НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
Кафедра інформаційної безпеки

«На правах рукопису» «До захисту допущено»

УДК **519.24:004.89** В.о. завідувача кафедри
__________ М.В.Грайворонський
“___” ____________2019 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності: 113 Прикладна математика

на тему: Покращення точності експертних оцінок за допомогою Бутстреп-методу
____

Виконав (-ла): студент 6 курсу, групи ФІ-81мп
(шифр групи)

Чмерук Олександр Миколайович
(прізвище, ім’я, по батькові) (підпис)

Науковий керівник проф. Архипов О.Є. __________________ _________
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Рецензент ____ _________
(посада, науковий ступінь, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) (підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _____________
(підпис)

Київ – 2019 року

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
Кафедра інформаційної безпеки

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою

Спеціальність (освітньо-професійна програма) – 113 Прикладна математика («Математичні методи моделювання, розпізнавання образів та безпеки даних»)

ЗАТВЕРДЖУЮ
В.о. завідувача кафедри

__________ М.В.Грайворонський
(підпис)

«____»_____________2019 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту

____
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема дисертації ____

____

науковий керівник дисертації_____________________________________ ,

____ _____ ,
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «____» _________ 2019 р. № _______

2. Термін подання студентом дисертації __________________

3. Об'єкт дослідження ____

____

4. Вихідні дані ____

____

____

____

5. Перелік завдань, які потрібно розробити ___________________________

____

____

____
____
____

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу ____________________
____
____

7. Орієнтовний перелік публікацій _________________________________
____
____

8. Консультанти розділів дисертації*

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

9. Дата видачі завдання ____

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка

Студент ______________ ______________________
(підпис) (ініціали, прізвище)

Науковий керівник дисертації ______________ ______________________
(підпис) (ініціали, прізвище)

* Консультантом не може бути зазначено наукового керівника магістерської дисертації.

РЕФЕРАТ

Обсяг роботи 68 сторінок, 15 ілюстрацій, 10 таблиць, 1 додаток, 20 джерел літератури.

Об'єктом дослідження є комплексна оцінка вибіркового параметра за результатами його обчислень, отриманими різними методами.

Предметом дослідження є бутстреп-метод як універсальний підхід до комплексування експертних оцінок.

Метою кваліфікаційної роботи є побудова покращеної комплексної (зваженої групової) оцінки за результатами обробки експертних даних різними методами.

Для досягнення мети було використано:

– теоретичні відомості з теорії ймовірностей та математичної статистики для знаходження моделі випадкових похибок групової експертизи та їх коваріаційних параметрів;
– метод імітаційного комп'ютерного моделювання для забезпечення бутстреп-процедури дослідження коваріаційних характеристик похибок оцінювання в результатах оброки експертних даних різними методами.

В результаті проведення імітаційного моделювання було отримано кількісні характеристики методів обробки, побудовано коваріаційні матриці та отримано значення покращеної групової оцінки експертизи, а кінцевим результатом став порівняльний аналіз цих методів та рекомендації щодо застосування розробленої методології.

Результати проведених досліджень можуть знайти своє застосування в різноманітних сферах життєдіяльності, в яких присутні експертні технології як рекомендація стосовно вибору методу обробки експертних даних, для того, щоб забезпечити правильність прийняття рішень.

Перспективи подальших досліджень:

- дослідження механізмів утворення помилок експертів та законів їх розподілу;
- залежність точності методів від числа експертів;

- створити бібліотеку програмних модулів щодо методів обробки експертних оцінок.

МЕТОДИ ОБРОБКИ, ЕКСПЕРТНІ ДАНІ, ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, ГРУПОВА ЕКСПЕРТИЗА, ЕКСПЕРТНІ ОЦІНКИ, БУТСТРЕП-МЕТОД

ABSTRACT

Graduate work contains 68 pages, 15 figures, 10 tables, 1 appendix, 20 references.

The Obligatory Report is a comprehensive assessment of the vibration parameter for the results of calculation, which are rejected by different methods.

The object of the study is a comprehensive evaluation of the sample parameter by the results of its calculations obtained by various methods.

The subject of the study is the bootstrap method as a universal approach to the pooling of peer reviews.

The purpose of qualification work is to build an improved comprehensive (weighted group) assessment of the results of expert data processing by different methods.

To achieve this goal, we used:

- theoretical information on probability theory and mathematical statistics for finding a model of random errors of group examination and their covariance parameters;
- The Computer Simulation Method to provide a bootstrap procedure for investigating the covariance characteristics of estimation errors in the results of expert data processing by various methods.

As a result of simulation, quantitative characteristics of processing methods were obtained, covariance matrices were constructed and values of the improved group assessment of expertise were obtained, and the end result was a comparative analysis of these methods and recommendations for the application of the developed methodology.

The findings of the research may find application in a variety of life spheres, where expert technologies are available as a recommendation for choosing the method of processing expert data, in order to ensure correct decision-making.

Prospects for further research:

- investigation of the mechanisms of experts' mistakes and their distribution laws;
- dependence of the accuracy of the methods on the number of experts;
- create a library of software modules for peer review methods.

METHODS OF PROCESSING, EXPERT DATA, IMITATION MODELLING, DISTRIBUTION OF ERRORS, GROUP EXPERTISE, EXPERT ASSESSMENT, BOOTSTRAP MATHOD

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ

ЗІ – Захист інформації

ЕГ – Експертна група

БОЕ – Багатооб’єктна експертиза

ММП – Метод максимальної правдоподібності

МНК – Метод найменших середніх

МНМ – Метод найменших модулів

АЕ – Аномальні експерти

СКВ – Середньоквадратичне відхилення

УЗМ – Узагальнена змішена модель

МВЗНК – Метод варіаційнозважених найменших квадратів

ГВЧ – Генератор випадкових чисел

ВСТУП

Актуальність роботи. Складність, недостатня повнота й правдивість інформації при розв'язанні широкого спектра завдань нині вимагає застосування експертних технологій, спрямованих на отримання від фахівців інформації, необхідної для формування та ухвалення рішень. Для широкого кола недостатньо формалізованих проблем в різноманітних галузях людської діяльності експертні процедури є ефективним, а в ряді випадків і єдиним засобом їх вирішення. Однак наукові дослідження щодо раціонального проведення експертизи були розпочаті з 1940-х років. Результати цих досліджень дають можливість зробити висновок про те, що на сьогодні експертні оцінки є, в основному, сформованим науковим методом аналізу складних неформалізованих проблем, через те, що досить приманливою стороною експертних методів оцінювання є оперативність, доступність, універсальність і невибагливість в отриманні релевантних відомостей.

Більшість наведених вище особливостей експертного оцінювання зустрічаються в порівняно новій галузі людської діяльності – сфері захисту інформації (ЗІ). В цій області безупинно триває процес примноження та поглиблення знань, структурування та їх класифікація, осмислення різнопланової інформації та формування концептуально-теоретичного базису. З огляду на це, можна стверджувати, що застосування експертних методів в прикладних та дослідницьких аспектах ЗІ досить розповсюджене: оцінювання фахових якостей представників персоналу служби безпеки, традиційні експертизи з визначення ступеню важливості та релевантності відомостей, що можуть містити інформацію з обмеженим доступом, а також при проєктуванні й створенні комплексних систем захисту інформації, при розрахунку інформаційних ризиків тощо [5].

При використанні методу експертних оцінок основним джерелом інформації є експерт – його судження, якісні та кількісні оцінки. Тобто експертні методи ґрунтуються виключно на оцінках експертів, зроблених щодо проблеми, яку вони вичерпно знають [1]. При цьому механізм продукування цих оцінок лишається невизначеним. На жаль, як правило, він невідомий навіть самому експертові, має

виключно індивідуальний, особистий характер і не може бути повторений чи відтворений кимсь іншим [2].

Серед експертних процедур, які застосовуються для вирішення найрізноманітніших завдань, найбільш популярною є колективна (групова) експертиза, яка дозволяє забезпечити високий ступінь точності та об'єктивності отриманих результатів. На жаль, «вузьким місцем» застосування групової експертизи є проблема якості робочої групи експертів. Для того, щоб уникнути цієї проблеми, при формуванні складу експертної групи необхідно дотримуватися певних вимог, зокрема, забезпечити належний рівень компетентності кожного з експертів: брак компетентності хоча б одного з експертів може призвести до появи критичних помилок у даних групової експертизи, як наслідок – суттєві втрати інформації, що в кінцевому випадку призведе до ухвалення хибного рішення.

Тому ефективна, якісна обробка експертних даних значною мірою визначає коректність й правильність всієї експертизи в цілому. В цій ситуації особливу важливість і актуальність набуває *проблема аналізу та обробки експертної інформації*, оскільки виконання саме цих заходів дозволяє забезпечити якість рішень, що приймаються на базі експертної інформації [1].

Об’єкт дослідження – комплексна оцінка вибіркового параметра за результатами отриманими різними методами обробки.

Предмет дослідження – бутстреп-метод як універсальний підхід до комплексування експертних оцінок.

Мета дослідження. Побудова покращеної групової оцінки за результатами обробки експертних даних різними методами.

Найчастіше експертні дані, що у цьому випадку підлягають обробці, представляються у вигляді вектора оцінок, кожна з яких є результатом індивідуальної експертизи.

Виникає необхідність виконати наступні завдання:

а) дослідити матеріали щодо поширених методів керування вибіркою, які могли б бути використані в задачі обробки експертних даних;

б) визначитися з методом керування вибірки для побудови комплексної оцінки експертизи;

в) запрограмувати й налаштувати систему імітаційного моделювання;

г) дослідити кількісні характеристики методів обробки, побудувати коваріаційні матриці та значення покращеної групової оцінки експертизи, за допомогою імітаційного комп'ютерного моделювання;

д) здійснити порівняльний аналіз методів та навести рекомендації щодо застосування розробленої методології.

Методи дослідження. Головним методом дослідження є метод комп'ютерного імітацийного моделювання та методи обробки експертних даних, а також бутстреп як базовий метод керування вибіркою.

Наукова новизна одержаних результатів. Розроблений та реалізований метод побудови бутстреп-вибірок експертних даних.

Практичне значення одержаних результатів. Методика обробки може бути використана для обробки будь-якої сесійної сукупності експертних даних.

Публікації. Науковий журнал «Молодий вчений» №10 (74) жовтень 2019 року.

1 ІТЕРАТИВНИЙ ПІДХІД ДО ОБРОБКИ ДАНИХ ЕКСПЕРТНОГО ОЦІНЮВАННЯ

1.1 Загальний аналіз ітеративного підходу до обробки даних експертного оцінювання

Серед множини експертних технологій, що залучаються для вирішення різноманітних завдань, можна виділити досить розповсюджений вид групової (колективної) експертизи, який в роботах [3, 4] отримав назву багатооб'єктної експертизи (БОЕ). У БОЕ бере участь група з N експертів – експертна група (далі – ЕГ). Експерт надає індивідуальні експертні оцінки кожному з M об'єктів, що представлені до експертизи, тобто для БОЕ характерна сесійність: в ході роботи однієї і тієї ж ЕГ з N експертів цим складом експертів здійснюється серія з M групових експертиз – експертна сесія. Отримані в ході індивідуальних експертиз підмножини з експертних оцінок зводяться в загальну матрицю даних, що підлягають наступній спільній обробці:

$$Z = \left[z_{ij}\right] = \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{M1} & \cdots & z_{MN} \end{pmatrix} = [Z_1, Z_2, \dots, Z_N]. \quad (1.1)$$

Результати індивідуальної експертизи, здійсненої j-м експертом, являють собою випадкову послідовність $Z_j = \left[Z_1, Z_2, \dots, Z_{Mj}\right]^T$, кожен елемент якої містить інформативну складову x_{i0}, спільну для всіх експертних оцінок z_{i0}, $j = \overline{1, N}$ і випадкову похибку e_{ij}, характеристики якої індивідуальні у кожного конкретного j-ого експерта:

$$z_{i0} = x_{i0} + \varepsilon_{ij}, i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N}. \quad (1.2)$$

Очевидно, що мета обробки даних кожної окремої групової експертизи – визначення невідомого значення x_{i0}. Для досягнення цієї мети необхідно вибрати метод обробки даних експертизи. Процедура вибору методу включає в себе кілька етапів.

Перший – складання (фіксація) описової моделі формування даних експертного опитування, що включає відомості про професійно-компетентнісні характеристики експертів, припущення про механізми генерації помилок експертів і властивості цих помилок.

Другий етап – розробка (на основі відомостей першого етапу) формально-теоретичної моделі помилок даних групової експертизи.

Третій етап – вибір, з урахуванням характеристик помилок і виду їх модельного уявлення методології обробки даних.

Четвертий етап – безпосередній вибір (синтез) методу обробки даних групової експертизи. Вибір методу зазвичай здійснюється виходячи з формально-теоретичних моделей і методологічних положень, що описують механізм формування даних групової експертизи (зокрема, помилок цих даних).

На жаль, нині в практиці обробки експертних даних склалася ситуація, в якій точності аспекти обробки експертних даних, бувши формально пріоритетними, фактично поступаються місцем прагненням обробника до спрощення процедури обробки, мінімізації інтелектуальних витрат для її оптимізації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій свідчить, що у сфері обробки експертних даних вагомі результати як в теоретичному, так і в практичному аспекті представлено у роботах В.Є. Снитюка, В.В. Циганка, Г.М. Гнатієнка, О.М. Цимбалюка, В.Г. Тоценка, Б.Є. Грабовецького, О.І. Орлова, Б.Г. Літвака.

Характерною рисою чинних підходів до обробки даних експертизи є статичність обраної моделі даних, що обумовлює сталість (незмінність) методології та методів обробки. Проте реалізація обробки даних зумовлює появу певної додаткової інформації, яка, зокрема, дозволяє скорегувати та уточнити відомості щодо моделі помилок даних, компетентності експертів тощо, і в кінцевому підсумку робить можливим побудову якіснішої технології обробки.

Виходом із ситуації є застосування ітераційного підходу до обробки даних, суть якого полягає в вилученні з оброблюваної сукупності даних додаткової інформації, яка так чи інакше, яка могла б заповнити дефіцит відсутніх апріорних відомостей, що призводить до підвищення ефективності виконуваної обробки

внаслідок вдосконалення структури й функцій елементів вихідної процедури обробки.

Введена для цього рівня описова модель ЕГ має ідеалізований характер: передбачається рівний і високий рівень компетентності складу експертів, що забезпечує незміщеність індивідуальних експертних оцінок з незначними незалежними випадковими помилками, мають довільний розподіл з приблизно однаковими дисперсіями.

Ухвалення подібної ідеалізованої моделі дозволяє стверджувати, що помилки вимірювань розподілені за нормальним законом, тобто:

$$g_i(\Delta_i) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta_i^2}{2\sigma_i^2}},$$

Допустимо, що середньоквадратична помилка σ_i кожного виміру однакова для всіх вимірювань, з точки зору проведення експертизи, маємо групу експертів з однаковою компетентністю, тому що компетентність експерта визначається рівнем його похибки. У цьому випадку функція правдоподібності має вигляд [5]:

$$G = \prod_{i=1}^{N} g_i(\Delta_i) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\Delta_i^2},$$

Очевидно, що G досягає максимуму, коли $\sum_{i=1}^{N}\Delta_i^2$ досягає мінімуму. Таким чином, у даному випадку, щоб отримати оцінки максимальної точності, треба мінімізувати суму квадратів нев’язок.

Якщо точності окремих вимірів різняться, так що

$$G = \frac{1}{\prod_{i=1}^{N}\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\sum_{i=1}^{N}\frac{\Delta_i^2}{2\sigma_i^2}},$$

то для досягнення максимальної правдоподібності оцінки, необхідно мінімізувати зважену суму квадратів нев’язок:

$$F = \sum_{i=1}^{N} p_i\Delta_i^2,$$

де $\mathrm{p_i} = \frac{1}{\sigma_i^2}$ називається вагою i-го вимірювання.

Оцінки, отримані в результаті мінімізації зваженої суми квадратів нев'язок, мають назву оцінок метода найменших квадратів (МНК), а відповідно до специфіки задання даних експертизи – це означає, що у якості оптимальної оцінки використовуємо метод середнього арифметичного результатів експертизи.

Таким чином, на нульовому рівні адаптації обробки експертних даних отриманню підсумкового результату передує прийняття наступного набору тверджень:

- змістовно-описова модель ЕГ визначається у вигляді сукупності експертів з однаково високим рівнем компетентності;
- модельному розподілу помилок експертів відповідає нормальний розподіл (закон Гаусса);
- з огляду на використання статистичних моделей для опису помилок даних використовується методологія ММП, що, з урахуванням викладених вище тверджень, призводить до МНК, причому МНК-оцінкою невідомого значення x_{i0} в даному випадку середньоарифметичне значення $\bar{z}_i$ елементів i-го рядки матриці Z.

Простий і швидкий спосіб вирішення описаного конфлікту полягає в суб'єктивному домислені відсутньої інформації, що дозволяє конкретизувати й звузити невизначеність у вихідному визначенні завдання і штучно сформувати інформаційний базис, що забезпечує доказовість заздалегідь передбаченого рішення. Здійснюється підбір на перший погляд правдоподібних або «нейтральних» припущень, що ведуть до досить довільного опису помилок даних, до прямої фальсифікації формально-теоретичної моделі помилок і, як наслідок, – до імітації доказової оптимальності заздалегідь обраного методу обробки.

Один з найбільш поширених варіантів реалізації цього способу – легендування нормальності помилок в експертних даних, свідомо веде до найпростішого, але в багатьох випадках не кращого вирішення завдання оптимізації – обчислення вибіркового середнього.

1.2 Перша ітерація обробки

Досвід практичної роботи свідчить про те, що представлену вище описову модель ЕГ фактично не можна реалізувати, тому що вкрай складно підібрати групу висококваліфікованих експертів, близьких один одному за рівнем своєї компетентності. Групи, що включають експертів різного рівня, допускають кілька модельних описів.

По-перше, це так звана сумішева модель ЕГ, що припускає наявність двох груп експертів: кластера висококваліфікованих фахівців і групи «аномальних» експертів (АЕ), експертні оцінки яких «випадають» із загальної сукупності даних. Відповідно експертні дані, отримані від АЕ, можуть спотворювати модель розподілу решти сукупності вибіркових даних. Ідентифікація АЕ й усунення із загальної матриці всіх належних їм даних переводить сумішеву в описову модель нульового рівня адаптації. Однак процедура ідентифікації АЕ, зазвичай спирається на застосування суб'єктивних рішень і евристичних методів аналізу, і є досить трудомісткою і суперечливою, через що не часто застосовується на практиці.

Більш перспективною є узагальнена змішана модель (УЗМ), яка описує реальність потрапляння у склад ЕГ експертів із різним рівнем компетентності й, як наслідок, наявність значущих відмінностей в рівнях $\sigma_{\varepsilon j}^2$ дисперсій помилок експертів (гетероскедастичність помилок).

У загальному випадку УЗМ передбачає існування множини можливих індивідуальних (приватних) моделей розподілу помилок експертів, що обумовлює проблематичність побудови деякого універсального статистичного підходу до обробки експертних даних. Однак, залишаючись в рамках дуже поширеного припущення про нормальність розподілу помилок кожного експерта окремо, гетероскедастичності даних у вибірці-рядку $Z_i = \left[z_{i1,} z_{i2,\dots,} z_{iN}\right]$ можна трактувати як наслідок випадкового варіювання дисперсії $\sum_{\varepsilon}^2$ в законі нормального розподілу:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\Sigma_{\varepsilon}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\Sigma_{\varepsilon}^2}}, \tag{1.3}$$

в якому середньоквадратичне відхилення (СКВ) $\sum_{\varepsilon}$ входить в якості випадкового параметра. Реалізація значень цього параметра, що визначає рівень компетентності конкретного експерта, відбувається в момент включення відповідного експерта в ЕГ. В результаті для ЕГ отримуємо вектор-рядок реалізацій приватних значень СКВ $\left[\sigma_{\varepsilon 1}, \sigma_{\varepsilon 2}, \sigma_{\varepsilon 3,\dots,}\sigma_{\varepsilon N}\right]$, що характеризують компетентнісний склад ЕГ. З огляду на те, що СКВ - параметр масштабу, випадкову похибку довільної групової експертизи можна промоделювати [1] добутком двох взаємно незалежних випадкових величин $\sum_{s}$ і E_s:

$$E = \sum_{s} E_s, \tag{1.4}$$

де E_s - випадкова величина, яка має стандартний нормальний розподіл:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\varepsilon_s^2}, \tag{1.5}$$

для розподілу щільності ймовірності випадкової величини E справедливим є наступне співвідношення:

$$f(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma_\varepsilon) f_s\left(\frac{\varepsilon_s}{\sigma_s}\right) \frac{d\sigma_s}{|\sigma_\varepsilon|}, \tag{1.6}$$

задання щільності ймовірностей $f(\sigma_\varepsilon)$ здійснюється виходячи з деяких правдоподібних (логічних) припущень про компетентнісні характеристики експертів, включених до складу ЕГ. Зокрема, неспроможним є припущення про існування ЕГ з абсолютно компетентних експертів, судження (оцінки) яких не містять помилок (тобто СКВ їх помилок дорівнює 0). Точно також малоймовірно (при більш-менш відповідальному підборі складу експертів) переважання в складі ЕГ аномальних експертів, для яких характерний дуже високий рівень помилок. Зате цілком правдоподібно наявність в складі ЕГ ряду достатньо кваліфікованих фахівців, чиї СКВ локалізуються в області значень праворуч від точки $\sigma_s = 0$ у вигляді деякого одно екстремального фрагмента щільності ймовірності $f(\sigma_\varepsilon)$. Значення і стан цього екстремуму залежать від середнього рівня компетентності експертів, що входять в ЕГ: зниження цього рівня зміщує екстремум вправо, розширюючи область локалізації можливих значень СКВ в сторону великих відхилень. В цілому для опису рівня розкиду значень СКВ помилок експертів,

включених до складу ЕГ, досить адекватним представляється його апроксимація розподілом Релея:

$$f(\sigma_\varepsilon) = \frac{\sigma_s}{\Delta^2} e^{-\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\Delta^2}}, \quad (1.7)$$

який залежить від одного параметра Δ, що представляє моду цього розподілу. При малих значеннях Δ розподіл середньоквадратичних відхилень σ_s експертів, що входять до складу ЕГ, в основному компактно локалізується уздовж осі абсцис праворуч від початку координат (Рисунок 1.1), що характерно для ЕГ, що складається з кваліфікованих висококомпетентних експертів. З ростом значень Δ загальний рівень компетентності групи знижується внаслідок появи експертів, що допускають високий рівень розкиду помилок, а при $\Delta \geq 2$ в складі групи з досить великою ймовірністю можуть виявитися «аномальні» експерти.

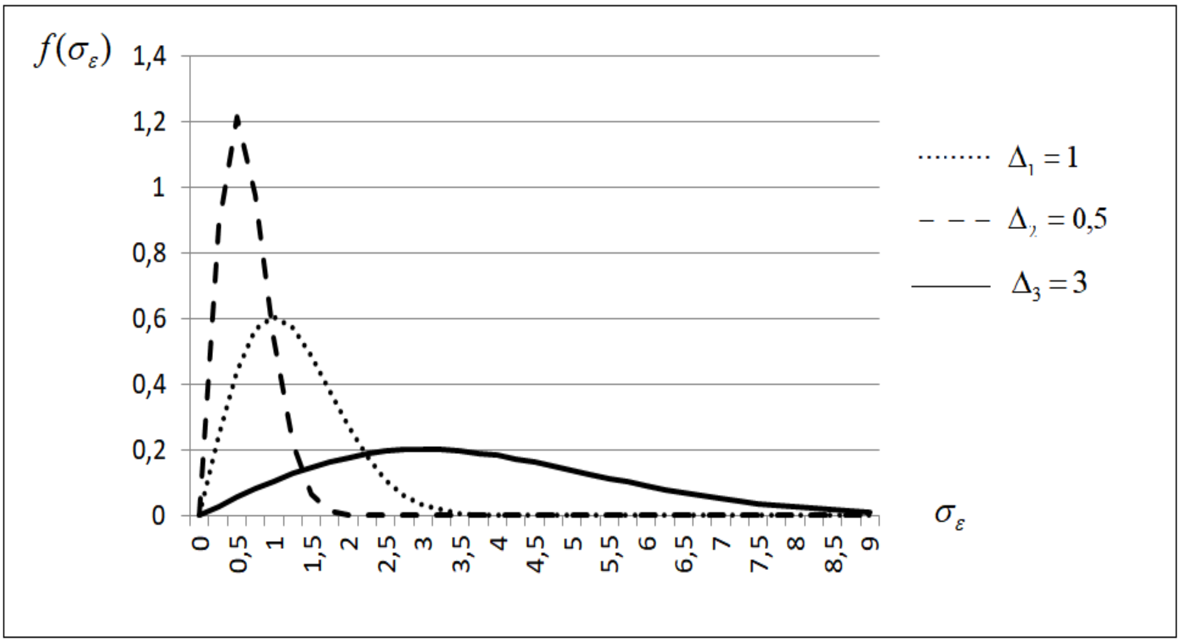


Рисунок 1.1 – Апроксимація разподілу $f(\sigma_s)$щільності ймовірностей СКВ помилок експертів законом Релея для різних значень параметра Δ

Підставляючи у вираз (1.16) співвідношення для щільностей (1.5) та (1.7), отримуємо:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\Delta^2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\Delta^2}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}} d\sigma_\varepsilon. \quad (1.8)$$

Інтеграл (1.8) є окремим випадком табличного інтегралу [4 , с. 356, формула 3.478.4], знаходження якого потребує обчислення циліндричних функцій. Опускаючи проміжні обчислення, наводимо остаточний результат [6]:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2\Delta} e^{-\frac{|\varepsilon|}{\Delta}}, \tag{1.9}$$

що відповідає виразу для густини випадкової величини, розподіленої за законом Лапласа (Рисунок 1.2). На відміну від виразу (1.3), формула (1.9) вже не містить випадкового параметра.

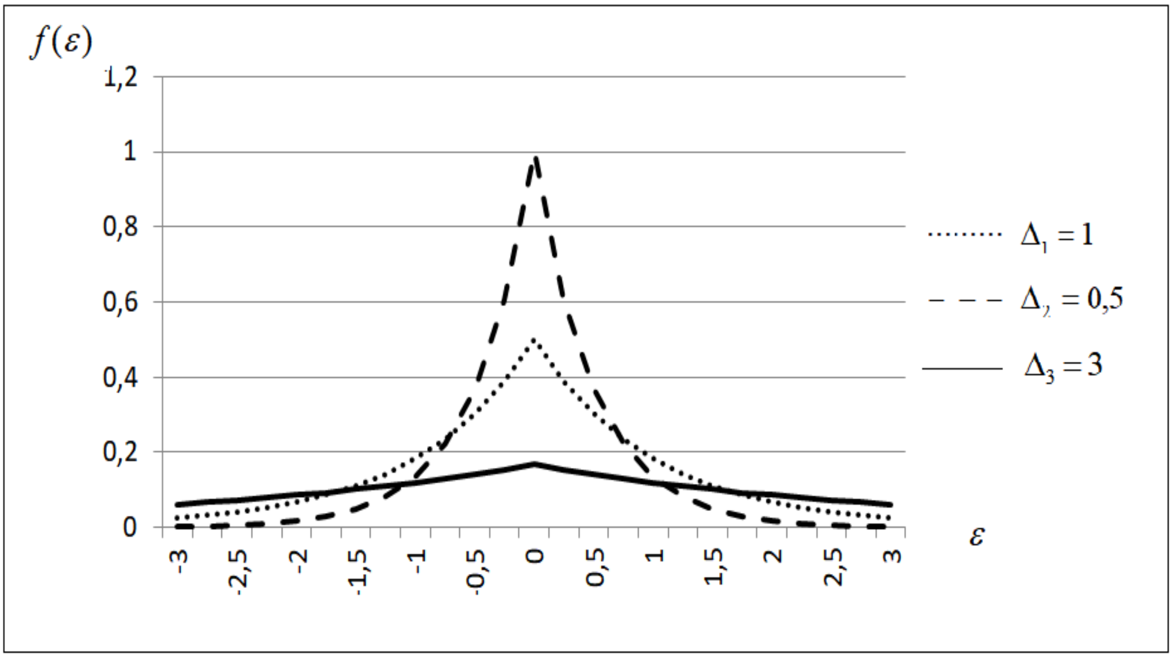


Рисунок 1.2 – Розподіл f(ε) помилок експертів (закон Лапласа) для різних значень параметра Δ

Таким чином, результати групової експертизи, виконаної групою експертів з різним рівнем компетентності, представлені вектором-рядком $Z_i = [z_{i1,} z_{i2,\dots,} z_{iN}]$, можна розглядати як вибірку даних, помилки спостереження яких є реалізаціями випадкової величини, що описується сумісним розподілом рівноможливих нормально розподілених елементів, СКВ яких змінюється випадковим чином відповідно до закону Релея. В кінцевому підсумку ці помилки виявляються розподіленими за законом Лапласа (1.9), тобто відхід від ідеалізованого уявлення компетентнісних характеристик ЕГ і спроба адаптації до реальності призводить до зміни статистичної моделі помилок експертів. При цьому, продовжуючи аналіз

даних в рамках методології ММП, приходимо до нового результату: для Лапласового розподілу помилок експертних даних найкращою вибірковою оцінкою значення x_{i0} є медіана $z_{i\,med}$, так звана оцінка методу найменших модулів (МНМ-оцінка), тому що мінімізує значення статистики виду:

$$Q_{\text{мнм}} = \sum_{j=1}^{N} \left| z_{ij} - z_{i\,med} \right|. \tag{1.10}$$

З причини неможливості безпосередньої реалізації аналітичної процедури обчислення МНМ-оцінок, в ряді випадків в якості оцінки виступає вибіркова медіана – середній елемент ранжированої сукупності значень експертних даних (при непарному числі експертів) або пів сума пари середніх елементів (при парному). На жаль, при малих значеннях застосування вибіркової медіани може призводити до значних похибок, більш точні результати виходять при аналітичному знаходженні МНМ-оцінок за допомогою ітеративного варіаційно-зваженого МНК.

Метод ВЗНК – являє собою ітеративну процедуру, що реалізує обчислення оцінок за МНМ (дає оцінку справжньої медіани). У загальному вигляді цей метод був запропонований В.І. Мудровим та В. Л. Кушко в роботі [7], у свою чергу його вдалося адаптувати для досліджуваної задачі обробки експертних оцінок [5].

Нехай ω_i – i-та вага, а Q – критеріальна статистика, яка визначаєтьсянаступним чином:

$$Q = \sum_i \omega_i \, (x_i - x_0)^2 = \sum_i \omega_i \left(x_i^2 + x_0^2 + 2x_0 x_i \right).$$

Для отримання результату, мінімізуємо її:

$$\frac{dQ}{dx_0} = -2 \sum_i \omega_i \, (x_i - x_0) = 0.$$

$$\sum_i \omega_i \, x_i = x_0 \sum_i \omega_i \,, x_0 = \frac{1}{\sum_i \omega_i} \sum_i \omega_i \, x_i.$$

Якщо $\omega_i = \frac{1}{|\Delta_i|} = \frac{1}{\left| x_i - x_0^j \right|}$,

то $x_0^{(j)} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{\left| x_i - x_0^{(j-1)} \right|}} \sum_i \frac{1}{\left| x_i - x_0^{(j-1)} \right|} x_i.$

Перший крок, $j = 1$:

у цьому випадку $\omega_i = 1$:

$$x_0^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\omega_i^{(1)} = \frac{1}{\left|x_i - x_0^{(1)}\right|},$$

$$v_i = \frac{\omega_i}{\sum_i \omega_i}.$$

Другий крок, $j = 2$:

$$x_0^{(2)} = \frac{1}{\sum_i \omega_i^{(1)}}\sum_i x_i \omega_i^{(1)},$$

$$\omega_i^{(2)} = \frac{1}{\left|x_i - x_0^{(2)}\right|}.$$

$j -$ й крок:

$$x_0^{(j)} = \frac{1}{\sum_i \omega_i^{(j-1)}}\sum_i x_i \omega_i^{(j-1)}.$$

$$Q^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left|x_i - x_0^{(j-1)}\right|} \frac{\left(x_i - x_0^{(j)}\right)^2}{\varepsilon^j} = \sum_{i=1}^{n}\left|x_i - x_0^{(j)}\right| = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^{(j)}{}_i.$$

Якщо $\left|x_i^{(j)} - x_0^{(j)}\right| \approx \left|x_i^{(j-1)} - x_0^{(j-1)}\right|$, то закінчення ітеративного цикла, аналогічно: $x_0^{(j-1)} \approx x_0^{(j)}$ [5].

Таким чином, перший рівень адаптації характеризується відходом від ідеалізованого опису складу ЕГ, спробою обліку існування реальних відмінностей в компетентностях експертів, що приводить в підсумку до трансформації модельного закону розподілу елементів вибірки-рядка $Z_i = \left[z_{i1,} z_{i2,\dots,} z_{iN}\right]$, з нормального в закон Лапласа, що, відповідно до методології ПМП, обумовлює

зміни застосовуваного методу оцінювання: перехід від МНК-до МНМ-оцінкам. На жаль, обґрунтування закону Лапласа спирається на суб'єктивне рішення, пов'язане з припущенням про можливість опису випадкового розкиду СКВ помилок експертів законом Релея.

1.2 Друга ітерація обробки

При реалізації обробки даних з нульовим і першим рівнем адаптації для вибору методу обробки використовувалася тільки інформація загального характеру про можливі особливості механізму формування випадкових помилок в даних групової експертизи. Однак проведення експертної сесії й, як результат, наявність повного обсягу відомостей про проведену в її рамках серії групових експертиз, представлених матрицею Z, дозволяє частково відмовитися від використання ймовірнісно-статистичного підходу до опису та обробки експертних даних. Пропонується персоніфікувати підхід до обробки даних групової експертизи, застосувавши простіший і прозоріший метод зваженого середнього, де ваги залежать від ступеня довіри до інформації, одержуваної від кожного конкретного експерта. Основна проблема, що виникає в цьому випадку, – об'єктивне призначення ваг.

При визначенні ваг відштовхуємось від того, що кожен вектор-стовпець $Z_j = \left[Z_1, Z_2, \dots, Z_{Mj}\right]^T$, $j = \overline{1, N}$матриці Z, складений з результатів індивідуальних експертиз, проведених j-м експертом, містить інформацію двох видів: що є метою експертизи «правильну» детерміновану інформацію x_{j0} про кожний j-й об’єкт, невідому, але загальну для всіх експертів, інформацію про індивідуальні випадкові помилки експерта, що характеризують рівень його компетентності. При відсутності помилок експертів результати індивідуальних експертиз повинні збігатися і могли б бути представлені одною точкою $X_0 = [x_{10}, x_{20}, \dots, x_{M0}]^T$в M-мірному просторі експертної сесії. Однак наявність помилок експертів призводить до розширення цієї точки в кластера, що містить N точок образів експертів. При адекватному підборі складу ЕГ щільність кластера неоднорідна і максимальна в околі Z_0. Відстань r_j від точки $X_0 = [x_{10}, x_{20}, \dots, x_{M0}]^T$ до точки-образа j-ого експерта характеризує рівень компетентності цього експерта і використовується при розрахунку показника компетентності [8]:

$$c_j = \frac{1}{(1-B)e^{b_0 r_j} + B}. \tag{1.11}$$

Формула (1.11) визначає структуру шкального перетворення $c_j = f(r_j)$, можливі (рекомендовані [9]) значення параметрів: $b_0 = 15$, $B = 0{,}967$. Оцінки відстані r_j теоретично можуть лежати в діапазоні від 0 до значень, близьких до ∞, а відповідні їм значення показника компетентності c_j змінюються в діапазоні від 1 до 0 (повна, абсолютна некомпетентність). Знання елементів вектора компетентностей експертів $C = [c_{1,\ldots,}c_N]$, дозволяє розрахувати підсумкові середньозважені оцінки для кожного i-ого об'єкта групової експертизи:

$$\tilde{z}_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} c_j z_{ij}}{\sum_{j=1}^{N} c_j} = \sum_{j=1}^{N} w_j z_{ij},\ i = \overline{1, M}\,, \tag{1.12}$$

де $w_j = c_j / \sum_{j=1}^{N} c_j$, $j = \overline{1, N}$ – вагові коефіцієнти, що враховують співвідношення рівнів компетентності експертів. При «ідеальному» підборі експертів, що входять до складу ЕГ, тобто для випадка $c_j = 1$, $j = \overline{1, N}$, всі ваги виявляються одиничними: $w_j = 1$, оцінки середнього і зваженого середнього збігаються.

Таким чином, другий рівень адаптації забезпечує досить високу конкретизацію відомостей про експертів, що дозволяє виключити застосування теоретико-імовірнісних моделей як для опису характеристик ЕГ, так і для опису властивостей вихідних даних. Відповідно, замість методології ММП використовується поняття цінності (корисності, важливості) відомостей, одержуваних від експертів, що базується на оцінках їх компетентності, що перераховуються в систему персоніфікованих вагових коефіцієнтів w_j, $j = \overline{1, N}$, дозволяючи отримати прості й наочні середньозважені результівні оцінки групової експертизи для кожного з об'єктів, які піддаються експертизі.

Матеріали викладені на даному кроці ітерації були досліджені й перевірені за допомогою імітаційного моделювання в бакалаврській роботі [5] відповідно до схеми:

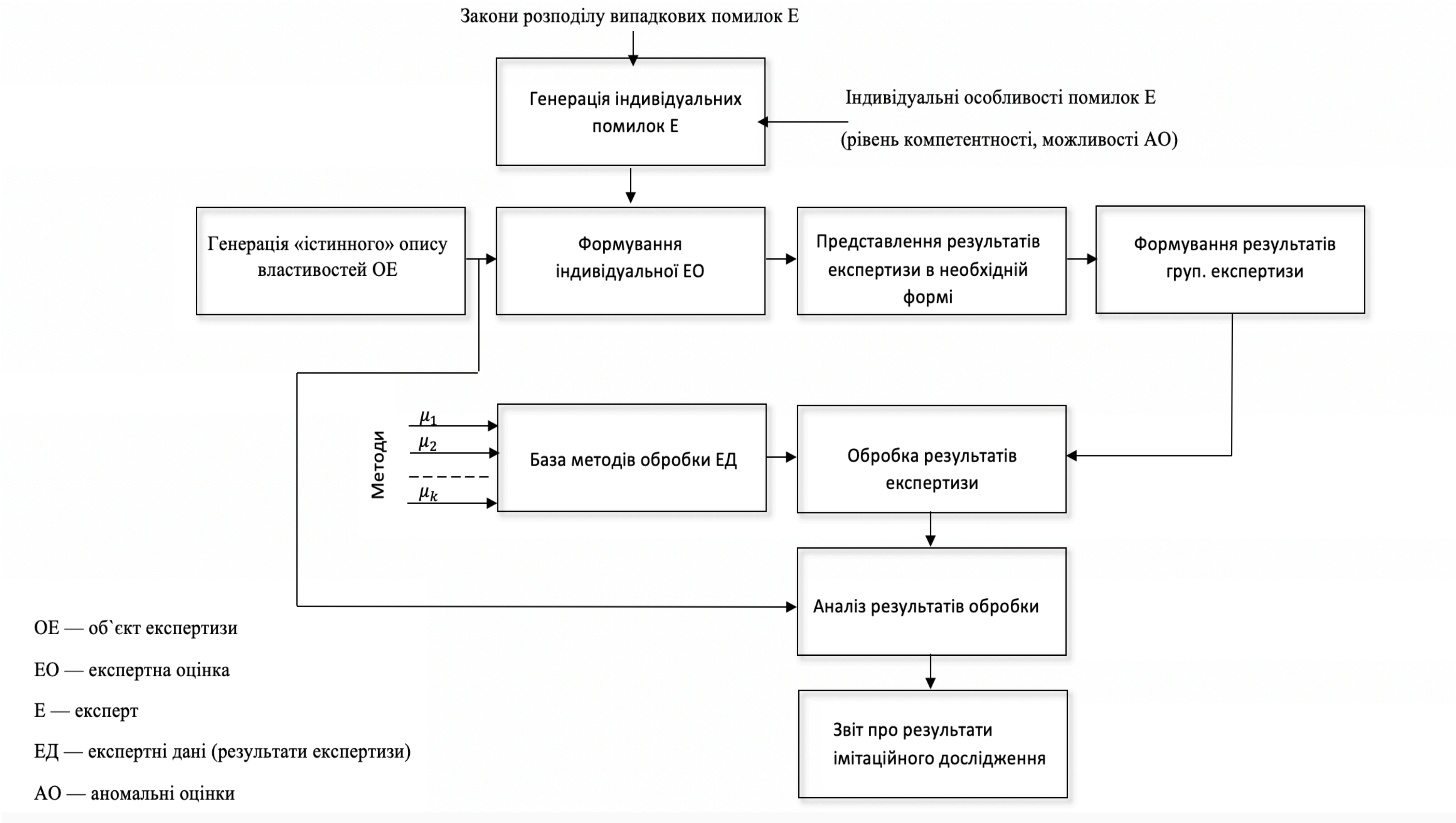


Рисунок 1.1 – Схема дослідження методом імітаційного моделювання бакалаврської роботи [5]

1.3 Третя ітерація обробки

Для цього рівня адаптації необхідна наявність точних значень параметрів (показників), які оцінювалися на попередніх сеансах експертної сесії.

Згідно з методологією ММП, МНК-оцінка являє собою оптимальну оцінку невідомого «справжнього» значення x_{i0} при нормальній (Гаусовій) моделі розподілу помилок експертів в елементах вибірки-рядка $Z_i = \left[z_{i1,}z_{i2,\dots,}z_{iN}\right]$ в разі розподілу цих помилок за законом Лапласа оптимальною стає МНМ-оцінка. Однак розподіл помилок в даних реальної групової експертизи так чи інакше завжди відрізняється від модельних розподілів, тому оцінки $\overline{z_i}$, $z_{i\,med}$ є квазіоптимальними, причому оцінити ступінь втрати оптимальності не представляється можливим. Проте, ґрунтуючись на матеріалах, представлених в [9], на базі отриманих квазіоптимальних оцінках можна побудувати так звану групову (комплексну) оцінку z_{igr}, дисперсія якої в найгіршому випадку не перевищить меншу з дисперсій вихідних оцінок. Інформація, необхідна для формування оцінки z_{igr} задається коваріаційною матрицею помилок методів оцінювання (тобто помилок МНК-оцінок $\overline{z_i}$ і МНМ-оцінок $z_{i\,med}$, $i = \overline{1, M}$) вида:

$$COV = \begin{bmatrix} D\{\bar{z}\} & cov \\ cov & D\{z_{med}\} \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

де $D\{\dots\}$ і cov – дисперсія і коваріація помилок, які розраховуються за формулами:

$$D\{\bar{z}\} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(\overline{z_i} - x_{i0})^2, \tag{1.14}$$

$$D\{z_{med}\} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(z_{i\,med} - x_{i0})^2, \tag{1.15}$$

$$cov = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(\overline{z_i} - x_{i0})\,(z_{i\,med} - x_{i0}). \tag{1.16}$$

За даними коваріаційної матриці COV розраховуються загальні ваги для МНК та МНМ-оцінок і значення групової оцінки для кожної окремої групової експертизи:

$$z_{igr} = w_1\bar{z}_i + w_1 z_{imed}, \tag{1.17}$$

де

$$w_1 = \frac{D\{z_{med}\} - cov}{D\{\bar{z}\} + D\{z_{med}\} - 2cov}, \tag{1.18}$$

$$w_2 = \frac{D\{\bar{z}\} - cov}{D\{\bar{z}\} + D\{z_{med}\} - 2cov}. \tag{1.19}$$

Дисперсія групової оцінки визначається за формулою:

$$D\{z_{gr}\} = w_1^2 D\{\bar{z}\} + w_2^2 D\{z_{med}\} + 2w_1 w_2 cov. \tag{1.20}$$

Знаходження значень елементів матриці COV виявляється можливим тільки при наявності сукупності даних, що включає безлічі пар оцінок $\bar{z}_i$, z_{med}, $i = \overline{1, M}$, отриманих раніше в ході порядкової обробки матриці Z на двох перших рівнях адаптації, і вектора $X_0 = [x_{10}, x_{20}, \dots, x_{M0}]^T$ точних апостеріорного значень прогнозу. Спільна обробка цих відомостей за формулами (1.14) – (1.16) дозволяє створити додаткову інформацію для визначення елементів матриці COV використовуваних далі для обчислення групової оцінки z_{igr}. Зауважимо, що для обробки даних групової експертизи, представлених вибіркою-рядком $z_i = [z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{iN}]$ можуть залучатися поряд з МНК, МНМ і інші методи. У загальному випадку результатом застосування K різних методів буде безліч оцінок $\tilde{z}_{ik}$, $k = \overline{1, K}$, де k – порядковий номер методу обробки, яким була розрахована відповідна k-а оцінка. Для отриманої множини значень $\tilde{z}_{ik}, k = \overline{1, K}$, також можливе формування групової (комплексної) оцінки z_{igr}:

$$z_{igr} = \sum_{k=1}^{K} w_k \tilde{z}_{ik}. \tag{1.21}$$

Для знаходження групової оцінки (1.21) використовується наступне робоче співвідношення [9]:

$$W = \frac{COV^{-1}}{\Uparrow^T COV^{-1} \Uparrow}, \tag{1.22}$$

$$D\{z_{gr}\} = W^T COV\, W, \tag{1.23}$$

де $W = [w_1, w_2, \dots, w_K]^T$ - вектор вагових коефіцієнтів методів обробки, COV - коваріаційна матриця помилок методів обробки (аналогічна матриці (1.13), симетрична, розмірністю $K \times K$), $\Uparrow = [1,1, \dots, 1]^T$ – вектор-стовпець довжини K, всі елементи якого – одиниці.

Наведемо математичне доведення представлених вище формул.

Зважено-групові оцінки параметрів моделі.

A – вектор невідомих параметрів моделі

$\widetilde{A_J}$ – вектор параметрів, які оцінені j-м методом, наприклад, $\widetilde{A_{\text{МНК}}} = \widetilde{A_1}$, $\widetilde{A_{\text{МНМ}}} = \widetilde{A_2}$,…

Розглянемо деякий одиничний параметр вектора A і його оцінки $a_1, a_1, \ldots$, які розраховані різними методами, тобто $a_1 = a_{\text{МНК}}, a_2 = a_{\text{МНМ}}, \ldots$

Припустимо, що всі оцінки мають певні помилки оцінювання, що усереднюючи оцінки цього параметра, відповідно різними методами, можна у підсумку отримати більш точне значення.

Усереднення здійснюємо з вагами:

$\tilde{\alpha} = \sum_j \omega_j a_j -$ групова оцінка певного параметра α вектора A.

Вимоги до оцінок:

1) Незміщеність: $M\{a_j\} = \alpha, \forall j, \sum_j^H \omega_j \equiv 1,$ де H – загальна кількість застосованих методів.
   Більш строго це твердження виглядає наступним чином:
   припустимо, що часткові оцінки a_j незміщені, тобто $M\{a_j\} = \alpha$, тоді $M\{\sum_j \omega_j a_j\} = \sum_j M\{a_j\} = \alpha \sum_j \omega_j = \alpha.$
2) Мінімальність дисперсії оцінки $\tilde{\alpha}$.
   Для цього спочатку запишемо в загальному вигляді вираз для дисперсії $\tilde{\alpha}$ (із врахуванням її незміщенності):

$$D\{\tilde{\alpha}\} = M\{\widetilde{(\alpha} - \alpha)^2\} = M\left\{\left(\sum_j a_j\omega_j - \alpha\right)^2\right\}$$

$$= M\left\{\left(\sum_j a_j\omega_j - \alpha\sum_j \omega_j\right)^2\right\} = M\left\{\left(\sum_j (a_j - \alpha)\omega_j\right)^2\right\}$$

$$= M\left\{\left(\sum_j \delta_j\omega_j\right)^2\right\} = M\{(\Delta^T\omega)^2\} = M\{(\Delta^T\omega)^T\Delta^T\omega\}$$

$$= M\{\omega^T\Delta\Delta^T\omega\} = \omega^T M\{\Delta\Delta^T\}\omega = \omega D\omega.$$

Запис є достатньо громістким, тому введемо наступні позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 - \alpha \\ \vdots \\ a_H - \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_H \end{vmatrix},$$

$$W = \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_H \end{vmatrix}.$$

a_j – випадкова величина, оцінки якої отримуються для j-го метода.

Якщо врахувати, що

$$D = M\{\Delta\Delta^T\} = M\left\{\begin{vmatrix} \delta_1^2 & \delta_1\delta_2 \cdots \delta_1\delta_H \\ \vdots & \dots \; \cdots \; \dots \\ \delta_H\delta_1 & \dots \; \cdots \; \delta_H{}^2 \end{vmatrix}\right\} = \left\{\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & cov_{12} \cdots cov_{1H} \\ \vdots & \dots \; \cdots \; \dots \\ cov_{H1} & \dots \; \cdots cov_{HH} \end{vmatrix}\right\} -$$

матриця дисперсій (квадратна та симетрична, тобто $D = D^T$).

Запишемо вираз для дисперсії $D(\tilde{\alpha})$ в компактній матричній формі:

$$D(\tilde{\alpha}) = W^T D W.$$

Мінімізація дисперсії $D(\tilde{\alpha})$ з врахуванням умови незміщеності – типова задача на умовний екстремум.

Введемо одиничний вектор стовпець:

$$I = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix},$$

що має розмірність H (тобто H одиниць).

Використаємо метод невизначених множників Лагранжа – пошук екстремуму при наявності умови, тобто пошук умовного екстремуму. Умову представляємо в неявній формі, тобто не у вигляді $\sum_j \omega = 1$, а $\sum_j \omega - 1 = 0$, тоді відповідно до методу невизначених множників Лагранжа, отримуємо мінімізований функціонал:

$L = W^T D W + \lambda(W^T I - 1)$ – функція Лагранжа, де $W^T I - 1$ – записаний в неявній формі вираз $\sum_j \omega - 1 = 0$, λ – невизначений множник Лагранжа.

Наступним кроком, виконуючи пошук екстремума L по складовим вектора W та множнику λ, отримуємо:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial W} = 2DW + \lambda I = 0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = W^T I - 1 = 0\end{aligned}\right\}$$ – векторна похідна по вектору W, H рівнянь по числу вагових коефіцієнтів.

З першого рівняння знаходимо:

$$DW = -\frac{1}{2}\lambda I,$$

$$W = -\frac{\lambda}{2}D^{-1}I,$$

де D^{-1} – квадратна, симетрична матриця.

З другого рівняння знаходимо:

$$W^T I = 1 = -\frac{\lambda}{2}I^T D^{-1} I,$$

звідки:

$$\lambda = -\frac{2}{I^T D^{-1} I},$$

тоді:

$$W = \frac{D^{-1} I}{I^T D^{-1} I}.$$

Обсяг відомостей, доступних на третьому рівні адаптації, допускає, крім побудови групових оцінок, застосування вже розглянутого на другому рівні адаптації методу зваженого середнього. При оцінюванні компетентностей експертів, завдяки наявності точних апостеріорних значень $X_0 = \left[x_{10,} x_{20,} \dots , w_{M0}\right]^T$, усуваються можливі помилки обчислення відстані r_j, $j = \overline{1, N}$, зумовлені використанням на другому рівні адаптації замість точних координат точки X_0 в M-вимірному просторі їх наближених оціночних значень, що відповідають координатам Z_0 центру кластера результатів експертної сесії. Це дозволяє підвищити точність індивідуальних оцінок компетентності експертів в діапазоні високих значень компетенції (близьких до 1).

Висновки до розділу 1

Ітераційний підхід до обробки експертних даних – цілеспрямоване формування процедури обробки даних, зокрема, її основного елемента – методу, орієнтоване на підвищення рівня точності обробки. Адаптивний підхід не є одноразовим операційним актом, бо вдосконалення процедури обробки має процесний характер, багато в чому залежить від форм і способів накопичення і зберігання інформації про властивості експертних даних, розуміння особливостей механізму їх формування, вибору методу обробки, етапу та рівня реалізації адаптації.

Для початкового етапу обробки експертних даних характерна наявність конфліктної ситуації – когнітивного протиріччя, – обумовленого з одного боку необхідністю максимально повного і загального формулювання завдання обробки, а з іншого – відсутністю необхідного обсягу інформації для коректного вирішення завдання в цій постановці. Можливий спосіб вирішення цього конфлікту полягає в реалізації ітеративного підходу до обробки даних, що являє собою послідовність етапів обробки даних, кожен з яких, приводячи до вирішення поставленого завдання з певним ступенем точності, дозволяє деталізувати вихідну постановку задачі для оптимізації обробки на наступних етапах. Зокрема, до елементів деталізації може ставитися уточнення моделі помилок в експертних даних, конкретизація рівнів компетентності експертів, інші аспекти побудови та організації процедури обробки даних.

В розділі постало питання про можливість знаходження групової оцінки, яка буде мати точність вищу за точність її складових.

На жаль, в загальному випадку розв'язок задачі неможливий через відсутність необхідної додаткової інформації, а саме інформації про коваріаційну матрицю помилок, застосованих методів обробки. Зазвичай, подібне питання може бути вирішене через застосування до вихідних даних методів керування вибіркою, які дозволять імітувати проведення повторних експериментів з однаковими вихідними даними.

2 МЕТОДИ КЕРУВАННЯ ВИБІРКОЮ

На практиці всі наявні емпіричні дані зазвичай представляються єдиною матрицею виду:

$$[Y,X] = \begin{bmatrix} y_1 x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_r x_{r1} & \cdots & x_{rn} \end{bmatrix},$$

тому безліч наборів даних, необхідних для аналізу точності оцінок, генеруються спеціальним програмним генератором, використовуючи спеціальні для цього методи.

У тому випадку, коли немає можливості отримати істинні повторюваності спостережень, розроблено методи, які формують велику кількість так званих «псевдо вибірок», на основі яких можна отримати необхідні характеристики шуканого параметра: оцінки математичного сподівання, дисперсії, довірчого інтервалу. Методи «чисельного ресамплінгу» або, як їх іноді називають в літературі, «методи генерації повторних вибірок» об'єднують чотири різних підходи, що відрізняються за алгоритмом, але є близькими по суті: рандомізація, або перестановочний тест (перестановка), бутстреп (початкового завантаження), та метод «складного ножа» (складаний ніж). Ці алгоритми, моделюють емпіричний розподіл вибіркових характеристик.

2.1 Метод ковзаючого контролю, перехресної перевірки, *jackknife*

Для методу ковзаючого контролю є характерним те, що псевдо вибірки генеруються шляхом почергового виключення рядків з результівної вибірки по одній.

Поширені варіації даного методу:

1) Кількість рядків, що видаляються із вихідної матриці даних може бути більше одного ([10]), зокрема, застосовується виключення групи послідовно розташованих значень, причому положення цієї групи змінюється шляхом її поелементного переміщення в бік зростання індексів вихідних даних ([11]);
2) Може утворюватися менше n псевдо вибірок, зокрема для контролю можуть братись тільки точки, які лежать в деякій області (контрольні множини), які застосовуються для перевірки придатності моделі тільки в певних областях значень змінних [12,13]).

В роботі [14] встановлено деяку перевагу даного методу, який застосовується до задачі мінімізації середньоквадратичного ризику по емпіричному набору даних, яке тепер викладемо.

Нехай потрібно мінімізувати функціонал виду:

$$I(a) = \int_V \left(y - \mu(x,a)\right)^2 P(x,y)dxdy$$

в умовах, коли щільність розподілу імовірностей $P(x,y)$ є невідомою, але відомо вибірку(y,X), отриману в наслідок випадкових незалежних дослідів відповідно до $P(x,y)$, модель $\mu(.,a)$ може змінюватись довільним чином при зміні абстрактного параметра a.

Якість моделі $\mu\left(.,\hat{a}(y,X)\right)$, що мінімізується на заданій вибірці (y,X) емпіричний ризик

$\widehat{I_2}(a) = \frac{1}{n}\widehat{\sum_{\iota=\mathbf{1}}^{n}\left(y^\iota\right.} - \left.\mu(x^\iota,a)\right)^2,$

оцінюється з використанням методу ковзаючого контролю наступним чином. По виборці (y, X), генерується n псевдо вибірок, для кожної з них знаходиться значення оцінки параметра $\hat{\boldsymbol{a}}_i(\boldsymbol{y}, X)$, що мінімізує емпіричний ризик i-ї псевдо вибірки. Далі обраховується величина:

$$T(\boldsymbol{y}, X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y^i - \mu\left(\boldsymbol{x}^i, \hat{\boldsymbol{a}}_i(\boldsymbol{y}, X)\right)\right)^2,$$

яка приймається за оцінку якості моделі $\mu(\cdot, \hat{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{y}, X))$, що мінімізує емпіричний ризик.

Справедливою є теорема: оцінка є не зміщеною в наступному сенсі:

$\mathrm{M}\,T(\boldsymbol{y}, X) = \mathrm{M}\,I(\hat{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{y}, X))$.

В роботі [15] для оцінки, що обчислюється за допомогою методу ковзаючого контролю, за умов:

1) лінійної регресії;
2) нормального розподілу шуму;
3) оцінок параметрів за методом найменших квадратів;
4) нормального розподілу значень незалежних змінних отримані:
    1) математичне сподівання оцінки T;
    2) нерівності, що обмежують величину дисперсії оцінки T зверху і знизу.

На підставі цих результатів зроблено такі висновки:

1. З ростом обсягу вибірки n і кількості регресорів m при постійному відношенні $m{:}\,n$ дисперсія оцінки T зменшується обернено пропорційно, тобто точність оцінки росте пропорційно обсягу n вихідної (навчальної) вибірки, хоча відношення обсягу вибірки до кількості регресорів не змінюється. За свідченням авторів [15], цей висновок вже був зроблений в роботі Вапніка В. Н. і Сорін А. А. «Методи ковзкового іспиту в лінійно-регресійній моделі» (В кн .: Прикладна статистика. - Москва: Наука, 1982 , випуск 1).
2. При збільшенні кількості ознак щодо обсягу вибірки дисперсія оцінки різко зростає, відповідно точність оцінки падає.

На жаль, в літературі відсутнє застосування використання даного методу для випадку обробки експертних даних, тому виникає проблема в адаптації цього підходу до задач, поставлених в роботі.

2.2 Метод хаотизації

У вихідній вибірці значення незалежних змінних залишаються без змін, а значення залежних змінних перемішуються шляхом рівноймовірної перестановки (рівно ймовірнісна вибірка з вихідної сукупності без повернення) [16,17].

В [16–18] цей метод використовується для утворення псевдо вибірки, по якій нічого не можна ідентифікувати, тобто вибірки без зв'язку між значеннями незалежних і залежних змінних. Така псевдо вибірка використовується для оцінки якості методу ідентифікації (в оригіналі – алгоритму навчання): порівнюється середній ризик моделі після ідентифікації вихідної вибірки (навчання на вихідній вибірці) і після ідентифікації псевдо вибірки (навчання на псевдо вибірці). Якщо значення середнього ризику виявляються близькими між собою, то метод ідентифікації (алгоритм навчання) визнається непридатним для використання.

Даний метод призначений не для генерації псевдо вибірок, статистично однорідних із вихідною вибіркою, а, навпаки, для максимального спотворення вихідних даних.

На жаль, даний метод керування вибіркою не можна застосувати для вирішення завдань роботи.

2.3 Варіювання рядків матриці

Вихідна вибірка розглядається як генеральна сукупність, з якої шляхом рівно ймовірнісного вибору рядків з поверненням формується необхідна кількість псевдо вибірок. Випадковий вибір чергового номера рядка здійснюється генератором псевдо випадкових чисел, рівномірно розподілених на $\{1, \ldots, n\}$. Відповідно до чергового номером рядка, що випав – формуються псевдо вибірки, рядок за рядком [10].

Даний метод дає результат на великих вибірках даних, що унеможливлює його застосунок для вирішення завдань роботи.

2.4 Бутстреп-метод

Бутстреп, як і інші методи генерації повторних вибірок, корисні, коли статистичні висновки не можна отримати з використанням теоретичних припущень (наприклад, будь-які припущення зробити важко через недостатній обсяг вибірок). Вони незамінні у випадках, коли необхідно оцінити ступінь стійкості або невизначеності оцінок щодо спостережуваних даних. Нарешті, вони можуть використовуватися, щоб просто перевірити повноцінність стандартних наближень параметричними моделями і поліпшити їх, якщо з'ясується, що вони дають неадекватні результати.

Бутстреп – процедура (або bootstrap) була запропонована Ефроном у 1979 як деяке узагальнення алгоритму «складного ножа», щоб не зменшувати кожен раз число елементів у порівнянні з вихідною сукупністю.

Основна ідея бутстрепу по Б. Ефрону полягає в тому, щоб за допомогою метода статистичних випробувань Монте-Карло багаторазово витягувати повторні вибірки з емпіричного розподілу. А саме: береться кінцева сукупність з n членів вихідної вибірки $x_1,\ x_2, \dots ,\ x_{n-1}, x_n$, звідки на кожному кроці з n послідовних ітерацій за допомогою датчика випадкових чисел, рівномірно розподілених на інтервалі, $[1, \dots , n]$, «витягується» довільний елемент x_k, який знову «повертається» в вихідну вибірку (тобто може бути витягнутий повторно). Наприклад, при n = 6 одна з таких комбінацій має вигляд $x_4,\ x_2,\ x_2,\ x_1,\ x_4,\ x_5$, тобто одні елементи можуть повторюватися два або більше разів, тоді як інші елементи бути взагалі відсутніми.

Таким способом можна сформувати будь-яке, як завгодно велике число бутстреп-вибірок. На основі розкиду значень аналізованого показника, отриманого в процесі імітації, можна побудувати, наприклад, довірчі інтервали оцінюваного параметра. Тим самим бутстреп-метод являє собою більш економний спосіб статистичного дослідження, що використовує всю обчислювальну потужність комп'ютера, але дозволяє обійтися без додаткових натурних вимірювань.

Залежно від наявної інформації щодо статистичної моделі генеральної

сукупності розрізняють не параметричний і параметричний бутстреп. У загальному вигляді процедура не параметричного бутстреп-методу виглядає наступним чином:

- Крок 1: Отримання великої кількості повторно – випадкових наборів даних з досліджуваної сукупності. За вихідні дані береться, як правило, тільки одна випадкова вибірка, отримана емпіричним шляхом. Замість того, щоб проводити експеримент ще раз, на оснЂові однієї наявної вибірки генерується безліч псевдо вибірок того ж розміру, що складаються з випадкових комбінацій вихідного набору елементів. При цьому використовується алгоритм «випадкового вибору з поверненням» (random sampling with replacement), тобто добуте число знову поміщається в «перемішую колоду» перш ніж витягується наступне спостереження. У результаті деякі члени в кожній окремій псевдо вибірці можуть повторюватися два або більше разів, тоді як інших взагалі не бути. Відзначимо, що якби ми здійснювали вибір без повернення (random sampling without replacement), то весь час отримували б вихідну множину чисел, хоча й представлені щоразу в різному порядку.
- Крок 2 : Побудова бутстреп – розподілу оцінюваної величини. Для кожної псевдо повторності, отриманої на кроці 1, розраховується значення аналізованої характеристики – середнього, медіани, стандартного відхилення та інші. Маючи ці дані, легко побудувати гістограму (або згладжений графік щільності частотного розподілу) значень тестованого показника, що показує закономірності його варіації, що дає можливість оцінити довірчі інтервали та інші корисні вибіркові характеристики аналізованої величини.

Оскільки бутстреп у загальному вигляді можна представити як витяг псевдо вибірки з дискретного емпіричного розподілу вибірки спостережень, то це може бути використано для пошуку можливості поліпшити характеристики цього розподілу різними методами згладжування. Наприклад, виберемо величину h і

будемо коригувати формовану бутстреп-вибірку шляхом додавання кожному i-му її члену випадкового приросту $x_i^* \pm h\varepsilon_i$, де $\varepsilon_1 \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ – реалізації незалежної, нормально розподіленої $N(0,1)$ випадкової величини. Такий підхід називається бутстреп зі згладжуванням (Smooth bootstrap) [10].

Проблема згладжування і фільтрації в загальному випадку є досить складною, їй присвячено багато робіт, огляд яких виходить за рамки даної роботи. Основним завданням у цій проблемі є вибір такого оператора фільтра, який би найкращим чином придушував перешкоду (її статистичні властивості, у тому числі частотні, повинні бути відомі), в найменшій мірі спотворюючи корисний сигнал.

Висновки до розділу 2

Виконавши аналіз найбільш розповсюджених методів керування вибіркою, можна зробити висновок, що проблеми методів керування вибірки, призначених для побудови статистично однорідних вибірок, можна розділити, зокрема, на дві групи: принципові недоліки, що витікають із суті самих методів, і недослідженість властивостей методів.

З вище викладеного бутстреп-метод є найбільш прикладним для вирішення поставлених завдань, адже:

1. Бутстреп забезпечує той самий об’єм вибірки.
2. Бутстрепінг формує помилки експертів релевантно тому як це відбувається в природі
3. Метод бутстрепу – не потребує типізації та параметризації розподілу.

3 ПЕРЕВІРКА ВАЛІДНОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ БУТСТРЕП-МЕТОДОЛОГІЇ ДО РОЗРАХУНКУ ОЦІНЮВАНЯННЯ КОВАРІАЦІЙНОЇ МАТРИЦІ ПОМИЛОК МЕТОДІВ ОБРОБКИ ЕКСПЕРТНИХ ДАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ІМІТАЦИЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

3.1 Загальний опис здійснення процедури імітаційного моделювання

Імітаційне комп’ютерне моделювання – штучний експеримент, що реалізується на ЕОМ, при якому з метою зрозуміти поведінку системи або порівняти різні стратегії управління нею замість натурних випробувань на реальній складній системі експериментують з її моделлю [19].

Строго кажучи, будь-яка комп’ютерна модель є імітаційною, але цей термін закріпився за моделями складних систем, коли внутрішні закони досліджуваних явищ невідомі або визначаються випадковими чинниками [19].

Результат еволюції таких систем можливо змоделювати лише шляхом прямої покрокової імітації, оскільки не існує жодного способу передбачити наслідки дії численних випадкових факторів. Треба просто вести обчислювальний експеримент і чекати до тих пір, коли еволюція відбудеться. Для дослідження складних природних, економічних, виробничих систем сьогодні відомі лише два способи:

1) натурний експеримент, який може виявитись занадто коштовним, небезпечним, шкідливим чи нездійсненним

2) обчислювальний експеримент з математичною моделлю досліджуваної системи [19].

Для того, щоб досягти точності й коректності оцінювання в цілому, необхідно, щоб були відомі точні параметри оцінки й рівня помилок експертів, що забезпечить справедливість отриманих висновків. Тому єдиним можливим способом дослідження є проведення імітаційного моделювання, при якому параметри задаються дослідником.

Перевагою використання методу імітаційного комп’ютерного моделювання є те, що тільки він дозволяє об'єктивно порівняти заданий дослідником результат із результатом обробки тим чи іншим методом.

Метою проведення імітаційного моделювання є перевірка валідності застосування бутстреп-методології до розрахунку оцінюваняння коваріаційної матриці помилок методів обробки експертних даних. Для побудови імітаційної моделі використовувалась мова програмування загального призначення Python версії 3.5, тому що вона є зручною для розв’язання математичних проблем та надає такі можливості для моделювання:

1) Статичний опис системи – створення і знищення тимчасових об’єктів.
2) Імітація випадкових явищ (генерація псевдовипадкових чисел відповідно до випадкових розподілів).
3) Засоби для завдання вхідних параметрів і розрахунку вихідних характеристик [20].

Код реалізації програми представлений у Додатку А.

Рисунок 3.1 – Загальна схема імітаційного моделювання

Перший етап. *Дослідження на оригінальних даних*

Для поточного тура експертизи (тобто для рядка із шести оцінок) генерується значення «істинної вимірюваної величини» [5].

Генератор нормально розподіленої випадкової величини з параметрами $\mathrm{M} = 5, \sigma_{\mathrm{u}} = 2$ – видає значення $\mathrm{U_g}$, які є еталонними для даної «шістки».

$$\mathrm{U_g} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{30} \end{bmatrix}.$$

На це значення накладається шум $\mathrm{e_i}$: $\mathrm{x_i} = \mathrm{U_j} + \mathrm{e_i}, \mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{n}}$. Параметри шуму E: нормальний розподіл $\mathrm{N}(0, 2)$, при додаткових дослідженнях $\mathrm{N}(0, 1)$, $\mathrm{N}(0, 3)$ [5].

$\mathrm{U_i}$, $\mathrm{e_i}$ – неперервно розподілені випадкові величини, які при переході до бальних експертних оцінок округлюються в сторону найближчої відмітки бальної шкали, тобто трансформуються в цілочисельне значення $\mathrm{z_i}$ [5].

В результаті отримуємо матрицю розмірності 30×6 для кожного набору експертної групи:

$$Z_{ij} = \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{30,1} & \cdots & z_{30,6} \end{pmatrix}.$$

Застосовуючи почергово методи МНК та МНМ отримуємо вектори оцінок для кожного туру експертизи:

$$X_{med} = \begin{bmatrix} x_{1\,med} \\ x_{2\,med} \\ \vdots \\ x_{30\,med} \end{bmatrix},$$

та

$$X_{mean} = \begin{bmatrix} x_{1\,mean} \\ x_{2\,mean} \\ \vdots \\ x_{30\,mean} \end{bmatrix}.$$

Потім знаходимо дельти:

$$\Delta_{original}^{med} = X_{med} - \mathrm{U_g},$$

та

$$\Delta_{original}^{mean} = X_{mean} - \mathrm{U_g}.$$

Рахуємо значення коефіцієнта кореляції та дисперсії для кожного із методів за формулами:

$$k = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta_{i\,original}^{med}\Delta_{i\,original}^{mean}}{\sigma_{\Delta_{i\,original}^{med}}\sigma_{\Delta_{i\,original}^{mean}}},$$

де

$$\sigma_{\Delta_{i\,original}^{mean}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {\Delta_{i\,original}^{mean}}^{2}},$$

$$\sigma_{\Delta_{i\,original}^{med}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {\Delta_{i\,original}^{med}}^{2}}.$$

Наступним кроком є побудова групової (комплексної оцінки) z_{igr} на базі отриманих квазіоптимальних оцінок. Інформація, необхідна для формування оцінки z_{igr} задається коваріаційною матрицею помилок методів оцінювання (тобто помилок МНК-оцінок $\overline{z_i}$ і МНМ-оцінок $z_{i\,med}$, $i = \overline{1, M}$) вида:

$$COV = \begin{bmatrix} D\{\bar{z}\} & cov \\ cov & D\{z_{med}\} \end{bmatrix},$$

де $D\{\dots\}$ і cov – дисперсія і коваріація помилок, які розраховуються за формулами:

$$D\{\bar{z}\} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} {\Delta_{i\,original}^{mean}}^{2},$$

$$D\{z_{med}\} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} {\Delta_{i\,original}^{med}}^{2},$$

$$cov = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \Delta_{i\,original}^{med}\Delta_{i\,original}^{mean}.$$

За даними коваріаційної матриці COV розраховуємо загальні ваги для МНК та МНМ-оцінок і значення групової оцінки для кожної окремої групової експертизи:

$$z_{igr} = w_1 \bar{z}_i + w_1 z_{imed},$$

де

$$w_1 = \frac{D\{z_{med}\} - cov}{D\{\bar{z}\} + D\{z_{med}\} - 2cov},$$

$$w_2 = \frac{D\{\bar{z}\} - cov}{D\{\bar{z}\} + D\{z_{med}\} - 2cov}.$$

Теоретичну дисперсію групової оцінки визначаємо за формулою:

$$D\{z_{gr}\} = w_1^2 D\{\bar{z}\} + w_2^2 D\{z_{med}\} + 2w_1 w_2 cov.$$

Алгоритм обрахунку групової дисперсії (практичної).

Будуємо матрицю:

$$\begin{bmatrix} \breve{z_{gr}} = w_1 x_{1\,mean} + w_2 x_{1\,med} \\ \breve{z_{gr}} = w_1 x_{2\,mean} + w_2 x_{2\,med} \\ \vdots \\ \breve{z_{gr}} = w_1 x_{30\,mean} + w_2 x_{30\,med} \end{bmatrix}.$$

Далі знаходимо дельти за наступними формулами:

$$\begin{bmatrix} \breve{\Delta}_1 = \breve{z_{gr}} - u_1 \\ \breve{\Delta}_2 = z_{gr30}^B - u_2 \\ \vdots \\ \breve{\Delta}_{30} = z_{gr30}^B - u_2 \end{bmatrix},$$

тоді групова дисперсія обраховується наступним чином:

$$\breve{D}_{gr} = \frac{1}{30} \sum_{l=1}^{30} \breve{\Delta}_l^{B\,2}.$$

Другий етап. *Дослідження на даних отриманих в наслідок бутстреп процедури*

Аналогічно як і для першого етапу дослідження генерується значення «істинної вимірюваної величини». Генератор нормально розподіленої випадкової величини з параметрами $\mathrm{M} = 5, \sigma_{\mathrm{u}} = 2$ – видає значення $\mathrm{U_g}$, які є еталонними для даної «шістки»:

$$\mathrm{U_g} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{30} \end{bmatrix}.$$

На це значення накладається шум $\mathrm{e_i}$: $\mathrm{x_i} = \mathrm{U_j} + \mathrm{e_i}, \mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{n}}$. Параметри шуму E: нормальний розподіл $\mathrm{N}(0, 2)$, при додаткових дослідженнях $\mathrm{N}(0, 1)$, $\mathrm{N}(0, 3)$ [5].

$\mathrm{U_i}$, $\mathrm{e_i}$ – неперервно розподілені випадкові величини, які при переході до бальних експертних оцінок округлюються в сторону найближчої відмітки бальної шкали, тобто трансформуються в цілочисельне значення $\mathrm{z_i}$ [5].

В результаті отримуємо матрицю розмірності 30×6 для кожного набору експертної групи.

$$Z_{ij} = \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{30,1} & \cdots & z_{30,6} \end{pmatrix}.$$

Наступним кроком за допомогою бутстреп-мотода генеруємо матриці для кожної з варіцій експертних груп.

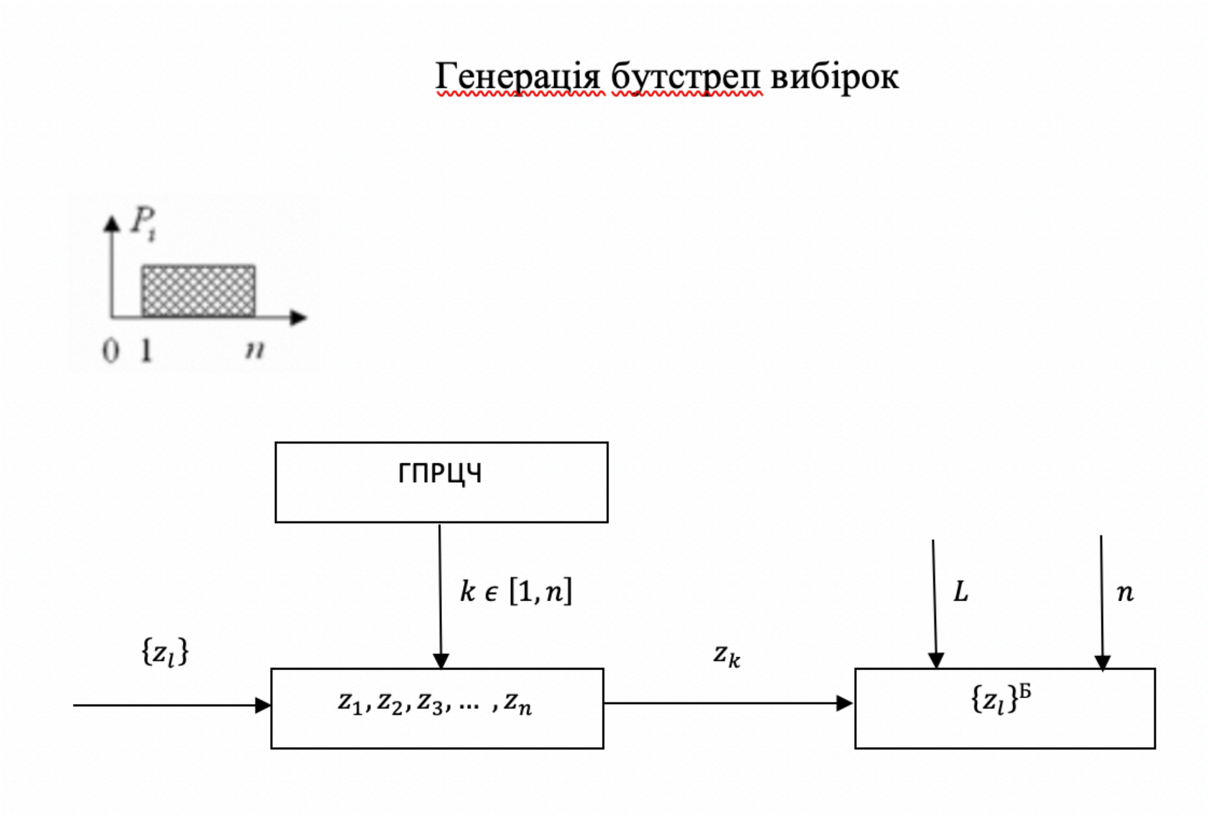
Застосовуємо метод МНМ та отримуємо вектор оцінок для кожного туру експертизи:

$$\tilde{X}_{med} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1\,med} \\ \tilde{x}_{2\,med} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{30\,med} \end{bmatrix}.$$

Далі оцінюємо шум, будуючи відповідну шумову матрицю:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} = z_{11} - \tilde{x}_{1\,med} & \varepsilon_{12} = z_{12} - \tilde{x}_{1\,med} & \dots & \varepsilon_{16} = z_{16} - \tilde{x}_{1\,med} \\ \varepsilon_{21} = z_{21} - \tilde{x}_{2\,med} & \varepsilon_{22} = z_{22} - \tilde{x}_{2\,med} & \dots & \varepsilon_{26} = z_{26} - \tilde{x}_{2\,med} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \quad \vdots \\ \varepsilon_{30,1} = z_{30,1} - \tilde{x}_{30\,med} & \varepsilon_{30,2} = z_{30,2} - \tilde{x}_{2\,med} & \dots & \varepsilon_{30,6} = z_{30,6} - \tilde{x}_{30\,med} \end{bmatrix}.$$

Алгоритм бутстреп-методу.



L – кількість бутстреп матриць

n – кількість рядків вихідної матриці

Рисинок 3.2 – Загальна схема бутсреп-методу

Побудова Бутстреп матриць за наступним алгоритмом:

$$z_{ij}^{B} = \tilde{x}_{i\,med} + \varepsilon_{kj},$$

$$i = \overline{1, n},$$

$$j = \overline{1, m},$$

де k – рівномірно розподілене випадкове значення в інтервалі $[1; n]$, n – кількість рядків.

Далі, застосовуючи почергово методи МНК та МНМ отримуємо вектори оцінок для кожного туру експертизи:

$$X_{Med}^{B} = \begin{bmatrix} x^{b}{}_{1\,med} \\ x^{b}{}_{2\,med} \\ \vdots \\ x^{b}{}_{30\,med} \end{bmatrix},$$

та

$$X_{Mean}^{B} = \begin{bmatrix} x^{b}{}_{1\,mean} \\ x^{b}{}_{1\,mean} \\ \vdots \\ x^{b}{}_{1\,mean} \end{bmatrix}.$$

Знаходимо дельти за наступними формулами:

$$\Delta_{bootstrap}^{med} = X_{Med}^{B} - \tilde{X}_{med},$$

$$\Delta_{bootstrap}^{mean} = X_{mean} - \tilde{X}_{med}.$$

Аналогічно як і для першого етапу дослідження обраховуємо коефіцієнти кореляції та коваріації, а також загальні ваги для МНК та МНМ-оцінок і значення групової оцінки для кожної окремої групової експертизи:

$$k^{b} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta_{i\,bootstrap}^{med} \Delta_{i\,bootstrap}^{mean}}{\sigma_{\Delta_{i\,bootstrap}^{med}} \sigma_{\Delta_{i\,bootstrap}^{mean}}},$$

де

$$\sigma_{\Delta_{i\,bootstrap}^{mean}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta_{i\,bootstrap}^{mean}{}^{2}},$$

$$\sigma_{\Delta_{i\,bootstrap}^{mean}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta_{i\,bootstrap}^{med}{}^{2}},$$

$$D\{\bar{Z}^{b}\} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \Delta_{i\,bootstrap}^{mean}{}^{2},$$

$$D\{Z_{med}^b\} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} {\Delta_{i\ bootstrap}^{med}}^2,$$

$$cov^b = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \Delta_{i\ bootstap}^{med}\Delta_{i\ bootstrap}^{mean}.$$

$${z_{igr}}^B = {w_1}^B {\bar{z}_i}^B + {w_1}^B {z_{imed}}^B,$$

де

$${w_1}^B = \frac{D\{Z_{med}^b\} - cov^b}{D\{\bar{Z}^b\} + D\{Z_{med}^b\} - 2cov^b},$$

$$w_2^B = \frac{D\{\bar{Z}^b\} - cov^b}{D\{\bar{Z}^b\} + D\{Z_{med}^b\} - 2cov^b}.$$

Теоретичну дисперсію групової оцінки визначаємо за формулою:

$$D\{z_{gr}^b\} = \left(w_1^b\right)^2 D\{\bar{Z}^b\} + \left(w_2^b\right)^2 D\{Z_{med}^b\} + 2w_1^B w_2^B cov^b.$$

Алгоритм обрахунку групової дисперсії (практичної).

Будуємо матрицю:

$$\begin{bmatrix} z_{gr1}^B = {w_1}^B {x^b}_{1\,mean} + {w_2}^B {x^b}_{1\,med} \\ z_{gr2}^B = {w_1}^B {x^b}_{2\,mean} + {w_2}^B {x^b}_{2\,med} \\ \vdots \\ z_{gr30}^B = {w_1}^B {x^b}_{30\,mean} + {w_2}^B {x^b}_{30\,med} \end{bmatrix}.$$

Далі знаходимо дельти за наступними формулами:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\Delta_1}^B = z_{gr1}^B - \tilde{x}_{1\,med} \\ \widetilde{\Delta_2}^B = z_{gr2}^B - \tilde{x}_{2\,med} \\ \vdots \\ \widetilde{\Delta_{30}}^B = z_{gr30}^B - \tilde{x}_{30\,med} \end{bmatrix},$$

тоді групова дисперсія обраховується наступним чином:

$$D_{gr}^b = \frac{1}{30}\sum_{l=1}^{30} {\tilde{\Delta}_l^b}^2.$$

3.2 Представлення результатів імітаційного дослідження

Перший етап. *Дослідження на оригінальних даних*

Параметри вектора шуму $E = (m, \sigma, n)$, де m – математичне очікування, σ – дисперсія, n – кількість оцінок експертів із зазначеними параметрами.

Таблиця 3.1 – Рівень шуму $N(0{,}1)$ для шести експертів

$E = (0, 1, 6)$	Значення
Коефіцієн кореляції дельт	0.9850757331065653
Коваріація	22.388886620675393
Дисперсія за МНК	22.50476201905754
Дисперсія за МНМ	22.32393714821917
Ваговий коефіцієн w_1	-1.2753714591404481
Ваговий коефіцієн w_2	2.275371459140448
Групова дисперсія (теоретична)	22.241102444762276
Групова дисперсія (практична)	1.4761144534215116

Таблиця 3.2 – Рівень шуму $N(0{,}2)$ для шести експертів

$E = (0, 2, 6)$	Значення
Коефіцієн кореляції дельт	0.9733030866178446
Коваріація	27.89264826172835
Дисперсія за МНК	28.491738048471642
Дисперсія за МНМ	27.463928845355422
Ваговий коефіцієн w_1	-2.5163965743629357
Ваговий коефіцієн w_2	3.5163965743629357
Групова дисперсія (теоретична)	26.38510077463161
Групова дисперсія (практична)	3.955338765417847

Таблиця 3.3 – Рівень шуму $N(0,3)$ для шести експертів

$E = (0, 3, 6)$	Значення
Коефіцієн кореляції дельт	0.9850757331065653
Коваріація	32.83126950287755
Дисперсія за МНК	33.81951936749536
Дисперсія за МНМ	32.16524186048196
Ваговий коефіцієн w_1	-2.066982338469048
Ваговий коефіцієн w_2	3.0669823384690704
Групова дисперсія (теоретична)	30.78857448671954
Групова дисперсія (практична)	9.980826947127603

Таблиця 3.4 – Два експерти з рівнем шуму $N(0,1)$, два з $N(0,2)$ та два з $N(0,3)$

$E = ((0, 1, 2), (0, 2, 2), (0, 3, 2))$	Значення
Коефіцієн кореляції дельт	0.9819651250527693
Коваріація	31.61122994209766
Дисперсія за МНК	32.20301713400962
Дисперсія за МНМ	31.26110941685236
Ваговий коефіцієн w_1	-1.448774587221964
Ваговий коефіцієн w_2	2.448774587221979
Групова дисперсія (теоретична)	30.753863697413067
Групова дисперсія (практична)	8.323511569003347

Таблиця 3.5 – Сценарій з аномальним експертом

$E = (0, 1, 5)$	Значення
Коефіцієн кореляції дельт	0.9734150674631996
Коваріація	9.074108569491992
Дисперсія за МНК	11.949394335547831
Дисперсія за МНМ	7.109007988621338
Ваговий коефіцієн w_1	-2.159011828423507
Ваговий коефіцієн w_2	3.159011828423507
Групова дисперсія (теоретична)	2.8663325904796864
Групова дисперсія (практична)	4.466200631338814

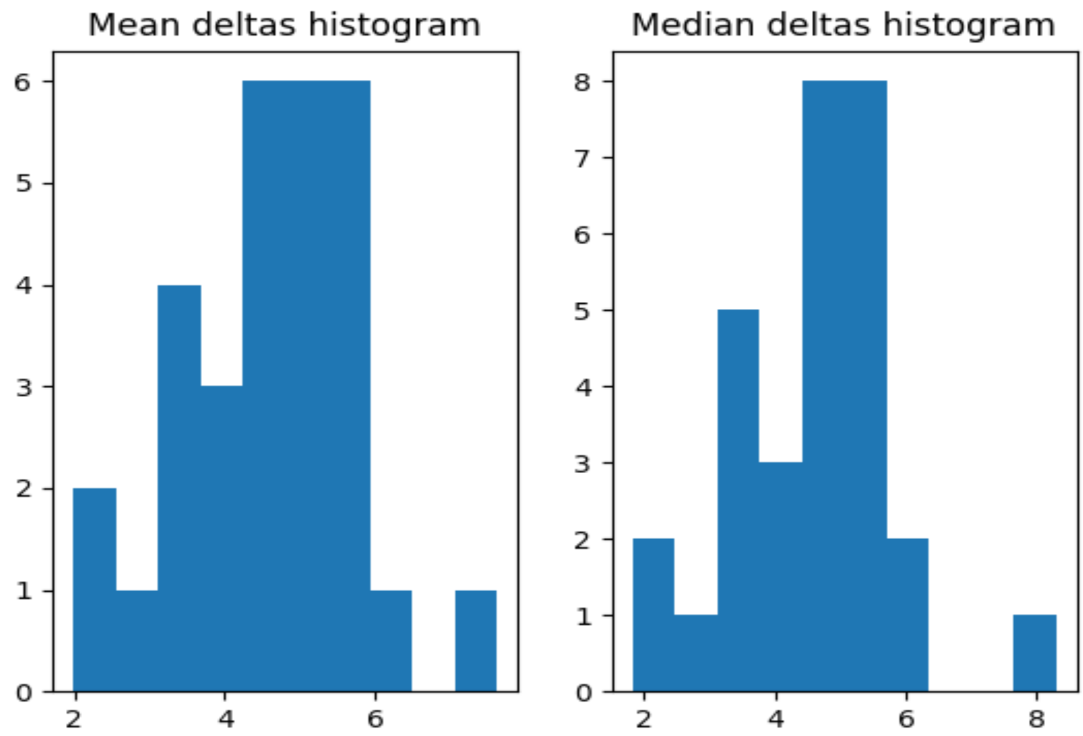


Рисунок 3.1 – Гістограма розподілу дельт. Рівень шуму $N(0,1)$ для шести експертів

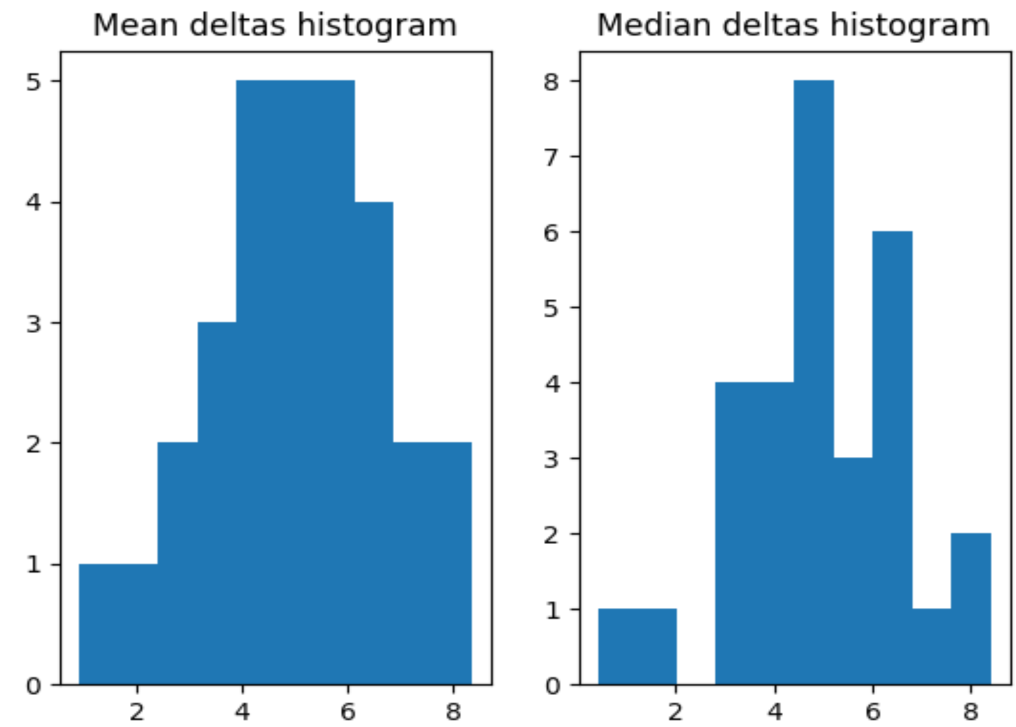


Рисунок 3.2 – Гістограма розподілу дельт. Рівень шуму $N(0,2)$ для шести експертів

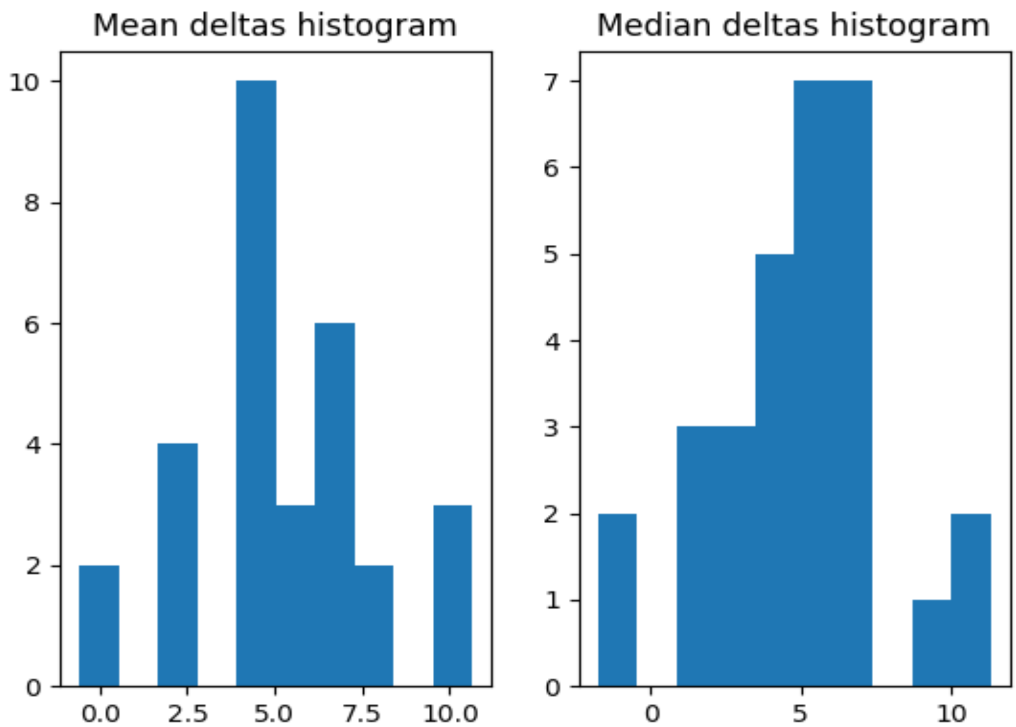


Рисунок 3.3 – Гістограма розподілу дельт. Рівень шуму $N(0,3)$ для шести експертів

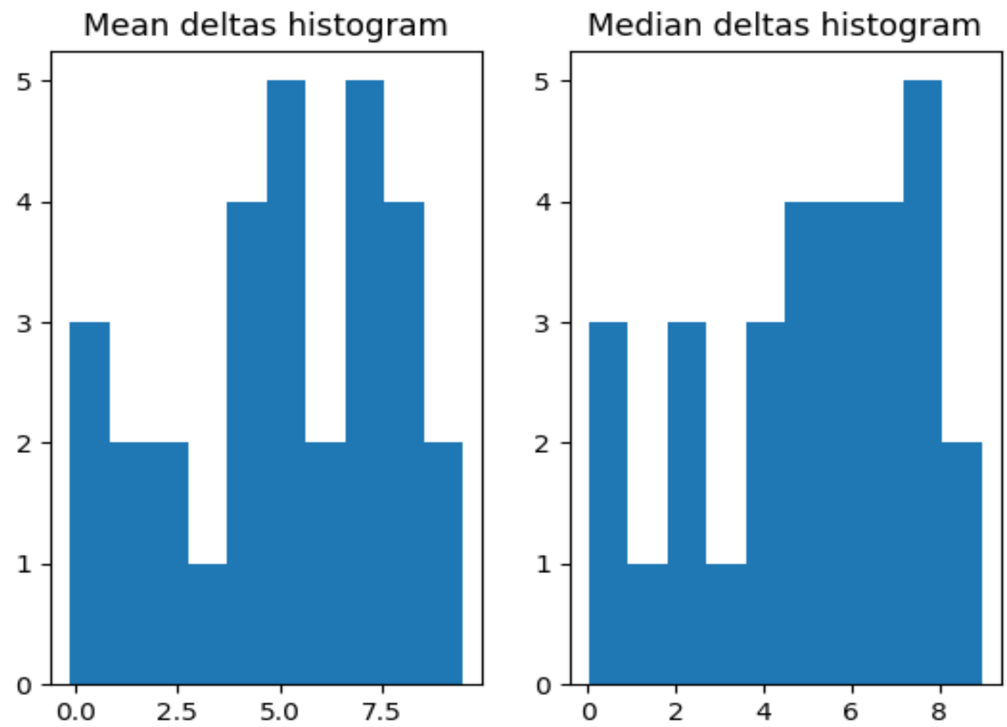


Рисунок 3.4 – Гістограма розподілу дельт для випадка, коли два експерти мають рівень шуму $N(0,1)$, два $N(0,2)$ та ще два $N(0,3)$

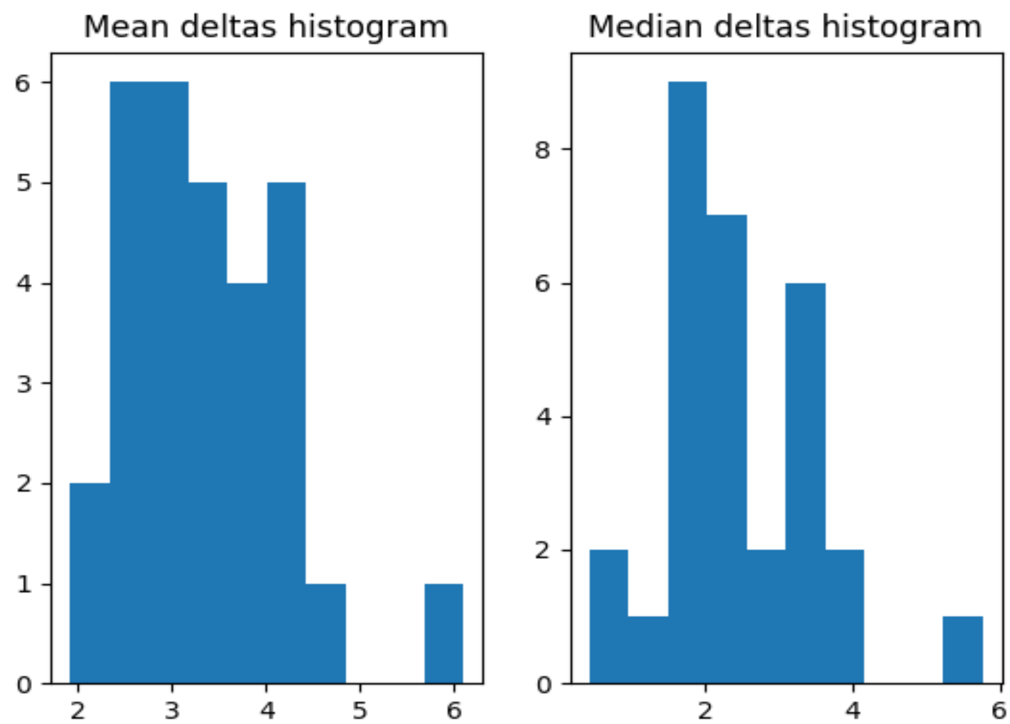


Рисунок 3.5 – Гістограма розподілу дельт для сценарію з аномальним експертом

Другий етап. *Дослідження на даних, отриманих в наслідок бутстреп процедури*

Таблиця 3.6 – Рівень шуму $N(0,1)$ для шести експертів

$E = (0, 1, 6)$	Значення
Коефіцієн кореляції дельт	0.847093950337321
Коваріація	0.12430555555555557
Дисперсія за МНК	0.15324074074074076
Дисперсія за МНМ	0.14583333333333334
Ваговий коефіцієн w_1	0.42660550458715585
Ваговий коефіцієн w_2	0.5733944954128442
Групова дисперсія (теоретична)	0.13664946483180432
Групова дисперсія (практична)	23.83875191131499

Таблиця 3.7 – Рівень шуму $N(0,2)$ для шести експертів

$E = (0, 2, 6)$	Значення
Коефіцієн кореляції дельт	0.7857552065657482
Коваріація	0.38888888888888895
Дисперсія за МНК	0.4708333333333334
Дисперсія за МНМ	0.5125
Ваговий коефіцієн w_1	0.601351351351351
Ваговий коефіцієн w_2	0.3986486486486487
Групова дисперсія (теоретична)	0.43816629129129103
Групова дисперсія (практична)	26.604851726726725

Таблиця 3.8 – Рівень шуму $N(0,3)$ для шести експертів

$E = (0, 3, 6)$	Значення
Коефіцієн кореляції дельт	0.7757651571920441
Коваріація	0.5819444444444445
Дисперсія за МНК	0.8245370370370372
Дисперсія за МНМ	0.6666666666666666
Ваговий коефіцієн w_1	0.25884016973125856
Ваговий коефіцієн w_2	0.7411598302687414
Групова дисперсія (теоретична)	0.6447371522866573
Групова дисперсія (практична)	22.159789014615747

Таблиця 3.9 – Два експерти з рівнем шуму $N(0,1)$, два з $N(0,2)$ та два з $N(0,3)$

$E = ((0, 1, 2), (0, 2, 2), (0, 3, 6))$	Значення
Коефіцієн кореляції дельт	0.8960079127835652
Коваріація	0.49375000000000013
Дисперсія за МНК	0.5870370370370371
Дисперсія за МНМ	0.5229166666666667
Ваговий коефіцієн w_1	0.23818525519848735
Ваговий коефіцієн w_2	0.7618147448015136
Групова дисперсія (теоретична)	0.5159695967233784
Групова дисперсія (практична)	24.310629332073095

Таблиця 3.10 – Сценарій з аномальним експертом

$E = (0, 1, 5)$	Значення
Коефіцієн кореляції дельт	0.733473718516462
Коваріація	0.016666666666666663
Дисперсія за МНК	0.8761574074074073
Дисперсія за МНМ	0.035416666666666666
Ваговий коефіцієн w_1	0.02134949920927781
Ваговий коефіцієн w_2	0.9786505007907221
Групова дисперсія (теоретична)	0.035016363556492694
Групова дисперсія (практична)	5.148135762607626

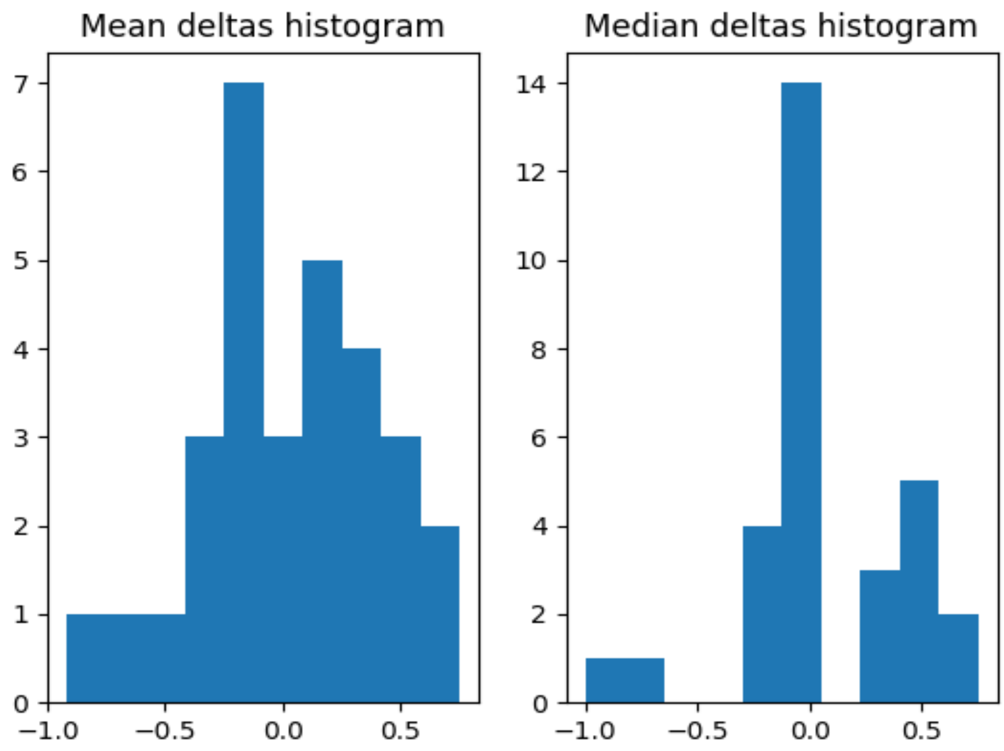


Рисунок 3.6 – Гістограма розподілу дельт. Рівень шуму $N(0,1)$ для шести експертів

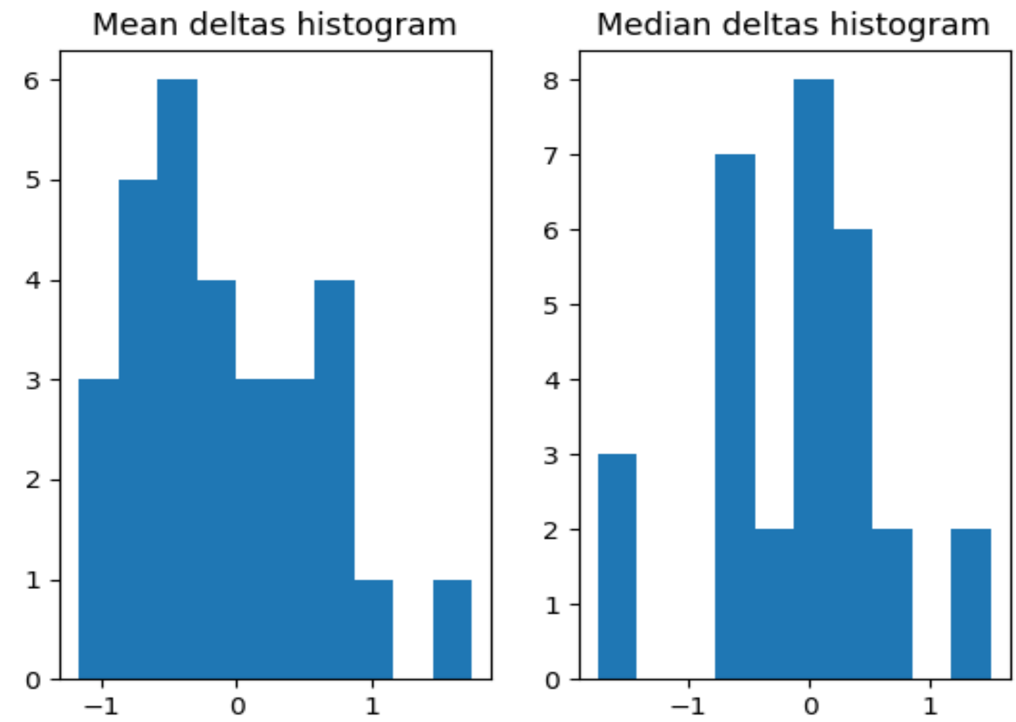


Рисунок 3.7 – Гістограма розподілу дельт. Рівень шуму $N(0,2)$ для шести експертів

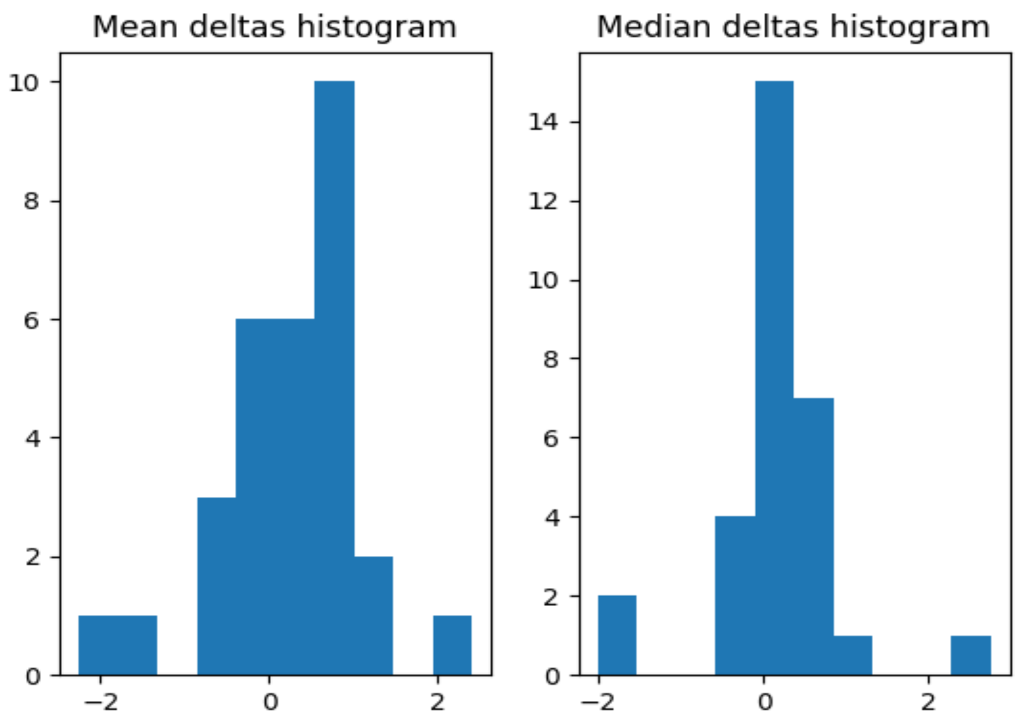


Рисунок 3.8 – Гістограма розподілу дельт. Рівень шуму $N(0,3)$ для шести експертів

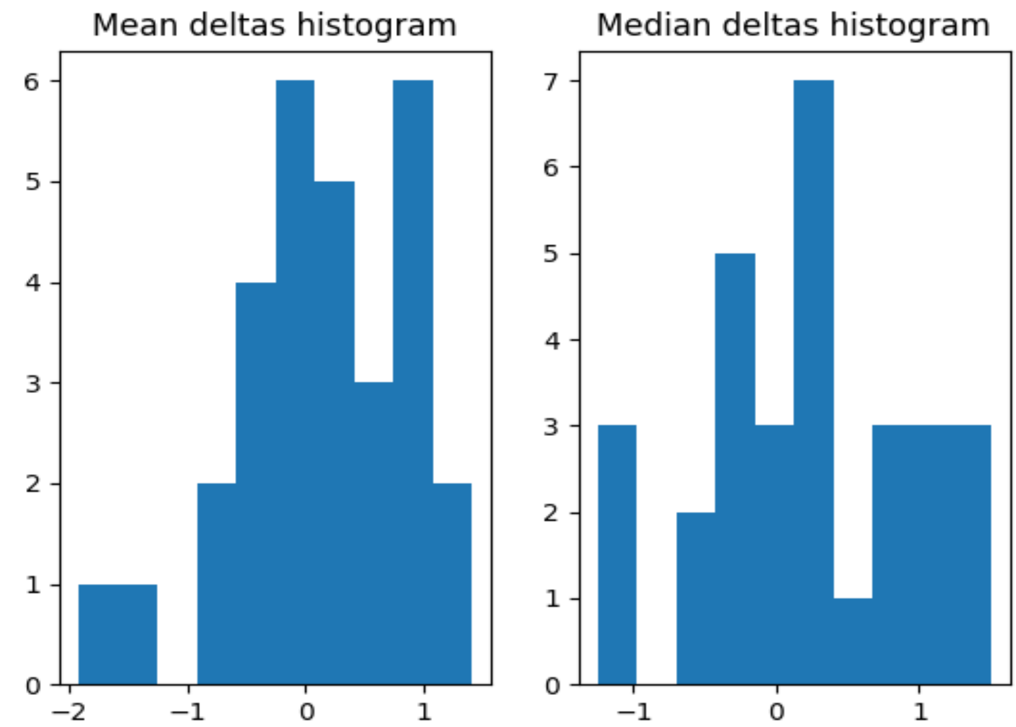


Рисунок 3.9 – Гістограма розподілу дельт для випадка, коли два експерти мають рівень шуму $N(0{,}1)$, два $N(0{,}2)$ та ще два $N(0{,}3)$

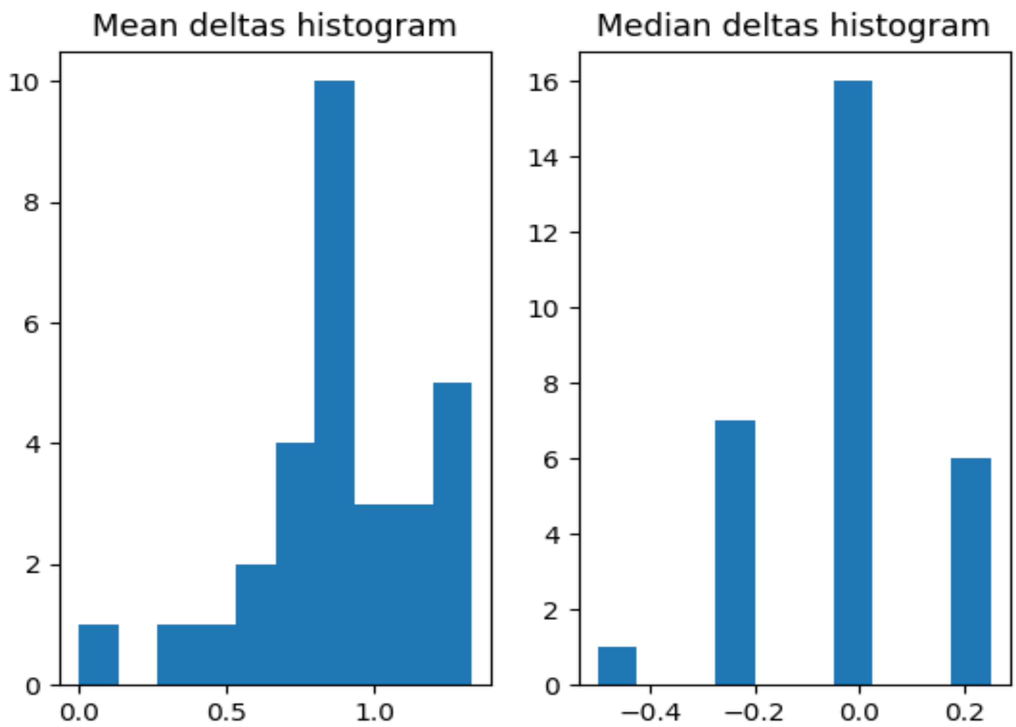


Рисунок 3.10 – Гістограма розподілу дельт для сценарію з аномальним експертом

Висновки до розділу 3

У результаті проведення імітаційного комп'ютерного моделювання було досліджено різні методи обробки як найбільш поширені – МНК та МНМ.

Зокрема, з'ясовано, що у випадку малого рівня експертних помилок доцільність комплексування мінімальна: рівень коефіцієнтів кореляції близький до 1, характер та дисперсія помилок експертів майже однакові (помилки методів фактично тотожні).

З ростом шумової складової – коефіцієнт кореляції починає зменшуватись, тому важливість побудови групових комплексних оцінок зростає для експертних бригад, що мають різнорівневу компетентність експертів чи складаються з мало досвічених експертів.

Бутстреп є універсальним інструментом комплексування оцінок та дозволяє уникнути детального вивчення та зіставлення деяких окремих методів, роблячи висновок про доцільність комплексування лише за коефіцієнтами кореляції, а також дозволяє побудувати групову оцінку, дисперсія якої є нижчою за найнижчу з часткових.

ВИСНОВКИ

В результаті виконання роботи було запропоновано ітераційний підхід до обробки експертних даних, як наслідок було отримано низку часткових оцінок із різними якісними характеристиками, розроблено метод обчислення комплексної (зваженої групової оцінки) експертних даних. Для забезпечення побудови групової оцінки застосовано бутстреп-метод керування вибіркою експертних даних та виконано імітаційне комп’ютерне дослідження коваріаційних властивостей помилок часткових оцінок.

Бутстреп є універсальним інструментом комплексування оцінок отриманих різними методами, що дозволяє уникнути детального вивчення та зіставлення окремих методів обробки експертних даних, роблячи висновок про доцільність комплексування лише за коефіцієнтами кореляції, а також дозволяє побудувати групову оцінку, дисперсія якої є нижчою за найнижчу з часткових.

Імітаційне комп’ютерне моделювання було реалізовано для найбільш застосовних методів обробки експертних даних – МНК та МНМ, що дозволило навести наступні рекомендації:

- у випадку малого рівня експертних помилок доцільність комплексування мінімальна: рівень коефіцієнтів кореляції близький до 1, характер та дисперсія помилок експертів, майже, однакові (помилки методів фактично тотожні);
- з ростом шумової складової – коефіцієнти кореляції починають зменшуватись, тому важливість побудови групових комплексних оцінок зростає для експертних бригад, що мають різнорівневу компетентність експертів чи складаються з мало досвідчених експертів.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1 Архипов О. Є. Вступ до теорії ризиків: інформаційні ризики [Текст]: моногр. /О. Є. Архипов. – К. : Нац. акад. СБУ, 2015. – 248 с.

2 Носок С.О. Методи обробки експертних даних в задачі автоматизації проф-відбору : дис. … канд. техн. наук за спец. 05.13.07 Автоматизація технологіч-них процесів: захищена 22.10.2007 [Текст] / Носок Світлана Олександрівна.– К., 2007. – 160 с.

3 Архипов О.Є., Муратов. О.Є. Критерії визначення можливої шкоди національній безпеці України у разі розголошення інформації, що охороняється державою: монографія. Київ: Національна Академія СБ України, 2011. 195 с.

4 Архипов О.Є., Архипова С.О. Оцінювання якості роботи експертів за даними багатооб'єктної експертизи. *Захист інформації*. 2011. №53. С. 45-54.

5 Чмерук О.М., «Методи обробки експертних даних в задачі аналізу інформаційних ризиків»

6 Ю. Ткач, С. Казмірчук, Д. Мехед, В. Базилевич, «Застосування методу експертних оцінок до оцінювання інформаційних ризиків вищого навчального закладу», Захист інформації, Т. 19, № 2, С. 142-157, 2017.

7 Мудров В. И. Метод наименьших модулей [Текст] / В.И. Мудров, В.Л. Кушко – М.: Знание, 1971. – 64 с.

8 И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и призведений. Москва. Физматгиз, 1963, 1108 с.

9 О. Архипов, О. Чмерук, «Дослідження методів обробки даних багатооб'єктної експертизи» Матеріали XVI Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених. "Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики ", т.II (26 – 27 квіт. 2018 р., м. Київ). – Київ. КПІ ім.. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», – 144 с., С. 53-57, 2018.

10 Архипов А. Е. Бутстреп-анализ качества решения задач идентификации. — Дисс. на соискание учёной степени д. т. н. по специальности 05.13.03 “Системы и процессы управления”. — Киев, 1995. — 363 с.

11 Архипов А. Е. Выбор, оценка качества и методы повышения точности аппроксимативных моделей в задачах идентификации. — Киев: УМК ВО, 1992. — 56 с.

12 Архипов А. Е. Имитационные оценки точности решения задач параметрической идентификации // Вестник Киевского политехнического института. Техническая кибернетика. — 1989. — Выпуск 13. — С. 12-18.

13 Архипов А. Е., Архипова С. А. Анализ и оптимизация качества решения задачи идентификации. — Праці п’ятої української конференції з автоматичного управління “Автоматика-98” (Київ, 13-16 травня 1998 р.), ч. III. — Київ, НТУУ “КПІ”, 1998. — С. 9-15.

14 Вапник В. Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. — Москва: Наука, 1979. — 448 с.

15 Айду Э. А. И., Трунов В. Г. Дисперсия оценки скользящего контроля для линейной регрессионной модели // В кн.: Поиск зависимости и оценка погрешности. — Москва: Наука, 1985. — С. 50-57.

16 Пинскер И. Ш. Оценка метода обучения и обучающей выборки // В кн.: Моделирование и автоматический анализ электрокардиограмм. — Москва, Наука, 1973. — С. 13-23.

17 Пинскер И. Ш., Трунов В. Г. Построение решающего правила в некоторых задачах медицинской диагностики // Моделирование и автоматический анализ электрокардиограмм. — Москва: Наука, 1973. — С. 151-164.

18 Пинскер И. Ш., Трунов В. Г., Кипнис В. М., Айду Э. А. И. Имитационные оценки качества решения / В кн. Поиск зависимости и оценка погрешности. — Москва: Наука, 1985. — С. 14-32.

19 Теплицький І.О. Елементи комп'ютерного моделювання [Текст] / І.О. Теплицький – Кривий Ріг: КДПУ, 2010. – 264 с.

20 Рувінська В.М. Аналіз обчислювальних систем [Текст]: конспект лекцій для студентів фахів 8.091501 та 8.080403 / В.М. Рувінська – О.: Наука і техніка, 2006. – 120 с.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А
ЛІСТИНГ КОДУ ПРОГРАМИ РЕАЛІЗАЦІЇ ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

```
import sys
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import os

from docx import Document
from math import sqrt, e
from random import randint

N = 30
E = 0.001


class StdoutRedirection(object):
    """ Standard output redirection context manager """

    def __init__(self, path):
        self._path = path

    def __enter__(self):
        sys.stdout = open(self._path, mode='w')
        return self

    def __exit__(self, exc_type, exc_val, exc_tb):
        sys.stdout.close()
        sys.stdout = sys.__stdout__
```

```
def gen_data(dist_params, with_anom=False, with_ref=False, c=5, anom_c=9,
ref_params=(5, 2)):
    """ Generate experts evaluations """

    samples, data, u, normal_samples = [], [], [], []

    if with_ref:
        u = np.random.normal(*ref_params, size=N)

    for p in dist_params:
        for _ in range(p[2]):
            normal_samples = np.random.normal(p[0], p[1], size=N)
            samples.append(normal_samples)

    if with_anom:
        samples.append(N * [anom_c])

    for i in range(N):
        for sample in samples:
            if with_anom and sample is samples[-1]:
                number = sample[i]
            else:
                if with_ref:
                    number = int(round(u[i] + sample[i]))
                else:
                    number = int(round(c + sample[i]))

            if number > 10:
```

```
            data.append(10)
        elif number < 0:
            data.append(0)
        else:
            data.append(number)

    sigma_xi(data, u, with_ref)
    return data, u, normal_samples


def sigma_xi(data, u, ref, c=5):
    if ref:
        s = 0
        data = to_matrix(data, N)

        for j in u:
            for i in data:
                for k in i:
                    s += (k - j) * (k - j)

        print('sigma_xi = {0:.4f}'.format(sqrt(s / len(data))))

    else:
        print('sigma_xi = {0:.4f}'.format(sqrt(sum([(data[i] - c) * (data[i] - c)
                                            for i in range(len(data))]) / len(data))))


def to_matrix(a, n):
    """ Split list into n parts and return data matrix with parts like rows """
```

```
    k, m = divmod(len(a), n)
    return np.array([a[i * k + min(i, m):(i + 1) * k + min(i + 1, m)] for i in range(n)])


def iterative_eval(data, c=0.05):
    x = sum(data) / len(data)
    w = [1 / abs(i - x) if abs(i - x) else 1 / c for i in data]
    count = 1

    while True:
        x_prev = x
        x = sum([w[i] * data[i] for i in range(len(w))]) / sum(w)
        w = [1 / abs(i - x) if abs(i - x) else 1 / c for i in data]
        count += 1

        if abs(x - x_prev) <= E:
            break

    print('x = {0:.4f}, number of iterations: {1}, for data: {2}'.format(x, count, data))
    return x


def stats(matrix):
    m_marks, med_marks = [], []

    for i in matrix:
        m = np.mean(i)
        med = np.median(i)

        m_marks.append(m)
```

```
        med_marks.append(med)
        print('Mean: {0:.4f}, median: {1:.2f}, for data: {2}'.format(m, med, i))

    return m_marks, med_marks


def distance(data, center):
    return [sqrt(sum([(data[i][j] - center[i]) ** 2 for i in range(data.shape[0])])) for j
in range(data.shape[1])]


def n_distance(data, distances):
    return [i / ((np.amax(data) - 1) * sqrt(data.shape[0])) for i in distances]


def d_hist(distances, tit, hists_dir='hists'):
    plt.hist(distances)
    plt.title(tit)
    plt.savefig(hists_dir + '/' + tit + '.png')
    plt.clf()


def comp_level(distances, b=0.967, b0=15):
    return [1 / ((1 - b) * e ** (b0 * i) + b) for i in distances]


def objects_eval(data, comp, with_c=True):
    if with_c:
        return [sum(data[i] * comp) / sum(comp) for i in range(len(data))]
    else:
```

```
        return [sum(i) / data.shape[1] for i in data]


    def m_center(data):
        return [np.median(i) for i in data]


    def error(data, u, tit, ref, show_h, anom, c=5):
        if ref:
            errors = [data[i] - u[i] for i in range(len(data))]
        else:
            if anom:
                c = 2

            errors = [i - c for i in data]

        print('\n{0}\nError variance = {1:.5f}\nAverage error = {2:.5f}'.format(tit,
np.var(errors), np.mean(errors)))

        if show_h:
            d_hist(errors, tit)


    def explore(data, u, params, show_hist, ref, anom, name_part):
        """ Methods comparison with given data """

        m1, m2 = stats(data)

        error(m1, u, f'mean_evaluation_params_{params}_{name_part}', ref,
show_hist, anom)
```

```
error(m2, u, f'median_evaluation_params_{params}_{name_part}', ref, show_hist, anom)

print('\nIterative evaluation:\n')
m1 = [iterative_eval(row) for row in data]

error(m1, u, f'iterative_evaluation_params_{params}_{name_part}', ref, show_hist, anom)

z0 = [sum(data[i]) / data.shape[1] for i in range(data.shape[0])]
dist = distance(data, z0)
n_dist = n_distance(data, dist)

c = comp_level(n_dist)
e_obj = objects_eval(data, c)
est_obj = objects_eval(data, c, with_c=False)

error(e_obj, u, f'weighted_mean_evaluation_params_{params}_{name_part}', ref, show_hist, anom)

# Same calculations with new z0
mz0 = m_center(data)
m_dist = distance(data, mz0)
nm_dist = n_distance(data, m_dist)

m_c = comp_level(nm_dist)
me_obj = objects_eval(data, m_c)
```

```
            error(me_obj, u, f'weighted_mean_evaluation_with_median_score_params_{params}_{name_part}', ref, show_hist, anom)

            print('\nWeighted mean:\n\nZ0:', z0,
                  '\nDistances:', dist, '\nNormalized distances:', n_dist, '\nCompetence level:', c,
                  '\nEvaluation of objects:', e_obj, '\nZ0 with median score:', mz0, '\nDistances with median score:', m_dist,
                  '\nNormalized distances with median score:', nm_dist, '\nCompetence level with median score:', m_c,
                  '\nEvaluation of objects with median score:', me_obj, sep='\n')

            print('\nObject with the highest rating:', est_obj.index(max(est_obj)),
                  '\nObject with the highest rating (with competence):', e_obj.index(max(e_obj)),
                  '\nObject with the highest rating (with competence and median score):', me_obj.index(max(me_obj)))


        def check_folders(folders: list) -> None:
            """ Check and create necessary folders """

            for folder in folders:
                if not os.path.exists(folder):
                    os.makedirs(folder)


        def build_evaluations(data: np.ndarray, method: str = 'mean') -> np.ndarray:
            """
```

```
        Compute matrix mean / median by rows

        [data row_1 mean / median]
        ...
        [data row_n mean / median]
        """

        if method == 'mean':
            return np.mean(data, axis=1).reshape(data.shape[0], 1)

        return np.median(data, axis=1).reshape(data.shape[0], 1)


    def bootstrap_sample(matrix: np.ndarray, evaluation: np.ndarray) -> np.ndarray:
        """
        Generate bootstrap sample by formula:

        b_i = matrix_(z)_i_j + evaluation_<random_value_from_column>_j
        """

        sample = []

        for i in range(evaluation.shape[0]):
            row = []

            for j in range(evaluation.shape[1]):
                row.append(matrix[i][0] + evaluation[:, j][randint(0, evaluation.shape[0] -
1)])

            sample.append(row)
```

```
    return np.array(sample)


def get_correlation(mean_deltas: np.ndarray,
                    median_deltas: np.ndarray,
                    hist_filename: str,
                    directory: str,
                    save_hists: bool = True) -> float:
    """ Compute correlation coefficient for two given arrays and save histograms """

    coefficient = np.corrcoef(mean_deltas, median_deltas)[0][1]
    print(f'\nk = {coefficient}\n')

    if save_hists:
        plt.subplot(1, 2, 1)
        plt.hist(mean_deltas)
        plt.title('Mean deltas histogram')
        plt.subplot(1, 2, 2)
        plt.hist(median_deltas)
        plt.title('Median deltas histogram')
        plt.savefig(directory + '/' + hist_filename)
        plt.clf()

    return coefficient


def group_dispersion(mean_deltas: np.ndarray, median_deltas: np.ndarray,
original_median_deltas: np.ndarray) -> None:
    """ Compute group assessment dispersion """
```

```
original_median_deltas = original_median_deltas.reshape(mean_deltas.shape[0])

print('\nMean deltas:\n', mean_deltas)
print('\nMedian deltas:\n', median_deltas)

dispersion_mean = np.mean(np.power(mean_deltas, 2))
dispersion_median = np.mean(np.power(median_deltas, 2))
covariation = np.mean(mean_deltas * median_deltas)

print('\nCovariation:', covariation)
print('Mean dispersion:', dispersion_mean)
print('Median dispersion:', dispersion_median)

w_coefficient = dispersion_mean + dispersion_median - 2 * covariation
w1 = (dispersion_median - covariation) / w_coefficient
w2 = (dispersion_mean - covariation) / w_coefficient

print('W1:', w1)
print('W2:', w2)

dispersion_group = w1 * w1 * dispersion_mean + w2 * w2 * dispersion_median + 2 * w1 * w2 * covariation
print('Old group dispersion:', dispersion_group)

# compute new group dispersion

z_group = np.array([w1 * mean_deltas[i] + w2 * median_deltas[i] for i in range(len(mean_deltas))])
```

```
    print('\nZ group:\n', z_group, '\n')

    tilde_deltas = z_group - original_median_deltas

    dispersion_group_new = np.mean(np.power(tilde_deltas, 2))
    print('New group dispersion:', dispersion_group_new)


def save_bootstrap_results(results: list, filename: str) -> None:
    """ Save bootstrap results to .docx file """

    doc = Document()
    table = doc.add_table(rows=len(results), cols=2)
    table.style = 'Table Grid'

    for number in range(len(results)):
        table.cell(number, 0).text = np.array_str(results[number][0])
        table.cell(number, 1).text = str(results[number][1])

    doc.save(filename)


def tours(params_list, ref=False, s_dist=False, bootstrap_only=False):
    """ Main function """

    original_results_dir = 'original'
    original_hists_dir = 'original_hists'
    bootstrap_results_dir = 'bootstrap'
    bootstrap_hists_dir = 'bootstrap_hists'
```

```
    check_folders(['hists', original_results_dir, original_hists_dir, bootstrap_results_dir, bootstrap_hists_dir])

    for param_number, params in enumerate(params_list):
        print('Experts evaluation parameters:', params)

        # generate matrices

        if params is params_list[-1]:
            if ref:
                z, u, normal_samples = gen_data(params, c=2, with_anom=True, with_ref=True)
            else:
                z, u, normal_samples = gen_data(params, c=2, with_anom=True)
        else:
            if ref:
                z, u, normal_samples = gen_data(params, with_ref=True)
            else:
                z, u, normal_samples = gen_data(params)

        z = to_matrix(z, N)
        matrix_medians = build_evaluations(z, method='median')
        print('\ndata (Z matrix):\n', z)

        # build bootstrap matrix

        bootstrap_matrix = bootstrap_sample(matrix_medians, z - matrix_medians)
        print('\nBootstrap matrix:\n', bootstrap_matrix)

        # evaluate bootstrap matrix and save results
```

```
        bootstrap_mean_deltas = build_evaluations(bootstrap_matrix) - matrix_medians
        bootstrap_median_deltas = build_evaluations(bootstrap_matrix, method='median') - matrix_medians

        bootstrap_mean_deltas = bootstrap_mean_deltas.reshape(bootstrap_mean_deltas.shape[0])
        bootstrap_median_deltas = bootstrap_median_deltas.reshape(bootstrap_median_deltas.shape[0])

        correlation = get_correlation(
            bootstrap_mean_deltas,
            bootstrap_median_deltas,
            hist_filename=f'{params}_hist.png',
            directory=bootstrap_hists_dir,
            save_hists=s_dist
        )

        save_bootstrap_results(
            [(bootstrap_matrix, correlation)],
            filename=bootstrap_results_dir + f'/bootstrap_{params}.docx'
        )

        print('\nGroup dispersion')
        group_dispersion(bootstrap_mean_deltas, bootstrap_median_deltas, matrix_medians)

        # old evaluation for bootstrap matrix
```

```
        print('\nEvaluation for bootstrap matrix\n')

        if params is params_list[-1]:
            explore(bootstrap_matrix, u, params, show_hist=s_dist, ref=ref, anom=True, name_part='bootstrap')
        else:
            explore(bootstrap_matrix, u, params, show_hist=s_dist, ref=ref, anom=False, name_part='bootstrap')

        # original matrix (z) workflow

        if not bootstrap_only:
            # evaluate original matrix and save results

            matrix_mean_deltas = build_evaluations(z).reshape(N) - normal_samples
            matrix_median_deltas = matrix_medians.reshape(N) - normal_samples

            print('\nCorrelation for Z matrix')

            correlation = get_correlation(
                matrix_mean_deltas,
                matrix_median_deltas,
                hist_filename=f'{params}_hist.png',
                directory=original_hists_dir,
                save_hists=s_dist
            )

            save_bootstrap_results(
                [(z, correlation)],
                filename=original_results_dir + f'/original_{params}.docx'
```

```
            )

            print('\nGroup dispersion for Z matrix')
            group_dispersion(matrix_mean_deltas, matrix_median_deltas, matrix_medians)
            print('\n\n----------------------------\n\n')

            # old evaluation for original matrix

            if params is params_list[-1]:
                explore(z, u, params, show_hist=s_dist, ref=ref, anom=True, name_part=f'original')
            else:
                explore(z, u, params, show_hist=s_dist, ref=ref, anom=False, name_part=f'original')

        print('------------------------------\n\n')


if __name__ == '__main__':
    '''
    Input list structure:
        [[...(a, b, c)...], ...]

        a - first parameter of the normal distribution
        b - second parameter of the normal distribution
        c - number of experts

    Example:
        (0, 1, 6)
```

```
    - normal dist with (0, 1) parameters
    - 6 experts (6 columns in the data matrix)
'''

output_filename = 'output.txt'
t = [[(0, 1, 6)], [(0, 2, 6)], [(0, 3, 6)], [(0, 1, 2), (0, 2, 2), (0, 3, 2)], [(0, 1, 5)]]

with StdoutRedirection(output_filename):
    # with given parameters
    # delta_modulus - use absolute deltas or not (bool)

    tours(t, s_dist=True)

    # with given parameters and reference values
    # tours(t, ref=True, s_dist=True)

print('Done. Output saved to', output_filename)
```