Національний технічний університет України

“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”

Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України

“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”

Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова праця

на правах рукопису

**ВДОВЕНКО ТЕТЯНА ІВАНІВНА**

**УДК 517.9**

**ДИСЕРТАЦІЯ**

СИНГУЛЯРНО НЕСИМЕТРИЧНО ЗБУРЕНІ САМОСПРЯЖЕНІ ОПЕРАТОРИ

01.01.01 – математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Т.І. Вдовенко

Науковий керівник:

Дудкін Микола Євгенович, проф., д.ф.-м.н.

Київ – 2019

# АНОТАЦІЯ

*Вдовенко Т.І.* “Сингулярно несиметрично збурені самоспряжені оператори”. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, Київ, 2019.

Протягом останнього півстоліття розвинена і достатньо повно вивчена теорія сингулярно збурених операторів – самоспряжених операторів, зокрема, зі збуреннями на множинах нульової міри Лебега та їх абстрактних аналогів. Оператор Лапласа, збурений -потенціалами, є типовим прикладом цієї теорії.

Побудова і дослідження збурених самоспряжених операторів в абстрактному вигляді наведені в роботах, серед яких роботи авторів: С. Альбеверіо, Ю.М. Арлінкий, Й. Браше, В.О. Деркач, М.Є. Дудкін, В. Карвовський, В.Д. Кошманенко, П. Курасов, С.О. Кужель, М.М. Маламуд, Х. Найдхард, Л.П. Нижник, А. Посілікано, Б. Саймон, С. Хассі, Е.Р. Цекановський, Ю. Шондін та інші. Загальна кількість публікацій, присвячених сингулярно збуреним операторам, налічує декілька тисяч малих і великих робіт. Значна кількість робіт присвячена саме збуренню самоспряжених диференціальних операторів потенціалами типу -функції, зосереджених на різних множинах. Основним методом дослідження таких задач є теорія самоспряжених розширень щільно визначеного симетричного оператора.

Розгляд моделей, в яких самоспряжений оператор збурюється сингулярним, але не симетричним виразом, обумовив дослідження відповідних сингулярних несиметричних збурень. Серед таких моделей є моделі фізичного керування – системи із запізненням (упередженням), моделі із нелокальними взаємодіями, збурення несиметричними потенціалами, які є у роботах С.О.Кужеля, Л.П.Нижника, В.О.Золотарьова [27, 41, 62, 90-92, 100].

Перенесення і, певною мірою, узагальнення основних результатів теорії самоспряжених сингулярно збурених операторів на випадок несиметрично збурених є складним завданням, починаючи від відповідного визначення і до дослідження властивостей вже несамоспряжених операторів. Складність полягає у відсутності аналогів теорії самоспряжених розширень щільно визначеного симетричного оператора у випадку несиметричних збурень. Для сингулярних несиметричних збурень постає весь спектр питань, притаманних симетричним збуренням, навіть при збуренні рангу один. А саме, чи можливий конструктивний (не формальний) опис несиметрично збурених операторів, які властивості спектра так збуреного оператора, чи виникають нові точки точкового спектра у збуреного оператора, чи є збурений оператор взагалі спектрального типу та інше? Відповіді на ці питання для симетричних збурень широко відомі. Близькими до таких досліджень є роботи стосовно сингулярно збурених нормальних операторів М.Є. Дудкіна, Л.П. Нижника [17, 18, 52-55].

Дисертаційна робота присвячена дослідженню сингулярно збурених самоспряжених операторів із несиметричним збуренням, переважно рангу один, тобто збуренням косим проектором. Такі збурення розширюють клас добре вивчених самоспряжених збурень і, в частинному випадку, зводять до них. Такі несиметричні збурення у функціональних просторах відповідають задачам із нелокальною взаємодією. У техніці такі збурення відповідають моделям із запізненням (упередженням).

У роботі подано опис несиметричного збурення рангу один оператора в термінах узагальненої суми в шкалі просторів, побудованих за незбуреним оператором. Також дано опис збурених операторів в термінах резольвент, тобто сформульована і доведена формула типу М. Крейна для самоспряжених розширень симетрично щільно визначеного оператора. У випадку, розглянутому в роботі, формула типу М. Крейна об’єднує резольвенту самоспряженого незбуреного оператора та резольвенту деякого несиметричного оператора. Як дефектні вектори у формулі використовуються дефектні вектори двох симетричних операторів, які виникають як звуження на щільні в просторі множини незбуреного оператора та збуреного і, відповідно, незбуреного спряженого та оператора, спряженого до збуреного.

За допомогою явного запису резольвенти сингулярно несиметрично рангу один збуреного оператора досліджений точковий спектр, який виникає після збурення. Цей спектр, на відміну від класичного самоспряженого випадку, може бути, взагалі, комплексне число із відповідним власним вектором, і комплексно спряженим числом у спряженого оператора із іншим власним вектором.

Також розв’язана обернена задача, яка полягає в , тому що за наперед заданим комплексним числом і двома векторами, які повинні бути власними в збуреного оператора і його спряженого, побудований спряжений оператор. Для цього сформульована і доведена формула типу М. Крейна у зворотний бік, тобто наведені необхідні та достатні умови для того, щоб сума резольвенти незбуреного самоспряженого оператора і косого проектора (із певними властивостями) дали резольвенту несиметрично рангу один збуреного оператора.

У рамках дослідження точкового спектра знайдений аналог дуальної пари власних значень для несиметрично збуреного оператора, що узагальнює випадок симетрично збуреного оператора. У роботі дуальна пара сингулярно несиметрично рангу один збуреного оператора виникає і у спряженого оператора, відповідно, із двома іншими власними векторами, так само, як і неспряженого збуреного оператора.

Сингулярно несиметрично рангу один збурені самоспряжені оператори подані двома класами: ширший — такі, що вимагають додаткової параметризації і підклас — не вимагають додаткової параметризації. Розподіл на класи є аналогом розгляду сингулярно симетрично збурених операторів класу і . Всі результати роботи сформульовано окремо для кожного класу операторів.

Усі основні положення роботи проілюстровані на численних прикладах, в яких роль незбуреного оператора відіграє оператор множення на незалежну змінну у відповідному просторі. За вектори, які утворюють збурення, вибрані відповідні степені поліномів.

Основні результати роботи застосовані до моделі: оператор Лапласа, несиметрично збурений -функціями або, інакше кажучи, оператор Лапласа із нелокальною взаємодією. Розглянуті випадки оператора Лапласа в та . Знайдені відповідні резольвенти збурених операторів. Обчислений точковий спектр несиметрично збуреного оператора Лапласа.

*Ключові слова*: сингулярне збурення, спектр, власні значення, оператор Лапласа.

*Список публікацій здобувача*

1.  *Вдовенко Т. І.* Строго сингулярні збурення рангу один несиметричним потенціалом / Т. І. Вдовенко, М.Є.Дудкін // Наукові Вісті НТУУ “КПІ”. – 2014. – № 4. – С. 13-17 (входить до міжнародних наукометричних баз WorldCat, OpenAIRE, РІНЦ, EBSCO, Google Scholar). Співавтору належить постановка задачі і загальне керівництво дослідженням.

2.  *Вдовенко Т. І.* Сингулярні рангу один несиметричні збурення самоспряженого оператора. “Спектральна теорія операторів та наборів операторів” / Т. І. Вдовенко, М. Є. Дудкін // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2015. – Т. 12, № 1. – С. 57-73 (входить до міжнародної наукометричної бази MathSciNet, Google Scholar). Співавтору належить постановка задачі і загальне керівництво дослідженням.

3.  *Dudkin M. E.* On nonsymmetric rank one singular perturbations of selfadjoint operators / M. E. Dudkin, T. I. Vdovenko // Methods Funct. Anal. Topology. – 2016. – Vol. 22, № 2.– С. 137-151. (входить до міжнародних наукометричних баз MathSciNet, Google Scholar). Співавтору належить постановка задачі і загальне керівництво дослідженням.

4.  *Dudkin M. E.* Dual pair of eigenvalues in rank one singular perturbations/ M. E. Dudkin, T. I. Vdovenko // Matematychni Studii. – 2017. – Vol. 48, № 2.– С. 156-164 (входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Index Copernicus, Zentralblatt MATH, MathSciNet, Google Scholar). Співавтору належить постановка задачі і загальне керівництво дослідженням.

5.  *Dudkin M. E.* On extensions of linear functionals with applications to non-symmetrically singular perturbations / M. E. Dudkin, T. I. Vdovenko // Methods Funct. Anal. Topology. – 2018. – Vol. 24, № 3.– С. 193-206 (входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Google Scholar). Співавтору належить постановка задачі і загальне керівництво дослідженням.

6.  *Dudkin M. E.* “Spectral problem for a rank one singular perturbation by nonsymmetric potential” / Dudkin M. E., Vdovenko T. I. // Матеріали конференції “П’ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука” (Київ, 15–17, травень, 2014). – Київ: Нац. техн. ун-т України “КПІ”, 2014. – C. 14. Особисті внески співавтора є рівноцінними.

7.  *Вдовенко Т. І.* Сингулярні збурення рангу один несиметричним потенціалом / Т. І. Вдовенко // Матеріали конференції “П’ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука” (Київ, 15–17, травень, 2014). – Київ: Нац. техн. ун-т України “КПІ”, 2014. – C. 56.

8.  *Вдовенко Т. І.* Дуальна пара власних значень сингулярних несиметричних збурень / Т. І. Вдовенко // Тези доповідей. “Міжнародна конференція молодих математиків” (Київ, 3–6, червень, 2015). – Київ: Ін-т математики НАН України, 2015. – C. 63.

9.  *Вдовенко Т. І.* Модель сингулярного збурення із запізненням (упередженням) / Т. І. Вдовенко // Тези доповідей. Сьома міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації” (Кам’янець-Подільський, 21–22, квітень, 2016). – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2016. – C. 28.

# ANNOTATION

*Vdovenko T.I.* “Singularly nonsymmetrically perturbed selfadjoint operators”. – Manuscript.

Thesis of the dissertation for obtaining of the degree of candidate of sciences in physics and mathematics, speciality 01.01.01 – mathematical analysis. National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, 2019.

During the last half century the theory of singularly perturbed operators – selfadjoint operators, in particular, with perturbations on the sets of zero Lebegue measure and their abstract counterparts has been sufficiently developed and studied. Laplace operator perturbed by -function is a typical example of this theory.

The construction and research of perturbed selfadjoint operators in abstract case are presented in the works, of many authors: S. Albeverio, Yu. Arlinskii, J. Brasche, V.O. Derkach, M.E. Dudkin, W. Karwowski, V.D. Koshmanenko, P. Kurasov, S.O. Kuzhel, M.M. Malamud, H. Neidhart, L.P. Nizhnik, A. Posilicano, B. Simon, S. Hassi, E.R. Tsekanovskii, Y. Shondin and others. The total number of investigations devoted to singularly perturbed operators which have several thousand small and large articles. A large number of papers are devoted to perturbation of selfadjoint differential operators by -function potentials supported on different sets. The main method of investigation of such problems is the theory of selfadjoint extensions of densely defined symmetric operators.

The consideration of models, in which singularly perturbed selfadjoint operator, but not symmetrically, leds to relevant singular nonsymmetric perturbations. Among these models there are models of physical control theory — systems with delay (anticipation), models with nonlocal interactions, perturbations by nonsymmetric potentials, which are in the works of S.O. Kuzhel, L.P. Nizhnik, V.O. Zolotarev [27, 41, 62, 90-92, 100].

The transferring and, in some sence, the generalizing of results of the singularly perturbed selfadjoint operators to the case of nonsymmetric one, is a dificalt problem, starting from the definition of the corresponding operator and the investigation new not selfadjoint operators. The difficulty is in the absens of any analogs of the theory of selfadjoint extentions of densely defined symmetric operator for the case of nonsymmetric extentions.

All questions about characteristics of symmetrical perturbations even at rank one arise for nonsymmetric singular perturbations. The answers to these questions for symmetric perturbations are large known. Close by related to such research there are works with singular perturbations of normal operators M.E. Dudkin, L.P. Nizhnik [17, 18, 52-55].

The thesis is devoted to singularly perturbed selfadjoint operators with nonsymmetric rank one perturbation that is a skew projection. Such perturbations are a generalization of the well-studied class of selfadjoint perturbations, in a particular case, it is reduced to them. Such nonsymmetric perturbations in functional spaces corresponds to the problems of non-local interactions. The technique of such perturbations correspond to models with delay (or anticipation).

The description of nonsymmetrical rank one perturbations operator by generalized sum in the scale of spaces constructed on unperturbed operator is given in this work. The perturbed operator is described here by the resolvent M. Krein type formula , i.e., that is formulated and proven for selfadjoint extensions of symmetric densely defined operator. In the case, which has been M. Krein type formula represented in this work, combines resolvents of the selfadjoint not perturbed operators and the resolvent some nonsymmetric operator. As defect vectors in the M. Krein formula we have two defect vectors of symmetric operators that appear as a restriction on the dense subset not perturbed and perturbed operator and not perturbed adjoint operator and operator that is adjoint to perturbed one.

Using the explicit form resolvents of singularly nonsymmetrically rank one perturbed operator there is studied the point spectrum that appears by perturbation. This spectrum in compare with the classical selfadjoint case, can be a complex number with the corresponding eigenvector and the complex conjugate number by adjoint operator but with another eigenvector.

Also there is solved the inverse problem, which is that by given complex numbers and two vectors there is constructed singularly perturbed operator and its adjoint with given correspondence eigenvectors and eigenvalues. For this it is formulated and proved M. Krein type formula in the opposite direction, namely there are formulated necessary and sufficient conditions for the sum of the resolvent of not perturbed selfadjoint operator and skew projector (with certain properties) so that the obtained operator is the resolvent of nonsymmetrically rank one perturbed operator.

By the investigation of the point spectrum there is founded the analog of the dual pair of eigenvalues for nonsymmetrically perturbed operator that generalizes the case of symmetrically perturbed operator. In this work dual pair of singularly nonsymmetrically rank one perturbed operator appears by the adjoint operator, respectively, with two other eigenvectors, in compare with the adjoint perturbed operator.

Singularly nonsymmetrically rank one perturbations of selfadjoint operators are represented by two classes: wider one — a parameterically perturbed and a smollest class — uniquely perturbed. Division into classes is analog of a consideration of symmetrically singularly perturbed operators of class and . All results are formulated separately for each class of operators.

All results of this work are illustrated by numerous examples in which the role of not perturbed operator playes the operator of multiplication by the independent variable in the appropriate space. As vectors that form the perturbation are chosen the appropriate degree of polynomials.

Also, the main results of the work are used for the model: the Laplace operator nonsymmetrically perturbed by -functions, namely, Laplace operator with nonlocal interactions. The cases Laplace operator in and are considered. Corresponding resolvent of perturbed operators are found. The point spectrum of nonsymmetrically perturbed Laplace operator is calculated.

*Key words*: singular perturbation, spectrum, eigenvalues, Laplace operator.

*List of publications of the applicant*

1.  *Vdovenko Т. І.* Strong Rank One Singular Perturbation by Nonsymmetric Potential / Т. І. Vdovenko, M. E. Dudkin // Naukovi Visti NTUU “KPI”. – 2014. – № 4. – P. 13-17 (included in the international science and technology bases WorldCat, OpenAIRE, РІНЦ, EBSCO, Google Scholar). The co-author solved the task and general direction of research.

2.  *Vdovenko Т. І.* Singular Rank One Nonsymmetric Perturbations of a Selfadjoint Operator. “Spectral theory of operators and sets of operators” / Т. І. Vdovenko, M. E. Dudkin // Proceeding of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2015. – Vol. 12, № 1. – P. 57-73 (included in the international science and technology bases MathSciNet, Google Scholar). The co-author solved the task and general direction of research.

3.  *Dudkin M. E.* On Nonsymmetric Rank One Singular Perturbations of Selfadjoint Operators / M. E. Dudkin, T. I. Vdovenko // Methods Funct. Anal. Topology. – 2016. – Vol. 22, № 2.– P. 137-151 (included in the international science and technology bases MathSciNet, Google Scholar). The co-author solved the task and general direction of research.

4.  *Dudkin M. E.* Dual pair of eigenvalues in rank one singular perturbations/ M. E. Dudkin, T. I. Vdovenko // Matematychni Studii. – 2017. – Vol. 48, № 2.– P. 156-164 (included in the international science and technology bases Scopus, Index Copernicus, Google Scholar). The co-author solved the task and general direction of research.

5.  *Dudkin M. E.* On extensions of linear functionals with applications to non-symmetrically singular perturbations / M. E. Dudkin, T. I. Vdovenko // Methods Funct. Anal. Topology. – 2018. – Vol. 24, № 3.– P. 193-206 (included in the international science and technology bases Scopus, Web of Science, MathSciNet, Google Scholar). The co-author solved the task and general direction of research.

6.  *Dudkin M. E.* “Spectral Problem for Rank One Singular Perturbation by Nonsymmetric Potential” / Dudkin M. E., Vdovenko T. I. // Conference materials. “XV International Scientific Mykhailo Kravchuk conference” (Kyiv, 15–17, May, 2014). – Technical University of Ukraine “KPI”, 2014. – P. 14. Contributions from a co-author are equal.

7.  *Vdovenko Т. І.* Singular Perturbations by Nonsymmetric Potential / Т. І. Vdovenko // Conference materials. “XV International Scientific Mykhailo kravchuk conference” (Kyiv, 15–17, May, 2014). – Kyiv: National Technical University of Ukraine “KPI”, 2014. – P. 56.

8.  *Vdovenko Т. І.* Dual Pair of Eigenvalues in Singular Nonsymmetric Perturbations / Т. І. Vdovenko // Abstracts. “International Conference of Young of Mathematicians” (Kyiv, 3–6, June, 2015). – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015. – P. 63.

9.  *Vdovenko Т. І.* Model of Singular Perturbation with Delay (Anticipation) / Т. І. Vdovenko // Abstracts. Seventh International Conference “Modern Problems of mathematical modeling, forecasting and optimization” (Kamyanets-Podilsky, 21–22, April, 2016). – Kamyanets-Podilsky: Kamyanets-Podilsky Ivan Ohienko National

**ЗМІСТ**

**ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ 16**

**ВСТУП 17**

**1 Сингулярно несиметрично рангу один збурені оператори класу**  **25**

1.1 Означення і опис сингулярно несиметрично рангу один

збуреного класу оператора…………………………………..25

1.1.1 Приклад з оператором Шредінгера із нелокальною

взаємодією та оператором множення на незалежну

змінну………………………………………………………..29

1.1.2 Резольвента сингулярно несиметрично рангу один

збуреного оператора класу ………………………….33

1.1.3 Оператор, спряжений до сингулярно несиметрично

рангу один збуреного класу оператора…………….41

1.2 Властивості точкового спектра, який виникає при сингулярно

несиметрично рангу один збуренні класу …………………...48

1.2.1 Пряма спектральна задача…………………………………48

1.2.2 Обернена спектральна задача……………………………..58

1.2.3 Сингулярно несиметрично рангу один збурені оператори

класу із більше ніж одним новим власним

значенням…………………………………………………..67

1.3 Задача двох тіл для сингулярно несиметрично рангу один

збурених операторів класу …………………………………...78

**2 Сингулярно несиметрично рангу один збурені оператори**

**класу 83**

2.1 Означення і опис сингулярно несиметрично рангу один збуреного

класу оператора………………………………………...…….83

2.1.1 Резольвента сингулярно несиметрично рангу один

збуреного оператора класу …………………………..86

2.1.2 Оператор, спряжений до сингулярно несиметрично рангу

один збуреного класу оператора……………………91

2.2 Властивості точкового спектра, який виникає при сингулярно

несиметрично рангу один збуренні класу …………………...95

2.2.1 Пряма спектральна задача…………………………………95

2.2.2 Обернена спектральна задача для сингулярно

несиметрично збуреного оператора класу …………97

2.2.3 Сингулярно несиметрично рангу один збурені

оператори класу із більше ніж одним новим

власним значенням………………………………………103

2.3 Задача двох тіл для сингулярно несиметрично рангу один

збурених операторів класу …………………………………109

**3 Сингулярно несиметрично рангу один збурені оператори**

**класу , які допускають опис методом класу 113**

3.1 Порівняння областей визначення несиметрично збурених

і класу операторів…………………………………………..113

3.2 Продовження скалярного добутку методом носія вектора……114

3.3 Продовження лінійного функціонала у сенсі гільбертових

просторів………………………………………………………….115

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 121**

# ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

-шкала — шкала гільбертових просторів, асоційована з самоспряженим оператором 25

— область визначення оператора 25

— область значення оператора 25

— сепарабельний гільбертів простір 25

— початковий простір -шкали 25

, — простори -шкали 25

, — дуальні (негативні) простори -шкали 25

— множина регулярних точок оператора 25

— спектр оператора 25

— неперервний спектр оператора 25

— точковий спектр оператора 25

— норма 25

— скалярний добуток 25

— оператор, продовжений в -шкалі просторів 26

— множина операторів, сингулярно несиметрично рангу один однозначно збурених відносно оператора 26

— сингулярно несиметрично рангу один збурений оператор 28

— соболівські простори 29, 44

— простір функцій, інтегровних з квадратом 29

— сингулярно несиметрично збурений оператор 32

— резольвента оператора 35

— резольвента збуреного оператора 35

— щільно визначене симетричне звуження операторів і 44

— щільно визначене симетричне звуження операторів і 44

— індекси дефекту симетричного оператора 44

— розмірність підпростору 44

— ядро 44

— сепарабельний гільбертів простір, розкладений у тензорний добуток двох гільбертових просторів 109

# ВСТУП

**Історичний огляд**

Теорія сингулярних збурень отримала підвищений інтерес та багато уваги з боку як фізиків, так і математиків. Дослідження збурень скінченного рангу є, наприклад, в роботах T.Като і С.T.Kурода, де такі збурення вивчались з метою використання в задачі теорії розсіяння. У той самий час розглядалась задача збурення диференціальних операторів в роботах Н.Ароншайна і В.Ф.Донохью [44-47]. Зокрема, зв’язок між теорією розширень симетричних операторів і збуреннями скінченного рангу детально викладено В.Ф.Донохью. Розгляд довільних збурень скінченного рангу можна знайти в добре відомій книзі T.Kато [19] і в оглядовій статті [69]. Різні моделі, які містять збурення скінченного рангу, розглядалися багатьма математиками.

Найважливіший крок був зроблений Ф.А.Березіним і Л.Д.Фаддєєвим, які досліджували оператор Шредінгера, збурений -потенціалом в як приклад збурення рангу один [3]. У [3] наведено зв’язок між такими збуреннями рангу один і теорією розширення щільно визначених симетричних операторів. Відзначимо роботи Б.Саймона та T.Вулфа [99] і Ф. Гестезі та Б.Саймона [61], які вперше вивчали і сформулювали збурення класу самоспряжених операторів. Історично перша спроба визначити збурення класу в абстрактній формі належить А. Кисельову і Б. Саймону [70], які фактично узагальнили підхід, запропонований Р.А. Березіним і Л.Д. Фадєєвим для лапласіана в на випадок абстрактного оператора [3]. Представлення -класу скінченного рангу абстрактними квадратичними формами для обмежених знизу операторів було запропоновано В.Д.Кошманенком в [20, 22, 73, 75, 76]. В операторній формі сингулярні збурення скінченного рангу описано в роботі С.Альбеверіо, В.Карвовскі і В.Кошманенка [32]. Подальші дослідження С.Альбеверіо і В.Кошманенка істотно використовують резольвентну формулу типу М. Крейна, про що йдеться в роботах [21, 22, 33, 34, 73, 76].

Збурення -класу рангу один без перенормування константи зв’язку були вперше означені С. Альбеверіо і П. Курасовим для напівобмеженого оператора в [35], відповідно, не обов’язково напівобмеженого самоспряженого оператора — в [36]. Також у сумісних роботах цих авторів були означені наближення збуреного оператора (без перенормування константи зв’язку). Ця робота базується на раніше досліджених точкових взаємодіях для симетричного оператора, заданого другою похідною в П. Курасовим [84]. Стаття Дж. Бома і П. Курасова присвячена вивченню точкових взаємодій для оператора заданого -ю похідною в [85]. Довільні збурення -класу скінченного рангу для напівобмеженого оператора вивчалися також в [37]. С. Хассі і Х. де Сну вивчали сингулярні збурення рангу один з використанням методів теорії аналітичних функцій.

Разом із питаннями означення збуреного оператора досліджувався і спектр збуреного оператора. Абсолютно неперервна частина спектра при збуреннях скінченного рангу і “trace class” були досліджені Т. Като, С.T. Курода і М.Бірманом.

Якщо різниця резольвент двох операторів належить до “trace class”, то доведено, що абсолютно неперервні частини спектрів двох операторів збігаються. Це можна показати шляхом доведення існування та побудови хвильових операторів. Оператор розсіяння для двох таких самоспряжених операторів було наведено T.Kaтo [69] і M.Г.Kрейном, M.Бірманом, С.Б.Ентіном(Entina) і Д.Яфаєвим(Yafaev).

Зміна інших частин дискретного і неперервного спектрів при збуреннях скінченного і нескінченного рангу вивчалися в багатьох роботах.

Сингулярні збурення скінченного рангу можуть бути означені за допомогою форм. Якщо збурення -класу, то збурення зображується обмеженою формою і можна використовувати КЛМН-теорему [2] для означення збуреного оператора. Такий підхід особливо вдалий для напівобмеженого оператора, тобто самоспряжений оператор однозначно визначається своєю квадратичною формою. Цей підхід був розроблений С.Альбеверіо, В. Карвовським і В.Кошманенком у ряді робіт [33, 34, 65-68, 73-75, 78, 80]. Деякі з цих результатів зібрані в [20]. Різні сингулярні форми збурення лапласіана в розглянули І. Браше, В. Карвовскі, В.Кошманенком [5, 21, 49, 64, 79]. Також можна означити сингулярні збурення самосопряженних операторів, використовуючи форми Діріхле. Цей підхід був уперше викладений С.Альбеверіо, Р.Хьоег-Крон і Л.Стрейт для означення сингулярних збурень лапласіана в [31]. Взаємозв’язок між формами Шредінгера і Діріхле були обговорені С.Альбеверіо, І. Браше, Ф.Гестезі, Р.Хьоег-Крон, В. Карвовським.

Одним із цікавих прикладів сингулярних збурень рангу один є збурення крайової умови для звичайного симетричного диференціального оператора другого порядку. Це одна з перших математичних задач, в якій теорія розширень була використана повною мірою.

Як уже зазначалося, перше математично строге дослідження сингулярних збурень диференціального оператора було проведено Ф.A.Березіним і Л.Д.Фадєєвим. Ці автори показали, що такі збурення можуть бути описані за допомогою теорії розширень симетричних щільно визначених операторів. Їх роботи мають надзвичайно важливе значення, оскільки вони встановили зв’язок між симетричними диференціальними операторами з точковими взаємодіями і формулою М. Крейна, яка описує резольвенти всіх самоспряжених розширень даного симетричного оператора. Для звичайного симетричного диференціального оператора на відрізку потрібні крайові умови у граничних точках. Ці умови з’явилися в найперших роботах, що стосуються звичайних диференціальних операторів. Для довільних диференціальних операторів в деякій області аналогічні крайові умови можуть бути на межі області. Зокрема, точкові взаємодії для симетричного диференціального оператора описуються додатковими крайовими умовами в точках, розташованих усередині області, якщо такі передбачаються.

Абстрактна теорія самоспряжених розширень симетричного оператора Дж. фон Неймана є основною для всіх стандартних робіт з теорії операторів [51]. Зокрема, було показано, що даний симетричний оператор може бути розширений до самоспряженого оператора (без виходу із простору) тоді і тільки тоді, коли індекси дефекту вихідного симетричного оператора одинакові. Далі, якщо індекси дефекту є скінченними і одинаковими, то всі самоспряжені розширення можна описати в явному вигляді формулою М. Крейна для резольвенти. Раніше теорія розширень була розроблена Х.Вейлем лише для окремого випадку симетричного диференціального оператора другого порядку на півосі. У 1943 М. Крейн і M.A.Неймарк (M.A.Neumark) визначили незалежно один від одного множину всіх спектральних функцій замкненого симетричного оператора із індексами дефекту (1,1) [23, 24, 26, 82]. Можна вважати, що в цих роботах вперше з’явилася формула М. Крейна для зв’язку резольвент двох самоспряжених розширень одного симетричного оператора. Пізніше вона була узагальнена для випадку довільних скінченних та нескінченних індексів дефекту M.Г.Kрейном [25, 83] і, згодом, С.Н.Саакяаном(Saakjan) [93].

Точкові взаємодії являють собою частковий випадок сингулярних збурень, де вихідний оператор є диференціальним оператором і збурення має носій міри нуль. Ці оператори виникали в теоретичній фізиці починаючи з 1930-х років, щоб отримати точно розв’язні моделі різних фізичних явищ. Моделі з точковими взаємодіями називають розв’язними, якщо для них можливо явно означити резольвенту збуреного оператора в термінах інтенсивності взаємодії і координат джерел. А отже, спектр, власні функції, резонанси та характеристики розсіяння можуть бути також явно обчислені.

У першій половині минулого століття Р.Кроніг і В.Г.Пенні використали цей підхід для моделі руху електрона в твердому тілі. Кілька років потому (в 1935) аналогічну модель для руху елементарних частинок запропонував Х.Бозе (Bethe), Р.Пеєрс (Peierls) і Л.Х.Tомас. У той же час Е.Фермі запропонував використання псевдопотенціалу для опису розсіяння нейтронів в речовинах, що містять водень. Г.Брейт дав опис псевдопотенціалу Фермі за допомогою крайових умов. Ці дослідження зарекомендували метод точкових взаємодій або потенціалів нульового радіуса як корисний інструмент в ядерній і атомній фізиці. Взаємодія у всіх цих моделях описується не потенціалами як у класичній теорії збурення, а деякими крайовими умовами на дискретній множині точок.

Як уже зазначалося, точкові взаємодії в одновимірному випадку природним чином виникають як крайові умови для функцій з області визначення звичайного диференціального оператора. Такі збурення використав Г.Вейль ще в 1910 році. Були розроблені два підходи для вивчення таких взаємодій. Перший заснований на теорії розширень симетричних операторів. Розглядається оператор другої похідної , . Тоді всі точкові взаємодії можуть бути отримані за рахунок звуження самоспряженого оператора до множини функцій з компактним носієм, відокремленим від множини точок, які є носіями взаємодії. Якщо число точок скінченне, то відповідний симетричний оператор має скінченні індекси дефекту і всі його самоспряжені розширення можна обчислити використовуючи, наприклад, формулу М. Крейна. Кожна точка може розглядатися окремо. Це свідчить, що всі такі оператори можуть бути означені за допомогою певних крайових умов, що зв’язують значення функцій і їх перші похідні ліворуч і праворуч від точок, що підтримують взаємодію [1, 29, 60, 94, 95, 97].

Згідно з другим підходом можна навести збурений оператор як суму вихідного оператора і деякого сингулярно збуреного оператора . Цей метод можна назвати методом сингулярних збурень. Якщо ядро сингулярного оператора містить усі функції з множини , тоді кожен самоспряжений оператор, відповідний формальному лінійному оператору збігається з одним із самоспряжених розширень оператора . Перше сімейство сингулярно збурених операторів вивчалося для одновимірного Лапласіана, що збурюється -потенціалом. Якщо це сімейство сингулярних збурень є, взагалі, сімейство -класу, то відповідна множині точкова взаємодія, визначається однозначно. Складнішим є сімейство точкових взаємодій виду , яке визначається за допомогою крайових умов. Взаємозв’язок між множиною точкових взаємодій і множиною взаємодій, що визначаються -потенціалом, викладено в літературі (див. [30, 96] і посилання в ній). Ця проблема була вирішена незалежно за допомогою додаткових припущень про адитивні властивості взаємодії. Насправді, ця взаємодія не може бути визначена без таких припущень, оскільки, взаємодія в даному випадку не з класу . Різні припущення можуть привести до різних одновимірних сімейств точкових взаємодій, які відповідають формальному виразу . Різні автори намагалися отримати все чотирьохпараметричне сімейство точкових взаємодій за допомогою наближення. Чотирьохпараметричне сімейство сингулярних взаємодій, що описує загальну множину точкових взаємодій було отримано П.Kурасовим. Усі точкові взаємодії були класифіковані з використанням сингулярних операторів. Такий підхід узагальнено для оператора -ї похідної Дж. Боманом і П.Курасовим [85]. Спектральні властивості одновимірних точкових взаємодій досліджували Д. Бушманн, А.Н.Кочубей, В.Михайлець, Л.П. Нижник, С. Шубін, Г. Штольц, і І.Вайдман [27, 50, 71, 72, 86-89, 98]. Симетричні одновимірні точкові взаємодії вивчали С.Альбеверіо, П. Курасов, Л.Дабровський і І. Боман.

Двовимірні точкові взаємодії найбільш докладно описані авторами в [1]. Ці взаємодії вперше означили А. Гроссман, Р. Хьоег-Крон. Фізичне застосування такої взаємодії розглянуто П. Екснером і П. Шеба. Двовимірні точкові взаємодії грають важливу роль у вивченні операторів, які моделюють магнітні поля і еффект Аарона-Бома. Нелокальні точкові взаємодії в двовимірному випадку досліджувалися в роботах Л.Дабровського. Поверхневі взаємодії в двовимірному випадку використовувалися для моделювання тонких плівок.

Наведений історичний огляд суттєво спирається на матеріали [38-43].

**Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Робота виконана у відповідності до планів, передбачених у Національному технічному університеті України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського” та в рамках теми “Дослідження якісних та спектральних характеристик динамічних систем”, номер держ. реєстрації 0113U004540.

**Мета та задачі дослідження**.

Основною метою роботи є перенесення та розвиток відомих результатів з теорії сингулярних збурень самоспряжених операторів на випадок сингулярних несиметричних збурень (переважно рангу один); опис та дослідження властивостей таких операторів, зокрема спектральних. Завданням є:

дати означення та описати мовою резольвент сингулярно несиметрично збурені самоспряжені оператори;

дослідити спектральні властивості сингулярно несиметрично збурених самоспряжених операторів;

навести конструкцію побудови сингулярно несиметрично збуреного оператора за заданими спектральними характеристиками;

описати область визначення оператора Лапласа сингулярно несиметрично збуреного -потенціалами.

*Об’єкт дослідження*. Cингулярно несиметрично збурені самоспряжені оператори.

*Предмет дослідження*. Самоспряжені оператори, сингулярно збурені оператори, точковий спектр сингулярно збурених самоспряжених операторів та оператора Лапласа, збуреного точковими несиметричними потенціалами.

*Методи дослідження*. Основними є методи функціонального аналізу, зокрема теорії лінійних операторів у гільбертовому просторі та в оснащених просторах. Істотно використані методи теорії сингулярно збурених самоспряжених операторів.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Основними науковими результатами, які визначають наукову новизну роботи, є такі.

1) Для сингулярно несиметрично рангу один збуреного оператора надано означення та формулу його резольвента.

2) Знайдено умови появи нової точки точкового спектра сингулярно несиметрично рангу один збуреного оператора. Наведено метод побудови сингулярно несиметрично рангу один збуреного оператора із заданими власними векторами і власними значеннями.

3) Для сингулярно несиметрично рангу один збуреного оператора знайдено умови появи дуальної пари точок точкового спектра, серед яких одна може належати неперервному спектру незбуреного оператора.

4) Описана область визначення оператора Лапласа, із несиметричним збуренням заданим -функціями, за допомогою крайових умов.

**Практичне значення одержаних результатів**. Результати дисертації носять теоретичний характер. Проте, результати можна використовувати в задачах керування із запізненнями (упередженнями). Дослідження близьких питань ведуться в Інституті математики НАН України, Київському національному університет ім. Тараса Шевченка, Харківському національному університеті ім. В.Н.Каразіна.

**Особистий внесок здобувача**. Викладені в дисертації основні результати отримані автором самостійно. На захист виносяться лише ті результати із виконаних у співавторстві робіт, які отримані автором особисто. У спільних роботах М.Є. Дудкіну належить постановка задачі, а автору – розв’язання.

**Апробація результатів дисертації**.

XV Міжнародна наукова конференція ім. акад. М.Кравчука (Київ, 2014);

Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 2015);

Сьома міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації” (Кам’янець-Подільський, 2016);

Семінар кафедри диференціальних рівнянь фізико-математичного факультету НТУУ “КПІ ім. І.Сікорського” (керівник: проф. М.Є. Дудкін, 2016, 2018);

Семінар відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівники: проф. О.Л.Ребенко, проф. В.Д. Кошманенко, 2013);

Київський семінар з функціонального аналізу Інституту математики НАН України (керівники: академік НАН України Ю.М. Березанський, академік НАН України Ю.С. Самойленко, член-кореспондент НАН України М.Л. Горбачук 2016).

**Публікації.** За результатами дисертаційної роботи опубліковано 9 наукових праць, у тому числі 5 статей, серед них 5 у наукових виданнях, що включені до переліку фахових видань, затверджених МОН України та до міжнародних наукометричних баз (з них 2 статті у наукових виданнях України, які включені до Scopus та Web of Science), 4 тези доповідей у збірниках матеріалів конференцій.

**Структура та обсяг роботи**. Дисертація складається з анотацій, змісту, списку умовних позначень, вступу і 3-х розділів та списку використаних джерел, що містить 100 найменувань. Основний і повний обсяг дисертації складає 130 сторінок.

# РОЗДІЛ 1

# Сингулярно несиметрично рангу один збурені оператори класу

У розділі вводиться означення сингулярно несиметрично рангу один збуреного оператора класу . Початковим — незбуреним оператором є довільний напівобмежений самоспряжений оператор. Збурений оператор не є самоспряженим, але він допускає опис в термінах резольвенти.

## 1.1. Означення і опис сингулярно несиметрично рангу один збуреного класу оператора

Нехай — сепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком і нормою . Розглянемо напівобмежений самоспряжений оператор із областю визначення в просторі . Позначимо через , , підмножини (комплексної площини ), які є спектром, точковим спектром і регулярною множиною, відповідного оператора. Надалі покладаємо, що оператор має простий спектр. Не порушуючи загальності, вважатимемо оператор додатним і більш того: .

Оператор асоційований із -шкалою гільбертових просторів [2]. Розглядається тільки частина -шкали, а саме ланцюжок:

(1.1)

де — позитивний простір із нормою , , — поповнення за нормою , ; – простір із нормою , і — поповнення за нормою , .

Нехай позначає звичайний дуальний скалярний добуток для просторів і . Скалярний добуток у просторах і позначений через і відповідно.

Розширення оператора за неперервністю на простір розглядаємо або як обмежений оператор, що діє з в , або як необмежений оператор в із областю визначення . Позначимо таке розширення через .

У шкалі (1.1) розглядається лінійний оператор із областю визначення та областю значень . Нехай він має вигляд , . Оскільки оператор є обмеженим, якщо діє з в , то є також обмеженим лінійним оператором з в . Для операторів в шкалі є поняття спряженого оператора , який також діє з в [48].

Для формального виразу надамо сенс оператора в [63]. Візьмемо та звузимо його на і позначимо :

(1.2)

Надалі будемо інколи використовувати також позначення оператора замість , якщо це не буде вести до суперечностей.

Оскільки процедура звуження не завжди є зручною у використанні, то надамо таке означення збуреного оператора.

**Означення 1.1.1.** *Нехай — додатний самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі . Для , , покладемо , .*

*Оператор називається сингулярно несиметрично рангу один збуреним класу відносно оператора , якщо*

(1.3)

*у випадку і*

(1.4)

*() у випадку , (і позначаємо ).*

*Дія задається правилом .*

Оператор будемо називати (початковим) незбуреним, а — збуренням (класу ). Отже, логічно назвати збуреним оператором.

Введене означення узагальнює випадки нелокальної взаємодії

[90-92], описаної із самоспряженими операторами у випадку, коли збурений оператор не є самоспряженим.

**Твердження 1.1.1.** *Дія сингулярно несиметрично збуреного оператора визначеного в (1.2), на вектор з області , що описана в (1.3) або (1.4), задовольняє рівність:*

(1.5)

*Доведення.* Нехай з (1.2). Подіємо оператором на вектор з (1.3):

В останніх перетвореннях використано такі очевидні рівності:

Розглянемо випадок (1.4). Тоді

тому що у випадку (1.4)

□

**Зауваження 1.1.2.** *Два випадки означення в (1.3) і (1.4) обумовлені тим, що для випадку (1.3) і для випадку (1.4).*

**Зауваження 1.1.3.** *Якщо в означенні 1.1.1, то отримуємо означення сингулярно збуреного рангу один оператора, який є самоспряженим після збурення.*

**Зауваження 1.1.4.** *В означенні 1.1.1 не є обов’язковим сепарабельність простору і простота спектра оператора . Також означення просто модифікується для не позитивного і навіть не напівобмеженого оператора. При відповідній модифікації норм в оснащенні (1.1) можна навести означення збуреного оператора без умови напівобмеженості оператора .*

*В такому разі слід покласти для (1.1): позитивний простір із нормою , і — поповнення за нормою , ; — простір із нормою , і — поповнення за нормою , . У такому разі доведення ряду тверджень стають занадто громіздкими.*

*Зокрема, надалі буде зручно розглядати і оператор у вигляді*

*, , що нічим не відрізняється від попереднього розгляду, оскільки завжди можна навести:*

*але такий вигляд є зручним при застосуванні. Отже, зокрема,*

Тоді означення 1.1.1 має вигляд.

**Означення 1.1.2.** *Нехай — самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі . Для , , покладемо ,*

*Оператор називається сингулярно несиметрично рангу один збуреним класу відносно оператора , якщо*

(1.6)

*у випадку при фіксованому і*

(1.7)

*() у випадку , (і також позначаємо ).*

*Дія задається правилом*

**Твердження 1.1.5.** *Дія збуреного оператора, означеного в (1.2) на векторах, означених в означенні 1.1.2, задовольняє рівність*

*Доведення* аналогічне як доведення у твердження 1.1. □

**Зауваження 1.1.6.** *Аналогічне до зауваження 1.2. В означенні 1.1.2 два випадки для області визначення в (1.6) і (1.7) обумовлені тим, що для випадку (1.6) і для випадку (1.7).*

**Зауваження 1.1.7.** *Якщо покласти та вважати оператор додатним, і як наслідок покласти , то означення 1.1.2 стає означенням 1.1, тобто з означення 1.2 випливає означення 1.1.1, оскільки . Далі в роботі показано, що ці означення є еквівалентними, оскільки , а також далі буде означений спряжений оператор до .*

### 1.1.1. Приклад з оператором Шредінгера із нелокальною взаємодією та оператором множення на незалежну змінну

**Приклад з оператором Шредінгера із нелокальною взаємодією** Розглянемо оператор у просторі з областю визначення . Оператор є продовженням на у сенсі узагальнених функцій і діє з у .

**Твердження 1.1.8.** *Оператор*

(1.8)

*де і — -функції Дірака, зосереджені у точках , , має згідно з означенням 1.1.2 таку область визначення:*

(1.9)

*і діє за правилом*

(1.10)

*Доведення.* Спочатку розглянемо випадок

З означення 1.2 вектор згідно з виразом (1.6) має вигляд

де та , взяті з [1]. Зокрема, в сенсі узагальнених функцій

та

Перша рівність в (1.9), тобто виконується:

Доведемо другу рівність в (1.9). Оскільки

де — функція Хевісайда зі стрибком в точці , то

(1.11)

де враховано, що , оскільки .

Ліва частина другої рівності в (1.9) має вигляд

(1.12)

Порівнюючи кінці виразів (1.11) та (1.12), отримуємо

Так розглянутий випадок

Розглянемо випадок (1.7), тобто

(1.13)

У такому випадку

Для маємо .

Для також маємо

Також для маємо та , тобто виконується друга рівність в (1.9).

Запишемо другу рівність в (1.9) для Ліва частина має вигляд

(1.14)

Права частина другої рівності (1.9) має вигляд

(1.15)

Дійсно, (1.14) дорівнює (1.15), якщо врахувати (1.13). Отже, (1.9) для векторів (1.7) також виконується.

Дія (1.10) випливає з твердження 1.1.1. □

**Приклад з оператором множення на незалежну змінну**

Нехай , а — оператор множення на незалежну змінну:

У такому разі , а .

Виберемо і . Очевидно, що , але , тому що але Отже, можна розглядати формальний вираз

Очевидно, згідно з означенням 1.1.1, що

(1.16)

де обчислено

Неважко перевірити, що . Дійсно,

### 1.1.2. Резольвента сингулярно несиметрично рангу один збуреного оператора класу

Розглянемо оператор означенний в 1.1 для . Перепозначимо його і припустимо, що в нього існує обернений (обмежений оператор, визначений всюди в ), тобто , що відповідає випадку (1.3).

**Твердження 1.1.9.** *Якщо сингулярно несиметрично рангу один збурений оператор має обернений, то він має вигляд*

(1.17)

*де*

(1.18)

*Доведення.* Для . Отже, тепер покладемо і підставимо в (1.17):

(1.19)

Порівнюючи початок і кінець (1.19), отримуємо (1.3).

І навпаки, нехай задано:

де, нагадаємо, що замість і використовується і . Тоді як для операторів в :

(1.20)

Для вектора маємо

Підставимо останній вираз в (1.20):

(1.21)

Отже, тепер потрібно лише перепозначити та для отримання (1.17). □

**Наслідок 1.1.10.** *Нехай , тоді (1.17) має вигляд*

*де*

*Доведення.* Запишемо (1.21) із заміною на :

З останнього виразу отримуємо □

**Наслідок 1.1.11.** *Нехай розглядається збурення із параметром*

*тоді (1.17) залишається правильним, як у наслідку 1.1.10, в (1.18) число має вигляд*

(1.22)

*при цьому область визначення описана в (1.6) і (1.7) при*

*Доведення.* З (1.3) для замість маємо

тобто (1.6) із В (1.7): на підставі довільності константи

□

Позначимо резольвенту оператора і знайдемо загальний вигляд резольвенти збуреного оператора (див. означення 1.1.2).

**Teoрема 1.1.12****.** *Нехай — позитивний самоспряжений оператор у сепарабельному гільбертовому просторі і — сингулярно несиметрично рангу один збурений відносно оператор, що означенний в 1.1.2.*

*Для резольвент і виконується формула типу М. Крейна при :*

(1.23)

*із векторнозначними функціями*

(1.24)

*де і скалярнозначною функцією*

(1.25)

*Вектори і величина пов’язані з співвідношеннями*

(1.26)

*де .*

Взагалі, випадок також можна включити до розгляду, поклавши і вважаючи . Також можна покласти , тоді в останній рівності (1.26) буде відсутнім перший доданок, тобто

*Доведення.* Нехай в заданий вираз : де Нагадаємо, що замість і використовується і Тоді для деякого такого, що

запишемо

або

(1.27)

Для маємо

Підставивши останній вираз в (1.27), отримуємо

Тепер потрібно лише перепозначити

(1.28)

З (1.28) маємо та або , тобто

Останній вираз є коректним для простору . Для коректного запису в слід навести

оскільки і комутують і .

Аналогічно, вирази та , дають

Отже, рівності (1.24) доведені.

Доведемо (1.25). Використавши останню рівність в (1.26), маємо

І навпаки, для Отже, покладемо і підставимо в (1.23):

Порівнюючи початок і кінець останньої формули, отримуємо (1.6).

Нарешті, додатково покажемо, що з (1.17) можна отримати (1.23), покладаючи:

(1.29)

де означені в (1.18).

Фактично .

У тотожність Гільберта для резольвент і :

підставимо вираз з (1.17) замість і (1.23) замість :

Дійсно, остання рівність виконується, якщо крім (1.29) врахувати тотожність Гільберта для і :

та рівності

Доведення завершено. □

Насамкінець, якщо в теоремі 1.1.12 покладемо і , то отримаємо як частинний випадок твердження 1.1.9 (якщо , то — наслідок 1.10). Зокрема, (1.23) перейде в (1.17), а (1.26) перейде в (1.18) (за умови, що існує ).

**Зауваження 1.1.13.** *Як і раніше, в теоремі 1.1.12 можна відмовитися від позитивності оператора та сепарабельності . Але тоді для того, щоб твердження 1.1.9 було частинним випадком теореми 1.1.12, необхідно вимагати, щоб .*

**Наслідок 1.1.14.** *Зокрема, в теоремі 1.1.12 доведено, що означення 1.1.1 і 1.1.2 є еквівалентними, якщо і існують для додатного самоспряженого оператора .*

*Доведення.* Означення 1.1.1 еквівалентне до 1.1.9. Під еквівалентністю розуміється те, що вираз (1.17) можна покласти як означення збуреного оператора (для випадку ). З означення 1.1.2 випливає означення 1.1.1. Саме означення 1.1.2 породжене результатами теореми 1.1.12. І, нарешті, в доведенні теореми 1.1.12 подано, що теорема 1.1.12 випливає з твердження 1.1.9 і, більш того, до нього еквівалентна, тобто формула (1.17) є частинним випадком (1.23) і навпаки, (1.23) виконується при (1.26) завдяки (1.17) разом з (1.18). □

Отже, надалі можна вживати означення 1.1.1 або 1.1.2 і використовувати при цьому твердження 1.1.9 або теорему 1.1.12. Теорема 1.1.12 охоплює широкий клас операторів і за рахунок вибору можна не вимагати розгляду додаткових рядків означення типу (1.4) і (1.7).

Проілюструємо основні результати підрозділу на прикладах, в яких легко обчислюються всі математичні об’єкти.

**Приклад 1**.

Розглянемо оператор у просторі і вираз

де і — -функції Дірака, зосереджені у точках , .

Використавши монографію [1], наведена резольвента (тобто ядро резольвенти) оператора

де , , .

Оператор має чисто неперервний спектр, тобто .

**Приклад 2**.

Нехай і — оператор множення на незалежну змінну у цьому просторі, тобто

Очевидно, що оператор — додатний, тобто і має тільки неперервний спектр .

Покладемо позитивний і негативний простори

і – простори із вагою. У такому випадку область визначення оператора є .

Візьмемо вектори і . Очевидно, що , тому що функції і не належать , але належать . Задамо збурений оператор виразом:

Отже, наведено приклад сингулярно несиметрично збуреного оператора (класу ).

Для ілюстрації теореми 1.12 достатньо покласти

та

Тоді

**Приклад 3**.

Нехай і — оператор множення на , а саме

Очевидно, що оператор має чисто неперервний спектр, тобто .

Покладемо як позитивний і негативний простори з вагою

і . Тоді область визначення оператора є та дуальний простір .

Візьмемо вектори і . Очевидно, що вектори тому що функції і не належать , але належать до . Тому можна покласти оператор у вигляді

Для ілюстрації теореми 1.1.12 можна покласти

та

Тоді

Очевидно, що і в цьому прикладі сингулярно збурений оператор належить також до класу .

### 1.1.3. Оператор, спряжений до сингулярно несиметрично рангу один збуреного класу оператора

Означимо для заданого . Використаємо твердження 1.1.9 та, зокрема, (1.17):

(1.30)

де нагадаємо, що і — обмежені оператори, визначені всюди в ,

**Твердження 1.1.15.** *Для довільних обмежених операторів з (1.30) і визначених у всьому просторі та довільних векторів і числа*

(1.31)

*де — самоспряжений оператор.*

*Доведення.* Для

(1.32)

З іншого боку, використовуючи (1.31) маємо

(1.33)

Порівнюючи (1.32) і (1.33), переконуємося у правильності (1.31). □

Використовуючи твердження 1.1.15, означимо Нехай — додатний самоспряжений оператор у сепарабельному гільбертовому просторі Для , покладемо Оператор згідно з означенням 1.1.1 є сингулярно несиметрично рангу один збуреним класу відносно , якщо

(1.34)

у випадку ; і

(1.35)

у випадку .

Дія задається аналогічно тому, як у твердженні 1.1, (1.5):

(1.36)

**Твердження 1.1.16.** *Оператор , означений в 1.1.1, є спряженим до оператора , означеного також згідно з означенням 1.1.1 виразами (1.34) і (1.35).*

*Доведення.* Випадок виконується завдяки твердженню 1.1.15.

Дійсно, для маємо

(1.37)

А для маємо

(1.38)

Порівнюючи (1.37) і (1.38), знаходимо, що , оскільки

Покажемо, що виконується і випадок

(1.39)

Нехай означений в (1.4), а означений в (1.35). Тоді

З останніх двох виразів випливає

тому що

і при означеному в (1.4), і при означеному в (1.35).

Випадок, коли, наприклад, означений в (1.3), а — в (1.35) (або навпаки, — в (1.4), а — в (1.34)) не можливий на підставі (1.39)). □

За аналогією з означенням 1.2 означимо Отже,

(1.40)

у випадку при фіксованому ; і

(1.41)

у випадку .

Дія задається аналогічно тому, як у твердженні 1.1, (1.5):

(1.42)

**Teoрема 1.1.17.** *Означення в (1.34), (1.35), (1.36) є еквівалентним означенню в (1.40), (1.41), (1.42) з урахуванням параметра*

*Доведення.* Для доведення слід повторити доведення теореми 1.12, але для спряженого оператора та заміною на . □

**Зауваження 1.1.18.** *Означений оператор (разом із його спряженим ) можна описати таким чином.*

*Лінійний замкнений оператор щільно визначений в є сингулярно несиметрично збуреним класу відносно оператора , якщо обидві множини*

(1.43)

(1.44)

*щільні в і при цьому .*

Зрозуміло, що для кожного збуреного оператора , існують щільно визначені симетричні звуження, тобто оператори і

з нетривіальними індексами дефекту кожний

Ця робота стосується випадків: .

Якщо і , тоді отримаємо звичайне абстрактне означення сингулярно збуреного самоспряженого оператора [40, 77] . Тобто означення, описане вище, узагальнює відоме означення самоспряженого сингулярного збурення на випадок несамоспряженого. Аналогічні та близькі спостереження є в [17, 18, 54, 55].

Тепер з теореми 1.1.17 маємо такий наслідок.

**Наслідок 1.1.19.** *Оператор , означений в 1.1, є спряженим до оператора , означеного також згідно з означенням 1.1 виразами (1.34), (1.35) і (1.36).*

**Приклад. Оператор, спряжений до оператора Шредінгера із нелокальною взаємодією (означений у твердженні 1.1.8)**

**Твердження 1.1.20.** *Оператор*

*є спряженим до оператора (1.8), має область визначення*

(1.45)

*і діє за правилом .*

*Доведення.* Спочатку розглянемо випадок, коли

Згідно з (1.40) для

де ,

Зокрема, в сенсі узагальнених функцій

та

Перша рівність в (1.45), тобто виконується:

Доведемо другу частину рівності (1.45). Оскільки

де — функція Хевісайда зі стрибком в точці , то

(1.46)

де враховано те, що , оскільки

Ліва частина у другій рівності в (1.45) має вигляд

(1.47)

Порівнюючи кінці виразів (1.46) і (1.47), отримуємо

Так розглянуто випадок

Розглянемо тепер випадок (1.41), тобто

(1.48)

У такому випадку

Для маємо

Для також маємо

Також для маємо і , тобто виконується друга рівність в (1.45).

Запишемо другу рівність в (1.45) для Ліва частина має вигляд

(1.49)

Права частина другої рівності (1.45) має вигляд

(1.50)

Дійсно, (1.49) дорівнює (1.50), якщо враховувати (1.48). Отже, (1.45) для (1.41) також виконується. Дія випливає з (1.42). □

**Приклад оператора, спряженого до оператора множення на незалежну змінну**

Нагадаємо, що простір і оператор

Позитивний і негативний простори мають вигляд

Покладемо (навпаки відносно прикладу з підрозділу 1.1.1) оператор множення на незалежну змінну збурений за допомогою і

(1.51)

Очевидно, що

(1.52)

є спряженим і

(1.53)

Безпосередньою підстановкою переконаємося, що

де , (1.16), а , (1.53).

## 1.2. Властивості точкового спектра, який виникає при сингулярно несиметрично рангу один збуренні класу

Сингулярно несиметрично рангу один збурений оператор, як і оператор збурений симетрично, може набувати, порівняно із незбуреним оператором, нові власні значення.

### 1.2.1. Пряма спектральна задача

Під прямою спектральною задачею розуміється пошук власних значень, які виникають у сингулярно збуреного оператора.

**Teoрема 1.2.1.** *Нехай сингулярно несиметрично збурений рангу один оператор набуває нове власне значення , порівняно з , тобто існує , але , тоді для відповідних власних векторів , : і виконуються такі співвідношення:*

(1.54)

(1.55)

*де наведені в теоремі 1.1.12, .*

*Доведення.* Скористаємося теоремою 1.1.12. Нехай зображений у вигляді (1.23) із вектор-функціями , властивості яких наведені в (1.24). Припустимо, що має власний вектор із власним значенням , тобто , тоді:

і отже

або

Домноживши скалярно на останній вираз, отримуємо

якщо покладемо , то отримаємо (1.54). Вираз . Якби , то тоді б , але за умови теореми

Аналогічно, використаємо формули резольвент для і , тобто

Припускаючи, що має власний вектор із власним значенням , тобто , маємо

і, отже,

або

Домноживши скалярно на останній вираз, отримуємо

якщо покласти Також . Якби , то тоді б , але за умови теореми

Логічним буде і другий варіант доведення теореми. Перепишемо перший вираз (1.54) у вигляді

(1.56)

Можна вважати, що . Якби , то тоді б для (1.23)

але

Перепишемо другий вираз (1.54) у вигляді і, нарешті:

(1.57)

Підставимо (1.56) і (1.57) в (1.23) разом із

Аналогічно, перший вираз в (1.55) переписується у вигляді

(1.58)

Нагадаємо, що з (1.26):

отже,

Вираз (1.54) можна переписати у вигляді (1.58), тому що Якби то тоді б для виразу, спряженого до (1.23), було б

але

Перепишемо другий вираз (1.55) у вигляді

і нарешті

(1.59)

Підставимо (1.58) і (1.59) у вираз, спряжений до (1.23), разом із :

Таким чином, теорема доведена. □

**Наслідок 1.2.2.** *За умов теореми 1.2.1*

(1.60)

*Доведення.* Якби , то тоді б і не існувало б. □

**Зауваження 1.2.3.** *Можливо, що існують окремі такі, що Цей факт є ознакою того, що крім із на відміну від з’являються й інші точки точкового спектра.*

Запишемо аналог теореми 1.2.1 у термінах .

**Твердження 1.2.4.** *Нехай сингулярно несиметрично збурений рангу один оператор набуває нове власне значення , порівняно з , тобто існує , але , тоді для відповідних власних векторів , : і виконуються такі співвідношення:*

(1.61)

(1.62)

Зауважимо, що в формулюванні твердження оператор (і його резольвента) розуміється як такий, що діє в Також зауважимо, що перші вирази в (1.61) і (1.62) коректні оскільки , а і належать до

*Доведення.* Перший варіант. Використаємо зображення

(1.63)

Для оператора за умовою твердження виконується рівність , тобто

і, отже,

або

Домножимо скалярно на останній вираз і отримаємо

Якщо покладемо то отримаємо (1.61). Тут Якби то тоді б що суперечить умові твердження.

Аналогічно, для оператора за умовою твердження виконується рівність , тобто

і, отже,

або

Домножимо скалярно на останній вираз і отримаємо

Якщо покладемо то отримаємо (1.62). Тут також Якби то тоді б що суперечить умові твердження.

Другий варіант доведення полягає у безпосередній підстановці (1.61) в (1.63). Перепишемо першу рівність (1.61) у вигляді

Це можливо, тому що Якби то тоді б і

що суперечить умові твердження.

Тоді

Аналогічно, перепишемо першу рівність (1.62) у вигляді

Це можливо , тому що Якби то тоді б і

що суперечить умові твердження.

Тоді

Третій варіант доведення твердження полягає у використанні теореми 1.2.1. В (1.54) підставимо та з (1.26)

(1.64)

Тоді

(1.65)

де використали Ця рівність отримана з другої рівності (1.54) при з (1.26). Застосувавши тотожність Гільберта до першого доданка рівності (1.65), отримуємо

тобто — перша рівність (1.54).

Аналогічно, в (1.55) підставимо та з (1.26)

(1.66)

Тоді

(1.67)

де використали Ця рівність отримана з другої рівності (1.55) при . Застосувавши тотожність Гільберта до першого доданку рівності (1.67), отримуємо:

тобто — перша рівність (1.55).

Четвертий варіант доведення твердження 1.2.4 використовує безпосередньо означення 1.1.2.

Нехай оператор має область визначення як в означенні 1.2, але із :

(1.68)

коли ; і

(1.69)

() коли , та дією

Розглянемо задачу на власні значення для випадку (1.68) де тоді, підставивши отримуємо

(1.70)

Якщо покладемо то отримуємо другу рівність (1.54) при або — другу рівність (1.62), що випливає з того, що Таким чином, з (1.70) випливає, що тобто

або

Знову підставимо (бо ):

отримуємо

тобто першу рівність (1.62).

Розглянемо задачу для випадку (1.69):

Рівність можлива лише за умови і

Запишемо область визначення у вигляді (1.35) і (1.41) із :

(1.71)

коли ; і

(1.72)

() коли , та дією

Розглянемо задачу на власні значення для випадку (1.68):

Тоді, підставивши отримуємо

(1.73)

Якщо покладемо то отримуємо другу рівність (1.55) при або — другу рівність (1.62), що випливає з того, що Таким чином, з (1.73) випливає, що тобто

або

Знову підставимо (бо ):

отримуємо

тобто першу рівність (1.62).

Розглянемо задачу для випадку (1.72):

Рівність можлива лише за умови і □

**Наслідок 1.2.5.** *З умов твердження 1.2.4 отримуємо*

(1.74)

*Доведення.* З рівності (1.61) маємо оскільки Враховуючи другі рівності в (1.59) і (1.62) отримуємо

□

**Зауваження 1.2.6**  *Нерівність (1.60) є наслідком нерівності (1.74). Дійсно, для , оскільки — додатний оператор,*

тому що а

**Приклад 1.**

Розглянемо знову оператор у просторі і вираз де і — -функції Дірака, зосереджені в точках ,

Оператор має власну функцію

із власним значенням , яке пов’язане із першим співвідношенням з (1.61)):

(1.75)

Зрозуміло, що за умови, що тобто

Відповідно оператор має власну функцію

із власним значенням , яке пов’язане із першим співвідношенням з (1.62)):

яке також можна отримати із (1.75) як комплексно спряжений вираз. Зауважимо, що у випадку симетричного збурення, коли , то з (1.67) випливає відомий результат [1]

**Приклад 2**.

Нехай за простір вибрано і — оператор множення на незалежну змінну , тобто

Очевидно, що оператор і має тільки неперервний спектр .

Візьмемо позитивний і негативний простори шкали асоційованої із оператором у вигляді і – простори із вагами. У такому випадку .

Візьмемо і . Очевидно, що .

Розглянемо оператор

(1.76)

Отже, — сингулярно несиметрично збурений рангу один оператор, тобто (класу ).

Якщо припустити додатково, що набуває нову точку точкового спектра , наприклад , тобто , то за першою формулою (1.61) , оскільки

Отже, вираз (1.76) набуває вигляду

У зв’язку зі сказаним, власні вектори мають вигляд

Для ілюстрації теореми 1.2.1 і формул (1.23) - (1.25) теореми 1.1.12 (для випадку ) достатньо покласти

### 1.2.2. Обернена спектральна задача

Як уже зазначалося, у сингулярно несиметрично збуреного рангу один оператора може виникати точка точкового спектра, якої не було у початкового незбуреного оператора (і, можливо, не одна). Постає природне запитання про обернену спектральну задачу, яка полягає у , тому що чи не можна за заданим незбуреним оператором та набором — власне число і власні значення — відновити збурений оператор та чи відновлюється оператор однозначно. На відміну від сингулярно збурених самоспряжених операторів, у випадку несиметричного збурення потрібно брати власне значення і два власних вектори, один із яких належатиме збуреному оператору, а другий — його спряженому.

**Твердження 1.2.7.** *Для заданого додатного самоспряженого оператора в гільбертовому просторі і числа і векторів з умовою існує єдиний сингулярно несиметрично збурений рангу один оператор такий, що*

(1.77)

*При цьому оператор наводиться у вигляді*

(1.78)

*де вектори означені виразами*

(1.79)

*а константа зв’язку рівностями*

(1.80)

Зауважимо, що в твердженні оператори і розглядаються в

*Доведення.* Перевіримо першу рівність (1.77), підставляючи в (1.78) вираз (1.79) і першу рівність з (1.80):

Аналогічно, для перевірки другої рівності в (1.77), підставимо у вираз, спряжений до (1.78), вираз (1.79) і (1.80) (див. твердження 1.1.16):

Факт сингулярності для збурення випливає з того, що , а отже, , які задані в (1.79), належать до Отже, згідно з означенням 1.1.2. Завдяки означенню 1.1.2 і твердженню 1.1.9 коректно означений в

Доведення єдиності від супротивного. Припустимо, що існує і такий, що і який означається виразом Тоді з того, що маємо

(1.81)

З останнього виразу можна стверджувати, що де

Аналогічно, з того, що маємо

З останнього виразу також можна стверджувати, що де

Тепер, наприклад, з (1.81) випливає, що

Отже, або

Таким чином,

Отримали протиріччя, тобто □

Аналогічно до того, як твердження 1.2.7 є оберненим до твердження 1.2.4, так і до теореми 1.2.1 можна навести обернену.

**Teoрема 1.2.8.** *Для заданого додатного самоспряженого оператора в сепарабельному гільбертовому просторі і числа і векторів таких, що для деякого такого, що і , існує єдиний сингулярно несиметрично збурений рангу один оператор такий, що і є його власним значенням і власним вектором відповідно, тобто і і є власним значенням і власним вектором спряженого оператора відповідно, тобто . При цьому, оператор означається, як в (1.23) теореми 1.1.12, резольвентою для :*

(1.82)

*при цьому векторнозначні функції задаються виразами*

(1.83)

*а скалярнозначна функція — виразами*

(1.84)

**Зауваження 1.2.9.** *Із зауваження 1.2.6 випливає, що для додатного самоспряженого оператора умова є еквівалентною до умови для оператора і векторів із теореми 1.2.8.*

**Зауваження 1.2.10.** *Неважко довести, що множини*

*і*

*обидві є щільними в . Якщо припустити, що і то тоді*

*тобто і , але .*

*Аналогічно, якщо і то тоді*

*тобто і , але .*

Для доведення теореми 1.2.8 необхідне таке твердження.

**Твердження 1.2.11.** *Нехай в сепарабельному гільбертовому просторі задано додатний самоспряжений оператор , тоді операторнозначна функція*

(1.85)

***1)*** *є резольвентою деякого замкненого оператора, якщо для і виконуються співвідношення*

(1.86)

(1.87)

*і ;*

***2)*** *є резольвентою сингулярно несиметрично рангу один збуреного оператора класу .*

*Доведення.* Доведемо пункт **1**). З[69], розділ VIII, §1, теорема 1.2, операторозначна функція є резольвентою деякого замкненого оператора якщо:

**а)** задовольняє тотожність Гільберта для деяких :

тобто є псевдорезольвентою і

**b)** має лише тривіальне ядро:

Перевіримо умову **a)**. Операторозначну функцію, означену у (1.85), підставимо у тотожність Гільберта:

Використовуючи тотожність Гільберта для отримуємо

(1.88)

З другої рівності (1.86) маємо

Аналогічно, з другої рівності (1.86) маємо

Підставляємо останні дві рівності в (1.88):

Після спрощення маємо

Після скорочення на отримуємо вираз, з якого випливає (1.87).

Перевіримо умову **b)**. Для вектора , але при фіксованому , є резольвентою замкненого оператора, оскільки для такого вектора .

Для вектора маємо

оскільки, якщо б то з того, що випливало б а за умови твердження .

Аналогічно, для вектора , але при фіксованому вираз є резольвентою замкненого оператора, оскільки для такого вектора

Для вектора маємо

оскільки, якби то з того, що випливало б а за умови твердження .

Тепер можна стверджувати, що існує замкнений лінійний оператор і можна покласти .

Враховуючи теорему 1.1.12, отримуємо, що , яка означена в (1.85), є резольвентою сингулярно несиметрично збуреного рангу один оператора класу . □

*Доведення теореми 1.2.8*.

**1.** Якщо , то з (1.83) випливає, що . У твердженні 1.2.11 довели, що оператор , заданий в (1.85), є резольвентою замкненого оператора за умови, що задовольняють (1.86) і задовольняє (1.87).

Нехай для , виконується (1.83), тобто

(1.89)

і для виконуються рівності(1.84):

які переписується у вигляді

(1.90)

Запишемо ліву частину (1.87), скориставшись (1.89) і (1.90):

Запишемо праву частину (1.87), скориставшись в (1.89):

(1.91)

В останньому рядку використано тотожність Гільберта для резольвенти незбуреного оператора:

Отже,

Таким чином,

(1.92)

Порівнюючи (1.91) і (1.92), отримуємо (1.87).

**2.** Оскільки вектори і належать до , то за твердженням 1.2.11 оператор є сингулярним збуренням .

**3.** Доведемо, що , або .

Дійсно, підстановка в (1.82) першого виразу з (1.84) і першого виразу (1.89), дає

Покажемо, що або Аналогічно, підставивши у вираз, спряжений до (1.82), другий вираз (1.84) і другий вираз (1.89), отримаємо

**4.** Доведемо єдиність. Припустимо, що існує інший оператор і такий, що і . Оскільки , тобто теж є сингулярним несиметричним збуренням рангу один оператора , то він також згідно з теоремою 1.1.12 має зображення

(1.93)

де виконується хоча б одна із нерівностей: або або або Тоді для і маємо

тобто

(1.94)

З останньої рівності маємо при фіксованому тобто

Аналогічно, для і маємо

тобто

(1.95)

Остання рівності означає, що при фіксованому Тепер із (1.94) випливає

тобто або Тепер (1.93) має вигляд

Отримана суперечність завершує доведення єдиності і теореми в цілому. □

Сформулюємо варіант теореми 1.2.8 у випадку, коли і початковий оператор і збурений мають обернений: і відповідно.

**Наслідок 1.2.12.** *Для заданого додатного самоспряженого оператора в сепарабельному гільбертовому просторі і числа і векторів таких, що , існує єдиний сингулярно несиметрично збурений рангу один оператор класу такий, що і . При цьому, оператор означається так, як в (1.17) твердження 1.1.9, через обернений оператор:*

(1.96)

*де*

(1.97)

*та*

(1.98)

### 1.2.3. Сингулярно несиметрично рангу один збурені оператори класу із більше ніж одним новим власним значенням

**Дуальна пара власних значень**

Сингулярно несиметрично рангу один збурений оператор, як і збурений симетрично, може набувати дуальну пару власних значень. Але через несамоспряженість збуреного оператора, на відміну від самоспряженого, дуальна пара власних значень виникає як у із власними векторами, так і у як комплексно спряжена з іншими власними векторами. Фактично, в розгляді присутні чотири власних значення і відповідно чотири власних вектори. Тому означення дуальної пари ускладнюється.

**Означення 1.2.1.** *Пара чисел називається дуальною парою власних значень сингулярно несиметрично рангу один збуреного оператора класу , якщо*

(1.99)

(1.100)

(1.101)

*де — відповідні власні вектори.*

Оскільки не кожен сингулярно збурений оператор набуває нове власне значення, то і, тим більш, не кожен такий оператор набуває асоційовану пару. Метод побудови сингулярно несиметрично збуреного рангу один оператора з дуальною парою описує така теорема.

**Teoрема 1.2.13.** *Нехай — додатний самоспряжений оператор, визначений у сепарабельному гільбертовому просторі .*

*Для довільного і векторів існує єдиний сингулярно несиметрично рангу один збурений оператор такий, що є дуальною парою власних значень, де*

(1.102)

*та*

(1.103)

*є відповідними власними векторами, якщо виконується умова*

*При цьому оператор наведений у вигляді*

(1.104)

*зі сталою*

(1.105)

*і векторами*

(1.106)

*Доведення.* Для довільного і векторів і покладемо таке, як у (1.102). За умови теореми 1.2.8 існує єдиний оператор такий, що виконуються рівності і , та який заданий у формі резольвенти вигляду

(1.107)

з

(1.108)

(1.109)

за умови, що тобто

Зокрема, вираз у знаменнику (1.109) дає ознаку того, що Другий множник у знаменнику (1.109) теж може дорівнювати нулю:

Отже, випливає з (1.101). Замінюючи в (1.108) на , отримуємо

(1.110)

Установимо, що тобто

Підставимо в середній вираз з (1.109). Якщо вважати, що

(1.111)

то тоді

тобто отримуємо тотожність як (1.110).

Запишемо (1.111) у вигляді

(1.112)

Тоді, враховуючи першу рівність з (1.108) і (1.110), маємо

(1.113)

Підставляємо (1.113) в (1.112):

+

Поєднаємо перший і другий доданки до і після рівності в останньому виразі і застосуємо формулу для резольвент

Скорочуючи на і зводячи подібні доданки, отримуємо

тобто умову (1.102) або (1.101). Зокрема, з останньої рівності маємо

тобто

Аналогічно, встановлюється, що тобто

Підставимо в останній вираз з (1.109). Якщо вважати, що

(1.114)

то

тобто отримуємо тотожність таку, як у (1.108).

Запишемо (1.114) у вигляді

Тоді, враховуючи першу рівність (1.108) і (1.110), маємо

Підставляємо (1.113) в (1.112):

Поєднаємо перший і другий доданки до і після рівності в останньому виразі і застосуємо формулу для резольвент:

Скорочуючи на і зводячи подібні доданки, отримуємо

тобто вираз спряжений до (1.102) або (1.101). Зокрема, з останньої рівності отримуємо

тобто

Запишемо вираз (1.104), з якого будуть випливати (1.105) і (1.106). За твердженням 1.2.4

Підставляючи в останні вирази і з (1.102), отримуємо (1.106). Вираз (1.105) є також наслідком твердження 1.2.4. □

**Приклад 1**.

Нехай за простір вибрано і — оператор множення на незалежну змінну як у попередніх прикладах, тобто

Очевидно і має тільки неперервний спектр, тобто .

Візьмемо позитивний і негативний простори і – простори з вагами. У цьому випадку .

Виберемо за вектори, які будуть власними у збуреного оператора, і . Очевидно, що , .

Якщо припустимо додатково, що набуває нову точку точкового спектра , тобто і покладемо для простоти , то отримаємо вектори , і число за формулами (1.97) і (1.98):

Отже,

Таким чином

При цьому

**Приклад 2**.

Нехай за гільбертовий простір вибрано і — оператор множення на незалежну змінну , тобто , , де . Очевидно, що і .

Покладемо (оскільки то ), очевидно, що і виберемо вектори, які будуть власними для збуреного оператора:

Зокрема, і . Тоді легко обчислити технічні величини

Отже, і

А також з (1.24) маємо

І з (1.84) маємо

де

Отже,

(1.115)

Крім того,

Зауважимо, що Отже, є сингулярно несиметрично рангу один збуреним оператором класу і можна обчислити однозначно сталу зв’язку. Для цього обчислимо скалярний добуток:

У зв’язку з цим, згідно з (1.80), .

Тепер, крім (1.115), запишемо і ще таке зображення:

Безпосередньо перевіряється, що :

**Приклад 3**.

Цей приклад є модифікацією попереднього і ілюструє наслідок 1.2.13. Нехай за гільбертовий простір взято і, як зазначено вище, — оператор множення на , а саме , , де .

Для простоти також покладемо (оскільки то ), очевидно, що , але тепер за вектори, які будуть власними, вибрані такі функції:

Зокрема, і Тоді легко обчислити технічні величини

Отже, , оскільки то ; і

І також з (1.83) маємо

І з (1.84) маємо

де

Отже,

(1.116)

Крім того,

Зауважимо, що . Тоді — сингулярно несиметрично рангу один збурений оператор класу і можна обчислити однозначно сталу зв’язку. Для цього обчислимо скалярний добуток

Згідно з (1.105) маємо . Тепер, крім (1.116), запишемо і ще таке зображення:

Таким чином,

**Приклад 4.**

Нехай і відіграє роль оператора Лапласа, а саме , – соболівський простір. Такий оператор має чисто неперервний спектр, тобто .

Покладемо і , (розглянемо випадок і ). Для обчислення нам потрібно

Використовуючи [1], обчислимо

(1.117)

і, отже, Також, , . І з (1.106) маємо

**Приклад 5.**

Дещо змінимо попередній приклад. А саме, залишимо і оператор , , але виберемо і , (також розглянемо випадок , але , ). Для обчислення потрібно

і, використовуючи (1.117), маємо . Отже, , . І з (1.106) маємо

**Приклад 6. Сингулярно несиметрично рангу один збурений оператор із довільною скінченною кількістю нових власних значень.**

Нехай за гільбертовий простір вибрано і — оператором множення на незалежну змінну , тобто , , де . Виберемо і у вигляді

(1.118)

де

Тоді перша формула (1.61) твердження 1.2.4 і має вигляд

Для останнього (трансцидентного) рівняння покажемо графічно його розв’язки.

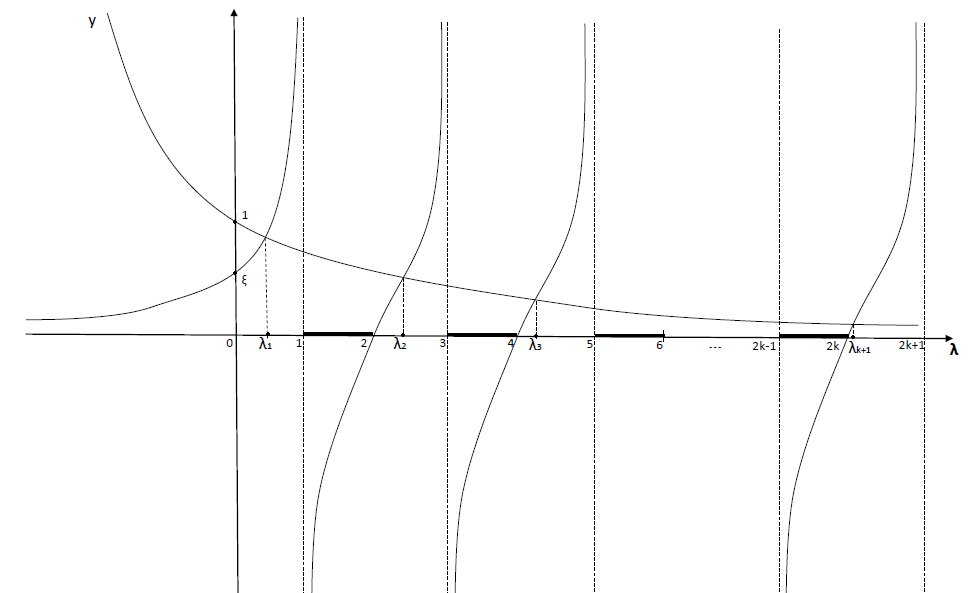


Рис. 1.1

На рис.1.1: при і — власні числа оператора

із з (1.118). Відповідними власними функціями оператора є і — оператора

## 1.3. Задача двох тіл для сингулярно несиметрично рангу один збурених операторів класу

Попередній матеріал застосуємо до розгляду задачі двох тіл [40] для випадку сингулярних збурень і з’ясуємо, які з результатів переносяться на несиметричний випадок, що вивчається в роботі.

Нехай задано простір , який має вигляд тензорного добутку сепарабельних гільбертових просторів

(1.119)

Розглянемо в необмежений самоспряжений оператор

(1.120)

де визначений на в , а визначений на в ; — одиничні оператори в просторах і відповідно.

Також розглянемо сингулярне несиметричне збурення оператора , задане таким формальним виразом:

(1.121)

де вектори , , .

Вираз (1.121) вимагає уточнення, оскільки навіть у найпростішому випадку, коли і задачі в і можливо

(1.122)

Нерівності в (1.122) виникають, тому що, взагалі, якщо , то можливо, навіть, , або .

Уточнення виразу (1.121) будемо розглядати у двох випадках.

Перший[40]:

(1.123)

де означений окремо , , , — спарення в шкалі, побудованій за (означення 1.1); і другий:

(1.124)

де та (де побудовано за ), — взагалі, довільний вектор (який вибирається із фізичних міркувань), , — спарення в шкалі, побудованій за .

**Teoрема 1.3.1*.*** *Нехай у сепарабелному гільбертовому просторі , означеному в (1.119), заданий оператор (1.120). Тоді сингулярно збурений оператор (1.123) має таку область визначення:*

(1.125)

*у випадку і*

(1.126)

*() у випадку .*

*Дія задається виразом*

(1.127)

*у випадку (1.125); та*

(1.128)

*у випадку (1.126).*

*Для спряженого оператора:*

(1.129)

*у випадку і*

(1.130)

*() у випадку .*

*Дія задається виразом*

(1.131)

*у випадку (1.129); та*

(1.132)

*у випадку (1.130).*

*Доведення*. Вираз (1.125) отримуємо як тензорний добуток і виразу (1.6) з означення 1.2 із . Вираз (1.126) отримуємо також як тензорний добуток і виразу (1.7) з означення 1.2 із . Правило дії (1.127) отримуємо із твердження 1.5 при з урахуванням дії для оператора .

Вираз (1.129) отримуємо як тензорний добуток і виразу (1.40) із . Вираз (1.130) отримуємо також як тензорний добуток і виразу (1.41) із . Дія (1.131) випливає з (1.42). □

Розглянемо випадок (1.124). Для нього маємо

(1.133)

якщо і

(1.134)

(), якщо ; та дія де скалярний добуток

Для оберненого оператора згідно з твердженням 1.9 маємо

(1.135)

де

**Приклад 1**.

Нехай простір має вигляд

і — оператор, що діє за правилом

тобто

Очевидно, що і і, отже, .

Розглянемо збурений оператор і згідно з (1.125), (1.126). Тоді

і обчислимо

для і

для

Тепер дія на має вигляд

**Приклад 2**.

Нехай, як у попередньому прикладі, простір має вигляд

і — оператор, що діє за правилом

тобто

Запишемо згідно з (1.133), (1.134) і (1.135). Для цього покладемо і

Тоді

Обчислимо

Тепер область визначення має вигляд

коли і

коли

Тепер дія на має вигляд

**РОЗДІЛ 2**

# Сингулярно несиметрично рангу один збурені оператори класу

У розділі вводиться означення сингулярно несиметрично рангу один збуреного оператора класу . На відміну від класу клас вимагає додаткової параметризації.

## 2.1. Означення і опис сингулярно несиметрично рангу один збуреного класу оператора

Нехай — сепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком і нормою . Розглянемо напівобмежений самоспряжений оператор із областю визначення в просторі . Позначимо через , , підмножини (комплексної площини ), які є спектром, точковим спектром і регулярною множиною, відповідного оператора. Надалі покладаємо, що оператор має простий спектр. Не порушуючи загальності, вважатимемо оператор додатним і більш того: .

Оператор асоційований із -шкалою гільбертових просторів[2]. Розглядається тільки частина -шкали, а саме ланцюжок:

(2.1)

де простір із нормою , ; – негативний (дуальний до ) простір, утворений як поповнення за нормою , ; із нормою , ; – негативний (дуальний до ) простір, утворений як поповнення за нормою , .

Нехай позначає звичайний дуальний скалярний добуток для просторів і . Скалярний добуток у просторах позначається як

Розширення оператора за неперервністю на простір розглядаємо, або як обмежений оператор, що діє з в , або як необмежений оператор в із областю визначення . Позначимо таке розширення через .

Розглянемо в шкалі (2.1) лінійний оператор із областю визначення і областю значень . Нехай він має вигляд , . Оскільки оператор є обмеженим, якщо діє з в , то є також обмеженим лінійним оператором з в . Для операторів в шкалі є поняття спряженого оператора , який також діє з в [48].

Для формального виразу надамо сенс оператора в [63]. Візьмемо та звузимо його на і позначимо :

(2.2)

Надалі будемо інколи використовувати також позначення оператора замість , якщо це не буде вести до суперечностей.

Оскільки процедура звуження не завжди є зручною у використанні і не дає однозначного означення оператора , то наведемо таке означення збуреного оператора класу .

**Означення 2.1.1.** *Нехай — додатний самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі . Для , , або , або покладемо , .*

*Оператор називається сингулярно несиметрично рангу один збуреним класу відносно оператора , якщо*

(2.3)

*у випадку де — параметр; і*

(2.4)

*() у випадку (і позначаємо ).*

*Дія задається правилом .*

Оператор будемо називати (початковим) незбуреним, а — збуренням (класу ). Отже, логічно назвати збуреним оператором, який вимагає додаткової параметризації.

Введене означення узагальнює випадки нелокальної взаємодії [90-92] описаної із самоспряженими операторами на випадок, коли збурений оператор не є самоспряженим і збурення класу .

**Зауваження 2.1.1.** *Два випадки означення в (2.3) і (2.4) обумовлені тим, що для випадку (2.3) і для випадку (2.4).*

**Зауваження 2.1.2.** *Якщо в означенні 1.1, то отримуємо означення сингулярно (класу ) збуреного рангу один оператора, який є самоспряженим після збурення.*

**Зауваження 2.1.3.** *В означенні 2.1.1 не є обов’язковим сепарабельність простору і простота спектра оператора . Також означення просто модифікується для не позитивного напівобмеженого оператора. При відповідній модифікації норм в оснащенні (2.1) можна навести означення без умови напівобмеженості оператора .*

*В такому разі слід покласти в (2.1): позитивний простір із нормою , і — поповнення за нормою , У противному разі доведення ряду тверджень стають занадто громіздкими.*

*Зокрема, надалі буде зручно розглядати і оператор у вигляді що нічим не відрізняється від попереднього розгляду, оскільки завжди можна навести:*

*але є зручним при застосуванні. Отже, зокрема,*

Тоді означення 2.1.1 має вигляд

**Означення 2.1.2.** *Нехай — самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі . Для , , або , або покладемо ,*

*Оператор називається сингулярно несиметрично рангу один збуреним класу відносно оператора , якщо*

(2.5)

*у випадку при фіксованому , де — параметр; і*

(2.6)

*(), у випадку ,*

*(і також позначаємо ).*

*Дія задається правилом*

**Зауваження 2.1.4.** *Аналогічне до зауваження 2.1.1. В означенні 2.1.2 два випадки для області визначення в (2.5) і (2.6) обумовлені тим, що для випадку (2.5) і для випадку (2.6).*

**Зауваження 2.1.5.** *Якщо покласти і вважати оператор додатним, і як наслідок покласти , то означення 2.1.2 стає означенням 2.1.1, тобто з означення 2.1.2 випливає означення 2.1.1, оскільки . Далі в роботі показано, що ці означення є еквівалентними, оскільки , а також далі буде означений спряжений оператор до .*

### 2.1.1. Резольвента сингулярно несиметрично рангу один збуреного оператора класу

Розглянемо оператор означений в 2.1.1, для оператора . Перепозначимо його і припустимо, що в нього існує обернений (обмежений оператор визначений всюди в ), тобто , що відповідає випадку (2.3) означення 2.1.1.

**Твердження 2.1.6.** *Якщо сингулярно несиметрично рангу один збурений оператор класу має обернений, то він має вигляд*

(2.7)

*де*

(2.8)

*Доведення.* Для . Отже, тепер покладемо і підставимо в (2.7):

(2.9)

Порівнюючи початок і кінець (2.9), отримуємо (2.3). □

**Наслідок 2.1.7.** *Нехай , тоді (2.7) має вигляд*

де

*Доведення.* Запишемо (2.7) у вигляді

із заміною на :

де — перепозначений параметр. З останнього виразу отримуємо □

Позначимо резольвенту оператора і знайдемо загальний вигляд резольвенти збуреного оператора (з означення 2.1.2).

**Teoрема 2.1.8.** *Нехай — позитивний самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі і — сингулярно несиметрично рангу один збурений класу відносно оператор, що означений в 2.1.2.*

*Для резольвент і виконується формула типу М. Крейна при :*

(2.10)

*із векторнозначними функціями*

(2.11)

*де ; і скалярнозначною функцією:*

(2.12)

*де і для якої виконується рівність:*

(2.13)

*Вектори пов’язані з співвідношеннями*

(2.14)

Взагалі, випадок також можна включити до розгляду, поклавши і вважаючи . Також можна покласти , тоді в останній рівності (2.12) буде відсутнім перший доданок, тобто

*Доведення.* Для Отже, тепер покладемо і підставимо в (2.10):

Порівнюючи початок і кінець в останньому виразі, отримуємо (2.5).

Доведемо (2.13). Використавши рівність (2.12), маємо

Далі використаємо рівності, які випливають з (2.14):

Тоді, маємо

Нарешті, додатково покажемо, що з (2.7) можна отримати (2.10), покладаючи

(2.15)

де означені в (2.8).

Фактично .

У тотожність Гільберта для резольвент і :

підставимо вираз з (2.7) замість і (2.10) замість :

Дійсно, остання рівність виконується, якщо крім (2.15) врахувати тотожність Гільберта для і :

та рівності

Доведення завершено. □

**Зауваження 2.1.9.** *Як і раніше, в теоремі 2.1.8 можна відмовитися від позитивності оператора та сепарабельності . Але тоді для того, щоб твердження 2.1.6 було частинним випадком теореми 2.1.8, необхідно вимагати, щоб .*

**Наслідок 2.1.10.** *Зокрема, в теоремі 2.1.8 доведено, що означення 2.1.1 і 2.1.2 є еквівалентними, якщо і існують для додатного самоспряженого оператора .*

*Доведення.* Означення 2.1.1 еквівалентне (2.7). Під еквівалентністю розуміється те, що вираз (2.7) (разом із (2.8)) можна покласти як означення збуреного оператора (для випадку ). З означення 2.1.2 випливає означення 2.1.1. Саме означення 2.1.2 породжене результатами теореми 2.1.8. І, нарешті, з доведенні теореми 2.1.8 подано, що теорема 2.1.8 випливає з твердження 2.1.6 і, більш того, йому еквівалентна, тобто формула (2.7) є частинним випадком (2.10) і навпаки, (2.10) виконується при (2.12) завдяки (2.7) разом з (2.8). □

Отже, надалі можна вживати означення 2.1.1 або 2.1.2 і використовувати при цьому твердження 2.1.6 або теорему 2.1.8. Теорема 2.1.8 охоплює широкий клас операторів і за рахунок вибору можна не вимагати розгляду додаткових рядків означення типу (2.4) і (2.6).

**Приклад 1**.

Нехай за простір взято і — оператор множення на , тобто

Оператор — додатний, тобто і має чисто неперервний спектр .

Покладемо за позитивний і негативний простори

і . Зокрема, і .

Візьмемо вектори і . Очевидно, що і навіть Але , тому що

Отже, оператор який має формальний вигляд:

(2.16)

можна навести у термінах резольвент (2.10).

Для ілюстрації теореми 2.1.8 покладемо

та

де та — параметр.

Наведений у цьому прикладі оператор належить класу .

### 2.1.2. Оператор, спряжений до сингулярно несиметрично рангу один збуреного класу оператора

Означимо для заданого класу . Для цього будемо використовувати твердження 1.6 та, зокрема, зображення (2.7):

(2.17)

де нагадаємо, що і — обмежені оператори визначені всюди в ,

**Твердження 2.1.11.** *Для довільних обмежених операторів з (2.17) і визначених у всьому просторі та довільних векторів і числа :*

(2.18)

*де — самоспряжений оператор.*

*Доведення* нічим не відрізняється від доведення твердження 1.1.15. □

Використовуючи твердження 2.1.11, означимо Нехай — додатний самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі Для , де або , або покладемо Оператор згідно з означенням 2.1.1 є сингулярно несиметрично рангу один збуреним класу відносно , якщо

(2.19)

у випадку де — параметр; і

(2.20)

у випадку .

Дія задається:

(2.21)

**Твердження 2.1.12.** *Оператор , означений в 2.1.1, є спряженим до оператора , означеного також згідно з означенням 2.1.1 виразами (2.19) і (2.20).*

*Доведення.* Випадок виконується завдяки твердженню 2.1.11.

Дійсно, для маємо

(2.22)

із параметром

А для маємо

(2.23)

де параметр покладемо

Порівнюючи (2.22) і (2.23) знаходимо, що , оскільки

Покажемо, що виконується і випадок

(2.24)

Нехай означений в (2.6), а означений в (2.20). Тоді

З останніх двох виразів випливає

тому що

і при означеному в (2.4) і при означеному в (2.20).

Випадок, коли, наприклад, означений в (2.5), а — в (2.20) (або навпаки, — в (2.6), а — в (2.19)) неможливий на підставі (2.24)). □

За аналогією з означенням 2.1.2, означимо Отже,

(2.25)

у випадку при фіксованому ; і

(2.26)

у випадку .

Дія задається:

(2.27)

**Teoрема 2.1.13.** *Означення в (2.19), (2.20), (2.21) є еквівалентним означенню в (2.25), (2.26), (2.27) з урахуванням параметра і ,*

*Доведення.* Для доведення слід повторити доведення теореми 2.1.8, але для спряженого оператора і заміною на . □

**Зауваження 2.1.14.** *Оператор і його спряжений ) можна описати таким чином.*

*Лінійний замкнений оператор щільно визначений в є сингулярно несиметрично збуреним класу відносно оператора , якщо обидві множини*

(2.28)

(2.29)

*щільні в і при цьому .*

Для кожного збуреного оператора існують щільно визначені симетричні звуження, тобто оператори і з нетривіальними індексами дефекту кожний:

Більшою частиною робота стосується випадків: .

**Наслідок 2.1.15.** *Оператор , означений в означенні 2.1.1, є спряженим до оператора , означеного також згідно з означенням 2.1.1 рівностями (2.19), (2.20) і (2.21).*

**Приклад 2. Оператор, спряжений до збуреного класу оператора множення на незалежну змінну**

Нехай, як у попередньому прикладі, і — оператор множення на , тобто

У такому випадку:

Упопередньому прикладі взято і тоді для з (2.16) розглянемо формальний вираз для його спряженого:

який можна навести у термінах резольвент типу (2.10):

де

та

## 2.2. Властивості точкового спектра, який виникає при сингулярно несиметрично рангу один збуренні класу

### 2.2.1. Пряма спектральна задача

Розглянемо пряму спектральну задачу для сингулярно несиметрично рангу один збуреного класу оператора, аналогічно до того, як раніше розглянуто для збурення класу

**Teoрема 2.2.1.** *Нехай сингулярно несиметрично збурений рангу один оператор класу набуває нове власне значення , порівняно з , тобто існує , але , тоді для відповідних власних векторів , : та виконуються такі співвідношення:*

(2.30)

(2.31)

*де наведені в теоремі 1.8, .*

*Доведення* теореми нічим не відрізняється від доведення теореми 1.2.1. □

**Зауваження 2.2.2**  *Крім того, що теорема 1.2.1 переноситься на випадок теореми 2.2.1, а також наслідок 1.2.5 і зауваження 1.2.3 залишаються змістовними.*

*Твердження 1.2.4 аналогів для випадку не має.*

**Приклад 1.**

Нехай і — оператор множення на , тобто

Тоді

Візьмемо і Очевидно, що Не важко помітити, що

Розглянемо формальний вираз:

(2.32)

З огляду на теорему 2.2.1, вираз (2.32) має вигляд

(2.33)

де

та

За теоремою 2.2.1

і перша формула (2.30) має вигляд

(2.34)

При (2.33) має вигляд

та (2.34) має вигляд

(2.35)

Останній вираз дає зв’язок між точкою спектра яка виникає у збуреного оператора і сталою та параметром

### 2.2.2. Обернена спектральна задача для сингулярно несиметрично збуреного оператора класу

Розглянемо обернену спектральну задачу для сингулярно несиметрично збуреного оператора класу аналогічно до того, як раніше розглянуто задачу для збурення класу

Оскільки, вираз для випадку збурення класу носить формальний характер, то ж аналог твердження 1.2.7 для класу є відсутнім. Проте, аналог теореми 1.2.8 можна навести.

**Teoрема 2.2.3.** *Для заданого додатного самоспряженого оператора в сепарабельному гільбертовому просторі і числа і векторів таких, що для деякого такого, що і , існує єдиний сингулярно несиметрично збурений рангу один класу оператор такий, що і є його власним значенням і власним вектором відповідно, тобто і і є власним значенням і власним вектором спряженого оператора відповідно, тобто . При цьому, оператор означається так, як в (2.10) теореми 2.1.8, резольвентою є*

(2.36)

*де векторнозначні функції задаються виразами:*

(2.37)

*та скалярнозначна функція задається виразами:*

(2.38)

Зауваження 1.2.10 правильне і для векторів з теореми 2.2.3.

Для доведення теореми 1.2.8 необхідні попередні твердження.

**Твердження 2.2.4** *Нехай в сепарабельному гільбертовому просторі задано додатний самоспряжений оператор , тоді операторнозначна функція*

(2.39)

***1)*** *є резольвентою деякого замкненого оператора, якщо для і виконуються співвідношення*

(2.40)

(2.41)

*та* ;

***2)*** *є резольвентою сингулярно несиметрично рангу один збуреного оператора класу .*

*Доведення.* Доведемо пункт  **1**). З[69], розділ VIII, §1, теорема 1.2, операторно-значна функція є резольвентою деякого замкненого оператора якщо:

**a)** задовольняє тотожність Гільберта для деяких :

тобто є псевдорезольвентою і

**b)** має лише тривіальне ядро:

Перевіримо умову  **a)**. Операторнозначну функцію означену у (2.39) підставимо у тотожність Гільберта:

Використовуючи тотожність Гільберта для отримуємо

(2.42)

З другої рівності (2.40) маємо

Аналогічно, з другої рівності (2.40) маємо

Підставляємо останні дві рівності в (2.42):

Після спрощення

Після скорочення на отримуємо вираз, з якого випливає (2.41).

Перевіримо умову  **b)**. Для вектора , але при фіксованому , є резольвентою замкненого оператора, оскільки, для такого вектора .

Для вектора маємо

оскільки, якщо б то з того, що випливало б а за умови твердження .

Аналогічно, для вектора , але при фіксованому вираз є резольвентою замкненого оператора, оскільки, для такого вектора

Для вектора маємо

оскільки, якби то з того, що випливало б а отже і а за умови твердження .

Тепер можна стверджувати, що існує замкнений лінійний оператор і можна покласти .

Враховуючи теорему 2.1.8, робимо висновок, що , означена в (2.39), є резольвентою сингулярно несиметрично збуреного рангу один оператора класу . □

*Доведення теореми 2.2.3*.

**1.** Якщо , то з (2.37) випливає, що . У твердженні 2.2.4 довели, що оператор , заданий в (2.39), є резольвентою замкненого оператора за умови, що задовольняють (2.40) і задовольняє (2.41).

Нехай для , виконується (2.37), тобто

(2.43)

та для виконується (2.38)

і переписується у вигляді

(2.44)

Запишемо ліву частину (2.41), підставимо (2.43) і (2.44):

Запишемо праву частину (2.41), підставивши в (2.43):

(2.45)

В останньому рядку використано тотожність Гільберта для резольвенти незбуреного оператора: Отже,

Таким чином,

(2.46)

Порівнюючи (2.45) і (2.46), отримуємо (2.41).

**2.** Оскільки вектори і належать до , то за твердженням 2.2.4, оператор є сингулярним збуренням .

**3.** Покажемо, що , або .

Дійсно, підстановка в (2.39) першого виразу з (2.38) і першого виразу (2.43) дає

Покажемо, що або Аналогічно, підставивши в вираз спряжений до (2.36) другий вираз (2.38) і другий вираз (2.43), отримаємо

**4.** Доведемо єдиність. Припустимо, що існує інший оператор і такий, що і . Оскільки, теж є сингулярним несиметричним збуренням рангу один оператора , то він також згідно з теоремою2. 1.8 має зображення

(2.47)

де виконується хоча б одна із нерівностей: або або або Тоді для і маємо

тобто

(2.48)

З останньої рівності маємо, що при фіксованому : , тобто

Аналогічно, для і маємо

тобто

(2.49)

Остання рівності означає, що при фіксованому : Тепер із (2.48) випливає

тобто або Тепер (2.47) має вигляд

Отримана суперечність завершує доведення єдиності і теореми в цілому. □

У випадку, коли збурений оператор має обернений , теорема 2.2.3 має такий наслідок.

**Наслідок 2.2.5.** *Для заданого додатного самоспряженого оператора в сепарабельному гільбертовому просторі і числа та векторів таких, що , існує єдиний сингулярно несиметрично збурений рангу один оператор класу такий, що і . При цьому, оператор означається як в (2.7) твердження 2.1.6, через обернений оператор:*

(2.50)

*де*

(2.51)

*та*

(2.52)

### 2.2.3. Сингулярно несиметрично рангу один збурені оператори класу із більше ніж одним новим власним значенням

**Дуальна пара власних значень**

Так само, як і сингулярно несиметрично збурений оператор класу оператор класу класу може набувати дуальну пару власних значень.

**Означення 2.2.1.** *Пара чисел називається дуальною парою власних значень сингулярно несиметрично рангу один збуреного оператора класу , якщо*

(2.53)

(2.54)

(2.55)

*де — відповідні власні вектори.*

Існування у сингулярно несиметрично збуреного оператора дуальної пари власних векторів гарантує така теорема.

**Teoрема 2.2.6.** *Нехай — додатний самоспряжений оператор визначений у сепарабельному гільбертовому просторі .*

*Для довільного і векторів існує єдиний сингулярно несиметрично рангу один збурений оператор класу такий, що є дуальною парою власних значень, де*

(2.56)

*та*

(2.57)

*є відповідними власними векторами, якщо виконується умова*

*При цьому оператор визначається резольвентою*

(2.58)

*з*

(2.59)

*та*

(2.60)

*Доведення.* Нулі знаменника виразів (2.60) є ознакою наявності точок спектра у Тобто і

Зокрема, вираз у знаменнику (2.60) дає ознаку того, що

Другий множник в знаменнику (2.60) теж може дорівнювати нулю:

Отже, випливає з (2.55). Замінюючи в (2.59) на , отримуємо

(2.61)

Покажемо, що тобто

Підставимо в середній вираз з (2.60). Якщо покладати, що

(2.62)

то тоді

тобто отримуємо тотожність як (2.61).

Запишемо (2.62) у вигляді

(2.63)

Тоді, враховуючи першу рівність (2.59) і (2.61), маємо

(2.64)

Підставляємо (2.64) в (2.63):

Поєднаємо перший і другий доданки до і після рівності в останньому виразі і застосуємо формулу для резольвент

Скорочуючи на і зводячи подібні доданки, отримуємо

тобто умову (2.56) або (2.55). Зокрема, з останньої рівності отримуємо

тобто

Аналогічно, покажемо, що тобто

Підставимо в останній вираз з (2.60). Якщо покладати, що

(2.65)

то тоді

тобто отримуємо тотожність як (2.59).

Запишемо (2.65) у вигляді

Тоді, враховуючи першу рівність (2.59) і (2.61), маємо

Підставляємо (2.64) в (2.63):

Поєднаємо перший і другий доданки до і після рівності в останньому виразі і застосуємо формулу для резольвент:

Скорочуючи на і зводячи подібні доданки, отримуємо

тобто вираз спряжений до (2.56) або (2.55). Зокрема, з останньої рівності отримуємо

тобто □

**Приклад 1**.

Нехай і — оператор множення на незалежну змінну як у попередніх прикладах, тобто де

Очевидно, що і має тільки неперервний спектр, тобто .

Візьмемо позитивні простори і та негативні — і .

Виберемо за вектори, які будуть власними у збуреного оператора,

і . Очевидно, що , тобто ми отримуємо оператор класу .

Припустимо додатково, що набуває нову точку точкового спектра тобто і покладемо для простоти то отримуємо вектори і число за формулами (2.51) і (2.52):

Отже,

Таким чином

при цьому

і згідно з (2.8)

**Приклад 2**.

Нехай за гільбертів простір вибрано і — оператором множення на незалежну змінну , тобто , , де . Очевидно, і .

Покладемо очевидно, що Виберемо вектори, які будуть власними для збуреного оператора:

Очевидно, що

Зокрема, і і, тим більше У такому разі, легко обчислити технічні величини:

Отже, згідно з (2.56) Зокрема

Тоді

А також з (2.59) маємо

І з (2.60) отримуємо

де

Отже,

Зокрема, для обчислення і використаємо (1.106):

Оскільки, де а то — сингулярно несиметрично рангу один збурений оператор класу і константа зв’язку пов’язана із параметром .

З (2.12) маємо

Таким чином (наприклад, для )

## 2.3. Задача двох тіл для сингулярно несиметрично рангу один збурених операторів класу

Розглянемо задачу двох тіл [40] для випадку сингулярних збурень і з’ясуємо які з результатів переносяться на несиметричний випадок, що вивчається в роботі, зокрема, класу

Нехай задано простір , який має вигляд тензорного добутку сепарабельних гільбертових просторів

(2.66)

Розглянемо в необмежений самоспряжений оператор

(2.67)

де визначений на в , а визначений на в ; — одиничні оператори в просторах і відповідно.

Також розглянемо сингулярне несиметричне збурення класу оператора , задане формальним виразом:

(2.68)

де вектори , (взагалі, вважаємо, що або , або ), .

Уточнення виразу (2.68) будемо розглядати у двох випадках.

Перший[40]:

(2.69)

де означений окремо , , , — спарення між просторами і в шкалі, побудованому по ; і другий:

(2.70)

де та (де побудовано по ), — взагалі, довільний вектор (який вибирається із фізичних міркувань), , — спарення в шкалі, побудованому по .

**Teoрема 2.3.1*.*** *Нехай у сепарабельному гільбертовому просторі , означеному в (2.66), заданий оператор (2.67). Тоді сингулярно збурений оператор (2.69) має таку область визначення:*

(2.71)

*у випадку — параметр; і*

(2.72)

*() у випадку .*

*Дія задається виразом*

(2.73)

*у випадку (2.71); та*

(2.74)

*у випадку (2.72).*

*Для спряженого оператора:*

(2.75)

*у випадку та*

(2.76)

*( ) у випадку .*

*Дія задається виразом*

(2.77)

*у випадку (2.75); та*

(2.78)

*у випадку (2.76).*

*Доведення*. Вираз (2.71) отримуємо як тензорний добуток і виразу (2.5) означення 2.1.2 із . Вираз (2.72) отримуємо також як тензорний добуток і виразу (2.6) означення 2.1.2 із . Правило дії (2.73) отримуємо із означення 2.1.2 при із урахуванням дії для оператора .

Вираз (2.75) отримуємо як тензорний добуток і виразу (2.25) із . Вираз (2.76) отримуємо також як тензорний добуток і виразу (2.26) із . Дія (2.78) випливає з (2.27). □

Розглянемо випадок (2.70). Для нього маємо

(2.79)

якщо та

(2.80)

(, — параметр), якщо ; та дія де скалярний добуток .

Для оберненого оператора згідно з твердженням 2.17 маємо

(2.81)

де

**Приклад 1**.

Нехай простір має вигляд

і оператор, що діє за правилом

тобто

Очевидно, і, отже, .

Розглянемо збурений оператор тобто Тоді

Оскільки, то маємо збурення класу

Обчислимо

Тепер

для і

для

# РОЗДІЛ 3

# Сингулярно несиметрично рангу один збурені оператори класу , які допускають опис методом класу

У цьому короткому розділі буде розглянутий несподіваний випадок, коли сингулярно несиметрично рангу один збурені оператори класу формально допускають опис методом класу . Несподіваність полягає у , тому що у разі сингулярних симетричних збурень такий випадок неможливий.

## 3.1. Порівняння областей визначення несиметрично збурених і класу операторів

Розглянемо означення 1.1.1 і 2.1.1, а саме коефіцієнти в (1.3) і (2.3), які перепозначимо для зручності як

(3.1)

(3.2)

Нагадаємо, що в (3.1) але в (3.2) Зауважимо, що скалярні добутки в (1.4) і (2.4) відмінностей не мають.

В деяких окремих випадках скалярний добуток в може бути заданий таким, що але вираз формально означений і, отже, збурення класу можна описати без параметра тобто за допомогою формули (3.1). Пояснимо сказане вище на прикладі.

**Приклад 1.**

Розглянемо

Нехай

Очевидно, що але формально

## 3.2. Продовження скалярного добутку методом носія вектора

Попередній приклад ілюстрував деякий метод продовження скалярного добутку у довільному гільбертовому просторі якщо в ньому заданий додатний самоспряжений оператор Позначимо через спектральний носій вектора як носій міри для якої

Поняття спектрального носія можна розширити на вектори якщо використати замість (див. п.п.1.1).

Припустимо, що вектори можна розкласти у суми так, що для і виконуються властивості:

(3.3)

Тепер для векторів природно навести скалярний добуток:

(3.4)

де природньо вважати, що скалярний добуток дорівнює нулю для векторів, носії яких не перетинаються.

**Зауваження 3.2.1.** *Продовження скалярного добутку (3.4) істотно залежить від властивостей (3.3), які у свою чергу, залежать від оператора який пов’язує простори і*

**Зауваження 3.2.2.** *Продовження скалярного добутку (3.4) допускається для фіксованих і довільних які разом задовольняють властивості (3.3).*

**Зауваження 3.2.3.** *Продовження в (3.4) не є скалярним добутком у звичайному сенсі, оскільки виконуються не всі аксіоми властиві скалярному добутку.*

**Зауваження 3.2.4.** *Якщо в (3.4) покласти а то отримуємо деяке інше продовження, яке не є суперечним при фіксованих*

## 3.3. Продовження лінійного функціонала у сенсі гільбертових просторів

Останнє зауваження попереднього параграфа набуває деякого загального характеру при такому подальшому розгляді.

Отже, нехай, як і раніше, — додатний самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі Позначимо -шкалу гільбертових просторів [28, 81]: , де , із нормою продовженою скалярним добутком

; простір , побудований як поповнення відносно норми

Через , позначимо дуальний скалярний добуток для і .

Оператор має такі властивості в - шкалі [28, 81]:

(3.5)

де “” позначає замикання у відповідному просторі. Скалярні добутки також мають властивості [28, 81]:

(3.6)

Нехай спочатку, для простоти, розглядається частина -шкали, а саме ланцюжок:

(3.7)

де , , тобто маємо оснащення простору позитивним і негативним просторами [2]. У зв’язку із цим, позначимо . Як відомо з [2], є простором лінійних неперервних функціоналів на . Отже, кожен елемент породжує лінійний неперервний функціонал , у вигляді (цей самий функціонал є одночасно необмеженим і щільно визначений в якщо його розглядати в ).

Розглянемо розширення функціонала за лінійністю на деякі елементи з (або, взагалі, з ). Поданий приклад показує, що такі розширення можливі. Як в [41], позначимо таке розширення , де , (або, взагалі, ). Розширюючи покладаємо довільне зручне значення . Під розширенням за лінійністю розуміється таке:

Аналогічно, розглянемо:

функціонал , і його розширення

функціонал , і його розширення

функціонал , і його розширення

Нехай, надалі, для простоти підпростори , , є одновимірними.

**Твердження 3.3.1** *Якщо покласти , і припустити, що , і , то можна вибрати розширення функціоналів , , і так, що*

(3.8)

*Доведення.* Ланцюжок (3.8)має вигляд другого ланцюжка в (3.6):

(3.9)

якщо , для якого можна покласти спільну константу. □

Твердження 3.2.1 має очевидні узагальнення для довільного оснащення із множин , . Виберемо такі, що , і замість (3.7) розглянемо іншу частину -шкали , :

(3.10)

Трійка (3.10) однозначно асоційована із додатним самоспряженим оператором [28, 81].

Розглянемо:

функціонал , та його розширення

функціонал , і його розширення

функціонал , і його розширення

функціонал , і його розширення

Твердження 3.2.1 узагальнює така теорема.

**Teoрема 3.3.2** *Якщо покласти , і припустити , та , то можна вибрати розширення функціоналів , , і так, що*

(3.11)

*Доведення.* Ланцюжок (3.10) має вигляд (3.6), але із заміною індексів:

(3.12)

якщо , для якого можна покласти спільні константи. □

**Приклад 1**.

Нехай і — оператор множення на незалежну змінну “”:

У такому разі — простір із скалярним добутком

тобто . Простір має скалярний добуток

тобто . Таким чином утворилось оснащення

Виберемо і розглянемо функціонал на , тобто

,тому що , оскільки та , оскільки .

Але для маємо , оскільки і несподівано . Отже, можна покласти

Але це не є єдиний шлях розширення функціонала . Так, для можна покласти

(3.13)

Отже, можна зробити висновок, що скалярний добуток заданий інтегралом для функцій із різними носіями можна покласти і “нулем”, що є природно, а можна і довільним чином.

Матеріали дисертації використовувалися, зокрема, в [8-11, 13, 16].

# ВИСНОВКИ

1) Означено класи сингулярно несиметрично рангу один збурених операторів класу , та класу ; встановлено їх загальні властивості та дано їх опис у термінах резольвент. Такий опис дозволяє проводити детальніші дослідження означених операторів, зокрема їх спектральні властивості.

2) Описано деякі варіанти точкового спектра у збуреного оператора, який з’являється при сингулярних несиметричних рангу один збуреннях класу та класу . Наведений опис використовується при побудові сингулярно несиметрично збурених операторів із заданими спектральними властивостями.

3) Побудовано сингулярно несиметрично рангу один збурений оператор класу , та класу за заданими власним числом і власними векторами. Тобто розв’язана обернена спектральна задача, для сингулярно несиметрично рангу один збурений оператор.

4) Побудовано сингулярно несиметрично рангу один збурений оператор класу та класу , який має дуальну пару власних чисел з парою власних векторів для збуреного оператора та його спряженого. Цей факт узагальнює відомий раніше аналогічний, стосовний самоспряжених сингулярно збурених операторів.

5) Описано область визначення несиметрично збуреного -функціями оператора Лапласа на дійсній прямій. Опис наданий у термінах граничних умов. Встановлений зв’язок між означенням пункту 1) і таким описом дозволяє досліджувати спектральні властивості несиметрично збуреного -функціями оператора Лапласа, використовуючи пункти 2) - 4).

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

[1] Aльбеверио C. Решаемые модели в квантовой механике / C.Aльбеверио, Ф.Гестези, Р. Хёэг-Kрон, Х. Хoльден. – Пер. с P47 англ. – М.: Мир, 1991. – 568 с.

[2] Бeрeзанский Ю.M. Функциональный анализ: Курс лекций / Ю.M.Бeрeзанский, Г.Ф.Ус, З.Г.Шефтель.– Київ: Вища шк., 1990.– 600 с.

[3] Березин Ф.А. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом / Ф.А.Березин, Л.Д.Фаддеев // ДАН СССР.– 1961.– Т. 137, № 5.– С. 1011-1014.

[4] Бирман М.С. К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов / М.С. Бирман // Матем. сб.– 1956.– Т. 38 ( Т. 80 ), № 4.– C. 431–450.

[5] Бирман М.С. Возмущения квадратичных форм и спектр сингулярных граничных задач / М.С. Бирман // ДАН СССР. – 1959. – Т. 125. – № 3. – С. 471-474.

[6] Вдовенко Т. І. Строго сингулярні збурення рангу один несиметричним потенціалом / Т. І. Вдовенко // Наукові Вісті НТУУ ``КПІ'' .– 2014 .– № 4 .– С. 13-17.

[7] Вдовенко Т. І. Сингулярні рангу один несиметричні збурення самоспряженого оператора. ``Спектральна теорія операторів та наборів операторів'' / Т. І. Вдовенко, М. Є. Дудкін // Збірник праць Інституту математики НАН України .– 2015 .– Т. 12, № 1 .– С. 57-73.

[8] Вдовенко Т. І. Хвильові оператори сингулярного збурення рангу один несиметричним потенціалом / Т. І. Вдовенко // Наукові Вісті НТУУ ``КПІ'' .– 2015 .– № 4 . – С. 14-20.

[9] Вдовенко Т. І. Хвильові оператори для сингулярного несиметричного збурення самоспряженого оператора / Т. І. Вдовенко, М. Є. Дудкін // Буковинський математичний журнал .– 2015 .– Т. 3 , № 1 .–С. 25-30.

[10] Вдовенко Т. І. Задача двох тіл при сингулярному несиметричному рангу один збуренні / Т. І. Вдовенко // Наукові Вісті НТУУ ``КПІ'' .– 2016 .– № 4 . – С. 14-19.

[11] Вдовенко Т. І. Дуальна пара власних значень сингулярно несиметрично рангу один збурених операторів / Т. І. Вдовенко // Наукові записки НаУКМА .– 2016 .– Т. 178 . – С. 3-8.

[12] Вдовенко Т. І. Сингулярні збурення рангу один несиметричним потенціалом / Т. І. Вдовенко // Матеріали конференції ``П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука'' (Київ, 15–17, травень, 2014) .– Київ: Нац. техн. ун-т України ``КПІ'' , 2014 .–C. 56.

[13] Вдовенко Т. І. Хвильові оператори сингулярного збурення рангу один несиметричним потенціалом / Т. І. Вдовенко // Тези доповідей. ``Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики'' (Київ, 23–25, квітень, 2015).– Київ: Нац. техн. ун-т України ``КПІ'', 2015.–C.13.

[14] Вдовенко Т. І. Хвильові оператори сингулярного збурення рангу один несиметричним потенціалом / Т. І. Вдовенко // Матеріали конференції ``Шістнадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука'' (Київ, 14–15, травень, 2015) .– Київ: Нац. техн. ун-т України ``КПІ'' , 2015 .–C. 76.

[15] Вдовенко Т. І. Дуальна пара власних значень сингулярних несиметричних збурень / Т. І. Вдовенко // Тези доповідей. ``Міжнародна конференція молодих математиків'' (Київ, 3–6, червень, 2015) .– Київ: Ін-т математики НАН України , 2015 .–C. 63.

[16] Вдовенко Т. І. Модель сингулярного збурення із запізненням (упередженням) / Т. І. Вдовенко // Тези доповідей. Сьома міжнародна наукова конференція ``Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації'' (Кам'янець-Подільський, 21–22, квітень, 2016).– Кам'янець-Подільський: Кам’янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2016 .–C. 28 .

[17] Дудкін М.Є. Сингулярно збурені нормальні оператори / М.Є.Дудкін // Укр. мат. журн.– 1999.– Т. 51 ,№ 8.– C. 1045-1053.

[18] Дудкін М. Е. Сингулярно збурені рангу один нормальні оператори та їх застосування / М. Е. Дудкін. – Київ, 2008. – 38 с. ( Препр. НАН України. Ін-т Математики; 2008.3 )

[19] Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т.Като.– М.:Мир, 1972.– 740 с.

[20] Koшманенко В.Д. Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов/В.Д.Koшманенко.– Киев:Нaук. думка, 1993.–178с.

[21] Koшманенко В.Д. δ-potential perturbations of an n-dimensional Laplace operator. In The Spectral Theory of Operator-differential Equations / В.Д. Koшманенко // К: ДАН СССР. – 1986. – С. 70-79.

[22] Koшманенко В.Д. One-dimensional singular perturbations of selfadjoint operators. In Methods of Functional Analysis in Problems of Mathematical Physics / В.Д. Koшманенко // К: АН УССР. – 1990. – С. 110-122.

[23] Крейн М.Г. Об эрмитовых операторах с дефект-индексами, равными единице I./ М.Г.Крейн // ДАН СССР.– 1944.– Т. 43 , № 3.– C. 323-326.

[24] Крейн М.Г. Об эрмитовых операторах с дефект-индексами, равными единице II. / М.Г.Крейн // ДАН СССР.– 1944.– Т. 44 , № 4.– C. 131-134.

[25] Крейн М.Г. Основные положения теории представлений эрмитовых операторов с индексом дефекта (m,m) / М.Г.Крейн // Укр. мат. журн.– 1949.– № 2.– C. 3-66.

[26] Неймарк М.А. Спектральные функции симмертического оператора / М.А. Неймарк // Бюл. Акад. Наук УССР. – 7 . – 1943. – С. 285-296.

[27] Нижник Л.П. О точечном взаимодействии в квантовой механике / Л.П. Нижник // Укр. матем. журнал.– 1997.– Т. 49, № 11.– С. 1557-1560.

[28] Albeverio S. Dense subspaces in scales of Hilbert spaces / S. Albeverio, R. Bozhok, M. Dudkin, and V. Koshmanenko // Methods Funct. Anal. Topology. – 2005. – 11, № 2, – P. 156 –169.

[29] Albeverio S. On point interactions in one dimension / S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hӧegh-Krohn, W. Kirsch // J. Opere Theory. – 1984. – Vol. 12, 1. – P. 101-126.

[30] Albeverio S. Comments on a recent note on the Schrӧdinger equation with δ’-interaction by B. H. Zhao: –Colnments on the Schrӧdinger equation with δ’-interaction in one dimension / S. Albeverio, F. Gesztesy, H. Holden // (J. Phys. A. – Vol. 25, № 10. –1992. – P. 1617- 1618) J. Phys. A. – Vol. 26, № 15. –1993. – P. 3903-3904.

[31] Albeverio S. Energy forms, Hamiltonians, and distorted Brownian paths / S. Albeverio, R. Hӧegh-Krohn, L. Streit//J. Math. Phys. – Vol. 18. – 1977. – P.901-917.

[32] Albeverio S. Square power of singularly perturbed operators / S.Albeverio, W.Karwowski, V.Koshmanenko // Math. Nachr. – 1995. – Vol. 173. – P. 5-24.

[33] Albeverio S. Form-sum approximations of singular perturbations of selfadjoint operators. Technical report / S. Albeverio, V. Koshmanenko // BIBOS Prep. – 1997. – Vol. 771, № 4. – P. 97.

[34] Albeverio S. On the problem of the right Hamiltonian under singular form-sum perturbations. Technical report / S. Albeverio, V. Koshmanenko // SFB 237 Preprint. – 1997. – №375. – P. 30.

[35] Albeverio S. Rank one perturbations, approximations and self-adjoint extensions / S.Albeverio, P.Kurasov // J. Funct. Anal. – 1997. – Vol. 148. – P. 152-169.

[36] Albeverio S. Rank one perturbations of not semibounded operators / S. Albeverio, P. Kurasov // Int. Eq. Oper. Theory. – 1997. – Vol. 27, 4. – P. 379-400.

[37] Albeverio S. Finite rank perturbations and distribution theory / S. Albeverio, P. Kurasov // Proc. Amer. Math. Soc. – 1999. – Vol. 127, 4. – P. 1151-1161.

[38] Albeverio S. Dual Pair of Eigenvalues / S.Albeverio, M.Dudkin, V.Koshmanenko // Letters in Math. Phis. – 2003. Vol. 63. – P. 219-228.

[39] Albeverio S. On the point spectrum of -syngular perturbations / S.Albeverio, N.Dudkin, A.Konstantinov, V.Koshmanenko // Math. Nachr. – 2007. – Vol. 280, 1-2. – P. 20-27.

[40] Albeverio S. Singular perturbations of differential operators; solvable Schrӧdinger type operators / S.Albeverio, P.Kurasov – Cambridge: Univ. Press, 2000. – 265p.

[41] Albeverio S. On the Perturbation of Self-Adjoint Operators / S.Albeverio, S.Kuzhel, L.Nizhnik // Tokio J. of Mathematics. – 2008. – Vol. 31, № 2. – P. 273-292.

[42] Albeverio S. Schrӧdinger operators with nonlocal point interactions / S.Albeverio, L.Nizhnik // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – Vol. 332. – P. 884-895.

[43] Albeverio S. Inverse spectral problems for nonlocal Sturm-Liouville operators / S. Albeverio, R.Hryniv, L. Nizhnik // Inverse Problems. – 2007. – Vol. 23. – P. 523-535.

[44] Aronszajn N. On a problem of Weyl in the theory of singular Sturm-Liouville equations / N. Aronszajn // Amer. J. Math. – 1957. – Vol. 79. – P. 597-610.

[45] Aronszajn N. Finite-dimensional perturbations of spectral problems and variational approximation methods for eigenvalue problems. I: Finite-dimensional perturbations / N. Aronszajn, R.D. Brown // Studia Math. – 1970. – Vol. 36. – P. 1-76.

[46] Aronszajn N. On exponential representations of analytic functions in the upper half-plane with positive imaginary part / N. Aronszajn, W.F. Donoghue // J. Anal. Math. – 1956. – Vol. 5. – P. 321-388.

[47] Aronszajn N. A supplement to the paper on exponential representations of analytic functions in the upper half-plane with positive imaginary part / N. Aronszajn, W. F. Donoghue // J. Anal. Math. – 1964. – Vol. 12. – P. 113-127.

[48] Berezansky Y. Generalized selfadjoint operators and their singular perturbations / Y. Berezansky, J. Brasche // Methods Funct. Anal. Topology. – 2001. – Vol. 7, №3. – P. 54-66.

[49] Brasche J.F. Perturbation of Schrӧdinger Hamiltonians by measures selfadjointness and lower semiboundedness / J.F. Brasche // J. Math. Phys. – 1985. – Vol. 26, №4. – P. 621-626.

[50] Buschmann D. One-dimensional Schrӧdinger operators with local point interactions / D. Buschmann, G. Stolz, J.Weidmann // J. Reine Angew. Math. – 1995. – Vol. 467. – P. 169-186.

[51] Calkin J. W. Abstract symmetric boundary conditions / J.W. Calkin // Trans. Amer. Math. Soc. – 1939. – Vol. 45. – P. 369-442.

[52] Dudkin M. E. The Point Spectrum of Self-Adjoint Operators That Appears under Singular Perturbations of Finite Rank / M. E. Dudkin, V. D. Koshmanenko // Ukrainian Math. J. – 2003. – Vol. 55, (9). – P. 1532-1541.

[53] Dudkin M. Invariant symmetric restrictions of a self-adjoint operator. II / M. Dudkin // Ukrain. Mat. Zh. – 1998. – Vol. 50, №6. – P. 781 – 791(Ukrainian), English transl., Ukrain. Math. J. – 1998 Vol. 50, № 6. – P. 888 –900.

[54] Dudkin M. Singularly perturbed normal operators / M. Dudkin // Ukrain. Mat. Zh. – 1999. – Vol. 51, 8. – P. 1045 –1053(Ukrainian), English transl., Ukrain. Mat. J.. – 1999. – Vol. 51, 8. – P. 1177 –1187.

[55] Dudkin M. Singularly perturbed normal operators / M.E. Dudkin, L.P. Nizhnik // Methods Funct. Anal. Topology – 2010. – Vol. 16, 4. – P. 298-303.

[56] Dudkin M. E. On nonsymmetric rank one singular perturbations of selfadjoint operators / M. E. Dudkin, T. I. Vdovenko // Methods Funct. Anal. Topology. – 2016. – Vol. 22, № 2. – P. 137-151.

[57] Dudkin M. E. Dual pair of eigenvalues in rank one singular perturbations / M. E. Dudkin, T. I. Vdovenko // Matematychni Studii. – 2017. – Vol. 48, № 2. – P. 156-164.

[58] Dudkin M. E. On extensions of linear functionals with applications to non-symmetrically singular perturbations / M. E. Dudkin, T. I. Vdovenko// Methods Funct. Anal. Topology. – 2018. – Vol. 24, 3. – №. 193-206.

[59] Dudkin M. E. Spectral problem for a rank one singular perturbation by nonsymmetric potential / Dudkin M. E., Vdovenko T. I. // Матеріали конференції ``П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука'' (Київ, 15–17, травень, 2014). – Київ: Нац. техн. ун-т України ``КПІ'', 2014. – C. 14.

[60] Gesztesy F. One-dimensional Schrӧdinger operators with interactions singular on a discrete set / F. Gesztesy, W. Kirsch // J. Reine Angew. Math. – 1985. – Vol. 362.– P. 28-50.

[61] Gesztesy F. Rank-one perturbations at infinite coupling / F.Gesztesy, B.Simon // J. Funct. Anal. – 1995. – Vol. 128. – P. 245-252.

[62] Grod A. Schrӧdinger operators with non-symmetric zero-range potentials / A. Grod, S. Kuzhel // Methods Funct. Anal. Topology. – 2014. Vol. 20, № 1. – P. 34-49.

[63] Karataeva T. V. Generalized sum of operators / T. V. Karataeva, V. D. Koshmanenko // Math. Notes. – 2000. – Vol. 66, №№ 5-6. – P.556-564.

[64] Karwowski W. Hamiltonians with additional kinetic energy terms on hypersurfaces. In Applications of Selfadjoint Extensions in Quantum Physics / W. Karwowski // Lecture Notes in Phys. – 1989. – Vol. 324. – P. 203-217.

[65] Karwowski W. Additive regularization of singular bilinear forms / W. Karwowski, V. Koshmanenko // Ukraine Mat. Zh. – 1990. – Vol. 42, № 9. – P. 1199-1204.

[66] Karwowski W. On definition of the singular bilinear forms and singular linear operators / W.Karwowski, V.Koshmanenko // Ukr. Math. J. – 1993. – Vol. 45, №8. – P. 1084-1089.

[67] Karwowski W. Regular restrictions of singular bilinear forms / W. Karwowski, V. Koshmanenko // Funktsional. Anal. i Prilozhen. – 1995. – Vol. 29, № 2. – P. 79-81.

[68] Karwowski W. Singular quadratic forms: regularization by restriction / W.Karwowski, V.Koshmanenko // J. Funct. Anal. – 1997. – Vol. 143. – P. 205-220.

[69] Kato T. Wave Operators and Similarity for Some Non-selfadjoint Operators / T. Kato // Math. Annalen. – 1966. – Vol. 162. – P. 258-279.

[70] Kiselev A. Rank one perturbations with infinitesimal coupling / A.Kiselev, B.Simon // J. Funct. Anal. – 1995. – Vol. 130. – P. 345-356.

[71] Kochubei A.N. One-dimensional point interactions / A.N. Kochubei // Ukrain. Mat. Zh. – 1989. – Vol. 41, 10. – P. 1391-1395, 1439.

[72] Kochubei A.N. Point interactions in one dimension / A.N. Kochubei // In Schrӧdinger Operators, Standard and Nonstandard. – 1989. – P. 78-100.

[73] Koshmanenko V.D. Singular bilinear forms and selfadjoint extensions of symmetric operators / V. Koshmanenko // In Spectral Analysis of Differential Operators, Akad. Nauk Ukraine SSR Inst. Mat., Kiev. – 1980. – P. 37-48, 133.

[74] Koshmanenko V.D. Perturbations of self-adjoint operators by singular bilinear forms / V.D.Koshmanenko // Ukr. Math. J. – 1989. – Vol. 41. – P. 3-19.

[75] Koshmanenko V. Singular perturbations deffined by forms. In Applications of Selfadjoint Extensions in Quantum Physics / V. Koshmanenko // Lecture Notes in Phys. – 1989. – Vol. 324. – P. 55-66.

[76] Koshmanenko V.D. Towards the rank-one singular perturbations of self-adjoint operators / V.D.Koshmanenko // Ukr. Math. J. – 1991. – Vol. 43, № 11. – P. 1559-1566.

[77] Koshmanenko V.D. Singular quadratic forms in perturbation theory / V.D.Koshmanenko. – Kluwer Acad. Publisher, 1999. – 300 p.

[78] Koshmanenko V.D. Singularly perturbed operators. In Mathematical Results in Quantum Mechanics / V. Koshmanenko // Oper. Theory and Appl. – 1994. – Vol. 70. – P. 347-351.

[79] Koshmanenko V.D. Singularly perturbed operators of type –Δ+λδ, in Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics / V.D.Koshmanenko. – Netherland: Kliwer Acad. Publ., 1996. – P. 433-436.

[80] Koshmanenko V.D. On the characteristic properties of singular operators / V. Koshmanenko, Sh. Ota // Ukrain. Math. Zh. – 1996. – Vol. 48, № 11. – P. 1484-1493.

[81] Koshmanenko V.D. The Method of Rigged Spaces in Singular Perturbation Theory of Self-Adjoint Operators / V. Koshmanenko, M. Dudkin// Operator Theory: Advances and Applications, 253, Birkhauser, Cham, Springer International Publishing Switzerland. – 2016. – xii+237 pp.

[82] Krein M.G. On a remarkable class of Hermitian operators / M.G. Krein // Comptes Rendue (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.). – 1944. – Vol. 44. – P. 175-179.

[83] Krein M.G. Concerning the resolvents of an Hermitian operator with the deficiency-index (m;m) / M.G. Krein // Comptes Rendue (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.). – 1946. – Vol. 52. – P. 651-654.

[84] Kurasov P. Distribution theory for discontinuous test functions and differential operators with generalized coefficients / P. Kurasov // J. Math. Anal. Appl. – 1996 – Vol. 201, № 1. – P. 297-323.

[85] Kurasov P. Finite rank singular perturbations and distributions with discontinuous test functions / P. Kurasov, J. Boman // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – Vol. 126, № 6. – P. 1673-1683.

[86] Maioli M. One-dimensional many point interactions and stability of eigenvalues / M. Maioli, A. Sacchetti // Boll. Un. Mat. Ital. – 1991. – Vol. A(7), Vol. 5(3). – P. 363-372.

[87] Mikhailets V.A. A one-dimensional Schrodinger operator with point interactions / V.A. Mikhailets // Dokl. Akad. Nauk. – 1994. – Vol. 335, №4. – P. 421-423.

[88] Mikhailets V.A. On the Schrӧdinger operator with point δ’-interactions / V.A. Mikhailets // Dokl. Akad. Nauk. – 1996. – Vol. 348, № 6. – P. 727-730.

[89] Mikhailets V. A. The structure of the continuous spectrum of the one-dimensional Schrӧdinger operator with point interactions / V.A. Mikhailets // Funktsional. Anal. i Prilozhen. – 1996. – Vol. 30, № 2. – P. 90-93.

[90] Nizhnik L.P. On rank one singular perturbations of selfadjoint operators / L.P.Nizhnik // Method Funct. Anal. and Topology. – 2001. – Vol. 7, № 3. – P. 54-66.

[91] Nizhnik L.P. Inverse nonlocal Sturm-Liouville problem / L.P.Nizhnik // Inverse problems. – 2010. – Vol. 26, 9 p.

[92] Nizhnik L.P. Inverse spectral nonlocal problem for the first order ordin ary differential equation / L. Nizhnik // Tamkang Journal of Mathematics. – 2011. – Vol. 42, № 3. – P. 385-394.

[93] Saakjan S.N. Theory of resolvents of a symmetric operator with infinite defect numbers / S.N. Saakjan // Akad. Nauk Armjan. SSR Dokl. – 1965. – Vol. 41, P. 193-198.

[94] Seba P. Schrӧdinger particle on a half line / P. Seba // Lett. Math. Phys. – 1985. – Vol. 10, № 1. – P. 21-27.

[95] Seba P. The generalized point interaction in one dimension / P. Seba // Czechoslovak J. Phys. B. – 1986. – Vol. 36, № 6. – P. 667-673.

[96] Seba P. Some remarks on the δ’-interaction in one dimension / P. Seba // Rep. Math. Phys. – 1986. – Vol. 24, № 1. – P. 111-120.

[97] Seba P. A remark about the point interaction in one dimension / P. Seba // Ann. Physik(7). – 1987. – Vol. 44, № 5. – P. 323-328.

[98] Shubin C. Spectral theory of one-dimensional Schrӧdinger operators with point interactions / C. Shubin, G. Stolz // J. Math. Anal. Appl. – 1994. – Vol. 184, № 3. – P. 491-516.

[99] Simon B. Singular continuous spectrum under rank one perturbations and localization for random Hamiltonians / B. Simon, T. Wol // Comm. Pure Appl. Math. – 1986. – Vol. 39, № 1. – P. 75-90.

[100] Zolotarev V.A. Inverse spectral problem for the operators with nonlocal potential / V.A. Zolotarev // Math. Nachrichten. – 2018. – P. 1-21.

# ДОДАТОК

Цей додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

**Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:**

1.  *Вдовенко Т. І.* Строго сингулярні збурення рангу один несиметричним потенціалом / Т. І. Вдовенко, М.Є.Дудкін // Наукові Вісті НТУУ “КПІ”. – 2014. – № 4. – С. 13-17 (входить до міжнародних наукометричних баз WorldCat, OpenAIRE, РІНЦ, EBSCO, Google Scholar). Співавтору належить постановка задачі і загальне керівництво дослідженням.

2.  *Вдовенко Т. І.* Сингулярні рангу один несиметричні збурення самоспряженого оператора. “Спектральна теорія операторів та наборів операторів” / Т. І. Вдовенко, М. Є. Дудкін // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2015. – Т. 12, № 1. – С. 57-73 (входить до міжнародної наукометричної бази MathSciNet, Google Scholar). Співавтору належить постановка задачі і загальне керівництво дослідженням.

3.  *Dudkin M. E.* On nonsymmetric rank one singular perturbations of selfadjoint operators / M. E. Dudkin, T. I. Vdovenko // Methods Funct. Anal. Topology. – 2016. – Vol. 22, № 2.– С. 137-151. (входить до міжнародних наукометричних баз MathSciNet, Google Scholar). Співавтору належить постановка задачі і загальне керівництво дослідженням.

4.  *Dudkin M. E.* Dual pair of eigenvalues in rank one singular perturbations/ M. E. Dudkin, T. I. Vdovenko // Matematychni Studii. – 2017. – Vol. 48, № 2.– С. 156-164 (входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Index Copernicus, Zentralblatt MATH, MathSciNet, Google Scholar). Співавтору належить постановка задачі і загальне керівництво дослідженням.

5.  *Dudkin M. E.* On extensions of linear functionals with applications to non-symmetrically singular perturbations / M. E. Dudkin, T. I. Vdovenko // Methods Funct. Anal. Topology. – 2018. – Vol. 24, № 3.– С. 193-206 (входить до міжнародних наукометричних баз Scopus, Web of Science, MathSciNet, Google Scholar). Співавтору належить постановка задачі і загальне керівництво дослідженням.

**Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:**

1.  *Dudkin M. E.* “Spectral problem for a rank one singular perturbation by nonsymmetric potential” / Dudkin M. E., Vdovenko T. I. // Матеріали конференції “П’ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука” (Київ, 15–17, травень, 2014). – Київ: Нац. техн. ун-т України “КПІ”, 2014. – C. 14. Особисті внески співавтора є рівноцінними.

2.  *Вдовенко Т. І.* Сингулярні збурення рангу один несиметричним потенціалом / Т. І. Вдовенко // Матеріали конференції “П’ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука” (Київ, 15–17, травень, 2014). – Київ: Нац. техн. ун-т України “КПІ”, 2014. – C. 56.

3.  *Вдовенко Т. І.* Дуальна пара власних значень сингулярних несиметричних збурень / Т. І. Вдовенко // Тези доповідей. “Міжнародна конференція молодих математиків” (Київ, 3–6, червень, 2015). – Київ: Ін-т математики НАН України, 2015. – C. 63.

4.  *Вдовенко Т. І.* Модель сингулярного збурення із запізненням (упередженням) / Т. І. Вдовенко // Тези доповідей. Сьома міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації” (Кам’янець-Подільський, 21–22, квітень, 2016). – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2016. – C. 28.

**Відомості про апробацію результатів дисертації:**

XV Міжнародна наукова конференція ім. акад. М.Кравчука (Київ, 2014);

Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 2015);

Сьома міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації” (Кам’янець-Подільський, 2016);

Семінар кафедри диференціальних рівнянь фізико-математичного факультету НТУУ “КПІ ім. І.Сікорського” (керівник: проф. М.Є. Дудкін, 2016, 2018);

Семінар відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівники: проф. О.Л.Ребенко, проф. В.Д. Кошманенко, 2013);

Київський семінар з функціонального аналізу Інституту математики НАН України (керівники: академік НАН України Ю.М. Березанський, академік НАН України Ю.С. Самойленко, член-кореспондент НАН України М.Л. Горбачук 2016).