розподіл y:

$$P(y|X,R) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^{n} P(y_i|x_{\sigma(i)},R),$$

$$P(y_i|x_{\sigma(i)},R) = \frac{1}{\pi R^2}\mathbb{1}(|y_i - x_{\sigma(i)}| \le R)$$

Даний умовний розподіл і визначає функцію правдоподібності. При $|X| = n$ покладемо $\hat{R_n} = \arg\max_R P(y|X,R)$ – оцінка максмальної правдоподібності радіуса зміщення R при фіксованій кількості точок n.

Отримана теоретична функція правдоподібності має суттєвий недолік – її складно оптимізувати, особливо у випадку, якщо замість індикатора буде стояти інша функція щільності розподілу. Складно це зробити через велику ($n!$) кількість доданків, що містить сума. Саме тому вдаються до наближеного обчислення $P(y|X,R)$. Ідея полягає в тому, що не обов'язково враховувати усі доданки, а можна підібрати такі r з них (r – параметр моделі, задає користувач), що з заданою точністю апроксимують теоретичну функцію правдоподібності.

4. Обернена задача

У даному розділі ми переходимо до оберненої задачі. Нехай ми маємо апріорне знання про те, що процес X, що потребує відновлення, має сталу інтенсивність λ. Тоді, за відомою реалізацією процесу Y та відомим радіусом зміщення r ми маємо змогу оцінити інтенсивність X.

Твердження 4.1. *Незміщеною оцінкою інтенсивності λ процесу X є*

$$\hat{\lambda} = \frac{|Y|}{\pi R^2(1 - H(K(0,R,R+r)))},$$

де

$$H(B) = \int_B (h_1 * h_2)(u)\,du.$$

Висновки

У результаті дослідження були отримані теоретичне значення оцінки параметру зміщення за допомогою методу моментів та вигляд функції правдоподібності для рівномірного шуму. Для оберненої задачі була пораховано теоретичне значення оцінки інтенсивності оригінального процесу.

Перелік використаних джерел

1. Adrian Baddeley. Spatial Point Processes and their Applications — Режим доступа: `http://www.apps.stat.vt.edu/leman/VTCourses/BaddeleyPointProcesses.pdf`.
2. Jens Lund, Mats Rudemo. Models for point processes observed with noise. — 1999. — С. 24 с. —
3. Jens Lund, Antti Penttinen, Mats Rudemo. Bayesian analysis of spatial point patterns from noisy observations. — 1999.
4. Кингман Дж. Пуассоновские процессы // 2007. — С. 136.