

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
КАФЕДРА ФІЗИКИ ЕНЕРГЕТИЧНИХ СИСТЕМ

«На правах рукопису»

УДК 539

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

(підпис) А.А. Халатов
(ініціали, прізвище)
“ _____ ” _____ 2018 р.

Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»

на тему «Квазірелятивістські ефекти в спектрі мас важких адронів»

Виконав: студент 6 курсу групи ФФ-62м

Демський Андрій Вікторович

Керівник: д-р ф.-м. н., проф., п. н. с. ІТФ ім. М.М. Боголюбова НАН України

Кобушкін Олександр Петрович

Консультант: к. ф.-м. н., ст. н. с. ІТФ ім. М.М. Боголюбова НАН України

Борисюк Дмитро Леонідович

Рецензент: к. ф.-м. н., н. с. ІТФ ім. М.М. Боголюбова НАН України

Іваницький Олексій Ігоревич

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент _____

Київ — 2018 року

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка дипломної роботи за обсягом становить 86 сторінку, містить 8 таблиць 9 рисунки. Використано 42 джерел.

Темою роботи квазірелятивістські ефекти в спектрі мас важких адронів.

Об'єктом дослідження є баріонна система з одним та двома важкими кварками в рамках квазірелятивістського підходу.

Предметом дослідження спектр мас баріонів з одним та двома важкими кварками в рамках квазірелятивістського підходу.

Метою даної роботи є побудова квазірелятивістської моделі для опису важких баріонів та розрахунків їх спектру мас на основі даної моделі. Це реалізується за допомогою варіаційного метода Рітца.

Завдання роботи: розробка моделі згідно з обраною аналогією; вибір вигляду нерелятивістського потенціалу взаємодії кварків та обґрунтування його параметрів; формулювання способу врахування релятивістських ефектів та модифікація його до адронної системи; вибір класу пробних функцій для застосування варіаційного методу; розвиток математичного формалізму, необхідного для реалізації чисельних розрахунків; розрахунок спектру мас важких та двічі важких баріонів; передбачення мас частинок, що не спростерігались експериментально; дослідження впливу релятивістських ефектів на параметри та спектр мас.

Методи дослідження: гаусовий розклад, варіаційний метод Рітца, теорія збурень, чисельна мінімізація методом SLSQP.

В результаті дослідження були отримані наступні результати:

- 1) Побудовано квазірелятивістську модель для опису важких баріонів в рамках кваркової моделі, де в якості нерелятивістської міжкваркової взаємодії було обрано корнеллівський потенціал.

- 2) Було послідовно враховано всі релятивістські поправки порядку $(v/c)^2$ у вигляді гамільтоніану Брейта.
- 3) Розроблено математичний формалізм даної моделі.
- 4) Отримано параметри гамільтоніану.
- 5) Розраховано спектри мас важких та двічі важких баріонів в основному стані.
- 6) Зроблено передбачення мас для не підтверджених експериментально частинок.
- 7) Проаналізовано важливість врахованих поправок.

Наукова новизна полягає в послідовному врахуванні релятивістських поправок порядку $(v/c)^2$ до спектру мас баріонів.

Значимість результатів заключається в отриманні спектру мас важких та двічі важких баріонів в рамках квазірелятивістського підходу, відповідно, передбаченні мас для частинок, існування яких експериментально не підтверджено.

Результати роботи були апробовані доповідями та постером на міжнародній конференції в Осло International School "Relativistic Heavy Ion Collisions, Cosmology and Dark Matter, Cancer Therapy". Також результати доповідались на конференції молодих вчених інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова.

Ключові слова: важкі баріони, двічі важкі баріони, кваркова модель, варіаційний метод Рітца, корнеллівський потенціал, гамільтоніан Брейта.

SUMMARY

The explanatory note of thesis contains 86 pages 8 tables and 9 figures with 42 names of bibliographic sources.

The theme of this work is the quasi-relativistic effects in the hadron spectroscopy.

Object of study is a single- and double-heavy baryon system within the quasi-relativistic framework.

The subject of the study is a mass spectrum of a single- and double-heavy baryon system within the quasi-relativistic framework.

The purpose of this work is the construction of a quasi-relativistic model for describing heavy baryons and calculating their mass spectra based on this model. This is done using the Ritz variational method.

The challenge is developing of the model according to the chosen analogy; selection of the nonrelativistic interquark potential and reasoning of its parameters; formulating the way to account the relativistic effects and modifying it to the considered system; choosing the class of trial functions for variational approach; developing of the formalism for numerical computation; calculation of the mass spectrum single and double heavy baryons; mass prediction to the non-observed particles; study of the influence of the relativistic effects on the parameters and mass spectra.

Investigation methods: Gaussian expansion, Ritz variational approach, perturbation theory, numerical minimization with the SLSQP.

The research gave us the following results:

- 1) The quasi-relativistic model of heavy baryons was constructed. The Cornell potential was chosen as nonrelativistic interquark potential.
- 2) Mathematical formalism of chosen model was developed.
- 3) All relativistic corrections of the order $(v/c)^2$ in the form of the Breit Hamiltonian were consistently taken into account.

- 4) Parameters of the hamiltonian were obtained.
- 5) Mass spectra of single- and double-heavy baryons in the ground state was calculated.
- 6) The importance of the quasi-relativistic corrections was analyzed.

Scientific novelty follows the accurate consideration of the relativistic corrections of order $(v/c)^2$ to the single- and double-heavy baryon spectrum.

The significance of the results follows the predicting masses of the non-observed single- and double-heavy baryons in the quasi-relativistic model.

Results of the work were presented on the International School "Relativistic Heavy Ion Collisions, Cosmology and Dark Matter, Cancer Therapy" (plenary talks and poster session), and on the young scientists conference "PROBLEMS OF THEORETICAL PHYSICS" Bogolyubov Institute for Theoretical Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

Key words: single-heavy baryons, double-heavy baryons, quark model, Ritz variational method, Cornell potential, Breit Hamiltonian.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ	11
ВСТУП	13
1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	15
1.1. Адрони з перших принципів	15
1.1.1. Від КЕД до КХД. Асимптотична свобода та конфайнмент	15
1.2. Кваркова модель	19
1.3. Огляд можливих модельних представлень для баріонів	20
1.3.1. Координати Якобі	21
1.4. Найпоширеніші методи теоретичного дослідження баріонів .	23
1.4.1. Збурення до потенціалу гармонічного осцилятора . . .	23
1.4.2. Варіаційний метод Рітца	23
1.4.3. Рівняння Фаддєєва	25
1.4.4. Гіперсферичний розклад	26
1.4.5. Дікваркова модель	27
1.5. Потенціали, що описують взаємодію кварків	28
1.5.1. Потенціал гармонічного осцилятора	28
1.5.2. Потенціал кулонівського типу	29
1.5.3. Лінійний потенціал	30
1.5.4. Корнеллівський потенціал	30
1.5.5. Логарифмічний потенціал	31
1.5.6. Порівняльна характеристика потенціалів	31
1.6. Релятивізм	32
1.7. Висновки до розділу 1	37
2. РОЗРОБКА ФОРМАЛІЗМУ МОДЕЛІ	38
2.1. Аналогія важких баріонів з атомними системами	38
2.1.1. Баріон з одним важким кварком як аналог атома гелію	38

2.1.2.	Двічі важкий баріон як аналог іонізованої молекули водню	39
2.2.	Систематика важких баріонів в основному стані	40
2.3.	Введення координат Якобі	43
2.4.	Варіаційний метод Рітца	44
2.5.	Гамільтоніан системи	46
2.5.1.	Нерелятивістський гамільтоніан	46
2.5.2.	Релятивістська частина — гамільтоніан Брейта	50
2.6.	Хвильова функція в загальному вигляді	52
2.7.	Пробна функція	52
2.8.	Усереднення гамільтоніана	55
2.8.1.	Усереднення кінетичної енергії	55
2.8.2.	Усереднення кулонівської частини корнеллівського потенціалу	57
2.8.3.	Усереднення потенціалу конфаймента	59
2.8.4.	Усереднення контактних термів	62
2.8.5.	Усереднення терму H_{mv}	63
2.8.6.	Усереднення терму H_{ret}	66
2.9.	Висновки до розділу 2	71
3.	РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ	72
3.1.	Розрахунок та обґрунтування параметрів	72
3.2.	Реалізація варіаційного методу Рітца. Мінімізація	74
3.3.	Розраховані спектри мас баріонів та їх аналіз	74
3.3.1.	Спектр мас легких баріонів	74
3.3.2.	Спектр мас <i>charm</i> -баріонів	75
3.3.3.	Спектр мас <i>bottom</i> -баріонів	76
3.3.4.	Спектр мас двічі важких баріонів	77
3.4.	Висновки до розділу 3	80
	ВИСНОВКИ	81

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ 83

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

Кириличні скорочення:

КХД — квантова хромодинаміка,

БАК — Великий адронний колайдер.

Кириличні скорочення:

LHCb — Large Hadron Collider beauty;

ATLAS — A Toroidal LHC ApparatuS;

CMS — Compact Muon Solenoid.

Латинські позначення:

s — спінове квантове число;

\mathbf{s} — оператор спіну;

l — орбітальне квантове число;

\mathbf{l} — оператор орбітального моменту;

j — квантове число повного моменту імпульса;

\mathbf{j} — оператор повного моменту;

M — сумарна маса кварків;

Q — важкий кварк;

q — легкий кварк;

$\mathbf{R}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}$ — координати Якобі;

$\mathbf{P}, \mathbf{p}, \mathbf{p}$ — імпульси, що відповідають координатам Якобі;

N — нормувальний коефіцієнт;

T — кінетична енергія;

V — потенціал;

\hat{H} — оператор Гамільтона;

A, B — параметри лінійно-зростаючого потенціалу;

Y_{lm} — сферична функція;

$\Gamma(z)$ — гамма-функція;

$P_l(\cos\theta)$ — поліноми Лежандра.

Грецькі позначення:

α_k, β_k — варіаційні параметри;

α_s — параметр потенціалу кулонівського типу;

ϵ_{ijk} — символ Леві-Чевіти;

δ_{ij} — символ Кронекера.

Індекси:

Coul — Кулон;

conf — конфайнмент;

ssc — спін-спін контактний;

mv — mass violation;

D — Darwin;

ret — retardation.

Інші позначення:

$|\dots\rangle$ — кет-вектор;

$\langle\dots|$ — бра-вектор;

$\langle\dots|\dots\rangle$ — коефіцієнт Клебша-Гордана;

$\langle\dots\rangle$ — усереднення.

ВСТУП

На даному етапі розвитку науки значна увага приділяється дослідженню так званої Стандартної моделі, яку прийнято вважати найбільш повною теорією елементарних взаємодій.

Стандартна модель є парадигмою квантової теорії поля та базується на наступних положеннях: вся матерія складається з дванадцяти фундаментальних квантових полів, квантами яких являються фундаментальні частинки-ферміони та постулюються калібрувальні симетрії, наслідками яких є три типи фундаментальної взаємодії.

З точки зору Стандартної моделі, кварки є фундаментальними частинками. Вони не можуть бути спостережені у вільному стані внаслідок явища конфайнменту, тому доцільним є дослідження кваркових систем — адронів. Легкі адрони вже доволі детально дослідженні як на теоретичному, так і на експериментальному рівні. Тому найбільш актуальною задачею сучасної фізики елементарних частинок та фізики високих енергій є дослідження властивостей важких адронів, тобто тих, що містять важкі кварки. Не всі з частинок цього класу спостерігались експериментально, хоча, з точки зору кваркової моделі, вони мають існувати. Перед проведенням експерименту з пошуку нових частинок важливим є теоретичне передбачення діапазону їх пошуку, тобто наближене значення їх мас.

Принциповою проблемою при теоретичному дослідженні баріонів є те, що вони є багаточастинковою системою. Як відомо, одержання точного аналітичного розв'язку для задачі трьох тіл неможливе, тому в даній роботі пропонується розрахунок спектру мас таких систем чисельним методом, а саме — з застосуванням варіаційного методу Рітца.

Даний підхід є досить універсальним, тому що не накладає ніяких обмежень на масу кварка. Таким чином, за допомогою цього метода можна розраховувати маси баріонів з будь-якою кварковою конфігурацією.

Існує дуже багато феноменологічних моделей, що дозволяють визначати властивості адронів, однак проблема врахування релятивістських ефектів (особливо коли в системі присутні легкі кварки) дуже часто виявляється мало вивченою. Однак як для послідовного та правильного опису системи так і для адекватного трактування її результатів вони є дуже важливими.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1 Адрони з перших принципів

Фундаментальні принципи послідовно і логічно описують поведінку елементарних частинок, однак примінити їх відразу до складних систем (наприклад адронів) занадто складно. Тому аналізуючи ефекти та асимптотичні розклади фундаментальних принципів можна застосовувати різноманітні феноменологічні та числові методи у розрахунку складних систем.

1.1.1 Від КЕД до КХД. Асимптотична свобода та конфайнмент

Існують три фундаментальні сили в природі: електромагнітна, електро-слабка, сильна та гравітаційна. Електромагнітна, як частина електрослабкої, відповідальна за взаємодію електрично заряджених частинок, яка будучи гарно досліджена в рамках квантової теорії поля, вважається одною з най-успішніших теорій.

Квантова електродинаміка (КЕД) це теорія теорія електромагнітної взаємодії, її лагранжіан має наступний вигляд:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

де γ^μ — матриці Дірака;

ψ — ферміонні спінові поля (наприклад електрон-позитронні);

$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ — Діраківськи спряжені поля;

$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu + ieB_\mu$ — калібровочно коваріантна похідна;

e — заряд ферміона, що грає роль константи взаємодії;

m — маса ферміона;

A_μ — коваріантний чотири-потенціал електромагнітного поля, що генерується ферміоном;

B_μ — поле зовнішнього джерела;

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — тензор електромагнітного поля.

Електромагнітна взаємодія дозволила адекватно описати фізику багатьох ефектів та досягла рекордних результатів по передбаченню фізичних величин.

Сильна взаємодія, як фундаментальна взаємодія, що зв'язує кварки та глюони, будувалась в деякій мірі аналогічно до електромагнітної. Квантова хромодинаміка (КХД) — теорія сильної взаємодії, з лагранжіаном наступного вигляду:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\Psi}_i (i(\gamma^\mu D_\mu)_{ij} - m \delta_{ij}) \Psi_j - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu},$$

де $\Psi_i(x)$ — кваркові поля з індексами групи SU(3), що відповідає за квантове число — колір;

коваріантна похідна має наступний вигляд $(D_\mu)_{ij} = \partial_\mu \delta_{ij} - ig A_\mu^a T_{ij}^a$, де $T_{ij}^a = \lambda_{ij}^a/2$ генератори калібрувальної SU(3) групи;

тензор напруженості глюонного поля $G_{\mu\nu}^a$ є аналогічним до тензора електромагнітного поля $F_{\mu\nu}$, і записується наступним чином:

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a + g f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c,$$

де $\mathcal{A}_\mu^a(x)$ — глюонні поля та коефіцієнти f_{abc} відповідають за антисиметричну структуру групи.

Обидві теорії КЕД та КХД є калібрувальними квантовопольовими теоріями. Однак, на відміну від КЕД, КХД являється неабелевою теорією. Це означає, що глюони є переносчиками сильного (кольорового) заряду, тому вони взаємодіють самі з собою (явище самодії), на відміну від фотонів які є електрично нейтральними і не мають прямої взаємодії між собою.

З неабелевої природи сильної взаємодії, її динаміка здається занадто важкою, щоб спробувати її описати в рамках розважливої моделі квантової теорії поля. Для опису сильної взаємодії використовують або методи з теорії дисперсійних співвідношень, що базуються на базових фізичних критеріях унітарності та причинності, або феноменологічні моделі, або, останнім часом, КХД на гратці. Спроби побудувати релятивістський лагранжіан моделі, який би дав детальний опис динаміки сильної взаємодії, ще досі не дав навіть якісних результатів.

З другої сторони, експерименти по глибоко непружному лептон-протонному розсіянню свідчать про простий динамічний механізм сильної взаємодії. При великих переданих імпульсах, що еквівалентно малим відстаням, адрони поведуть себе наче вони складаються з невзаємодіючих точкових об'єктів. Тому, наступна якісна картина слідує: адрони це складені об'єкти, взаємодія між їх компонентами прямує до нуля при малих відстанях. Водночас, на великих відстанях ефективна взаємодія стає такою сильною, що, адрони є сильно зв'язаними системами.

Чи можливо описати таку взаємодію в рамках квантової теорії поля? Відповідь на це питання не є однозначною. Вище описана взаємодія має місце тільки в неабелевих калібрувальних теоріях. Всі консистентні моделі теорії поля які не включають поля Янга-Міллса приводять до збільшення ефективної взаємодії на малих відстанях. Ця унікальна особливість Янг-Міллсівських полів детально описана в книзі Фадєєва та Славнова [1]. Для дослідження питання такої поведінки, можна розглянути біжучу константу зв'язку обох теорій КЕД та КХД (або так званий інваріантний заряд, що являється ефективним параметром характеризуючим силу взаємодії), у випадку КЕД вона може бути записана наступним чином:

$$\tilde{\alpha}(\kappa, \alpha) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \kappa},$$

де $\tilde{\alpha}$ — інваріантна константа взаємодії КЕД, α — ефективна константа взаємодії КЕД, κ — параметр, що характеризує шкалу імпульсу. Можемо помітити, що $\tilde{\alpha}$ росте з ростом κ до $\kappa = e^{\frac{3\pi}{\alpha}}$.

У випадку КХД, аналогічна формула має наступний вигляд:

$$\tilde{g}^2(\kappa, g^2) = \frac{1}{1 + \frac{g^4}{(4\pi)^2} \frac{22}{3} \ln \kappa},$$

де \tilde{g} — інваріантний заряд КХД, g — заряд КХД. Відповідно, квадрат інваріантного заряду прямує до нуля при $\kappa \rightarrow \infty$, що є доказом явища асимптотичної свободи з перших принципів.

Однак, при низьких енергіях (великих відстанях), тобто на масштабах нашого повсякденного життя, кварки та глюони взаємодіють сильним чином і формують зв'язні стани — адрони.

Найбільш відомі приклади таких зв'язних станів це протон та нейтрон, але їх число адронів, що спростерішалися у детекторах частинок є дуже великим. Тому, єдиний спосіб отримувати інформацію про сильну взаємодію — це спостерігати за цими зв'язними системами, адже жоден вільний кварк та глюон не сопстерігався. Ми називаємо цей феномен — конфайментом. Більше 50 років інтенсивних досліджень з моменту формулювання стандартної моделі, що включає КХД, досі немає гарної відповіді на одне з найбільш фундаментальних явищ КХД — природи конфаймента. Навіть формулювання того, що таке конфаймент є досі є дискусійним [2].

Найбільш простий спосіб думати про це явище наступний: взаємодіючі кварки (або антикварки) зв'язуються глюонною струною. Додаючи в таку систему енергію, намагаючись розірвати цей зв'язок, для системи енергетично вігідно замість розпаду на незв'язані кварки, передати енергію на народження з кварк-глюонного вакууму пари кварк-антикварк, що сформує замість одного адрону два. Існує багато фундаментальних підходів для розгляду цього питання, але адекватного опису процесу немає. Отже, побудова

адекватної релятивістської моделі для сильно взаємодіючих об'єктів, обґрунтування її параметрів та їх інтерпретація, це ще один спосіб досліджувати фундаментальні питання фізики елементарних частин.

1.2 Кваркова модель

Ціла низка нових явищ і понять була розкрита при дослідженні сильних взаємодій. Ще у 40-х роках стало зрозуміло, що нуклони аж ніяк не є єдиними частинками, для яких властива сильна взаємодія. Вони належать до загального класу часток, які згодом було названо адронами. На сьогоднішній день відомо більш ніж триста видів адронів.

Головна ідея, що була висловлена вперше М. Гелл-Манном [4] та Дж. Цвейгом [5] полягає в тому, що всі частинки, що беруть участь у сильних взаємодіях, складаються з більш фундаментальних частинок – кварків. Всі кварки мають спин, що дорівнює $1/2$. На сьогоднішній день встановлено існування шести кварків: u, d, s, c, b, t . Ці позначення походять від англійських слів *up, down, strange, charm, bottom, top*.

Всі кварки природним чином групуються у три так звані покоління. В кожному поколінні один кварк має заряд $-1/3$, а другий $+2/3$. Покоління кварків представлено у таблиці 1.

Таблиця 1.1

Покоління кварків

	Перше покоління		Друге покоління		Третє покоління	
Кварк	d	u	s	c	b	t
Заряд	$-1/3$	$+2/3$	$-1/3$	$+2/3$	$-1/3$	$+2/3$

Кваркова модель була запропонована у той час, коли були відомі лише так звані легкі адрони, тобто адрони, що складаються лише з легких кварків

u, d, s . Ця модель одразу довела до ладу всю систематику цих адронів. На її основі не тільки стала зрозумілою структура вже відомих на той час частинок, але й була передбачена ціла низка невідомих на той час адронів.

Всі адрони можна поділити по кількості кварків, що до них входять. Так як вільні кварки не спросерігалися, першим класом буде мезон, адрон до якого входять кварк-антикваркова пара, що є бозонами (мають ціле значення спіну). Наступний клас, баріони, складаються з трьох кварків, вони є ферміонами, тобто мають напівцілий спін. Наступним класом є екзотика або мультикварки, така формальна назва відповідає тому, що даний сектор адронів ще не був детально дослідженим, до нього входять чотирикваркові системи (тетракварки), п'ятикваркові системи (пентакварки), шестикваркові системи (так звані дібаріони) та інші.

1.3 Огляд можливих модельних представлень для баріонів

Кваркова модель для баріонів була розроблена в 1960-х роках у той час, коли багато з нуклонів та гіперонів вже були добре відомі.

Рані роботи Далиця [6], а також більш пізні роботи Ісгура, Карла [7], Кутовські та інших тісно пов'язані з моделлю гармонічного осцилятора, яка забезпечує потужну класифікаційну схему, а також ефективний інструмент для реалізації обмежень симетрії.

Модель гармонічного осцилятора була дуже добре вдосконалена та були перелічені всі можливі поправки, що мають тлумачення в КХД (одно-глюонний обмін). Також були здійснені спроби вирішити задачу трьох тіл, використовуючи відомі техніки, що були розроблені в атомній та ядерній фізиці, такі як рівняння Фаддєєва, гіперсферичні гармоніки або варіаційні методи. Потім може бути використаний будь-який потенціал, наприклад суперпозиція кулонівського потенціалу з лінійним членом. Зауважимо, що у

більш ранніх роботах було неявно передбачалося, що потенціал має бути парним і задачею було встановити зв'язок між взаємодією кварків у баріоні та кварк-антикварковою взаємодією у мезоні. Крім того, багато років вважалося, що взаємодія конфайнмента має природу задачі трьох тіл, тобто одночасно залежить від всіх відносних відстаней. Це робить розрахунки технічно більш складними, але це робить зв'язок з КХД на решітці, що задовольняє потенціалам такого вигляду [8]. Звичайно, важливим також є внесок релятивістських ефектів. В останніх роботах Ісгура була застосована релятивістська кінематика [9]. Також існують моделі, засновані на рівняннях Бете-Салпітера [10].

1.3.1 Координати Якобі

У випадку рівних мас, набір координат Якобі, що діагоналізують кінетичну енергію є (див. рис. 1.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}, \\ \mathbf{x} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, \\ y &= \frac{3r_1 - r_2 - r_3}{\sqrt{3}}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

де r_1, r_2, r_3 - координати складових частинок в лабораторній системі відліку, \mathbf{R}, x, y - відповідні даній системі координати Якобі, а множник в y спрощує врахування обмежень симетрії. Тоді, переходячи до системи відліку центра мас, гамільтоніан системи записується у вигляді:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + V(x, y) \tag{1.2}$$

де p_x, p_y — імпульси відповідних координат та потенціальна енергія V має бути скаляром.

У випадку двох різних мас, скажімо (m, m, M) , R змінює свій вигляд, а x та y залишаються незмінними.

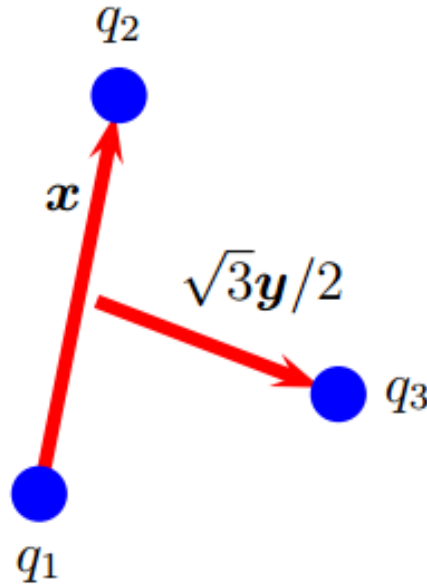


Рис. 1.1. Координати Якобі

Тоді гамільтоніан приймає вигляд:

$$H = \frac{p_x^2}{2\mu_x} + \frac{p_y^2}{2\mu_y} + V(x, y), \quad (1.3)$$

де зведені маси мають вигляд:

$$\mu_x = m, \quad \mu_y^{-1} = \frac{m^{-1} + 2M^{-1}}{3}. \quad (1.4)$$

Якщо всі три маси різні, координата Якобі y приймає вигляд:

$$\mathbf{y} = (m_1 + m_2)\mathbf{r}_3 - m_1\mathbf{r}_1 - m_2\mathbf{r}_2, \quad (1.5)$$

що дозволяє легко вивести зведені маси μ_x та μ_y як функції власних мас кварків m_i .

Координати Якобі можуть бути введені по різному, для врахування симетрії задачі.

1.4 Найпоширеніші методи теоретичного дослідження баріонів

1.4.1 Збурення до потенціалу гармонічного осцилятора

Найбільш поширений метод полягає в тому, щоб записати потенціал взаємодії кварків у вигляді:

$$V = K(x^2 + y^2) + \delta V \quad (1.6)$$

та розглядати другий член як збурення. Звичайно, такий потенціал не точно описує взаємодію кварків, особливо на малих відстанях. Якщо δV зміщує резонанс Ропера [11] $P11(1440)$ вниз з $N = 2$ рівня гармонічного осцилятора до околу $N = 1$ рівня, теорія збурень взагалі не може бути застосована, тому що вона вимагає, щоб зміщення були малими відносно початкового положення.

1.4.2 Варіаційний метод Рітца

Для багатьох задач, у тому числі і для дослідження спектру мас баріонів, дуже корисним є варіаційний метод Рітца. Для основного стану він базується на наступній теоремі: середнє значення від оператора Гамільтона \hat{H} по будь яким функціям $\phi(x)$, нормованим на одиницю, більше або рівне енергії основного стану, при чому рівність виконується коли $\phi(x)$ співпадає

з хвильовою функцією основного стану. Таким чином для практичних цілей виконується наступна процедура. Беремо довільну функцію $\phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x)$, де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - деякі параметри. Вимагається щоб вона була нормована на одиницю:

$$\int \phi^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x) \phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x) dx = 1, \quad (1.7)$$

така функція називається пробною функцією.

Потім обчислюється функціонал:

$$R_0(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \int \phi^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x) \hat{H} \phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x) dx = 1 \quad (1.8)$$

і шукається мінімум за його параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, тобто таке значення параметрів $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n$, щоб виконувалась умова:

$$\frac{\partial R_0}{\partial \tilde{\alpha}_1}; \quad \frac{\partial R_0}{\partial \tilde{\alpha}_2}; \quad \dots; \quad \frac{\partial R_0}{\partial \tilde{\alpha}_n}. \quad (1.9)$$

Тоді покладаємо $E_0 \approx R_0(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n)$ і $\Phi_0(x) \approx \phi(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n, x)$. Звичайно цей метод дає гарний результат, якщо вдасться завдяки якимось здогадкам вибрати правильну пробну функцію. Часто буває навіть досить використати однопараметричну пробну функцію. Для того, щоб знайти енергію першого збудженого стану методом Рітца, необхідно побудувати пробну функцію, яка задовольняє обидві умови.

З умов нормування:

$$\int \phi_1^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, x) \phi_1(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, x) dx = 1 \quad (1.10)$$

З умов ортогональності хвильової функції до хвильової функції основного стану:

$$\int \Phi^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, x) \Phi_1(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, x) dx = 0 \quad (1.11)$$

Обчислюючи мінімум функціонала:

$$R_0(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \int \Phi_1^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, x) \hat{H} \Phi_1(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, x) dx = 1, \quad (1.12)$$

можна ототожнити його з енергією E_1 , а $\Phi_1(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, x)$ з хвильовою функцією збудженого стану $\Phi_1(x)$. Далі цю процедуру можна продовжити, будуючи нормовану функцію для другого збудженого стану і т.д. [12].

1.4.3 Рівняння Фаддєєва

Рівняння Фаддєєва - це рівняння, які описують всі можливі взаємодії в системі трьох частинок в повному квантовомеханічному формулюванні. Вони були встановлені Л. Д. Фаддєєвим. Рівняння можуть бути вирішені ітераційним способом. Загалом рівняння Фаддєєва в якості вхідних параметрів використовують потенціал, який описує взаємодію між двома окремими частинками. Також в рівняння можна вводити члени, що враховують трьохчасткові сили.

Рівняння Фаддєєва частіше за все використовуються в непертурбативному формулюванні проблеми трьох тіл в квантовій механіці. На відміну від проблеми трьох тіл в класичній механіці, в квантовій задачі трьох тіл розв'язок рівномірно збігається.

У ядерній фізиці нуклон-нуклонна взаємодія, що розглядається поза енергетичної поверхні, аналізується в реакціях $(n, 2n)$ і $(p, 2p)$ з дейтерієвої

мішенню з використанням рівнянь Фаддєєва. Нуклон-нуклонна взаємодія апроксимується набором сепарабельних потенціалів. Кулонівська взаємодія між двома протонами представляє окрему проблему, так як його розкладання в сепарабельні потенціали не збігається.

Сепарабельні потенціали - це взаємодії, що не зберігають положення частинки. Звичайний локальний потенціал може бути виражений як сума сепарабельних потенціалів. Фізична нуклон-нуклонна взаємодія, яке включає в себе обмін мезонами, може бути як локальною, так і сепарабельною.

Спочатку рівняння Фадєєва для задачі трьох тіл були записані для близькодійючих потенціалів у просторі моменту. Пізніше, вони були переведені у координатний простір та були адаптовані до потенціалу конфайнмента. Вони припускають сумування по всьому кутовому моменту, і навіть з досить грубими обмеженнями, вони забезпечують чудову хвильову функцію. Вперше рівняння Фадєєва були застосовані до баріонів в [13]. Також це питання розглядалось в [14].

1.4.4 Гіперсферичний розклад

6-вимірний вектор x, y може бути записано як (ρ, Ω_5) у сферичних координатах. П'ять кутів Ω_5 включають фізичні кути \hat{x} та \hat{y} та $\arctg(y/x)$. Метод полягає в розкладі хвильової функції $\psi(x, y)$ на парціальні хвилі в цьому просторі. Для гармонічного осцилятора $V \propto \rho^2$, тому отримаємо знайомі результати. В іншому випадку, отримаємо нескінченний набір попарних рівнянь вигляду:

$$-u''_{[L]}(\rho) + \frac{(L + \frac{3}{2})(L + \frac{5}{2})}{\rho^2} u_{[L]} + \sum [L]' V_{[L],[L]}'(\rho) u_{[L]}(\rho) = E u_{[L]}(\rho), \quad (1.13)$$

де $[L]$ є так званим «великим» кутовим моментом, який пов'язаний з магнітними числами.

Зберігаючи лише один член в розкладі, найнижчі гіперцентральної гармоніки, отримуємо гіперскалярну апроксимацію. Вперше до баріонів цей метод застосував Гвімараес [15] та Гасенфрац [16].

1.4.5 Дікваркова модель

Бувають такі випадки, коли стан, що було передбачено у трикварковій моделі був відсутній в експериментальному спектрі. Як завжди наголошували Ісгур та Карл, (їхні документи в бібліографії та приватному спілкуванні), більшість експериментальних даних мають справу з піонним або фотонним розсіюванням на нуклоні. Ці методи виявляють стани з одним збудженим кварком та двома іншими кварками в майже незбуджених станах та подавляють стани з двома внутрішніми збудженнями. Однак, експерименти з більшою статистикою мають бачити стани, яких не вистачає.

Рішучою альтернативою є дікваркові моделі. Дікварки можуть застосовуватися для багатьох цілей, зокрема в реакціях множинного народження. В спектроскопії, кварк-антикваркова модель зберігає лише ті баріони, що складаються з компактного дікварка та кварка. Питання тільки в тому, чи розглядається дікварк як елементарна складова, чи якимось генерується динамічно.

Вважається, що для трикваркових систем з високим орбітальним моментом основний стан складається з двох кварків, які головним чином знаходяться в s -стані та третім кварком, що є носієм більшості орбітального моменту, у той час як для систем з низькими значеннями орбітального моменту, три кварка розподіляють між собою орбітальний момент майже симетрично. Цей факт пояснює давню проблему: траєкторії Реджі мезо-

нів та баріонів є лінійними та мають однаковий нахил. Приведемо деякі роз'яснення стосовно траєкторій Реджі [17]. Вони були створені для пояснення деяких властивостей розсіювання потенціалу, а пізніше, у різних формах, для високоенергетичних розсіювань адронів. В останньому контексті, траєкторії Реджі є квадрат маси як функція спіну. Траєкторії, що спостерігаються, є ідеальними прямими лініями. Для мезонів це було інтерпретовано як потік постійного перерізу, що зв'язує кварк та антикварк.

Чудовим фактом було спостереження того, що баріони також належать до лінійних траєкторій з тим самим нахилом. Це звичайно природньо для кварк – дікваркової моделі, тому що енергія кольору 3 пов'язана з енергією кольору $\bar{3}$. Ми зараз розуміємо, що це відбувається спонтанно.

Питання, що іноді намагаються уникати, це чи є дікварк лише ефективним ступенем вільності, що спрощує динаміку баріонів, чи є такою ж складовою, як і кварк є складовою адрона. Поки що остаточної відповіді на це питання немає.

1.5 Потенціали, що описують взаємодію кварків

1.5.1 Потенціал гармонічного осцилятора

Як вже було вказано вище, найбільш простим, а тому й найбільш розповсюдженим методом опису взаємодії кварків в баріоні є запис потенціалу їх взаємодії у вигляді потенціалу гармонічного осцилятора. В багатьох роботах, що стосуються знаходженню спектрів мас адронів використовують саме гармонічний потенціал. Наприклад, у роботі Глозмана та Ріски [18] було використано потенціал вигляду:

$$V_{conf}(r_{ij}) = V_0 + \frac{1}{6}m\omega^2((\mathbf{r}_i) - (\mathbf{r}_j))^2, \quad (1.14)$$

де m – маса конститuentного кварка, ω – кутова частота осциляторної взаємодії. Для зручності у даній формулі було знехтувано різницею мас між легкими та s конститuentними кварками. Тоді, записуючи гамільтоніан системи, та вирішуючи рівняння Шрьодінгера, отримаємо власні значення оператора Гамільтона:

$$E_0 = 3V_0 + (N + 3)\hbar\omega, \quad (1.15)$$

де N – число квантів збудження в стані.

1.5.2 Потенціал кулонівського типу

Аналогічно до того, як всі заряджені частинки мають електричний заряд, кварки мають кольоровий заряд, завдяки якому відбувається сильна взаємодія. Таким чином, потенціал має вигляд:

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r}, \quad (1.16)$$

де $4/3$ – кольоровий множник, що пов'язаний з кварк-глюонною константою зв'язку α_s [19]. Вигляд такого потенціалу передбачено в КХД. Однак він є вірним лише на малих відстанях. На великий відстанях потенціал має бути стримуючим, тобто таким, що зростає по мірі росту r , інакше вільні кварки могли б існувати.

1.5.3 Лінійний потенціал

Лінійно-зростаючий потенціал має вигляд:

$$V(r) = ar, \quad (1.17)$$

де a – постійний параметр.

На відміну від потенціалу кулонівського типу, лінійно-зростаючий потенціал є утримуючим і тому добре описує взаємодію кварків на великих відстанях. Однак зрозуміло, що на малих відстанях він не може бути застосований [20].

1.5.4 Корнеллівський потенціал

Розглядаючи потенціал кулонівського типу та лінійний потенціал, було встановлено, що кожен з них добре описує взаємодію кварків у своєму діапазоні відстаней. Було б логічно припустити, що потенціал взаємодії в дійсності є чимось середнім між цими двома типами потенціалів. Найпростішим потенціалом, такого типу, що добре описує взаємодію як на малих відстанях, так і на великих відстанях є корнеллівський потенціал [21]. Він є одним з найбільш популярних модельних потенціалів і має вигляд:

$$V(r) = \frac{a}{r} + br, \quad (1.18)$$

де r — ефективний радіус зв'язаного стану, a і b — деякі параметри.

Такий потенціал складається з двох частин. Перша, a/r , відповідає потенціалу, створюваному одноглюонним обміном між кварком і антикварком, і називається кулонівською частинкою, оскільки повторює вид кулонівського

потенціалу електромагнітного поля, також пропорційного $1/r$. Друга частина, br , відповідає ефекту конфайнмента кварків. Зазвичай при використанні даного підходу береться зручна форма хвильової функції кварків, а параметри a і b визначаються шляхом підгонки до експериментально вимірених значень мас кварконіїв. Релятивістські та інші ефекти можуть бути враховані шляхом додавання додаткових членів до потенціалу, подібно до того, як це робиться для атома водню в нерелятивістській квантовій механіці.

Останній вигляд потенціалу не має якісного теоретичного обґрунтування, проте вельми популярний, оскільки дозволяє досить точно передбачати параметри кварконія, уникаючи тривалих обчислень на решітці, а також поділяє вплив короткодійного кулонівського потенціалу та дальнодійного ефекту конфайнмента. Це виявляється корисно для розуміння характеру сил між кварком і антикварком в КХД.

1.5.5 Логарифмічний потенціал

Логарифмічний потенціал є модифікованим потенціалом кулонівського типу і також спадає обернено пропорційно до відстані. Такий потенціал має вигляд:

$$V(r) = A \ln \frac{1}{r} \quad (1.19)$$

де A – постійний параметр. Очевидно, що він має ті ж самі недоліки, що й потенціал кулонівського типу. Однак на малих відстанях він є більш точним і тому іноді застосовується для грубого опису взаємодії кварків.

1.5.6 Порівняльна характеристика потенціалів

Для перевірки того, наскільки добре той чи інший потенціал описує взаємодію кварків, можна порівняти експериментальні значення надтонкого

розщеплення в спектрах мезонів і баріонів з тими, що отримано теоретично з використанням потенціалів різного вигляду. Подобного роду аналіз було проведено Марекон Карлайнером [22]. На рис. 1.2 представлено результати його роботи.

Як бачимо, дані отримані для корнеллівського потенціалу найбільш точно відповідають експериментальним даним, тому серед потенціалів, що мають достатньо простий вигляд, корнеллівський потенціал якнайкраще описує взаємодію кварків в баріоні.

	Δ_K / Δ_Σ	$\Delta_D / \Delta_{\Sigma_c}$	$\Delta_B / \Delta_{\Sigma_b}$
M_3/M_1	1.33	4.75	14
EXP	2.08 ± 0.01	2.18 ± 0.08	2.15 ± 0.20
Harmonic	1.65	1.62	1.59
Coulomb	5.07 ± 0.08	5.62 ± 0.02	5.75 ± 0.01
Linear	1.88 ± 0.06	1.88 ± 0.08	1.86 ± 0.09
Cornell ($K=0.28$)	2.10 ± 0.05	2.16 ± 0.07	2.17 ± 0.08
Log	2.38 ± 0.02	2.43 ± 0.02	2.43 ± 0.01

Рис. 1.2. Порівняльна характеристика надтонкого розщеплення для мезонів і баріонів для різних потенціалів (за Карлайнером [22])

1.6 Релятивізм

Найбільш простий спосіб врахувати релятивістські ефекти, це врахування релятивістського розкладу по теорії збурень. Також методи, що з самого початку базуються на контраваріантному формалізмі враховують

релятивістські ефекти, але такі методи є дуже складними і часто потребують допоміжних наближень для їх вирішення.

Одною з перших робіт була робота Коплі, Ізгура та Карла [23]: вони досліджували спектр баріонів з одним s -кварком та баріонів з одним c -кварком у потенціальній моделі гармонічного осцилятора, конфаймента та надтонкої (спін-спінової) взаємодії. Урахування релятивістської поправки на спін-спінову взаємодію виявилось необхідним для адекватного опису спектру баріонів, так як без неї неможливо розчепити частинки з різним спіном і, відповідно, описати спостережувані маси.

Більше детальні розрахунки були проведені Ізгуром та Карлом [24], було використано гамільтоніан подібний до гамільтоніану Брейта (оснований на потенціалі гармонічного осцилятора) для передбачення спектру збуджених P -хвильових баріонів з s -кварками. У цій роботі було знехтувано спін-орбітальними термами, також не було присутні всі члени відповідного порядку в релятивістському розкладі.

Розрахунок та аналіз спектру збуджених баріонів (включно з баріонами з одним важким кварком) був проведений Капстіком та Ізгуром [9]. Атори наголошують на важливості "релятивізації-моделей для баріонів. Також, в цій роботі присутні докази модельного об'єднання мезонів та баріонів, у тому розумінні, що одна модель може описати обидві системи з деякою зміною параметрів.

Об'ємна робота по дослідженню важких та двічі важких баріонів була проведена Робертсом та Первіном [25]. Автори використовували схожий "релятивізованих" підхід до розрахунку збудженого спектру баріонів та форм факторів семілептонного розпаду.

Важкі та двічі важкі баріони були досліджені в роботі Йошиди та інших [26], був використаний варіаційний принцип Релея-Рітца з Гаусовим розкладом в моделі конститuentних кварків.

Також релятивістськими підходами є дікваркове наближення та розрахунок з перших принципів.

1.6.0.1 Квзірелятивістський гамільтоніан Брейта

Гамільтоніан Брейта (в різноманітних подальших варіаціях має назви: гамільтониан Дірака — Кулона — Брейта та гамільтониан Брейта — Паулі) був вперше записаний для врахування ефекту запізнювання до взаємодії електронів Грегорі Брейтом [27]. Рівняння Брейта не є повністю Лоренц інваріантним на відміну від рівняння Дірака, а є наближеним. Даний ефект запізнювання (котрий є релятивістським) враховувався у релятивістському рівнянні, що базується на рівнянні Дірака, яке описувало динаміку двох взаємодіючих електронів, таким чином можна було вважати його вірним в апроксимції $(v/c)^2$. Пізніше воно було отримано із дарвінівського лагранжіана, а далі строго виведено із КЕД [38].

Успішність його застосування до електронних систем привернуло увагу вчених, що розраховували атомні системи. Таким чином з модифікаціями, що дозволяли врахувати взаємодію ядра, гамільтоніан Брейта став загальноприйнятим способом більш точного розрахунку складних релятивістських систем таким чином посівший місце основного релятивістського методу "прикладної квантової механіки"[29].

Повне рівняння Брейта для взаємодії електронів у зовнішніх електричному і магнітному полях у вигляді рівняння Шредінгера може бути записано (у спрощеному вигляді):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\sum_i \hat{H}(i) + \sum_{i>j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} - \sum_{i>j} \hat{B}_{ij} \right) \Psi, \quad (1.20)$$

в якому послідовно вказані: гамільтоніан Дірака, кулонівська взаємодія (миттєва) та оператор Брейта. Гамільтоніан Дірака i тої частинки має вигляд:

$$\hat{H}(i) = \left[q_i \phi(\mathbf{r}_i) + c \sum_k \alpha_k(i) \pi_k(I) + \alpha_0(I) m_0 c^2 \right],$$

звичний вигляд має миттєва кулонівська взаємодія, до якої, відповідно, додається оператор Брейта, що враховує релятивістські ефекти, що записується наступним чином:

$$\hat{B}_{ij} = -\frac{1}{2r_{ij}} \left[\mathbf{a}(i) \cdot \mathbf{a}(j) + \frac{(\mathbf{a}(i) \cdot \mathbf{r}_{ij})(\mathbf{a}(j) \cdot \mathbf{r}_{ij})}{r_{ij}^2} \right],$$

де r_{ij} — відстань між i тою та j тою частинками, ϕ — скалярний потенціал, q — заряд, a — матриця Дірака, Ψ — діраківський біспіно́р.

Повний гамільтоніан у рівнянні Брейта, може бути розкладений на оператори енергії для електронів в магнітному та електричному полях, що є добре означеними у взаємодіях молекул з магнітними полями

$$\hat{B}_{ij} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 + \dots + \hat{H}_6, \quad (1.21)$$

\hat{H}_0 — нерелятивістський гамільтоніан.

$$\hat{H}_1 = -\frac{1}{8c^2} \sum_i \frac{\hat{p}_i^4}{m_i^3} \quad (1.22)$$

— терм, що пов'язаний з релятивістською залежністю маси від швидкості:

$$E_{kin}^2 - (m_0 c^2)^2 = m^2 v^2 c^2.$$

$$\hat{H}_2 = -\sum_{i>j} \frac{q_i q_j}{2r_{ij} m_i m_j c^2} \left[\hat{\mathbf{p}}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_j + \frac{r_{ij}(\mathbf{r}_{ij} \hat{\mathbf{p}}_i) \cdot \hat{\mathbf{p}}_j}{r_{ij}^2} \right] \quad (1.23)$$

— поправка, яка частково враховує ефект запізнення і може бути описана як взаємодія між магнітними дипольними моментами.

$$\hat{H}_3 = \frac{\mu_B}{c} \sum_i \frac{1}{m_i} \mathbf{s}_i \cdot \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}_{ij}) \times \hat{\mathbf{p}}_i + \sum_{j>i} \frac{2q_i}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \times \hat{\mathbf{p}}_j \right] \quad (1.24)$$

— так звана спін-орбітальна взаємодія з наявністю зовнішнього електричного поля \mathbf{F} .

$$\hat{H}_4 = \frac{i\hbar}{8\pi c^2} \sum_i \frac{q_i}{m_i^2} \hat{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \quad (1.25)$$

— терм, властивий теорії Дірака.

$$\hat{H}_5 = 4\mu_B^2 \sum_{i>j} \left\{ -\frac{8\pi}{3} (\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j) \delta(\mathbf{r}_{ij}) + \frac{1}{r_{ij}^3} \left[\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j - \frac{3(\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{r}_{ij})(\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{r}_{ij})}{r_{ij}^2} \right] \right\} \quad (1.26)$$

— спін-спінова контактна взаємодія (перший член) та тензорна диполь-дипольна взаємодія.

$$\hat{H}_6 = 2\mu_B \sum_i \left[\mathbf{H}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{s}_i + \frac{q_i}{m_i c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \cdot \hat{\mathbf{p}}_i \right] \quad (1.27)$$

— взаємодія спіну та орбітального моменту з зовнішнім магнітним полем \mathbf{H} .

Гамільтоніан такого вигляду використовувався для дослідження атомних систем, взаємодії молекул з магнітними моментами та зараз є основою для моделей, що враховують релятивістські ефекти порядку $(v)^2$, його використання для систем з взаємодією більш складною ніж в КЕД потребує відповідних перетворень. Він є хорошою апроксимацією для систем зі слабкими зовнішніми полями.

1.7 Висновки до розділу 1

В даному розділі було проаналізовано проблему сильно взаємодіючих частинок з перших принципів, проаналізовано свідчення, що сліднують з фундаментальних міркувань, такі як явища асимптотичної свободи та конфайменту, апроксимація яких повинна бути врахована в моделі.

Досліджено модельні методи теоретичного дослідження адронів. Детально досліджено можливі потенціальні моделі та порівняно їх. Досліджено різну степінь релятивізації в різноманітних моделях.

Також досліджено спосіб більш точного врахування релятивістських ефектів — гамільтоніан Брейта, записаний його вигляд в вигляді енергетичних термів.

РОЗДІЛ 2

РОЗРОБКА ФОРМАЛІЗМУ МОДЕЛІ

2.1 Аналогія важких баріонів з атомними системами

2.1.1 Баріон з одним важким кварком як аналог атома гелію

З теоретичної точки зору баріони з одним важким кварком є цікавими тим, що їх можна розглядати по аналогії з атомом гелію, де важкий кварк грає роль ядра, а два легких – електронів. Такий атом зображено на рис. 2.1.

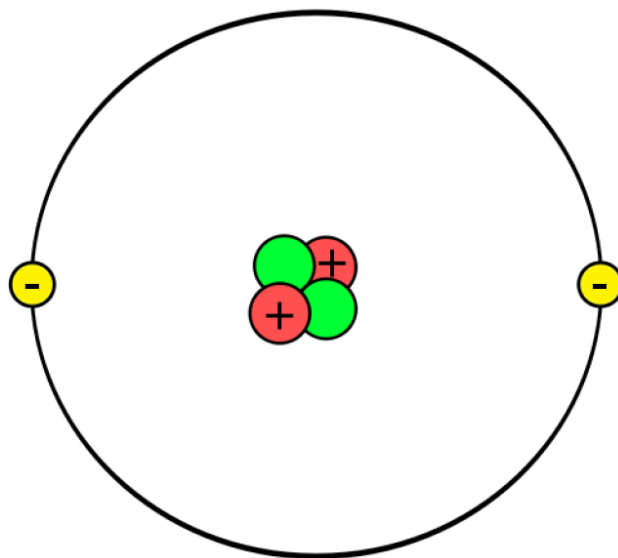


Рис. 2.1. Схематичне зображення атома гелію

Порівняємо ці дві системи.

Атом гелію має наступні характеристики:

- He ($A = 4$, $Z = 2$),
- ядро: $M(2p^+ + 2n) \approx 4 \text{ GeV}$,
- пара e^-e^- на орбіті,
- кулонівська взаємодія.

Відповідні характеристики важкого баріона:

- (Qq_1q_2) , де $Q \in (c, b)$; $q_1, q_2 \in (u, d, s)$,
- b -кварк (c -кварк) грає роль ядра ($m_b \approx 5 \text{ GeV}$, $m_c \approx 2 \text{ GeV}$),
- легкий дікварк q_1q_2 аналогічний до електронної пари,
- поле кольорового заряду.

Отже, робимо висновок, що така аналогія має місце. Класично, до атома гелію застосовується відомий в атомній фізиці підхід [30, 31], а саме — варіаційний метод Рітца. Таким чином, врахувавши деякі зміни, ми можемо застосувати цей метод і до більш складної системи, якою є важкий баріон.

2.1.2 Двічі важкий баріон як аналог іонізованої молекули водню

Іонізована молекула водню H_2^+ являє собою найпростішу молекулу. Вона складається з двох ядер водню, в потенціальному полі яких знаходиться один електрон [32]. Схематично ця молекула зображена на рис. 2.2. Таким чином, баріон з двома важкими кварками можна розглядати як іонізовану молекулу водню, де два важких кварки грають роль ядер, а легкий кварк — роль електрона.

Ця аналогія дозволяє застосувати до розрахунку спектру мас важких баріонів варіаційний метод Рітца, який застосовуються до задачі іонізованої молекули водню. Згідно з аналогією, маси важких кварків не повинні сильно відрізнятися, тому ми розглянемо двічі важкі баріони з тотожними за ароматом важкими кварками, оскільки маса b -кварка перевищує масу c -кварка більше ніж в два рази. Це баріони вигляду: QQq .

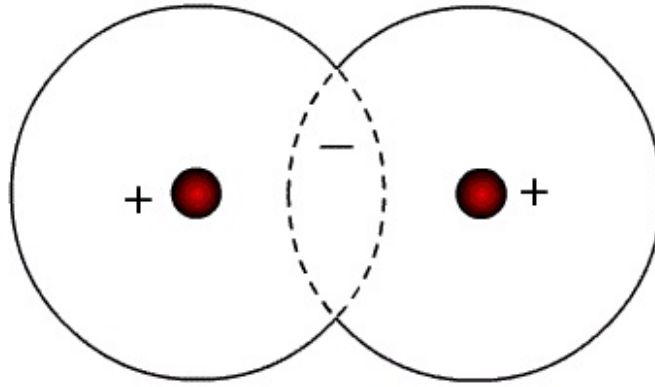


Рис. 2.2. Схематично зображена іонізована молекула водню

2.2 Систематика важких баріонів в основному стані

Спочатку проведемо систематизацію важких баріонів в основному стані, виходячи с аналізу симетрії хвильової функції системи.

Ще у 1960-х роках стало зрозуміло, що всі адрони підпорядковуються більш-менш простій класифікації та об'єднуються в мультиплети. Тобто при їх описі ми потребуємо невеликої кількості параметрів. Іншими словами, всі адрони мають невелику кількість ступенів вільності, а саме: всі баріони с однаковим спіном мають три ступені вільності, а мезони — дві [33].

Отже, представимо повну хвильову функцію для баріона як добуток функцій, що відповідають чотирьом (враховуючи спін) ступеням вільності (квантовим числам). Тоді хвильова функція системи набуває наступного вигляду:

$$\Psi = \varphi_s \varphi_l \varphi_f \varphi_c = \tilde{\Psi} \varphi_c \quad (2.1)$$

де φ_s , φ_l , φ_f , φ_c — функції спіну, орбітального квантового числа, аромату та кольору відповідно.

Для того, щоб ця хвильова функція правильно описувала систему при перестановці кварків, вона має бути антисиметричною. Постулюється, що всі адрони не мають кольору, тобто належать синглетному представленню

кольорової групи $SU(3)$, що є антисиметричною відносно перестановки кварків [34] незалежно від симетрії інших множників у формулі (2.1).

Таким чином, симетричною має бути наступна комбінація:

$$\tilde{\Psi} = \varphi_s \varphi_l \varphi_f \quad (2.2)$$

Що стосується ароматної частини хвильової функції, всього існує дев'ять можливих комбінацій двох легких та одного важкого кварків. Ці комбінації розташовуються в двох $SU(3)$ -мультиплетах: секстеті (симетричний) та антитриплеті (антисиметричний) [34]:

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3} \quad (2.3)$$

Ці мультиплети для важкого b -кварка зображено на рис. 2.3.

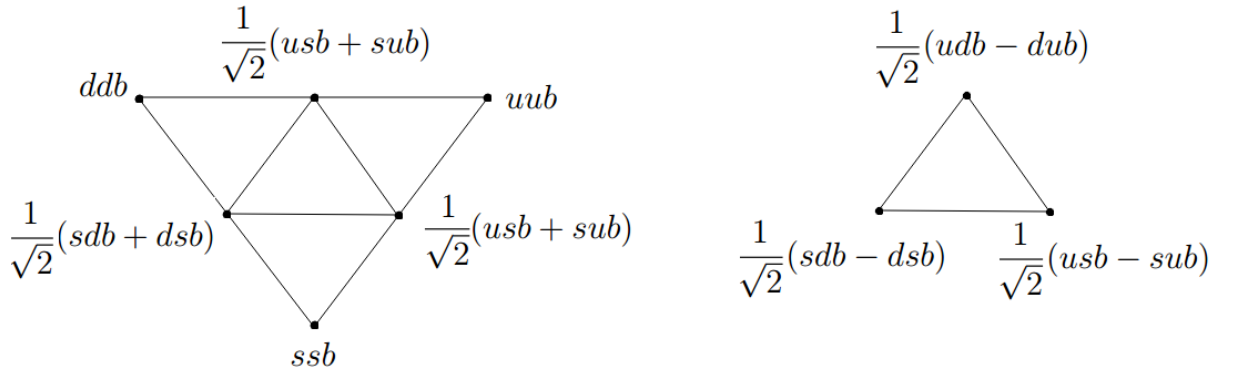


Рис. 2.3. Мультиплети станів з b -кварком

Аналогічний вигляд мають мультиплети, утворені з комбінацій важкого c -кварка з легкими.

Далі ми будемо розглядати лише баріони в основному стані. Іншими словами, це стани, що не мають збудження по орбітальному квантовому числу ($L = 0$). Тоді φ_l є симетричною відносно перестановки кварків. Тому спін-ароматна частина повинна бути також симетричною. Комбінуючи

симетричні (антисиметричні) спінові хвильові функції з симетричним (антисиметричним) мультиплетом, отримаємо секстети з $j = 3/2$ та $j = 1/2$ та антитриплет з $j = 1/2$ (всього 15 частинок).

Мультиплети баріонів, що містять b -кварк, зображено на рис. 2.4.

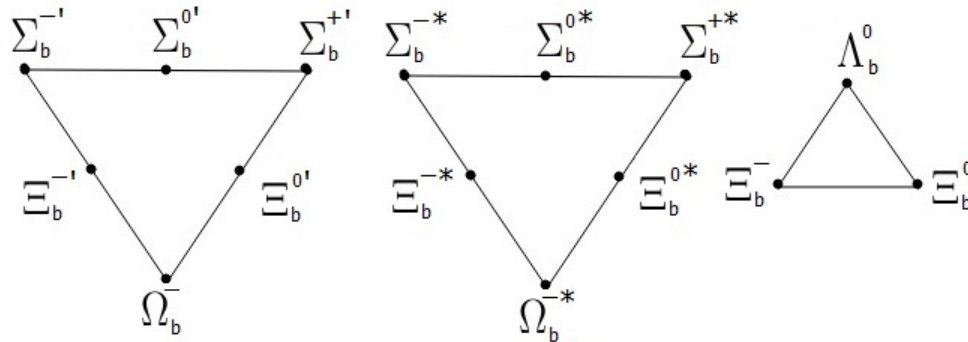


Рис. 2.4. Мультиплети b -баріонів в основному стані

Аналогічний вигляд мультиплетів матимемо й для c -баріонів.

Також, для баріонів з двома важкими кварками систематизація може бути зображена у вигляді триплету для фіксованих двох b -кварків, який зображено на рис. 2.5. Аналогічний триплет отримаємо для двох c -кварків.

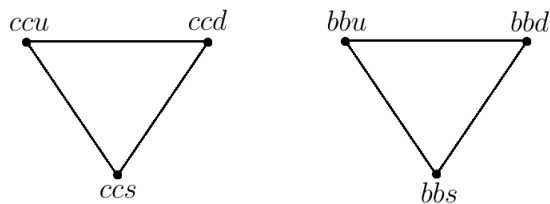


Рис. 2.5. Триплети станів з двома важкими кварками за ароматом

Ці мультиплети станів треба комбінувати з симетричними за спіном станами ($s = 3/2$ та $s = 1/2$). В результаті отримаємо два триплети з $j = 3/2$ та $j = 1/2$ для фіксованих двох b -кварків, які зображено на рис. 2.6. Триплети для двох c -кварків будуть мати такий самий вигляд.

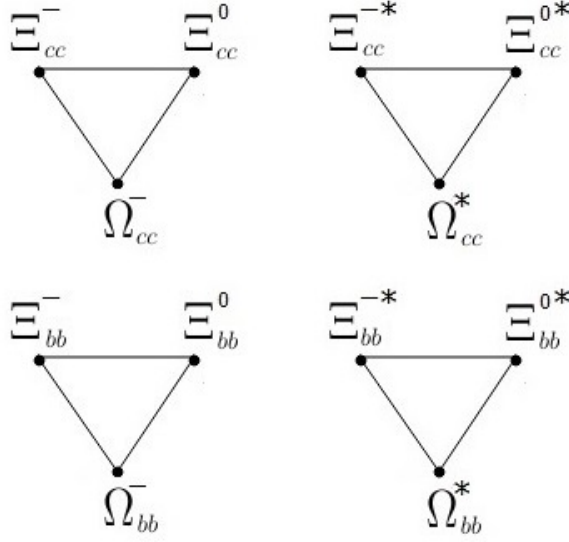


Рис. 2.6. Двічі важкі баріони в основному стані

2.3 Введення координат Якобі

Координати Якобі дуже часто застосовуються в теорії для опису систем з багатьма частинками з метою спростити математичне формулювання задачі. Тому для баріону, який є системою трьох частинок, використання даного підходу є цілком обґрунтованим.

Якщо позначити маси кварків через m_1, m_2, m_3 , координати Якобі \mathbf{r} і $\mathbf{\rho}$ (рис. 2.7) та відповідні імпульси \mathbf{p} і \mathbf{q} будуть визначатися наступним чином:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}, & \mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, & \mathbf{p} &= \frac{m_3 \mathbf{p}_2 - m_2 \mathbf{p}_3}{m_2 + m_3}, \\ \mathbf{\rho} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\mathbf{r}_1 - \frac{m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3}{m_2 + m_3} \right), & \mathbf{q} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{(m_2 + m_3) \mathbf{p}_1 - m_1 (\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)}{m_1 + m_2 + m_3}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

де \mathbf{R}, \mathbf{P} - радіус-вектор та імпульс центру мас системи, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ — координати кварків в лабораторній системі відліку.

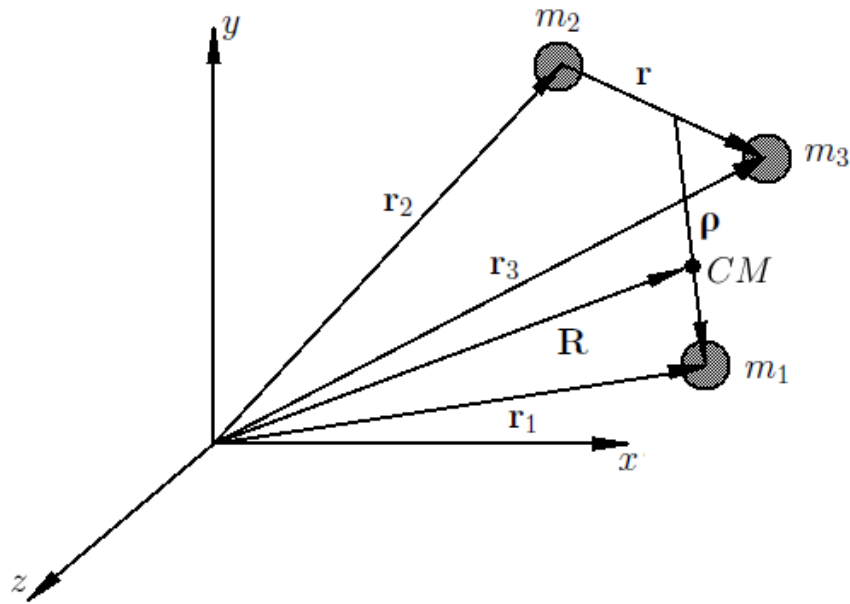


Рис. 2.7. Координати Якобі

Тоді зворотні вирази запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \boldsymbol{\rho}, \\
 \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \boldsymbol{\rho} + \frac{m_3}{m_2 + m_3} \mathbf{r}, \\
 \mathbf{r}_3 &= \mathbf{R} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \boldsymbol{\rho} - \frac{m_2}{m_2 + m_3} \mathbf{r}, \\
 \mathbf{p}_1 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \mathbf{P} + \frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{q}, \\
 \mathbf{p}_2 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \mathbf{P} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m_2}{m_2 + m_3} \mathbf{q} + \mathbf{p}, \\
 \mathbf{p}_3 &= \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \mathbf{P} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m_3}{m_2 + m_3} \mathbf{q} - \mathbf{p}.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.4 Варіаційний метод Рітца

Для багатьох задач, у тому числі і для дослідження спектру мас барионів, дуже корисним є варіаційний метод Рітца. Для основного стану він

базується на наступній теоремі: середнє значення від оператора Гамільтона \hat{H} по будь-яким функціям $\phi(x)$, нормованим на одиницю, більше або рівне енергії основного стану, при чому рівність виконується коли $\phi(x)$ співпадає з хвильовою функцією основного стану. Таким чином для практичних цілей виконується наступна процедура. Беремо довільну функцію $\phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x)$, де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - деякі параметри. Вимагається щоб вона була нормована на одиницю:

$$\int \phi^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x) \phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x) dx = 1, \quad (2.6)$$

така функція називається пробною функцією.

Потім обчислюється функціонал:

$$R_0(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \int \phi^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x) \hat{H} \phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x) dx = 1 \quad (2.7)$$

і шукається мінімум за його параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, тобто таке значення параметрів $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n$, щоб виконувалась умова:

$$\frac{\partial R_0}{\partial \tilde{\alpha}_1}; \quad \frac{\partial R_0}{\partial \tilde{\alpha}_2}; \quad \dots; \quad \frac{\partial R_0}{\partial \tilde{\alpha}_n}. \quad (2.8)$$

Тоді покладаємо $E_0 \approx R_0(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n)$ і $\Phi_0(x) \approx \phi(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n, x)$. Звичайно цей метод дає гарний результат, якщо вдасться завдяки якимось здогадкам вибрати правильну пробну функцію. Часто буває навіть досить використати однопараметричну пробну функцію. Для того, щоб знайти енергію першого збудженого стану методом Рітца, необхідно побудувати пробну функцію, яка задовольняє обидві умови.

З умов нормування:

$$\int \phi_1^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, x) \phi_1(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, x) dx = 1 \quad (2.9)$$

З умов ортогональності хвильової функції до хвильової функції основного стану:

$$\int \phi^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, x) \phi_1(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, x) dx = 0 \quad (2.10)$$

Обчислюючи мінімум функціонала:

$$R_0(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \int \phi_1^*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, x) \hat{H} \phi_1(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, x) dx = 1, \quad (2.11)$$

можна ототожнити його з енергією E_1 , а $\phi_1(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, x)$ з хвильовою функцією збудженого стану $\Phi_1(x)$. Далі цю процедуру можна продовжити, будуючи нормовану функцію для другого збудженого стану і т.д. [35]

2.5 Гамільтоніан системи

2.5.1 Нерелятивістський гамільтоніан

В загальному вигляді звичайний нерелятивістський гамільтоніан системи записується наступним чином:

$$H = T + V, \quad (2.12)$$

де T — кінетична енергія системи, V — потенціал взаємодії кварків.

Кінетична енергія системи трьох кварків з масами m_1 , m_2 , m_3 при переході до координат Якобі набуде наступного вигляду:

$$T = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu_q} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_p}, \quad (2.13)$$

де $M = m_1 + m_2 + m_3$ — сумарна маса кварків, μ_q, μ_p — зведені маси, які виражаються наступним чином:

$$\mu_q = \frac{3m_1(m_2 + m_3)}{4M}, \quad \mu_p = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}. \quad (2.14)$$

Враховуючи те, що нас цікавить лише взаємний рух кварків, який не залежить від імпульсу центра мас системи \mathbf{P} , можемо переписати вираз (2.13) у наступному вигляді:

$$T = \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu_q} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_p}. \quad (2.15)$$

Запишемо потенціальну енергію у вигляді суми потенціалів взаємодії кожної пари кварків:

$$V(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = V(\mathbf{r}_{12}) + V(\mathbf{r}_{13}) + V(\mathbf{r}_{23}). \quad (2.16)$$

Враховуючи вирази (2.5), радіус-вектор взаємодії i -того та j -го кварків виражається наступним чином:

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = b_{ij}\boldsymbol{\rho} + c_{ij}\mathbf{r}, \quad (2.17)$$

Коефіцієнти b_{ij} та c_{ij} з виразу (2.17) визначаються як:

$$\begin{aligned} b_{12} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & c_{12} &= -\frac{m_3}{m_2 + m_3}, \\ b_{13} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & c_{13} &= \frac{m_2}{m_2 + m_3}, \\ b_{23} &= 0, & c_{23} &= 1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Визначимось з виглядом потенціалу взаємодії (2.15).

Найбільш вдалим для опису взаємодії в даній моделі є потенціал, що являє собою суму лінійно зростаючого (потенціал конфайнмента) та кулонівського. Потенціал такого вигляду називається корнеллівським. Він не тільки має досить простий вигляд, що дозволяє уникнути додаткових математичних складностей, а й має глибокий фізичний сенс: на малих відстанях потенціал має вигляд, аналогічно кулонівському; на великих відстанях потенціал повинен зростати, оскільки кварки не спостерігаються в вільному стані і потенціал повинен їх ефективно «запирати» на відстанях масштабу радіуса адрона. Класично потенціал такого вигляду застосовується для опису взаємодії кварка з антикварком, наприклад, для чармонію ($c\bar{c}$ -мезон) [36]. Але виявляється, що його можна застосувати і у випадку взаємодії двох кварків. В цьому випадку, його параметри можна використати ті ж самі, що й для чармонію, але з урахуванням відмінності в процесі обміну глюонами при взаємодії qq та $\bar{q}q$.

В КЕД сила електромагнітного зв'язку між двома кварками характеризується добутком $e_1 e_2 \alpha$, де e_i — електричний заряд в одиницях e (тобто $e_i = +2/3$ або $-1/3$), а α — постійна тонкої структури. Подібним чином в КХД величина сильного зв'язку при обміні одним глюоном між двома кольоровими зарядами характеризується добутком $(1/2)c_1 c_2 \alpha_s$, де c_1, c_2 — кольорові коефіцієнти, а α_s — константа сильної взаємодії [34]. Прийнято називати кольоровим множником величину:

$$C_F \equiv \frac{1}{2}|c_1 c_2| \quad (2.19)$$

Тоді можемо представити потенціал у вигляді:

$$V = C_F V(r_{ij}), \quad (2.20)$$

де $V(r_{ij})$ — універсальний потенціал, що не залежить від кольору кварків.

При qq взаємодії кольоровий множник є в два рази меншим, ніж у випадку $\bar{q}q$, що впливає з властивостей кольорової групи $SU(3)$ [34]:

$$V(r_{ij}) = \frac{1}{2} V_{q\bar{q}}(r_{ij}). \quad (2.21)$$

Кулонівська частина корнеллівського потенціалу відповідає за одноглюонний обмін в рамках КХД, що є аналогом однофотонного обміну в електродинаміці. Це дає нам можливість записати його у вигляді:

$$V_{\text{Coul}}(r_{ij}) = -\frac{2}{3} \frac{\alpha_s}{r_{ij}}. \quad (2.22)$$

Необхідно визначитись з виглядом константи сильного зв'язку, так як КХД дає лише асимптотичні значення при великих енергіях (малих відстанях) та малих енергіях (великих відстанях). Обґрунтована параметризація на відстанях розміру адронів дається виразом [37]:

$$\alpha_s(\mu_{ij}^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \frac{\mu_{ij}^2 + M_0^2}{\Lambda^2}}, \quad (2.23)$$

$$\mu_{ij} = 2 \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}, \quad \beta_0 = 11 - \frac{2}{3} n_f,$$

де m_i це маса i того кварка, n_f — параметр, що характеризує номер ароматів взаємодіючих кварків, M_0 та Λ — константи.

У корнеллівському потенціалі частина, що відповідає за явище конфайнменту, подається у лінійному вигляді:

$$V_{\text{conf}}(r_{ij}) = \frac{1}{2} (A r_{ij} + B). \quad (2.24)$$

де A, B — параметри.

Тоді корнеллівський потенціал виглядає наступним чином:

$$V(\mathbf{r}_{ij}) = V_{\text{Coul}}(r_{ij}) + V_{\text{conf}}(r_{ij}). \quad (2.25)$$

2.5.2 Релятивістська частина — гамільтоніан Брейта

З визначенням нерелятивістським гамільтоніаном ми враховуємо квазірелятивістські поправки в формі гамільтоніана Брейта без зовнішніх полів.

Гамільтоніан Брейта описує взаємодію двох (або більше) масивних ферміонів, включаючи релятивістські ефекти в порядку $(v/c)^2$.

Ідеї по розрахунку атомних систем [30] свого часу мали значних внесок у квантову, атомну та ядерну фізику. Сам автор данної книги, лауреат Нобелівської премії Ганс Бете, називав ці ідеї "методами прикладної квантової механіки". До цих методів входить як варіаційний метод так і доповнення його релятивістськими поправками у вигляді гамільтоніану Брейта.

Оригінально чотиривимірний гамільтоніан Брейта 1.20 може бути розбитий на класичні терми:

$$H_0 = T + V_{\text{Cornell}} + \sum_{i=1}^3 m_i, \quad (2.26)$$

звичайний нерелятивістський член;

$$H_{mv} = - \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{p}_i^4}{8m_i^3}, \quad (2.27)$$

релятивістська поправка, що враховує залежність маси від швидкості (mass violation);

$$H_D = \frac{2}{3} \sum_{i < j=1}^3 \alpha_s(\mu_{ij}^2) \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{m_i^2} + \frac{1}{m_j^2} \right) \delta(\mathbf{r}_{ij}), \quad (2.28)$$

так званий контактний дарвінівський терм (Darwin);

$$H_{ssc} = \frac{2}{3} \sum_{i<j=1}^3 \alpha_s(\mu_{ij}^2) \frac{2\pi}{3m_i m_j} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j \delta(\mathbf{r}_{ij}), \quad (2.29)$$

поправка, що враховує контактну спін-спінову взаємодію (spin-spin contact);

$$H_{ret} = \frac{2}{3} \sum_{i<j=1}^3 \alpha_s(\mu_{ij}^2) \left(\frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j}{m_i m_j r_{ij}} + \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot (\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{p}_i) \mathbf{p}_j}{r_{ij}^2} \right), \quad (2.30)$$

поправка, що враховує ефект запізнювання полів, що створюються частинками (retardation).

Терми з орбітальною взаємодією зникають для частинок S -хвилі (основного стану).

Спочатку гамільтоніан Брейта використовувався для електромагнітної взаємодії (електрон-електронної або електрон-позитронної) і тому містив елементарний заряд e для обох частинок у взаємодіючій парі (що призводить до появи постійної тонкої структури α , яка пропорційна квадрату електронного заряду). Цілком повторюючи міркування з рівнянь (2.19) та (2.20) отримуємо фактор $\frac{2}{3}\alpha_s$ у виразах (2.28), (2.29), (2.30) з відповідною параметризацією константи сильної взаємодії (2.23).

У вказаному виразі для гамільтоніану використовуються звичайні позначення: \mathbf{s} — оператор спіну, $\delta(\mathbf{r}_{ij})$ — тривимірна дельта функція Дірака, вирази для імпульсів p_i впливають з вигляду введених координат Якобі (2.4) та можуть бути записані наступним чином, базуючись на (2.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i &= f_i \mathbf{q} + d_i \mathbf{p}, \\ f_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}, & d_1 &= 0, \\ f_2 &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m_2}{m_2 + m_3}, & d_2 &= 1, \\ f_3 &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m_3}{m_2 + m_3}, & d_3 &= -1. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Відповідно повний гамільтоніан баріонів основного стану є суммою вказаних термів:

$$H = H_0 + H_{mv} + H_D + H_{ssc} + H_{ret} \quad (2.32)$$

2.6 Хвильова функція в загальному вигляді

Враховуючи властивість змішування станів з різними ℓ_p та ℓ_q , запишемо загальний вигляд просторової частини хвильової функції (2.1):

$$|n = 1, L, M\rangle = \frac{1}{N} \sum_{\ell_p, \ell_q, m_p, m_q} \langle L, M | \ell_p, \ell_q, m_p, m_q \rangle \times \\ \times Y_{\ell_p m_p}(\hat{r}) Y_{\ell_q m_q}(\hat{\rho}) \rho^{\ell_q} r^{\ell_p} \phi_{1, L, \ell_p, \ell_q}(r, \rho), \quad (2.33)$$

де $\hat{r} = \mathbf{r}/r$, $\hat{\rho} = \boldsymbol{\rho}/\rho$, $\langle \dots | \dots \rangle$ — коефіцієнти Клебша-Гордана, n — головне квантове число (використовується для нумерації радіально збуджених станів), $\phi_{L, \ell_p, \ell_q}(r, \rho)$ — деяка скалярна функція координат, $\rho^{\ell_q} r^{\ell_p}$ — множник, використаний для зручності. Для збуджених станів сумарний момент імпульсу буде складатись з суми орбітального та спінового моментів за допомогою коефіцієнтів Клебша-Гордана.

2.7 Пробна функція

Варіаційний метод Рітца передбачає усереднення гамільтоніану за деяким класом пробних функцій. Вибір правильної пробної функції забезпечує

отримання гарного результату, тому цьому питанню необхідно приділити значну увагу.

Представимо скалярну функцію у виразі (2.33) наступним чином (експоненційний вигляд):

$$\phi_{1,L,\ell_p,\ell_q}(r,\rho) = \sum_{k=0}^v a_k^{1,L,\ell_p,\ell_q} \exp \left(-\alpha_k^{1,L,\ell_p,\ell_q} \rho - \beta_k^{1,L,\ell_p,\ell_q} r \right), \quad (2.34)$$

де $\alpha_k^{1,L,\ell_p,\ell_q}$ та $\beta_k^{1,L,\ell_p,\ell_q}$ - варіаційні параметри, a_k^{1,L,ℓ_p,ℓ_q} — коефіцієнти, які знаходяться з умови ортогональності хвильових функцій.

Далі для зручності опустимо індекси (L, ℓ_p, ℓ_q) .

Коефіцієнт N визначається з умов нормування:

$$\begin{aligned} N^2 &= \sum_{l_p, l_q} \sum_{k, l=0}^v a_k a_l \int e^{-(\alpha_k + \alpha_l)\rho - (\beta_k + \beta_l)r} \rho^{2(\ell_q+1)} r^{2(\ell_p+1)} d\rho dr = \\ &= \sum_{l_p, l_q} (2(\ell_q + 1))! (2(\ell_p + 1))! \sum_{k=0}^v \sum_{l=0}^v \frac{a_k a_l}{(\alpha_{kl})^{2\ell_q+3} (\beta_{kl})^{2\ell_p+3}}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

де $\alpha_{kl} = \alpha_k + \alpha_l$ and $\beta_{kl} = \beta_k + \beta_l$.

Запишемо пробну функцію (2.34) для основного стану:

$$|n = 1, 0, 0\rangle = \frac{1}{N_1} \sum_{k=0}^v a_k e^{-\alpha_k \rho - \beta_k r}, \quad a_0 = 1, \quad (2.36)$$

Відповідний нормувальний множник:

$$N_1^2 = \sum_{k=0}^v \sum_{l=0}^v a_k a_l \int e^{-\alpha_{kl}\rho - \beta_{kl}r} d^3\rho d^3r = (4\pi)^2 (\Gamma(3))^2 \sum_{k=0}^v \sum_{l=0}^v \frac{a_k a_l}{(\alpha_{kl})^3 (\beta_{kl})^3},$$

$$N_1 = \left[4(4\pi)^2 \sum_{k=0}^v \sum_{l=0}^v \frac{a_k a_l}{(\alpha_{kl})^3 (\beta_{kl})^3} \right]^{1/2}, \quad \alpha_{kl} = \alpha_k + \alpha_l, \quad \beta_{kl} = \beta_k + \beta_l. \quad (2.37)$$

Разом з пробною функцією експоненційного вигляду, ми можемо використати пробну функцію гауссового вигляду. Такі функції є універсальними кандидатами для ролі пробної функції для варіаційного методу, оскільки вони задовольняють умовам збіжності на нескінченності, можуть бути знормовані на одиницю та є здогадно близькими до істинних. Вони були використані в різних варіаціях для дослідження атомних систем і зараз часто використовуються.

Гаусова форма для баріонів основного стану має вигляд:

$$|n = 1, 0, 0\rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^v a_k e^{-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2}, \quad a_0 = 1, \quad (2.38)$$

Нормуючи функцію (2.38), отримаємо:

$$N^2 = \sum_{k=0}^v \sum_{l=0}^v a_k a_l \int e^{-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2} d^3\rho d^3r = (4\pi)^2 \left(\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{2} \right)^2 \sum_{k=0}^v \sum_{l=0}^v \frac{a_k a_l}{(\alpha_{kl}\beta_{kl})^{3/2}},$$

$$N = \left[\pi^3 \sum_{k=0}^v \sum_{l=0}^v \frac{a_k a_l}{(\alpha_{kl}\beta_{kl})^{3/2}} \right]^{1/2}, \quad \text{де} \quad \alpha_{kl} = \alpha_k + \alpha_l, \quad \beta_{kl} = \beta_k + \beta_l. \quad (2.39)$$

Для тотожних кварків $\alpha_k = \beta_k$, тому:

$$N = \left[\pi^3 \sum_{k=0}^v \sum_{l=0}^v \frac{a_k a_l}{(\alpha_{kl})^3} \right]^{1/2}. \quad (2.40)$$

Відповідно до розрахунків, виявляється, що гаусова форма демонструє кращу збіжність до мінімуму та є більш зручною у аналітичних розрахунках, тому далі теорія формулюється з її застосуванням.

2.8 Усереднення гамільтоніана

В цьому підрозділі проведено усереднення гамільтоніана (2.32) за гаусовою пробною функцією (2.38).

2.8.1 Усереднення кінетичної енергії

Для того, щоб усереднити кінетичну енергію (2.15) проведемо деякі попередні розрахунки.

Подіємо оператором \mathbf{q}^2 на хвильову функцію:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^2 \psi(\mathbf{p}, \mathbf{r}) &= -\frac{1}{N} \sum_{k=0}^v a_k \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2) = \\ &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^v a_k \alpha_k (3 - 2\rho^2 \alpha_k) \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2), \end{aligned} \quad (2.41)$$

Усереднення цього оператора:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{q}^2 \rangle &= \frac{2}{N^2} \sum_{k,l=0}^v a_k a_l \int d^3 \rho d^3 r \alpha_k (3 - 2\rho^2 \alpha_k) \exp(-\alpha_{kl} \rho^2 - \beta_{kl} r^2) = \\
&= \frac{2(4\pi)^2}{N^2} \sum_{k,l=0}^v a_k a_l \alpha_k \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \frac{1}{2(\beta_{kl})^{3/2}} \times \\
&\times \int d\rho \rho^2 (3 - 2\rho^2 \alpha_k) \exp[-(\alpha_{kl})\rho^2] = \\
&= \frac{(4\pi)^2 \sqrt{\pi}}{2N^2} \sum_{k,l=0}^v a_k a_l \frac{\alpha_k}{2(\alpha_{kl}\beta_{kl})^{3/2}} \int dt \sqrt{t} \left(3 - \frac{2\alpha_k}{\alpha_{kl}} t\right) e^{-t} = \\
&= \frac{(4\pi)^2 \sqrt{\pi}}{2N^2} \sum_{k,l=0}^v a_k a_l \frac{\alpha_k}{2(\alpha_{kl}\beta_{kl})^{3/2}} \left[3\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{2\alpha_k}{\alpha_{kl}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\right] = \\
&= \frac{(4\pi)^2 \pi 3}{2N^2} \sum_{k,l=0}^v a_k a_l \frac{\alpha_k \alpha_l}{2(\alpha_{kl}\beta_{kl})^{3/2} \alpha_{kl}} = \frac{6\pi^3}{N^2} \sum_{k,l=0}^v a_k a_l \frac{\alpha_k \alpha_l}{(\alpha_{kl})^{5/2} (\beta_{kl})^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Середнє значення оператора p отримується заміною варіаційних параметрів $\alpha \rightarrow \beta$.

Таким чином, кінетична енергія, усереднена за гаусовою пробною функцією, набуде вигляду:

$$\langle T \rangle = \frac{3\pi^3}{N^2} \sum_{k,l=0}^v a_k a_l \frac{\mu_q^{-1} \alpha_k \alpha_l \beta_{kl} + \mu_p^{-1} \beta_k \beta_l \alpha_{kl}}{(\alpha_{kl} \beta_{kl})^{5/2}}. \tag{2.43}$$

Для тотожних кварків ($m_1 = m_2 = m_3 = m$):

$$\langle T \rangle = \frac{12\pi^3}{mN^2} \sum_{k=0}^v \sum_{l=0}^v a_k a_l \frac{\alpha_k \alpha_l}{\alpha_{kl}^4}. \tag{2.44}$$

2.8.2 Усереднення кулонівської частини корнеллівського потенціалу

Кулонівський потенціал взаємодії i того та j того кварків записується, згідно з (2.22), у вигляді:

$$V_{\text{Coul}}(r_{ij}) = -\frac{2}{3} \frac{\alpha_s(\mu_{ij}^2)}{|b_{ij}\mathbf{p} - c_{ij}\mathbf{r}|}, \quad (2.45)$$

Надалі, для зручності опустимо залежність константи сильного зв'язку від параметризації. Можна помітити, що середнє значення потенціалу залежить від абсолютних значень $|b_{ij}|$ та $|c_{ij}|$. Справді, роблячи заміну (наприклад $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$) ми отримаємо:

$$\begin{aligned} \langle V(\mathbf{r}_{ij}) \rangle &\sim \int V(|b_{ij}\mathbf{p} - c_{ij}\mathbf{r}|) \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) d^3\rho d^3r = \\ &= \int V(|b_{ij}\mathbf{p} + c_{ij}\mathbf{r}|) \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) d^3\rho d^3r. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Таким чином, надалі ми будемо використовувати абсолютне значення перепозначивши b та c : $b_{ij} = |b_{ij}|$ та $c_{ij} = |c_{ij}|$. Усереднення виразу (2.45):

$$\begin{aligned}
\langle V_{\text{Coul}}(\mathbf{r}_{ij}) \rangle &= -\frac{2}{3} \frac{\alpha_s}{N^2} \sum_{k,l=0}^v a_k a_l \int \frac{1}{|b_{ij}\boldsymbol{\rho} - c_{ij}\mathbf{r}|} \exp(-\alpha_{kl}\boldsymbol{\rho}^2 - \beta_{kl}r^2) d^3\rho d^3r = \\
&= -\frac{2}{3} \frac{\alpha_s}{N^2} \sum_{k,l=0}^v a_k a_l \int d\Omega_\rho d\Omega_r dr d\rho \rho^2 r^2 \exp(-\alpha_{kl}\boldsymbol{\rho}^2 - \beta_{kl}r^2) \times \\
&\times \begin{cases} \frac{1}{b_{ij}\rho} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{c_{ij}r}{b_{ij}\rho} \right)^\ell P_\ell(\cos \theta), & b_{ij}\rho > c_{ij}r \\ \frac{1}{c_{ij}r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{b_{ij}\rho}{c_{ij}r} \right)^\ell P_\ell(\cos \theta), & b_{ij}\rho < c_{ij}r \end{cases} = \\
&= -\frac{2}{3} \alpha_s \frac{(4\pi)^2}{N^2} \sum_{k,l=0}^v a_k a_l \times \\
&\times \left[\frac{1}{b_{ij}} \int_0^\infty dr r^2 \int_{\frac{c_{ij}}{b_{ij}}r}^\infty d\rho \rho \exp(-\alpha_{kl}\boldsymbol{\rho}^2 - \beta_{kl}r^2) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{c_{ij}} \int_0^\infty d\rho \rho^2 \int_{\frac{b_{ij}}{c_{ij}}\rho}^\infty dr r \exp(-\alpha_{kl}\boldsymbol{\rho}^2 - \beta_{kl}r^2) \right].
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Обчислюючи інтеграли, отримаємо вираз для усередненого значення кулонівської частини:

$$\langle V_{\text{Coul}}(\mathbf{r}_{ij}) \rangle = -\frac{2}{3} \alpha_s \frac{2\pi^{5/2}}{N^2} \sum_{k,l=0}^v \frac{a_k a_l}{\alpha_{kl} \beta_{kl} \sqrt{b_{ij}^2 \beta_{kl} + c_{ij}^2 \alpha_{kl}}}. \tag{2.48}$$

У випадку тотожних кварків перепишемо у вигляді:

$$\langle V_{\text{Coul}}(\mathbf{r}_{ij}) \rangle = -\frac{2}{3}\alpha_s \frac{2\pi^{5/2}}{N^2} \sum_{k,l=0}^v \frac{a_k a_l}{\alpha_{kl}^{5/2}}. \quad (2.49)$$

2.8.3 Усереднення потенціалу конфаймента

Тепер проведемо усереднення виразу (2.24) за гаусовою пробною функцією:

$$\begin{aligned} \langle V_{\text{conf}}(r_{ij}) \rangle &= \frac{A}{N^2} \sum_{k,l=0}^v a_k a_l \int d^3r d^3\rho |b_{ij}\rho - c_{ij}\mathbf{r}| \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) = \\ &= \frac{A}{N^2} \sum_{k,l=0}^v a_k a_l \int d\Omega_\rho d\Omega_r dr d\rho \rho^2 r^2 \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) \times \\ &\quad \times \frac{b_{ij}^2 \rho^2 + c_{ij}^2 r^2 - 2b_{ij}c_{ij}r\rho \cos \theta}{|b_{ij}\rho - c_{ij}\mathbf{r}|} = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Інтеграли I_1 та I_2 виражаються наступним чином:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{A}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l b_{ij}^2 \int d\Omega_{\mathbf{p}} d\Omega_r dr d\mathbf{p} \mathbf{p}^4 r^2 \exp(-\alpha_{kl} \mathbf{p}^2 - \beta_{kl} r^2) \frac{1}{|b_{ij} \mathbf{p} - c_{ij} \mathbf{r}|} = \\
&= \frac{A}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l b_{ij}^2 \int d\Omega_{\mathbf{p}} d\Omega_r dr d\mathbf{p} \mathbf{p}^4 r^2 \exp(-\alpha_{kl} \mathbf{p}^2 - \beta_{kl} r^2) \times \\
&\quad \times \begin{cases} \frac{1}{b_{ij} \mathbf{p}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{c_{ij} r}{b_{ij} \mathbf{p}} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), & b_{ij} \mathbf{p} > c_{ij} r \\ \frac{1}{c_{ij} r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{b_{ij} \mathbf{p}}{c_{ij} r} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), & b_{ij} \mathbf{p} < c_{ij} r \end{cases} = \\
&= \frac{A}{N^2} (4\pi)^2 \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \left[b_{ij} \int_0^{\infty} dr r^2 \int_{\frac{c_{ij}}{b_{ij}} r}^{\infty} d\mathbf{p} \mathbf{p}^3 \exp(-\alpha_{kl} \mathbf{p}^2 - \beta_{kl} r^2) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{b_{ij}^2}{c_{ij}} \int_0^{\infty} d\mathbf{p} \mathbf{p}^4 \int_{\frac{b_{ij}}{c_{ij}} \mathbf{p}}^{\infty} dr r \exp(-\alpha_{kl} \mathbf{p}^2 - \beta_{kl} r^2) \right] = \\
&= i_1^{32} + i_1^{41}. \\
I_2 &= \frac{A}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l c_{ij}^2 \int d\Omega_{\mathbf{p}} d\Omega_r dr d\mathbf{p} \mathbf{p}^2 r^4 \exp(-\alpha_{kl} \mathbf{p}^2 - \beta_{kl} r^2) \frac{1}{|b_{ij} \mathbf{p} - c_{ij} \mathbf{r}|} = \\
&= \frac{A}{N^2} \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l c_{ij}^2 \int d\Omega_{\mathbf{p}} d\Omega_r dr d\mathbf{p} \mathbf{p}^2 r^4 \exp(-\alpha_{kl} \mathbf{p}^2 - \beta_{kl} r^2) \times \\
&\quad \times \begin{cases} \frac{1}{b_{ij} \mathbf{p}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{c_{ij} r}{b_{ij} \mathbf{p}} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), & b_{ij} \mathbf{p} > c_{ij} r \\ \frac{1}{c_{ij} r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{b_{ij} \mathbf{p}}{c_{ij} r} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), & b_{ij} \mathbf{p} < c_{ij} r \end{cases} = \\
&= \frac{A}{N^2} (4\pi)^2 \sum_{k,l=0}^{\nu} a_k a_l \left[\frac{c_{ij}^2}{b_{ij}} \int_0^{\infty} dr r^4 \int_{\frac{c_{ij}}{b_{ij}} r}^{\infty} d\mathbf{p} \mathbf{p} \exp(-\alpha_{kl} \mathbf{p}^2 - \beta_{kl} r^2) + \right. \\
&\quad \left. + c_{ij} \int_0^{\infty} d\mathbf{p} \mathbf{p}^2 \int_{\frac{b_{ij}}{c_{ij}} \mathbf{p}}^{\infty} dr r^3 \exp(-\alpha_{kl} \mathbf{p}^2 - \beta_{kl} r^2) \right] = \\
&= i_2^{14} + i_2^{23}.
\end{aligned}$$

Також для I_3 :

$$\begin{aligned}
 I_3 &= -\frac{2A}{N^2} \times \\
 &\sum_{k,l=0}^v a_k a_l b_{ij} c_{ij} \int d\Omega_{\mathbf{p}} d\Omega_r dr d\rho \rho^3 r^3 \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) \frac{\cos \theta}{|b_{ij}\mathbf{p} - c_{ij}\mathbf{r}|} = \\
 &= -\frac{2A}{N^2} \sum_{k,l=0}^v a_k a_l b_{ij} c_{ij} \int d\Omega_{\mathbf{p}} d\Omega_r dr d\rho \rho^3 r^3 \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) \cos \theta \times \\
 &\times \begin{cases} \frac{1}{b_{ij}\rho} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{c_{ij}r}{b_{ij}\rho}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), & b_{ij}\rho > c_{ij}r \\ \frac{1}{c_{ij}r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{b_{ij}\rho}{c_{ij}r}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), & b_{ij}\rho < c_{ij}r \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Отже отримаємо:

$$\begin{aligned}
 I_3 &= -\frac{A}{N^2} \frac{2(4\pi)^2}{3} \sum_{k,l=0}^v a_k a_l \left[\frac{c_{ij}^2}{b_{ij}} \int_0^{\infty} dr r^4 \int_{\frac{c_{ij}}{b_{ij}}r}^{\infty} d\rho \rho \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{b_{ij}^2}{c_{ij}} \int_0^{\infty} d\rho \rho^4 \int_{\frac{b_{ij}}{c_{ij}}r}^{\infty} dr r \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2) \right] = -\frac{2}{3} (i_2^{14} + i_1^{14}).
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Остаточно, середнє значення потенціалу конфаймента, отримаємо:

$$\langle V_{\text{conf}}(r_{ij}) \rangle = \frac{2\pi^{5/2}A}{N^2} \sum_{k,l=0}^v a_k a_l \frac{\sqrt{b_{ij}^2\beta_{kl} + c_{ij}^2\alpha_{kl}}}{\alpha_{kl}^2\beta_{kl}^2}, \tag{2.54}$$

відповідно для тотожних кварків:

$$\langle V_{\text{conf}}(r_{ij}) \rangle = \frac{2\pi^{5/2}A}{N^2} \sum_{k,l=0}^v \frac{a_k a_l}{\alpha_{kl}^{7/2}}. \tag{2.55}$$

2.8.4 Усереднення контактних термів

Контактними термами називаються такі члени гамільтоніана, до складу яких входить дельта функція Дірака. В рамках побудованої моделі такими є вирази (2.28) та (2.29).

Обраховуючи середнє значення для дельта функції:

$$\langle \delta(\mathbf{r}_{ij}) \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=0}^v a_k a_l \int d^3r d^3\rho \delta(b_{ij}\rho - c_{ij}\mathbf{r}) \exp(-\alpha_{kl}\rho^2 - \beta_{kl}r^2). \quad (2.56)$$

Скористуємось заміною:

$$\mathbf{x} = b_{ij}\rho - c_{ij}\mathbf{r}, \quad d^3\rho = \frac{d^3x}{b_{ij}^3}. \quad (2.57)$$

Отримаємо інтеграл:

$$\begin{aligned} \langle \delta(\mathbf{r}_{ij}) \rangle &= \frac{1}{N^2} \sum_{k,l=0}^v \frac{a_k a_l}{b_{ij}^3} \int d^3r d^3x \delta(\mathbf{x}) \times \\ &\times \exp \left[-\frac{\alpha_{kl}}{b_{ij}^2} x^2 - \frac{b_{ij}^2 \beta_{kl} + c_{ij}^2 \alpha_{kl}}{b_{ij}^2} r^2 - 2 \frac{\alpha_{kl} c_{ij}}{b_{ij}} \mathbf{x} \cdot \mathbf{r} \right] = \\ &= \frac{4\pi}{N^2} \sum_{k,l=0}^v \frac{a_k a_l}{b_{ij}^3} \int dr r^2 \exp \left(-\frac{b_{ij}^2 \beta_{kl} + c_{ij}^2 \alpha_{kl}}{b_{ij}^2} r^2 \right). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Відповідно вираз для середнього значення дельта функції буде мати вигляд:

$$\langle \delta(\mathbf{r}_{ij}) \rangle = \frac{\pi^{3/2}}{N^2} \sum_{k,l=0}^v \frac{a_k a_l}{(b_{ij}^2 \beta_{kl} + c_{ij}^2 \alpha_{kl})^{3/2}}. \quad (2.59)$$

Для тотожніх кварків:

$$\langle \delta(\mathbf{r}_{ij}) \rangle = \frac{\pi^{3/2}}{N^2} \sum_{k,l=0}^v \frac{a_k a_l}{\alpha_{kl}^{3/2}}. \quad (2.60)$$

Підставляючи (2.59) у (2.28) та (2.29), відповідно отримаємо середні значення контактних термів:

$$\langle H_D \rangle = \left(\frac{1}{m_i^2} + \frac{1}{m_j^2} \right) \frac{\alpha_s \pi^{5/2}}{3N^2} \sum_{k,l=0}^v \frac{a_k a_l}{(b_{ij}^2 \beta_{kl} + c_{ij}^2 \alpha_{kl})^{3/2}}, \quad (2.61)$$

$$\langle H_{ssc} \rangle = \frac{4\alpha_s \pi^{5/2}}{9N^2 m_i m_j} \langle \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j \rangle \sum_{k,l=0}^v \frac{a_k a_l}{(b_{ij}^2 \beta_{kl} + c_{ij}^2 \alpha_{kl})^{3/2}}. \quad (2.62)$$

Середнє значення добутку операторів спіну для (2.29) отримаємо з симетрії спінової хвильової функції:

$$\langle \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_3 \rangle = \frac{1}{2} \left[s(s+1) - \frac{3}{2} \right], \quad (2.63)$$

$$\langle \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 \rangle = \langle \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_3 \rangle = \frac{1}{4} \left[J(J+1) - s(s+1) - \frac{3}{4} \right], \quad (2.64)$$

де J — спін баріона та s — спін пари кварків.

2.8.5 Усереднення терму H_{mv}

До складу (2.29) входить множник \mathbf{r}_i^4 , усереднимо його.

Згідно з (2.5), перепишемо \mathbf{r}_i^4 вигляді:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}_i^4 \rangle &= \langle (f_i \mathbf{q} + d_i \mathbf{p})^4 \rangle = \langle (f_i^2 \mathbf{q}^2 + d_i^2 \mathbf{p}^2 + 2f_i d_i \mathbf{q} \cdot \mathbf{p})^2 \rangle = \\
&= \langle f_i^4 \mathbf{q}^4 + d_i^4 \mathbf{p}^4 + 2f_i^2 d_i^2 \mathbf{q}^2 \mathbf{p}^2 + 4f_i^2 d_i^2 (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})^2 + 2f_i d_i (f_i^2 \mathbf{q}^2 + d_i^2 \mathbf{p}^2) \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \rangle.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Останній член у виразі (2.65) зникає в наслідок симетрії основного стану баріонів (інтеграл по кутах дорівнює нулю у, наприклад, сферичній системі координат), також ця симетрія дозволяє спростити передостанній член (2.65) наступним чином:

$$\langle (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle \mathbf{q}^2 \mathbf{p}^2 \rangle, \tag{2.66}$$

Отже, запишемо спрощений вигляд для \mathbf{p}_i^4 :

$$\langle \mathbf{p}_i^4 \rangle = \left\langle f_i^4 \mathbf{q}^4 + d_i^4 \mathbf{p}^4 + \frac{10}{3} f_i^2 d_i^2 \mathbf{q}^2 \mathbf{p}^2 \right\rangle. \tag{2.67}$$

Запишемо явний вираз для оператора імпульсу користуючись обрахунком значенням, що використовувалось для оператора кінетичної енергії (2.41):

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} q^2 \psi(r, \rho) &= -i \frac{2}{N} \sum_{k=0}^v a_k \alpha_k \frac{\partial}{\partial \rho} (3 - 2\rho^2 \alpha_k) \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2) = \\
&= -i \frac{2}{N} \sum_{k=0}^v a_k \alpha_k [-4\alpha_k \rho - 2\alpha_k (3 - 2\rho^2 \alpha_k) \rho] \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2) = \\
&= i \frac{4}{N} \sum_{k=0}^v a_k \alpha_k^2 \rho (5 - 2\alpha_k \rho^2) \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2), \tag{2.68}
\end{aligned}$$

та відповідно

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}^4 \psi(r, \rho) &= \frac{4}{N} \sum_{k=0}^v a_k \alpha_k^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \rho (5 - 2\alpha_k \rho^2) \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2) = \\
 &= \frac{4}{N} \sum_{k=0}^v a_k \alpha_k^2 [3(5 - 2\alpha_k \rho^2) - 4\alpha_k \rho^2 - 2\alpha_k \rho^2 (5 - 2\alpha_k \rho^2)] \psi(r, \rho) = \\
 &= \frac{4}{N} \sum_{k=0}^v a_k \alpha_k^2 (15 - 20\alpha_k \rho^2 + 4\alpha_k^2 \rho^4) \psi(r, \rho). \quad (2.69)
 \end{aligned}$$

Усереднюючи (2.69) з допоміжною заміною змінних:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{q}^4 \rangle &= \frac{4}{N^2} \sum_{l,k=0}^v a_k a_l \alpha_k^2 \int d^3 \rho d^3 r (15 - 20\alpha_k \rho^2 + 4\alpha_k^2 \rho^4) e^{-\alpha_{kl} \rho^2 - \beta_{kl} r^2} = \\
 &= \frac{(4\pi)^2}{N^2} \sum_{l,k=0}^v a_k a_l \frac{\alpha_k^2}{(\alpha_{kl} \beta_{kl})^{3/2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \times \\
 &\quad \times \int_0^\infty dt t^{1/2} \left[15 - 20 \frac{\alpha_k}{\alpha_{kl}} t + 4 \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_{kl}} \right)^2 t^2 \right] e^{-t} = \\
 &= \frac{4\pi^3}{N^2} \sum_{l,k=0}^v a_k a_l \frac{\alpha_k^2}{(\alpha_{kl} \beta_{kl})^{3/2}} \left[15 - 30 \frac{\alpha_k}{\alpha_{kl}} + 15 \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_{kl}} \right)^2 \right] = \\
 &= \frac{60\pi^3}{N^2} \sum_{l,k=0}^v a_k a_l \frac{\alpha_k^2 \alpha_l^2}{\alpha_{kl}^{7/2} \beta_{kl}^{3/2}}. \quad (2.70)
 \end{aligned}$$

Середнє значення $\langle \mathbf{p}^4 \rangle$ можна отримати враховуючи вище згаданий перехід для будь-якої степені n : $\langle \mathbf{p}^n \rangle \leftrightarrow \langle \mathbf{q}^n \rangle$ при взаємній заміні варіаційних параметрів $\alpha \leftrightarrow \beta$, таким чином запишемо:

$$\langle \mathbf{p}^4 \rangle = \frac{60\pi^3}{N^2} \sum_{l,k=0}^v a_k a_l \frac{\beta_k^2 \beta_l^2}{\alpha_{kl}^{3/2} \beta_{kl}^{7/2}}. \quad (2.71)$$

Аналогічно усереднимо вираз (2.66):

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{q}^2 \mathbf{p}^2 \rangle &= \frac{4}{N^2} \sum_{k,l=0}^v a_k a_l \alpha_k \beta_k \times \\ &\times \int d^3 \rho d^3 r (3 - 2\rho^2 \alpha_k) (3 - 2r^2 \beta_k) \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2) = \quad (2.72) \\ &= \frac{36\pi^3}{N^2} \sum_{k,l=0}^v a_k a_l \frac{\alpha_k \alpha_l \beta_k \beta_l}{(\alpha_{kl} \beta_{kl})^{5/2}}.\end{aligned}$$

Отже, збираючи вирази (2.70), (2.71), (2.72), отримаємо середнє значення (2.65):

$$\langle \mathbf{p}_i^4 \rangle = \frac{60\pi^3}{N^2} \sum_{k,l=0}^v a_k a_l \left[f_i^4 \frac{\alpha_k^2 \alpha_l^2}{\alpha_{kl}^{7/2} \beta_{kl}^{3/2}} + d_i^4 \frac{\beta_k^2 \beta_l^2}{\alpha_{kl}^{3/2} \beta_{kl}^{7/2}} + 2f_i^2 d_i^2 \frac{\alpha_k \alpha_l \beta_k \beta_l}{(\alpha_{kl} \beta_{kl})^{5/2}} \right]. \quad (2.73)$$

Для тотожніх кварків відповідно:

$$\langle \mathbf{p}_i^4 \rangle = \frac{320\pi^3}{3N^2} \sum_{k,l=0}^v a_k a_l \frac{(\alpha_k \alpha_l)^2}{\alpha_{kl}^5}. \quad (2.74)$$

Таким чином спрощуючи (2.73) та підставляючи його у вираз для терму (2.27) отримаємо:

$$\langle H_{mv} \rangle = -\frac{30\pi^3}{4m_i^3 N^2} \sum_{k,l=0}^v a_k a_l \frac{\left(f_i^2 \frac{\alpha_k \alpha_l}{\alpha_{kl}} + d_i^2 \frac{\beta_k \beta_l}{\beta_{kl}} \right)^2}{(\alpha_{kl} \beta_{kl})^{3/2}}. \quad (2.75)$$

2.8.6 Усереднення терму H_{ret}

Спочатку розрахуємо частину $\langle r_{ij}^{-1} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j \rangle$ з (2.30):

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j \psi(\rho, r) &= [f_i f_j q^2 + (f_i d_j + f_j d_i) \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + d_i d_j p^2] \psi(\rho, r) = \\
&= - \sum_k a_k [-2 f_i f_j \alpha_k (3 - 2 \alpha_k \rho^2) + 4 (f_i d_j + f_j d_i) \alpha_k \beta_k \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \\
&\quad - 2 d_i d_j \beta_k (3 - 2 \beta_k r^2)] \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2). \quad (2.76)
\end{aligned}$$

Введемо нові координати для спрощення. Тут і нижче трьома крапками позначемо члени, що обнуляються внаслідок зазначеної вище симетрії основного стану баріонів, отже:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\rho} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}} \left(b_{ij} \sqrt{\frac{\beta_{kl}}{\alpha_{kl}}} \mathbf{X} + c_{ij} \mathbf{Y} \right), \\
\mathbf{r} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}} \left(c_{ij} \sqrt{\frac{\alpha_{kl}}{\beta_{kl}}} \mathbf{X} - b_{ij} \mathbf{Y} \right), \\
\mathbf{r}_{ij} &= \sqrt{\frac{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}{\alpha_{kl} \beta_{kl}}} \mathbf{X}, \quad d^3 \rho d^3 r = \frac{d^3 X d^3 Y}{(\alpha_{kl} \beta_{kl})^{3/2}}, \\
\exp(-\alpha_{kl} \rho^2 - \beta_{kl} r^2) &= \exp(-X^2 - Y^2), \\
\alpha_k (3 - 2 \alpha_k \rho^2) &= \alpha_k \left[3 - 2 \alpha_k \frac{1}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \left(b_{ij}^2 \frac{\beta_{kl}}{\alpha_{kl}} X^2 + c_{ij}^2 Y^2 + \dots \right) \right] = \\
&= \left[3 \alpha_k - 2 \frac{\alpha_k^2}{\alpha_{kl} (\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2)} (b_{ij}^2 \beta_{kl} X^2 + c_{ij}^2 \alpha_{kl} Y^2 + \dots) \right] = \\
&= \left[\frac{3}{2} \alpha_{kl} - \frac{\alpha_k^2 + \alpha_l^2}{\alpha_{kl} (\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2)} (b_{ij}^2 \beta_{kl} X^2 + c_{ij}^2 \alpha_{kl} Y^2 + \dots) \right] \\
\beta_k (3 - 2 \beta_k r^2) &= \left[\frac{3}{2} \beta_{kl} - \frac{\beta_k^2 + \beta_l^2}{\beta_{kl} (\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2)} (c_{ij}^2 \alpha_{kl} X^2 + b_{ij}^2 \beta_{kl} Y^2 + \dots) \right], \\
\alpha_k \beta_k \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} &= b_{ij} c_{ij} \frac{(\alpha_k \beta_k + \alpha_l \beta_l)}{2 (\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2)} (X^2 - Y^2 + \dots).
\end{aligned} \quad (2.77)$$

Використовуючи нові координати, запишемо усереднення (2.76):

$$\begin{aligned}
& \langle r_{ij}^{-1} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j \rangle = \\
& = \frac{(4\pi)^2}{N^2} \sum_{l,k=0}^v a_l a_k \frac{1}{(\alpha_{kl} \beta_{kl})^{3/2}} \sqrt{\frac{\alpha_{kl} \beta_{kl}}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}} \int_0^\infty dX dY X Y^2 e^{-X^2 - Y^2} \times \\
& \times \left\{ 2f_i f_j \left[\frac{3}{2} \alpha_{kl} - \frac{\alpha_k^2 + \alpha_l^2}{\alpha_{kl}(\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2)} (b_{ij}^2 \beta_{kl} X^2 + c_{ij}^2 \alpha_{kl} Y^2 + \dots) \right] + \right. \\
& + 2d_i d_j \left[\frac{3}{2} \beta_{kl} - \frac{\beta_k^2 + \beta_l^2}{\beta_{kl}(\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2)} (c_{ij}^2 \alpha_{kl} X^2 + b_{ij}^2 \beta_{kl} Y^2 + \dots) \right] - \\
& \left. - 4(f_i d_j + f_j d_i) b_{ij} c_{ij} \frac{(\alpha_k \beta_k + \alpha_l \beta_l)}{2(\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2)} (X^2 - Y^2 + \dots) \right\} = \\
& = \frac{4\pi^2}{N^2} \sum_{l,k=0}^v \frac{a_l a_k}{\alpha_{kl} \beta_{kl} \sqrt{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}} \times \\
& \times \left\{ 2f_i f_j \left[\frac{3}{2} \alpha_{kl} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{\alpha_k^2 + \alpha_l^2}{\alpha_{kl}(\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2)} (b_{ij}^2 \beta_{kl} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + c_{ij}^2 \alpha_{kl} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)) \right] + \right. \\
& + 2d_i d_j \left[\frac{3}{2} \beta_{kl} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{\beta_k^2 + \beta_l^2}{\beta_{kl}(\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2)} (c_{ij}^2 \alpha_{kl} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + b_{ij}^2 \beta_{kl} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)) \right] - \\
& \left. - 2(f_i d_j + f_j d_i) b_{ij} c_{ij} \frac{(\alpha_k \beta_k + \alpha_l \beta_l)}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} (\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)) \right\} = \\
& = \frac{2\pi^{5/2}}{N^2} \sum_{l,k=0}^v \frac{a_l a_k}{\alpha_{kl} \beta_{kl} \sqrt{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}} \times \\
& \times \left\{ f_i f_j \left[\alpha_{kl} + \frac{4\alpha_k \alpha_l}{\alpha_{kl}} - \frac{c_{ij}^2 (\alpha_k^2 + \alpha_l^2)}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \right] + \right. \\
& + d_i d_j \left[\beta_{kl} + \frac{4\beta_k \beta_l}{\beta_{kl}} - \frac{b_{ij}^2 (\beta_k^2 + \beta_l^2)}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \right] + \\
& \left. + (f_i d_j + f_j d_i) b_{ij} c_{ij} \frac{\alpha_k \beta_k + \alpha_l \beta_l}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \right\}.
\end{aligned}
\tag{2.78}$$

Наступним усереднимо $\langle r_{ij}^{-3} \mathbf{r}_{ij} \cdot (\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{p}_i) \mathbf{p}_j \rangle$ з виразу (2.30), за допомогою введених вище змінних (2.77):

$$\begin{aligned}
& \mathbf{r}_{ij} \cdot (\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{p}_i) \mathbf{p}_j \exp(-\alpha_k \rho - \beta_k r^2) = \\
& = -\mathbf{r}_{ij} \cdot \left[\mathbf{r}_{ij} \cdot \left(f_i \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} + d_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \right] \left(f_j \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \mathbf{q} + d_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2) = \\
& = -\frac{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}{\alpha_{kl} \beta_{kl}} \sum_{a,b=1}^3 X_a X_b \times \\
& \times \left[f_i f_j \frac{\partial^2}{\partial \rho_a \partial \rho_b} + d_i d_j \frac{\partial^2}{\partial r_a \partial r_b} + (f_i d_j + f_j d_i) \frac{\partial^2}{\partial \rho_a \partial r_b} \right] \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2) = \\
& = \frac{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}{\alpha_{kl} \beta_{kl}} \exp(-\alpha_k \rho^2 - \beta_k r^2) 2 \sum_{a,b} X_a X_b \times \\
& \times [f_i f_j \alpha_k (\delta_{ab} - 3\alpha_k \rho_a \rho_b) + d_i d_j \beta_k (\delta_{ab} - 3\beta_k r_a r_b) - 2(f_i d_j + f_j d_i) \alpha_k \beta_k \rho_a r_b] = \\
& = \frac{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}{\alpha_{kl} \beta_{kl}} \exp(-X^2 - Y^2) \times \\
& \times \left\{ 2f_i f_j \alpha_k \left[X^2 - 2 \frac{\alpha_k}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \left(\mathbf{X} \cdot (b_{ij} \sqrt{\frac{\beta_{kl}}{\alpha_{kl}}} \mathbf{X} + c_{ij} \mathbf{Y}) \right)^2 \right] + \right. \\
& + 2d_i d_j \beta_k \left[X^2 - 2 \frac{\beta_k}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \left(\mathbf{X} \cdot (c_{ij} \sqrt{\frac{\alpha_{kl}}{\beta_{kl}}} \mathbf{X} - b_{ij} \mathbf{Y}) \right)^2 \right] - \\
& - 4(f_i d_j + f_j d_i) \alpha_k \beta_k (\mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\rho}) [X^4 - (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})^2] \} = \\
& = \frac{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}{\alpha_{kl} \beta_{kl}} \exp(-X^2 - Y^2) \times \\
& \times \left\{ 2f_i f_j \alpha_k \left[X^2 - 2 \frac{\alpha_k}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \left(b_{ij}^2 \frac{\beta_{kl}}{\alpha_{kl}} X^4 + c_{ij}^2 (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})^2 + \dots \right) \right] + \right. \\
& + 2d_i d_j \beta_k \left[X^2 - 2 \frac{\beta_k}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \left(c_{ij}^2 \frac{\alpha_{kl}}{\beta_{kl}} X^4 + b_{ij}^2 (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})^2 + \dots \right) \right] - \\
& - 4(f_i d_j + f_j d_i) \frac{\alpha_k \beta_k}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} b_{ij} c_{ij} [X^4 - (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})^2] \} .
\end{aligned}$$

(2.79)

Таким чином, отримаємо його середні значення:

$$\begin{aligned}
\langle r_{ij}^{-3} \mathbf{r}_{ij} \cdot (\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{p}_i) \mathbf{p}_j \rangle &= \frac{(4\pi)^2}{N^2} \sum_{k,l=0}^v \frac{a_k a_l}{\alpha_{kl} \beta_{kl} \sqrt{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}} \times \\
&\times \int dX X \int dY Y^2 \exp(-X^2 - Y^2) \times \\
&\times \left\{ f_i f_j \left[\alpha_{kl} - 2 \frac{\alpha_k^2 + \alpha_l^2}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \left(b_{ij}^2 \frac{\beta_{kl}}{\alpha_{kl}} X^2 + \frac{1}{3} c_{ij}^2 Y^2 \right) \right] + \right. \\
&+ d_i d_j \left[\beta_{kl} - 2 \frac{\beta_k^2 + \beta_l^2}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \left(c_{ij}^2 \frac{\alpha_{kl}}{\beta_{kl}} X^2 + \frac{1}{3} b_{ij}^2 Y^2 \right) \right] - \\
&- 2(f_i d_j + f_j d_i) \frac{\alpha_k \beta_k + \alpha_l \beta_l}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} b_{ij} c_{ij} [X^2 - \frac{1}{3} Y^2] \left. \right\} = \\
&= \frac{4\pi^2}{N^2} \sum_{k,l=0}^v \frac{a_k a_l}{\alpha_{kl} \beta_{kl} \sqrt{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}} \times \\
&\times \left\{ f_i f_j \left[\alpha_{kl} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - 2 \frac{\alpha_k^2 + \alpha_l^2}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \left(b_{ij}^2 \frac{\beta_{kl}}{\alpha_{kl}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3} c_{ij}^2 \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \right) \right] + \right. \quad (2.80) \\
&+ d_i d_j \left[\beta_{kl} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - 2 \frac{\beta_k^2 + \beta_l^2}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \left(c_{ij}^2 \frac{\alpha_{kl}}{\beta_{kl}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3} b_{ij}^2 \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \right) \right] - \\
&- 2(f_i d_j + f_j d_i) \frac{\alpha_k \beta_k + \alpha_l \beta_l}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} b_{ij} c_{ij} [\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)] \left. \right\} = \\
&= \frac{2\pi^{5/2}}{N^2} \sum_{k,l=0}^v \frac{a_k a_l}{\alpha_{kl} \beta_{kl} \sqrt{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}} \times \\
&\times \left\{ f_i f_j \left[\alpha_{kl} - \frac{\alpha_k^2 + \alpha_l^2}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \left(2b_{ij}^2 \frac{\beta_{kl}}{\alpha_{kl}} + c_{ij}^2 \right) \right] + \right. \\
&+ d_i d_j \left[\beta_{kl} - \frac{\beta_k^2 + \beta_l^2}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} \left(2c_{ij}^2 \frac{\alpha_{kl}}{\beta_{kl}} + b_{ij}^2 \right) \right] - \\
&- (f_i d_j + f_j d_i) \frac{\alpha_k \beta_k + \alpha_l \beta_l}{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2} b_{ij} c_{ij} \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Для тотожніх кварків:

$$\langle r_{ij}^{-3} \mathbf{r}_{ij} \cdot (\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{p}_i) \mathbf{p}_j \rangle = \frac{2\pi^{5/2}}{N^2} \sum_{k,l=0}^v \frac{a_k a_l}{\alpha_{kl}^{7/2}} \left(\alpha_k^2 + \alpha_l^2 - \frac{4}{3} \alpha_k \alpha_l \right). \quad (2.81)$$

Таким чином, підставляючи отриманий результат (2.80), спростивши його, в (2.30), запишемо:

$$\langle H_{ret} \rangle = \frac{32\alpha_s \pi^{5/2}}{3N^2 m_i m_j} \sum_{k,l=0}^v \frac{a_k a_l \left(f_i f_j \frac{\alpha_k \alpha_l}{\alpha_{kl}} + d_i d_j \frac{\beta_k \beta_l}{\beta_{kl}} \right)}{\alpha_{kl} \beta_{kl} \sqrt{\alpha_{kl} c_{ij}^2 + \beta_{kl} b_{ij}^2}}. \quad (2.82)$$

2.9 Висновки до розділу 2

В даному розділі було розглянуто важкий баріон за аналогією з атомом гелію та двічі важкий баріон за аналогією до іонізованої молекули водню, проведено систематизацію станів, виходячи з міркувань симетрії хвильової функції відносно перестановки кварків, а також записано квазірелятивістський гамільтоніан системи та усереднено його за гаусовою пробною функцією. У виразах для усереднених значень мається на увазі сума по індексам кварків. Таким чином, проведено всі необхідні аналітичні розрахунки для подальшого розрахунку спектру мас чисельними методами.

РОЗДІЛ 3

РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ

В даному розділі проведена фінальна стадія розрахунків, а саме: чисельний розрахунок варіаційним методом Рітца параметрів потенціалу, мас кварків та відповідно спектрів мас баріонів в основному стані на основі аналітичних виразів отриманих в попередньому розділі.

Проаналізовано поведінку різних енергетичних термів релятивістського розкладу.

В даному розділі буде зусереджена увага на застосуванні обраного чисельного метода, записі та аналізі результатів чисельних розрахунків.

3.1 Розрахунок та обґрунтування параметрів

Для розрахунку спектру мас важких баріонів в рамках запропонованої моделі, необхідно визначитись з чисельними значеннями параметрів, які входять до гамільтоніану, що описує поведінку системи, а саме: параметри корнеллівського потенціалу та маси кварків, чисельні значення параметризації константи сильного зв'язку від яких залежить енергія системи.

Чисельні значення параметрів потенціалу зазначено в табл. 3.1, вказано значення гіперпараметрів нерелятивістської моделі для дослідження їх модифікації при врахування квазірелятивістських ефектів.

Таблиця 3.1

Значення параметрів потенціалу, вказано значення отримані з нерелятивістським підходом [39, 40]

Параметр	Значення	[39, 40]
A	0.112 GeV^2	0.18 GeV^2
B	-0.098 GeV	-1.234 GeV
M_0	0.95 GeV	—
Λ	0.424 MeV	—

Параметри A , B , M_0 , Λ входять до нерелятивістського потенціалу.

Далі визначимось з масами кварків в складі адрону.

Маси легких кварків m_u та m_d приймаються рівними: $m_u = m_d = m_{ud}$.

Розраховані значення мас складових кварків вказано в 3.2.

Таблиця 3.2

Значення конститuentних мас кварків, вказано значення отримані з нерелятивістським підходом [39, 40]

Кварк	Маса, GeV	[39, 40], GeV
m_{ud}	0.296	0.335
m_s	0.453	0.65
m_c	1.662	1.92
m_b	4.994	5.3

Параметри моделі дуже суттєво змінили свої значення в порівнянні до нерелятивістських робіт [39, 40], з чого можемо зробити висновок про впливовий внесок релятивістських ефектів. Чисельні значення поправок будуть детально обговорюватись нижче.

Отримані значення мас та параметри потенціалу будуть використовуватись при подальших розрахунках спектрів мас баріонів.

3.2 Реалізація варіаційного методу Рітца. Мінімізація

В попередньому розділі було обчислено функціонали вигляду:

$$R_0(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \int \phi^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x) \hat{H} \phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x) dx \quad (3.1)$$

з гаусово пробною функцією вигляду (2.38). Де, як вказано вище, гамільтоніан має брейтівський вигляд.

Таким чином, на практиці ця задача зводиться до знаходження таких значень варіаційних параметрів, що входять до пробної функції, при яких середнє значення гамільтоніана за цією функцією є мінімальним. Тоді це значення наближено дорівнює енергії основного стану. Мінімізація застосовується до незбуреної частини гамільтоніану та знайдені параметри мінімуму підставляються в поправки.

Проаналізувавши особливості можливих методів оптимізації, було обрано метод SLSQP. Значення, що характеризує кількість варіаційних параметрів обрано $\nu = 4$, більша кількість не призводить до змін в результатах.

3.3 Розраховані спектри мас баріонів та їх аналіз

3.3.1 Спектр мас легких баріонів

Маси легких баріонів були добре досліджені, однак вплив релятивістських поправок досі залишається відкритим питанням. Баріони з легкими кварками особливо сильно змінюють динаміку при врахуванні релятивіст-

ських ефектів, адже легкі кварки можуть рухатись з швидкостями, близькими до швидкості світла. Результуючий спектр мас вказано в табл. 3.3

Таблиця 3.3

Спектр мас легких, MeV

	$I(J)^p$	Experiment [41]	Theory
p	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^+$	938.272046 ± 0.000021	980.87
Λ	$0(\frac{1}{2})^+$	1115.683 ± 0.006	1134.84
Σ^+	$1(\frac{1}{2})^+$	1189.37 ± 0.07	1193.31
Ξ^-	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^+$	1321.71 ± 0.07	1297.07
Δ	$\frac{3}{2}(\frac{3}{2})^+$	1232 ± 2	1226.67
Σ^*	$1(\frac{3}{2})^+$	1382.80 ± 0.35	1376.61
Ξ^*	$\frac{1}{2}(\frac{3}{2})^+$	1531.80 ± 0.32	1501.58
Ω	$0(\frac{3}{2})^+$	1672.45 ± 0.29	1615.37

3.3.2 Спектр мас *charm*-баріонів

Так як маси u та d кварків приймаються рівними, маси баріонів, що входять до відповідних ізотопічних мультиплетів будуть однаковими. Наприклад, $\Sigma_c^-(I(J^P) = 1(\frac{1}{2}^+)) = \Sigma_c^0(I(J^P) = 1(\frac{1}{2}^+)) = \Sigma_c^+(I(J^P) = 1(\frac{1}{2}^+)) = \Sigma_c(I(J^P) = 1(\frac{1}{2}^+))$. Для інших ізотопічних мультиплетів аналогічно.

Таке наближення не є сильним, адже маси u та d кварків є дуже близькими, різниця в їх кулонівських зарядах не розрізняється моделью, так як ми нехтуємо електромагнітними силами. Дане наближення є звичним для адронної спектроскопії.

Таким чином, кількість одержаних частинок зменшується до вісьми, значення їх мас представлено в таблиці 3.4.

Таблиця 3.4

Спектр мас баріонів з с-кварком, MeV

	$I(J)^p$	Experiment [41]	Theory
Λ_c	$0(\frac{1}{2})^+$	2286.46 ± 0.14	2268.07
Σ_c	$1(\frac{1}{2})^+$	2453.97 ± 0.14	2414.41
Σ_c	$1(\frac{3}{2})^+$	$2518.41^{+0.21}_{-0.19}$	2459.12
Ξ_c	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^+$	$2467.93^{+0.28}_{-0.40}$	2459.12
Ξ'_c	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^+$	2575.7 ± 3.0	2571.17
Ξ_c	$\frac{1}{2}(\frac{3}{2})^+$	2645.9 ± 0.5	2649.75
Ω_c	$0(\frac{1}{2})^+$	2695.2 ± 1.7	2703.64
Ω_c	$0(\frac{3}{2})^+$	2765.9 ± 2.0	2780.44

Порівнюючи теоретично розрахований спектр з експериментальними значеннями мас частинок, бачимо, що запропонована модель гарно описує і важкі баріони.

3.3.3 Спектр мас *bottom*-баріонів

Аналогічно отримаємо спектр мас для *b*-баріонів, який представлено в табл. 3.5

Варто сказати, що для частинки Ω_b ще не було отримано достовірних експериментальних даних.

Таблиця 3.5

Спектр мас b -баріонів, MeV

	$I(J)^p$	Experiment [41]	Theory
Λ_b	$0(\frac{1}{2})^+$	5619.5 ± 0.4	5587.75
Σ_b	$1(\frac{1}{2})^+$	$5811.3 \pm 0.9 \pm 1.7$	5784.11
Σ_b	$1(\frac{3}{2})^+$	$5832.1 \pm 0.7^{+1.7}_{-1.8}$	5814.1
Ξ_b	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^+$	5794.9 ± 0.9	5783.6
Ξ'_b	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^+$	$5935.02 \pm 0.02 \pm 0.05$	5935.69
Ξ_b	$\frac{1}{2}(\frac{3}{2})^+$	5949.3 ± 0.9	5965.33
Ω_b	$0(\frac{1}{2})^+$	6048.8 ± 3.2	6068.01
Ω_b	$0(\frac{3}{2})^+$		6097.61

3.3.4 Спектр мас двічі важких баріонів

Сектор двічі важких баріонів ще не був суттєво досліджений експериментально, однак існує одна статистично підтверджена частинка Ξ_{cc}^{++} , що має експериментальну масу $3621.40 \pm 0.72 \pm 0.27 \pm 0.14$ MeV [42], що є близькою до передбаченої, що вказана у таблиці 3.6.

Можна проаналізувати структуру релятивістських ефектів, а саме їх чисельні значення, і зробити висновок про важливість поправок. Для прикладу візьмемо наступні частинки $\Lambda_c \left(\frac{1}{2}^+\right)$ and $\Xi_{cc} \left(\frac{1}{2}^+\right)$, другий є особливо цікавий для дослідження так як він є єдиним статистично підтвердженим двічі важким баріоном.

Значення, що вказані в таблиці 3.7 мають дуже суттєві значення для спектру, тому для більш адекватного опису послідовне врахування релятивістських ефектів є важливим завданням, і нехтувати ними варто з відомою

Таблиця 3.6

Розрахований спектр мас двічі важких баріонів в порівнянні з передбаченнями нерелятивістської моделі та інших підходів, MeV

	$I(J)^p$	Theory	[39, 40]	Yoshida [26]	Karliner [22]
Ξ_{cc}	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}^+ \right)$	3623.26	3605	3685	3627 ± 12
Ξ_{cc}	$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}^+ \right)$	3733.2	3734	3754	3690 ± 12
Ξ_{bb}	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}^+ \right)$	10219.56	10250	10314	10162 ± 12
Ξ_{bb}	$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}^+ \right)$	10269.48	10316	10339	10184 ± 12
Ω_{cc}	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}^+ \right)$	3812.73	3797	3832	-
Ω_{cc}	$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}^+ \right)$	3908.63	3893	3883	-
Ω_{bb}	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}^+ \right)$	10413.08	10426	10454	-
Ω_{bb}	$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}^+ \right)$	10458.67	10473	10486	-

обережністю. Також необхідно помітити, що врахувавши квазірелятивістські ефекти, параметри моделі змінились, особливо, завдяки поправки на залежність маси від швидкості, що у великій мірі вплинув на зміну вільного параметра торії — параметра B .

Досліджуючи дану поправку ще детальніше, ми помітили, що за її велике значення відповідальні легкі кварків (значення поправки 422 MeV розпадається на 2 MeV, 2 MeV та 418 MeV відповідно до двох важких та одного легкого кварків у частинці Ξ_{cc} , подібна поведінка властива всім розрахованим баріонам). Тому, хоча легкі кварки мають нехтовно малу масу, вони сильно впливають на спектр за рахунок великого значення імпульсу, це особливо помітно на прикладі поправки $H_{mv} \propto \frac{p^4}{m^3}$ (2.27). З чого робимо висновок про необхідність врахування релятивізму для адронів до складу яких входять легкі кварки.

Таблиця 3.7

Значення термів гамільтоніана Брейта для $\Lambda_c \left(\frac{1}{2}^+\right)$ та $\Xi_{cc} \left(\frac{1}{2}^+\right)$, МеВ.

	H_0	H_{mv}	H_D	H_{ssc}	H_{ret}
Λ_c	3045.47	-545.63	205.99	-159.18	-270.82
Ξ_{cc}	4104.23	-421.98	176.35	-75.21	-165.08

Спін-спінова поправка H_{ssc} (2.29) є необхідною для опису спектру адронів, адже вона є спіно-залежною і дозволяє розчипити частинки з різним спіном.

Поправки H_D та H_{ret} (2.28), (2.30) мають також суттєві значення за рахунок легких кварків. Такий результат є очікуваним з фізичних міркувань: легкі кварки рухаються з релятивістськими швидкостями. Даний результат також варто очікувати, помітивши, що у виразах для поправок маси кварків знаходяться в знаменнику, і, відповідно, вони будуть проявлятися для легких кварків.

Спектри мас важких баріонів можуть свідчити про стабільність деяких важких частинок по відношенню до сильного каналу розпаду. Сильний розпад можливий тільки з урахуванням збереження квантового числа — дивності, а також необхідно щоб викинувався кінематичний відбір — маса дочірніх частинок не може перевищувати масу материнської. У випадку не виконання хочаб одного — такий канал є забороненим, тому частинка може розпадатися тільки за рахунок слабого розпаду, що є значно менш інтенсивним.

3.4 Висновки до розділу 3

В даному розділі було реалізовано варіаційний принцип Рітца та отримано спектри мас b - та c -баріонів а також двічі важких баріонів. Отримані значення були порівняні з експериментальними даними та проаналізовані, результати показують, що модель спроможна описати відомі частинки. Для експериментально не досліджених частинок було зроблено передбачення мас.

Вказано на стабільність частинок по відношенню до сильного розпаду.

Проаналізовано вплив урахування квазірелятивістського підходу як на параметри так і на спектр, з чого зроблено висновок, що для адекватного опису адронів врахування релятивізму є дуже важливим фактором, особливо для адронів з легкими кварками.

ВИСНОВКИ

- 1) Розроблено модель для опису важких баріонів в рамках кваркової теорії, де в якості нерелятивістської міжкваркової взаємодії було обрано корнеллівський потенціал.
- 2) Було послідовно враховано всі релятивістські поправки порядку $(v/c)^2$ у вигляді гамільтоніану Брейта.
- 3) Було розвинено математичний формалізм даної моделі.
- 4) Була проведена повна класифікація основного стану баріонів, що містять один важкий c - або b -кварк, та два тотожних за ароматом важкі кварки cc - або bb -кварки.
- 5) Одержано чисельні значення всіх необхідних параметрів, що входять до гамільтоніану.
- 6) Були отримані маси складових кварків.
- 7) На основі розвинутого формалізму, було застосовано варіаційний принцип Рітца для розрахунку спектру мас важких баріонів. При порівнянні розрахованого спектру мас з експериментальними значеннями мас частинок, було зроблено висновок про узгодження теорії та експерименту.
- 8) Проаналізовано чисельні значення релятивістських термів, з чого зроблено висновок про необхідність їх урахування для адекватного опису адронів.
- 9) Було отримано спектр мас баріонів з двома тотожними важкими кварками, які ще не спостерігались експериментально та Ω_b частинки, тобто було зроблено передбачення їх мас.
- 10) Отримані значення мас були порівняні з масами, розрахованими за допомогою інших підходів [22, 26]. Те, що використання різних методів в рамках різноманітних моделей розрахунку призводить до отримання досить близьких між собою значень, дозволяє звужити діапазон пошуку

цих частинок на експерименті та більш ґрунтовно визначати квантові числа спостережуваних станів.

- 11) Розрахована маса єдиної статистично підтвердженої двічі важкої частинки Ξ_{cc}^{++} є близькими до експериментальних значень.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Faddeev L. D. GAUGE FIELDS. INTRODUCTION TO QUANTUM THEORY/ Faddeev, L. D., Slavnov, A. A. — Front. Phys., 50, 1980. — 232.
2. Greensite J. An introduction to the confinement problem/ Greensite J. — Lect. Notes Phys., 821, 2011. — 211.
3. K.A. Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, 38, 090001 (2014). Mode of access: <http://pdg.lbl.gov/>
4. M. Gell-Mann. A Schematic Model of Baryons and Mesons. Physics Letters 8 (3) (1964). p. 214–215.
5. G. Zweig. An SU(3) Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking: II. CERN Report No.8419/TH.412 (1964).
6. R. H. Dalitz. Quark models for the elementary particles. Lectures at Les Houches Summer School, 1965.
7. Nathan Isgur and Gabriel Karl. Positive Parity Excited Baryons in a Quark Model with Hyperfine Interactions. Phys.Rev. **D19**, 2653 (1979).
8. Toru T. Takahashi, H. Matsufuru, Y. Nemoto, and H. Suganuma. The three-quark potential in the SU(3) lattice qcd. Phys. Rev. Lett. 86. (2001) Pp. 18–21.
9. Simon Capstick and Nathan Isgur. Baryons in a Relativized Quark Model with Chromodynamics. Phys.Rev. **D34**, 2809, (1986).
10. B. Metsch, U. Loring, D. Merten, and H. Petry. The spectrum and strong decays of baryons in a relativistic quark model. Eur.Phys.J. **A18**, (2003) Pp. 189–192.
11. L. D. Roper. Evidence for a P11 Pion-Nucleon Resonance at 556 MeV. Phys. Rev. Letters 12, 340 (1964).
12. О.П. Кобушкін. Квантова механіка. Навчальний посібник/Кобушкін О.П.— Київ: 2013. — С.92-94.

13. B. Silvestre-Brac and C. Gignoux. Study of light baryons in the three quark cluster model: Exact calculations. *Phys.Rev.* **D32**. (1985) Pp. 743–754.
14. J.M. Richard. The Nonrelativistic three-body problem for baryons. *Phys.Rept.* 212 (1992) Pp. 1–76.
15. A.B. Guimaraes, H.T. Coelho, and R. Chanda. Quark model for heavy baryons. *Phys.Rev.* **D24**, 1343–1346, (1981).
16. P. Hasenfratz, R. R. Horgan, J. Kuti, and J. M. Richard. Heavy baryon spectroscopy in the QCD bag model. *Phys. Lett.* **B94** 401, (1980).
17. D. Ebert, R. N. Faustov, V. O. Galkin. Spectroscopy and Regge trajectories of heavy baryons in the relativistic quark-diquark picture. *Phys.Rev.* **D84**014025 (2011) P. 25.
18. L. Ya. Glozman and D.O. Riska, June 1995, *Phys.Rept.* 268:263-303 (1996).
19. Ф. Хелзен, А. Мартин: Кварки и лептоны: Введение в физику частиц; Пер. с англ. – М.: Мир, (1987) – 456 с.
20. D. Ebert, R.N. Faustov, and V.O. Galkin. Masses of light mesons in the relativistic quark model. *Mod.Phys.Lett.***A20** 1887-1894 (2005).
21. Jean-Marc Richard. An introduction to the quark model. 19 May 2012 (v1). [arXiv:1205.4326]
22. M. Karliner. Heavy quark spectroscopy and prediction of bottom baryon masses, *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 187, 21 - 28, 2009.
23. L. A. Copley, N. Isgur, G. Karl, Charmed baryons in a quark model with hyperfine interactions, *Phys. Rev. D*, 20, 1979.
24. N. Isgur, G. Karl, *P*-wave baryons in the quark model, *Phys. Rev. D*, 18, 11, 1978.
25. W. Roberts, M. Pervin, Heavy Baryons in a Quark Model, *Int. J. Mod. Phys. A* 23, 2817, 2008.
26. T.Yoshida et al., Spectrum of heavy baryons in the quark model, *Phys. Rev.* **D92**, 2015.

27. G. Breit, The Effect of Retardation on the Interaction of Two Electrons, *Phys. Rev.*, 34, 4, 553–573, 1929.
28. V.B. Berestetski, E.M. Lifshitz, and L.P. Pitaevski, *Quantum Electrodynamics*, Eq. (83.15); volume 4 of L.L. Landau and E.M. Lifshitz, *Theoretical Physics*, Moscow, "Nauka", 1989.
29. Г. Бете. Квантовая механика; Пер. с англ. - М.: Мир, (1965) - 327 с.
30. Bethe H. A. *Intermediate quantum mechanics* / Hans Albrecht Bethe, Roman W. Jackiw et al. – 1968.
31. Schiff L. I. *Quantum Mechanics 3rd* / Leonard I. Schiff // New York: McGraw-Hill. – 1968. – С. 61-62.
32. Проблема многих частиц в квантовой механике./Теория и методы решения/ / П.Гомбаш; Пер. с нем. Н.Е.Барабанова, В.Н.Лукашев ; Ред.:Я.А.Сморodinский . – М. : Изд-во иностр. лит.,(1952) – 280 с.
33. Gell-Mann M. A schematic model of baryons and mesons / Murray Gell-Mann // *Physics Letters*. – 1964. – Т. 8. – №. 3. – С. 214-215.
34. Хелзен Ф. Кварки и лептоны: Введение в физику частиц / Ф. Хелзен, А.Д. Мартин; Пер. с англ. – Мир, 1987.
35. Кобушкін, О.П. Квантова механіка: навч. посібник / О.П. Кобушкін – К., 2003. – С. 92-94.
36. Badalian A. M. Restriction on the strong coupling constant in the IR region from the 1D-1P splitting in bottomonium / A. M. Badalian, A.I. Veselov, B.L.G. Bakker // *Physical Review D*. – 2004. – Т. 70. – №. 1. – С. 016007.
37. D.Ebert, R.N.Faustov, and V.O.Galkin, Masses of heavy baryons in the relativistic quark model, *Phys. Rev. D*, 72, 2005.
38. V.B. Berestetski, E.M. Lifshitz, and L.P. Pitaevski, *Quantum Electrodynamics*, Eq. (83.15); volume 4 of L.L. Landau and E.M. Lifshitz, *Theoretical Physics*, Moscow, "Nauka", 1989.
39. Трубочова, К.В. Застосування варіаційного методу для розрахунку мас баріонів в моделі складових кварків / К.В. Трубочова, А.В. Демський,

- О.П. Кобушкін, Д.Л. Борисюк // Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики: матеріали XIV Всеукр. наук.-практ. конф. студентів, аспірантів та молодих вчених, Київ, 26 – 28 травня 2016 р. – С. 89-92.
40. Демський, А.В. Спектр мас важких баріонів в моделі складових кварків з корнеллівським потенціалом / А.В. Демський, К.В. Трубачова, О.П. Кобушкін, Д.Л. Борисюк // Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики: матеріали XIV Всеукр. наук.-практ. конф. студентів, аспірантів та молодих вчених, Київ, 26 – 28 травня 2016 р. – С. 33-36.
41. Olive K.A. Particle Data Group / K.A. Olive et al. // Chin. Phys. C. –2014. –Т. 38. – С. 090001.
42. R. Aaij et al., (LHCb Collaboration), Observation of the Doubly Charmed Baryon Ξ_{cc}^{++} , Phys. Rev. Lett., 119, 11, 2017.