

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

СОЛДАТОВА МАРІЯ ОЛЕКСАНДРІВНА

УДК 681.52

ДИСЕРТАЦІЯ

**АВТОМАТИЗАЦІЯ ПРОЦЕСУ СТАБІЛІЗАЦІЇ ПРОГРАМНОГО
РУХУ БЕЗПІЛОТНОГО ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТУ(БПЛА)**

спеціальність 05.13.07 – автоматизація процесів керування

015 – автоматизація та приладобудування

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне
джерело _____ М.О.Солдатова

Науковий керівник: Ткач Михайло Мартинович, кандидат технічних наук,
доцент

Київ-2019

АНОТАЦІЯ

Солдатова М.О. Автоматизація процесу стабілізації програмного руху безпілотного літального апарату (БПЛА). Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 13.05.07 «Автоматизація процесів керування» (015 – автоматизація та приладобудування). – Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», Київ, 2019.

Теоретична і практична значущість завдань аналізу і синтезу оптимальних систем стабілізації програмного руху БПЛА, при відносній складності його математичного та обчислювального апарату, з очевидністю визначають необхідність широкого використання сучасних засобів комп'ютерної техніки та сучасних комп'ютерних технологій для реалізації відповідних методів і обчислювальних алгоритмів. Проте відомі підходи та конкретні універсальні методи оптимального синтезу законів автоматичного управління в цілому не орієнтовані на їх широке застосування для вирішення специфічних завдань, що виникають в практиці дослідницького проектування систем управління БПЛА. У зв'язку з цим, актуальним є проведення досліджень, спрямованих на розвиток математичних методів оптимізації перехідних процесів стабілізації програмного руху БПЛА в різних умовах польоту.

Метою роботи є розробка спеціалізованого математичного апарату і алгоритмічного забезпечення вирішення задач мінімізації енергетичних затрат БПЛА за рахунок оптимальної системи автоматичної стабілізації програмного руху БПЛА.

Обґрунтовано використання в режимах стабілізації програмного руху БПЛА лінеаризованих моделей, для яких розроблено узагальнену

процедуру оцінки параметрів моделей руху БПЛА на основі сплайн-функцій та функцій Уолша, яка реалізована практично для низки моделей руху БПЛА. Для вибору шагу процесу ідентифікації запропонований адаптивний алгоритм, який дозволяє значно підвищити точність отриманих оцінок.

Оскільки синтез оптимальних законів стабілізації програмного руху нестаціонарними БПЛА в аналітичній формі має певні труднощі, пов'язані з необхідністю вирішення нелінійного диференціального рівняння Ріккати, а також їх практичною реалізацією, в роботі вперше запропоновано метод перетворення одного класу лінійних нестаціонарних моделей руху БПЛА в еквівалентні їм лінійні стаціонарні моделі, для яких можна застосувати добре відомі й апробовані методи оптимізації. Якщо це зробити неможливо, в роботі вперше запропоновано процедуру синтезу оптимальних законів стабілізації програмного руху БПЛА з використанням матриці переходів стану, яка може бути отримана в аналітичній формі у вигляді рядов Уолша.

Для стаціонарних БПЛА з метою забезпечення необхідних динамічних показників процесу стабілізації вперше запропоновано модальний синтез з використанням нового методу невизначених коефіцієнтів. При наявності запізнювання в контурі управління БПЛА запропоновано використовувати метод компенсації запізнювання Бесса. Вибір бажаного спектру коренів замкнутої оптимальної системи забезпечується запропонованою в роботі процедурою їх розташування та корекції.

Для стаціонарних БПЛА з параметричною невизначеністю вперше запропоновано процедуру модального синтезу оптимальних законів стабілізації програмного руху з використанням принципу гарантованої динаміки. Для аналізу і синтезу оптимальних законів стабілізації програмного руху БПЛА запропоновані методи агрегації змінних стану і спрощення структури оптимальних регуляторів.

Наукова новизна отриманих в дисертаційній роботі результатів полягає у наступному:

- Вперше запропоновано метод перетворення одного класу лінійних нестационарних моделей руху БПЛА в еквівалентні їм лінійні стаціонарні моделі, для яких можна застосувати добре відомі й апробовані методи оптимізації.
- Вперше запропонована процедура оптимізації процесів стабілізації програмного руху БПЛА на основі принципу мінімуму в поєднанні зі сплайн-функціями і функціями Уолша, що дозволяє синтезувати оптимальні закони стабілізації в аналітичній формі.
- Вперше запропоновано метод невизначених коефіцієнтів для реалізації процедури модального синтезу для лінійних динамічних моделей БПЛА, який на відміну від існуючих дає можливість визначити оптимальний закон стабілізації з заданими показниками якості перехідних процесів, у тому числі і при наявності запізнення в контурі управління.
- Вперше запропонована процедура оптимізації процесів стабілізації руху стаціонарних БПЛА з параметричною невизначеністю на основі модального синтезу і принципу гарантованої динаміки, що дає можливість синтезу робастного стабілізатора програмного руху БПЛА.

Ключові слова: БПЛА, програмна траєкторія, параметрична ідентифікація, лінійні нестационарні системи, сплайн-функції і функції Уолша, оптимальна стабілізація, принцип мінімуму, фазовий простір, модальний синтез, робастний регулятор

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

За підсумками роботи опубліковані 15 наукових праць, з яких 11 статей у провідних фахових виданнях, 7 з яких входять до міжнародної наукометричної бази Index Copernicus, інші до WorldCat, Google scholar , РІНЦ і 4 тези за матеріалами науково-практичних конференцій:

1. А.А.Стенин, В.М.Бурлаков, В.В.Курбанов, М.А.Солдатова Синтез оптимального регулятора состояния в нестационарных системах на

- базе Функций Уолша. Bulgarian Journal for Engineering Design, issue. Mechanical Engineering Faculty, Technical University-Sofia №25.2015.с.с.67-72. (*запропоновано синтез оптимального по витраті енергії регулятора стану лінійних нестационарних систем*) Index Copernicus
2. А.А.Стенин, О.И.Лисовиченко, В.П.Пасько, М.А.Солдатова Оптимизация энергозатрат в динамических системах с последствием. Bulgarian Journal for Engineering Design, issue. Mechanical Engineering Faculty, Technical University-Sofia..№27 .2015 .с.с.83-87.(*запропоновано синтез оптимального по витратам палива управління в лінійних динамічних системах*) Index Copernicus
 3. А.И.Михалёв.А.А.Стенин, В.П.Пасько, М.А.Солдатова Идентификация квазистационарных систем на базе сплайн-функций и функций Уолша. Системные технологии - Днепр-ск: НМетАУ, ИВК «Системні технології», №5(100),2015.с.с.53-60(*розроблений алгоритм параметричної ідентифікації квазістаціонарних систем*) Index Copernicus
 4. А.А.Стенин,О.И.Лисовиченко,Д.А.Гуменный,М.А.Солдатова.Параметрическая идентификация линейных распределенных динамических систем (секвентный подход) Bulgarian Journal for Engineering Design, issue. Mechanical Engineering Faculty, Technical University-Sofia. № 31, 2017.рр.72-77 (*розроблено алгоритм ідентифікації параметрів розподілених систем*) Index Copernicus
 5. А.А.Стенин, Е.Ю.Мелкумян Писаренко Ю.В. Солдатова М.А. Адаптивная параметрическая сплайн-идентификация линейных нестационарных систем// Міжвідомчий науково-технічний збірник «Адаптивні системи автоматичного управління». – Київ: Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», - 2014. - Вип. 1(24).с.с.113-121(*розроблений алгоритм адаптивного вибору шагу дискретизації для функцій Уолша*)WorldCat, Google scholar , РІНЦ

6. О.І.Михальов, О.А.Стенін, М.О.Солдатова, О.С.Стенін Модальна робастна стабілізація об'єктів керування з параметричною невизначеністю// Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник.- Вип.-№2(115). Дніпро.-2018.с.61-67. (*запропоновано метод робастного модального управління*) Index Copernicus
7. Е.Ю.Мелкумян, М.А.Солдатова Метод эквивалентного преобразования одного класса линейных нестационарных систем\\ Міжвідомчий науково-технічний збірник «Адаптивні системи автоматичного управління». – Київ: Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», - 2015. - Вип. 1(26) .с.с.102-105.(*запропоновано метод еквівалентного перетворення*) WorldCat, Google scholar , РІНЦ
8. А.А.Стенин, М.М.Ткач, В.П.Пасько, М.А.Солдатова Методы агрегирования переменных в математических моделях динамических систем . Міжвідомчий науково-технічний збірник «Адаптивні системи автоматичного управління». – Київ: Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», - 2016. - Вип. 1(28).с.с.129-137.(*запропоновано метод агрегування змінних стану для зниження розмірності системи управління*) WorldCat, Google scholar , РІНЦ
9. А.А. Стенин, В.П. Пасько, Е.Ю. Мелкумян, М.А. Солдатова Анализ проблемы синтеза систем управления нелинейными динамическими объектами. Міжвідомчий науково-технічний збірник «Адаптивні системи автоматичного управління». – Київ: Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», - 2015. Вип. 2(27).с.с.101-110. (*формування функціоналів якості нелінійних систем управління*) WorldCat, Google scholar , РІНЦ
10. A.I.Mikhalyov, A.A.Stenin, V.N.Ignatenko, M.A.Soldatova, A.S.Stenin Synthesis of optimal consumption fuels one class of linear nonstationary systems (the method of predicted control) // System technologies. Regional interuniversity collection. -№6(119), Dnipro.-2018. pp.64-72.

(запропоновано оптимальний за витратами палива алгоритм управління одним класом лінійних нестационарних систем) Index Copernicus

11. Михалев А.И., Солдатова М.А., Стенин А.С. Модальный синтез оптимальных законов стабилизации объектов управления с транспортным запаздыванием // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. - Выпуск 4 (111). - Дніпро, 2017. сс.30 -38. *(запропоновано модальний синтез систем із запізнюванням)* Index Copernicus

Опубліковані праці апробаційного характеру

12. А.И.Михалев, М.А.Солдатова, А.С.Стенин Модальный синтез оптимальных законов стабилизации технологических процессов с запаздыванием в контуре управления (матеріали міжнародній науково-технічній конференції «Інформаційні технології в металургії та машинобудуванні» с.17-18), 28-30 березня 2017 р. м.Дніпро *(запропоновано використання методу Бесса для компенсування запізнювання в контурі управління)*
13. Алексієв О.П., Солдатова М. О., Створення програмного забезпечення стабілізації руху безпілотних транспортних засобів (БТЗ) (матеріали науково-методичної конференції «Особливості викладання фахових дисциплін технічних спеціальностей – виклики часу та перспективи» с.116), 21 березня 2017 р., м. Харків *(створення програмного забезпечення стабілізації руху)*
14. В.М.Томашевський, В.П.Пасько, М.О.Солдатова Обобщенная методика идентификации параметров линейных динамических моделей технических систем(матеріали міжнародній науково-технічній конференції “Математичне та імітаційне моделювання систем МОДС '2017”сс/150-154), 26-29 червня 2017,м.Чернігів *(запропонована узагальнена методика параметричної ідентифікації)*

15. М.М.Ткач, В.П.Пасько, М.О.Солдатова Синтез робастного регулятора линейных динамических систем с неопределенностью параметров (матеріали міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні управляючі системи та технології ІУСТ – Одеса – 2017» с.с.100-103), 20-22 вересня 2017 р, м. Одеса (*запропонований модальний синтез робастного регулятора на основі принципу гарантованої динаміки*)

ANNOTATION

Soldatova M.O. Automation of the process of stabilization of the software movement of an unmanned aerial vehicle (UAV). - Qualifying scientific work based on the rights of the manuscript.

The thesis for a candidate of technical science degree in speciality 13.05.07 "Automation of control processes" (015 - Automation and instrument making). - National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute ", Kyiv, 2019.

The theoretical and practical significance of the tasks of analysis and synthesis of optimal systems of stabilization of the software movement of the UAV, with the relative complexity of its mathematical and computer apparatus, clearly determine the need for widespread use of modern means of computer technology and modern computer technologies for the implementation of appropriate methods and computational algorithms. However, known approaches and specific universal methods for the optimal synthesis of automatic control laws are not aimed at their wide use for solving specific problems arising in the practice of developing research on control systems of UAVs. In this regard, it is urgent to carry out research aimed at the development of mathematical methods for optimizing the transitional processes of stabilizing the UAV software movement in different flight conditions.

The purpose of the work is to develop a specialized mathematical apparatus and algorithmic support for solving the problems of minimizing energy costs of UAV at the expense of an optimal system of automatic stabilization of the software movement of the UAV. The use of optimal stabilization systems for UAV software movement is justified.

Linearized models for which a generalized procedure for estimating the parameters of UAV motion models based on spline functions and Walsh functions is developed, which is practically implemented for a number of UAV propulsion models. To select the step of the identification process an adaptive algorithm is proposed, which allows a significant increase in the accuracy of the estimates obtained.

The synthesis of the optimal laws of stabilizing the software motion of non-stationary UAVs in an analytical form has some difficulties. This is due to the need to solve the nonlinear Riccati differential equation, as well as the practical implementation of the obtained control law. For the first time, a method for converting a class of linear non-stationary models of UAV motion into equivalent stationary models for which well-known and proven optimization methods can be applied is proposed. If this is not possible, the procedure of the synthesis of optimal laws of stabilization of the UAV software motion is proposed. This procedure use the state transition matrix gives possibility to get an analytical form in the form of Walsh series.

For stationary UAVs in order to provide the necessary dynamic parameters of the stabilization process, for the first time modal synthesis using a new method of indefinite coefficients is proposed. In the presence of delay in the control system of the UAV, use the method of compensating for the delay of Bess. The choice of the desired spectrum of the roots of a closed optimal system is proposed procedure of their arrangement and correction in the work.

For the first time for stationary UAVs with parametric uncertainty the original procedure of modal synthesis of optimal laws of stabilization of software motion using the principle of guaranteed dynamics is proposed. For the analysis

and synthesis of optimal laws of stabilization of the software movement of the UAV, methods of aggregation of state variables and simplification of the structure of optimal regulators are proposed.

The scientific novelty of the results obtained in the dissertation is as follows:

- for the first time the method of converting one class of linear non-stationary models of UAV motion into equivalent linear stationary models for which well-known and proven optimization methods can be applied;

- for the first time, a procedure was proposed for optimizing the stabilization of the UAV software movement based on the principle of minimum in conjunction with the Walsh spline functions and functions, which allows synthesizing optimal stabilization laws in an analytical form;

- for the first time a method of indeterminate coefficients was proposed for the implementation of the modal synthesis procedure for linear dynamic UAV models, which, in contrast to existing ones, provides an opportunity to determine the optimal stabilization law with the given quality indices of transients, including those with a delay in the control circuit;

- for the first time a procedure was proposed for optimizing the stationary stabilization of stationary UAV with parametric uncertainty on the basis of modal synthesis and the principle of guaranteed dynamics, which enables the synthesis of a robust stabilizer of the software movement of the UAV.

Keywords: UAV, software trajectory, parametric identification, linear non-stationary systems, spline functions and Walsh functions, optimal stabilization, minimum principle, phase space, modal synthesis, robust controller

LIST OF CANDIDATE'S PUBLICATIONS

As a result of the work, 15 scientific papers have been published, of which 11 articles in the leading professional editions, 7 of which are included in the international science-based base Index Copernicus, others to WorldCat, Google

scolar, RINTS and 4 theses on the materials of scientific and practical conferences:

1. A.A.Stenin, V.M.Burlakov, V.V.Kurbanov, M. A.Soldatova Synthesis of the optimal state controller in nonstationary systems based on Walsh's functions. Bulgarian Journal for Engineering Design, issue. Mechanical Engineering Faculty, Technical University-Sofia No. 25.2015. pp.67-72. *(The synthesis of the optimal energy consumption of the regulator of the state of linear non-stationary systems is proposed)* Index Copernicus
2. A.A. Stenin, O.I. Lysovichenko, V.P. Pasko, M.A. Soldatova Optimization of energy consumption in dynamic systems with aftereffect. Bulgarian Journal for Engineering Design, issue. Mechanical Engineering Faculty, Technical University-Sofia. No. 27 .2015 .ss.83-87. *(The synthesis of optimal fuel consumption management in linear dynamic systems is proposed)* Index Copernicus
3. A.I. Mikhalev, A.A. Stenin, V.P. Pasko, M.A. Soldatova Identification of Quasi-Stationary Systems Based on Walsh Spline Functions and Functions. System technologies - Dnepr-sk: NMetAU, IVC "System technologies", №5 (100), 2015.-pp.53-60 *(developed algorithm for parametric identification of quasi-stationary systems)* Index Copernicus
4. A.A.Stenin, O.I. Lisovichenko, D.A. Humenny, M.A. Soldatova Parametric identification of linear distributed dynamical systems (sequencing approach) Bulgarian Journal for Engineering Design, issue. Mechanical Engineering Faculty, Technical University-Sofia No. 31, 2017, pp. 72-77, *(Algorithm of identification of parameters of distributed systems is developed)* Index Copernicus
5. A.A. Stenin, E.Yu. Melkumyan, Yu.V. Pisarenko, M.A. Soldatova Adaptive parametric spline identification of linear non-stationary systems // Interdepartmental scientific and technical collection "Adaptive systems of automatic control". - Kyiv: National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", 2014. - Issue. 1 (24) .pp.113-121 *(algorithm*

for adaptive selection of sampling steps for Walsh functions is developed) WorldCat, Google scholar, RINC

6. A. I. Mikhalev, A. A. Stenin, N. Ah.Soldatova, A. S. Stenin Modal robust stabilization of control objects with parametric uncertainty// System technologies. Regional interuniversity collection.- Issue.-№2(115). Dnipro.-2018.cc.61-67 (*robust modal control method developed*) Index Copernicus
7. E.Yu. Melkumyan, M.A. Soldovova A method of equivalent transformation of a class of linear non-stationary systems \\\ Interdepartmental scientific and technical collection "Adaptive systems of automatic control". - Kyiv: National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", 2015. - Issue. 1 (26) .pp.102-105 (*proposed equivalent conversion method*) WorldCat, Google scholar, RINC
8. A.A.Stenin, M.M. Tkach, V.P. Pasko, M.A. Soldovova Methods of aggregation of variables in mathematical models of dynamical systems. Interdepartmental scientific and technical collection "Adaptive systems of automatic control". - Kyiv: National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", 2016. - №1 (28) .pp.129-137 (*the method of aggregation of state variables for reducing the control system dimension is proposed*) WorldCat, Google scholar, RINC
9. A.A. Stenin, VP Pasko, E.Yu. Melkumyan, MA Soldatova Analysis of the Problem of Synthesis of Control Systems for Nonlinear Dynamic Objects. Interdepartmental scientific and technical collection "Adaptive systems of automatic control". - Kyiv: National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute" - 2015. 2 (27) .pp.101-110. (*Formation of functionality of quality of nonlinear control systems*) WorldCat, Google scholar, RINC
10. A.I.Mikhalyov, A.A.Stenin, V.N.Ignatenko, M.A.Soldatova, A.S.Stenin Synthesis of optimal consumption fuels one class of linear nonstationary systems (the method of predicted control) // System technologies. Regional interuniversity collection.-№6 (119) Dnipro.-2018.pp.64-72. (the optimal

fuel cost control algorithm for one class of linear non-stationary systems proposed) Index Copernicus

11. Mikhalev A.I., Soldatova M.A., Stenin A.S. Modal synthesis of optimal laws of stabilization of control objects with transport lagging // System technologies. Regional inter-university collections of scientific works. - Issue 4 (111). - Dnipro, 2017. pp.30-38. (*Modal synthesis of delayed systems is suggested*) Index Copernicus

a. Published works of approbation kind

12. A.I.Mikhalev, M. A.Soldatova, A.S.Stenin Modal synthesis of optimal laws of stabilization of technological processes with retardation in the control circuit (materials of the international scientific and technical conference "Information technologies in metallurgy and machine building" p.17- 18), March 28-30, 2017 in the city of Dnipro (*the use of Bess's method for compensating the delay in the control circuit is proposed*)
13. Alekseyev O.P., Soldatova M.O., Creation of Software for Stabilization of Unmanned Vehicle Movement (BTS) (materials of the scientific-methodical conference "Features of Teaching Professional Disciplines of Technical Specialties - Challenges of Time and Prospects" p.116), 21 March 2017, m. Kharkiv (*creation of software for stabilization of the movement*)
14. V.M. Tomashevsky, V.P. Pasko, M.O. Soldatova Generalized method of identification of parameters of linear dynamic models of technical systems (materials of the international scientific and technical conference "Mathematical and simulation modeling of systems of MODS '2017" pp.150-154), June 26-29, 2017, Chernihiv (*proposed generalized method of parametric identification*)
15. M.Tkach, V.Pasko, M.Soldatova Synthesis robust controller lineing dynamic systems with uncertain parameters (materials of the international scientific-practical conference "Information control systems and technology I – Odessa – 2017"S. S. 100-103), September 20-22, 2017,

Odessa (*proposed modal synthesis of robust controller on the basis of the principle guaranteed speakers*).

ЗМІСТ

ВСТУП.....	17
 ГЛАВА 1. АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ АВТОМАТИЗАЦІЇ ПРОЦЕСУ СТАБІЛІЗАЦІЇ ПРОГРАМНОГО РУХУ БПЛА	
1.1. Обґрунтування актуальності використання БПЛА. Приклади БПЛА літакового типу, математичні моделі руху, основні завдання управління	23
1.2. Аналіз проблеми стабілізації програмного руху БПЛА.....	35
1.3. Структурно-функціональна схема автоматизації процесу стабілізації програмного руху БПЛА. Постановка завдань дослідження	47
1.4. Математичний апарат наближення та ідентифікації параметрів лінійних динамічних моделей БПЛА	51
1.5. Обґрунтування використання лінеаризованих моделей руху БПЛА.....	55
1.6. Висновки.....	58
 ГЛАВА 2. ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ	
2.1. Узагальнена процедура ідентифікації параметрів лінійних динамічних моделей БПЛА.....	59
2.2. Оцінка параметрів стаціонарних моделей БПЛА	62
2.3. Оцінка параметрів нестаціонарних моделей БПЛА.....	65
2.4. Адаптивний алгоритм вибору шагу розбиття інтервалу спостереженості.....	75
2.5. Висновки.....	78
 ГЛАВА 3. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ ЗАКОНІВ СТАБІЛІЗАЦІЇ ПРОГРАМНОГО РУХУ НЕСТАЦІОНАРНИХ БПЛА	
3.1.Метод еквівалентного перетворення лінійних динамічних моделей БПЛА.....	79

3.2. Синтез оптимального за витратами енергоресурсів релейного закону стабілізації програмного руху БПЛА.....	82
3.3. Розробка процедури оптимізації процесів стабілізації нестационарних БПЛА за квадратичними критеріями якості.....	90
3.4. Оптимізація витрат енергії при стабілізації програмного руху нестационарних БПЛА.....	94
3.5. Синтез оптимальних законів стабілізації програмного руху нестационарних БПЛА за узагальненим квадратичним критерієм.....	99
3.6. Висновки.....	105

ГЛАВА 4. МОДАЛЬНИЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ ЗАКОНІВ СТАБІЛІЗАЦІЇ СТАЦІОНАРНИХ БПЛА

4.1. Модальний синтез оптимальних законів стабілізації стаціонарних БПЛА. Метод невизначених коефіцієнтів.....	107
4.2. Побудова і корекція спектра бажаних коренів замкнутої оптимальної системи стабілізації БПЛА.....	112
4.3. Синтез оптимальних законів стабілізації БПЛА з запізнюванням в контурі управління	117
4.4. Робастна модальна стабілізація БПЛА з параметричною невизначеністю на основі принципу гарантованої динаміки	124
4.5. Агрегація змінних стану і спрощення структури оптимального регулятора БПЛА.....	130
4.6. Висновки.....	135
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ.....	137
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	140
ДОДАТКИ.....	154

ВСТУП

Актуальність теми.

Технічний рівень, досягнутий за останні роки, дозволяє використовувати безпілотні літальні апарати БПЛА для будь-якої діяльності. Інтерес у використанні БПЛА зумовлена економічною ефективністю. Застосування безпілотних літаків обходиться набагато дешевше, ніж використання пілотованої авіації. БПЛА мають як цивільне, так і військове застосування. Вони фіксують теплові втрати в лініях електропередач, знімають спортивні події, відстежують автомобільні пробки. Безпілотні літаки ведуть пошук людей, виявляють пожежі в тайзі і, звичайно, вирішують завдання розвідки. У всіх перерахованих випадках дуже важливо вирішити проблему стабілізації програмної траєкторії БПЛА, що виконує зазначені завдання

Технічний прогрес висуває підвищені вимоги до систем управління БПЛА. Одночасно збільшуються і можливості засобів управління, особливо в зв'язку з широким застосуванням обчислювальної техніки. Оскільки в даний час важливе місце серед сучасних БПЛА займають такі, в яких динамічний процес відбувається при зміні параметрів, дана робота присвячена рішення актуальної проблеми - розробці спеціалізованого математичного апарату розв'язання задач з аналізу та синтезу систем оптимального керування БПЛА на базі сплайн-функцій і функцій Уолша та алгоритмічного забезпечення для вирішення прикладних задач на базі отриманих теоретичних результатів. Відомі підходи та конкретні універсальні методи оптимального синтезу законів автоматичного управління в цілому не орієнтовані на їх широке застосування для розв'язання специфічних завдань, що виникають у практиці дослідницького проектування систем управління, і, в першу чергу, це стосується нестационарних динамічних систем, якими і є БПЛА. Теоретична і практична значущість завдань аналізу і синтезу оптимальних систем

стабілізації програмного руху БПЛА, при відносній складності його математичного та обчислювального апарату, з очевидністю визначають необхідність широкого використання сучасних засобів комп'ютерної техніки та сучасних комп'ютерних технологій для реалізації відповідних методів і обчислювальних алгоритмів. Проте, відомі підходи та конкретні універсальні методи оптимального синтезу законів автоматичного управління в цілому не орієнтовані на їх широке застосування для вирішення специфічних завдань, що виникають в практиці дослідницького проектування систем управління БПЛА. У зв'язку з цим, актуальним є проведення досліджень, спрямованих на розвиток математичних методів оптимізації перехідних процесів стабілізації програмного руху БПЛА в різних умовах польоту.

Питанням дослідження нестационарних динамічних систем і систем із запізненням присвячені роботи відомих вітчизняних і зарубіжних вчених, таких як: Д. Гроп, К. Спіді, Р. Браун, Я.З. Ципкін, П. Эйкхофф, Э. Сейдж, Дж.Мелса, О.Н. Новоселов, L. Lennart, Р.Калман, А.М.Летов, А.А.Красовський, Р.Габасов, М.З.Згуровський, Ф.М. Кіріллова, В.М. Кунцевіч, К.А. Лурье, Р. Беллман, В.Г. Болтянский, М. Атанс, П. Фалб, Х. Квакернаак, Р. Сиван, Л.С. Понтрягин, К.Т. Леондес, А.А. Воронов, В.С. Пугачов, І.Є. Казаков, В.М. Казак, В.Н.Буков, А.Г. Александров. та ін.

Ця область залишається сферою інтенсивної розробки і в даний час.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Робота виконана в рамках планових науково-дослідних робіт кафедри технічної кібернетики НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»: «Розробка системи контролю та управління роботизованими мобільними засобами для комплексного моніторингу стану середовища та наземних об'єктів»(№ державної реєстрації НДР: 0113U003351)

Мета і завдання дослідження.

Метою роботи є мінімізація в процесі польоту витрат енергоресурсів БПЛА за рахунок автоматичної оптимальної стабілізації його програмного руху.

Для досягнення поставленої мети в роботі вирішуються наступні **завдання**:

- розробити метод перетворення одного класу лінійних нестационарних моделей БПЛА в еквівалентні їм лінійні стаціонарні моделі;
- розробити узагальнену процедуру параметричної ідентифікації параметрів лінійних динамічних моделей БПЛА на базі сплайн-функцій і функцій Уолша;
- розробити алгоритм адаптивного вибору кроку процедури ідентифікації параметрів БПЛА;
- розробити процедуру синтезу оптимальних замкнутих законів стабілізації програмного руху нестационарних БПЛА на базі сплайн-функцій і функцій Уолша для енергозберігаючих лінійно-квадратичних задач;
- синтезувати модальні оптимальні закони стабілізації програмного руху стаціонарних БПЛА при відсутності і наявності запізнювання в контурі управління;
- синтезувати модальний робастний закон стабілізації програмного руху стаціонарних БПЛА з параметричної невизначеністю.
- розробити методи агрегації змінних стану БПЛА і спрощення структури його оптимальних регуляторів

Об'єктом дослідження є процес стабілізації програмного руху БПЛА.

Предметом дослідження є методи та алгоритми розв'язання оптимальних лінійно-квадратичних задач і задач оптимізації енергетичних ресурсів в режимах стабілізації програмного руху БПЛА в різних умовах польоту.

Методами дослідження є теорія автоматичного управління, принцип максимуму (мінімуму) Понтрягіна, метод фазового простору, аналітичне конструювання оптимальних регуляторів (АКОР), теорія секвентних послідовностей, теорія матриць, теорія диференціальних рівнянь.

Наукова новизна отриманих результатів

Наукова новизна отриманих в дисертаційній роботі результатів полягає у наступному:

- Вперше запропоновано метод перетворення одного класу лінійних нестационарних моделей руху БПЛА в еквівалентні їм лінійні стаціонарні моделі, для яких можна застосувати добре відомі й апробовані методи оптимізації;
- Вперше запропонована процедура оптимізації процесів стабілізації програмного руху БПЛА на основі принципу мінімуму в поєднанні зі сплайн-функціями і функціями Уолша, що дозволяє синтезувати оптимальні закони стабілізації в аналітичній формі;
- Вперше запропоновано метод невизначених коефіцієнтів для реалізації процедури модального синтезу для лінійних динамічних моделей БПЛА, який на відміну від існуючих дає можливість визначити оптимальний закон стабілізації з заданими показниками якості перехідних процесів, у тому числі і при наявності запізнення в контурі управління;
- Вперше запропонована процедура оптимізації процесів стабілізації руху стаціонарних БПЛА з параметричною невизначеністю на основі модального синтезу і принципу гарантованої динаміки, що дає можливість синтезу робастного стабілізатора програмного руху БПЛА.

Практичне значення отриманих результатів: отримані в дисертації теоретичні результати дозволяють значно розширити клас технічних систем і технологічних процесів, які потребують оптимізації перехідних процесів в режимах стабілізації динаміки їх стану.

Робота становить інтерес як для державних, так і для приватних організацій, що займаються проектуванням і оптимізацією систем управління БПЛА, зокрема розробкою автопілотів різного типу літаків, а також складних технічних систем і технологічних процесів. Розроблені оптимальні алгоритми стабілізації програмного руху БПЛА впроваджені в Науково-виробничому об'єднанні «ABIA» (м.Кременчук). Крім того, частина методів увійшла в програму навчання студентів на кафедрі технічної кібернетики, факультету інформатики та обчислювальної техніки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського». Результати підтверджені актами впровадження, наведеними в додатку.

Особистий внесок здобувача. Основні підсумки дисертаційної роботи отримані автором самостійно. При використанні відомих положень і залежностей мають місце коректні посилання на авторів і відповідні джерела. При проведенні досліджень, результати яких опубліковані особисто і в співавторстві, автором дисертації запропоновано еквівалентного перетворення [7], узагальнена методика параметричної сплайн-ідентифікації [14], синтез оптимального по витраті енергії регулятора стану лінійних нестационарних систем [1], синтез оптимального по витратам палива управління в лінійних динамічних системах [2], рішення лінійно-квадратичної задачі оптимізації нестационарних систем [6], алгоритм параметричної ідентифікації квазістационарних систем [3], формування функціоналів якості нелінійних систем управління [9], алгоритм адаптивного вибору шагу дискретизації для функцій Уолша [5], метод агрегування змінних стану для зниження розмірності системи управління [8], алгоритм ідентифікації розподілених систем [4], оптимальний за витратами палива алгоритм управління одним класом нелінійних нестационарних систем [10], модальний синтез систем із запізненням [11], використання методу Беса для компенсування запізнення в контурі управління [12], створення програмного забезпечення стабілізації

руху БПЛА[13], модальний синтез робастного регулятора на основі принципу гарантованої динаміки[6,15].

Апробація роботи. Основні підсумки досліджень доповідалися і обговорювалися на наступних конференціях:

- міжнародна науково-технічна конференція «Інформаційні технології в металургії та машинобудуванні» м Дніпропетровськ, 24-26 березня 2015р.
- очна
- міжнародна науково-технічна конференція «Інформаційні технології в металургії та машинобудуванні» м Дніпропетровськ, 28-30 березня 2017р.
- очна
- всеукраїнська науково-методична конференція «Особливості викладання Фахових дисциплін технічних спеціальностей – виклики часу та перспективи» 21 березня 2017 р., м. Харків. - очна
- міжнародна науково-технічна конференція “Математичне та імітаційне моделювання систем МОДС '2017”, 26-29 червня 2017 г., г. Чернігів. - очна
- міжнародна науково-практична конференція «Інформаційні управляючі системи та технології» (ІУСТ – Одеса – 2017), 20-22 вересня 2017 р.

Публікації. За підсумками роботи опубліковані 15 наукових праць, з яких 11 статей у провідних фахових виданнях, 7 з яких входять до міжнародної наукометричної бази Index Copernicus, інші до WorldCat, Google scholar, РІНЦ і 4 тези за матеріалами науково-практичних конференцій.

Структура роботи. Дисертація складається із двох анотацій(українською. та англійською мовами), вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел і чотирьох додатків. Загальний обсяг дисертації 169 сторінок, у тому числі 15 рисунків, список використаних джерел з 124 найменувань.

ГЛАВА 1. АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ АВТОМАТИЗАЦІЇ ПРОЦЕСУ СТАБІЛІЗАЦІЇ ПРОГРАМНОГО РУХУ БПЛА

1.1. Обґрунтування актуальності використання БПЛА. Приклади БПЛА літакового типу, математичні моделі руху, основні задачі управління

Авіація в останні роки стає все більшою мірою безпіотною. Безпілотні літальні апарати (БПЛА) поступово стають головною продукцією багатьох авіаційних фірм. З'являється велика кількість розробників і виробників БПЛА, що займаються виключно безпілотними апаратами і системами. Це відбувається з ряду причин. Самі БПЛА, як правило, набагато дешевше пілотованих літаків і вертольотів. Дешевше, ніж підготовка льотчика, обходиться і підготовка оператора безпілотної системи. Відсутність пілота дозволяє виключити бортові системи життєзабезпечення, зменшити масу і габарити БПЛА, а також збільшити діапазон допустимих перевантажень і факторів, що впливають. Велике значення має і фактор безпеки - втрати безпілотних апаратів не ведуть до втрати пілотів. Діапазон існуючих і розроблюваних апаратів дуже широкий: від мікро- і міні-БПЛА до важких багатотонних апаратів, а також БПЛА, здатних виконувати наддалекі і надвисотні польоти тривалістю в кілька місяців. Призначення сучасних БПЛА не обмежується тільки військовою сферою. Стрімко розширюється і сфера їх цивільного застосування (в таких галузях, як нафтогазова промисловість, транспорт, будівництво, сільське господарство, зв'язок та ін.), що надає додаткові імпульси розвитку безпіотної авіаційної техніки. Вибухове зростання кількості розробок БПЛА саме в останнє десятиліття не випадковий. Цьому сприяли певні об'єктивні передумови, які дозріли саме до цього часу, що пов'язані з серйозними технологічними успіхами в різних областях [16-18]. Наприклад, цьому сприяло:

- поява нових легких і міцних матеріалів, особливо композитних;

- швидкий розвиток мікроелектронної компонентної бази: мікроконтролерів, мікросистемних навігаційних датчиків, приймачів радіосигналів, різних СВЧ-пристроїв, мікроелектронних драйверів, мініатюрних відеокамер і т.д;
- поява і швидкий розвиток високоефективних поновлюваних джерел енергії (на основі літій-полімерних акумуляторів, паливних елементів тощо);
- розробки в області високоресурсних безколекторних електродвигунів, а також реактивних і поршневих двигунів;
- розвиток супутникових систем глобального позиціонування;
- загальний розвиток обчислювальної техніки, включаючи появу спеціальних операційних систем, інтерфейсів, математичного та алгоритмічного забезпечення

У багатьох класифікаціях за призначенням БПЛА поділяють на військові і цивільні. Однак, мабуть, більш логічним є підрозділ, в якому БПЛА поділяються спочатку за укрупненими сферам використання, а саме - для наукових цілей та для прикладних цілей; останні ж поділяються на БПЛА для військового і цивільного застосування (рис. 1.1) [18]. У науковій сфері БПЛА використовуються для отримання нових знань, причому не має значення те, з якої області ці знання і де вони потім будуть застосовані. Це можуть бути випробування нової техніки (в т.ч. нових принципів польоту) або спостереження за природними явищами.

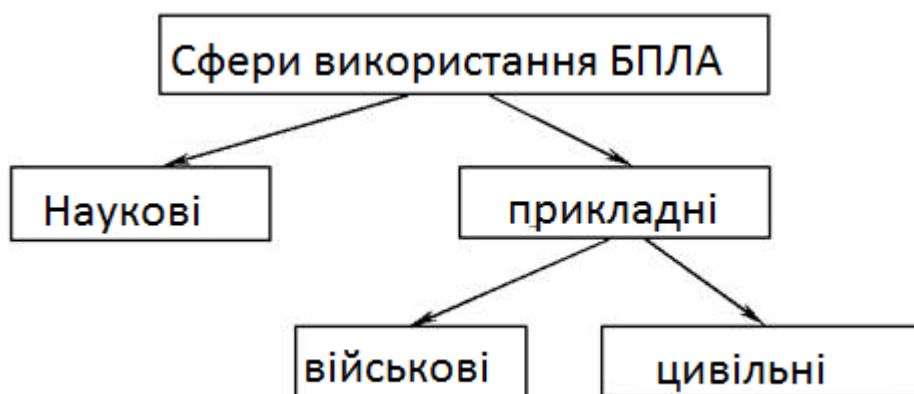


Рис.1.1. Сфери використання БПЛА

Прикладною областю використання БПЛА є два основних напрямки - військове і цивільне. Військові БПЛА за функціональним призначенням можна класифікувати наступним чином:

- спостережні (можуть використовуватися, зокрема, для коригування вогню на полі бою);
- розвідувальні;
- ударні (для ударів по наземних цілях за допомогою ракетного озброєння);
- розвідувально-ударні; - бомбардувальні;
- винищувальні (для знищення повітряних цілей);
- радіотрансляційні;
- БПЛА РЕБ (для цілей радіоелектронної боротьби);
- транспортні;
- БПЛА-мішені;
- БПЛА-імітатори цілі;
- багатоцільові БПЛА.

Цивільна область застосування БПЛА досить обширна. Галузі і споживачі послуг, що надаються за допомогою БПЛА, також дуже різноманітні: від сільського господарства і будівництва до нафтогазового сектора і сектора безпеки, а також наукові організації, рекламні компанії, засоби масової інформації та окремі громадяни. Для систематизації огляду всього різноманіття призначень цивільних БПЛА умовно виділимо укрупнені групи, сформовані за критерієм виконуваних функцій [17,18,19]:

1. Моніторинг і подібні завдання. Сюди входять всі завдання, пов'язані з наглядом за різними об'єктами, збір вимірювальної та іншої інформації.

Перерахуємо відомі застосування з цієї групи:

- відеоспостереження з метою охорони різних об'єктів;
- моніторинг лісових масивів службою лісоохорони;
- патрулювання заданих зон поліцією;
- спостереження за рухом на залізничних і шосейних дорогах, контроль судноплавства;

- спостереження за посівами фермерами та підприємствами сільського господарства;
- контроль рибного промислу;
- картографування земної поверхні;
- розвідка і складання планів приміщень за допомогою малих БПЛА всередині зруйнованих або небезпечних будівель;
- пошук корисних копалин за допомогою спеціальних засобів зондування;
- моніторинг нафтогазових об'єктів, особливо трубопроводів, інспектування будівництв;
- відеофотозйомка важкодоступних промислових об'єктів (ліній електропередач, опор мостів, димових труб, вітрогенераторів, антен і т.д.);
- радіаційна і хімічна розвідка на небезпечних територіях;
- метеорологічні спостереження;
- екологічний моніторинг атмосфери і поверхні водойм;
- моніторинг небезпечних природних явищ (паводків, вивержень вулканів, лавинонебезпечних гірських районів і ін.);
- оцінка результатів стихійних лих і ліквідації їх наслідків;
- спостереження за дикими тваринами в заповідниках.

2. Презентації, реклама, розваги, творчість. Ця група застосувань БПЛА в даний час швидко розширюється завдяки діяльності численних фірм і окремих ентузіастів. Сюди можна віднести наступне:

- відео- та фотозйомка об'єктів архітектури, природи, бізнесу, а також масових заходів з метою презентації або реклами;
- використання БПЛА в якості носіїв реклами (наприклад, на поверхні дирижабля);
- використання малих БПЛА в навчальних цілях в школах і вузах;
- авіамоделізм і авіаконструювання для численних любителів;
- використання малих БПЛА в якості арт-об'єкта або об'єкта розваги.

3. Доставка вантажів та подібні завдання. Специфіка цієї групи застосувань дозволяє називати використовувані таким чином БПЛА повітряними роботами. Сюди, зокрема, можна включити такі застосування БПЛА як:

- доставка пошти;
- доставка інструменту, комплектуючих і матеріалів на будівельні об'єкти;
- монтаж різних конструкцій;
- виконання або забезпечення ремонтних робіт на важкодоступних об'єктах;
- розпорошення хімікатів та внесення добрив на полях;
- прокладка кабелю в небезпечних зонах;
- доставка продуктів, пального, запчастин, елементів живлення тощо в важкодоступні райони для забезпечення альпіністів, туристів, експедицій;
- скидання маркерів (світлових, радіовипромінювальних) для позначення будь-яких об'єктів;
- доставка медикаментів та медобладнання для постраждалих в зони аварій і катастроф;
- евакуація постраждалих із зони лиха;
- евакуація дорогих матеріальних цінностей з небезпечних зон;
- доставка рятувальних засобів потерпілим, які зазнали лиха на воді;
- скидання вибухових пристроїв в горах для організації превентивного сходу лавин;
- дозаправка або підзарядка автономно працюючих важкодоступних пристроїв (буїв, маяків, метеостанцій, ретрансляційних станцій і т.д.).

4. Ретрансляція сигналів і подібні завдання. Сюди входять такі застосування (реалізовані зазвичай за допомогою БПЛА вертолітного або аеростатичного типів):

- ретрансляція радіосигналів з метою збільшення дальності дії каналів зв'язку;
- використання БПЛА в якості носіїв освітлювального обладнання;
- використання БПЛА в якості майданчика для генерації або відображення лазерного променя.

- Для виконання вказаних вище операцій найбільш придатні БПЛА літакового типу, типові приклади яких з оцінкою їх характеристик наведені нижче.

БПЛА літакового типу

Цей тип апаратів відомий також як БПЛА з жорстким крилом (англ. : fixed-wing UAV). Підйомна сила у цих апаратів створюється аеродинамічним способом за рахунок напору повітря, що набігає на нерухоме крило. Апарати такого типу, як правило, відрізняються великою тривалістю польоту, великою максимальною висотою польоту і високою швидкістю. Існує велика різноманітність підтипів БПЛА літакового типу, що розрізняються за формою крила і фюзеляжу. Практично всі схеми компонування літака і типи фюзеляжів, які зустрічаються в пілотованій авіації, застосовні і в безпілотній. На рис. 1.2 - 1.6 представлені найбільш відомі приклади таких БПЛА з різною компоновкою і призначенням[17,18].



Рис. 1.2. Експериментальний літак Proteus.

Під фюзеляжем підвішена гондола з радіолокаційним обладнанням. Особливістю конструкції Proteus розробки американської компанії Scaled Composites є тандемна схема розташування крил. Його довжина становить 17,1 м, розмах задніх крил 28 м, стеля висоти 16 км (при навантаженні 3,2 т), злітна маса 5,6 т, максимальна швидкість 520 км / год (на висоті 10 км),

тривалість польоту до 18 годин. Силова установка - два турбореактивні двигуни з тягою по 10,2 кН.



Рис. 1.3. БПЛА RQ-4 Global Hawk

БПЛА RQ-4 Global Hawk, розроблений американською фірмою Teledyne Ryan Aeronautical, дочірнім підприємством компанії Northrop Grumman. Він відрізняється незвичайною формою фюзеляжу, в носовій частині якого розміщено радіолокаційне, оптичне та інше устаткування. Апарат виготовлений з композитних матеріалів на основі вуглеволокна і алюмінієвих сплавів, має довжину 13,5 м, розмах крил 35 м, злітну масу близько 15 тонн, здатний нести корисне навантаження масою до 900 кг. RQ-4 Global Hawk може перебувати в повітрі до 30 годин на висоті до 18 км. Максимальна швидкість 640 км / г. Силова установка - турбореактивний двигун з тяговим зусиллям 34,5 кН.



Рис. 1.4. БПЛА X-47B

БПЛА X-47B, що розробляється компанією Northrop Grumman (США). Він має форму широко вигнутою літери "V" без хвостової частині. Крила можуть складатися, що важливо для обмеженої площі палуби авіаносця. Для управління польотом БПЛА оснащений шістьма робочими площинами. Турбореактивний двигун канадської фірми Pratt amp; Whitney забезпечує високу швидкість польоту безпілотного апарату і розташований в задній частині апарату. Безпілотник складається з чотирьох частин, зібраних з композитних матеріалів, які з'єднуються приблизно в середині корпусу. Літак має довжину 11,6 м, розмах крил 18,9 м (в складеному стані 9,4 м), власну масу 6,3 т, максимальну злітну масу 20,2 т. Крейсерська швидкість становить 900 км / г. Радіус дії 3900 км. Стеля 12,2 км.



Рис. 1.5. БПЛА MQ 9 Reaper

БПЛА MQ 9 Reaper розроблений американською компанією General Atomics і стоїть на озброєнні ВПС США і інших країн з 2007 р. Як і багато інших БПЛА, апарат має V образне опірння, що складається з двох похилих поверхонь, які виконують функції і горизонтального, і вертикального оперення. Синхронне відхилення керуючих поверхонь грає роль керма висоти і управляє тангажем, а асинхронне відхилення керма напрямку управляє ристанням. Для безпілотників V образне опірння видається більш економічним рішенням, ніж класичне. MQ 9 Reaper оснащений турбогвинтовим двигуном, що дозволяє розвивати швидкість понад 400 км / ч. Практична стеля становить 13 км. Максимальна тривалість польоту дорівнює 24 години.



Рис. 1.6. БПЛА Viking 300

БПЛА тактичного призначення Viking 300 розробки американської компанії L 3 Unmanned Systems побудований повністю з композитних матеріалів. Оснащений двотактним двоциліндровим гвинтовим двигуном внутрішнього згоряння потужністю 25 к.с. Причому гвинт розташований між основним крилом і хвостовим оперенням, а не позаду нього, як в

попередньому прикладі. Модульна конструкція дозволяє легко збирати і розбирати апарат. Тривалість польоту складає 8-10 годин при крейсерській швидкості 100 км / г. Максимальна злітна маса 144 кг, а маса корисного навантаження 13,5 кг. Радіус дії складає 50-75 км. Особливістю апарату є можливість здійснювати повністю автономні зліт і посадку, які можуть виконуватися не тільки на бетонній смузі, але і на погано підготовлених поверхнях.

Математичні моделі руху БПЛА, основні завдання управління

Рух БПЛА в повітряному просторі будемо представляти як рух абсолютно твердого тіла, що має шість ступенів свободи. Беручи це до уваги, можемо розглянути: рух літака разом з центром мас (поступальний) і рух літака навколо центру мас (обертальний). При отриманні математичної моделі просторового руху БПЛА [19,20] спочатку вкрай важливо ввести ряд припущень, які дозволять спростити процедуру виведення, що в подальшому дозволить отримувати рівняння найбільш застосовні для практичної реалізації.

Основні допущення:

- літак - абсолютно тверде тіло, з постійними масовими і інерційними характеристиками,
- осі зв'язаної системи координат збігаються з головними осями інерції БПЛА, тому що відцентрові моменти інерції БПЛА дорівнюють 0,
- вектор сил тяги не створює моменту, щодо будь-якої з осей,
- форма земної поверхні вважається плоскою, також не враховується рух земної поверхні в інерціальному просторі,
- повітряне середовище вважається нерухомим.

Використовуючи вищесказане, рівняння БПЛА як твердого тіла можуть бути отримані за допомогою теореми про зміну кількості руху (поступальний рух) і теореми про зміну моментів кількості руху (обертальний рух).

З цих теорем можна отримати скалярні рівняння, що описують 6 ступенів свободи БПЛА. Отримані шість рівнянь доповнюються геометричними рівняннями для визначення кутів атаки, ковзання і кута швидкісного крену, кінематичними рівняннями для визначення кута нахилу траєкторії і кута шляху, а також рівняннями траєкторного руху для визначення просторового положення центру мас і мають вигляд [19,20]:

$$m\dot{V} = P \cos \alpha \cos \beta - X_a - G \sin \theta$$

$$mV\dot{\theta} = P(\sin \alpha \cos \gamma_a + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_a) + Y_a \cos \gamma_a - Z_a \sin \gamma_a - G \cos \theta$$

$$mV\dot{\psi} = P(\sin \alpha \sin \gamma_a - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_a) + Y_a \sin \gamma_a + Z_a \cos \gamma_a$$

$$I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_z \omega_y = M_x$$

$$I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z = M_y$$

$$I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = M_z$$

$$\sin \alpha = [\sin \theta \cos \vartheta - \cos \vartheta \sin \theta \cos(\psi - \psi_1)] \cos \gamma_a - \cos \vartheta \sin \gamma_a \sin(\psi - \psi_1)$$

$$\sin \beta = [\cos \gamma \sin(\psi - \psi_1) + \sin \vartheta \sin \gamma \cos(\psi - \psi_1)] \cos \theta - \sin \theta \cos \vartheta \sin \gamma$$

$$\sin \gamma_a = [\sin \alpha \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta \cos \gamma] \sec \theta$$

$$\dot{\psi} = (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \sec \theta$$

$$\dot{\gamma} = \omega_x + \tan \theta (\omega_z \sin \gamma - \omega_y \cos \gamma)$$

$$\dot{\vartheta} = \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma$$

$$\dot{Y}_g = \dot{H} = V \sin \theta$$

$$\dot{X}_g = V \cos \theta \cos \psi_1$$

$$\dot{Z}_g = -V \cos \theta \sin \psi_1,$$

де m - маса ЛА; P - сила тяги; G - вага; $\bar{\omega}$ - вектор кутової швидкості обертання ЛА відносно Землі; V_x, V_y, V_z - проекції вектора швидкості V центру мас ЛА на осі обраної системи координат; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ - проекції на осі обраної системи координат вектора кутової швидкості цієї системи відносно Землі; R_x, R_y, R_z - проекції рівнодіючої всіх зовнішніх сил, що діють на ЛА; M_x, M_y, M_z - проекції моменту всіх зовнішніх сил щодо

відповідних осей; I_x, I_y, I_z - осьові і відцентрові моменти інерції; $X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$ - проекції переміщення ЛА щодо нормальної земної системи координат.

У рівняннях зроблені наступні припущення: кривизна Землі не враховується, гіроскопічний момент двигунів малий, маса літака постійна. Система рівнянь є складною системою, праві частини рівнянь якої є нелінійні функції багатьох змінних. З огляду на технічні труднощі рішення наведеної системи рівнянь, що описують просторовий рух БПЛА, в практичній роботі використовують штучний прийом поділу повної системи рівнянь на групи рухів, які окремо описують поступальний поздовжний і бічний рух центру мас і обертальний рух відносно центру мас.

При цьому завдання управління можна розділити на **завдання розрахунку програмної траєкторії і завдання автоматизації процесу оптимального відстеження програмної траєкторії (завдання оптимальної стабілізації).**

У даній роботі вирішується друге завдання, тобто завдання автоматизації процесу стабілізації програмного руху БПЛА. Тому в подальшому в роботі під терміном «**оптимальне управління**» всюди будемо розуміти «**оптимальний процес стабілізації програмного руху БПЛА**»/

Крім того, оскільки відхилення змінних стану БПЛА від програмної траєкторії, як правило, досить малі, то окремі групи рівнянь поступального або обертального руху можуть бути лінеаризовані і приведені до нормальної системи рівнянь у формі Коші. При цьому, в залежності від режимів та тривалості окремих ділянок польоту математичні моделі БПЛА можуть бути представлені, в загальному випадку, системою рівнянь в n -вимірному фазовому просторі

$$\dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t), t \in [t_0, T_f], \bar{x}(t_0) = \bar{x}^{(0)},$$

де $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ n -вимірний вектор відхилень змінних положення БПЛА від програмної траєкторії; $A(t)$, $B(t)$ - неособливі матриці змінних коефіцієнтів системи відповідно розмірності $n \times n$, $n \times m$, $n \times r$;

$\bar{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))^T$ - r -вимірний вектор керуючих впливів. Вважаємо, що система є повністю спостережуваною і керованою, за винятком ряду випадків, обумовлених в роботі нижче. Як вже говорилося вище, в ряді випадків коефіцієнти $A(t)$, $B(t)$ можуть бути постійними (стаціонарна система) або квазіпостійними (квазістаціонарна система)

Тут, під керуванням $\bar{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))^T$ розуміють відхилення від програмного значення вектора тяги, на вироблення якого витрачаються енергоресурси БПЛА, при чому це відхилення може бути або безперервним, або імпульсним (релейним). Слід зазначити, що на сучасних БПЛА енергетичні системи забезпечують енергією силові приводи, за допомогою яких виконується понад двадцять операцій управління в процесі польоту. Первинним джерелом енергії на літаку є турбореактивний двигун, що перетворює енергію палива, ресурс якого є обмеженим, в інші види енергії, в тому числі на управління. Тому **оптимізація енерговитрат при стабілізації програмного руху БПЛА має суттєве значення [13].**

Слід також зауважити, що змінність параметрів відповідає випадку коли витрата палива порівнянна з вагою самого БПЛА і має суттєвий вплив на зміну положення центру мас БПЛА.

Як вже зазначалося раніше відомі підходи та конкретні універсальні методи оптимального синтезу законів автоматичного управління в цілому не орієнтовані на їх широке застосування для розв'язання специфічних завдань, що виникають у практиці дослідницького проектування систем управління, і, в першу чергу, це стосується нестаціонарних динамічних систем, якими і є БПЛА.

1.2. Аналіз проблеми стабілізації програмного руху БПЛА.

В більшості методів оптимального управління, розроблених для лінійних динамічних систем, завдання розглядаються в часовій області з використанням поняття простору станів і теорії матриць [21-25,26]. Вирішення задачі оптимальної стабілізації програмного руху БПЛА відповідно до традиційної схеми виглядає так.

1. Визначити параметри моделі руху БПЛА, наведені вище, в загальному випадку, в формі системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t), \quad t \in [t_0, T], \quad (1.1)$$

де $\bar{x}(t)$ - n -вимірний вектор відхилень стану БПЛА від його програмної траєкторії; $\bar{u}(t)$ - m -вимірний вектор відхилень управління БПЛА від заданого програмного; \bar{f} - векторна функція; t_0, T - початковий і кінцевий моменти часу управління БПЛА відповідно.

2. Сформулювати систему граничних умов, накладених на змінні стану БПЛА в початковий і кінцевий моменти часу,

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}^{(0)}, \bar{x}(T) \in S, \quad (1.2)$$

де S означає задану цільову множину.

3. Визначити обмеження, накладені на змінні стану та управління БПЛА у вигляді

$$\bar{x}(t) \in X, \bar{u}(t) \in U, \quad (1.3)$$

де X, U - деякі задані припустимі області відхилень вектора стану і вектора управління БПЛА відповідно.

4. В загальному випадку, для отримання співвідношень загального характеру, критерій якості для лінійних динамічних моделей БПЛА можна записати

$$I = V(\bar{x}(T), T) + \int_{t_0}^T L(\bar{x}, \bar{u}, t) dt, \quad (1.4)$$

де V, L - скалярні функції векторів стану і управління БПЛА. Метою оптимальної стабілізації програмного руху БПЛА є знаходження екстремуму

$$\text{extr}\{I \mid \dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t); \bar{x}(t_0) = \bar{x}^{(0)}; \bar{x}(T) \in S; \bar{x}(t) \in X; \bar{u}(t) \in U\}$$

Оптимізаційна задача такого роду при дослідженні неперервних об'єктів, динаміка яких описується диференціальними рівняннями (1.1),

відноситься до варіаційних, і, незважаючи на те, що їй присвячена велика кількість робіт[25-31,33,45], досі ще не вирішена остаточно.

Для розв'язання задачі синтезу детермінованого оптимального керування використовуються наступні основні аналітичні методи: варіаційне числення [33], динамічне програмування [23] та принцип максимуму (мінімуму) [22,26].

Перший з них, класичний метод варіаційного числення [33,45] для розв'язання задачі оптимального керування приводить до відомого рівняння Ейлера-Лагранжа, яке повинно бути вирішено при заданих граничних умовах (1.2) для отримання оптимальної траєкторії $\bar{x}^*(t)$ і оптимального управління $\bar{u}^*(t)$. Метод передбачає безперервність та різні умови гладкості функції $L(\bar{x}, \bar{u}, t)$ і шуканих вектор-функцій $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$, а допустимі області їх зміни X , U - відкритими. Однак у ряді практичних завдань оптимізація екстремуму функціонала (1.4) забезпечується при кусково-неперервному або кусково-гладкому характеру зміни керуючого впливу, при цьому координати управління і (або) стану можуть досягати граничних значень, тобто X , U . Ці труднощі в варіаційному численні іноді вдається подолати переходом до нової змінної, побудованої таким чином, що обмеження на $\bar{u}(t)$ не призводять до обмеження на цю нову змінну. Але, в загальному випадку, особливості завдань оптимального управління нестационарними БПЛА призводять до того, що застосування класичного варіаційного числення, навіть після належної модернізації залишається проблематичним. Вільними від цих недоліків є метод динамічного програмування та принцип максимуму. Метод динамічного програмування [23,35] хоча і має широку область принципово можливих застосувань, є практично малоефективним при оптимізації нестационарних БПЛА через необхідність вирішення функціонального рівняння Беллмана

$$-\frac{\partial S_0(\bar{x}, t)}{\partial t} = \min_u \left\{ L(\bar{x}, \bar{u}, t) + \frac{\partial S_0(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t) \right\}$$

за умов (1.1), (1.2), (1.3). Складність вирішення даного рівняння обумовлена вимогою диференційованості допоміжної функції $S_0(\bar{x}, t)$ в усіх точках фазового простору, що не виконується при граничних значеннях координат стану, і відсутністю загального способу визначення функції $S_0(\bar{x}, t)$ в явній аналітичній формі для нестационарних БПЛА і загального методу розв'язання такого рівняння в приватних похідних. Крім того, при наявності обмежень типу нерівностей на керовані впливи, оптимальна стабілізація програмного руху БПЛА, отримана з використанням динамічного програмування, стає складною функцією фазових координат, що робить його непридатним для практичної реалізації.

Подолання вищевказаних труднощів можливо при використанні принципу максимуму Понтрягіна [21,22,26], який є необхідною умовою оптимальності для керованих систем і в даний час визнається основним методом вирішення безперервних завдань оптимального управління.

Відомо, що всі реальні БПЛА в тій чи іншій мірі є нелінійними і нестационарними. Аналіз і синтез систем оптимальної стабілізації програмного руху БПЛА, в загальному випадку, є досить складною математичною проблемою. Однак, оскільки більшість БПЛА дозволяє прийняти в якості математичної моделі їх динаміки в режимах стабілізації лінеаризовану систему рівнянь, це дозволяє застосувати розвинений математичний апарат рішення лінійних стаціонарних і нестационарних диференціальних рівнянь до вирішення завдань управління БПЛА [44]. Незважаючи на це, синтез оптимальних систем стабілізації для БПЛА як і раніше залишається складним завданням.

У загальному випадку, лінійна нестационарна модель динаміки БПЛА може бути представлено у вигляді [36,45]:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t) + F_{36}(t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}^0, \quad (1.5)$$

де $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $B(t) = \{b_{ik}(t)\}$ - матриці розміру $n \times n$ та $n \times m$ відповідно, елементи яких є знакопостійними

$$\text{sign}[a_{ij}(t)] = \text{const}, \text{sign}[b_{ik}(t)] = \text{const}, \quad (1.6)$$

монотонними

$$\text{sign}[da_{ij}(t)/dt] = \text{const}, \text{sign}[db_{ik}(t)/dt] = \text{const} \quad (1.7)$$

функціями, мають безперервні перші похідні і обмежені області визначення на інтервалі стабілізації. При цьому лінійні стаціонарні і квазістаціонарні динамічні моделі БПЛА будуть частними випадками (1.5).

Будемо розглядати два випадки обмеження на вектор управління $\bar{u}(t)$ при вирішенні завдань стабілізації програмного руху БПЛА:

1. Обмеження компонент $\bar{u}(t)$ класом кусочно-неперервних функцій

$$\bar{u}(t) \in U_t, \forall t \in [t_0, T_f],$$

де U_t - замкнений і обмежений (компактний) підпростір в m -вимірному евклідовому просторі $E^m, U_t \subset E^m$.

2. Вектор керуючих впливів необмежений $\bar{u}(t) \in U = E^m, \forall t \in [t_0, T_f]$.

Лінійність вихідної системи (1.5) дозволяє в якості математичного апарату оптимізації використовувати принцип максимуму, на основі якого виявляються структура і характер оптимальних в сенсі вибраних функціоналів управлінь. У ряді робіт [21,26] для вирішення оптимізаційних задач використовується відповідний математичний апарат Понтрягіна у формі принципу мінімуму [26,32,45]. Зазначимо, що переваги такого підходу полягають в його тісному зв'язку з варіаційним численням, принципом Гамільтона в механіці і динамічним програмуванням Беллмана. Формулювання принципу мінімуму для розглянутого класу БПЛА наведемо нижче. У відповідності з принципом мінімуму [26,45] вводиться в розгляд лінійна однорідна допоміжна система диференціальних рівнянь, яка для (1.5) і функціоналу (1.4) має вигляд

$$\dot{\bar{p}}(t) = -\frac{\partial L(\bar{x}, \bar{u}, t)}{\partial \bar{x}} - A^T(t) \bar{p}(t), \quad (1.8)$$

де вектор $\bar{p}(t)$ називається допоміжним і визначений тільки уздовж оптимальної траєкторії $\bar{x}^*(t)$. Для системи (1.5) і функціоналу (1.4) з урахуванням (1.8) утворюється функція Гамільтона

$$H(\bar{x}, \bar{p}, \bar{u}, t) = L(\bar{x}, \bar{u}, t) + \bar{p}^T(t)(A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t)). \quad (1.9)$$

В загальному випадку, необхідна умова оптимальності формується таким чином: якщо $\bar{u}^*(t)$ оптимальне в сенсі обраного функціоналу, то існує безперервна ненульова вектор-функція $\bar{p}(t)$ така, що рішення $\bar{x}^*(t)$ та $\bar{p}^*(t)$ канонічних диференціальних рівнянь[45]

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}^*(t) &= \frac{\partial H(\bar{x}^*, \bar{p}^*, \bar{u}^*, t)}{\partial \bar{p}(t)}, \\ \dot{\bar{p}}^*(t) &= \frac{\partial H(\bar{x}^*, \bar{p}^*, \bar{u}^*, t)}{\partial \bar{x}(t)} \end{aligned} \quad (1.10)$$

задовольняють граничним умовам:

1. Для задач з фіксованим кінцевим станом

$$\bar{x}^*(t_0) = \bar{x}(t_0), \bar{x}^*(T_f) = \bar{x}(T_f), \bar{p}^*(T_f) = \bar{c}, \quad (1.11)$$

де \bar{c} - довільний постійний позитивний вектор;

2. Для задач з вільним кінцевим станом

$$\bar{x}^*(t_0) = \bar{x}(t_0), \bar{x}^*(T_f) - \text{любое}, \bar{p}^*(T_f) = \frac{\partial V(\bar{x}^*(T_f))}{\partial \bar{x}} \quad (1.12)$$

і співвідношенню

$$\min_{u \in U} H(\bar{x}^*, \bar{p}^*, \bar{u}, t) = H(\bar{x}^*, \bar{p}^*, \bar{u}^*, t), \quad (1.13)$$

де

$$H(\bar{x}^*, \bar{p}^*, \bar{u}^*, t) = H(\bar{x}^*(T_f), \bar{p}^*(T_f), \bar{u}^*(T_f), T_f) - \int_t^{T_f} \frac{\partial H(\bar{x}^*, \bar{p}^*, \bar{u}^*, t)}{\partial t} dt \quad (1.14)$$

Принцип мінімуму являє собою сукупність локальних необхідних умов оптимальності. В даній роботі розглядається задача стабілізації програмного руху БПЛА за умови мінімуму витрати енергоресурсів. При цьому керуючі моменти створюються за рахунок витрат палива або інших енергетичних ресурсів. Зокрема, для БПЛА існує співвідношення між швидкістю витрат енергоресурсів $g(t)$ і керуючим вектором $\bar{u}(t)$ у вигляді

$$g(t) = \sum_{k=1}^m \mu_k |u_k(t)|,$$

де μ_k - коефіцієнт пропорційності, $\mu_k > 0$; $u_k(t) (k = \overline{1, m})$ - компоненти керуючого вектора $\bar{u}(t)$. Тоді кількість енергоресурсів, витрачених за час $[t_0, T_f]$, визначається співвідношенням

$$I = \int_{t_0}^{T_f} \sum_{k=1}^m \mu_k |u_k(t)| dt \quad (1.15)$$

і розглядається в якості критерію оптимальності, що характеризує витрати енергоресурсів, в даному випадку палива.

Оскільки в силу реальних технічних умов компоненти управління $u_k(t)$ БПЛА не можуть приймати довільні значення і обмежуються гранично допустимою величиною U^{\max} , визначимо область припустимих управлінь як опуклу компактну підмножину $U_t \subset E^m$, яка задовольняє обмеження вигляду

$$U_t = \{\bar{u}(t) : |u_k(t)| \leq U^{\max} (k = \overline{1, m}) \forall t \in [t_0, T_f]\}. \quad (1.16)$$

Якщо покласти $U^{\max} = 1$, тоді (1.16) є гіперкуб в просторі E^m .

Згідно робіт [21,26] гамільтоніан (1.9) для системи (1.5) і функціоналу (1.15) приймає мінімальне значення, якщо

$$\bar{u}^*(t) = -dez\{M^{-1}B^T(t)\bar{p}^*(t)\}, \quad (1.17)$$

де dez - позначення функції зони нечутливості; M - діагональна матриця розміру $m \times m$, елементи якої рівні $\mu_k (k = \overline{1, m})$. Зі співвідношення (1.17) випливає, що для не вироджених задач на оптимум витрати палива компоненти вектора оптимального управління БПЛА є кусочно-постійними

функціями часу і приймають значення ± 1 або 0. Достатньою умовою [26] нормальності і невинудженості завдання на оптимум витрати палива є умова

$$\det(G_k) \neq 0 \forall k = \overline{1, m}. \quad (1.18)$$

Тут G_k - матриця розміром $n \times n$ виду

$$G_k = [\bar{b}_k^1; \bar{b}_k^2; \dots; \bar{b}_k^n], \quad (1.19)$$

де $\bar{b}_k^{(i)} = A(t)\bar{b}_k^{(i-1)} - \frac{d\bar{b}_k^{(i-1)}(t)}{dt}$ ($i = \overline{1, n}$); $\bar{b}_k^0 = \bar{b}_k(t)$; $\bar{b}_k(t)$ - n -вимірний вектор, відповідний k -ому стовпцю матриці коефіцієнтів при управлінні $B(t)$.

Якщо виконуються умови нормальності (1.18) розглянутої оптимізаційної задачі, то на основі аналізу екстремальних властивостей гамільтоніана в роботі [37] доведено теорему єдиності оптимальних за витратами палива управлінь з фіксованим часом керування при обмеженнях (1.6), (1.7) щодо елементів матриць $A(t)$ та $B(t)$.

Якщо буде встановлена верхня межа числа інтервалів управління для вектора $\bar{u}(t)$, враховуючи, що рішення задачі на оптимум витрати палива для нестационарних БПЛА досягається при релейному законі зміни, і тоді залишається визначити оптимальні моменти перемикавання компонент $u_k^*(t) - t_j^{*(k)}$ ($k = \overline{1, m}$). У загальному випадку застосування традиційних методів синтезу оптимального управління призводить до системи трансцендентних рівнянь, що не має, як правило, аналітичного рішення.

Для синтезу програмних управлінь, оптимальних в сенсі критерію (1.15), в роботі пропонується апарат функцій Уолша. За умов знакопостійності і монотонності функцій параметрів БПЛА застосування апарату функцій Уолша дозволяє уникнути необхідності вирішення трансцендентних рівнянь і звести задачу відшукування оптимальних моментів перемикавання до вирішення системи алгебраїчних рівнянь з точністю, яка визначається числом членів розкладання в ряд Уолша [45,94]. Цей підхід і застосований в даній роботі.

Слід зауважити, що найбільш поширеним класом критеріїв якості при вирішенні задачі синтезу оптимальних систем управління, зокрема оптимальної стабілізації, є інтегральні квадратичні функціонали, в яких вектор управління також пов'язаний з витратами енергоресурсів. Цей клас критеріїв цікавий перш за все тому, що при відсутності обмежень на вектор керуючих впливів і деяких припущеннях щодо матриць, які входять в функціонал, розглядаючи лінійні динамічні моделі БПЛА, можна отримати аналітичний вираз для оптимального управління і побудувати оптимальну систему управління з лінійним зворотним зв'язком. В цьому випадку синтез оптимальної системи можна виконати будь-яким класичним методом теорії оптимального управління. У даній роботі використовується принцип мінімуму, який при відсутності обмежень на вектор управління дозволяє отримати необхідні і достатні умови оптимальності для цього класу функціоналів. В загальному випадку, квадратичним критерієм якості процесу стабілізації, який фізично характеризує точність виконання програмного руху БПЛА і енергетичні витрати на його управління, є функціонал виду

$$I = \frac{1}{2} \{ \bar{x}^T(T_f) F \bar{x}(T_f) + \int_{t_0}^{T_f} [\bar{x}^T(t) Q(t) \bar{x}(t) + \bar{u}^T(t) R(t) \bar{u}(t)] dt \}, \quad (1.20)$$

де $F, Q(t), R(t)$ - постійні нестационарні позитивно певні матриці розміру $n \times n$ і $m \times m$.

Зауважимо, що математичні припущення щодо матриць $F, Q(t), R(t)$ відповідають фізичним вимогам, які пред'являються до системи стабілізації програмного руху БПЛА. Перший доданок в складі функціоналу (1.20) характеризує помилку управління в кінцевий момент управління T_f і розглядається в тому випадку, якщо її значення на думку проектувальника, важливо, інакше $F=0$. Другий доданок вводиться з метою виключення великих і тривалих відхилень координат стану від заданих значень при оптимальному процесі управління. Останній доданок, будучи завжди позитивним, "карає" систему за великі енергетичні витрати, тому фізично

характеризує затрачену на управління енергію і, тим самим, є своєрідною мірою вартості управління. Нестационарний характер матриць $Q(t), R(t)$ дозволяє відповідним чином регулювати значимість зазначених вище доданків в різні моменти часу t . Крім того, в процесі оптимальної стабілізації програмного руху БПЛА на перший план може висуватися або якість управління, або економія енергії на управління, що досягається вибором матриць $Q(t), R(t)$.

В роботі [26] показано, що гамільтоніан (1.9) для системи (1.5) і функціоналу (1.20) приймає мінімальне значення, якщо

$$\bar{u}^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\bar{p}^*(t). \quad (1.21)$$

Співвідношення (1.21) показує, що вектор оптимального управління $\bar{u}^*(t)$ є лінійна функція допоміжного вектора $\bar{p}^*(t)$ і однозначно визначається цим вектором. Звідси випливає, що розглянута оптимізаційна задача є нормальною.

Відомо [26], що $\bar{p}^*(t)$ та $\bar{x}^*(t)$ пов'язані співвідношенням виду

$$\bar{p}^*(t) = Z(t)\bar{x}^*(t),$$

де матриця $Z(t)$ задовольняє системі диференціальних рівнянь

$$\dot{Z}(t) = -A^T(t)Z(t) - Z(t)A(t) + Z(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Z(t) - Q(t) \quad (1.22)$$

з граничною умовою $Z(T_f) = F$.

Рівняння (1.22) являє собою нелінійне диференціальне векторно-матричне рівняння Ріккати, чисельне рішення якого навіть для невеликої розмірності вектора $\bar{x}(t)$ при нестационарних матрицях $A(t)$, $B(t)$, $R(t)$, $Q(t)$ пов'язане з труднощами обчислювального характеру. Ця обставина ускладнює або унеможлиблює безпосередню реалізацію аналітичних методів визначення оптимального закону стабілізації програмного руху нестационарних БПЛА і різноманітних умов їх функціонування. Крім того, є труднощі технічної реалізації нестационарного закону оптимальної стабілізації [25,45,94].

З іншого боку, зв'язок $\bar{p}^*(t)$ та $\bar{x}^*(t)$ може бути встановлений за допомогою фундаментальної матриці системи спрощених канонічних рівнянь у вигляді

$$\bar{p}^*(t) = K(t)\bar{x}^*(t), \quad (1.23)$$

де $K(t)$ - матриця, яка визначається через фундаментальну матрицю. У загальному випадку для лінійних нестационарних моделей БПЛА отримати аналітичний вираз для перехідної матриці не представляється можливим. Однак можна отримати його наближено. У даній роботі пропонується знаходити фундаментальну матрицю системи спрощених канонічних рівнянь шляхом наближеного інтегрування лінійного матричного диференціального рівняння стану, якому вона задовольняє, з використанням математичного апарату функцій Уолша [38,39,45,94]. При цьому елементи шуканої матриці визначаються у вигляді рядів Уолша, постійні коефіцієнти яких знаходяться з системи алгебраїчних рівнянь. Підставивши співвідношення (1.23) в (1.21), отримаємо вираз для оптимального закону стабілізації

$$\bar{u}^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)\bar{x}^*(t), \quad (1.24)$$

в якому матриця $K(t)$ визначена в термінах функцій Уолша. Відомі матриці $R(t)$, $B(t)$ також можуть бути представлені в термінах функцій Уолша. В результаті елементи матриць оптимального регулятора (1.24) є кусково-постійними функціями, що значно спрощує його технічну реалізацію.

Оскільки математичні моделі руху БПЛА відомі з точністю до параметрів, виникає задача параметричної ідентифікації об'єкта, що полягає в оцінці невідомих змінних параметрів $a_{ij}(t)$, $b_{ik}(t)$ БПЛА за оцінками вхідних і вихідних координат.

Для лінійних динамічних моделей БПЛА, математичний опис яких задано в просторі станів, а про динамічні властивості повну інформацію дають коефіцієнти диференціальних рівнянь, оцінки невідомих параметрів можна отримати як адаптивними, так і неадаптивними методами [40,45].

Для отримання оцінок змінних коефіцієнтів диференціальних рівнянь застосовують відомі прямі методи, такі як: метод найменших квадратів і його модифікації, метод диференціальної апроксимації, метод стохастичної апроксимації, метод послідовного інтегрування та ін. Кожен з них має свої особливості і може бути застосований в разі прийняття ряду припущень щодо характеру зміни параметрів лінійних динамічних моделей БПЛА.

Традиційно апроксимація кінцевими сумами ортогональних функцій використовувалася при оцінці таких динамічних характеристик об'єктів, як перехідна функція або імпульсна перехідна функція. В останні роки з'явилося багато робіт, присвячених використанню ортогональних систем функцій для оцінки параметрів математичної моделі, заданої диференціальними рівняннями, як для стаціонарних лінійних моделей з розподіленими параметрами, так і для лінійних нестаціонарних моделей з зосередженими параметрами, і відрізняються в основному, вибором тієї чи іншої системи ортонормованих функцій $\{\psi_i(t)\}$. Тут основний підхід полягає в наступному: первісна модель, представлена звичайними диференціальними рівняннями для зосереджених систем або диференціальними рівняннями в частинних похідних для розподілених систем, перетворюється в інтегральні рівняння: всі відомі і невідомі функції розкладаються в кінцеві ряди по обраним ортогональним функціям і потім підставляються в перетворену модель; вводиться так звана операційна матриця [41,42] для інтегрування обраної системи функцій, що дозволяє в подальшому отримати алгоритм ідентифікації у вигляді алгебраїчних рівнянь.

Основний недолік даного підходу полягає у використанні для багаторазового інтегрування операційних матриць, яке призводить до накопичення помилок інтегрування на кожному кроці і зниження точності одержуваних оцінок.

У розділі 2.1 автором пропонується методика параметричної ідентифікації БПЛА, що дозволяє обійти зазначені вище труднощі і

отримати оцінки шуканих параметрів у вигляді кінцевого ряду Уолша. Методика заснована на спільному використанні сплайн-функцій та розкладанні в ряд Уолша всіх функцій, що входять в рівняння лінійної нестационарної моделі БПЛА (1.5). Це дозволяє отримати оцінки шуканих постійних коефіцієнтів розкладання в ряд Уолша невідомих функцій параметрів $a_{ij}(t)$, $b_{ik}(t)$, шляхом мінімізації інтегрального квадратичного критерію нев'язки.

Використання в задачах ідентифікації інтегрального квадратичного критерію нев'язки рівняння (1.5) передбачає наявність відомого аналітичного виразу як для вектора стану $\bar{x}(t)$, так і для його похідної $\dot{\bar{x}}(t)$, а інформація про результати спостереження задана зазвичай в дискретні моменти часу вимірювань $t_i (i = \overline{1, N})$. Труднощі, пов'язані з визначенням цих виразів, можна подолати, використовуючи для інтерполяції значень вектора $\bar{x}(t_i)$ векторну сплайн-функцію $\bar{S}(t)$.

Для класу лінійних нестационарних моделей БПЛА з монотонними та знакопостійними параметрами отримана на основі такого підходу модель може бути використана для синтезу алгоритмів оптимальної стабілізації програмного руху БПЛА.

Вибір монотонних та знакопостійних параметрів нестационарної моделі руху БПЛА обумовлений тим, що витрати палива у польоті достатньо повільні.

1.3. Структурно-функціональна схема автоматизації процесу оптимальної стабілізації. Постановка завдань дослідження

Як показує досвід розробки безпілотних літальних апаратів, в контурі управління БПЛА існують два основних елементи. Перший - виконавчий, тобто це сам планер з силовою установкою і кермові механізми. Другий - командний. Це той елемент, який ставить за мету на політ, приймає рішення в разі необхідності змінити програму польоту, виконує корекцію руху літального апарату при його відхиленнях від заданої траєкторії руху.

При побудові систем управління (СУ) БПЛА [43,44] командний елемент може повністю знаходитися на борту БПЛА і тільки планування траєкторії польоту виноситься за межі апарату і зв'язується з виконавчим елементом лінією передачі (автономні СУ). З точки зору стабілізації програмного руху БПЛА система стабілізації, як частина СУ, повинна вирішувати такі завдання:

- стабілізація параметрів руху БПЛА стосовно зовнішніх перешкод різної природи;
- аналіз зовнішніх даних бортовими засобами;
- розрахунок оптимальних законів стабілізації з метою зменшення витрат ресурсів БПЛА;
- контроль правильності утримання траєкторії;
- забезпечення відмовостійкості об'єкта управління або компенсація змін його характеристик бортовими засобами;
- виконання обчислювальних операцій великого обсягу в реальному часі для реалізації алгоритмів керування БПЛА.

Управління кутовими рухами забезпечує цілком певне положення БПЛА в просторі по відношенню до вектора швидкості центру мас. Управління рухом центру мас забезпечує політ за найкращою (оптимальною) траєкторією, наприклад, по найкоротшому шляху за найкоротший час.

У разі вимоги точного виконання руху БПЛА по заданій траєкторії виникає гостра необхідність в автономній автоматичній стабілізації програмного руху .

БПЛА (швидкість, кут і т.д.), що визначають траєкторію руху. Отримані функції часу вводяться в спеціальні пристрої СУ . Після старту в процесі польоту БПЛА відповідними пристроями безперервно змінюються поточні (дійсні) значення зазначених параметрів. СУ здійснює порівняння розрахункових значень параметрів з поточними значеннями і при їх

нерівності виробляє відповідні сигнали управління. Якщо на БПЛА встановлена апаратура, що дозволяє вести безперервний вимір її координат в просторі, то автономне управління можна здійснити по-іншому. Координати, одержувані від апаратури, автоматично вводяться в бортовий обчислювальний пристрій, який відповідно до заздалегідь закладеної програми обчислює величину сигналів управління. Отже, заздалегідь не задається певна траєкторія, а кожен раз обчислюється в залежності від поточних координат. При цьому передбачається, що координати об'єкта попередньо закладені в обчислювальний пристрій. На роботу таких СУ не роблять вплив штучно створювані перешкоди. Це основна їх перевага. Крім того, ці системи можна застосовувати для управління БПЛА з великою дальністю польоту.

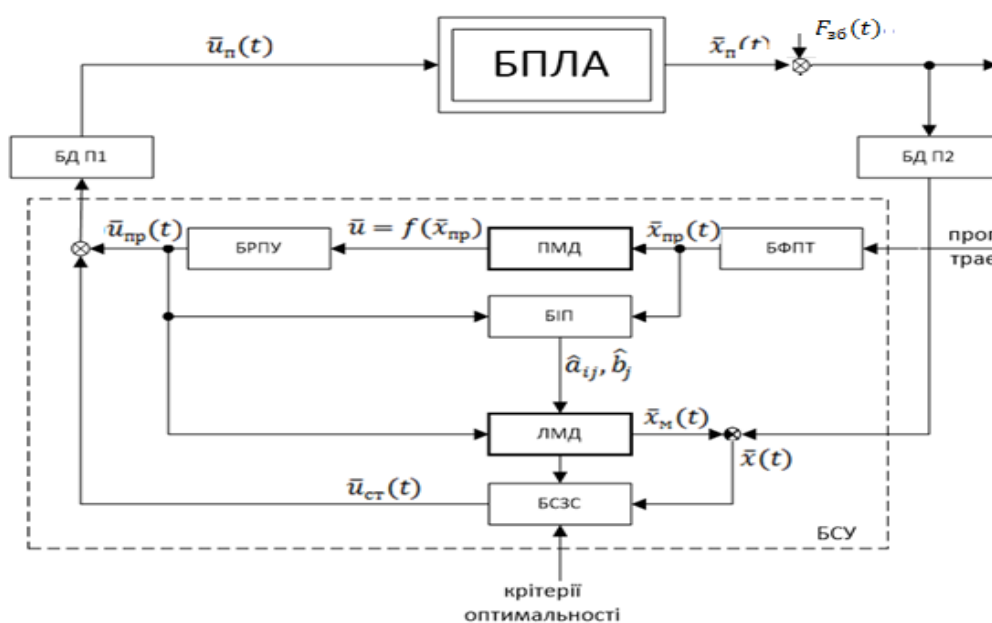


Рис.1.7. Структурно-функціональна схема реалізації процесу автоматичної оптимальної стабілізації програмного руху БПЛА

На рис.1.7 запропонована структурно-функціональна схема реалізації процесу автоматичної оптимальної стабілізації програмного руху БПЛА. Відповідно до даної структурно-функціональної схеми реалізація процесу автоматичної оптимальної стабілізації програмного руху БПЛА на трьох каналах управління (подовжньому, боковому і навколо центру мас)

здійснюється наступним чином. До початку польоту на вхід бортової системи управління (БСУ) надходить задана програмна траєкторія руху БПЛА або у вигляді дискретного ряду просторових координат, або в аналітичній формі на окремих ділянках польоту. У першому випадку блок формування програмної траєкторії (БФПТ) здійснює сплайн-наближення дискретного ряду координат. У другому випадку необхідність в цьому відпадає. Отримана програмна траєкторія через повну модель динаміки БПЛА (ПМД) надходить в блок розрахунку програмного управління і через блок датчиків-перетворювачів (БДП1) подається в польоті на органи управління БПЛА. При цьому в польоті для заданих ділянок програмного руху БПЛА на основі інформації про програмне управління і програмну траєкторію в блоці ідентифікації параметрів БПЛА (БІП) обирається відповідна цій ділянці лінеаризована модель динаміки БПЛА і здійснюється оцінка її параметрів у вигляді рядів Уолша. Ці дані надходять в обрану лінеаризовану модель динаміки БПЛА (ЛМД), на виході якої при подачі програмного управління формується модельна програмна траєкторія і порівнюється з поточною траєкторією, що надходить через блок датчиків-перетворювачів (БДП2). Поява раптової неузгодженості між програмною та поточною траєкторіями («повітряна яма», потужний порив вітру, вхід в зону сильної турбулентності, скидання вантажу (бомбометання) і ін.) надходить в блок синтезу законів стабілізації (БСЗС). З урахуванням заданих ззовні критеріїв оптимальності БСЗС автоматично формує в реальному часі управління, які ліквідують виниклу неузгодженість відповідно до заданого критерію якості. Отже, дана схема, по суті, реалізує двоконтурну автоматичну систему управління БПЛА, тобто, контур програмного руху і контур оптимальної стабілізації програмного руху.

Згідно вищевикладеного і цієї схеми для автоматизації процесу оптимальної стабілізації програмного руху БПЛА в роботі вирішуються наступні завдання:

- розробити метод перетворення одного класу лінійних нестационарних моделей БПЛА в еквівалентні їм лінійні стаціонарні моделі;
- розробити узагальнену процедуру параметричної ідентифікації параметрів лінійних динамічних моделей БПЛА на базі сплайн-функцій і функцій Уолша;
- розробити алгоритм адаптивного вибору кроку процедури ідентифікації параметрів БПЛА;
- розробити процедуру синтезу оптимальних замкнутих законів стабілізації програмного руху нестационарних БПЛА на базі сплайн-функцій і функцій Уолша для енергозберігаючих лінійно-квадратичних задач і задач оптимальної витрати палива;
- розробити модальні оптимальні алгоритми стабілізації програмного руху стаціонарних БПЛА при відсутності і наявності запізнювання в контурі управління;
- розробити модальний робастний алгоритм стабілізації програмного руху стаціонарних БПЛА з параметричною невизначеністю.

1.4. Математичний апарат наближення та ідентифікації параметрів лінійних динамічних моделей БПЛА

У даній роботі для подолання деяких труднощів, що виникають при синтезі алгоритмів ідентифікації і в подальшому оптимальній стабілізації програмного руху БПЛА традиційними методами, пропонується використовувати математичний апарат функцій Уолша [39,41]. В даний час є велика кількість робіт, присвячених застосуванню функцій Уолша в техніці зв'язку, радіолокації і теорії інформації [38,39]. Однак систематизованого викладу матеріалу щодо застосування функцій Уолша в теорії управління на даний час не існує.

Актуальність застосування функцій Уолша пояснюється їх наступними особливостями [45,94].

1. Методи рішення рівнянь зі змінними коефіцієнтами за допомогою традиційних синусоїдальних функцій виявляються надзвичайно складними. У зв'язку з цим в значній мірі підвищився інтерес до несинусоїдальних систем повних ортогональних базисних функцій і, в першу чергу, прямокутним, що дозволяють природно спростити аналіз і синтез систем зі змінними параметрами.

2. Кожна послідовність функції Уолша легко моделюється за допомогою інших шляхом їх перемножування

3. Функції Уолша приймають значення тільки ± 1 і являють собою апарат, тісно пов'язаний з двійковим розкладанням. У зв'язку з цим застосування системи функцій Уолша дозволяє легко на цифрову техніку генерувати і моделювати кодові послідовності системи Уолша; істотно спростити обчислювальні процедури цифрової реалізації алгоритмів, побудованих на їх основі, значно спростити практичну реалізацію оптимальних регуляторів.

В роботі використовується діадне впорядкована за двійковим розкладанням номерів система функцій Уолша [38]. Ця система найбільш зручна для проведення обчислень, просто моделюється і для великого класу безперервних функцій найбільш швидко зі зростанням номера функції Уолша зменшуються коефіцієнти розкладання в ряд по діадне впорядкованим функціям Уолша.

Наступні властивості системи функцій Уолша особливо корисні для наших цілей.

1. Система функції Уолша являє собою повну ортонормовану систему функцій на інтервалі $[0, 1]$, тобто виконується умова ортогональності

$$\int_0^1 \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx = \delta_{jk}, \quad (1.25)$$

$$\text{де } \varphi_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

2. Система функцій Уолша утворює комутативну групу і, отже, має властивість мультиплікативності, яке виражається співвідношенням

$$\varphi_j(x)\varphi_k(x) = \varphi_{j \oplus k}(x). \quad (1.26)$$

Це означає, що добуток двох функцій Уолша завжди дає нову функцію Уолша з тієї ж системи.

3. В роботі [39] показано, що інтеграл функції Уолша

$$I_k(x) = \int_0^x \varphi_k(x') dx' \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

може бути представлений у вигляді ряду за функціями Уолша при

$$k = 2^n + k', 0 \leq k' \leq 2^n$$

$$I_0(x) = \frac{1}{2} \varphi_0(x) - \frac{1}{4} \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p} \varphi_{2^p}(x),$$

$$I_k(x) = 2^{-(n+2)} [\varphi_{k'}(x) - \sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p} \varphi_{2^{n+p}+k}(x)], k \geq 1.$$

Ці співвідношення можуть бути представлені в компактній формі

$$\int_0^x \bar{\varphi}(x') dx' = P \bar{\varphi}(x), \quad (1.27)$$

де $\bar{\varphi}^T(x) = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots\}$ - вектор, компонентами якого є функції Уолша; P - матриця, названа в [39] операційною матрицею інтегрування. $\bar{\varphi}(x)$ та P в (1.27) мають нескінченну розмірність, апроксимація кінцевої розмірності може бути отримана обмеженням вектора $\bar{\varphi}(x)$, що містить тільки 2^n функцій Уолша для деякого цілого $n \geq 1$. В результаті квадратна операційна матриця P буде мати розмірність $N = 2^n$, а співвідношення (1.27) – вид

$$\int_0^x \bar{\varphi}_N(x') dx' \approx P_{(N \times N)} \bar{\varphi}_N(x). \quad (1.28)$$

Загальний вираз для операційної матриці довільної кінцевої розмірності N має вигляд [39]

$$P_{(N \times N)} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -2/N I_{(N/8)} & -1/N I_{N/4} & -1/2N I_{N/2} \\ 2/N I_{(N/8)} & O_{(N/8)} & & & \\ & 1/N I_{(N/4)} & O_{(N/4)} & & \\ & & 1/2N I_{N/2} & O_{(N/2)} & \end{bmatrix}, \quad (1.29)$$

де $I_{(N)}$ та $O_{(N)}$ - одинична і нульова матриці розміру $N \times N$ відповідно.

При інтегруванні приєднаних рівнянь функцій Уолша необхідно інтегрувати від $x=1$ по x , тобто $\int_1^x \varphi_k(x') dx' (k = \overline{0,7})$. Інтегрування в зворотному часі для системи функцій Уолша обсягу N може бути записано згідно [44,99] у наступному вигляді

$$\int_1^x \bar{\varphi}_N(x') dx' = Q_{(N \times N)} \bar{\varphi}_N(x), \quad (1.30)$$

де

$$Q_{(N \times N)} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & -2/N I_{(N/8)} & -1/N I_{N/4} & -1/2N I_{N/2} \\ 2/N I_{(N/8)} & O_{(N/8)} & & & \\ & 1/N I_{(N/4)} & O_{(N/4)} & & \\ & & 1/2N I_{N/2} & O_{(N/2)} & \end{bmatrix}. \quad (1.31)$$

Матриця $Q_{(N \times N)}$ називається операційною матрицею зворотного інтегрування). Порівняння виразів (1.29) і (1.31) для матриць $P_{(N \times N)}$ та $Q_{(N \times N)}$ показує, що за винятком першого елемента першого рядка, інші елементи цих матриць ідентичні. Отримання інформації про керований процес здійснюється на основі вимірів вхідних і вихідних змінних в дискретні моменти часу, звідси виникає проблема апроксимації (наближення) дискретних даних.

При вирішенні завдань наближеного представлення функцій використовуються найрізноманітніші апроксиманти, починаючи зі звичайних поліномів і закінчуючи складними функціональними залежностями. Для

підвищення точності наближення часто застосовується кусочна апроксимація функції $f(t), t \in D$, яка полягає в розбитті множини D на підмножини D_j . $D = \bigcup_j D_j$, в кожній з яких здійснюється незалежна апроксимація за допомогою відповідної функції $p_j(t, a_j)$. Такий шлях дає неекономічні за числом параметрів наближення. Більш економічні наближення виникають, якщо на кожну частину $p_j(t, a_j)$ апроксимуючої функції накласти деякі умови "зшивання" з сусідніми частинами. Якщо в якості $p_j(t, a_j)$ обрані поліноми, то такі конструкції називають поліноміальними сплайн-функціями або сплайнами [66,119]. Сплайн-функції та їх розрахунок наведено в додатку 1.

1.5. Обґрунтування використання спрощених лінеаризованих моделей руху БПЛА

Як вже зазначалося вище, використання повної моделі просторового руху для задач стабілізації програмного руху БПЛА досить важке і недоцільне. Поділ просторового руху на поступальний рух центру мас і обертальний рух відносно центру мас, на поздовжнє і бічне істотно спрощує запис рівнянь руху, їх рішення і дослідження [19]. У багатьох випадках виявляється доцільним отримати спрощені моделі динаміки пересування і бічного руху БПЛА не з загальної моделі просторового руху, а безпосередньо на основі спрощеної схеми діючих сил і моментів, складеної для конкретного випадку [20].

Принципова можливість такого розкладу на поздовжній і бічний рух може бути, наприклад, обумовлена симетрією БПЛА щодо поздовжньої осі. У свою чергу поздовжній рух (рух тангажу) складається з поступального переміщення центру мас у вертикальній площині польоту (траєкторія мало відрізняється від плоскої) і обертання навколо поперечної осі Oz (органи управління креном і рисканням практично не відхиляються). При такому русі забезпечується хороша стабілізація крену. При бічному русі в напрямку осі Oz переміщується центр мас, а БПЛА відчуває обертання щодо осей Oy і

Ох (при цьому працюють керма управління, що забезпечують стабілізацію руху щодо рискання і крену). Розглянемо процедуру отримання лінійних динамічних моделей руху БПЛА на прикладі його поздовжнього руху [19,20].

Для отримання спрощеної лінійної моделі поздовжнього руху БПЛА, вкрай важливо ввести певні припущення і провести процедуру лінеаризації. Цей розгляд вестимемо з використанням пов'язаної $OXYZ$ і напівпов'язаної $Ox_eY_eZ_e$ систем координат. За початок координат обох систем приймається точка, в якій розташований центр ваги БПЛА. Вісь OX пов'язаної системи координат проводиться паралельно хорді крила і називається поздовжньою віссю БПЛА. Нормальна вісь OY перпендикулярна OX і розташована в площині симетрії БПЛА. Вісь OZ перпендикулярна до OX і OY , а отже, і до площини симетрії БПЛА. Вона називається поперечною віссю БПЛА. Вісь Ox_e напівпов'язаної системи координат лежить в площині симетрії БПЛА і спрямована по проекції на неї вектора швидкості. Вісь OY_e перпендикулярна Ox_e і розташована в площині симетрії БПЛА. Вісь OZ_e перпендикулярна до Ox_e і OY_e .

Система рівнянь, що описує поздовжній рух БПЛА може бути виділена з повної системи рівнянь, за умови, що параметри бічного руху, а також кути відхилення органів управління креном і рисканням рівні 0. Враховуючи це, а також схему діючих сил і кути, які визначають положення БПЛА у поздовжньому русі (рис.1.8) можна визначити параметри і змінні динаміки БПЛА.

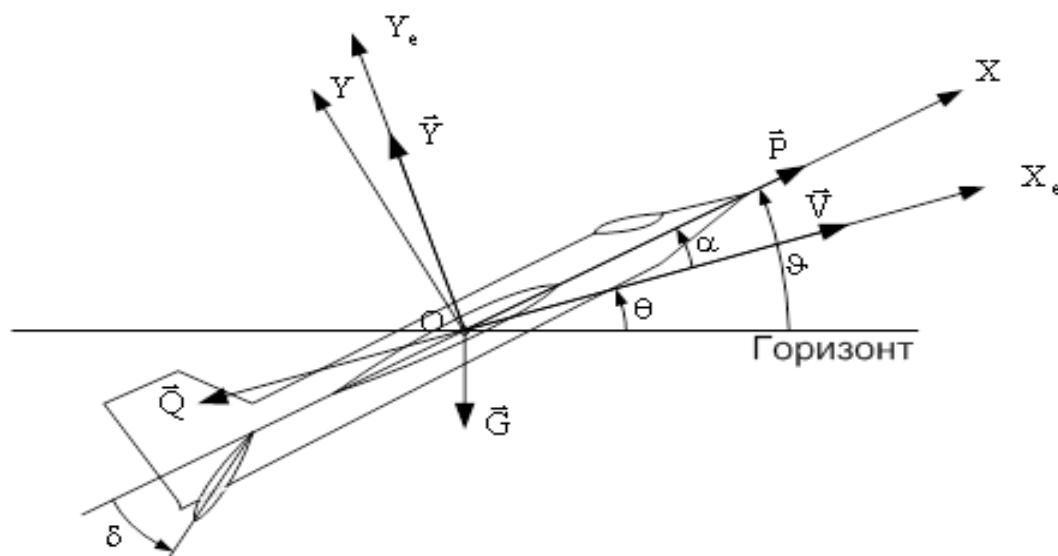


Рис.1.8. Схема діючих сил і кути, які визначають положення БПЛА у поздовжньому русі

Отже, система рівнянь поздовжнього руху БПЛА може бути записана у зв'язаній системі координат як[19]:

$$\begin{aligned}
 m\dot{V} &= P \cos \alpha - X_a - mg \sin \theta \\
 mV\dot{\theta} &= P \sin \alpha + Y_a - mg \cos \theta \\
 I_z \dot{\omega}_z &= M_z \\
 \dot{\vartheta} &= \omega_z \\
 \alpha &= \vartheta - \theta
 \end{aligned}
 \tag{1.32}$$

Інші позначення, прийняті на рис.1.8: α – кут атаки; ϑ – кут тангажу; θ – кут нахилу траєкторії; \vec{V} – вектор повітряної швидкості; \vec{Y} – підйомна сила; \vec{P} – сила тяги двигунів; \vec{Q} – сила лобового опору; \vec{G} – сила тяжіння; δ – кут відхилення керма висоти; \vec{M}_z – момент тангажу, що обертає БПЛА навколо OZ .

З огляду на те, що в режимі стабілізації кути α , ϑ , θ досить малі, то справедливі співвідношення $\sin \theta = \theta$, $\sin \alpha = \alpha$, $\cos \theta = \cos \alpha = 1$. Крім того, враховуючи, що $d\alpha/dt = d\vartheta/dt - d\theta/dt$, можемо ввести наступні позначення в системі рівнянь (1.32): $y = x_1; dy/dt = x_2$; $\vartheta = x_3; d\vartheta/dt = \omega_z = x_4$; $\alpha = x_5; P(t) = u(t)$.

Звідси, отримаємо наступну лінеаризовану модель поздовжнього руху БПЛА:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2(t) \\ \dot{x}_2 &= a_{25}(t)x_5(t) + a_{22}(t)x_2(t) + b_2(t)u(t) \\ \dot{x}_3 &= x_4(t) \\ \dot{x}_4 &= a_{44}(t)x_4(t) + a_{45}(t)x_5(t) + b_4(t)u(t) \\ \dot{x}_5 &= a_{54}(t)x_4(t) + a_{55}(t)x_5(t) + b_5(t)u(t)\end{aligned}\tag{1.33}$$

Система рівнянь (1.33) відповідає системі (1.5), яка записана в векторній формі і розглядається в подальшому у роботі. Аналогічно можуть бути отримані і інші системи рівнянь, зокрема бічного руху.

1.6. Висновки

1. Проведений порівняльний аналіз відомих методів оптимізації показав, що їх використання для нестационарних систем, які в загальному випадку описують динаміку БПЛА, не дозволяє синтезувати оптимальні закони стабілізації в аналітичній формі. У зв'язку з цим у роботі запропоновано підхід, що використовує принцип мінімуму в поєднанні з математичним апаратом сплайн-функцій і функцій Уолша.

2. В якості основних поліноміальних функцій наближення невідомих параметрів нестационарних БПЛА обрані й обґрунтовані сплайн-функції, на основі яких реалізується їх розкладання в ряди Уолша з заданої апіорі точністю.

3. Запропонована структурно-функціональна схема автоматизації процесу оптимальної стабілізації програмного руху БПЛА, для реалізації якої сформульовано основні завдання дисертаційного дослідження.

4. Обґрунтовано використання лінеаризованих моделей руху БПЛА. Отримання таких моделей показано на прикладі моделі поздовжнього руху БПЛА.

Основні результати розділу були опубліковані в [13]

Список використаних джерел до розділу 1:[16]-[44],[94],

ГЛАВА 2. ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ РУХУ БПЛА

2.1. Узагальнена процедура ідентифікації параметрів лінійних динамічних моделей руху БПЛА

Великий інтерес до теорії оцінювання виник в результаті необхідності підвищення якості функціонування технічних систем, а також внаслідок істотної зміни можливостей застосування теорії оцінювання, маючи на увазі застосування сучасних обчислювальних засобів [3-5,14,40,45-51,52-55,58-64]. В роботі, згідно обґрунтуванню в розділі 1.4, використовується математичний апарат поліноміального наближення у вигляді сплайн-функцій [45-47,94,118,119], зокрема, кубічних сплайнів, а також апарат функцій Уолша [45,48-51] для оцінювання параметрів лінійних динамічних моделей БПЛА. Завдання оцінювання параметрів математичних моделей БПЛА в даному випадку полягає в наступному. Для математичних моделей БПЛА, описуваних системою диференціальних рівнянь виду (1.5), необхідно, знаючи вхідну і вихідну інформацію про стан БПЛА, побудувати узагальнену процедуру ідентифікації невідомих параметрів зазначеного широкого класу лінійних динамічних моделей руху БПЛА. Відомо [55-57,60-63], що для синтезу алгоритмів параметричної ідентифікації вихідною інформацією є вид математичної моделі і спостереження вхідних і вихідних змінних. У багатьох випадках дослідник також має в своєму розпорядженні апріорну інформацію про характер зміни оцінюваних параметрів.

Оцінку параметрів будемо здійснювати, виходячи з мінімуму квадрата нев'язки

$$I = \min \left\{ \int_{t_0}^{t_0+T_f} \left[\dot{\bar{x}}(t) - A(t)\bar{x}(t) - B(t)\bar{u}(t) \right]^2 dt \right\}.$$

Очевидно, що використання наведеного вище функціоналу в задачах ідентифікації передбачає наявність відомого аналітичного виразу як для вектора змінних стану $\bar{x}(t)$, так і для його похідних $\dot{\bar{x}}(t)$ [41,42,45,65-67].

Відомі труднощі, пов'язані з визначенням цих виразів, пропонується в даній роботі долати використанням математичного апарату сплайн-функцій, наведеного в розділі 1.4.

В деяких випадках параметри БПЛА змінюються досить повільно в порівнянні з тривалістю окремих ділянок польоту. Тоді при оцінці параметрів БПЛА можна застосувати принцип квазістаціонарності [27]. Це означає, що на деяких інтервалах часу $[t_l, t_l + T_l] \in [t_0, T_f]$ ($l = \overline{1, L}$), L - кількість інтервалів квазістаціонарності. параметри БПЛА залишаються незмінними і коефіцієнти рівняння (1.5) можна вважати постійними, тобто $a_{ij}(T_l) = \text{const}$, $b_{ik}(T_l) = \text{const}$ ($i, j = \overline{1, n}$) ($k = \overline{1, m}$). Лінійна стаціонарна модель БПЛА, в такому разі, є окремим випадком квазістаціонарної моделі БПЛА.

В загальному випадку лінійна динамічна модель БПЛА носить нестаціонарний характер і відповідає умовам щодо коефіцієнтів рівняння (1.5), зазначених для загального випадку динаміки БПЛА. Тоді, використовуючи сплайн-наближення і ортогональне розкладання всіх відомих і невідомих функцій моделі системи в ряд Уолша, зводимо задачу ідентифікації до визначення постійних коефіцієнтів ряду Уолша, що забезпечують мінімум зазначеному вище критерію нев'язки.

У всіх зазначених випадках, скориставшись ортогональним розкладанням в ряд Уолша, приходимо до моделі або з постійними параметрами на підінтервали квазістаціонарності або на всьому інтервалі, або до моделі з постійними коефіцієнтами ряду Уолша, які необхідно оцінити. Тобто у всіх зазначених вище випадках, алгоритми ідентифікації зводяться до вирішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$C\bar{g} = \bar{d},$$

що представляє собою систему з наближено заданими вихідними даними (коефіцієнти матриць C і \bar{d}). Похибка завдання матриць C , \bar{d} залежить від похибки наближення вектора стану системи (1.5) сплайнами, обраного обсягу системи ортонормованих функцій Уолша і обчислювальних похибок. Як відомо [66], рішення подібних систем традиційними способами (метод

Гаусса, метод найменших квадратів та ін.) часто призводить до нестійкості рішень навіть при малих змінах вхідних даних. Стале рішення систем з наближено заданими вхідними даними можна отримати, використовуючи відомий регуляризуючий алгоритм А.Н.Тихонова [68-70].

Слід також зазначити, що оскільки інтервали ідентифікації відрізняються за тривалістю, доцільно привести їх до нормованого інтервалу $[0,1]$. Крім того, для отримання аналітичних виразів змінних стану, взятих в дискретні моменти часу за умови, що вектор стану є повністю змінним, як уже згадувалося раніше, будемо використовувати кубічні сплайни.

З огляду на вищевикладене і роботи [45,54], пропонується наступний алгоритм реалізації узагальненої процедури параметричної ідентифікації на базі сплайн-функцій і функцій Уолша [14]:

Крок 1. Визначаємо окремі ділянки польоту БПЛА і їх тривалість. Вводимо безрозмірний час τ рівний $\tau = \frac{t-t_0}{T_f-t}$ і наводимо тривалість управління на цих ділянках $[t_0, T_f]$ до нормованого інтервалу $[0,1]$.

Крок 2. На нормованому інтервалі $[0,1]$ задаємо сітку $\langle \tau_i \rangle (i = \overline{0, N}; t_N = 1)$ з кроком Δ_N . Визначаємо значення вектора стану $\bar{x}(\tau_i)$ і управління $\bar{u}(\tau_i)$ із заданої програмної траєкторії і отриманого із повної моделі програмного управління. Крок Δ_N обираємо враховуючи динаміку змінних.

Крок 3. На обраній сітці здійснюємо інтерполяцію, отримуючи аналітичний вираз для оцінки вектор-функції стану і управління відповідно у вигляді кубічних сплайнів $\bar{S}_x(\tau)$ і $\bar{S}_u(\tau)$.

Крок 4. Для знайдених функцій $\bar{S}_x(\tau)$ і $\bar{S}_u(\tau)$ і невідомих параметрів системи застосовуємо ортогональне розкладання в ряд Уолша з обраною сіткою або з використанням розробленого алгоритму адаптивного вибору шагу ідентифікації.

Крок 5. Нормуємо за часом обрану лінійну модель БПЛА і наводимо її до інтегрального виду,

Крок 6. Використовуючи властивості функцій Уолша, замінюємо операцію інтегрування на квадратну операційну матрицю інтегрування $P_{(NXN)}$ (1.29) розмірністю $N = 2^n$ [99]. Суть даної властивості в тому, що інтеграл функції Уолша залишається в класі системи функцій Уолша, тобто

$$\int_0^x \bar{\varphi}_N(x) dx \approx P_{(NXN)} \bar{\varphi}_N(x) ,$$

де - $\bar{\varphi}_N(x) = \{\varphi_0(x) \dots \varphi_N(x)\}$ - вектор, компонентами якого є функції Уолша.

Крок 7. Скорочуючи ліву і праву частину отриманого рівняння на вектор обраної системи функцій Уолша, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь.

Крок 8. Отриману алгебраїчну систему рівнянь вирішуємо щодо невідомих параметрів, представлених сукупністю коефіцієнтів розкладання інтервалу $[t_0, T_f]$, перераховуючи відповідним чином знайдені параметри лінійної динамічної моделі БПЛА.

2.2. Оцінка параметрів стаціонарних моделей руху БПЛА.

Якщо маса витраченого на управління палива значно менше маси БПЛА, то можна вважати, що параметри БПЛА в процесі польоту не змінюються. Отже, можливо використовувати в режимах стабілізації програмного руху БПЛА лінійні стаціонарні моделі. Слід також зауважити, що для малих БПЛА ця модель руху є основною і єдиною. В цьому випадку, динаміка моделі БПЛА задається за допомогою наступної системи диференціальних рівнянь

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t), \quad (2.1)$$

де $\bar{x}(t)$ - n -вимірний вектор стану; $\bar{u}(t)$ - r -вимірний вектор управління; A і B - відповідно $n \times n$ і $n \times r$ матриці постійних коефіцієнтів.

Вважаємо, що для системи (2.1) проведені кроки 0-2 зазначеного вище алгоритму ідентифікації, в результаті чого отримано аналітичні вирази $\bar{S}_x(\tau)$ і $\bar{S}_u(\tau)$.

Застосовуючи до знайдених виразів $\bar{S}_x(\tau)$ і $\bar{S}_u(\tau)$ розкладання в ряд Уолша, маємо

$$S_{x_i}(\tau) = c_{0i}\varphi_0(\tau) + c_{1i}\varphi_1(\tau) + \dots + c_{Ni}\varphi_N(\tau) = c_i^{-T}\phi_N(\tau); \quad (2.2)$$

$$S_{x_k}(\tau) = d_{0k}\varphi_0(\tau) + d_{1k}\varphi_1(\tau) + \dots + d_{Nk}\varphi_N(\tau) = d_k^{-T}\phi_N(\tau), \quad (2.3)$$

$$\text{де } c_{ij} = \int_0^1 S_{x_i}(\tau)\varphi_j(\tau)d\tau, \quad j=1, N, \quad i=1, n; \quad d_{ij} = \int_0^1 S_{u_x}(\tau)\varphi_j(\tau)d\tau, \quad j=1, N, \quad k=1, r$$

Запишемо вирази (2.2) і (2.3) у векторній формі

$$\bar{S}_x(\tau) = C_{(n \times N)}\phi(\tau) \quad (2.4)$$

$$\bar{S}_u(\tau) = D_{(r \times N)}\phi(\tau) \quad (2.5)$$

$$\text{де } C_{(n \times N)} = \begin{bmatrix} c_{01} & c_{02} & \dots & c_{0n} \\ c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{Nn} \end{bmatrix} \quad D_{(r \times N)} = \begin{bmatrix} d_{01} & d_{02} & \dots & d_{0r} \\ d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{N1} & d_{N2} & \dots & d_{Nr} \end{bmatrix}$$

$$\phi_N(\tau) = [\varphi_0(\tau), \varphi_1(\tau), \dots, \varphi_N(\tau)]^T$$

Пронормуємо за часом систему рівнянь (2.1). Маємо

$$\dot{\bar{x}}(\tau) = (t_k - t_0)A\bar{x}(\tau) + (t_k - t_0)Bu(\tau) \quad \text{або} \quad \dot{\bar{x}}(\tau) = \bar{A}\bar{x}(\tau) + \bar{B}\bar{u}(\tau). \quad (2.6)$$

де \bar{A} і \bar{B} —матриці невідомих коефіцієнтів розмірністю відповідно $(n \times n)$ і $(n \times r)$ рівні $\tilde{A} = (t_k - t_0)A$; $\tilde{B} = (t_k - t_0)B$;

Інтегруємо рівняння (2.6) при заданих початкових умовах

$$\tilde{x}(\tau) - \bar{x}^0 = \int_0^\tau \tilde{A}\bar{x}(\tau')d\tau' + \int_0^\tau \tilde{B}\bar{u}(\tau')d\tau'$$

або

$$\tilde{x}(\tau) - \bar{x}^0 = \tilde{A} \int_0^\tau \bar{x}(\tau')d\tau' + \tilde{B} \int_0^\tau \bar{u}(\tau')d\tau' \quad (2.7)$$

Запишемо \bar{x}^0 за допомогою штучного перетворення в наступному вигляді

$$\bar{x}^0 = \bar{x}^0\varphi_0(\tau) = [\bar{x}^0, 0, \dots, 0]\phi_N(\tau) = G\tau_{(N \times M)}\phi_N(\tau) \quad (2.8)$$

З урахуванням аналітичних оцінок векторів стану і управління рівняння (2.7) запишеться

$$\tilde{x}(\tau) - \bar{x}^0 = \tilde{A} \int_0^\tau \bar{S}_x(\tau') d\tau' + \tilde{B} \int_0^\tau \bar{S}_u(\tau') d\tau' \quad (2.9)$$

Підставивши вираз (2.9) в отримані ортогональні розкладання (2.5), (2.6) і (2.8), отримаємо

$$\begin{aligned} C_{(n \times N)} \phi_N(\tau) - G_{(n \times N)} \phi_N(\tau) &= \tilde{A}_{(n \times N)} C_{(n \times N)} \int_0^\tau \phi_N(\tau') d\tau' + \\ &+ \tilde{B}_{(n \times r)} D_{(r \times M)} \int_0^\tau \phi_N d\tau' \end{aligned} \quad (2.10)$$

Застосовуючи для інтегрування (2.10) операційну матрицю апарату функцій Уолша, маємо

$$\begin{aligned} C_{(n \times N)} \phi_N(\tau) - G_{\tau(n \times N)} \phi_N(\tau) &= \tilde{A}_{(n \times n)} C_{(n \times N)} P_{(N \times N)} \phi_N(\tau) + \\ &+ \tilde{B}_{(n \times r)} D_{(r \times N)} P_{(N \times N)} \phi_N(\tau) + E_{(n \times N)} \phi_N(\tau) \end{aligned}$$

де $E_{(n \times N)}$ — матриця коефіцієнтів нев'язок, оскільки заміна операції інтегрування операційною матрицею $P_{(N \times N)}$ виконується точно лише при $N \rightarrow \infty$.

Скорочуючи обидві часті рівняння на $\phi_N(\tau)$ отримуємо

$$E_{(n \times N)} = C_{(n \times N)} - G_{(n \times N)} - \tilde{A}_{(n \times n)} C_{(n \times N)} P_{(N \times N)} - \tilde{B}_{(n \times r)} D_{(n \times N)} P_{(N \times N)}$$

Введемо позначення

$$E_{(n \times N)} = E; \quad \tilde{A}_{(n \times n)} = \tilde{A}; \quad \tilde{B}_{(n \times r)} = \tilde{B};$$

$$C_{(n \times N)} - G_{(n \times N)} = F; \quad C_{(n \times N)} P_{(N \times N)} = V;$$

$$D_{(r \times N)} P_{(N \times N)} = W.$$

З урахуванням прийнятих позначень квадрат нев'язки визначиться в матричній формі наступним чином

$$\begin{aligned} Q = E^T E &= (F - \tilde{A}V - \tilde{B}W)^T (F - \tilde{A}V - \tilde{B}W) = F^T F + V^T \tilde{A}^T \tilde{A}V + W^T \tilde{B}^T \tilde{B}W - F^T \tilde{A}V - V^T \tilde{A}^T F - \\ &- W^T \tilde{B}^T F - F^T \tilde{B}W + V^T \tilde{A}^T \tilde{B}^T \tilde{A}V \end{aligned}$$

Диференціюючи Q по невідомим параметрам, маємо

$$\frac{\partial Q}{\partial \tilde{A}} = -F^T V - V^T F + V^T \tilde{B}^T W + W^T \tilde{B}^T V + 2V^T \tilde{A}^T V = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \tilde{B}} = -W^T F - F^T W + V^T \tilde{A}^T W + W^T \tilde{A}V + 2W^T \tilde{B}^T W = 0 \quad (2.12)$$

Розв'язуючи систему алгебраїчних рівнянь (2.11) і (2.12) знаходимо коефіцієнти матриць $\tilde{A} = (t_k - t_0)A$ і $\tilde{B} = (t_k - t_0)B$. Шукані параметри матриць A, B знаходимо за формулами $A = \frac{1}{t_k - t_0} \tilde{A}$, $B = \frac{1}{t_k - t_0} \tilde{B}$.

2.3. Оцінка параметрів нестационарних моделей руху БПЛА

Якщо на деяких ділянках польоту БПЛА його параметри змінюються досить повільно і так, що можна їх апроксимувати кусочно-лінійними функціями, то, в цьому випадку, можна говорити про лінійні квазістаціонарні моделі руху БПЛА [3].

Отже, для динаміки руху БПЛА, описуваної лінійною динамічною моделлю виду (1.5), весь інтервал спостереження $[t_0, T_f]$ деяким чином розбивається на підінтервали $[t_l, t_l + T_l]$, де коефіцієнти $a_{ij}(T_l), b_{ik}(T_l) (i, j = \overline{1, n}), (k = \overline{1, m})$ матриць $A(t), B(t)$ відповідно, можна вважати незмінними. Оцінка здійснюється на кожному з інтервалів сталості параметрів БПЛА, при цьому для подальшого інтервалу заново оцінюється матриця параметрів руху БПЛА, тоді як дані, що не відносяться до розглянутого підінтервалу, повністю ігноруються [3, 45]. Очевидно, що коефіцієнти $a_{ij}(T_l), b_{ik}(T_l) (l = \overline{1, L})$ на окремих підінтервалах можуть бути різними. Для моделі (1.5) при умові, що вектор управління $\bar{u}(t)$ заданий, а вектор-функція стану $\bar{x}(t)$ визначена на відрізку $[t_l, t_l + T_l]$ своїми значеннями $\bar{x}^{(i)} = \bar{x}(t_i), t_i \in [t_l, t_l + T_l] (i = \overline{0, N})$ завдання ідентифікації параметрів БПЛА полягає в знаходженні оцінок $a_{ij}^l = a_{ij}(T_l), \hat{b}_{ik}^l = \hat{b}_{ik}(T_l) (i, j = \overline{1, n}), (k = \overline{1, m})$ невідомих параметрів $a_{ij}(T_l), b_{ik}(T_l)$ БПЛА, що забезпечують мінімум квадратичного критерію нев'язки всередині розглянутого підінтервала $[t_l, t_l + T_l]$. Використовуючи кубічні сплайни [45, 47, 119] для інтерполяції значень вектора $\bar{x}^{(i)} (i = \overline{0, N})$, тобто $x_1(t) \rightarrow S_1(t), \dots, x_i(t) \rightarrow S_i(t), \dots, x_n(t) \rightarrow S_n(t)$, отримуємо аналітичний вираз для оцінки вектор-функції стану, здійснивши таким чином перехід від вектора змінних $\bar{x}(t_i) (i = \overline{0, N})$ до вектора сплайнів $\bar{S}(t)$.

Вектор $\bar{S}(t)$ - n -вимірний вектор-функція, кожна складова $S_i(t) (i = \overline{1, n})$ якої є кубічною сплайн-функцією. Звідси наближення $\dot{x}_i(t) - \dot{x}_i(t)$ будемо визначати як похідну від сплайна $S_i(t) - \dot{S}_i(t)$. Тоді динамічна модель БПЛА (1.5) має вигляд

$$\dot{S}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}^l S_j(t) + \sum_{k=1}^m b_{ik}^l u_k(t) \quad (i = \overline{1, n}), t \in [t_l, t_l + T_l], \quad (2.13)$$

а інтегральний квадратичний критерій нев'язки моделі (2.13) може бути представлений як

$$Q_i(\bar{g}_l^{(i)}) = \int_{t_l}^{t_l+T_l} [\dot{S}_i(t) - \sum_{j=1}^n a_{ij}^l S_j(t) - \sum_{k=1}^m b_{ik}^l u_k(t)]^2 dt \quad (i = \overline{1, n}). \quad (2.14)$$

Для отримання необхідних умов мінімуму функціонала (2.14), диференціюємо нев'язки $Q_i (i = \overline{1, n})$ з елементів матриць A , B і прирівнюємо нулю $\partial Q_i(\bar{g}_l^{(i)}) / \partial a_{ij}^l = 0, \partial Q_i(\bar{g}_l^{(i)}) / \partial b_{ik}^l = 0 (j = \overline{1, n}, (k = \overline{1, m}))$.

Отже мінімізувавши Q_i нев'язки, отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{t_l}^{t_l+T_l} [\dot{S}_i(t) - \sum_{j=1}^n a_{ij}^l S_j(t) - \sum_{k=1}^m \hat{b}_{ik}^l u_k(t)] [-S_j(t)] dt &= 0, \\ \int_{t_l}^{t_l+T_l} [\dot{S}_i(t) - \sum_{j=1}^n a_{ij}^l S_j(t) - \sum_{k=1}^m \hat{b}_{ik}^l u_k(t)] [-u_k(t)] dt &= 0, \\ (j = \overline{1, n}, (k = \overline{1, m})) \end{aligned}$$

Здійснивши ряд перетворень для визначення вектора оцінок $\bar{g}_l^{(i)}$ на підінтервалі $[t_l, t_l + T_l]$ отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$C^{(i)} \bar{g}_l^{(i)} = \bar{d}^{(i)}. \quad (2.15)$$

де $C^{(i)}$ - матриця розміру $(n+m) \times (n+m)$, що має блочну структуру

$$C^{(i)} = \begin{bmatrix} C_{(n \times n)}^{(i)} & \vdots & C_{(n \times m)}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{(m \times n)}^{(i)} & \vdots & C_{(m \times m)}^{(i)} \end{bmatrix},$$

елементи якої визначаються наступним чином:

$$C_{(n \times n)}^i = \{c_{i,j}^{(i)}\}, c_{i,j}^{(i)} = \int_{t_l}^{t_l+T_l} S_i(t) S_j(t) dt, \quad (2.16)$$

$$C_{(n \times m)}^i = \{c_{i_1, k}^{(i)}\}, c_{i_1, k}^{(i)} = \int_{t_l}^{t_l + T_l} S_{i_1}(t) u_k(t) dt, \quad (2.17)$$

$$C_{(m \times n)}^i = \{c_{kj}^{(i)}\}, c_{kj}^{(i)} = \int_{t_l}^{t_l + T_l} u_k(t) S_j(t) dt, \quad (2.18)$$

$$C_{(m \times m)}^i = \{c_{i_2, k}^{(i)}\}, c_{i_2, k}^{(i)} = \int_{t_l}^{t_l + T_l} u_{i_2}(t) u_k(t) dt; \quad (2.19)$$

$\bar{d}^{(i)T} = \{d_1^{(i)}, \dots, d_n^{(i)}, d_{n+1}^{(i)}, \dots, d_{n+m}^{(i)}\}$ - $(n+m)$ -вимірний вектор вільних членів, елементи якого визначаються наступним чином:

$$d_{l_1}^{(i)} = \int_{t_l}^{t_l + T_l} S_{l_1}(t) \dot{S}_i(t) dt \quad (l_1 = \overline{1, n}), \quad (2.20)$$

$$d_{l_2}^{(i)} = \int_{t_l}^{t_l + T_l} u_{l_2-n}(t) \dot{S}_i(t) dt \quad (l_2 = \overline{n+1, n+m}), \quad (2.21)$$

$\bar{g}_l^{(i)} = \{a_{i1}^l, \dots, a_{in}^l, \hat{b}_{i1}^l, \dots, \hat{b}_{i, n+m}^l\}$ - $(n+m)$ - вимірний вектор оцінок невідомих параметрів на інтервалі $[t_l, t_l + T_l]$.

Зауважимо, що входні дані (коефіцієнти матриці і правої частини) системи (2.15) визначаються з похибкою, яка залежить від похибки наближення змінних стану БПЛА шляхом апроксимації сплайнами і співвідношень (2.16)-(2.21) формулами чисельного інтегрування і яку завжди можна оцінити. В силу наближеного завдання коефіцієнтів матриць $C^{(i)}, \bar{d}^{(i)}$, стійке рішення системи (2.15) може бути отримано методом регуляризації А. Н. Тихонова [45,68-70]. Таким чином, алгоритм оцінки параметрів лінійної квазістаціонарної моделі БПЛА виду (2.13) зведений до рішення n систем лінійних алгебраїчних рівнянь виду (2.15) на кожному з інтервалів сталості параметрів БПЛА.

В загальному випадку, параметри лінійної динамічної моделі суттєво змінюються в часі, однак для БПЛА в розділі 1.2 були оговорені умови їх зміни, що є характерним для більшості реактивних БПЛА літакового типу.

Як і в попередньому випадку, $\bar{u}(t)$ - m -вимірний вектор управління, кожна складова якого суть відома функція часу. Вектор стану $\bar{x}(t)$ заданий

на інтервалі $[t_0, T_f]$ значеннями $\bar{x}^{(i)} = \bar{x}(t_i)$ в кінцевому числі точок $t_i \in [t_0, T_f] (i = \overline{0, N})$. Також, як і раніше, для отримання аналітичного виразу $\bar{x}(t)$ та $\dot{\bar{x}}(t)$ використовуємо кубічні сплайн-функції $\bar{S}(t)$, здійснивши перехід від $\bar{x}(t_i) (i = \overline{0, N})$ до $\bar{S}(t), t \in [t_0, T_f]$.

Відомі функції управління і стану $u_k(t), S_i(t), \dot{S}_i(t)$, а також оцінки $a_{ij}(t), \hat{b}_{ik}(t) (i, j = \overline{1, n}), (k = \overline{1, m})$ невідомих параметрів $a_{ij}(t), b_{ik}(t)$ лінійної нестационарної моделі БПЛА, в припущенні їх інтегрованості на відрізьку $[t_0, T_f]$, можна апроксимувати, розклавши їх в ряд Уолша [45]

$$\begin{aligned} u_k(t) &\approx \sum_{r=0}^{R-1} u_r^{(k)} \varphi_r(t) = \bar{u}^{(k)T} \bar{\varphi}_R(t), \\ S_i(t) &\approx \sum_{r=0}^{R-1} s_r^{(i)} \varphi_r(t) = \bar{s}^{(i)T} \bar{\varphi}_R(t), \\ \dot{S}_i(t) &\approx \sum_{r=0}^{R-1} \dot{s}_r^{(i)} \varphi_r(t) = \dot{\bar{s}}^{(i)T} \bar{\varphi}_R(t), \\ a_{ij}(t) &\approx \sum_{r=0}^{R-1} a_r^{(ij)} \varphi_r(t) = \bar{a}^{(ij)T} \bar{\varphi}_R(t), \\ \hat{b}_{ik}(t) &\approx \sum_{r=0}^{R-1} b_r^{(ik)} \varphi_r(t) = \bar{b}^{(ik)T} \bar{\varphi}_R(t), \end{aligned} \quad (2.22)$$

де $\bar{\varphi}_R^T(t) = \{\varphi_0(t), \dots, \varphi_r(t), \dots, \varphi_{R-1}(t)\}$ - R -вимірний вектор функцій Уолша, заданих на інтервалі $[t_0, T_f]$; R - число членів розкладу в ряд Уолша;

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(k)T} &= \{u_0^{(k)}, \dots, u_r^{(k)}, \dots, u_{R-1}^{(k)}\}, \\ \bar{s}^{(i)T} &= \{s_0^{(i)}, \dots, s_r^{(i)}, \dots, s_{R-1}^{(i)}\}, \\ \dot{\bar{s}}^{(i)T} &= \{\dot{s}_0^{(i)}, \dots, \dot{s}_r^{(i)}, \dots, \dot{s}_{R-1}^{(i)}\}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

R -вимірні вектори постійних коефіцієнтів функцій Уолша $u_k(t), S_i(t), \dot{S}_i(t)$ відповідно, елементи яких визначаються як

$$\begin{aligned} u_r^{(k)} &= 1 / (T_f - t_0) \int_{t_0}^{T_f} u_k(t) \varphi_r(t) dt, \quad s_r^{(i)} = 1 / (T_f - t_0) \int_{t_0}^{T_f} S_i(t) \varphi_r(t) dt, \\ \dot{s}_r^{(i)} &= 1 / (T_f - t_0) \int_{t_0}^{T_f} \dot{S}_i(t) \varphi_r(t) dt \quad (r = \overline{0, R-1}); \end{aligned}$$

$\bar{a}^{-(ij)T} = \{a_0^{(ij)}, \dots, a_r^{(ij)}, \dots, a_{R-1}^{(ij)}\}$, $\bar{b}^{-(ik)T} = \{b_0^{(ik)}, \dots, b_r^{(ik)}, \dots, b_{R-1}^{(ik)}\}$ - R -вимірні вектори невідомих постійних коефіцієнтів ряду Уолша оцінюваних параметрів функцій $a_{ij}(t), b_{ik}(t)$.

Тоді, враховуючи співвідношення (2.23), модель БПЛА (1.5) має вигляд

$$\frac{\dot{\bar{g}}^{(i)T}}{s} \bar{\varphi}_R = \sum_{j=1}^n [(\bar{a}^{-(ij)T} \bar{\varphi}_R)(s^{-(j)T} \bar{\varphi}_R)] + \sum_{k=1}^m [(\bar{b}^{-(ik)T} \bar{\varphi}_R)(u^{-(k)T} \bar{\varphi}_R)] \quad (i = \overline{1, n}). \quad (2.24)$$

Вектор шуканих параметрів $\bar{g}^{-(i)} (i = \overline{1, n})$ може бути записаний як $(n+m) \times R$ -вимірний вектор оцінки постійних коефіцієнтів ряду Уолша

$$\bar{g}^{-(i)T} = \{a_0^{(i1)}, \dots, a_{R-1}^{(i1)}, \dots, a_0^{(ij)}, \dots, a_r^{(ij)}, \dots, a_{R-1}^{(ij)}, \dots, a_0^{(in)}, \dots, a_{R-1}^{(in)}, \hat{b}_0^{(i1)}, \dots, \hat{b}_{R-1}^{(i1)}, \dots, \hat{b}_0^{(ik)}, \dots, \hat{b}_r^{(ik)}, \dots, \hat{b}_{R-1}^{(ik)}, \dots, \hat{b}_0^{(im)}, \dots, \hat{b}_{R-1}^{(im)}\}, \quad (2.25)$$

а інтегральний квадратичний критерій нев'язки моделі (2.24) представлений як

$$Q_i(\bar{g}^{-(i)}) = \int_{t_0}^{T_f} \left[\frac{\dot{\bar{g}}^{(i)T}}{s} \bar{\varphi}_R - \sum_{j=1}^n (\bar{a}^{-(ij)T} \bar{\varphi}_R)(s^{-(j)T} \bar{\varphi}_R) - \sum_{k=1}^m (\bar{b}^{-(ik)T} \bar{\varphi}_R) \times (u^{-(k)T} \bar{\varphi}_R) \right]^2 dt \quad (2.26)$$

$(i = \overline{1, n}).$

Кількість ідентифікованих параметрів лінійної нестационарної моделі БПЛА у вигляді (2.24) дорівнює $n \times (n+m) \times R$. Очевидно, що для (2.24) завдання ідентифікації полягає в знаходженні оцінки $\bar{g}^{-(i)}$ (2.25), яка забезпечує мінімум функціоналу (2.26). Використовуючи необхідні умови мінімуму критерію (2.26) з шуканим параметрами

$$\begin{aligned} \partial Q_i(\bar{g}^{-(i)}) / \partial a_p^{(iz)} &= 0, \\ \partial Q_i(\bar{g}^{-(i)}) / \partial \hat{b}_p^{(it)} &= 0, \\ (z = \overline{1, n}), (t = \overline{1, m}), (p = \overline{0, R-1}), (i = \overline{1, n}) \end{aligned}$$

отримаємо систему рівнянь

$$\int_{t_0}^{T_f} [\overset{\bullet}{s}^{(i)T} \varphi_R - \sum_{j=1}^n (\overset{\bullet}{a}^{-(ij)T} \varphi_R)(\overset{\bullet}{s}^{-(j)T} \varphi_R) - \sum_{k=1}^m (\overset{\bullet}{b}^{-(ik)T} \varphi_R)(\overset{\bullet}{u}^{-(k)T} \varphi_R)] \times [-\varphi_p(\overset{\bullet}{s}^{-(z)T} \varphi_R)] dt = 0;$$

$$\int_{t_0}^{T_f} [\overset{\bullet}{s}^{(i)T} \varphi_R - \sum_{j=1}^n (\overset{\bullet}{a}^{-(ij)T} \varphi_R)(\overset{\bullet}{s}^{-(j)T} \varphi_R) - \sum_{k=1}^m (\overset{\bullet}{b}^{-(ik)T} \varphi_R)(\overset{\bullet}{u}^{-(k)T} \varphi_R)] \times [-\varphi_p(\overset{\bullet}{s}^{-(t)T} \varphi_R)] dt = 0.$$

Запишемо рівняння у вигляді, зручному для наступних перетворень

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{T_f} [(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{a}_r^{(ij)} \varphi_r)(\varphi_p)(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{s}_r^{(i)} \varphi_r)(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{s}_r^{(z)} \varphi_r)] dt + \\ & + \sum_{k=1}^m \int_{t_0}^{T_f} [(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{b}_r^{(ik)} \varphi_r)(\varphi_p)(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{u}_r^{(k)} \varphi_r)(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{s}_r^{(z)} \varphi_r)] dt = \\ & = \int_{t_0}^{T_f} [(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{s}_r^{(i)} \varphi_r)(\varphi_p)(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{s}_r^{(z)} \varphi_r)] dt \quad (z = \overline{1, n}), (p = \overline{0, R-1}); \\ & \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{T_f} [(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{a}_r^{(ij)} \varphi_r)(\varphi_p)(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{s}_r^{(j)} \varphi_r)(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{u}_r^{(t)} \varphi_r)] dt + \\ & + \sum_{k=1}^m \int_{t_0}^{T_f} [(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{b}_r^{(ik)} \varphi_r)(\varphi_p)(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{u}_r^{(k)} \varphi_r)(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{u}_r^{(t)} \varphi_r)] dt = \\ & = \int_{t_0}^{T_f} [(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{s}_r^{(i)} \varphi_r)(\varphi_p)(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{u}_r^{(t)} \varphi_r)] dt \quad (t = \overline{1, m}), (p = \overline{0, R-1}), (i = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Враховуючи властивість мультиплікативності системи функцій Уолша на заданому інтервалі $[t_0, T_f]$, після ряду перетворень отримаємо рівняння (2.27) у вигляді

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{T_f} [(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{a}_r^{(ij)} \varphi_{r \oplus p})(\sum_{r_1=0}^{R-1} \overset{\bullet}{f}_{r_1}^{(jz)} \varphi_{r_1})] dt + \sum_{k=1}^m \int_{t_0}^{T_f} [(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{b}_r^{(ik)} \varphi_{r \oplus p}) \times \\ & \times \sum_{r_1=0}^{R-1} \overset{\bullet}{h}_{r_1}^{(kz)} \varphi_{r_1}] dt = \int_{t_0}^{T_f} [(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{s}_r^{(i)} \varphi_{r \oplus p})(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{s}_r^{(z)} \varphi_r)] dt \quad (z = \overline{1, n}), (p = \overline{0, R-1}); \\ & \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^{T_f} [(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{a}_r^{(ij)} \varphi_{r \oplus p})(\sum_{r_1=0}^{R-1} \overset{\bullet}{w}_{r_1}^{(jt)} \varphi_{r_1})] dt + \sum_{k=1}^m \int_{t_0}^{T_f} [(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{b}_r^{(ik)} \varphi_{r \oplus p}) \times \\ & \times \sum_{r_1=0}^{R-1} \overset{\bullet}{v}_{r_1}^{(kt)} \varphi_{r_1}] dt = \int_{t_0}^{T_f} [(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{s}_r^{(i)} \varphi_{r \oplus p})(\sum_{r=0}^{R-1} \overset{\bullet}{u}_r^{(t)} \varphi_r)] dt \quad (t = \overline{1, m}), (p = \overline{0, R-1}), (i = \overline{1, n}), \end{aligned}$$

де $d \oplus c$ - порозрядне додавання за модулем 2;

$$\begin{aligned} \overline{f}^{(jz)T} &= \{f_0^{(jz)}, \dots, f_{r_1}^{(jz)}, \dots, f_{R-1}^{(jz)}\}, \overline{h}^{(kz)T} = \{h_0^{(kz)}, \dots, h_{r_1}^{(kz)}, \dots, h_{R-1}^{(kz)}\}, \\ \overline{w}^{(jt)T} &= \{w_0^{(jt)}, \dots, w_{r_1}^{(jt)}, \dots, w_{R-1}^{(jt)}\}, \overline{v}^{(kt)T} = \{v_0^{(kt)}, \dots, v_{r_1}^{(kt)}, \dots, v_{R-1}^{(kt)}\} - \end{aligned}$$

R -вимірні вектори, елементи яких складені із суми добутків відомих коефіцієнтів Фур'є $s_r^{(j)}$ і $s_r^{(z)}$, $u_r^{(k)}$ і $s_r^{(z)}$, $s_r^{(j)}$ і $u_r^{(t)}$, $u_r^{(k)}$ і $u_r^{(t)}$ ($r = \overline{0, R-1}$) ортогонального розкладання в ряд Уолша сплайнів і функцій управління $S_j(t)$ і $S_z(t)$, $u_k(t)$ і $S_z(t)$, $S_j(t)$ і $u_t(t)$, $u_k(t)$ і $u_t(t)$ і відповідно, визначаються з наступних співвідношень:

$$f_{r_1}^{(jz)} = \sum_{r=0}^{R-1} s_r^{(j)} s_{r \oplus r_1}^{(z)}, \quad (2.28)$$

$$h_{r_1}^{(kz)} = \sum_{r=0}^{R-1} u_r^{(k)} s_{r \oplus r_1}^{(z)}, \quad (2.29)$$

$$w_{r_1}^{(jt)} = \sum_{r=0}^{R-1} s_r^{(j)} u_{r \oplus r_1}^{(t)}, \quad (2.30)$$

$$v_{r_1}^{(kt)} = \sum_{r=0}^{R-1} u_r^{(k)} u_{r \oplus r_1}^{(t)}, \quad (r_1 = \overline{0, R-1}). \quad (2.31)$$

Або

$$\begin{aligned} & \sum_j \left(\sum_r \left(\sum_{r_1} (a_r^{(ij)} f_{r_1}^{(jz)} \int_{t_0}^{T_f} \varphi_{r \oplus p} \varphi_{r_1} dt) \right) \right) + \\ & + \sum_k \left(\sum_r \left(\sum_{r_1} (\hat{b}_r^{(ik)} h_{r_1}^{(kz)} \int_{t_0}^{T_f} \varphi_{r \oplus p} \varphi_{r_1} dt) \right) \right) = \\ & = \sum_r \left(\sum_{r_1} (\dot{s}_r^{(i)} s_{r_1}^{(z)} \int_{t_0}^{T_f} \varphi_{r \oplus p} \varphi_{r_1} dt) \right) (z = \overline{1, n}), (p = \overline{0, R-1}); \\ & \sum_j \left(\sum_r \left(\sum_{r_1} (a_r^{(ij)} w_{r_1}^{(jt)} \int_{t_0}^{T_f} \varphi_{r \oplus p} \varphi_{r_1} dt) \right) \right) + \\ & + \sum_k \left(\sum_r \left(\sum_{r_1} (\hat{b}_r^{(ik)} v_{r_1}^{(kt)} \int_{t_0}^{T_f} \varphi_{r \oplus p} \varphi_{r_1} dt) \right) \right) = \\ & = \sum_r \left(\sum_{r_1} (\dot{s}_r^{(i)} u_{r_1}^{(t)} \int_{t_0}^{T_f} \varphi_{r \oplus p} \varphi_{r_1} dt) \right) (t = \overline{1, m}), (p = \overline{0, R-1}), (i = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

В силу властивості ортогональності системи функцій Уолша на заданому інтервалі, остання система рівнянь перетвориться в систему $(n+m) \times R$ лінійних алгебраїчних рівнянь для отримання оцінки вектора параметрів $\dot{g}^{(i)}$ ($i = \overline{1, n}$) виду

$$\begin{aligned}
& \sum_j \left(\sum_r a_r^{(ij)} f_{r \oplus p}^{(jz)} \right) + \sum_k \left(\sum_r \hat{b}_r^{(ik)} h_{r \oplus p}^{(kz)} \right) = \\
& = \sum_r \dot{s}_r s_{r \oplus p}^{(z)} \quad (z = \overline{1, n}), (p = \overline{0, R-1}); \\
& \sum_j \left(\sum_r a_r^{(ij)} w_{r \oplus p}^{(jt)} \right) + \sum_k \left(\sum_r \hat{b}_r^{(ik)} v_{r \oplus p}^{(kt)} \right) = \\
& = \sum_r \dot{s}_r u_{r \oplus p}^{(t)} \quad (t = \overline{1, m}), (p = \overline{0, R-1}).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Рівняння (2.32) можуть бути записані у вигляді

$$C^{(i)} \bar{g}^{(i)} = \bar{d}^{(i)}. \tag{2.33}$$

Тут $C^{(i)}$ - матриця розміру $(n+m)R \times (n+m)R$, має блочну структуру

$$C^{(i)} = \begin{bmatrix} F_{nR \times nR}^{(i)} & \vdots & H_{nR \times mR}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{mR \times nR}^{(i)} & \vdots & V_{mR \times mR}^{(i)} \end{bmatrix},$$

елементи якої визначаються наступним чином:

$$F^{(i)} = \begin{bmatrix} \bar{f}_0^{(1)} \\ \vdots \\ \bar{f}_{R-1}^{(1)} \\ \vdots \\ \bar{f}_0^{(z)} \\ \vdots \\ \bar{f}_p^{(z)} \\ \vdots \\ \bar{f}_{R-1}^{(z)} \\ \vdots \\ \bar{f}_0^{(n)} \\ \vdots \\ \bar{f}_{R-1}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad H^{(i)} = \begin{bmatrix} \bar{h}_0^{(1)} \\ \vdots \\ \bar{h}_{R-1}^{(1)} \\ \vdots \\ \bar{h}_0^{(z)} \\ \vdots \\ \bar{h}_p^{(z)} \\ \vdots \\ \bar{h}_{R-1}^{(z)} \\ \vdots \\ \bar{h}_0^{(n)} \\ \vdots \\ \bar{h}_{R-1}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad W^{(i)} = \begin{bmatrix} \bar{w}_0^{(1)} \\ \vdots \\ \bar{w}_{R-1}^{(1)} \\ \vdots \\ \bar{w}_0^{(t)} \\ \vdots \\ \bar{w}_p^{(t)} \\ \vdots \\ \bar{w}_{R-1}^{(t)} \\ \vdots \\ \bar{w}_0^{(m)} \\ \vdots \\ \bar{w}_{R-1}^{(m)} \end{bmatrix}, \quad V^{(i)} = \begin{bmatrix} \bar{v}_0^{(1)} \\ \vdots \\ \bar{v}_{R-1}^{(1)} \\ \vdots \\ \bar{v}_0^{(t)} \\ \vdots \\ \bar{v}_p^{(t)} \\ \vdots \\ \bar{v}_{R-1}^{(t)} \\ \vdots \\ \bar{v}_0^{(m)} \\ \vdots \\ \bar{v}_{R-1}^{(m)} \end{bmatrix},$$

де $\bar{f}_p^{(z)} = \{f_{r \oplus p}^{(iz)}\}$ ($j = \overline{1, n}$), $(r = \overline{0, R-1}) - 1 \times nR$ - вимірний вектор, елементи якого визначаються зі співвідношень (2.28),

де $\bar{h}_p^{(z)} = \{h_{r \oplus p}^{(kz)}\}$ ($k = \overline{1, m}$), $(r = \overline{0, R-1}) - 1 \times mR$ - вимірний вектор, елементи якого визначаються з співвідношень (2.29);

де $\overline{w_p^{(z)}} = \{w_{r \oplus p}^{(it)}\} \ (j = \overline{1, n}), \ (r = \overline{0, R-1}) - 1 \times nR$ - вимірний вектор, елементи якого визначаються з співвідношень (2.30);

де $\overline{v_p^{(t)}} = \{v_{r \oplus p}^{(kt)}\} \ (k = \overline{1, m}), \ (r = \overline{0, R-1}) - 1 \times mR$ - вимірний вектор, елементи якого визначаються з співвідношень (2.31);

$$\overline{d^{(i)T}} = \{q_0^{(il)}, \dots, q_{R-1}^{(il)}, \dots, q_0^{(iz)}, \dots, q_p^{(iz)}, \dots, q_{R-1}^{(iz)}, \dots, q_0^{(in)}, \dots, q_{R-1}^{(in)}, \\ e_0^{(il)}, \dots, e_{R-1}^{(il)}, \dots, e_0^{(it)}, \dots, e_p^{(it)}, \dots, e_{R-1}^{(it)}, \dots, e_{R-1}^{(im)}\} -$$

$(n+m)R$ - вимірний вектор вільних членів, елементи якого визначаються зі співвідношень

$$q_p^{(iz)} = \sum_{r=0}^{R-1} s_r^{(i)} s_{r \oplus p}^{(z)} \ (p = \overline{0, R-1}), (z = \overline{1, n}), \quad (2.34)$$

$$q_p^{(it)} = \sum_{r=0}^{R-1} s_r^{(i)} u_{r \oplus p}^{(t)} \ (p = \overline{0, R-1}), (t = \overline{1, m}); \quad (2.35)$$

де $\overline{g^{(i)}}$ - $(n+m)R$ -вимірний вектор невідомих коефіцієнтів (2.25).

Система рівнянь (2.33) є системою з наближено заданими вихідними даними, похибка яких залежить від похибки наближення змінних стану БПЛА, динаміка якого описується системою (1.5), апроксимації сплайнами, вибору числа членів розкладання функцій в ряд Уолша, обчислювальних похибок. Для рішення системи (2.33) використовується метод регуляризації А.Н.Тихонова [45,68-70]. Таким чином, алгоритм оцінки параметрів лінійної нестационарної динамічної моделі БПЛА (1.5) зведений до рішення n систем лінійних алгебраїчних рівнянь виду (2.33). В якості прикладу розглянута задача ідентифікації нестационарного БПЛА з динамікою другого порядку

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{12}(t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= b_2(t)u(t), t \in [0, 1], \\ x_1(0) &= 5, x_2(0) = 3, u(t) = -1. \end{aligned}$$

Точні аналітичні значення оцінюваних параметрів визначаються наступними функціями: $a_{12}(t) = \exp(-0,5t)$, $b_2(t) = 1,5 \exp(-0,3t)$. Результати оцінки параметрів $a_{12}(t), b_2(t)$ представлені на рис.2.1, 2.2, де неперервна крива —

точне значення $a_{12}(t), b_2(t)$ відповідно; чорними крапками позначені значення оцінок $a_{12}(t), \hat{b}_2(t)$ відповідно з використанням 8-ми функцій Уолша; білими – 4-х функцій Уолша.

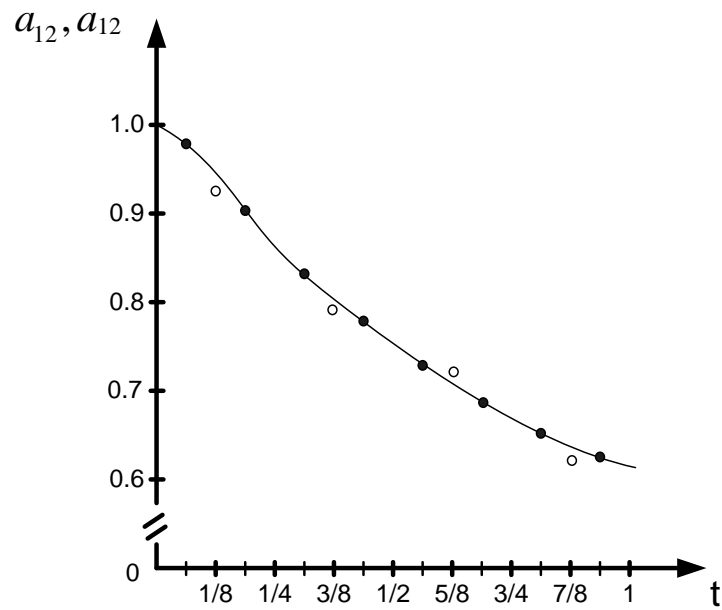


Рис. 2.1. Оцінка параметру $a_{12}(t)$

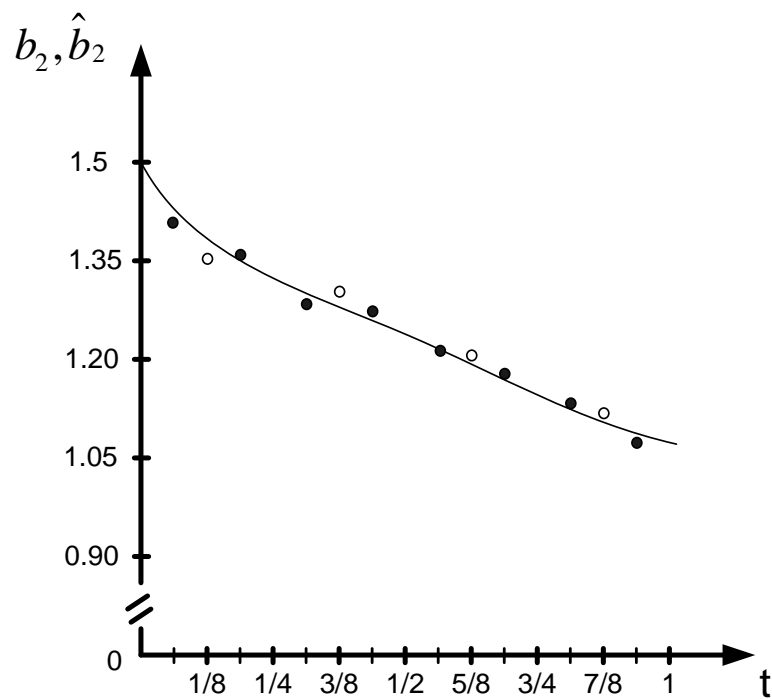


Рис.2.2. Оцінка параметру $b_2(t)$

2.4. Адаптивний алгоритм вибору шагу розбиття інтервалу спостережуваності

Можна виділити два способи розбиття інтервалу $[t_0, T_f]$ спостереження стану БПЛА.

1. Алгоритм з фіксованим розбиттям інтервалу. Такий метод ефективний при наявності деякої апріорної інформації про динаміку зміни невідомих параметрів БПЛА у часі.

2. Алгоритм з адаптивним вибором розбиття, якщо такої інформації немає.

Для підвищення точності оцінки параметрів нестационарних БПЛА згідно роботи автора [5] з урахуванням роботи [45] пропонується наступний адаптивний алгоритм вибору шагу розбиття інтервалу спостереженості на окремих ділянках руху БПЛА:

Крок 0. Приймаємо $l = 1$.

Крок 1. На інтервалі $[t_l^{(i)}, t_{l+1}^{(i)H}]$, де $t_{l+1}^{(i)H} = t_l^{(i)} + \delta_l, \delta_l > 0$ отримуємо оцінку $\bar{g}_l^{(i)}$ за наведеним вище алгоритмом ідентифікації.

Крок 2 На інтервалі $[t_{l+1}^{(i)H}, t_{l+1}^{(i)'}]$, де $t_{l+1}^{(i)'} = t_{l+1}^{(i)H} + \eta_0 \delta_l$, за рівнянням динаміки БПЛА (1.5) з оцінками $\bar{g}_l^{(i)}$ розраховуються змінні моделі $x_i^M(t)$, при цьому вважаємо $x_i^M(t_{l+1}^{(i)H}) = x_i(t_{l+1}^{(i)H})$.

Крок 3. Далі розглядаємо в околиці точки $[t_{l+1}^{(i)'} - \delta', t_{l+1}^{(i)'}]$ ($\delta' < t_{l+1}^{(i)'} - t_{l+1}^{(i)H}$) інтервалу $[t_{l+1}^{(i)H}, t_{l+1}^{(i)'}]$ функціонал $I = 1/P \sum_{p=1}^P (x_i(t_p) - x_i^M(t_p))^2$.

1) Якщо $I > \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$, то параметр η_0 зменшується, вводиться параметр $\eta_1 = \mu \eta_0$ ($0 < \mu < 1, \mu = const$) і відбувається перехід до кроку 2. Якщо через m кроків $\eta_m = \mu^m \eta_0 \approx 0$, то здійснюється перехід до кроку 4.

2) Якщо $I \leq \varepsilon$. на всіх підінтервалах, то визначається інтервал $[t_l^{(i)}, t_{l+1}^{(i)}]$, де приймається оцінка $\bar{g}_l^{(i)}, t_{l+1}^{(i)H} = t_{l+1}^{(i)'}$ і здійснюється перехід до кроку 2. В іншому випадку, здійснюється перехід до кроку 4.

Крок 4. На інтервалі $[t_l^{(i)}, t_{l+1}^{(i)}]$, де $t_{l+1}^{(i)} = t_{l+1}^{(i)'}$ приймається оцінка $\bar{g}_l^{(i)}$ ($i = \overline{1, n}$)

Крок 5. Вважаємо $l = l + 1$ і здійснюємо перехід до кроку 1.

Алгоритм продовжується до тих пір, поки не буде переглянутий весь інтервал спостереження стану БПЛА на окремих ділянках руху. Блок-схема алгоритму адаптивного вибору розбиття часового інтервалу представлена на рис. 2.3.

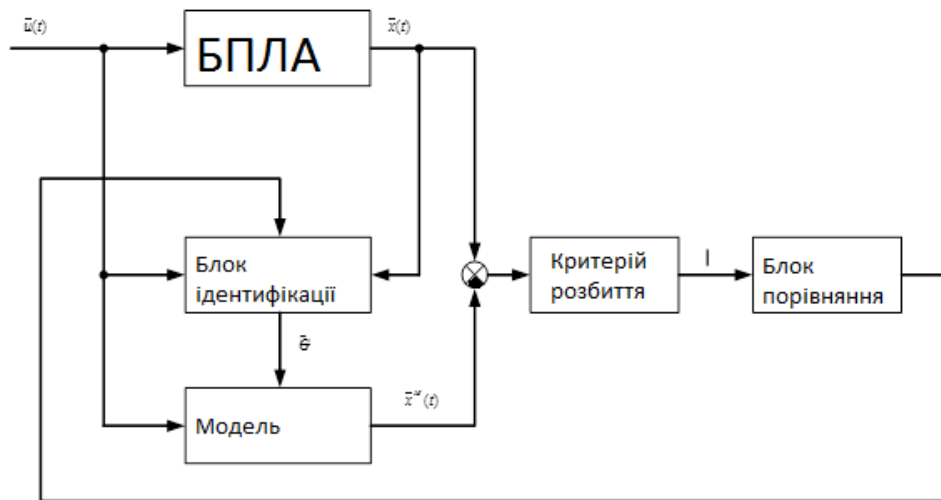


Рис..2.3. Блок-схема алгоритму адаптивного розбиття інтервалу спостереження

Для подальшого використання отриманих оцінок $\bar{g}_l^{(i)}$ ($i = \overline{1, n}$), ($l = \overline{1, L}$) в алгоритмах управління їх зручно представити у наступному вигляді

$$a_{ij}(t) = \sum_{l=1}^L a_{ij}^{(l)} \beta_i^{(l)}(t), \hat{b}_{ik}(t) = \sum \hat{b}_{ik}^{(l)} \beta_i^{(l)}(t),$$

де $a_{ij}^{(l)}, \hat{b}_{ik}^{(l)}$ - постійні коефіцієнти, отримані на основі алгоритму ідентифікації на інтервалі $[t_l^{(i)}, t_{l+1}^{(i)}]$; $\beta_i^{(l)}(t)$ - відомі функції, що визначаються, як символ Кронекера, наступним чином:

$$\beta_i^{(i)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [t_i^{(i)}, t_{i+1}^{(i)}) \subset [t_0, T_f], \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

Як приклад розглянемо задачу оцінки параметрів нестационарного БПЛА з динамікою другого порядку

$$\dot{x}_1(t) = a_{12}(t)x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = b_2(t)u(t), t \in [0, 100]$$

$$x_1(0) = 30, x_2(0) = 50, b_2(t) = 1, u(t) = -1.$$

Точне значення оцінюваного параметра визначається функціями $a_{12}(t) = 0,000012t^3 - 0,0014t^2 + 0,033t + 2$. Параметри для алгоритмів постійного і адаптивного розбиття часового інтервалу були обрані з наступними значеннями параметрів процесу оцінки: $L = 10; P = 5; \delta' = 1; \delta_l = 1$ для всіх $l; \eta_0 = 10; \varepsilon = 0,2; \mu = 0,5$. Результати оцінки $a_{12}(t)$ для фіксованого ($L = 10$) та адаптивного розбиття інтервалу наведені на рис.2.4, де крива 1 точне аналітичне значення $a_{12}(t)$; крива 2 – отримана оцінка $a_{12}(t)$ при фіксованому розбитті; крива 3 – отримана оцінка $a_{12}(t)$ при адаптивному розбитті. Точність оцінки параметра $a_{12}(t)$ характеризується величиною

$$\delta^2 = \sum_{m=0}^M [\delta a_{12}(t_m)]^2 / \sum_{m=0}^M [a_{12}(t_m)]^2.$$

Порівняння оцінок, отриманих для розглянутого прикладу при фіксованому та адаптивному розбитті часового інтервалу спостереженості, дозволяє зробити висновок, що точність оцінки параметра $a_{12}(t)$ може бути істотно підвищена при використанні алгоритму з адаптивним вибором інтервалу квазістационарності.

Слід зауважити, що дана методика може бути узагальнена і на лінійні динамічні системи з розподіленими параметрами [4].

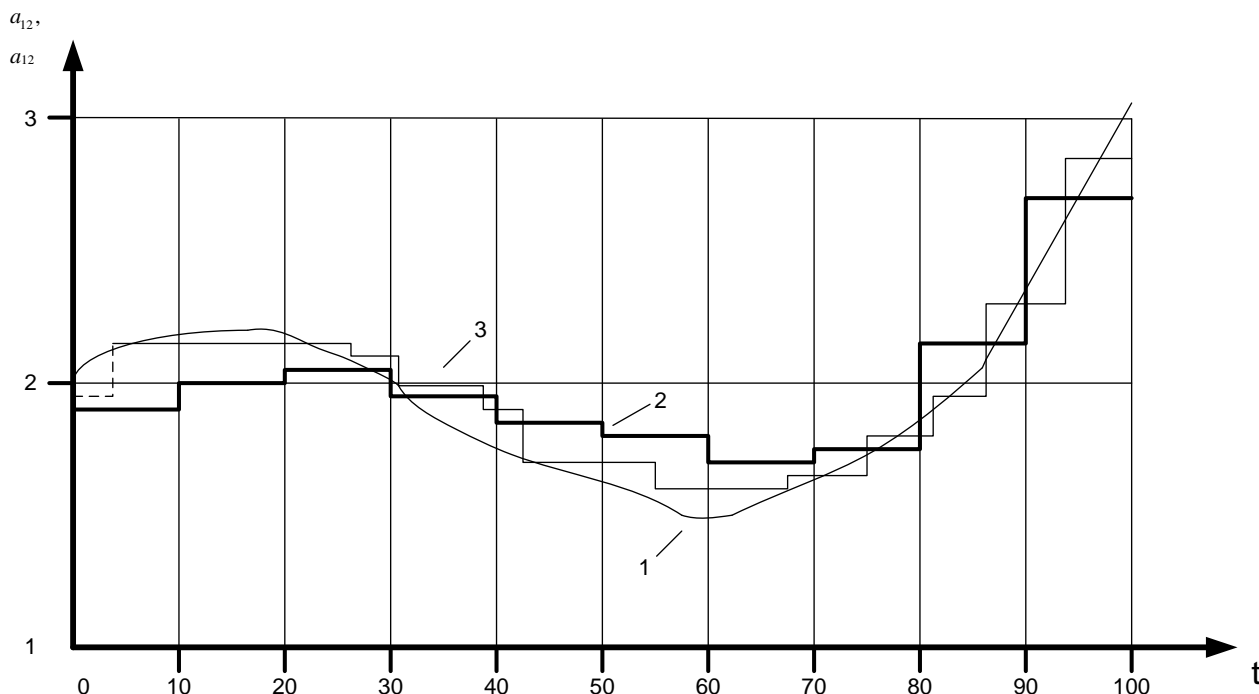


Рис.2.4. Результати оцінки

2.5.Висновки

1. Розроблено узагальнену методику ідентифікації параметрів лінійних динамічних моделей руху БПЛА, яка використовує сплайн-функції та ортогональне розкладання в ряд за системою функцій Уолша, що дозволяє знаходити при мінімізації інтегрального квадратичного критерію нев'язки оцінки шуканих параметрів на основі рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь для широкого класу лінійних динамічних систем.

2. Вибір шагу розбиття інтервалів спостереження здійснюється двома способами – фіксованим і адаптивним. При цьому розроблений адаптивний алгоритм розбиття дозволяє істотно підвищити точність ідентифікації.

3. Точність оцінки параметрів забезпечується побудовою сплайна з заданою точністю та вибором числа членів розкладу в ряд Уолша при розв'язуванні систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом регуляризації А. Н. Тихонова.

Основні результати розділу були опубліковані в [3],[4], [5],[14].

Список використаних джерел до розділу 2: [27],[40]-[42],[45]-[70],[94]

ГЛАВА 3. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ ЗАКОНІВ СТАБІЛІЗАЦІЇ ПРОГРАМНОГО РУХУ НЕСТАЦІОНАРНОГО БПЛА

3.1. Метод еквівалентного перетворення лінійних динамічних моделей БПЛА

У більшості методів оптимального управління, розроблених для безперервних систем, завдання розглядаються в часовій області з використанням поняття простору станів і теорії матриць. Відомо, що всі реальні об'єкти управління в тій чи іншій мірі є нелінійними і нестационарними [9,10,35,45,80,81,87]. Як зазначалося раніше, аналіз і синтез систем управління для таких об'єктів є складною математичною проблемою, вирішення якої до теперішнього часу отримано для деяких окремих випадків. В даному розділі розглядається можливість заміни деякого класу лінійних нестационарних моделей БПЛА стаціонарними, для яких методи оптимізації добре опрацьовані.

Нехай динаміка БПЛА описується системою диференціальних рівнянь виду

$$\dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t), \quad (3.1)$$

де $\bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ - n -вимірний вектор стану; $\bar{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$ - n -вимірний вектор керуючих впливів; $A(t)$, $B(t)$ - матриці змінних коефіцієнтів розмірністю $n \times n$.

Необхідно визначити оптимальне управління $\bar{u}^*(t)$, що переводить систему (3.1) із заданого початкового стану $\bar{x}(t_0) = \bar{x}^0$ в кінцевий $\bar{x}(t_k) = \bar{x}^k$ і мінімізує квадратичний функціонал виду:

$$I_6 = \int_{t_0}^{t_k} \left[\bar{x}^T(t) Q \bar{x}(t) + \bar{u}^T(t) R \bar{u}(t) \right] dt, \quad (3.2)$$

де: t_k - не фіксоване (фіксоване), Q і R - позитивно певні матриці розміру $n \times n$. У загальному випадку, рішення зазначених завдань оптимального управління для системи (3.1) є досить складним з огляду на нестационарності параметрів системи [35,80,81,87]. Звідси виникає задача

знаходження еквівалентної вихідній нестационарній системі (3.1) стаціонарної системи, для якої можливе знаходження оптимального рішення з наступним зворотнім перетворенням [26,29]. З урахуванням вищевикладеного пропонується автором в роботі [7] метод еквівалентного перетворення полягає в наступному.

В роботі автора [7] показано, якщо існує невироджене лінійне перетворення [7]

$$\bar{x}(t) = D(t)\bar{y}(t), \quad (3.3)$$

систему (3.1) можна замінити еквівалентною стаціонарною системою виду

$$\dot{\bar{y}}(t) = Q\bar{y}(t) + R\bar{u}(t). \quad (3.4)$$

Дійсно, якщо вважати $\bar{y}(t)$ n -вектором і $D(t)$ - $n \times n$ матрицею змінних коефіцієнтів, то перетворення (3.3) переводить рівняння (3.4) в рівняння

$$\dot{\bar{y}}(t) = D^{-1}(t)[A(t)D(t) - \dot{D}(t)]\bar{y}(t) + D^{-1}(t)B(t)\bar{u}(t). \quad (3.5)$$

У цьому випадку для даного перетворення необхідно і достатньо виконання умов

$$\begin{aligned} D^{-1}(t)[A(t)D(t) - \dot{D}(t)] &= Q \\ D^{-1}(t)B(t) &= R, \end{aligned} \quad (3.6)$$

де Q і R - матриці постійних коефіцієнтів відповідного розміру.

Неважко здогадатися, що виконання умов (3.6) для шуканої системи (3.1) можливо, якщо

$$B^{-1}(t)A(t)B(t) - B^{-1}(t)\dot{B}(t) = M = \text{const}. \quad (3.7)$$

При виконанні умови (3.7) визначення матриці перетворення $D(t)$ в загальному випадку досить важке, так як її визначення зводиться до вирішення диференціального рівняння виду

$$\dot{D}(t) + [B(t)MB^{-1}(t) - A(t)]D(t) = 0$$

при невідомих граничних умовах.

Однак в ряді випадків вдається уникнути такої невизначеності і отримати досить просте рішення. Дійсно, аналізуючи вираз (3.6) і (3.7) маємо

$$M = R^{-1}QR, \quad (3.8)$$

де M - матриця відомих постійних коефіцієнтів розмірністю $n \times n$. Розглянемо практичні приклади визначення матриці $D(t)$ при різних структурах і варіантах власних значень матриці M .

Розглянемо наступні два випадки.

Випадок 1. Нехай власні значення $\{m_i\} (i = \overline{1, n})$ матриці M дійсні і різні. Тоді, вважаючи, що матриця Q є одиничною діагональною матрицею матриця R^{-1} визначається як матриця Вандермонда [83-85] виду

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1^{n-1} & m_2^{n-1} & \dots & m_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

В цьому випадку $D(t)$ визначиться з виразу (3.7) наступним чином

$$D(t) = B(t)R^{-1}. \quad (3.9)$$

Випадок 2. Нехай власні значення $\{m_i\} (i = \overline{1, n})$ дійсні, але серед них є кратні, тобто $p_1 + p_2 + \dots + p_i = n$, де p_i число коренів m_i означимо через $M_i(m)$ матрицю розміру $i \times i$ виду [47,48]

$$M_i(m) = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m \end{pmatrix}$$

Тоді, вважаючи, що матриця Q в натуральному вираженні є жордановою канонічною формою матриці M [26,83,120], маємо

$$Q = \begin{pmatrix} Mp_1(m_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Mp_1(m_1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Mp_1(m_1) \end{pmatrix}$$

Якщо M нормальний оператор, тобто $M^T M = M M^T$, то матриця перетворення R має ранг n і визначається на базі власних векторів у вигляді модальних стовпців [85].

У разі, коли матриця $B(t)$ має розмірність $n \times m$ для визначення змінних коефіцієнтів матриці $B(t)$ в системі (3.1) необхідно задати таку структуру матриць Q і R , при якій відсутні нульові елементи і матриця $B(t)$ відповідає стійкій лінійній системі.

В результаті, при відомій матриці $D(t)$ задача оптимальної стабілізації програмного руху нестаціонарного БПЛА зводиться до задачі оптимального управління еквівалентною стаціонарною моделлю БПЛА (3.4), методи вирішення якої досить відомі і добре опрацьовані.

3.2. Синтез оптимального за витратами енергоресурсів релейного закону стабілізації програмного руху БПЛА

В роботі розглядається задача оптимального в сенсі витрати енергоресурсів релейного керування нестаціонарним БПЛА з фіксованим часом керування і кінцевим станом. Якщо $T_f - t_0 \geq T^{\min}$, де T^{\min} - час, що є рішенням відповідної задачі оптимального за швидкодією управління, то множина G_{T_f} містить початок координат [10,45,87].

В даному випадку для нестаціонарних БПЛА з динамікою виду (1.5) при фіксованих $\bar{x}(t_0)$, t_0 , T_f величина $I(\bar{u})$ є функцією тільки $\bar{u}(t)$. Покажемо, що функціонал (1.15) на множині U_t є опуклою вниз функцією, тобто виконується співвідношення [45]

$$I(\bar{u}^{(3)}) = I(\lambda \bar{u}^{(1)} + (1-\lambda) \bar{u}^{(2)}) \leq \lambda I(\bar{u}^{(1)}) + (1-\lambda) I(\bar{u}^{(2)}).$$

В даному випадку, враховуючи опуклість, маємо

$$\begin{aligned}
I(\bar{u}^{(3)}) &= \int_{t_0}^{T_f} \sum_{k=1}^m \mu_k |u_k^{(3)}(t)| dt = \int_{t_0}^{T_f} \sum_{k=1}^m \mu_k |\lambda u_k^{(1)}(t) + (1-\lambda)u_k^{(2)}(t)| dt \leq \\
&\leq \lambda \int_{t_0}^{T_f} \sum_{k=1}^m \mu_k |u_k^{(1)}(t)| dt + (1-\lambda) \int_{t_0}^{T_f} \sum_{k=1}^m \mu_k |u_k^{(2)}(t)| dt = \lambda I(\bar{u}^{(1)}) + (1-\lambda)I(\bar{u}^{(2)})
\end{aligned}$$

Таким чином, властивість опуклості множини досяжності і функціонала якості (1.15) дозволяють зробити висновок, що поставлена задача управління є опуклою. Відомо, що рішення опуклої задачі існує. Це в свою чергу означає, що існує управління, що задовольняє обмеженню $\bar{u}(t) \in U_t, t \in [t_0, T_f]$ за умови $T_f - t_0 \geq T^{\min}$ і переводить нестационарний БПЛА з довільного початкового стану $\bar{x}(t_0) \in X \subset G_{T_f}$ в початок координат і мінімізує при цьому функціонал (1.15).

При вирішенні задачі синтезу закону оптимальної стабілізації в класі стаціонарних систем, розмірність яких n не вище 3-го порядку, успішно використовується підхід, заснований на поєднанні принципу мінімуму (максимуму) Л. С. Понтрягіна з методом фазового простору [35,45,71,74,76]. У зв'язку з тим, що оптимальне управління в таких системах носить релейний характер, рішення задачі синтезу зводиться до побудови в фазовому просторі $X \subset E^n$ ліній ($n=2$) або гіперповерхонь ($n>2$) перемикання, які поділяють фазовий простір на області, утворені оптимальними траєкторіями руху, які зображують точки системи при відповідних значеннях оптимального управління. Однак використання аналогічного підходу при вирішенні задачі синтезу оптимального керування БПЛА у зв'язку із його нестационарністю параметрів приводить до системи трансцендентних рівнянь, що не має, як правило, аналітичного рішення.

В роботах [35,45,72,92,88] для синтезу програмних управлінь нестационарним об'єктом з подвійним інтегруванням при знакопостійних і монотонних параметрах використовується підхід, заснований на принципі мінімуму із застосуванням математичного апарату функцій Уолша. Однак рішення задачі оптимізації функціонала виду (1.15) для різних типів об'єктів

має істотні особливості. В роботі [37] доведено єдиність оптимальних і екстремальних управлінь для невинроджених задач. Це дозволяє зробити висновок, що релейний закон управління, який визначається згідно виразу

$$u^*(t) = -\text{dez}\{b_n(t)p_n^*(t)\}$$

абсолютно мінімізує гамільтоніан.

Зауважимо, що згідно з викладеним раніше, для нормальних оптимальних в сенсі функціонала (1.15) управлінь нестационарними моделями БПЛА, структура яких представляє послідовне з'єднання типових динамічних ланок з монотонними і знакопостійними параметрами виду [10,45]

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}(t) & a_{23}(t) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{ii}(t) & a_{i,i+1}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix},$$

за умови, що параметри БПЛА є знакопостійними і монотонними функціями, максимальне число перемикань управління не перевищує $2n - 1$, де n - розмірність простору станів досліджуваної системи[86]. При цьому найбільш загальну послідовність значень оптимального управління $u^*(t)$ можна записати у відповідності з [26,86] наступним чином:

$$\begin{aligned} 0 \dots U_0 \dots 0 \dots - U_0 \dots 0, \quad U_0 (n - \text{парне}), \\ 0 \dots - U_0 \dots 0 \dots U_0 \dots 0, \quad -U_0 (n - \text{непарне}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

де $u_0 \pm 1$. Оптимальними можуть бути впорядковані послідовності, що входять в загальні послідовності виду (3.1). Оскільки вирішення задачі оптимального в сенсі (1.15) в аналітичній формі для нестационарних систем при $n \geq 2$ практично можливе лише в деяких випадках, а динаміка БПЛА в режимі стабілізації в більшості випадків може бути описана системами другого порядку, тому нижче покажемо можливість використання функцій Уолша для отримання оптимального закону управління.

Таким чином, нехай динаміка БПЛА на інтервалі $[t_0, T_f]$ описується диференціальними рівняннями [10,45,87]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= b_2(t)u(t)\end{aligned}\tag{3.2}$$

і

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= a_{22}(t)x_2(t) + b_2(t)u(t)\end{aligned}\tag{3.3}$$

відповідно при початкових і граничних умовах

$$\bar{x}^T(t_0) = \{x_1^0, x_2^0\}, \bar{x}(T_f) = \{0, 0\}.\tag{3.4}$$

Функціонал, який характеризує витрати палива, має вигляд

$$I = \int_{t_0}^{T_f} |u(t)| dt.\tag{3.5}$$

Тут T_f - фіксований час, $T_f - t_0 \geq T^{\min}$, де T^{\min} - мінімальний час, необхідний для переходу відповідної системи з початкового $\bar{x}(t_0)$ стану в кінцевий $\bar{x}(T_f)$. На управління накладається обмеження

$$|u(t)| \leq 1\tag{3.6}$$

а коефіцієнти систем (3.2) і (3.3) представляють монотонні знакопостійні обмежені функції часу.

Потрібно визначити управління $u^*(t)$, що задовольняє обмеженням (3.6) з переведенням системи (3.2) (або (3.3)) із заданого початкового стану $\bar{x}(t_0)$ в початок координат за фіксований проміжок часу $[t_0, T_f]$ і мінімізує функціонал (3.5).

Рішення поставленої задачі досягається при релейному законі зміни управління. В роботах [26,45,87,91,114] показано, що в цьому випадку найбільш повна оптимальна послідовність керувань має вид

$$u_0, 0, -u_0, \quad (3.7)$$

де $u_0 = \pm 1$, отже в системі необхідно визначити моменти перемикання t_1 і t_2 .

Покажемо процедуру синтезу на наступному прикладі.

Приклад. Нехай динаміка БПЛА в відхиленнях від програмної траєкторії описується системою рівнянь виду [10,45,87,94]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a(t)x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = b(t)u(t), \end{cases} \quad (3.8)$$

де $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$, $x_1(t_k) = x_2(t_k) = 0$,

і заданий функціонал

$$I(u) = \int_0^{t_k} |u(t)| dt, \quad (3.9)$$

На управління накладено обмеження виду

$$|u(t)| \leq 1, \quad (3.10)$$

а коефіцієнти $a(t)$ і $b(t)$ представляють собою ідентифіковані сплайн-наближенням функції часу, монотонні, знакопостійні з обмеженими похідними. Введемо масштаб часу

$$\tau = \frac{t}{t_k}, \quad (3.11)$$

в цьому випадку τ змінюється в межах $[0,1]$.

Тоді система (3.8) запишеться:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(\tau) = a'(\tau)^* x_2(\tau); \\ \dot{x}_2(\tau) = b'(\tau)^* u(\tau), \end{cases}, \quad (3.12)$$

$$\text{де } a'(\tau) = t_k a\left(\frac{t}{t_k}\right); b'(\tau) = t_k b\left(\frac{t}{t_k}\right). \quad (3.13)$$

Знаходимо наближення функцій $a'(\tau)$ і $b'(\tau)$ на системі функцій Уолша

$$\begin{aligned} a'(\tau) &= \sum_{i=0}^{m-1} c_i^{(1)} \phi_i(\tau); \\ b'(\tau) &= \sum_{i=0}^{m-1} c_i^{(2)} \phi_i(\tau), \end{aligned} \quad (3.14)$$

Число доданків « m » визначається з умови найкращого рівномірного наближення

$$\begin{aligned} \left| a'(\tau) - \sum_{i=0}^{m-1} c_i^{(1)} \phi_i(\tau) \right| &\leq \varepsilon_1; \\ \left| b'(\tau) - \sum_{i=0}^{m-1} c_i^{(2)} \phi_i(\tau) \right| &\leq \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Інтегруємо систему (3.12) із заданого початкового положення (x_1^0, x_2^0) в нульове кінцеве $(x_1(\tau_f) = x_1(1) = 0; x_2(\tau_f) = x_2(1) = 0)$. З огляду на характер функції $a'(\tau) = t_k a\left(\frac{t}{t_k}\right); b'(\tau) = t_k b\left(\frac{t}{t_k}\right)$, легко показати, що оптимальна послідовність управління $u_0, 0, -u_0$, де $u_0 = \pm 1$, а отже, у системі необхідно визначити моменти перемикання τ_1 і τ_2 . Розглянемо інтервал $[0, \tau_1]$. Для нього $u = u_0$ і з (3.12) маємо

$$x_2(\tau) = x_2^0 + u_0 \int \sum_{i=0}^{m-1} c_i^{(2)} \phi_i(\tau) d\tau. \quad (3.16)$$

Відомо, що

$$\int \phi_m d\tau = P_{mxm} \phi_m(\tau), \quad (3.17)$$

$$\text{де } \int \phi_{(m)} d\tau = \left(\int \phi_0 d\tau, \int \phi_1 d\tau, \dots, \int \phi_m d\tau \right); P_{mxm} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{m} I_{(\frac{m}{8})} & -\frac{2}{m} I_{(\frac{m}{4})} & -\frac{2}{m} I_{(\frac{m}{2})} \\ \frac{2}{m} I_{(\frac{m}{8})} & 0_{(\frac{m}{8})} & & \\ & \frac{1}{m} I_{(\frac{m}{4})} & 0_{(\frac{m}{4})} & \\ & \frac{1}{m} I_{(\frac{m}{2})} & & 0_{(\frac{m}{2})} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

В результаті отримаємо

$$x_2(\tau) = x_2^0 + u_0 c_m^{(2)} P_{(mxm)} \phi_{(m)}(\tau) = x_2^0 + u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)} \phi_i(\tau). \quad (3.19)$$

З (5) маємо

$$x_1(\tau) = x_1^0 + x_2^0 \theta_\tau + u_0 \int \left(\sum_{i=0}^{m-1} c_i^{(1)} \phi_i(\tau) \right) \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)} \phi_i(\tau) d\tau, \quad (3.20)$$

$$\text{де } \theta_\tau = \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(3)} \phi_i(\tau).$$

Оскільки система функцій Уолша має групові властивості, тобто добуток двох послідовностей Уолша дає нову послідовність Уолша (причому ця послідовність лежить у межах обраної) (3.20) запишеться у вигляді

$$x_1^0(\tau) = x_1^0 + x_2^0 \theta_\tau + u_0 \int \sum_{i=0}^{m-1} d_i^d \phi_i(\tau) d\tau \quad (3.21)$$

або, враховуючи (3.18),

$$x_1^0(\tau) = x_1^0 + x_2^0 \theta_\tau + u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(1)} \phi_i(\tau). \quad (3.22)$$

Аналогічно інтегруємо (3.12) для інтервалу $[\tau_1, \tau_2]$, коли $u \stackrel{\Delta}{=} 0$.

Маємо

$$x_2^0(\tau) = x_2^0 + u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)} \phi_i(\tau_1) = \text{const}; \quad (3.23)$$

$$x_1^0(\tau) = \left[x_2^0 + u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)} \phi_i(\tau_1) \right] \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(3)} \phi_i(\tau) + x_2^0 + x_2^0 \theta_{\tau_1} + u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)} \phi_i(\tau_1) - \left[x_2^0 + u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)} \phi_i(\tau_1) \right] \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(3)} \phi_i(\tau_1).$$

Нарешті, для останнього інтервалу з урахуванням (3.12) маємо

$$\begin{aligned} x_2^0(\tau) &= -u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)} \phi_i(\tau) + u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)} \phi_i(\tau_2) + x_2^0 + u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)} \phi_i(\tau_1); \\ x_1^0(\tau) &= \left[u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)} \phi_i(\tau_2) + x_2^0 + u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)} \phi_i(\tau_1) \right] \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(3)} \phi_i(\tau) - u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(1)} \phi_i(\tau) + u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)} \phi_i(\tau_1) * \\ &\quad * \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(3)} \phi_i(\tau_2) + x_1^0 + u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(1)} \phi_i(\tau_i) - u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)} \phi_i(\tau_1) x \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(3)} \phi_i(\tau_1) - \\ &\quad - u_0 \left[u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)} \phi_i(\tau_2) + \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)} \phi_i(\tau_1) \right] x \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(3)} \phi_i(\tau_2) + u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(1)} \phi_i(\tau_2). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Якщо $x_2(\tau_f) = x_1(\tau_f) = x_2(1) = x_1(1) \leq \varepsilon_2$, то з (3.24) при $\tau = \tau_1 = 1$ отримуємо наступну нерівність

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 \leq H_1 * H_2 + x_2^0 * H_2 - H_3 + x_1^0 - H_1 * \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(3)} \phi_i(\tau_2) + u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)} \phi_i(\tau_1) * \\ * \left(\sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(3)} \phi_i(\tau_2) - \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)} \phi_i(\tau_i) \right) + u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(1)} \phi_i(\tau_1), \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\text{де } H_1 = u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)} \phi_i(\tau_2) + u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)} \phi_i(\tau_1) = u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)} \phi_i(1) + x_2^0 + \varepsilon_2 = \text{const};$$

$$H_2 = \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(1)} \phi_i(1) = \text{const}; H_3 = u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(1)} \phi_i(1) \text{ (обчислюються заздалегідь)}$$

Шукані оптимальні моменти перемикання визначаються згідно наступного алгоритму [10,87]:

Крок 1. В залежності від початкового стану обирається знак u_0 .

Крок 2. Якщо початкова точка знаходиться в I або III квадрантах, відшукується час її переведення τ^* на вісь x_1 з рівняння

$$\varepsilon_2 = x_1^0 + u_0 \sum_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)} \phi_i(\tau^*).$$

Крок 3. За кількістю функцій m визначається число інтервалів розбиття, звідки визначається

$$\Delta\tau = \frac{\tau_f}{n} = \frac{1}{n}, \quad \tau = k^* \Delta\tau, \quad k = \overline{1, n}.$$

Крок 4. Надаємо τ_1 значення $\tau_1 = \tau^* + \Delta\tau$, підставивши його в (3.25), τ_2 і надаємо послідовно значення від $\tau^* + 2\Delta\tau$ до τ_f з дискретністю $\Delta\tau$. Якщо в деякій точці τ нерівність (4.88) виконується, то шукані значення τ_1 та τ_2 визначені. Якщо не виконується, надаємо τ_1 наступне значення $\tau_1 = \tau^* + 2\Delta\tau$ і алгоритм продовжується.

3.3. Розробка процедури оптимізації процесів стабілізації програмного руху нестаціонарних БПЛА за квадратичними критеріями якості

Перш ніж переходити до синтезу алгоритмів оптимального управління, в нашому випадку, оптимальної стабілізації програмного руху нестаціонарного БПЛА, необхідно з'ясувати умови існування рішення поставлених оптимізаційних задач. Відповідь на питання можна отримати, аналізуючи властивість керованості нестаціонарного БПЛА[80].

Нехай БПЛА, як об'єкт управління(ОУ), описується в просторі станів рівняннями (1.5). Припустимо, що на керування $\bar{u}(t)$ ніяких обмежень не накладено. Якщо можна підібрати таке управління $\bar{u}(t)$, за допомогою якого ОУ з будь-якого початкового стану $\bar{x}(t_0)$, відповідного будь-якого початкового моменту t_0 , можна за кінцевий час $T - t_0$ перевести в кінцевий стан спокою $\bar{x}(t) = \bar{0}$ або в інший бажаний стан, то об'єкт називають цілком керованим по Калману, а вказана властивість об'єкта називають керованістю[34,36,45,71-79,81].

Достатня умова керованості БПЛА, динаміка якого описується рівнянням (1.5) у разі, якщо матриці $A(t)$ і $B(t)$ безперервно

дифференційовані до $n-2$ і $n-1$ порядків в околі деякої точки $t_1 \in [t_0, T]$, зводиться до наступного. Формуємо матрицю розміру $n \times nm$ виду

$$Y(t) = [Y_1(t) : \dots : Y_i(t) : \dots : Y_n(t)],$$

де $Y_1(t) = B(t)$, $Y_i(t) = A(t)Y_{i-1}(t) - \dot{Y}_{i-1}(t)$ ($i = \overline{2, n}$).

На підставі теореми [82] можливо зробити висновок про керованість БПЛА на інтервалі $[t_0, T]$, якщо можна вказати таку точку $t_1 \in [t_0, T]$, в якій ранг матриці $Y(t)$ дорівнює порядку системи $\text{rank}(Y(t_1)) = n$. Зауважимо, що керованість є внутрішньою властивістю БПЛА, так як вона обумовлена тільки властивостями матриць $A(t)$ і $B(t)$. Слід зазначити, що ця умова повністю виконується для нестационарної моделі БПЛА.

Таким чином, оскільки БПЛА є керованим, то рішення оптимізаційної задачі без обмежень на вектор управління існує.

Основні труднощі при рішенні задачі синтезу оптимальних систем управління по квадратичному функціоналу якості полягає у виявленні зв'язку допоміжної змінної $\bar{p}^*(t)$ і стану $\bar{x}^*(t)$, яка в разі нестационарного БПЛА приводить до вирішення нелінійного нестационарного матричного диференціального рівняння Ріккати (1.25) в зворотному часі. Крім того, технічна реалізація оптимального закону керування зі змінною матрицею посилення достатньо складна [36,89,90].

Однак підстановка виразу для оптимального управління (1.24) в канонічні рівняння (1.10) дозволяє отримати систему спрощених канонічних рівнянь для змінних стану $\bar{x}^*(t)$ і допоміжної змінної $\bar{p}^*(t)$. В подальшому, зв'язок між $\bar{p}^*(t)$ і $\bar{x}^*(t)$ може бути визначений за допомогою фундаментальної матриці вирішення зазначених рівнянь. Для нестационарних БПЛА з динамікою виду (1.5) і матрицях $Q(t)$, $R(t)$ квадратичних функціоналів, залежних від часу, аналітичний вираз для фундаментальної матриці в загальному випадку отримати неможливо. У роботах [45,72,93,92] пропонується знаходити фундаментальну матрицю системи лінійних диференціальних рівнянь зі

змінними коефіцієнтами наближено, скориставшись розкладаннями в ряди по різних системам лінійно-незалежних функцій. Матрицю переходів в подальшому використовують для отримання закону оптимального управління лінійних нестационарних систем за квадратичним функціоналом якості.

Розглянемо лінійно-квадратичні задачі оптимальної стабілізації програмного руху БПЛА, в яких для знаходження фундаментальної матриці використовуємо математичний апарат функцій Уолша. Оскільки, у загальному випадку для лінійних нестационарних моделей динаміки БПЛА отримати аналітичний вираз для перехідної матриці не уявляється можливим, його можна отримати наближено. У даній роботі пропонується знаходити фундаментальну матрицю системи спрощених канонічних рівнянь шляхом наближеного інтегрування лінійного матричного диференціального рівняння (1.5) стану БПЛА, якому вона задовольняє, з використанням математичного апарату функцій Уолша [38,39]. При цьому елементи шуканої матриці визначаються у вигляді рядів Уолша, постійні коефіцієнти яких знаходяться з системи алгебраїчних рівнянь.

Отже, для лінійних нестационарних моделей БПЛА виду (1.5) з квадратичними функціоналами якості (1.4) пропонується процедура синтезу оптимальних законів стабілізації програмного руху БПЛА і полягає у виконанні наступних етапів:

Етап 1. Вводиться в розгляд лінійна однорідна допоміжна система диференціальних рівнянь, яка для (1.5) і функціоналу (1.4) має вигляд

$$\dot{\bar{p}}(t) = -\frac{\partial L(\bar{x}, \bar{u}, t)}{\partial \bar{x}} - A^T(t)\bar{p}(t) .$$

Етап 2. Для системи (1.5) і функціоналу (1.4) з урахуванням отриманого вище рівняння утворюємо функція Гамільтона

$$H(\bar{x}, \bar{p}, \bar{u}, t) = L(\bar{x}, \bar{u}, t) + \bar{p}^T(t)(A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t)) .$$

Етап 3. Формуємо систему канонічних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}^*(t) &= \frac{\partial H(\bar{x}^*, \bar{p}^*, \bar{u}^*, t)}{\partial \bar{p}(t)}, \\ \dot{\bar{p}}^*(t) &= \frac{\partial H(\bar{x}^*, \bar{p}^*, \bar{u}^*, t)}{\partial \bar{x}(t)},\end{aligned}$$

які задовольняють граничним умовам: $\bar{x}^*(t_0) = \bar{x}(t_0)$, $\bar{x}^*(T_f) = \bar{x}(T_f)$, $\bar{p}^*(T_f) = \bar{c}$.

Етап 4. З урахуванням відомого вигляду оптимального управління для лінійно-квадратичних задач оптимізації (1.24) записуємо спрощену каноничну систему рівнянь у вигляді

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}^*(t) \\ \dot{\bar{p}}^*(t) \end{bmatrix} = M(t) \begin{bmatrix} \bar{x}^*(t) \\ \bar{p}^*(t) \end{bmatrix},$$

де $M(t)$ - матриця розміру $2n \times 2n$ має блочну структуру і залежить від виду обраного квадратичного функціонала.

Етап 5. Формуємо $W(t, t_0)$ - матрицю переходів системи (1.5) розміру $2n \times 2n$, яка також може бути представлена у вигляді блокової матриці

$$W(t, t_0) = \begin{bmatrix} W_{11}(t, t_0) & W_{12}(t, t_0) \\ W_{21}(t, t_0) & W_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}.$$

Етап 6. Враховуючи співвідношення

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^*(t) \\ \bar{p}^*(t) \end{bmatrix} = W(t, t_0) \begin{bmatrix} \bar{x}^*(t_0) \\ \bar{p}^*(t_0) \end{bmatrix},$$

а також граничні умови, знаходимо співвідношення

$$\bar{p}^*(t) = K(t) \bar{x}^*(t)$$

Звідси, оптимальний закон стабілізації запишеться у вигляді

$$\bar{u}^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\bar{p}^*(t) \text{ або } \bar{u}^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)\bar{x}^*(t)$$

Етап 7. Визначаємо всі змінні і коефіцієнти системи (1.5) у вигляді рядів Уолша. Відомі матриці $R(t)$, $B(t)$ квадратичних функціоналів також визначаються в термінах функцій Уолша

Етап 8. Знаходимо фундаментальну матрицю системи спрощених канонічних рівнянь шляхом наближеного інтегрування лінійного матричного диференціального рівняння стану, якому вона задовольняє, з використанням математичного апарату функцій Уолша.

Етап 9. Знаходимо закон оптимальної стабілізації програмного руху БПЛА

$$\bar{u}^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)\bar{x}^*(t),$$

в якому матриця $K(t)$ визначена в термінах функцій Уолша.

3.4. Оптимізація витрат енергії при стабілізації програмного руху нестационарних БПЛА

Вирішення данної задачі наведено в роботі автора [6] і полягає у наступному.

Знайти управління $\bar{u}(t) \in E^m$, що переводить нестационарний БПЛА з динамікою виду (1.5) із заданого початкового стану $\bar{x}(t_0)$ в нульове кінцеве $\bar{x}(T_f) = \bar{0}$ за фіксований проміжок часу $[t_0, T_f]$ і мінімізує функціонал

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T_f} \bar{u}^T(t) R(t) \bar{u}(t) dt. \quad (3.26)$$

Це завдання відоме в теорії оптимальних систем як завдання на мінімум енергії.

Оптимальний закон управління для цього завдання може бути отриманий за допомогою принципу мінімуму і визначається у вигляді (1.24). В силу позитивної визначеності матриці $R(t)$ управління (1.24) забезпечує єдиний мінімум функції Гамільтона виду (1.9) для динаміки БПЛА виду (1.5) і функціоналу (3.26).

Запишемо рівняння (1.10) з урахуванням (1.24) в спрощеній канонічній формі

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}^*(t) \\ \dot{\bar{p}}^*(t) \end{bmatrix} = N(t) \begin{bmatrix} \bar{x}^* \\ \bar{p}^* \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

з граничними умовами

$$\bar{x}^*(t_0) = \bar{x}^{(0)}, \bar{x}^*(T_f) = \bar{0}. \quad (3.28)$$

Тут $N(t)$ - матриця розміру, що має блочну структуру

$$N(t) = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ 0 & -A^T(t) \end{bmatrix}.$$

Нехай $W(t, t_0)$ - матриця переходів системи (3.27) розміру $2n \times 2n$, яка також може бути представлена у вигляді блочної матриці

$$W(t, t_0) = \begin{bmatrix} W_{11}(t, t_0) & W_{12}(t, t_0) \\ W_{21}(t, t_0) & W_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

З основного співвідношення

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^*(t) \\ \bar{p}^*(t) \end{bmatrix} = W(t, t_0) \begin{bmatrix} \bar{x}^*(t_0) \\ \bar{p}^*(t_0) \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

з огляду на (3.28) і припускаючи, що $W_{12}(T_f, t_0)$ невироджена, слідує, що

$$\bar{p}^*(t_0) = -W_{12}^{-1}(T_f, t_0)W_{11}(T_f, t_0)\bar{x}^*(t_0)$$

Тоді рівняння (3.29) отримаємо у вигляді

$$\bar{x}^*(t) = [W_{11}(t, t_0) - W_{12}(t, t_0)W_{12}^{-1}(T_f, t_0)W_{11}(T_f, t_0)]\bar{x}^*(t_0) = K_1(t)\bar{x}^*(t_0), \quad (3.30)$$

$$\bar{p}^*(t) = [W_{21}(t, t_0) - W_{22}(t, t_0)W_{12}^{-1}(T_f, t_0)W_{11}(T_f, t_0)]\bar{x}^*(t_0) = K_2(t)\bar{x}^*(t_0). \quad (3.31)$$

Підстановка співвідношення (3.31) в (1.24) дозволяє записати закон оптимального управління наступним чином:

$$\bar{u}^*(t) = -G(t)\bar{x}^*(t_0), \quad (3.32)$$

де змінювана в часі матриця коефіцієнтів посилення $G(t)$ розміру $m \times n$ має вигляд

$$G(t) = R^{-1}(t)B^T(t)K_2(t). \quad (3.33)$$

Так як $R(t)$, $B(t)$ задані, то для визначення $G(t)$ необхідно знайти фундаментальну матрицю $W(t, t_0)$.

Матриця $W(t, t_0)$ є рішенням рівняння стану

$$\dot{W}(t, t_0) = N(t)W(t, t_0) \quad (3.34)$$

з початковою умовою $W(t, t_0) = I$.

Для вирішення рівняння (3.34) скористаємося математичним апаратом функцій Уолша.

Вважаємо, що знайдено наближення елементів матриць

$$A(t) = \{a_{ij}(t)\}, B(t) = \{b_{ik}(t)\} \quad (i, j = \overline{1, n}), \quad (k = \overline{1, m})$$

рівняння (1.5) у вигляді рядів за системою функцій Уолша, коефіцієнти яких визначаються або за формулою (1.35) з урахуванням перетворення (1.36) в разі, якщо відомо математичний опис об'єкта, або з використанням алгоритму параметричної ідентифікації ЛНС, запропонованого в розділі 2.3, в іншому випадку. В силу того, що матриця $R(t) = \{r_{ik}(t)\} (i, k = \overline{1, m})$ задана, її елементи також можуть бути апроксимовані функціями Уолша. Тобто маємо наступні співвідношення для елементів матриць $A(t)$, $B(t)$, $R(t)$:

$$a_{ij}(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} a_r^{(ij)} \varphi_r(t) \quad (i, j = \overline{1, n}), A(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} A_r \varphi_r(t), \quad (3.35)$$

$$A_r = \{a_r^{(ij)}\} \quad (r = \overline{0, R-1});$$

$$b_{ik}(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} b_r^{(ik)} \varphi_r(t) \quad (i = \overline{1, n}), (k = \overline{1, m}), B(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} B_r \varphi_r(t), \quad (3.36)$$

$$B_r = \{b_r^{(ik)}\} \quad (r = \overline{0, R-1});$$

$$r_{ik}(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} r_r^{(ik)} \varphi_r(t) \quad (i, k = \overline{1, m}), R(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} R_r \varphi_r(t), \quad (3.37)$$

$$R_r = \{r_r^{(ik)}\} \quad (r = \overline{0, R-1});$$

За допомогою розкладів в ряд Уолша матриці $N(t) = \{n_{ij}(t)\}$ і $W(t, t_0) = \{w_{ij}(t, t_0)\} (i, j = \overline{1, 2n})$ на розглянутому інтервалі $[t_0, T_f]$ представимо у вигляді

$$N(t) \approx \begin{bmatrix} \overline{n}^{(11)T} & \cdots & \overline{n}^{(1, 2n)T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{n}^{(2n, 1)T} & \cdots & \overline{n}^{(2n, 2n)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\varphi}_R(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \overline{\varphi}_R(t) \end{bmatrix}; \quad (3.38)$$

$$W(t, t_0) \approx \begin{bmatrix} \overline{w}^{(11)T} & \cdots & \overline{w}^{(1, 2n)T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{w}^{(2n, 1)T} & \cdots & \overline{w}^{(2n, 2n)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\varphi}_R(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \overline{\varphi}_R(t) \end{bmatrix},$$

де $\overline{\varphi}_R^T(t) = \{\varphi_0(t), \dots, \varphi_r(t), \dots, \varphi_{R-1}(t)\}$ - R -вимірний вектор функцій Уолша, заданих на інтервалі $[t_0, T_f]$; $\overline{n}^{(ij)T} = \{n_0^{(ij)}, \dots, n_r^{(ij)}, \dots, n_{R-1}^{(ij)}\}$ - R -вимірний вектор постійних

коефіцієнтів розкладання в ряд Уолша відомої функції $n_{ij}(t); \overline{w}^{-(ij)T} = \{w_0^{(ij)}, \dots, w_r^{(ij)}, \dots, w_{R-1}^{(ij)}\}$ - R -вимірний вектор постійних невідомих коефіцієнтів розкладання в ряд Уолша шуканої функції $W_{ij}(t, t_0)$. Інтегруємо рівняння (3.34) і отримаємо

$$W(t, t_0) - I = \int_{t_0}^t N(t') W(t', t_0) dt'. \quad (3.39)$$

Позначимо підінтегральний вираз в (3.39) як

$$C(t) = N(t)W(t, t_0),$$

де $C(t) = \{c_{ik}(t)\}$ - матриця розмірності $2n \times 2n$, елементи якої визначаємо наступним чином:

$$c_{ik}(t) = \sum_{j=1}^{2n} \overline{n}^{-(ij)T} \overline{\varphi}_R(t) \overline{w}^{-(jk)} \varphi_R(t).$$

Використовуючи властивість мультиплікативності (1.29) системи функцій Уолша на заданому інтервалі $[t_0, T_f]$, перетворимо вираз для елементів $c_{ik}(t)$ до виду

$$c_{ik}(t) \approx \sum_{j=1}^{2n} \overline{c}_j^{-(ik)T} \overline{\varphi}_R(t) = \overline{c}^{-(ik)T} \overline{\varphi}_R(t)$$

Тут $\overline{c}_j^{-(ik)T} = \{c_{j,0}^{(ik)}, \dots, c_{j,r}^{(ik)}, \dots, c_{j,R-1}^{(ik)}\}$ - R -вимірний вектор постійних коефіцієнтів, елементи якого складені із суми добутків коефіцієнтів розкладання $n_r^{(ij)}, w_r^{(jk)}$ в ряд Уолша функцій $n_{ij}(t), w_{jk}(t, t_0)$ і можуть бути визначені наступним чином:

$$c_{j,r_1}^{(ik)} = \sum_{r=0}^{R-1} n_r^{(ij)} w_{r \oplus r_1}^{(jk)} \quad (r_1 = \overline{0, R-1});$$

$\overline{c}^{-(ik)T} = \{c_0^{(ik)}, \dots, c_r^{(ik)}, \dots, c_{R-1}^{(ik)}\}$ - R -вимірний вектор постійних коефіцієнтів, елементи якого можуть бути визначені як

$$c_r^{(ik)} = \sum_{j=1}^{2n} c_{j,r}^{(ik)} \quad (r = \overline{0, R-1}).$$

Тоді матриця $C(t)$ може бути визначена аналогічно $N(t), W(t, t_0)$ як

$$C(t) \approx \begin{bmatrix} \bar{c}^{-(11)T} & \cdots & \bar{c}^{-(1,2n)T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{c}^{-(2n,1)T} & \cdots & \bar{c}^{-(2n,2n)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_R(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{\phi}_R(t) \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Для зручності подальших перетворень представимо одиничну матрицю I розміру $2n \times 2n$ з рівняння (3.39) у вигляді

$$I = \begin{bmatrix} \bar{e}^{-(11)T} & \cdots & 0 \\ \vdots & \bar{e}^{-(i,i)T} & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{e}^{-(2n,2n)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_R(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{\phi}_R(t) \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

де $\bar{e}^{-(ii)T} = \{1, 0, \dots, 0\}$ - R -вимірний вектор. З огляду на те, що $\varphi_0(t) = I$ на всьому інтервалі $[t_0, T_f]$, таке уявлення можливо.

Підставим (3.38), (3.40), (3.41) в рівняння (3.39). Використовуючи співвідношення (1.31) для наближеного інтегрування у вираз (1.32) для операційної матриці інтегрування, яка з урахуванням розглянутого інтервалу $[t_0, T_f]$ може бути визначена як $P'_{(R \times R)} = (T_f - t_0)P_{(R \times R)}$, отримуємо

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \bar{w}^{-(11)T} & \cdots & \bar{w}^{-(1,2n)T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{w}^{-(2n,1)T} & \cdots & \bar{w}^{-(2n,2n)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_R(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{\phi}_R(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{e}^{-(11)T} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{e}^{-(2n,2n)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_R(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{\phi}_R(t) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \bar{c}^{-(11)T} & \cdots & \bar{c}^{-(1,2n)T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{c}^{-(2n,1)T} & \cdots & \bar{c}^{-(2n,2n)T} \end{bmatrix} \otimes P'_{(R \times R)} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_R(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{\phi}_R(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

де \otimes - пряме множення. Прирівнюючи коефіцієнти при $\bar{\phi}_R(t)$ в обох частинах рівняння, отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{w}^{-(ii)T} - \bar{e}^{-(ii)T} &= \bar{c}^{-(ii)T} P'_{(R \times R)}, \quad i = k, \\ \bar{w}^{-(ik)T} &= \bar{c}^{-(ik)T} P'_{(R \times R)}, \quad i \neq k \quad (i, k = \overline{1, 2n}). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Рівняння (3.42) являють собою систему $2n \times 2n \times R$ лінійних алгебраїчних рівнянь, які використовуються для визначення невідомих коефіцієнтів розкладання елементів перехідної матриці в ряд Уолша. Матриці на основі отриманих коефіцієнтів розкладання $W_r^{(ik)}$ ($r = \overline{0, R-1}, (i, k = \overline{1, 2n})$) в ряд Уолша

елементів матриці $W(t, t_0)$ з рівнянь (3.42) запишемо аналогічно співвідношенням (3.35) - (3.37) у вигляді

$$\begin{aligned} k_{1ij}(t) &\approx \sum_{r=0}^{R-1} k_{1r}^{(ij)} \varphi_r(t) \quad (i, j = \overline{1, n}), K_1(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} K_{1r} \varphi_r(t), \\ K_{1r} &= \{k_{1r}^{(ij)}\} \quad (r = \overline{0, R-1}); \\ k_{2ij}(t) &\approx \sum_{r=0}^{R-1} k_{2r}^{(ij)} \bar{\varphi}_r(t) \quad (i, j = \overline{1, n}), K_2(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} K_{2r} \bar{\varphi}_r(t), \\ K_{2r} &= \{k_{2r}^{(ij)}\} \quad (r = \overline{0, R-1}); \end{aligned} \quad (3.43)$$

Підстановка співвідношень (3.43), (3.36), (3.37) в (3.33) дозволяє визначити матрицю посилення оптимального управління (3.32) у вигляді

$$G(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} R_r^{-1} B_r^T K_{2r} \varphi_r(t). \quad (3.44)$$

3.5. Синтез оптимальних законів стабілізації програмного руху нестационарних БПЛА за узагальненим квадратичним критерієм

Аналогічний підхід застосований згідно робіт автора [1,123] для синтезу оптимального регулятора стану за узагальненим критерієм якості.

Завдання в цьому випадку формується наступним чином. Знайти управління $u(t) \in E^m$, що дозволяє перевести нестационарний БПЛА з динамікою виду (1.5) із заданого початкового стану $\bar{x}(t_0)$ до нуля протягом заданого часу $[t_0, T_f]$, і мінімізувати функціонал вида.

$$I = \frac{1}{2} \{ \bar{x}^T(T_f) F \bar{x}(T_f) + \int_{t_0}^{T_f} [\bar{x}^T(t) Q(t) \bar{x}(t) + \bar{u}^T(t) R(t) \bar{u}(t)] dt \}, \quad (3.45)$$

де $F = 0$; $Q(t), R(t)$ - постійні нестационарні позитивно визначені матриці $n \times n$ і $m \times m$. Зауважимо, що математичні припущення щодо матриць $Q(t), R(t)$ відповідають фізичним вимогам, що пред'являються до системи управління БПЛА і виключають можливість великих і тривалих відхилень координат стану або(та) мінімізують енергетичні витрати при оптимальному процесі управління.

Оптимальний закон управління для даного завдання також може бути отриманий на основі принципу мінімуму і визначений в вигляді (1.24). В силу

$R(t) > 0$ управління (1.24) доставляє єдиний мінімум гамільтоніану виду (1.9) для ЛНС (1.5) і відповідного функціоналу.

При оптимальному управлінні (1.24) спрощене канонічне управління (1.10) для $\bar{x}^*(t)$ і $\bar{p}^*(t)$ в даному випадку має вигляд

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}^*(t) \\ \dot{\bar{p}}^*(t) \end{bmatrix} = M(t) \begin{bmatrix} \bar{x}^*(t) \\ \bar{p}^*(t) \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

де $M(t)$ - матриця розміру $2n \times 2n$, що має блочну структуру

$$M(t) = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix}.$$

Загальні граничні умови можуть бути отримані за допомогою заданого початкового стану $\bar{x}^*(t_0) = \bar{x}^{(0)}$. Решта граничних умов виходить з використання умов трансверсальності (1.12), які в даній задачі мають вигляд

$$\bar{p}^*(T_f) = F\bar{x}^*(T_f). \quad (3.47)$$

Нехай $\Omega(T_f, t)$ - матриця переходів станів рівняння (3.46) розміру $2n \times 2n$, яка може бути представлена у вигляді блочної матриці

$$\Omega(T_f, t) = \begin{bmatrix} \Omega_{11}(T_f, t) & \Omega_{12}(T_f, t) \\ \Omega_{21}(T_f, t) & \Omega_{22}(T_f, t) \end{bmatrix}.$$

З основного співвідношення

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^*(T_f) \\ \bar{p}^*(T_f) \end{bmatrix} = \Omega(T_f, t) \begin{bmatrix} \bar{x}^*(t) \\ \bar{p}^*(t) \end{bmatrix},$$

враховуючи (3.47), отримаємо

$$\bar{p}^*(t) = \{[\Omega_{22} - F\Omega_{21}]^{-1}[F\Omega_{11} - \Omega_{21}]\}\bar{x}^*(t) = L(t)\bar{x}^*(t). \quad (3.48)$$

Підстановка співвідношення (3.48) в (1.24) дозволяє записати закон оптимального управління наступним чином:

$$\bar{u}^*(t) = -C(t)\bar{x}^*(t), \quad (3.49)$$

де матриця посилення $C(t)$, що змінюється в часі, має вигляд.

$$C(t) = R^{-1}(t)B^T(t)L(t). \quad (3.50)$$

Так як $R(t)$, $B(t)$ задані, то для визначення $C(t)$ необхідно знайти фундаментальну матрицю $\Omega(T_f, t)$. Матриця $\Omega(T_f, t)$ задовільняє рівнянню рівняння стану

$$\dot{\Omega}(T_f, t) = -\Omega(T_f, t)M(t), \quad (3.51)$$

де $\Omega(T_f, T_f) = I$.

Як і раніше, для рівняння (3.34), для вирішення рівняння (3.51) скористуємося математичним апаратом функцій Уолша. Нехай є всі необхідні наближення в ряд Уолша, подібно до того, як це було зроблено в попередній задачі попереднього розділу. Інтегруючи рівняння (3.51) від T_f до t , отримаємо

$$\Omega(T_f, t) - I = - \int_{T_f}^t \Omega(T_f, t') M(t') dt'. \quad (3.52)$$

Позначимо підінтегральний вираз в (3.52) як

$$D(t) = \Omega(T_f, t)M(t).$$

Тут $D(t) = \{d_{ik}(t)\}$ - матриця розміру $2n \times 2n$, елементи якої з урахуванням апроксимацій рядами матриць Уолша має вигляд

$$\begin{aligned} M(t) &\approx \begin{bmatrix} \overline{m}^{(11)T} & \dots & \overline{m}^{(1,2n)T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{m}^{(2n,1)T} & \dots & \overline{m}^{(2n,2n)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\phi}_R(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \overline{\phi}_R(t) \end{bmatrix}, \\ \Omega(T_f, t) &\approx \begin{bmatrix} \overline{\omega}^{(11)T} & \dots & \overline{\omega}^{(1,2n)T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\omega}^{(2n,1)T} & \dots & \overline{\omega}^{(2n,2n)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\phi}_R(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \overline{\phi}_R(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

де $\overline{\phi}_R(t) = \{\varphi_0(t), \dots, \varphi_r(t), \dots, \varphi_{R-1}(t)\}$ - R -вимірний вектор постійних коефіцієнтів ряду відомих функцій Уолша, $\overline{m}_{ij}(t); \overline{\omega}^{(ij)T} = \{\omega_0^{(ij)}, \dots, \omega_r^{(ij)}, \dots, \omega_{R-1}^{(ij)}\}$ - R -вимірний вектор постійних невідомих коефіцієнтів ряду Уолша шуканих функцій $\omega_{ij}(T_f, t)$ і властивостей системи функцій Уолша, можна визначити наступним чином:

$$d_{ik}(t) = \sum_{j=1}^{2n} \omega^{-(ij)T} \varphi_R(t) m^{-(jk)T} \varphi_R(t) = \sum_{j=1}^{2n} \bar{d}_j^{(ik)T} \varphi_R(t) = \bar{d}^{(ik)T} \varphi_R(t),$$

де $\bar{d}_j^{(ik)T} = \{d_{j,0}^{(ik)}, \dots, d_{j,r}^{(ik)}, \dots, d_{j,R-1}^{(ik)}\}$ - R - вимірний вектор постійних коефіцієнтів, який визначається як

$$d_{i,r_i}^{(ik)} = \sum_{r=0}^{R-1} \omega_r^{(ij)} m_{r \oplus r_i}^{(jk)}, \quad (r_i = \overline{0, R-1});$$

$\bar{d}^{(ik)T} = \{d_0^{(ik)}, \dots, d_r^{(ik)}, \dots, d_{R-1}^{(ik)}\}$ - R - вимірний вектор постійних коефіцієнтів, який визначається як

$$d_r^{(ik)} = \sum_{j=1}^{2n} d_{j,r}^{(ik)} \quad (r = \overline{0, R-1}).$$

Тоді матриця $D(t)$ може бути визначена у вигляді

$$D(t) \approx \begin{bmatrix} \bar{d}^{(11)T} & \dots & \bar{d}^{(1,2n)T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{d}^{(2n,1)T} & \dots & \bar{d}^{(2n,2n)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_R(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \bar{\varphi}_R(t) \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Матрицю I представимо у вигляді (3.41).

Підставимо (3.41), (3.53), (3.54) в рівняння (3.52). Використовуючи співвідношення (1.33) для наближеного інтегрування в зворотньому часі і вираз (1.34) для операційної матриці зворотнього інтегрування, яка з урахуванням інтервалу часу $[t_0, T_f]$ і перетворення (1.36) може бути визначена як

$$Q'_{(R \times R)} = (T_f - t_0) Q_{(R \times R)},$$

та отримаємо

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \bar{\omega}^{(11)T} & \cdots & \bar{\omega}^{(1,2n)T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\omega}^{(2n,1)T} & \cdots & \bar{\omega}^{(2n,2n)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_R(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{\phi}_R(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{e}^{(11)T} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{e}^{(2n,2n)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_R(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{\phi}_R(t) \end{bmatrix} = \\
& = - \begin{bmatrix} \bar{d}^{(11)T} & \cdots & \bar{d}^{(1,2n)T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{d}^{(2n,1)T} & \cdots & \bar{d}^{(2n,2n)T} \end{bmatrix} \otimes Q'_{(R \times R)} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_R(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{\phi}_R(t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\bar{\phi}_R(t)$ в обох частинах рівняння, отримаємо

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}^{(ii)T} - \bar{e}^{(ii)T} &= -\bar{d}^{(ii)T} Q'_{(R \times R)}, \quad i = k, \\
\bar{\omega}^{(ik)T} &= -\bar{d}^{(ik)T} Q'_{(R \times R)}, \quad i \neq k \quad (i, k = \overline{1, 2n}).
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Рівняння (3.55) подібні рівнянням (3.42) і являють собою систему $2n \times 2n \times R$ лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів розкладання $\omega_r^{(ik)}$ ($r = \overline{0, R-1}$), ($i, k = \overline{1, 2n}$) елементів перехідної матриці $\Omega(T_f, t)$ в ряд Уолша.

Далі отримаємо закон оптимального управління. Для цього запишемо $L(t)$, $C(t)$ на основі отриманих коефіцієнтів розкладу в ряд Уолша елементів матриці $\Omega(T_f, t)$ із рівнянь (3.55), аналогічно співвідношенням (3.35) - (3.37), у вигляді

$$\begin{aligned}
l_{ij}(t) &\approx \sum_{r=0}^{R-1} l_r^{(ij)} \varphi_r(t) \quad (i, j = \overline{1, n}), \quad L(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} L_r \varphi_r(t), \\
L_r &= \{l_r^{(ij)}\} \quad (r = \overline{0, R-1}).
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Підстановка співвідношень (3.56), (3.36), (3.37) в (3.50) дозволяє визначити матрицю посилення оптимального управління (3.49) в термінах функцій Уолша в наступному вигляді:

$$C(t) \approx \sum_{r=0}^{R-1} R_r^{-1} B_r^T L_r \varphi_r(t). \tag{3.57}$$

Алгоритм синтезу матриці посилення оптимального закону управління продемонструємо на прикладі розв'язання задачі стабілізації лінійного нестационарного БПЛА з динамікою першого порядку

$$\dot{x}(t) = tx(t) + u(t), x(0) = 1, t \in [0, 1].$$

Нехай квадратичний функціонал має вигляд

$$I = 1/2 \int_0^1 [x^2(t') + u^2(t')] dt'.$$

Оптимальний закон управління, згідно (3.49), в нашому випадку запишеться як

$$u^*(t) = -c(t)x^*(t).$$

Для отримання необхідних апроксимацій рядами Уолша були обрані чотири функції $R=4$. Отриманий кусково-постійний коефіцієнт посилення $c(t)$ наведений на рис.3.1 (ламана 1).

З іншого боку аналітичний вираз коефіцієнту посилення $c(t)$ для розглянутої системи і функціонала було отримано також з рівняння Ріккати (крива 2).

$$\dot{c}(t) = c^2(t) - 2tc(t) - 1, \quad c(1) = 0$$

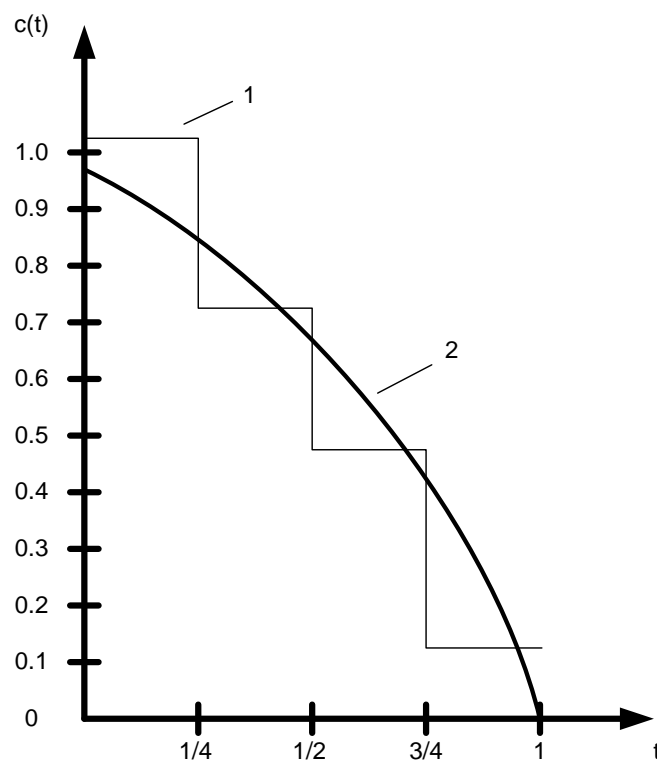


Рис.3.1. Графіки коефіцієнта посилення $c(t)$

Результат порівняння дозволяє встановити, що використання закону управління дає задовільний результат навіть при $R=4$.

Таким чином, в розділах 3.4 і 3.5, за принципом мінімуму виявлена структура оптимальних законів управління (3.32) і (3.49) для лінійно-квадратичних задач на мінімум енергії і побудови оптимального регулятора стану для загального виду квадратичного критерія відповідно. Для встановлення зв'язку між допоміжним вектором $\bar{p}^*(t)$ та вектором стану $\bar{x}^*(t)$ використовується фундаментальна матриця системи спрощених канонічних рівнянь. Знаходження фундаментальної матриці в обох задачах здійснюється з використанням наближеного представлення шуканої матриці у вигляді рядів Уолша, постійні коефіцієнти якої визначаються шляхом розв'язання системи алгебраїчних рівнянь виду (3.52) і (3.55) для кожної з задач відповідно. В результаті застосування такого підходу матриці підсилення $G(t)$ і $C(t)$ оптимальних законів управління (3.32) і (3.49) для зазначених завдань відповідно також визначені в термінах функцій Уолша. Елементи матриць (3.45) (3.57) є кусково-сталими функціями, що значно спрощує їх реалізацію у порівнянні з нестаціонарними матрицями посилення, що отримані на основі рішення рівняння Ріккаті [26].

3.6.Висновки

1. Вперше запропоновано оригінальний метод перетворення одного класу лінійних нестаціонарних систем в еквівалентні їм лінійні стаціонарні системи, для яких можна застосувати добре відомі та апробовані методи оптимізації.
2. Для нормальних задач оптимізації лінійних нестаціонарних моделей руху БПЛА, структура яких представляє послідовне з'єднання типових динамічних ланок з монотонними і знакопостійними параметрами, визначена верхня межа числа переключень, яка дає можливість синтезувати розімкнені алгоритми оптимального управління, що продемонстровано на прикладі динамічної системи 2-го порядку
3. На основі запропонованого в роботі підходу, що використовує принцип мінімуму в поєднанні з математичним апаратом функцій Уолша для

середньоквадратичних задач оптимізації енерговитрат БПЛА вперше синтезовано матриці посилення оптимального за мінімумом енергії і узагальненого квадратичного функціоналу законів управління з монотонними і знакопостійними параметрами у вигляді апроксимацій рядами Уолша, постійні коефіцієнти яких знаходяться шляхом розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Основні результати розділу були опубліковані в [1],[2],[7],[9],[10]

Список використаних джерел до розділу 3: [26], [35] – [39],[45], [71] – [93],[94],[120],[123].

ГЛАВА 4. МОДАЛЬНИЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ ЗАКОНІВ СТАБІЛІЗАЦІЇ СТАЦІОНАРНИХ БПЛА

4.1. Модальний синтез оптимальних законів стабілізації стаціонарних БПЛА. Метод невизначених коефіцієнтів

Одним з центральних завдань як теорії, так і практики автоматичного управління є задача синтезу систем, в результаті вирішення якої визначаються структура системи автоматичного управління та її параметри за умови забезпечення стійкості системи та якості перехідних процесів (досягнення необхідної швидкодії, неприпустимість великих перерегулювань), підвищення точності управління в усталених режимах і ін. [36,77,94-96,98].

Лінійні регулятори стану є ефективним засобом забезпечення динамічних показників роботи не тільки лінійних об'єктів керування будь-якого скільки завгодно високого порядку, але й об'єктів, що містять нелінійні та дискретні ланки, мають істотний, але не вирішальний вплив на динамічні процеси. Це, в першу чергу, стосується і динаміки БПЛА в режимах стабілізації.

Існує два основних детермінованих підходи до створення систем управління за вектором стану об'єкта – АКОР (аналітичне конструювання оптимальних регуляторів) і модальне керування. У 1960 р. з'явилася робота співробітника інституту автоматики і телемеханіки АН СРСР, професора А. М. Лєтова [89,90], в якій було отримано аналітичне рішення задачі про оптимальну стабілізацію лінійних стаціонарних об'єктів при квадратичному функціоналі якості. Цей напрямок отримав назву аналітичного конструювання регуляторів.

У зарубіжних джерелах вона називається лінійно-квадратичною оптимізацією, а першою зарубіжною публікацією була в тому ж 1960 р. робота американського математика Р. Калмана, в якій вирішувалася задача оптимізації лінійних нестационарних об'єктів [75]. АКОР має кінцевою метою отримання закону керування суто аналітичним шляхом, виходячи з вимог, що пред'являються до якості управління [81].

Синтез бажаної замкнутої оптимальної системи стабілізації програмного руху БПЛА з використанням АКОР залежить від вибору проектувальником відповідних значень коефіцієнтів матриць штрафів для отримання мінімуму критерію якості, що не цілком зручно за відсутності очевидної залежності між вибраними коефіцієнтами та перехідними процесами в замкнутій оптимальній системі. Крім того, застосування методу АКОР призводить до необхідності рішення нелінійного матричного рівняння Ріккаті, що є нетривіальним завданням і вимагає використання спеціальних чисельних процедур.

Суть модального синтезу оптимальних законів стабілізації [94,99,101] полягає у визначенні числових значень коефіцієнтів передачі безінерційних зворотних зв'язків по всім змінним стану БПЛА з метою забезпечення заданого розподілу коренів характеристичного рівняння (власних чисел) замкнутої оптимальної системи. Процедура модального синтезу оптимальних законів стабілізації програмного руху БПЛА здійснюється на основі пропонованого в даній роботі методу невизначених коефіцієнтів. Труднощі вибору необхідних власних чисел долаються запропонованою процедурою побудови і корекції спектру коренів замкнутої оптимальної системи управління.

Постановка задачі

Розглянемо БПЛА як лінійну стаціонарну повністю керовану і повністю спостережувану систему, рух якої описується рівнянням

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + Bu; \\ \bar{y} &= C\bar{x}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

де $\bar{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - вектор стану; $\bar{y}^T = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ - вимірюваний вихідний вектор; u - скалярне управління; A, B, C - матриці коефіцієнтів розмірністю $n \times n$, $n \times 1$, $m \times n$ відповідно, причому $0 < m \leq n$.

Відомо [21], що для повністю вимірюваних ($m = n$, $c = I$) систем виду (4.1) у випадку квадратичного критерію якості екстремальне управління є лінійною функцією стану

$$u = \bar{p}^{-T} x, \quad (4.2)$$

причому вектор коефіцієнтів зворотних зв'язків можна обрати таким чином, що полюси замкнутої системи (4.1) будуть розташовуватися в наперед заданих довільних точках, які забезпечують необхідні динамічні властивості.

Таким чином, завдання зводиться до вибору оптимальної області розташування полюсів і визначення за ним коефіцієнтів зворотних зв'язків.

Метод невизначених коефіцієнтів

Твердження. Коефіцієнти $p_i (i=1, \dots, n)$ визначника замкнутої оптимальної системи (4.1) з урахуванням (4.2)

$$H(\lambda) = \left| A + B \bar{p}^{-T} - I \lambda \right| = \begin{vmatrix} a_{11} + b_1 p_1^{-\lambda} \dots a_{1j} + b_1 p_j^{-\lambda} \dots a_{1n} + b_1 p_n^{-\lambda} & \dots \\ \dots & \dots \\ a_{j1} + b_j p_1^{-\lambda} \dots a_{jj} + b_j p_j^{-\lambda} \dots a_{jn} + b_j p_n^{-\lambda} & \dots \\ \dots & \dots \\ a_{n1} + b_n p_1^{-\lambda} \dots a_{nj} + b_n p_j^{-\lambda} \dots a_{nn} + b_n p_n^{-\lambda} & \dots \end{vmatrix} \quad (4.3)$$

лінійно входять у вираз для коефіцієнтів характеристичного полінома (4.4)

Доказ. Дійсно, нехай $\exists b_k / b_k \neq 0$. Тоді, віднімаючи з j -го рядка k -тий ($j \neq k$), помножений на b_j / b_k отримаємо визначник, рівний вихідному (4.3), в якому коефіцієнти зворотних зв'язків $p_i (i=\overline{1, n})$ входять в k -тий рядок. Розкриваючи його з цього рядку і групуючи члени при відповідних ступенях λ , приходимо остаточно до наступного виразу:

$$H(\lambda) = \lambda^n + \left(\sum_{i=1}^n c_{n-1,i} p_i + d_{n-1} \right) \lambda^{n-1} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n c_{0,i} p_i + d_0 \right) \quad (4.4)$$

$$\text{або у векторній формі } H(\lambda) = \lambda^n + \left(\bar{c}_{n-1}^T \bar{p} + d_{n-1} \right) \lambda^{n-1} + \dots + \left(\bar{c}_0^T \bar{p} + d_0 \right).$$

Невизначені параметри c_{ji} , $d_j(j=\overline{0,n-1}; i=\overline{1,n})$ у (4.4) визначаємо за $n+1$ крок

1. Вважаємо $p_i=0$ ($i=\overline{1,n}$) і у визначнику (4.3) і розкриваємо його одним з відомих методів[98].
2. Знайдені коефіцієнти при різних ступенях λ , визначають невідомі коефіцієнти $d_j(j=\overline{0,n-1})$ виразу (4.4) при відповідних ступенях λ .
3. На наступних n кроках, вважаючи по черзі один з коефіцієнтів $p_i(i=\overline{1,n})$ рівним одиниці при інших нульових і розкриваючи визначник (4.3), отримуємо вирази для невідомого параметра c_{ji} при відповідній ступені $\lambda^j(j=\overline{0,n-1})$ у вигляді

$$c_{ji} = f_j - d_i, \quad (4.5)$$

де f_i -коефіцієнти при λ_j в i -му розкритому характеристичному визначнику.

Синтез оптимального закону стабілізації

Характеристичний поліном замкнутої системи (4.3) з бажаними коренями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ має вигляд

$$F(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = \sum_{j=0}^{n-1} l_j \lambda^j + \lambda^n. \quad (4.6)$$

В результаті для визначення коефіцієнтів зворотних зв'язків отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\text{col} \begin{pmatrix} \bar{c}^{-T}, \bar{c}^{-T}, \dots, \bar{c}^{-T} \end{pmatrix} \bar{p} = \bar{l} - \bar{d}, \quad (4.7)$$

де $\bar{l} = (l_{n-1}, l_{n-1}, \dots, l_0)$, $\bar{d} = (d_{n-1}, d_{n-2}, \dots, d_0)$.

Розглянемо тепер випадок не повністю вимірюваної системи ($m < n$), коли коефіцієнти p_i для $i=\overline{m+1,n}$ дорівнюють нулю. При цьому n коефіцієнтів характеристичного полінома (4.3) лінійно залежать від m коефіцієнтів зв'язків вимірюваних координат i , отже, в загальному випадку

не можна отримати поліном $H(\lambda)$, відповідний $F(\lambda)$ при обраних полюсах $\lambda_i (i = \overline{1, n})$.

В цьому випадку $p_i (i = \overline{1, n})$ обирається таким чином, щоб мінімізувати одну з двох наступних величин: а) суму квадратів нев'язок рівнянь переозначеної системи (4.7) (для чого її вирішують методом найменших квадратів з вагами $1/i$, що дає кращі результати в наближенні бажаних полюсів); б) суму квадратів модулів вирахувань характеристичного полінома (4.7) замкнутої системи в заданих полюсах, тобто

$$\sum_{i=1}^m p_i |H(\lambda_i)|^2.$$

Для вирішення наступної задачі згрупуємо члени виразу (4.11) за номерами зворотних зв'язків:

$$\sum_{i=1}^m k_i(\lambda) p_i + k_0(\lambda) = 0, \quad (4.8)$$

$$\text{де } k_0(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j \lambda^j + \lambda^n.$$

Підставляючи послідовно у вираз (4.8) значення бажаних коренів характеристичного многочлена замкнутої системи $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ отримуємо систему m лінійних рівнянь з m невідомими

$$p_j \left(\sum_{i=1}^m k_i(\lambda_j) p_i + k_0(\lambda_j) \right) = 0 \quad (j = \overline{1, n}),$$

яку також можна вирішити методом найменших квадратів, причому шляхом збільшення ваг p_j відповідних рівнянь, окремі корені (наприклад, домінуючі) можуть бути наближені з великою точністю.

У частковому випадку вибравши

$$p_j = \begin{cases} 1, & j = \overline{1, m} \\ 0, & j = \overline{m+1, n} \end{cases},$$

отримаємо характеристичний поліном, m нулів якого розмістяться в заздалегідь заданих точках, решта $n-m$ – довільно.

4.2 Побудова і корекція спектру бажаних коренів замкненої оптимальної системи

Отриманий розподіл коренів при бажанні можна скорегувати наступним чином [11,94,101,122]. В околиці точок p ($i = \overline{1,m}$) обчислюємо частинні похідні коренів характеристичного многочлена (4.4) за зворотними зв'язками, тобто визначаємо матрицю

$$I_{np} = \left\| \frac{\Delta k_i}{\Delta p_j} \right\|_{\substack{i=\overline{1,2n} \\ j=\overline{1,m}}},$$

де Δk_i - збільшення дійсної або уявної частини кореня за зміною зворотного зв'язку на Δp_j .

Величину корекції зворотних зв'язків отримаємо, розв'язавши систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\Delta \bar{k} = I_{np}^m \Delta \bar{p},$$

де I_{np}^m - матриця, яка складається з m рядків матриці I_{np} , відповідних корегованим кореням; $\Delta \bar{k}$ - величина бажаної корекції коренів; $\Delta \bar{p}$ - необхідна величина корекції зворотних зв'язків.

В результаті новий вектор коефіцієнтів зворотних зв'язків $\overline{p}_{(1)}$ визначиться за формулою

$$\overline{p}_{(1)} = \overline{p}_{(0)} + \Delta \bar{p},$$

де $\overline{p}_{(0)}$ - вектор коефіцієнтів зворотних зв'язків до корекції.

Визначення коефіцієнтів зворотних зв'язків відбувалося в припущенні, що відомими є полюси, які впливають на динамічні властивості замкненої системи.

Якісні показники таких систем визначаються в основному розташуванням найближчих до початку координат коренів характеристичного полінома, що мають назву домінуючих, а також взаємним розташуванням інших коренів.

Як правило, в режимі стабілізації якість управління об'єктом визначається часом перехідного процесу $t_{п.п.}$ та ступенем згасання цього процесу

$$\xi = \frac{x_j(t_{н.н.})}{x_j(t_0)} < 1 \quad (j=\overline{1,n}), \quad (4.9)$$

де $\overline{x_j}$ - елементи вектору стану \overline{x} .

Якщо $\lambda_0 = \varepsilon_0 + i\omega_0$ - домінуючий корінь, то рішення системи (4.1) можна наближено записати у вигляді

$$x_j = x_j(t_0)e^{\varepsilon_0 t} \cos(\omega_0 t + j_i) \quad (j=\overline{1,n}). \quad (4.10)$$

З рівняння (4.10) з урахуванням виразу (4.9) отримуємо

$$\frac{x_j(t_{н.н.})}{x_j(t_0)} \leq e^{\varepsilon_0 t_{н.н.}} \leq \xi, ,$$

$$\text{звідки} \quad \varepsilon_0 \leq \frac{\ln \xi}{t_{н.н.}} < 0.$$

Величину уявної частини ω_0 вибираємо рівною $1/t_{н.н.}$. При цьому за час перехідного процесу змінна $x_j(t)$ здійснить одне коливання навколо положення рівноваги і буде прагнути до нього з протилежної, відносно початкового збурення, сторони, що дуже бажано з фізичних міркувань.

Щоб уникнути перерегулювання інші корені характеристичного полінома слід розміщувати якомога ближче до домінуючих з виконанням умови

$$\begin{aligned}\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots, \\ |\varepsilon_0| < |\varepsilon_1| < |\varepsilon_2| < \dots,\end{aligned}\quad (4.11a)$$

щоб складові з великим коливанням загасали швидше

$$|\lambda_k| - |\lambda_{k-1}| > 0,1(|\lambda_k|), \quad (4.11b)$$

і щоб корені не зливалися в кратні [84,110].

Для зменшення часу перехідного процесу бажано корені розташовувати на комплексній площині якомога лівіше. Однак обмеження на змінні стану накладають певні обмеження і на модулі коренів .

Враховуючи (4.17) записуємо

$$x_j = \frac{d}{dt} x_j = \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} x_j(t_0) e^{\varepsilon t} \cos(\omega t + j_{j1}) = \max \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} x_j(t_0). \quad (4.12)$$

Кожне j -е рівняння системи (4.12) породжує дві верхні границі модулів коренів характеристичного полінома, викликані одним і тим же обмеженням на ліву і праву частини j -го рівняння системи (4.1).

З урахуванням виразу (4.12) визначаємо для лівої частини j -го рівняння системи (4.1), що

$$\max_t \max_{\lambda} x_j = \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} x_j(t_0) e^{\varepsilon t} \cos(\omega t + j_{j1}) = \max \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} x_j(t_0). \quad (4.13)$$

Для правої частини

$$\max_t \max_{\lambda} \sum_{i=1}^n a_{ji} x_j \leq \sum_{i=1}^n |a_{ji} x_i(t_0)|. \quad (4.14)$$

Порівнюючи вирази (4.13) і (4.14), через відсутність явної залежності нерівності (4.14) від модуля коренів, можемо записати наступну нерівність:

$$\max_{\lambda} \sqrt{\omega^2 + \epsilon^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^n |a_{ji} x_i(t_0)|}{x_j(t_0)}. \quad (4.15)$$

Найбільш жорстке обмеження виду (4.13) дасть ліву межу розташування коренів характеристичного полінома. При цьому прагнення до збільшення для прискорення загасання процесу відбувається до мінімізації з урахуванням виразу (4.11а) і (4.11б).

Розташування коренів може бути скориговано після моделювання перехідного процесу, виходячи з накладених на змінні стану обмежень, шляхом зміни коефіцієнтів характеристичного полінома.

Нехай на j -ту змінну стану накладено обмеження $|x_j| \leq x_j^{\text{зад}}$. При моделюванні отримаємо $\max |x_j| \leq x_j^{\text{зад}}$. В цьому випадку множенням коефіцієнтів характеристичного полінома при ступені 1 на величину $\left[\frac{x_j^{\text{зад}}}{x_j} \right]$ гомотетично зрушуємо всі корені відносно початку координат (згідно з теоремою Вієта) з коефіцієнтом гомотетії $x_j^{\text{зад}}/x_j$ [100]. Також відповідно до виразу (4.15) зміниться значення $\max |x_j|$. Таким чином, синтезом лінійних замкнених систем за наведеною процедурою можна забезпечити в них необхідні динамічні властивості.

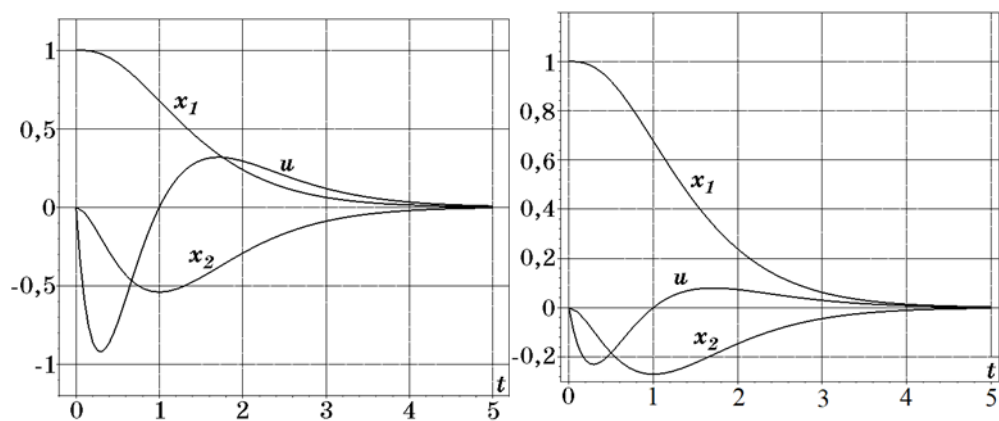
Нижче наведені результати моделювання перехідних процесів в контурі стабілізації на прикладі моделі динаміки руху ЛА ДНС-2 “Beaver”, Канада [124].

Розглядалися два випадки: стабілізація куту тангажу та стабілізація висоти польоту при різних початкових умовах.

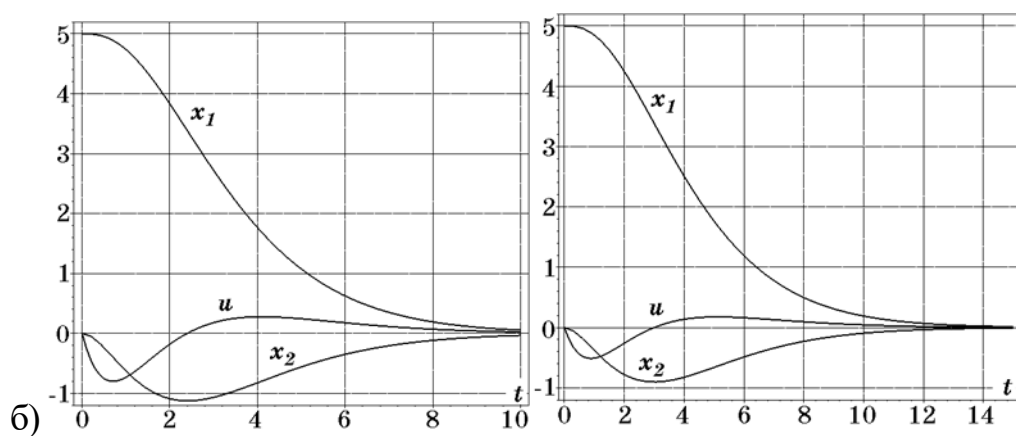
В першому випадку модель описується наступним чином:

$$x_1 = v = \text{var} [^0]; x_2 = dv/dt = \text{var} [^0/c]; h = \text{const} [M]; V = \text{const}; \alpha = 0 [^0]$$

а) Початкові умови: $x_{10} = I^0; x_{20} = 0$



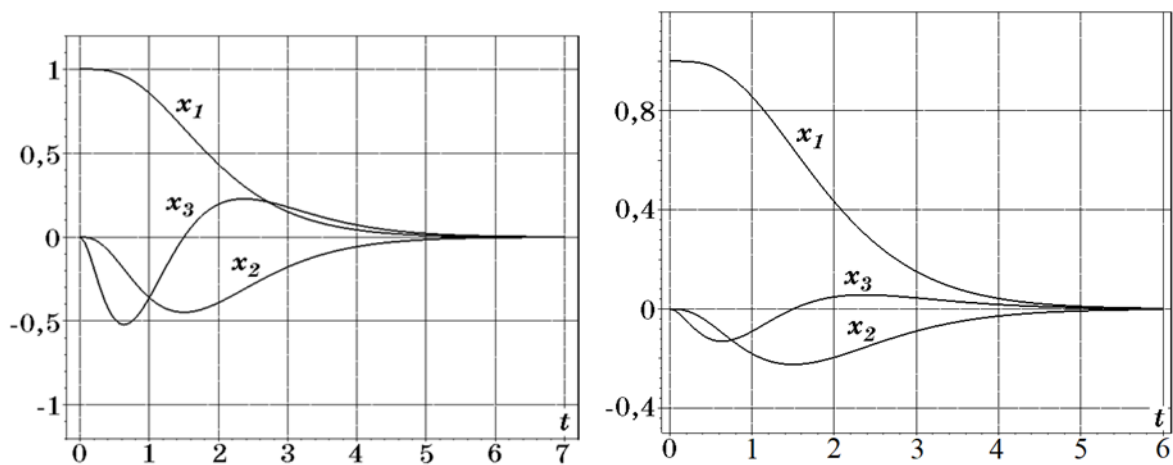
б) Початкові умови $x_{10}=5^0$; $x_{20}=0$.



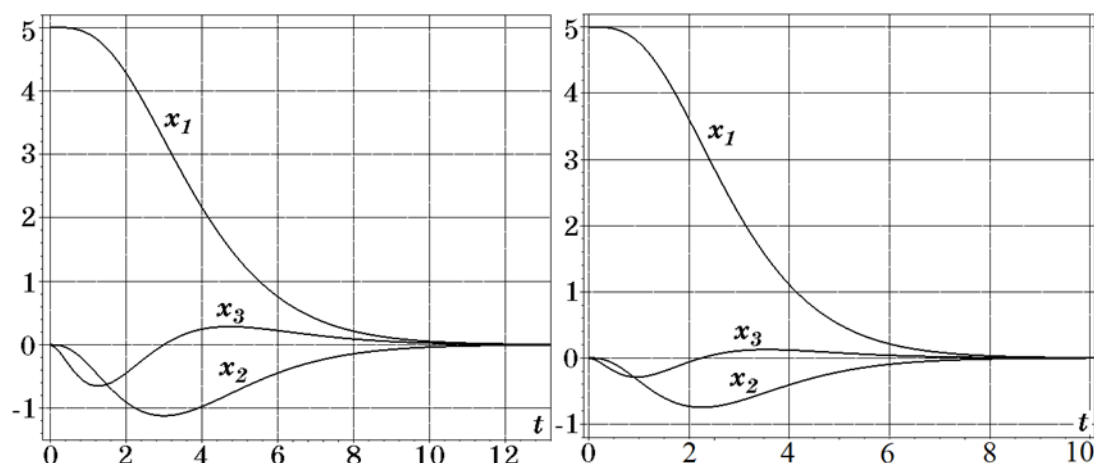
В другому випадку модель описується :

$$x_1=h=\text{var} [\text{м}]; x_2=dh/dt=\text{var} [\text{м/с}]; x_3=\omega_z=\text{var} [^\circ/\text{с}]; V=\text{const} [\text{м/с}]; \alpha=0 [^\circ]$$

а) Початкові умови: $x_{10}=1\text{м}$; $x_{20}=0$; $x_{30}=0$.



б) Початкові умови: $x_{10}=5m$; $x_{20}=0$; $x_{30}=0$.



З цих графіків випливає, що з точки зору модального синтезу, забезпечення заданих динамічних параметрів перехідних процесів стабілізації є більш ефективним. У першому випадку (Рис.4.1а,4.1б). це стосується енергозберігаючого компонента при стабілізації кута тангажа. В другому випадку (Рис.4.2а, 4.2б), це стосується точності відстеження необхідних значень параметра стабілізації, тобто висоти польоту. За допомогою запропонованого модального синтезу, заснованого на методі невизначених коефіцієнтів, можна забезпечити виконання таких динамічних показників якості перехідних процесів, як час стабілізації, промах, загасання, ступінь коливань та ін. Це є основною перевагою даного методу перед методом АКОР, тому що останній не має прямої залежності між коефіцієнтами критерію якості і коефіцієнтами зворотного зв'язку. Окрім того, як показано нижче, метод модального синтезу працює при наявності невеликої затримки в контурі управління.

4.3. Синтез оптимальних законів стабілізації руху БПЛА з запізнюванням в контурі управління

Розглянемо тепер дещо іншу постановку задачі, коли в контурі управління БПЛА є запізнювання. Це може бути обумовлено, в ряді випадків, управлінням процесом стабілізації програмного руху БПЛА з наземних пунктів керування, тобто з витратою часу на передачу сигналу,

або є наслідком спрощених вище припущень, в силу яких вважають, що дія проміжних і підсилювальних ланок у керованому БПЛА зводиться до передачі сигналу з запізнюванням [101-103]. Вирішення цієї задачі здійснюється згідно робіт автора [11,12].

Отже, нехай модель динаміки БПЛА описується як [114]

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + By, \quad (4.16)$$

де $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ - повністю вимірюваний вектор станів; A, B – матриці коефіцієнтів розмірністю $n \times n, n \times 1$; y – скаляр, який характеризує відхилення органів управління, динамічна модель яких має вигляд

$$\dot{y} = \lambda_y y + d_u u(t - \theta), \quad (4.17)$$

де λ_y, d_u, θ - константи, що визначаються особливостями контуру управління БПЛА; $u(t)$ – скалярний керуючий вплив, який будемо шукати у вигляді (4.2).

Так як запізнювання, як правило, невелике, запишемо рівняння (4.17)

$$\dot{y}(t) = \lambda_y y(t) + d_u u(t) - d_u \theta \dot{u}(t). \quad (4.18)$$

В тому випадку, якщо можна будь-яким чином оцінити або виміряти стан $y(t)$, система (4.16), (4.18) повністю спостерігається і завдання вирішується наступним чином.

Вводимо в розгляд розширений фазовий вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = y)^T$. Тоді рівняння замикання має вигляд

$$\dot{u} = p^T x, \quad (4.19)$$

а характеристичний поліном замкнутої системи (4.16), (4.18) прийме вигляд

$$\det(A^* - I\lambda) = \left| \frac{A - I\lambda}{\frac{d_u \left(\begin{smallmatrix} -T \\ p \end{smallmatrix} - \theta \begin{smallmatrix} -T \\ p \end{smallmatrix} A \right)}{1 + d_u \theta p_{n+1}}} \frac{B}{\frac{\lambda_y + d_u p_{n+1} - \theta \begin{smallmatrix} -T \\ p \end{smallmatrix} B}{1 + d_u \theta p_{n+1}}} - \lambda \right| = 0, \quad (4.20)$$

де A^* - матриця $(n+1) \times (n+1)$, $\begin{smallmatrix} -T \\ p \end{smallmatrix} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$

Відомо, що множення всіх елементів будь-якого рядка або стовпця на множник λ рівносильне множенню визначника. Звідси, визначник (4.20) можна записати

$$\det(A^* - I\lambda) = \frac{1}{1 + d_u \theta p_{n+1}} \left| \frac{A - I\lambda}{\begin{smallmatrix} -T \\ p \end{smallmatrix} - \theta \begin{smallmatrix} -T \\ p \end{smallmatrix} A} \frac{B}{\lambda_y + d_u p_{n+1} - d_u \begin{smallmatrix} -T \\ p \end{smallmatrix} \theta B - \lambda(1 + d_u \theta p_{n+1})} \right|$$

і, отже, вважаючи, що $(1 + d_u \theta p_{n+1})^{-1} \neq 0$, запишемо

$$\left| \frac{A - I\lambda}{\begin{smallmatrix} -T \\ p \end{smallmatrix} - \theta \begin{smallmatrix} -T \\ p \end{smallmatrix} A} \frac{B}{\lambda_y + d_u p_{n+1} - d_u \begin{smallmatrix} -T \\ p \end{smallmatrix} \theta B - \lambda(1 + d_u \theta p_{n+1})} \right| = 0. \quad (4.21)$$

Легко показати, що визначник (4.21) є поліномом ступеня $(n+1)$ від λ , та коефіцієнти його лінійно залежать від

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1})^T,$$

тобто

$$\det(A^* - I\lambda) = H(\lambda, p) = \lambda^{n+1} + \left(d_n^T p + d_n^0 \right) \lambda^n + \dots + \left(d_0^T p + d_0^0 \right) = 0. \quad (4.22)$$

Дійсно, розкриваючи визначник (4.21) в останньому рядку, в якому кожний елемент є лінійною комбінацією коефіцієнтів, приходимо до виразу (4.22). Визначення невідомих коефіцієнтів $d_i, d_i^0 (i = \overline{0, n})$ проводиться аналогічно задачі, описаної в розділі 4.1.

Прирівнюючи між собою коефіцієнти при степенях полінома (4.22) і полінома з обраним для забезпечення заданих якісних показників перехідних процесів спектром $\{\lambda_i\} (i = \overline{1, n+1})$

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{k+1} (\lambda - \lambda_i) = \sum_{k=0}^{n+1} l_k \lambda^k, \quad (4.23)$$

де $l_{n+1}=1$,

отримуємо спільну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$D_{n+1} p = \tilde{l}, \quad (4.24)$$

де D_{n+1} – матриця $(n+1) \times (n+1)$ коефіцієнтів, а p, \tilde{l} – вектори-стовпці розмірністю $(n+1)$. Рішення системи (4.24) відносно p^* доставляє замкнутій системі заданий спектр $\{\lambda_i\}, (i = \overline{1, n+1})$.

Найчастіше, в реальних умовах виміряти або оцінити відповідність змінної $y(t)$ неможливо. Тоді необхідно в рівнянні замикання (4.19) покласти $p_{n+1} \equiv 0$.

В результаті характеристичний визначник замкнутої системи має вигляд

$$\det(A^* - I\lambda) = \left| \frac{A - I\lambda}{d_u(\bar{p}^T - \theta \bar{p}^T A)} \middle| \frac{B}{\lambda_y - d_u \theta \bar{p}^T B - \lambda} \right|. \quad (4.25)$$

Бажаний характеристичний поліном визначається, як і в попередньому випадку, виразом (4.23). Прирівнюючи коефіцієнти поліномів (4.25) та (4.23) при однакових степенях λ отримаємо на відміну від (4.24) несумсну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$D_n \bar{p} = \tilde{l}, \quad (4.26)$$

де D_n – матриця $(n \times n)$ коефіцієнтів; \bar{p} – n -мірний вектор-стовпець.

Для рішення такої системи можна скористатися методом найменших квадратів, згідно якого вектор невідомих коефіцієнтів \bar{p} наближено визначається як

$$\bar{p} = (D_n^T D_n)^{-1} D_n \tilde{I}.$$

Забезпечення відсутності автоколивань поблизу програмної траєкторії руху системи

Синтезований запропонованим у роботі методом невизначених коефіцієнтів оптимальний закон стабілізації (4.19) системи (4.16) забезпечує задані динамічні властивості процесу стабілізації системи при виникненні відхилень від заданої (програмної) траєкторії руху. Однак, цей закон не усуває виникнення із-за наявності запізнювання стійких автоколивань в кінцевій точці процесу стабілізації поблизу заданої траєкторії руху. Для компенсації запізнювання пропонується модифікована методика Р. Бесса [94,104], суть якої полягає в наступному.

Нехай рівняння оптимальної (за довільним критерієм) поверхні перемикання за відсутністю запізнювання в системі відомо і має вигляд

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad \bar{x} \in X^n. \quad (4.27)$$

Вважаючи, що функція Φ вирішувана щодо одного з n своїх аргументів, наприклад, x_1 , запишемо (4.27) у вигляді

$$x_1 + \varphi(x_2, x_3, \dots, x_n) = 0; \quad \bar{x} \in X^n. \quad (4.28)$$

Слід зазначити, що умова розв'язаності не обов'язково береться для наочності. Поверхня перемикання (4.28) показана на рис.4.1, де ABC - деяка оптимальна траєкторія вимушеного руху системи до поверхні перемикання (4.28).

Нехай для простоти в контурі управління є скалярний керуючий вплив з запізненням θ . Для того, щоб траєкторія ABC в цьому випадку залишилася, як і в системі без запізнювання, необхідно, щоб оптимальна

поверхня являла собою геометричне місце точок, з яких через деякий час θ при вимушеному русі системи точка, що зображує, переходить на поверхню (4.28).

Рівняння оптимальної поверхні перемикавання компенсованої системи в цьому випадку має вигляд

$$\Phi^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad \bar{x} \subset X^n$$

або

$$x_1 + \varphi^*(x_2, x_3, \dots, x_n) = 0, \quad \bar{x} \subset X^n.$$

Позначимо відстань між проекціями точок В і С на осях $0x_1, \dots, 0x_n$ через $\Delta_{x_1}, \dots, \Delta_{x_n}$ відповідно. Очевидно, що $\Delta_{x_i} (i = \overline{1, n})$ є функціями часу запізнювання θ , а величини $x_i = x_i + \Delta_{x_i} (i = \overline{1, n})$ - поточні значення координат, які представляють значення координат системи через час запізнювання θ .

З геометричних міркувань маємо

$$x_1 + \varphi^*(x_2, \dots, x_n, \theta) = \Delta_{x_1} - \varphi(x_2 + \Delta_{x_2}, \dots, x_n + \Delta_{x_n}) \quad (4.29)$$

або

$$\Phi^*(x_1, \dots, x_n) = \Phi(x_1 + \Delta_{x_1}, \dots, x_n + \Delta_{x_n}).$$

Рівняння (4.29) є загальним рівнянням для визначення функції Φ^* по заданій функції Φ . Для цього, згідно методики Бесса, досить визначити величини $\Delta_{x_i}(\theta) (i = \overline{1, n})$, а потім підставити майбутні значення координат системи $x_i + \Delta_{x_i}$ в рівняння поверхні перемикавання системи без запізнювання.

Однак визначення цих величин істотно пов'язане з інтервалом часу між двома послідовними перемиканнями управління $\Delta t_{пер}$, що є специфічним для розглянутого класу задач і відсутнім в методиці Бесса [94, 104], яка носить загальний характер.

Для визначення цих величин запишемо загальне рішення для координат вектору \bar{x} в «зворотному» часі $z = t_k - t$

$$x_i(z) = f_i(\bar{x}^0, u, z); \quad \bar{x}^0 = (x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)), \quad (4.30)$$

де u – управляючий вплив; \bar{x}^0 – вектор початкових значень відповідних координат, що лежать на оптимальній поверхні перемикання системи без запізнювання.

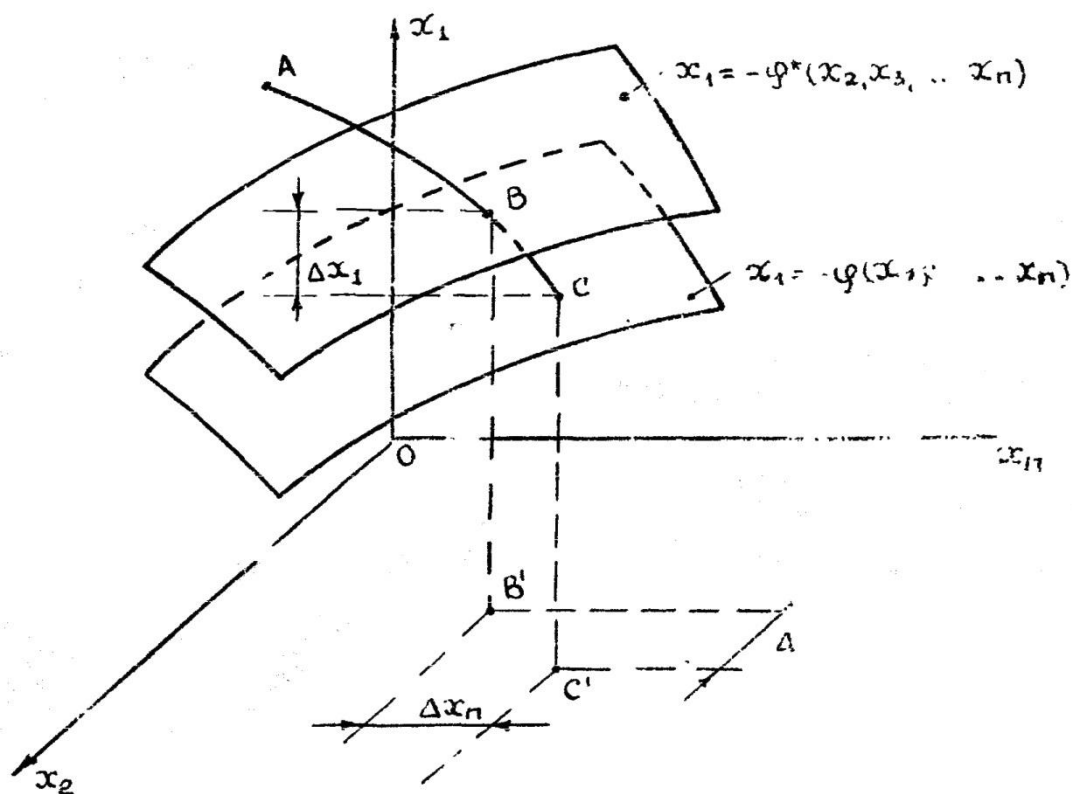


Рис. 4.1 Геометрична інтерпретація методу Бесса

У випадку $\Delta z_n < \theta$ для отримання майбутніх значень i -тої координати достатньо в управлінні (4.30) при знайденому значенні оптимального керування, що відповідає траєкторії СВА (рис.4.1), покласти $z = \theta$ $x_i = x_i + \Delta x_i = f_i(x_1, \dots, u, z)$ і отримані x_i підставити в рівняння (4.29).

У випадку $\Delta z_n \geq \theta$ для отримання майбутніх значень i -тої координати необхідно в рівнянні (4.30) покласти $z = \theta - z_n$, маючи на увазі під x_i^0 ($i = \overline{1, n}$) початкові значення відповідних координат, що лежать на новій оптимальній поверхні перемикання, що знаходиться безпосередньо за вихідною поверхнею, а під U – нове значення управління, відповідне вимушеному оптимальному рухові після нової поверхні перемикання. Знайдені значення підставити в рівняння (4.29). Наша задача відповідає першому випадку.

Таким чином, у разі оптимізації квадратичних критеріїв (3.26) і (3.45) спершу вирішується задача оптимізації при відсутності запізнювання, тобто синтезуються оптимальні закони (3.44) і (3.57). Потім, для збереження усталеного руху системи при $t \geq t_k$ умова рівноваги системи управління визначиться як $u(t)=0$ на кінцевому інтервалі $[t_k - \theta, t_k]$.

Фактично, в нашому випадку, ця поверхня відключення являє собою трубку, усередині якої знаходиться програмна траєкторія.

4.4. Робастна модальна стабілізація руху БПЛА з параметричною невизначеністю на основі принципу гарантованої динаміки

Одним з важливих напрямів при управлінні БПЛА є синтез систем стабілізації в умовах невизначеності. Це обумовлено неможливістю в ряді випадків точно визначити параметри моделі БПЛА, дією неконтрольованих збурень і т. п. Саме тому виникає необхідність створення робастних систем стабілізації програмного руху БПЛА, які забезпечували б необхідну якість функціонування БПЛА в цих умовах. Для вирішення цієї проблеми запропоновано безліч підходів [105-110,121]. Наприклад, в [106,107] параметри керуючого пристрою обираються таким чином, щоб забезпечити нечутливість системи до довільних невідомих збурень. Деякі способи динамічної компенсації обмежених збурень розглянуті в [107-110]. У цих роботах виділяється сигнал, що несе інформацію про зовнішні і параметричні збурення системи з метою компенсації їх впливу на регульовану змінну. Крім того, актуальним завданням є вибір серед множини стабілізуючих регуляторів такого, який оптимізує певний критерій, що характеризує якість управління. Найбільш поширеним рішенням є метод H_∞ -оптимізації, який полягає в побудові стабілізуючого регулятора для систем з обуреннями. Регулятори, що синтезовані з використанням цього критерію оптимальності, забезпечують стійкість замкнутої системи і мінімальну чутливість до збурень. В роботі [106] для конструювання субоптимального регулятора керуючий вплив розкладено на дві складові: оптимальне управління, яке дозволяє мінімізувати заданий функціонал

якості, і компоненту, компенсуючу невизначеності системи управління. Метою управління є мінімізація інтегрального критерію якості, а компенсація невизначеностей в об'єкті базується на підході, запропонованому в [107]. В роботах [113,121] пропонується використання для забезпечення стійкості принципу гарантованої динаміки.

Дисертаційна робота є розвитком зазначених робіт і присвячена розробці робастного модального підходу з використанням принципу гарантованої динаміки до забезпечення робастної стійкості програмного руху БПЛА в режимах стабілізації із заданими показниками якості [6,15], згідно якому вирішена задача синтезу робастного лінійно-квадратичного регулятора з гарантованою динамікою перехідних процесів в режимах стабілізації програмного руху БПЛА, динаміка якого описується лінійною стаціонарною моделлю. Згідно робіт [6,15,121] синтез робастного регулятора здійснюється наступним чином.

Нехай повністю керований і повністю спостережуваний лінійний динамічний об'єкт з невизначеністю в параметрах описується в режимах стабілізації системою лінійних диференціальних рівнянь виду:

$$\dot{\bar{x}}(t) = (A + \Lambda)\bar{x}(t) + B\bar{u}(t), \quad (4.31)$$

де $\bar{x}(t)$ – n -мірний вектор стану системи; $\bar{u}(t)$ – m -вимірний вектор управління; A , B – матриці коефіцієнтів лінійної моделі БПЛА і інтенсивності управління відповідно розмірністю $(n \times n)$, $(n \times m)$; Λ – невідома реальна матрична функція невизначеностей розмірності $(n \times n)$.

Необхідно визначити оптимальне управління $\bar{u}(t)$, яке переводить систему (4.31) із заданого початкового стану $\bar{x}(t_0) = x_0$ в кінцевий $\bar{x}(\infty) = 0$ і мінімізує квадратичний функціонал вигляду:

$$I_\sigma = \int_{t_0}^{t_k} [\bar{x}^T(t)Q\bar{x}(t) + \bar{u}^T(t)R\bar{u}(t)]dt, \quad (4.32)$$

де $t_0 = 0$; $t_k = \infty$, а Q і R – позитивно визначенні матриці розмірністю $(n \times n)$ і $(m \times m)$ відповідно.

У наведеній вище постановці завдання стабілізації лінійних динамічних систем з невизначеністю в параметрах відноситься до лінійно-квадратичних завдань оптимізації, яка зводиться до розв'язання нелінійного алгебраїчного рівняння Ріккати для визначення невідомих коефіцієнтів в законі оптимального керування, що представляє собою лінійну комбінацію змінних стану шуканої динамічної системи. В залежності від виду матриці невизначеностей Λ , існує два основних підходу до вирішення поставленої задачі стабілізації, пов'язані з вирішенням рівняння Ріккати [111,112].

У першому випадку розглядається система виду

$$\dot{\bar{x}}(t) = [A + \Lambda(\mu)]\bar{x}(t) + B\bar{u}(t), \quad (4.33)$$

де $\lim_{\mu \rightarrow 0} \Lambda(\mu) = 0$, а μ – параметрична невизначеність, що задовольняє нерівності

$$\|\Lambda(\mu)\| \leq I_A \|\mu\|. \quad (4.34)$$

Тоді, згідно [111], оптимальне управління можна представити у вигляді:

$$\bar{u}(t) = -(K + k)\bar{x}(t), \quad (4.35)$$

де K – матриця коефіцієнтів оптимального закону стабілізації системи (4.16) за відсутності матриці невизначеностей Λ , k – матриця коефіцієнтів компенсації впливу невизначеностей на параметри системи (4.31), що визначається як

$$k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} B^T P(\varepsilon) = 0, \quad P(\varepsilon) \geq 0. \quad (4.36)$$

В формулі (4.36) $P(\varepsilon)$ визначається з рівняння Лур'є-Ріккати [111]

$$A^T P(\varepsilon) + P(\varepsilon) A - \varepsilon^{-1} B B^T P(\varepsilon) + I = 0. \quad (4.37)$$

Тут $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\varepsilon) = P$, де P – рішення рівняння Ріккати для системи (4.33) за відсутністю матриці невизначеностей Λ .

У другому випадку вважається, що матриця параметричних збурень належить деякій множині параметризації E при фіксованих матрицях Q і R і визначається як

$$E(A + \Lambda(\mu))_m = 1/2 BR^{-1}B^TP - 1/2 P^{-1}Q - mP, \quad (4.38)$$

де

$$m^T = \begin{bmatrix} 0 & m_1 & m_2 & m_3 \\ -m_1 & 0 & m_4 & m_5 \\ -m_2 & -m_4 & 0 & m_6 \\ -m_3 & -m_5 & -m_6 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

кососиметрична матриця, елементи якої m_i визначаються за теоремою Харитонова [96] про робастність лінійних динамічних систем. Формула (4.39) здійснює канонізацію матриці $A + \Lambda(\mu)$ і використовується в подальшому для визначення компенсаційного управління k в законі оптимальної стабілізації (4.35).

Позначивши матрицю $A + \Lambda(\mu)$, яка канонізована, через A^* , визначимо всю множину компенсаційних регуляторів k згідно роботі [112] як

$$E(k)_{\beta\pi} = B^*(A^* - 1/2 BR^{-1}B^TPQ + (\beta)_k P + B^R\pi, \quad (4.40)$$

де B^* і A^* – матриці, які канонізовані; π – довільна матриця відповідної розмірності; β – кососиметрична матриця; B^R – правий дільник нуля максимального рангу [112].

В результаті, можна стверджувати, що синтезований таким чином регулятор (4.35) є робастним на множині параметризації (4.38) і мінімізує функціонал (4.32). Розглянуті підходи до синтезу оптимального закону стабілізації лінійних динамічних систем з невизначеністю в параметрах досить складні в реалізації і не можуть забезпечити необхідні динамічні показники перехідних процесів лінійних динамічних систем в режимах стабілізації. Цих недоліків позбавлена запропонована нижче модальна робастна стабілізація.

З урахуванням (4.31) і (4.35) запишемо рівняння замкнутої оптимальної системи у вигляді:

$$\dot{\bar{x}}(t) = [A + K]\bar{x}(t) + [\Lambda + k]\bar{x}(t). \quad (4.41)$$

Нехай задані обмеження на елементи матриці параметричної невизначеності Λ , пов'язані з похибкою ідентифікації, тобто

$$|\lambda_{ij}| \leq \Lambda_{ij}^0, \quad (4.42)$$

а також показники якості на перехідні процеси для змінних стану у вигляді:

$$|x_i(t)| \leq \sigma_i^0. \quad (4.43)$$

Потрібно синтезувати закон управління (4.35) за умов (4.32) і забезпечити задані показники якості перехідних процесів (4.33) у системі стабілізації лінійних динамічних систем з параметричною невизначеністю.

Пропонована нижче модальна робастна стабілізація базується на принципі гарантованої динаміки [113]. В основу цього принципу покладена концепція припустимості, що використовує в якості оцінки первинні показники якості перехідних процесів, таких як час перехідного процесу, динамічна і статична точність.

Запишемо рівняння (4.41) в координатній формі

$$|\dot{x}_i(t)| = \sum_{j=1}^n (a_{ij} + K_{ij} + k_{ij} + \lambda_{ij})x_j(t). \quad (4.44)$$

Згідно з роботою [97] умови (4.43) виконуються, якщо

$$\int_0^t x_i(\tau)\dot{x}_i(\tau)d\tau \leq \int_0^t \sigma_i(\tau)\sigma_i(\tau)d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad t \in [0, \infty]. \quad (4.45)$$

Підставляючи вираз (4.44) в (4.45) отримаємо

$$\int_0^t [\sum_{j=1}^n (a_{ij} + K_{ij} + k_{ij} + \lambda_{ij})x_j(\tau)]x_i(\tau)d\tau \leq \int_0^t \sigma_i(\tau)\sigma_i(\tau)d\tau, \quad (4.46)$$

де $i = 1, 2, \dots, n; \quad t \in [0, \infty]$.

Задамо $\sigma_i^0(t)$ в вигляді

$$\sigma_i^0(t) = \sigma_i^0 e^{\alpha t}, \quad (4.47)$$

де σ_i^0 обираються як оцінки максимально можливих відхилень $x_i(t)$ у початковий момент часу, а α визначається з умови заданого ступеня згасання β_i перехідного процесу (рис.4.2) і однаково для всіх змінних стану, тобто

$$e^{\alpha t_k} \leq \beta_i, \quad (4.48)$$

де $\alpha \leq 0, t_k$ – заданий час перехідного процесу.

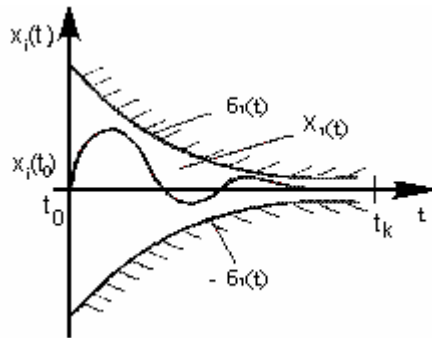


Рис.4.2.Межі допустимої області зміни і-го параметра

Зазначені динамічні показники перехідних процесів забезпечуються відповідним вибором спектру коренів замкненої оптимальної системи відповідно до розділу 4.2.

З урахуванням (13), (17) і (18) рівняння (16) набуде вигляду:

$$\int_0^t [\sum_{j=1}^n (a_{ij} + K_{ij} + k_{ij} + \lambda_{ij}^0) \sigma_j^0] \sigma_i^0 e^{2\alpha \tau} d\tau \leq \int_0^t \alpha (\sigma_i^0)^2 d\tau, \quad (4.49)$$

де $i = 1, 2, \dots, n; t \in [0, \infty]$.

Інтегруючи нерівність (4.49) на інтервалі $t \in [0, \infty]$, отримаємо систему лінійних алгебраїчних нерівностей

$$2 [\sum_{j=1}^n (a_{ij} + K_{ij} + k_{ij} + \lambda_{ij}^0) \sigma_j^0] \sigma_i^0 e^{2\alpha \tau} \leq \sigma_i^0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.50)$$

Звідси визначається, що множина значень k_{ij} , яка задовольняє системі нерівностей (4.50), забезпечує робастність системи (4.31) до параметричних

збурень на основі закону управління (4.35), отриманого наведеною вище процедурою модального синтезу. Одним з варіантів практичного визначення значень компенсаційних регуляторів k_{ij} є рішення системи нерівностей (4.50) на границях допустимих областей $+\alpha\sigma_i^0$ і $-\alpha\sigma_i^0$ за допомогою відомих чисельних методів [114].

4.5. Агрегація змінних стану і спрощення структури оптимального регулятора руху БПЛА

Практична реалізація розроблених в роботі алгоритмів оцінки параметрів лінійних динамічних моделей і законів оптимальної стабілізації програмного руху БПЛА тісно пов'язана з питаннями зниження розмірності моделі руху БПЛА і спрощення структури оптимального регулятора [8].

Очевидно, що доцільним є вибір такої моделі і структури оптимального регулятора, які б описувалися мінімальним числом змінних без спотворення фізичної суті динаміки руху БПЛА. Питання про можливість застосування певної спрощеної схеми залежить від специфічних властивостей конкретного режиму і має вирішуватися в кожному випадку самостійно.

Одним з напрямків побудови спрощених моделей є методи, засновані на скороченні розмірності вектору станів. Для синтезу еталонних реалізацій окремих динамічних режимів складних технічних систем зручніше використовувати спрощену модель з компонентами вектору стану, що визначають динаміку даного режиму. Такий напрям відноситься до агрегування, сутність якого можна сформулювати наступним чином: якщо система має значну кількість показників, то виникає потреба перейти до укрупнених величин, так званих агрегатів, число яких значно менше в порівнянні з вихідними змінними [115]. Іншими словами, система S_1 з n -вимірним вектором стану зіставляється з системою S_2 з вектором розмірності менше n (**задача 1**). Таким чином, система S_2 може розглядатися в якості наближеної моделі для S_1 , і в рамках такої більш грубою моделлю є можливість дати вичерпний аналіз її функціонування [116].

Крім того, можна істотно спростувати структуру самого оптимального регулятора, що також призводить до поліпшення швидкісних характеристик оптимальних стабілізаторів програмного руху БПЛА. Така можливість, зокрема, з'являється в тих випадках, коли розробник, враховуючи потреби каналів управління по зворотним зв'язкам в конкретних компонентах вектору стану, штучно виділяє «головну» і «другорядну» для кожного режиму частини фазового вектору.

Дійсно, оскільки оптимальне управління являє собою лінійну комбінацію всіх координат вектору $\bar{x}(t)$, зважену з коефіцієнтами k , то між i -тою складовою вектору $\bar{u}(t)$ і j -тою складовою вектору $\bar{x}(t)$ існує зв'язок, який характеризується коефіцієнтами k_{ij} , причому при великих n і m , число таких зв'язків $N = n \times m$ велике, що значно ускладнює технічну реалізацію регулятора і знижує його надійність. У зв'язку з цим і виникає завдання виявлення таких зв'язків, які можна виключити, не погіршуючи при цьому значно якості регулювання (**задача 2**).

Розглянемо рішення цих задач на прикладі лінійної стаціонарної динамічної системи згідно роботі автора [8].

Задача1.

Нехай динаміка БПЛА визначається як $\dot{\bar{x}}$

$$(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) \quad x \in R^r, u \in U \subset R^*, t \in T; \quad (4.51)$$

де A і B – постійні матриці розмірністю $(n \times n)$, $(n \times r)$; U – замкнута обмежена множина в R^r .

Нехай в кожен момент t необхідно задати не всі координати вектору фазового стану, в якому знаходиться сама система (4.51), а лише деякий набір z скалярних величин z_1, \dots, z_ν , число яких $\nu < n$ і які характеризують поточний стан $\bar{x}(t)$ з боку, що цікавий для розробника.

Пропонований метод агрегування змінних стану лінійних динамічних систем з постійними і змінними параметрами, полягає в наступному.

Стаціонарна лінійна динамічна система (4.51) шляхом перетворення $z(t) = Px(t)$, де P – матриця розмірності $v \times n$, представляється у вигляді

$$\dot{z}(t) = A_z z(t) + B_z u(t), \quad z(t_0) = Px^0, \quad (4.52)$$

тут матриці A_z і B_z визначаються умовами: $A_z P = P A$, $B_z = P B$, а у випадку, коли матриці A і P задовольняють співвідношенню $P_A = P A (P P')^{-1} P$, матрицю стану агрегованого фазового вектору можна представити у вигляді:

$$A_z = P A P' (P P')^{-1}. \quad (4.53)$$

Основною трудностю є вибір матриці агрегування P . В роботі пропонується підхід, заснований на мінімізації квадрата помилки рішення агрегованої задачі щодо вихідної. Формуючи рішення рівняння

$$\dot{\bar{e}}(t) = A_z \bar{e}(t) + (A_z P - P A) \bar{x}(t) \quad (4.54)$$

для похибки $\bar{e}(t) = \bar{z}(t) - P \bar{x}(t)$, яке запишеться у вигляді

$$\bar{e}(t) = \exp(A_z(t-t_0)) \bar{e}(t_0) + \int_0^t \exp(A_z(t-\xi)) (A_z P - P A) \bar{x}(\xi) d\xi, \quad (4.55)$$

і побудувавши квадратичну функцію від (4.55)

$$\alpha(\bar{e}) = \bar{e}' \bar{e}(t), \quad (4.56)$$

можна обирати матрицю агрегації P за умови мінімуму (4.55) за допомогою процедури традиційного градієнтного методу:

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} - m^{(k)} [\text{grad}_P \alpha(\bar{e})]^{(k)}, \quad (4.57)$$

де $m^{(k)}$ – ваговий множник, який визначається практичними міркуваннями збіжності ітераційної процедури.

Задача 2.

Оскільки оптимальний закон стабілізації при квадратичному критерії якості має вигляд $u(t) = K \bar{x}(t)$, будемо шукати елементи матриці зворотних зв'язків K у вигляді добутку двох величин:

$$k_{ij} = y_{ij} z_{ij}, \quad i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}, \quad (4.58)$$

де величини z_{ij} приймають одне з двох значень: 0 або 1. Якщо $z_{ij} = 1$, то в регуляторі є зв'язок між u_i і x_j , який характеризується коефіцієнтом y_{ij} , якщо ж $z_{ij} = 0$, то такий зв'язок відсутній. Складаючи з y_{ij} і z_{ij} матриці Y і Z співвідношення (9) можна записати у вигляді

$$K = K(Y, Z) = Y \cdot Z. \quad (4.59)$$

При цьому регулятор, що формується за допомогою матриць Y і Z , називається «допустимим», якщо для нього справедлива нерівність

$$J(Y, Z) \leq (1 + \varepsilon) J_{opt}, \quad (4.60)$$

де ε - задане «мале» число, яке характеризує припустиме погіршення якості регулювання.

У загальному випадку, виконання нерівності (4.60) може залежати від початкових умов. Однак припущення про те, що початкові умови є випадковими і розподілені по нормальному закону, дозволяє висловити нерівність (4.60) через інші моменти.

Завдання вибору матриці Z вирішується за умови здійсненності нерівності (4.60) і є деяким варіантом задачі дискретного програмування [117]. Основні труднощі в даному випадку полягають в тому, що залежність $J(Y, Z)$ від елементів матриці Z виявляється дуже складною і будь-яких загальних закономірностей виявити не вдається. Зокрема, зовсім не очевидно, що виключення будь-якого зв'язку в регуляторі обов'язково призводить до погіршення якості регулювання. Тому точне рішення цього завдання можна отримати тільки в результаті повного перебору всіх

можливих матриць Z і обчислення відповідних чисел $J(Y, Z)$, що практично досить складно при великому N .

Вибір матриці Y здійснюється з умови

$$J(K_{opt}, Z) = \min_k J(K, Z) \quad (4.61)$$

з використанням будь-якого ефективного методу пошуку мінімуму функції багатьох змінних [117], причому мінімізація здійснюється за елементами Y , відповідним одиничним елементам Z .

Однак, такий підхід є досить трудомістким і не гарантує прийняттого в сенсі показника якості процесу управління. Нижче пропонується метод спрощення структури оптимального регулятора при скалярному управлінні, що характерно для режимів стабілізації на окремих ділянках польоту БПЛА.

Нехай динаміка БПЛА визначається, як і раніше, рівнянням (4.51), записаним у вигляді нормованих відхилень змінних стану. Синтез оптимального регулятора, як було зазначено в розділі 4.1, забезпечується шляхом вибору відповідного зворотного зв'язку. Реалізація оптимального регулятора в сенсі квадратичного критерію якості має вигляд (4.2). Оскільки якісні показники процесів стабілізації програмного руху БПЛА на основі розглянутих в роботі лінійних стаціонарних моделей БПЛА визначаються в основному розташуванням найближчих до початку координат коренів характеристичного полінома, Що мають назву домінуючих, а також взаємним розташуванням інших коренів. Звідси ми можемо вибрати частину коренів, що визначають якісну динаміку процесу управління, число яких буде визначатися кількістю найбільш важливих змінних в кожному розглянутому режимі стабілізації. Далі вирішується задача модального управління для обраних коренів і змінних стану методом невизначених коефіцієнтів, запропонованим вище.

4.6. Висновки

1. Запропоновано модальний синтез лінійних замкнених стаціонарних систем з оптимальним законом управління у вигляді лінійної комбінації змінних стану, що дозволяє забезпечити задані динамічні властивості. Процедура модального синтезу оптимального закону управління здійснюється на основі запропонованого методу невизначених коефіцієнтів. Труднощі вибору необхідних власних чисел долаються запропонованою процедурою побудови і корекції спектру коренів замкнутої оптимальної системи управління.

2. Запропоновано модальний синтез оптимальних законів стабілізації об'єктів управління з транспортним запізнюванням у вигляді лінійної комбінації змінних стану, що дозволяють забезпечити задані динамічні властивості замкнутої оптимальної системи. Для усунення виникнення з-за наявності запізнювання стійких автоколивань в кінцевій точці процесу стабілізації поблизу програмної траєкторії руху пропонується використовувати метод компенсації запізнювання Бесса.

3. Запропонована процедура робастного модального синтезу, що базується на принципі гарантованої динаміки, що дозволяє вирішити проблему не тільки стабільності, але і необхідної якості управління, і полягає в тому, що при можливих припустимих варіаціях параметрів БПЛА, перехідні процеси в системі стабілізації повинні залишатися в межах заданих припустимих областей (множин) гарантованим чином.

4. Розроблені методи агрегації змінних стану і спрощення структури оптимальних регуляторів БПЛА, які значно полегшують дослідження, синтез та практичну реалізацію отриманих в роботі алгоритмів оцінки параметрів БПЛА і законів оптимальної стабілізації його руху.

Основні результати розділу були опубліковані в [6],[8],[11],[12],[15].

Список використаних джерел до розділу 4: [36], [77], [81], [89], [90], [94] - – [117],[121],[122],[124].

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішена актуальна науково-технічна задача - розробка спеціалізованого математичного апарату і алгоритмічного забезпечення вирішення задач мінімізації енергетичних затрат БПЛА за

рахунок оптимальної системи автоматичної стабілізації програмного руху БПЛА.

Основні результати і висновки полягають в наступному:

1. Проведений порівняльний аналіз відомих методів оптимізації показав, що їх використання для нестационарних систем, які в загальному випадку описують динаміку руху БПЛА, не дозволяє синтезувати оптимальні закони стабілізації в аналітичній формі. У зв'язку з цим у роботі запропоновано підхід, що використовує принцип мінімуму в поєднанні з математичним апаратом сплайн-функцій і функцій Уолша і структурно-функціональну схему процесу реалізації автоматичної оптимальної стабілізації програмного руху БПЛА.

2. Розроблено узагальнену процедуру оцінки параметрів лінійних динамічних моделей руху БПЛА, яка використовує сплайн-функції та ортогональне розкладання в ряд за системою функцій Уолша, що дозволяє знаходити при мінімізації інтегрального квадратичного критерію нев'язки оцінки шуканих параметрів на основі рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь для широкого класу лінійних динамічних систем. При цьому розроблений адаптивний алгоритм розбиття інтервалу спостереження, що дозволяє істотно підвищити точність ідентифікації.

3. Вперше запропоновано оригінальний метод перетворення одного класу лінійних нестационарних моделей руху БПЛА в еквівалентні їм лінійні стаціонарні моделі, для яких можна застосувати добре відомі та апробовані методи оптимізації.

4. На основі запропонованого в роботі підходу, що використовує принцип мінімуму в поєднанні з математичним апаратом функцій Уолша для середньоквадратичних задач оптимізації енерговитрат БПЛА вперше синтезовано матриці посилення оптимального за мінімумом енергії і узагальненого квадратичного функціоналу законів управління з монотонними і знакопостійними параметрами у вигляді апроксимацій

рядями Уолша, постійні коефіцієнти яких знаходяться шляхом розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

5. Запропоновано модальний синтез лінійних замкнутих стаціонарних систем з оптимальним законом управління у вигляді лінійної комбінації змінних стану, що дозволяє забезпечити задані динамічні властивості. Процедура модального синтезу оптимального закону управління здійснюється на основі запропонованого методу невизначених коефіцієнтів. Труднощі вибору необхідних власних чисел долаються запропонованою процедурою побудови і корекції спектру коренів замкнутої оптимальної системи управління.

6. Запропоновано модальний синтез оптимальних законів стабілізації об'єктів управління з транспортним запізнюванням у вигляді лінійної комбінації змінних стану, що дозволяють забезпечити задані динамічні властивості замкнутої оптимальної системи. Для усунення виникнення з-за наявності запізнювання стійких автоколивань в кінцевій точці процесу стабілізації поблизу програмної траєкторії руху пропонується використовувати метод компенсації запізнювання Бесса.

7. Запропонована процедура робастного модального синтезу, яка базується на принципі гарантованої динаміки, що дозволяє вирішити проблему не тільки стабілізації програмного руху, але і необхідну їй якість, і полягає в тому, що при можливих допустимих варіаціях параметрів руху БПЛА, перехідні процеси в системі стабілізації повинні залишатися в межах заданих допустимих областей (множин) гарантованим чином.

8. Розроблені методи агрегації змінних стану і спрощення структури оптимальних регуляторів руху БПЛА, які значно полегшують дослідження, синтез та практичну реалізацію отриманих в роботі алгоритмів оцінки параметрів руху БПЛА і законів оптимальної стабілізації його руху.

9. Розроблені оптимальні алгоритми стабілізації програмного руху БПЛА впроваджені в Науково-виробничому об'єднанні «ABIA» (м.Кременчук). Крім того, частина методів увійшла в програму навчання

студентів на кафедрі технічної кібернетики, факультету інформатики та обчислювальної техніки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Результати підтверджені актами впровадження, наведеними в додатку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. А.А.Стенин, В.М.Бурлаков, В.В.Курбанов, М.А.Солдатова
Синтез оптимального регулятора состояния в нестационарных системах на базе Функций Уолша. Bulgarian Journal for Engineering Design, issue. Mechanical Engineering Faculty, Technical University-Sofia №25.2015.с.67-72.
2. А.А.Стенин, О.И.Лисовиченко, В.П.Пасько, М.А.Солдатова
Оптимизация энергозатрат в динамических системах с последствием. Bulgarian Journal for Engineering Design, issue. Mechanical Engineering Faculty, Technical University-Sofia..№27 .2015 .с.83-87.
3. А.И.Михалёв, А.А.Стенин, В.П.Пасько, М.А.Солдатова
Идентификация квазистационарных систем на базе сплайн-функций и функций Уолша. Системные технологии - Днепр-ск: НМетАУ, ИВК «Системні технології», №5(100) 2015. – сс. 53-60.
4. А.А.Стенин,О.И.Лисовиченко,Д.А.Гуменный,М.А.Солдатова.
Параметрическая идентификация линейных распределенных динамических систем (секвентный подход) Bulgarian Journal for Engineering Design, issue. Mechanical Engineering Faculty, Technical University-Sofia.№ 31, 2017.pp.72-77.
5. А.А.Стенин, Е.Ю.Мелкумян Писаренко Ю.В. Солдатова М.А.
Адаптивная параметрическая сплайн-идентификация линейных нестационарных систем// Міжвідомчий науково-технічний збірник «Адаптивні системи автоматичного управління». – Київ: Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», - 2014. - Вип. 1(24).с.113-121
6. О.І.Михальов, О.А.Стенін, М.О.Солдатова, О.С.Стенін
Модальна робастна стабілізація об'єктів керування з

- параметричною невизначеністю// Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник.- Вип.-№2(115). Дніпро.- 2018.с.с.61-67. (*запропоновано метод робастного модального управління*) Index Copernicus
7. Е.Ю.Мелкумян, М.А.Солдатова Метод эквивалентного преобразования одного класса линейных нестационарных систем\\ Міжвідомчий науково-технічний збірник «Адаптивні системи автоматичного управління». – Київ: Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», - 2015. - Вип. 1(26).с.с.102-105.
 8. А.А.Стенин,М.М.Ткач,В.П.Пасько,М.А.Солдатова.Методы агрегирования переменных в математических моделях динамических систем . Міжвідомчий науково-технічний збірник «Адаптивні системи автоматичного управління». – Київ: НТУУ «Київський політехнічний інститут», - 2016. - Вип. 1(28).с.с.129-137.
 9. А.А. Стенин, В.П. Пасько, Е.Ю. Мелкумян, М.А. Солдатова Анализ проблемы синтеза систем управления нелинейными динамическими объектами. Міжвідомчий науково-технічний збірник «Адаптивні системи автоматичного управління». – Київ: Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», - 2015. Вип. 2(27).с.с.101-110.
 10. A.I.Mikhalyov, A.A.Stenin, V.N.Ignatenko, M.A.Soldatova, A.S.Stenin Synthesis of optimal consumption fuels one class of linear nonstationary systems (the method of predicted control) // System technologies. Regional interuniversity collection.-№6 (119) Dnipro.-2018.pp.64-72
 11. Михалев А.И., Солдатова М.А., Стенин А.С. Модальный синтез оптимальных законов стабилизации объектов управления с транспортным запаздыванием // Системные

технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. - Выпуск 4 (111). - Дніпро, 2017. - С.30 - 38.

12. А.И.Михалев, М.А.Солдатова, А.С.Стенин Модальный синтез оптимальных законов стабилизации технологических процессов с запаздыванием в контуре управления (матеріали міжнародній науково-технічній конференції «Інформаційні технології в металургії та машинобудуванні» с.17-18), 28-30 березня 2017 р. м.Дніпро
13. Алексієв О.П., Солдатова М. О., Створення програмного забезпечення стабілізації руху безпілотних транспортних засобів (БТЗ) (матеріали науково-методичної конференції «Особливості викладання фахових дисциплін технічних спеціальностей – виклики часу та перспективи» с.116), 21 березня 2017 р., м. Харків
14. В.М.Томашевський, В.П.Пасько, М.О.Солдатова Обобщенная методика идентификации параметров линейных динамических моделей технических систем(матеріали міжнародній науково-технічній конференції “Математичне та імітаційне моделювання систем МОДС '2017”с.150-154), 26-29 червня 2017 г., м. Чернігів
15. М.М.Ткач, В.П.Пасько, М.О.Солдатова Синтез робастного регулятора линейных динамических систем с неопределенностью параметров (матеріали міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні управляючі системи та технології ІУСТ – Одеса – 2017»с.с.100-103), 20-22 вересня 2017 р.,м.Одеса
16. В. С. Фетисов, Л. М. Неугодникова, В. В. Адамовский, Р. А. Красноперов Беспилотная авиация: терминология, классификация, современное состояние-Уфа: ФОТОН, 2014. – 217 с.

17. Общие виды и характеристики беспилотных летательных аппаратов: справ. пособие/А.Г.Гребенников, А.К.Мялица, В.В.Парфенюк и др.-Х. Национальный аэрокосмический университет им. А.Н.Жуковского «Харьковский авиационный институт». – 2008, 377 с.
18. М.С. Иванов, А.В. Аганесов, А.А. Крылов и др Беспилотные летательные аппараты. Справочное пособие. - 615 с.
19. А.А.Дмитриевский, Л.Н.Лысенко Прикладные задачи теории оптимального управления движением беспилотных летательных аппаратов-М.: Машиностроение,1978. -328 с.
20. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов.-М.: Машиностроение,1973/ -615 с.
21. Брайсон Д., Хо Ю - ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. - 544 с.
22. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления.- М.: Наука, 1969. - 408 с.
23. Окулов С.М., Пестов О.А. Динамическое программирование. Издательство: БИНОМ. 2012. - 299 с.
24. Фельдбаум А,А,, Бутковский А,Г, Методы теории автоматического управления, -М: Наука, 1971. -743 с
25. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. -509 с.
26. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление, - М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
27. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. - 495 с.
28. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. -650 с.

29. Чаки Ф. Современная теория управления. Нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – М.: Машиностроение, 1963. – 303 с.
30. Коган М. М., Неймарк Ю. И. Об оптимальности локально-оптимальных решений линейно-квадратичных задач управления и фильтрации // Автоматика и телемеханика. - 1992. -№ 4. сс. 101-110.
31. Баландин Д. В., Коган М. М. Линейно-квадратичные и у-оптимальные законы управления по выходу // Автоматика и телемеханика. 2008. -№ 6. - сс. 5-14.
32. Баландин Д. В., Коган М. М. Синтез линейных законов управления при фазовых ограничениях // Автоматика и телемеханика. 2009. - № 6. -сс. 48-57.
33. Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления. Л.: Энергия, 1977. -280 с.
34. Современная теория управления /Под ред. К.Т.Леондеса. -М.: Мир. -1970. 512с.
35. Красовский А.А., ред. Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987. -712 с.
36. Михайлов Ф.А. Теряев Е.Д. Гаулеков В.П. Динамика нестационарных линейных систем.-М.: Наука. -1967. 368с.
37. Игнатенко В.Н., Аракелян С.А. Единственность оптимальных по расходу топлива управлений в линейных нестационарных системах //Адаптивные системы автомат. упр.: Респ. межвед. н. – т. сб. – 1984. – Вып. 12. – сс.62-64.
38. Залманзон Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. - М.: Наука. 1989.- 496 с.

39. Chen C.F., Hsiao C.H. Walsh series analysys in optimal control // Int. g. Contr.- 1975. – v.21. -№6. – pp.881-897.
40. Новоселов О. Н. Идентификация и анализ динамических систем: Монография. 2-е изд. испр. и доп. — М.: Изд. Моск. гос. ун-та леса, 2007. — 316 с.
41. Prasada Rao G., Palanisamy K.R. Imroved algorithms for parameter identification in continuos systems via Walsh functions // IEE Proc. – 1983. D 130. - № 1.-pp.9-16.
42. Shin D.H., Chukung F. Analysis and parameter estimation of a Scaled system via shifted hegendre polynomials // Int. g. Syst. Sci. 1986. – v.17. - № 3. – pp. 400-408.
43. Дмитриев С.П., Пелевин А.Е. Задачи навигации и управления при стабилизации судна на траектории. - СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2002.- 160 с.
44. Байбородин Ю.В., Драбкин В.В., Сменковский Е.Г., Унгурян С.Г.//Под общ. ред. Ю.В. Байбородина. Бортовые системы управления полетом — М.: Транспорт, 1975. -336 с.
45. Саенко Т.А.Синтез алгоритмов оптимального управления линейными нестационарными системами: диссертация ... кандидата технических наук: 05.13.01 / Киев. политехн. ин-т им. 50-летия Великой Окт. Соц. революции. - Киев, 1990. - 162 с.
46. Корнейчук, Н.П., Бабенко, В.Ф., Лигун, А.А.Экстремальные свойства полиномов и сплайнов / отв. ред. А.И.Степанец; ред. С.Д.Кошис, О.Д.Мельник, АН Украины, Ин-т математики. К.: Наукова думка. - 1992.-304с.
47. Вершинин В. В., Завьялов Ю. С., Павлов Н. Н. Экстремальные свойства сплайнов и задача сглаживания. - Наука Новосибирск, 1988. – 102 с.

48. Абдулгамидов А.Р., “О системах Хаара, Радемахера и Уолша функций многих переменных”, Функциональный анализ и теория функций. 6, Учён. зап. Казан. гос. ун-та, 129, № 3, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1969, сс.53-59.
49. Малозёмов В.Н., Машарский С.М. Основы дискретного гармонического анализа. Часть вторая. СПб.: НИИММ, 2003. -100 с.
50. Львович А.А., Кузьмин Б.Д. Аналитическое выражение для спектров функций Уолша // Радиотехника. 1980. Т. 35. № 1. сс. 33-39.
51. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: теория и применения. - М.: Наука, 1987. -346 с.
52. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Высшая школа. - 2001.-348 с.
53. Э.Сейдж Теория оценивания и ее применение в связи и управлении.-М.: Связь. 1976.- 496 с.
54. Обобщенный алгоритм идентификации линейных динамических систем на базе сплайн-функций Уолша/ А.А. Стенин, М.М. Ткач, Е.Ю. Мелкумян // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Адаптивні системи автоматичного управління». – Київ: Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», - 2012. - Вип. 20(40).сс.131-136.
55. Цыпкин Я.З. Информационная теория идентификации, М., Наука, 1995. - 336 с.
56. П.Эйкхофф Основы идентификации систем управления.- М.: Мир. -1975.-681с.

57. Хартовский В. Е. Задачи идентификации и управления выходом для систем с запаздываниями // Автоматика и телемеханика. 2011. - № 5. -с.с. 17-31.
58. Astrom K., Eykhoff P. System identification. A survey // Automatica. -1971. Vol. 7. - pp. 123-162.
59. De Keyser R. M. C., Van Cauwenberghe A. R. Extended prediction self-adaptive control // IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation, York. 1985. - pp. 1255-1260.
60. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. - М.: Наука, 1991. - 432 с.
61. Lennart Ljung System Identification - Theory For the User. — 2-e изд. — N.J.: PTR Prentice Hall, 1999.-609 p.
62. Janczak D., Grishin Y. State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming // Control and Cibernetics. 2006. - Vol. 35(4), - pp. 851-862.
63. Chang Y.F. Analysis and identification distributed systems via double general polynomials // Int. g. Contr. – 1986. – pp. 395-405.
64. Aggelogiannaki E., Doganis Ph., Sarimveis H. An Adaptive Model Predictive Control configuration for Production-Inventory Systems // International Journal of Production Economics. 2008. - Vol. 114. -pp. 165-178.
65. Корнейчук, Н.П., Бабенко, В.Ф., Лигун, А.А. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов / отв. ред. А.И. Степанец; ред. С.Д. Кошис, О.Д. Мельник, АН Украины, Ин-т математики. – К.: Наукова думка, 1992. –304 с.
66. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. – Теория сплайнов и ее приложения. -320 с.

67. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985. - 304 с.
68. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
69. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. - 283 с
70. Тихонов А.Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // ДАН СССР, 1965, т. 163, № 3, сс. 591-594.
71. Карамзин Д. Ю. Принцип максимума в задаче управления при ограниченных фазовых координатах // Автоматика и телемеханика. -2007,-№2.-сс. 26-38.
72. Красовский А. А., Буков В. Н., Шендрик В. С. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. М.: Наука, 1977. -272 с.
73. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. -М.: Наука, 1971. -448 с.
74. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.В. Математическая теория оптимальных процессов. -М.: Физматгиз, 1961. -392 с.
75. Kalman R. Contribution to the theory of optimal control/ R.Kalman // Bul.Soc.Mech.Mat. – 1960. Vol.12, No.2. – P.102-119.
76. Современная теория управления \Под ред. К.Т.Леондеса. - М.: Мир. -1970. 512с.
77. Иванов В.А. Фалдин Н.В. Теория оптимальных систем автоматического управления.-М.: Наука. 1981.-332с.
78. Веремей Е. И., Петров Ю. П. Метод синтеза оптимальных регуляторов, допускающий техническую реализацию // Математические методы исследования управляемых

- механических систем. - Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. -сс. 24-31.
79. Воронов А. А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1985. -336 с.
 80. Моисеев В.С. Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами: монография. Казань: ГБУ «Республиканский центр мониторинга качества образования». 2012. -768 с.
 81. Габасов Р., Кириллов Ф. Качественная теория оптимальных процессов, -М.: Наука, 1971. -287 с.
 82. Солодов А. В., Петров Ф. С. Линейные автоматические системы с переменными параметрами- М.: Наука. 1971.-620 с.
 83. Дункан В., Коллар А., Фразер Р., Теория матриц и её приложения к дифференциальным уравнениям и динамике. –М.: Иностранная литература. - 1950. - 448с.
 84. Ланкастер В. Теория матриц. - М.: Наука. Гл. ред физ. – мат. литературы. 1972. - 272с.
 85. Беллман Р. Введение в теорию матриц. -М.: Наука, 1969. -367 с.
 86. Kostyuk V.I., Stenin A.A., Ignatenko V.N. Optimal fuel control of systems with delay . System Science, Poland, v.3, №2, 1977, pp.159 -169.
 87. А.А.Стенин, О.И.Лисовиченко, И.Г.Шитикова Синтез оптимальных по расходу топлива управлений одним классом линейных нестационарных систем. Bulgarian Journal for Engineering Design, issue. Mechanical Engineering Faculty, Technical University-Sofia. №36, 2018, .pp.25-31.
 88. Стенин А.А., Бурлаков В.М., Суходольский К.В. Синтез оптимальных законов движения динамических систем с

транспортным запаздыванием. Міжвідомчий науково-технічний збірник «Адаптивні системи автоматичного управління». – Київ: №3(23), 2000/ - сс.25-29.

89. Лётов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов // АН СССР. Автоматика и телемеханика. 1960. № 4- сс. - 436-441. №5.-сс.561-568 №6.-сс.661-665; 1961. № 4.сс.-425-435.
90. Лётов А. М. Математическая теория процессов управления. М.: Наука, 1981. 256 с.
91. Ignatenko V.N, Nikulina E.E., Gay I.S., Lemeshko D.A., Fuel-optimal control of system with delay Межведомственный научно-технический сборник, АСАУ, №12(32), 2008.- сс. 38-46
92. Д'Анжело Г. Линейные системы с переменными параметрами \Под ред. Н.Т.Кузовкова. - М.: Машиностроение.1974. -288с.
93. Коровкин М.В. Среднеквадратичный оптимальный синтез с учетом ограничений на длительность переходного процесса // Тезисы докладов науч. конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики", - Тула, 2000. - сс. 150-151.
94. Стенин А.А. Методи побудови автоматизованих навчаючих систем для операторів технологічних процесів та рухомих об'єктів: диссертация. ... доктора технических наук: 05.13.01. Киев. политехн. ин-т им. 50-летия Великой Окт. Соц. революции. - Киев, 1994. - 200 с.
95. Автоматизированное проектирование САУ\Под ред. Солодовникова В.В.-М.: Машиностроение. -1990. 332с.
96. Автоматизированное проектирование систем управления \Под ред. М.Джамшиди, Дж.Хергета. - М.: Машиностроение.1989.344с.
97. Красовский Н.Н. Теория управления движением.Линейные системы.-М.: Наука. 1968.-476с.

98. Куликовский Р. Оптимальные и адаптивные процессы в системах автоматического регулирования. - М.: Наука. 1967.- 380с.
99. В.В. Григорьев, Н.В. Журавлёва, Г.В. Лукьянова, К.А. Сергеев Синтез систем автоматического управления методом модального управления. - СПб: СПбГУ ИТМО, 2007. - 108 с.
100. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами.-М.: Наука.1976. – 424 с.
101. Стенин А.А., Пасько В.П., Хоменко П.С Синтез оптимальных законов движения линейных стационарных моделей технологических процессов при «идеальном» операторе в контуре управления. Міжвідомчий науково-технічний збірник «Адаптивні системи автоматичного управління». – Київ: №15(35), 2009, сс.116-122
102. Системы автоматического управления с запаздыванием : учеб. пособие / Ю.Ю. Громов, Н.А. Земской, А.В. Лагутин, О.Г. Иванова, В.М. Тютюнник. - Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 76 с.
103. Янушевский, Р.Т. Управление объектами с запаздыванием / Р.Т. Янушевский. – М.: Наука, 1978. – 416 с.
104. Bass R.W. Improved on-off Missile Stabilization // Jet Propulsion. – Vol.26. – 1956. – pp. 415-417.
105. Буков В. Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. – Калуга: Изд-во науч. лит. Н. Ф. Бочкаревой, 2006. – 720 с.
106. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002. – 303 с.

107. Цыкунов А. М. Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 7. – сс. 103–115.
108. Atassi A. N., Khalil H. K. Separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. – 1999. – Vol. 44, N 9. – pp. 1672–1687.
109. Цыкунов А. М. Алгоритмы робастного управления линейными динамическими объектами по выходу // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2008. – № 8. – сс. 7–12.
110. Бобцов А. А., Пыркин А. А. Компенсация гармонического возмущения в условиях запаздывания по управлению // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2008. – № 4. – сс. 19–23.
111. Буков В.Н. Аналитический синтез робастных регуляторов на основе параметризации уравнения Лурье-Риккати / В.Н. Буков, Н.И. Сельвесюк // Автоматика и телемеханика. – 2007. – №2. – сс. 6-16.
112. Буков В.Н. Решение матричных уравнений методом канонизации / В.Н. Буков, В.Н. Рябченко, В.В. Косьянчук, Е.Ю. Зыбин // Вестник Киевского ун-та : Сер. Физ.-мат. науки. – К.: Изд-во Киевского нац. ун-та, 2002. – Вып. 1. – сс. 19-28.
113. Оморев Т.Т. Принцип гарантированной динамики в теории систем управления. Кн.1.Бишкек. -Илим. 2001.-150с.
114. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. К.: Видавнича група ВНУ, 2006. – 480 с.
115. Ю.Н. Павловский, Т.Г. Смирнова Проблема декомпозиции в математическом моделировании. - М.: Фазис. 1998. - 272с.

116. Сингх М., Титли А. Системы: декомпозиция, оптимизация, управление М.: Машиностроение, 1986. - 496 с.
117. И. Х. Сигал, А. П. Иванова Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. М.: Физматлит. 2003 – 238 с.
118. Г.Г.Цегелик, Н.В.Грипинська Оцінка похибки наближення функцій некласичною мажорантою Ньютона. Вісник Львівського університету. Серія прикладної математики і інформатики. Вип.27, №12, 2007, сс.32-35.
119. А.А.Стенин Е.Ю.Мелкумян Приближение переменных динамических объектов управления на основе полиномиальных сплайн-функций\\ збірник наукових праць Кіровоградського національного університету "Техніка в сільськогосподарському виробництві,галузе машинобудування, автоматизація" Випуск 27 - Кіровоград:КНТУ,2014. С. 305-311.
120. В.С.Мазорчук Жорданова нормальна форма. Методичний посібник. Київський державний університет ім.Т.Шевченка, 1998, 122 с.
121. А.А.Стенин, В.П.Пасько, Л.В.Сиренко. Робастная стабилизация линейных динамических систем с параметрической неопределенностью (материалы 13-й международной научно-практической конференции «Trends of modern science-2017», 30.05-7.06.2017, pp.62-69).
122. А.А.Стенин, О.И.Лисовиченко, М.М.Ткач, В.П.Пасько Модальный синтез оптимальных законов стабилизации линейных стационарных систем Bulgarian Journal for Engineering Design, issue. Mechanical Engineering Faculty, Technical University-Sofia.№ 30, 2016.pp.11-16
123. А.А.Стенин, Е.Ю.Мелкумян, М.А.Солдатова Синтез оптимального управления нестационарными системами на

базе функцій Уолша. -В сб. Техніка в сільському господарстві, галузеве машинобудування, автоматизація. - Кіровоград, вип., 2013, вип.26, сс.202-206.

124. Мельник К.В. Технологія μ -синтезу в задачах керування польотом. – Рукопис. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.13.12 – Системи автоматизації проектувальних робіт. – Національний авіаційний університет, Київ, 2009.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Сплайн-функції та їх розрахунок

В цьому додатку наведено наближення параметрів БПЛА сплайн-функціями згідно роботам [45,118,119]

На відрізку $[a, b]$ задамо сітку

$$\Delta_N : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b. \quad (1)$$

Функцію $S_m(t) = S_{m,k}(t, \Delta_N)$ називають поліноміальним сплайном ступеня m дефекту k на сітці Δ_N , якщо: $S_m(t) \in P_m$ на $[t_{i-1}, t_i]$ ($i = \overline{1, N}$), де P_m - безліч многочленів ступеня не вище m , $m \geq 0$; $S_m(t) \in C_{[a,b]}^{m-k}$, де $C_{[a,b]}^P$ - безліч дійсних функцій на відрізку $[a, b]$, що мають неперервні похідні до порядку p включно. Точки називають вузлами сплайна. У завданнях інтерполяції сплайн $S_m(t)$ повинен задовольняти умовам $S_m(t_i) = f(t_i)$, $i = \overline{0, N}$. В цьому випадку сплайн називають інтерполяційним [66,119].

Зазвичай розглядають сплайни непарного степеня ($m = 2n - 1$) і припускають, що $0 \leq k \leq n$. При $k = 0$ сплайн збігається з поліномом степеня m . Інші важливі випадки отримуємо при $k = 1$ та $k = n$. У першому випадку говорять про сплайни дефекту I, в другому - про сплайни Ерміта. Одною з переваг ермітових сплайнів перед сплайнами дефекту I є властивість локальності, що полягає в тому, що їх поведінка і побудова на $[t_{i-1}, t_i]$ не залежить від їх поведінки і побудови на інших інтервалах. Однак для побудови ермітових сплайнів потрібен великий обсяг апріорної інформації - знання значень похідних інтерпольованої функції у вузлах або можливість їх наближеного обчислення. Тому на практиці отримали найбільшого поширення сплайни дефекту I [66]. Надалі слова "дефекту I" будемо опускати.

Інтерполяційні сплайни застосовують при чисельному дифференціюванні та інтегруванні. Наближене обчислення похідних і інтегралів функції $f(t)$ складається в заміні їх похідними і інтегралами інтерполяційного сплайна, побудованого за значеннями $f_i = f(t_i) (i = \overline{0, N})$ на сітці (1). Якщо сплайн використовується для обчислення похідних, то задана похибка апроксимації похідної забезпечується вибором кроку сітки (1).

У даній роботі необхідно отримувати аналітичні вирази змінних стану, заданих в дискретні моменти часу, в їх похідних за умови, що вектор стану є повністю вимірюваним. Цим вимогам задовольняє інтерполяція кубічними сплайнами [45, 46, 66, 119].

З визначення інтерполяційного сплайна ступеня m , наведеного вище, слідує, що кубічний сплайн $S(t)$ є кусочно-інтерполюючою функцією, яка визначена на сітці (1.32) і задовольняє наступним вимогам [66, 119]:

- $S(t)$ - неперервна разом з першою і другою похідною для всіх $t \in [a, b]$;
- $S_{\Delta_i}(t)$ - кубічна функція всередині подінтервала $[t_{i-1}, t_i] (i = \overline{1, N})$;
- $S(t_i) = f_i (i = \overline{0, N})$ (2)

На відрізку $[t_{i-1}, t_i]$ сплайн визначається чотирма коефіцієнтами, на всьому проміжку $[a, b]$ - $4N$. Вимога безперервності сплайна і його похідних $S^{(r)}(t) (r = 0, 1, 2)$ у вузлах $\{t_i\} (i = \overline{1, N-1})$ дозволяє отримати $3N-1$ рівнянь. Разом з рівняннями (2) маємо $4N-2$ співвідношень. Для визначення двох вільних параметрів на інтерполяційний сплайн накладають додаткові крайові умови. У більшості завдань ідентифікації задані тільки вузлові значення f_i , внаслідок чого вибір крайових умов складний. В цьому випадку рекомендується вимагати, щоб в точках t_1 і

t_{N-1} сплайн $S(t)$ мав безперервну третю похідну, що еквівалентно умовам [119]

$$\overset{\cdot\cdot\cdot}{S}(t_i - 0) = \overset{\cdot\cdot\cdot}{S}(t_i + 0) (i = \overline{1, N-1}). \quad (3)$$

Введемо позначення

$$\overset{\cdot}{S}(t_i) = m_i \quad (i = \overline{0, N}), h_i = t_i - t_{i-1}, H = \max_i h_i$$

Тоді сплайн на відрізку представляється формулою

$$S(t) = m_{i-1}(t_i - t)^2(t - t_{i-1})/h_i^2 - m_i(t - t_{i-1})^2(t_i - t)/h_i^2 + \\ + f_{i-1}(t_i - t)^2[2(t - t_{i-1}) + h_i]/h_i^3 + f_i(t - t_{i-1})^2[2(t_i - t) + h_i]/h_i^3. \quad (4)$$

З огляду на умови інтерполяції (2), гладкості та крайові умови (3) параметри $m_i (i = \overline{1, N-1})$ визначають з наступної системи рівнянь [119]:

$$\begin{aligned} (1 + \gamma_0)m_1 + \gamma_0 m_2 &= c_1^1, \\ \lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \beta_i m_{i+1} &= c_i \quad (i = \overline{2, N-2}), \\ \gamma_N m_{N-2} + (1 + \gamma_N)m_{N-1} &= c_{N-1}^1, \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= h_0 / h_1; \gamma_N = h_{N-1} / h_{N-2}; \\ \beta_i &= h_{i-1} / (h_{i-1} + h_i); \lambda_i = 1 - \beta_i; \\ c_i &= 3[\lambda_i(f_i - f_{i-1})/h_{i-1} + \beta_i(f_{i+1} - f_i)/h_i]; \\ c_1^1 &= 1/3c_1 + 2\gamma_0(f_2 - f_1)/h_1; c_{N-1}^1 = 1/3c_{N-1} + 2\gamma_N(f_{N-1} - f_{N-2})/h_{N-2}, \end{aligned}$$

а m_0 та m_N із рівнянь

$$\begin{aligned} m_0 &= \gamma_0^2 m_2 + (\gamma_0^2 - 1)m_1 + 2[(f_1 - f_0)/h_0 - \gamma_0^2(f_2 - f_1)/h_1]; \\ m_N &= \gamma_N^2 m_{N-2} + (\gamma_N^2 - 1)m_{N-1} + 2[(f_N - f_{N-1})/h_{N-1} - \gamma_N^2(f_{N-1} - f_{N-2})/h_N]. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким чином, побудова інтерполяційного кубічного сплайна по формулі (4) зводиться до відшукування значень m_i , які для крайових умов (3) знаходяться з рівнянь (5), (6). Відзначимо, що права частина кожного з співвідношень в системі (1.37) дорівнює нахилу в точці t_i параболі, що

проходить через точки (t_{i-1}, f_{i-1}) , (t_i, f_i) , (t_{i+1}, f_{i+1}) . Ці нахили представляють згладжування величин m_i . Матриця системи рівнянь (6) є стрічкової з діагональним переважанням, тобто якщо a_{ij} - елемент i -го рядка j -го стовпця, то $r_i = |a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| > 0$ для всіх i . Визначники таких матриць відмінні від нуля, і системи мають рішення, притому єдині. Для вирішення системи (5) зазвичай використовують метод прогонки. Далі з (6) однозначно визначаємо m_0 , m_N . Звідси випливає існування і єдиність інтерполяційного сплайна $S(t)$, що задовольняє умовам (3) [119].

У даній роботі передбачається використовувати сплайн-функції для отримання аналітичних виразів змінних станів, виміряних в дискретні моменти часу, і їх похідних. Тому для отримання оцінок похибки інтерполяції досить припустити, що інтерпольовані функції належать до класу безперервно диференційованих функцій $C_{[a,b]}^1$. Для крайових умов (3), кубічного сплайна і простору $C_{[a,b]}^1$ інтерпольованої функцій, дається наступна оцінка похибки наближення [45,118,119]:

$$|S^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)| \leq R_r = K_r H^{R-r} \alpha_N \quad (r=0,1), t \in [a,b], \quad (7)$$

де $K_0 = 13/48$, $K_1 = 0,8623$;

$$\alpha_N = \begin{cases} \max[1, 3/2 + 2/5 \max(\gamma_0, \gamma_N)] \omega(\dot{f}, H), t_1 \leq t \leq t_{N-1}, \\ \max[1, 7/5 + 2 \max(\gamma_0^2, \gamma_N^2)] \omega(\dot{f}, H), a \leq t \leq t_1, t_{N-1} < t \leq b, \end{cases}$$

тут $\omega(\dot{f}, H)$ - модуль безперервності функції $f(t) \in C_{[a,b]}^1$, визначається величиною

$$\omega(\dot{f}, H) = \max | \dot{f}(t') - \dot{f}(t'') |, \\ t', t'' \in h_i \quad (i=1, N).$$

Аналіз співвідношення (7) показує, що модуль безперервності $\omega(\dot{f}, H) \rightarrow 0$ при $H \rightarrow 0$, і, тим самим, забезпечується збіжність

послідовності інтерполяційних сплайнів до інтерпольованої функції. Оцінка (7) дає можливість визначити величину максимального кроку сітки (1) для забезпечення заданої похибки обчислення похідної функції $f(t)$ із застосуванням сплайна, тобто виконання нерівності

$$|R_1(t)| = |\dot{S}(t) - \dot{f}(t)| \leq \varepsilon.$$

Згідно (7) маємо

$$|R_1(t)| \leq K_1 H \alpha_N.$$

Тоді, якщо вибрати H таким, щоб

$$H \leq h^* = \varepsilon / K_1 \alpha_N,$$

то необхідна точність досягається, наприклад, на рівномірній сітці з кроком h^*

Інтерполяційні сплайни успішно застосовують при чисельному диференціюванні та інтегруванні функцій. Наближене обчислення похідних і інтегралів функції $f(t)$ полягає в заміні їх похідними і інтегралами інтерполяційного сплайна, побудованого за значеннями $f_i = f(t_i)$ ($i = \overline{0, N}$) на сітці (1).

З виразу (4) для кубічного сплайна випливає наступна формула чисельного диференціювання:

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) = & m_{i-1}(t_i - t)(2t_{i-1} + t_i - 3t) / h_i^2 - \\ & - m_i(t - t_{i-1})(2t_i + t_{i-1} - 3t) / h_i^2 + 6(f_i - f_{i-1})(t_i - t)(t - t_{i-1}) / h_i^3. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут величини m_i обчислюються за наведеними співвідношенням (5), (6), а похибка наближення похідної функції $f(t)$ похідною сплайна $S(t)$ оцінюється на підставі співвідношення (7) при $r = 1$ [45, 118, 119].

Відповідно формула чисельного інтегрування для кубічного сплайна при використанні подання (4) записується у вигляді [119]

$$\int_a^b S(t)dt \approx 1/2 \sum_{i=1}^{N-1} h_i (f_i + f_{i-1}) + 1/12 \sum_{i=1}^N (m_{i-1} - m_i) h_i^2. \quad (9)$$

Очевидно, що похибка обчислення інтеграла (9), з огляду на нерівність (7), можна оцінити таким чином [118]:

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b S(t)dt \right| \leq \int_a^b |S(t) - f(t)| dt \leq \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |S(t) - f(t)| dt \leq (b-a)R_0. \quad (10)$$

Додаток 2

ЗАТВЕРДЖЕНО

Декан ФІОТ

КПІ ім. Ігоря Сікорського

д.т.н., проф. О.А. Павлов



2017 р.

АКТ

про впровадження у навчальний процес результатів дисертаційної роботи
СОЛДАТОВОЇ МАРІЇ ОЛЕКСАНДРІВНИ на тему «Автоматизація процесу
стабілізації програмного руху безпілотного літального апарату»

Комісія у складі:

Голова:

д.т.н., доц., завідувача кафедри
технічної кібернетики Пархомей І.Р.

Членів комісії:

к.т.н., доц. Лісовиченко О.І.

к.т.н., доц. Пасько В.П.

к.т.н., доц Тимошина Ю.А.

склала цей акт про впровадження результатів дисертаційної роботи
Солдатової М. О. у навчальний процес кафедри технічної кібернетики КПІ
ім. Ігоря Сікорського для підготовки лекційних матеріалів та методичних
вказівок до виконання комп'ютерного практикуму з дисципліни «Оптимальні
системи управління».

Склад впровадження:

- оригінальні алгоритми параметричної ідентифікації та оптимізації
лінійних нестационарних систем;
- модальна процедура синтезу оптимальних законів стабілізації лінійних
стаціонарних систем.

Голова комісії:

д.т.н., доц., Пархомей І.Р.

Члени комісії:

к.т.н., доц. Лісовиченко О.І.

к.т.н., доц. Пасько В.П.

к.т.н., доц Тимошин Ю.А.



НОВЕ ПОКОЛІННЯ ТРЕНАЖЕРІВ
І ТЕХНОЛОГІЙ НАВЧАННЯ



ЗАТВЕРДЖУЮ
Директор ТОВ «НВО «ABIA»

В.А.Моцарь

2017 р.

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи
Солдатової Марії Олександрівни
на тему
«Автоматизація процесу стабілізації програмного руху
безпілотного літального апарату (БПЛА)».

Комісія у складі:

Голови: Петров Р.М., к.т.н., головний інженер;

Членів комісії: Зінченко В.П., к.т.н., головний науковий співробітник;
Вишинський В.О., начальник тренувального центру.

склала цей акт про впровадження результатів дисертаційної роботи Солдатової Марії Олександрівни на тему «Автоматизація процесу стабілізації програмного руху безпілотного літального апарату (БПЛА)», які були використані при розробленні системи автоматичного проходження комплексним льотним тренажером вертольота Ми-171 кваліфікаційних тестів в прискореному часі в Науково-виробничому об'єднанні «ABIA».

Склад впровадження:

- алгоритми синтезу еталонних динамічних реалізацій в режимах стабілізації руху нестационарних літальних апаратів на базі сплайн-функцій і функцій Уолша;
- модальна процедура синтезу еталонних динамічних реалізацій в режимах стабілізації руху стаціонарних літальних апаратів.

Голова комісії:

Р.М.Петров

Члени комісії:

В.П.Зінченко

В.О.Вишинський

« 07 » листопада 2017 р.

Додаток 3

Список публікацій автора по дисертації

1. Михалев А.И., Солдатова М.А., Стенин А.С. Модальный синтез оптимальных законов стабилизации объектов управления с транспортным запаздыванием // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. - Выпуск 4 (111). - Дніпро, 2017. сс.30 -38. (*запропоновано модальний синтез систем із запізнюванням*) Index Copernicus
2. 2.А.А.Стенин, В.М.Бурлаков, В.В.Курбанов, М.А.Солдатова Синтез оптимального регулятора состояния в нестационарных системах на базе Функций Уолша. Bulgarian Journal for Engineering Design, issue. Mechanical Engineering Faculty, Technical University-Sofia №25.2015.сс.67-72. (*запропоновано синтез оптимального по витраті енергії регулятора стану лінійних нестационарних систем*) Index Copernicus
3. А.А.Стенин, О.И.Лисовиченко, В.П.Пасько, М.А.Солдатова Оптимизация энергозатрат в динамических системах с последствием. Bulgarian Journal for Engineering Design, issue. Mechanical Engineering Faculty, Technical University-Sofia..№27 .2015 .сс.83-87.(*запропоновано синтез оптимального по витратам палива управління в лінійних динамічних системах*) Index Copernicus
4. А.И.Михалёв.А.А.Стенин, В.П.Пасько, М.А.Солдатова Идентификация квазистационарных систем на базе сплайн-функций и функций Уолша. Системные технологии - Днепр-ск: НМетАУ, ИВК «Системні технології», №5(100).-2015.–сс.53-60(*розроблений алгоритм параметричної ідентифікації квазістаціонарних систем*) Index Copernicus

5. 5. А.А.Стенин, О.И.Лисовиченко, Д.А.Гуменный, М.А.Солдатова-
 Параметрическая идентификация линейных распределенных
 динамических систем (секвентный подход) Bulgarian Journal for
 Engineering Design, issue. Mechanical Engineering Faculty, Technical
 University-Sofia. № 31, 2017.pp.72-77 (*розроблено алгоритм
 ідентифікації параметрів розподілених систем*) Index Copernicus
6. 6.А.А.Стенин, Е.Ю.Мелкумян Писаренко Ю.В. Солдатова М.А.
 Адаптивная параметрическая сплайн-идентификация линейных
 нестационарных систем// Міжвідомчий науково-технічний збірник
 «Адаптивні системи автоматичного управління». – Київ:
 Національний технічний університет України «Київський
 політехнічний інститут», - 2014. - Вип. 1(24).сс.113-121(
*розроблений алгоритм адаптивного вибору шагу дискретизації
 для функцій Уолша*)WorldCat, Google scholar , РІНЦ
7. О.І.Михальов, О.А.Стенін, М.О.Солдатова, О.С.Стенін Модальна
 робастна стабілізація об'єктів керування з параметричною
 невизначеністю// Системні технології. Регіональний міжвузівський
 збірник.- Вип.-№2(115). Дніпро.-2018.сс.61-67 (*розроблений метод
 робастного модального управління*)
8. Е.Ю.Мелкумян, М.А.Солдатова Метод эквивалентного
 преобразования одного класса линейных нестационарных систем\\
 Міжвідомчий науково-технічний збірник «Адаптивні системи
 автоматичного управління». – Київ: Національний технічний
 університет України «Київський політехнічний інститут», - 2015. -
 Вип. 1(26). сс.102-105. (*запропоновано метод еквівалентного
 перетворення*) WorldCat, Google scholar, РІНЦ
9. А.А.Стенин, М.М.Ткач, В.П.Пасько, М.А.Солдатова Методы
 агрегирования переменных в математических моделях
 динамических систем . Міжвідомчий науково-технічний збірник
 «Адаптивні системи автоматичного управління». – Київ:

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», - 2016. - Вип. 1(28).с.129-137.*(запропоновано метод агрегування змінних стану для зниження розмірності системи управління)* WorldCat, Google scholar , РІНЦ

10. 10.А.А. Стенин, В.П. Пасько, Е.Ю. Мелкумян, М.А. Солдатова
Анализ проблемы синтеза систем управления нелинейными динамическими объектами. Міжвідомчий науково-технічний збірник «Адаптивні системи автоматичного управління». – Київ: Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», - 2015. Вип. 2(27).с.101-110.
(формування функціоналів якості нелінійних систем управління) WorldCat, Google scholar , РІНЦ
11. А.І.Мikhalyov, А.А.Стенин, V.N.Ignatenko, М.А.Soldatova, А.С.Стенин
Synthesis of optimal consumption fuels one class of linear nonstationary systems (the method of predicted control) // System technologies. Regional interuniversity collection.-№6 (119) Dnipro.- 2018.pp.64-72 *(запропоновано оптимальний за витратами палива алгоритм управління одним класом лінійних нестационарних систем)* Index Copernicus

i. *Опубліковані праці апробаційного характеру*

12. А.И.Михалев, М.А.Солдатова, А.С.Стенин
Модальный синтез оптимальных законов стабилизации технологических процессов с запаздыванием в контуре управления (матеріали міжнародній науково-технічній конференції «Інформаційні технології в металургії та машинобудуванні» с.17-18), 28-30 березня 2017 р. м.Дніпро *(запропоновано використання методу Бесса для компенсування запізнювання в контурі управління)*

13. Алексієв О.П., Солдатова М. О., Створення програмного забезпечення стабілізації руху безпілотних транспортних засобів (БТЗ) (матеріали науково-методичної конференції «Особливості викладання фахових дисциплін технічних спеціальностей – виклики часу та перспективи» с.116), 21 березня 2017 р., м. Харків *(створення програмного забезпечення стабілізації руху)*
14. В.М.Томашевський, В.П.Пасько, М.О.Солдатова Обобщенная методика идентификации параметров линейных динамических моделей технических систем(матеріали міжнародній науково-технічній конференції “Математичне та імітаційне моделювання систем МОДС '2017”сс/150-154), 26-29 червня 2017,м.Чернігів *(запропонована узагальнена методика параметричної ідентифікації)*
15. М.М.Ткач, В.П.Пасько, М.О.Солдатова Синтез робастного регулятора линейных динамических систем с неопределенностью параметров (матеріали міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні управляючі системи та технології ІУСТ – Одеса – 2017» с.с.100-103), 20-22 вересня 2017 р., м. Одеса *(запропонований модальний синтез робастного регулятора на основі принципу гарантованої динаміки)*

Додаток 4

Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні підсумки досліджень доповідалися і обговорювалися на наступних конференціях:

- Міжнародна науково-технічна конференція «Інформаційні технології в металургії та машинобудуванні» м Дніпропетровськ, 24-26 березня 2015р.
- - Всеукраїнська науково-методична конференція «Особливості викладання фахових дисциплін технічних спеціальностей – виклики часу та перспективи» 21 березня 2017 р., м.Харків
- Міжнародна науково-технічна конференція «Інформаційні технології в металургії та машинобудуванні» м Дніпропетровськ, 28-30 березня 2017р.
- -Міжнародна науково-технічна конференція “Математичне та імітаційне моделювання систем МОДС '2017”, 26-29 червня 2017 г., г. Чернігів
- Міжнародна науково-практична конференція «Інформаційні управляючі системи та технології» (ІУСТ – Одеса – 2017), 20-22 вересня 2017 р.

