

ТЕОРІЯ БІОТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ.
Том 2. Динаміка польових
взаємодій об'єктів



Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Г. Тимчик, В. Скицюк, Т. Ключко

**Теорія біотехнічних об'єктів.
Том 2. Динаміка польових взаємодій об'єктів**

Монографія

Рекомендовано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського

Київ
ТОВ «Інтердрук»

2017

УДК 621.317.615.47
Т41

Рекомендовано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 1 від 12.01.2018 р.)

Рецензенти:

Маслов В. П., д-р техн. наук, проф., ІФН ім. В. Є. Лашкарьова НАН України
Приміський В. П., канд. техн. наук, ст. наук. співроб., Заслужений винахідник України,
Генеральний директор ТОВ «АВТОЕКОПРИЛАД»

Тимчик Г.С., Скицюк В.І., Ключко Т.Р.

Т41 Теорія біотехнічних об'єктів. Том 2. Динаміка польових взаємодій об'єктів:
монографія. Київ: ТОВ «Інтердрук», 2017. – 224 с., іл.

ISBN 978-617-7431-07-6

Наведені результати досліджень є підґрунтям для створення нових інформаційних технологій надточного приладобудування. Розглянуто основні закономірності виникнення екстремальної зони абстрактного біотехнічного об'єкта, її властивості та засади взаємодії полів сукупності об'єктів. Виходячи з просторово-часових характеристик зон об'єктів запропоновано фізичні та математичні моделі структури поверхні об'єкта, що може надати можливість створення перетворювача параметрів об'єкта з підвищеною чутливістю до динаміки процесів, які аналізують. Обґрунтовано формалізовані аналітичні моделі існування та взаємодій об'єктів технічного та біологічного походження у просторі зонного розподілу польових структур зон об'єктів. Визначено умови реєстрації просторово-часових координат розташування поверхні об'єкта, що створює підґрунтя його надточної реєстрації та подальшого аналізу його змінення у часі.

Книгу розраховано на наукових та інженерно-технічних працівників, фахівців приладобудівної галузі промисловості, студентів старших курсів вищих навчальних закладів з технологічного та інженерно-медичного напрямку комп'ютерно-інтегрованих технологій.

ISBN 978-617-7431-07-6

УДК 621.317.615.47

© Тимчик Г.С., Скицюк В.І.,
Ключко Т.Р., 2017

Друк ТОВ «Інтердрук»

03148, м. Київ, вул. Пшенична, 2 тел. (044) 495-0154

Номер і дата запису в Єдиному державному реєстрі юридичних осіб та осіб-підприємців
про проведення державної реєстрації № 1 0721020000 029235 від 29.08.2013 р.

Ідентифікатор видавця у системі ISBN № 97384

Підл. до друку 15.01.2018 р. Формат 60 x 84 1/16. Папір офсетний.

Гарнітура Times.

Спосіб друку-різографія. Ум. друк. арк. 13,02

Наклад 250 прим. Зам. № 0416/17

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

5

**РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ФІЗИЧНІ ПРИНЦИПИ УТВОРЕННЯ
ПАНДАННОЇ ЗОНИ БІОТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ**

6

1.1. Феноменологічне підґрунтя панданної зони абстрактного об'єкта

7

1.2. Загальні фізичні принципи побудови об'єму та масу панданної

14

зони об'єкта

16

1.2.1. Панданна зона елементарних абстрактних об'єктів

1.3. Теоретичне підґрунтя інформаційних властивостей панданних зон

26

абстрактної сутності

29

1.4. Загальні тези критичних обмежень панданної зони об'єкта

36

1.5. Фізична модель утворення панданного вакууму

41

1.6. Енергетична насиченість панданної зони

1.7. Визначення координати уявно-реальної поверхні межевої

44

панданної зони об'єкта

1.8. Складні та нескладні форми абстрактного об'єкта. Імпульс

64

панданної зони

76

1.8.1. Теоретичне підґрунтя імпульсу панданної зони

90

1.9. Панданний всесвіт

93

1.10. Класифікація панданних зон об'єкта

97

Перелік посилань до розділу 1

**РОЗДІЛ 2. ПАНДАННА ЗОНА МІКРООБ'ЄКТІВ І
ТЕХНОЛОГІЧНИХ ФАНТОМІВ**

99

2.1. Вплив формотворення поверхні на форму та розміри панданної

100

зони

2.2. Елементарна частка похибки вимірювання та її панданна зона

103

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	5
РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ФІЗИЧНІ ПРИНЦИПИ УТВОРЕННЯ ПАНДАННОЇ ЗОНИ БІОТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ	6
1.1. Феноменологічне підгрунття панданної зони абстрактного об'єкта	7
1.2. Загальні фізичні принципи побудови об'єму та масу панданної зони об'єкта	14
1.2.1. Панданна зона елементарних абстрактних об'єктів	16
1.3. Теоретичне підгрунття інформаційних властивостей панданних зон абстрактної сутності	26
1.4. Загальні тези критичних обмежень панданної зони об'єкта	29
1.5. Фізична модель утворення панданного вакууму	36
1.6. Енергетична насиченість панданної зони	41
1.7. Визначення координати уявно-реальної поверхні межевої панданної зони об'єкта	44
1.8. Складні та нескладні форми абстрактного об'єкта. Імпульс панданної зони	64
1.8.1. Теоретичне підгрунття імпульсу панданної зони	76
1.9. Панданний всесвіт	90
1.10. Класифікація панданних зон об'єкта	93
<i>Перелік посилань до розділу 1</i>	97
РОЗДІЛ 2. ПАНДАННА ЗОНА МІКРООБ'ЄКТІВ І ТЕХНОЛОГІЧНИХ ФАНТОМІВ	99
2.1. Вплив формотворення поверхні на форму та розміри панданної зони	100
2.2. Елементарна частка похибки вимірювання та її панданна зона	103

2.2.1. Панданна зона фантому просторової похибки	115
2.2.2. Панданна зона шорсткості абстрактного об'єкта	132
2.2.3. Моделювання енергетичних процесів елементарного об'єму абстрактного об'єкта	135
2.3. Панданна зона реальної системи координат	152
2.4. Поняття про активну частину поверхні абстрактної сутності та її панданну зону	161
2.4.1. Геометричні особливості активної поверхні торкання	165
<i>Перелік посилань до розділу 2</i>	173
РОЗДІЛ 3. ПАНДАННА ЗОНА БІОЛОГІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ	175
3.1. Особливості визначення системи координат просторово-часового руху об'єкта	175
3.1.1. Похибки руху об'єкта	191
3.2. Панданна зона просторового руху кінцівок біологічного об'єкту	199
3.2.1. Моделювання руху руки людини	207
3.3. Фізико-математична модель повної панданної зони біологічних об'єктів на засадах задачі Діріхле	214
<i>Перелік посилань до розділу 3</i>	223

ПЕРЕДМОВА

Наразі читачу пропонується монографія з низки видань, які висвітлюють теоретичні засади технології ТОНТОР. Одним з напрямків досліджень у технології ТОНТОР та її базових понять є абстрактний об'єкт, який може мати опис за допомогою низки фізичних законів. Наведені у цьому Томі 2 монографії теоретичні та практичні дослідження засад технології ТОНТОР є продовженням досліджень, викладених у попередньому Томі 1. Як наслідок проведених авторських досліджень було обумовлено поняття панданної зони.

Панданна зона є фундаментальним фізичним явищем, яке супроводжує об'єкти в оточуючому середовищі та характеризує періодичну присутність частини маси об'єкта в просторі навколо себе. Орієнтуючись на динаміку цього процесу, було обрано назву від українського слова «пандан – укр.» як частина об'єкта, яка при віддаленні від основної маси об'єкта поступово сходить нанівець. Це фізичне явище спостерігається в об'єктах на атомарному рівні при русі атому в просторі, наприклад при хімічних реакціях, а також для великогабаритних об'єктів на кшталт небесних тіл, які утворюють панданну зону під час обертання навколо своєї вісі та руху в космічному просторі. Панданні зони мають властивість фізичних полів: магнітного, електричного, електромагнітного, гравітаційного тощо. Всі фізичні об'єкти взаємодіють, використовуючи панданні зони, що призводить до утворення нових панданних зон.

Явище панданної зони є притаманним всім без виключення об'єктам технічного та біологічного походження і має фізичний та математичний опис, що дозволяє аналізувати динаміку проходження масою об'єкту простору в визначеному часі. Цей том містить опис основних закономірностей взаємодії об'єктів, що надає ґрунтовне пояснення багатьом фізичним процесам, які супроводжують існування та дії абстрактних об'єктів.

РОЗДІЛ 1

ЗАГАЛЬНІ ФІЗИЧНІ ЗАСАДИ УТВОРЕННЯ ПАНДАННОЇ ЗОНИ БІОТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Явище панданної зони (ПЗ) попередньо розглядалося у першій книзі, присвяченій існуванню абстрактних об'єктів (АО) [1], але як констатація факта, що вона є як така у кожного об'єкта. Було показано, що розміри панданної зони залежні від форми об'єкта.

Таким чином, серед усіх властивостей абстрактної сутності (АС), наприклад, технологічного об'єкта (ТО) властивість руху є такою, що її необхідно піддати окремому розгляду. Для АС із загального погляду дуже важливою властивістю є можливість руху своєю масою, тобто керування зовнішньою формою відносно центру мас та руху всієї маси у відповідному напрямку.

Але для виконання певних дій АС повинна контактувати з іншими АС в наслідок чого утворюються нові властивості. За такої взаємодії обов'язково необхідно знати місце торкання для того, щоб виконати заплановані дії. Ця вимога призводить до того, що в цьому випадку необхідно знати координати крапки торкання, яку неможливо визначити не володіючи інформацією про форму та рухи АС. Наразі, де знаходиться вишукувана крапка торкання невідомо, оскільки об'єкт АС рухається у просторі, створюючи об'єм із плинною масою.

Цей об'єм, у межах якого АС може доторкнутися до будь-якого іншого об'єкту, не порушуючи при цьому своєї траєкторії руху, має назву панданної зони (ПЗ). Живі об'єкти тут мають бути враховані як найбільш яскраві приклади. У техніці це є найбільш дошкульний спосіб руху, коли він має примусовий характер, а центр руху не завжди співпадає з геометричним та масовим центрами АС. Наразі можна констатувати, що ПЗ реалізовується у три основних способи.

1.1. Феноменологічне підґрунтя панданної зони абстрактного об'єкта

Перший спосіб руху відносно центру мас може відбуватися силовими елементами, як, наприклад, літак, що має можливість змінювати геометрію крила, випускати шасі тощо.

Згідно наступного способу ПЗ об'єкта може утворюватись обертанням навколо непорушного центру мас, наприклад земна куля, турбіна, пропеллери літака тощо.

Третій спосіб, тобто комбінований, об'єднує властивості обох попередніх. У такому випадку АС обертається навколо центру мас, одночасно змінюючи свою форму. Досить достеменним прикладом тут є випадок зміни кроку гвинта літака з турбогвинтовими двигунами. Ту ж саму траєкторію відпрацьовують гіроскоп, фреза у шпинделі тощо.

Тобто характерним для ПЗ є те, що деяка частина маси АС, або і вона сама, може періодично (або циклічно) виникати у просторі відповідною частиною свого об'єму, що є визначеними її фізичними та геометричними властивостями та способом руху, та створювати навколо себе зону присутності (ЗП).

Для вільного у русі АС є характерним те, що у будь-якому випадку воно намагається у будь-який спосіб отримати ПЗ у вигляді кулі. Для підтримки подібної форми АС повинен періодично контролювати всі координати такої ЗП своєї фізичної маси. Оскільки одночасно це зробити неможливо, то АС періодично контролює ту чи іншу точку простору.

Час, необхідний для такого почергового контролю, має назву періоду ворокола ПЗ. Загальний закон руху має назву *вороколо* [2]. Намагання дійти кулеподібної форми під час свого циклу руху, то не є авторською вигадкою, – це є оптимальний спосіб життя у всесвіті. Водночас, легше користуватися моделлю АО, коли він фігурує у вигляді кулі, або тіла, вельми наближеного до неї. Тому для зручності надалі, тобто аналітичного розгляду, матимемо на увазі саме такий за формою об'єкт, якщо не існує інших зауважень.

Для прикладу розглянемо об'єкт, котрий має кулясту форму та знаходиться нерухомо у початку координат (рис. 1.1). Для такого об'єкту характерним є те, що він за умови ідеальної форми, тобто відсутності її відхилень, не реєструється ніякими відомими методами та має форму кулі з радіусом R_0 . Радіус R_0 , як довели авторські дослідження, не є достеменним, а тим більше абсолютним значенням, тому що, навіть за найдосконаліших технологічних процесів отримання будь-якої деталі, існують відхилення її форми. Тому і радіус R_0 є не більше ніж наближення до бажаної форми і, навіть, не до її розмірів.

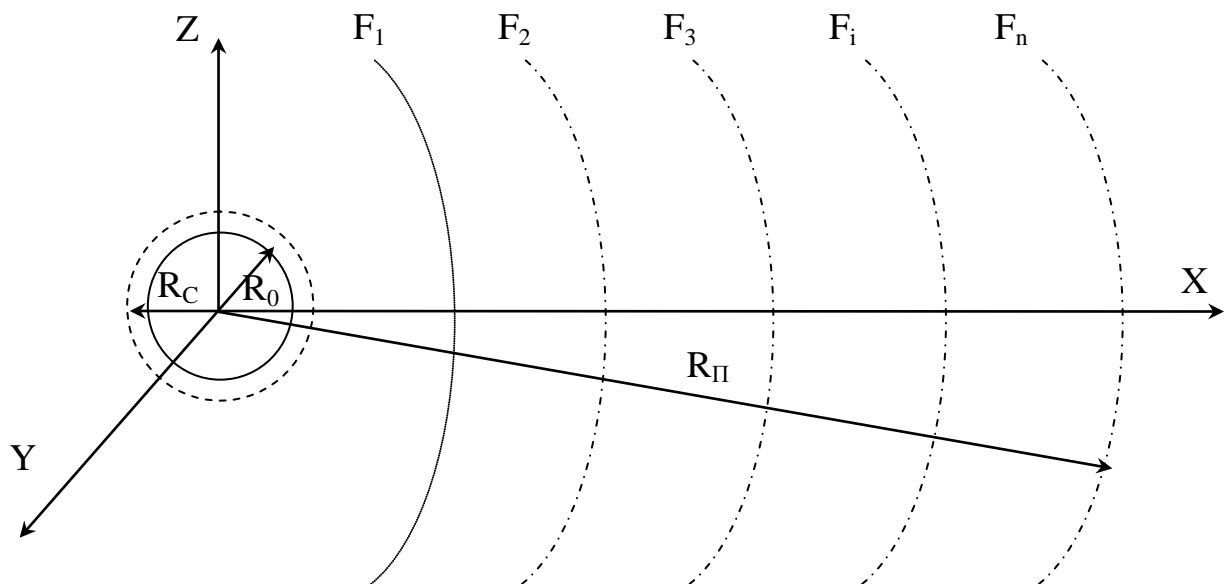


Рис. 1.1. Моделювання зон присутності АС кулеподібної форми

При розгляді цієї проблеми постає питання: що саме вважати величиною R_0 . У такому випадку технологічні вимірювання припадають до ситуації, коли обраний метрологічний інструмент зі значною точністю завжди даватиме нульове відхилення для R_0 незалежно від напрямку вектора вимірювання. Але перехід до більш точного інструмента завжди даватиме однозначні відхилення розміру. Одночасно з цим постає дуже гостре питання: від чого саме ми робимо вимірювання - від центру мас чи від геометричного центру АС ? Якщо не існує

жодних проблем з деталлю (тобто жорстких конструкторських умов), то і проблема не є вже надто важливою, хоча і впливає на кінцевий результат.

У більш вибагливому випадку, тобто, наприклад, у надточних технологіях, виникає потреба сягати похибок величиною не більш, ніж мікрометри та їх відсотки (нанотехнологія, пікотехнологія). При цьому розміри різниці між центром мас як наслідком анізотропії структури деталі та її геометричним центром постає все більш і більш важливим питанням.

Основним чинником цієї проблеми є те, що між процесом використання деталі та її технологічним виготовленням існує досить суттєва різниця. Так, наприклад, вали, які виготовлені на токарному верстаті або протяжкою, мають досить суттєву різницю у характеристиках при подальшому використанні. Точений вал може використовуватися на великих обертах руху в той час, як вал з протяжки може бути використаний або як підвіска обертальних об'єктів, або як деталь для малих обертів. Тобто виникає проблема вже на найнижчому рівні розходження центру мас та геометричного центру. Вирішити цю проблему на сучасному рівні, хоч і можливо, але технологічно невигідно, оскільки подібне сортування викликає відповідні економічні втрати.

У випадку, коли об'єкт є нестабільним за формою (пульсує) або має неправильну форму і обертається, або є анізотропним за своєю структурою і обертається, то об'єм ПЗ об'єкту буде збільшено на деяку величину, а радіус уявної кулі буде більше за R_0 . Різниця у просторі між об'ємом R_c та об'ємом R_0 становитиме ПЗ. Пояснимо це діаграмами на рис. 1.2.

На рис. 1.2,*a* відображено ситуацію, коли АС, який має відхилення форми від ідеальної, ще й обертається у просторі навколо своєї осі. У цьому випадку ситуація найбільш простіша, оскільки за максимальним відхиленням форми є щільний зв'язок з R_c . Рухливий цикл часу у цьому випадку буде спорівненим з ω . Зовнішня поверхня ПЗ у цьому випадку буде лише наближатися до кулеподібної. Але, якщо вісь обертання має ще й прецесію Ω , то ПЗ буде ідеалізованою за формою, але рухливий цикл збільшиться до Ω .

Пік максимальної потужності, яку може сягати АС у часі, залежатиме від двох основних швидкісних параметрів ω та Ω . Оскільки це явище є періодичним, то це дуже ускладнює можливості прямого контролю за об'єктом.

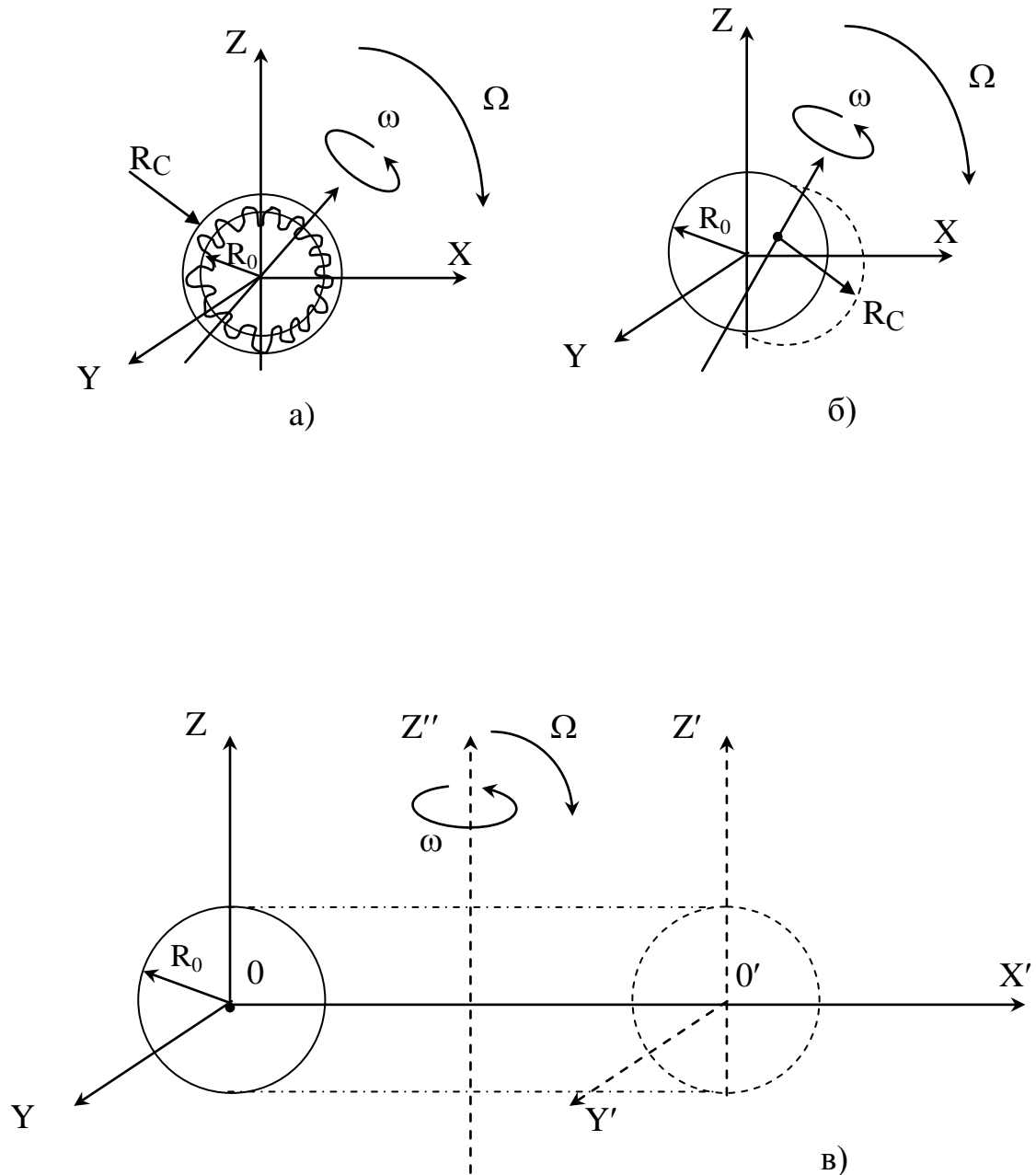


Рис. 1.2. Панданна зона присутності об'єкту, де: а) ПЗ створена за спотворень шорсткості та форми, а також обертання навколо центра мас; б) ПЗ створена анізотропією маси та обертання навколо неї; в) ПЗ, яка створена комбінованим рухом об'єкту

На рис. 1.2,б відображено випадок для АС із анізотропною внутрішньою побудовою. Щодо об'єктів такої побудови необхідно відзначити, що, навіть у такому ідеалізованому випадку, зсув центру маси від геометричного є досить розповсюдженим явищем. Особливо воно є дошкульним у різних галузях техніки, де призводить до швидкого руйнування технічних об'єктів подібної форми, наприклад, кульових підшипників, тому що воно створює коливальні навантаження на треки. У простому випадку ПЗ, хоч і має вигляд, схожий на еліпсоїд обертання, але це є лише наближенням. Насправді вона куди більш складніша, позаяк є перехідною об'ємною фігурою від еліпсоїда до тороїда. Значення R_c у цьому випадку невизначено для опису ЗП, оскільки досить часто невідоме розташування центру мас. Тим не менш, додавання прецесії Ω призведе до кулеподібної за формою ПЗ.

На рис. 1.2,в відображено наступний випадок, коли об'єкт не обертається, але має коливальний рух від точки O до O' . З рисунків дуже добре видно, що об'єкт створює ПЗ у формі циліндра радіусу R_0 та довжиною у подвійну амплітуду, до якої необхідно додати дві півкулі радіусу R_0 . Визначитися з радіусом R_c у такому випадку взагалі неможливо, оскільки тут втрачається саме його поняття як такого.

Наступна ситуація виникає, де відбувається обертання об'єкту навколо осі Z'' (рис. 1.2,г). Тоді об'єкт створюватиме у просторі геометричну фігуру, яка матиме форму ламаного тороїда. Якщо ми розглянемо ще й прецесію Ω , то форма ПЗ наблизиться до кулястої. Для АС з таким рухливим циклом є характерним те, що у кожний момент часу його розташування у просторі ПЗ буде залежним від фази руху.

З вище наведених прикладів дуже добре видно, що будь-який АС у просторі має можливість мати координати, які залежні від фази руху у циклі. Є досить зрозумілим, що не всі об'єкти технічного, біологічного, а тим більше біотехнічного походження мають замкнені рухливі цикли ворукола перших

порядків. Здебільшого це більш високі порядки, які є притаманними їх застосуванню у техніці.

Окрім того, необхідно зауважити, що існує і система відліку координат, де все відбувається. Так, наприклад, деталь (або інструмент) на верстаті відтворюють такий циклічний рух у системі координат верстата. Тому достатньо звичайного погляду, щоб уявити ПЗ деталі або інструмента. Але через обмеженість сприйняття простору людину не цікавить той факт, що деталь та інструмент разом з верстатом обертаються навколо земної осі з швидкістю десятків і сотень метрів на секунду (на екваторі швидкість сягає 400 м/с). Окрім того, земна куля рухається навколо Сонця зі швидкістю 30 км/с. Уся сонячна система рухається у космічному просторі зі швидкістю 215 км/с. Але тим не менш, це знов-таки не впливає на сприйняття людиною зовнішнього простору, тому що перші (макро) порядки людина просто не сприймає, тобто існує заангажованість саме тими процесами, які є можливість наочно побачити, а отже зрозуміти. Тут необхідно звернути увагу на те, що приклад для ПЗ, наведений на рис. 2.2,*a*, є певною моделлю земної кулі. Задача ускладнена тим, що форма земної кулі не є еліпсоїдом, а має форму геоїда Косовського.

Дотепер вирішити повну задачу такого руху не є можливим з наступних чинників [3]. Так, наприклад, задача з поступальним рухом на обмеженому проміжку часу $[0, t]$ вимагає умови, щоб кутова швидкість була Ω , а прискорення $\mathbf{a} = 0$. Окрім того, коріолісове прискорення теж дорівнює нулю. У такому випадку швидкість \mathbf{v} та прискорення \mathbf{a} для АС визначатиметься як векторна сума, тобто

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i. \quad (1.1)$$

Якщо швидкості всіх точок АС є рівними лише у визначений момент часу, то рух є миттєво поступальним. При цьому прискорення точок може бути різним, і їх не можна підсумовувати за залежністю (1.1), бо у цьому разі, хоч

кутова швидкість ω і дорівнює нулю, кутове прискорення може не дорівнювати нулю.

Сукупність n миттєвих обертань вирішується лише навколо перерізу в одній точці осей з миттєвою кутовою швидкістю, тобто:

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \quad (1.2)$$

та прискоренням

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i. \quad (1.3)$$

Звідсіля ясно, що вирішити задачу ПЗ наразі можливо лише для спрощених приватних випадків.

У конкретному випадку вирази (1.1), (1.2) та (1.3) бездоганно діють для замкненої у просторі системи, тобто у мірилах визначеної системи координат за умови, що відносний рух його елементів не вступає у протиріччя з вищезначеними залежностями. Але ж існують проблеми з об'єктами, де оберти мають близько $30000 \div 70000$ об/хв, що викликає відповідну реакцію на рушійну систему. Це призводить до відповідних навантажень на систему опору та їх відповідну деформацію під дією колової частоти земної кулі.

Для того, щоб достеменно з'ясувати цю проблему, необхідно ввести відповідну градацію, тобто визначити відповідні рівні значень ω для кожного з технологічних випадків.

По-перше, є такі рухи у просторі, які стосуються руху у світовому просторі. Тобто $\omega = 10^{-20} \div 10^{-50}$ рад/с необхідно сприймати як лінійні. Те ж саме стосується рухів $\omega = 10^{-10} \div 10^{-20}$ рад/с. І лише випадки, що стосуються конкретних технологічних операцій $\omega = 10^0 \div 10^{10}$ рад/с, можна вважати за технологічні швидкості.

Користуючись для цього випадку типовим розкладом у ланцюги Фур'є, тобто

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1.4)$$

можна стверджувати, що існує певний перехід, або градації, тобто

$$f(x) = \sum_{\substack{k=1 \rightarrow i \\ i=n-i \\ n=\infty}}^{\infty} \{ [a_k \cos(k\omega + \varphi_k) + b_k \sin(k\omega + \varphi_k)] + \\ + [a_i \cos(i\omega + \varphi_i) + b_i \sin(i\omega + \varphi_i)] + [(a_n \cos(n\omega + \varphi_n) + b_n \sin(n\omega + \varphi_n))], \quad (1.5)$$

де $[a_k \cos(k\omega + \varphi_k) + b_k \sin(k\omega + \varphi_k)]$ – є швидкість загальносвітового руху, який ми сприймаємо як лінійно-поступальний;

$[a_i \cos(i\omega + \varphi_i) + b_i \sin(i\omega + \varphi_i)]$ – рух на межі чутливості існуючих систем контролю, або технологічної необхідності, щодо виконання того чи іншого виробу;

$[a_n \cos(n\omega + \varphi_n) + b_n \sin(n\omega + \varphi_n)]$ – є ті рухи, які відбуваються у нашій координатній системі та цікавлять нас більше за все.

Для прикладу розглянемо кілька простих випадків панданних зон, які почасти зустрічаються у техніці.

1.2. Загальні фізичні принципи побудови об'єму та масу панданної зони об'єкта

Якщо зробити підсумок з попереднього розгляду, то існує можливість зробити низку висновків стосовно ПЗ ТО. Наразі це можливо зробити лише для ТО циліндричної форми, які були розглянуті у попередніх прикладах.

Для ТО такої форми ми маємо можливість констатувати той факт: якщо $f(x, y, z)$ є функція форми, то загальний об'єм ТО може бути записаний у вигляді

$$V_{\text{ТО}} = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (1.6)$$

Якщо ТО має масу, розподілену у просторі (питома маса), як $\rho_i(x, y, z)$, то загальна маса

$$M_{\text{ТО}} = \iiint_{(V)} \rho_i(x, y, z) dx dy dz.$$

З (1.6) маємо наступне.

Маса, яка обертається вздовж осі Z, за своєю формою являє собою криволінійний або детермінований циліндр з оболонкою, товщину якої визначимо як Δ .

Користуючись цією тезою, визначаємо, що об'єм криволінійної циліндричної оболонки ($V_{\text{ОБ}}$) може бути визначений як

$$V_{\text{ОБ}} = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz - \iiint_{(V)} f(x - \Delta x, y - \Delta y, z - \Delta z) dx dy dz.$$

Питома маса розглядуваної оболонки $[\rho_i(x, y, z)]$ не може бути єдина. Їх мінімум дві, тобто перша найбільш вагова (тяжка), а наступна може бути значно менша. Навіть якщо питома вага функції $\rho_i(x, y, z) = 0$, то це означає лише те, що ТО обертається у вакуумі.

У такому випадку загальна маса оболонки може розглядатися як

$$M_{\text{ОБ}} = M_1(x, y, z) - M_1(x - \Delta x, y - \Delta y, z - \Delta z) + M_2(x, y, z) - M_2(x - \Delta x, y - \Delta y, z - \Delta z) + M_i(x, y, z) - M_i(x - \Delta x, y - \Delta y, z - \Delta z), \quad (1.7)$$

де $i=2, 3, 4 \dots n$ – кількість елементів ТО.

У загальному випадку вираз (1.7) можна записати у вигляді

$$M_{\text{ОБ}} = \sum_{i=2}^n M_i(x, y, z) - \sum_{i=2}^n M_i(x - \Delta x, y - \Delta y, z - \Delta z). \quad (1.8)$$

У підсумку питому масу ПЗ, яка складається з n елементів ТО, можна записати як залежність наступного вигляду

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{М}} &= \frac{\sum_{i=2}^n M_i(x, y, z) - \sum_{i=2}^n M_i(x - \Delta x, y - \Delta y, z - \Delta z)}{V_{\text{ОБ}}} = \\ &= \frac{\sum_{i=2}^n \iiint_{(V)} \rho_i(x, y, z) dx dy dz - \sum_{i=2}^n \iiint_{(V)} \rho_i(x - \Delta x, y - \Delta y, z - \Delta z) dx dy dz}{\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz - \iiint_{(V)} f(x - \Delta x, y - \Delta y, z - \Delta z) dx dy dz} \end{aligned}$$

Оскільки радіус R для кожної ділянки оболонки є різний ТО, то загальна функція швидкості потоку маси матиме наступний вигляд

$$V(x, y, z) = \omega \iiint_{(V)} R(x, y, z) dx dy dz. \quad (1.9)$$

Швидкість потоку маси у такому випадку визначатиметься як

$$V_m = \omega \cdot \Pi_m \cdot \iiint_{(V)} R(x, y, z) dx dy dz.$$

Мінливість панданної маси буде визначатися як

$$M_{ПЗ} = \omega \cdot \Pi_m \cdot \iiint_{(V)} R(x, y, z) dx dy dz \cdot \sin n(\omega t + \varphi),$$

при $n = 2, 3, \dots, E\left(\frac{\pi d_0}{l}\right)$.

Отже, як висновок, ми маємо можливість зробити наступні зауваження:

- панданна зона є фундаментальною властивістю будь-якого ТО без виключень;
- при взаємодії двох ТО передача енергії йде у межах панданної зони;
- будь-яка металообробка призводить до утворення нових панданних зон деталі та інструмента;
- форма панданної зони та динаміка її руху є основою для створення зони присутності ТО;
- взаємодія панданних зон ТО визначена як фундаментальний фізичний закон.

1.3. Панданна зона елементарних абстрактних об'єктів

Оскільки у попередньому підрозділі розглянули основні засади утворення панданної зони АС, то для повноцінного розгляду процесів, які відбуваються у межах ПЗ та навколо неї визначимо кілька базових понять, пов'язаних з формою об'єкту. Отже, якщо ми розглядаємо форму АС, то найперше, що об'єднує форми – це не розміри, а геометрія об'єкта. Саме геометрія об'єкта є визначальною за всіх технологічних процесів. Наразі існує можливість

виділити наступні геометричні фігури, з яких є можливість шляхом об'єднання будувати складні за формою АС. Таким чином, виділяємо наступні геометричні фігури : точка, крапка, лінія, прямокутник, паралелепіпед, коло. Серед усіх цих фігур найскладніші є точка та крапка і тому розглядається окремо.

Для прикладу розглянемо кілька простих випадків панданних зон, які почасти зустрічаються у природі та техніці.

Найпростіший випадок – це рух елементарного відрізка довжини $0 < l_0$, $S_B > S_k$, де S_B – переріз відрізка, а S_k – критичний переріз чутливості чутника (рис. 1.3).

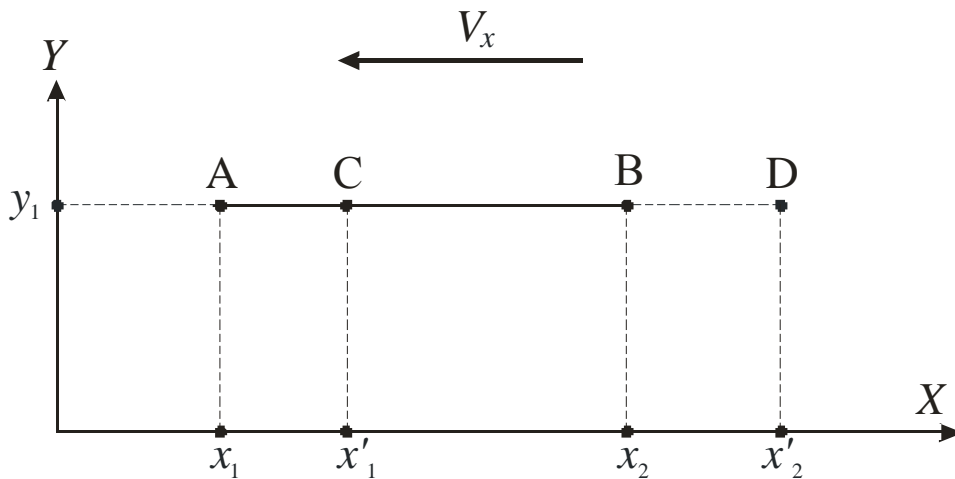


Рис. 1.3. Панданна зона елементарного відрізка АВ

Якщо рух відбувається за незмінної координати y_1 , то у декартовій системі координат це буде нескінченний об'єм через нескінченну довжину. При обмеженні координат руху відповідно обмежується об'єм. При необхідності реєстрації розмірів елементарного відрізка виникають наступні проблеми. За реєстрації координати незалежним чутником результати вимірювання суттєво відрізняються від реальних. Основним чинником цього явища є безпосередній вплив закону, за яким відбувається реєстрація координати, тобто [1].

Яким би якісним не був чутник, але для того, щоб він спрацював, потужність сигналу, яка йде від початкової точки А, повинна сягати певного рівня. Тим не менш, елементарний відрізок АВ продовжує рухатись і за час,

необхідний для реєстрації, змінює свої координати у просторі.

Початкова точка A пересувається у точку C , тобто координата вимірювання є не x_1 , а x_1' . У цьому випадку створюється уявне скорочення довжини елементарного відрізка AB на величину

$$\Delta_{1x} = x_1' - x_1 = t_T \cdot v_x, \quad (1.10)$$

де t_T – час, необхідний для виміру координати за входним сигналом.

Аналогічна ситуація створюється і при вимірюванні кінцевої точки B елементарного відрізка.

За визначеного часу вимірювання $t_{\bar{T}}$ точка B пересувається з точки $B(x_2)$ у позицію з координатою x_2' , тобто

$$\Delta_2 = x_2' - x_2 = t_{\bar{T}} \cdot v_x,$$

де $t_{\bar{T}}$ – час визначення координати за сигналом виходу.

Існує умова, коли $t_T < t_{\bar{T}}$ [1]. Така умова є закладеною у побудові чутників автоматично, оскільки це вимагається двома чинниками:

- По-перше, це умова, яка висувається законом [1], котрий закладено у принцип роботи системи;
- По-друге, це умова нерозривності процесу вимірювання (у разі невиконання якої система дестабілізується).

Це призводить до того, що завжди повинна виконувати нерівність $\Delta_1 < \Delta_2$, і довжина елементарного відрізка завжди при вимірюванні буде довшою на величину

$$\Delta l = \Delta_2 - \Delta_1.$$

При цьому довжина панданної зони становитиме

$$\Lambda = L + \Delta_2,$$

де L – довжина відрізка AB .

Якщо елементарний відрізок має поступально зворотній рух, то реальна довжина ПЗ становитиме

$$\Lambda = A_0 + L_0,$$

де A_0 – амплітуда поступально-зворотного руху.

При цьому система виміру буде інформувати, що розмір такої зони становитиме

$$\Lambda_B = A_0 + L_0 - 2\Delta_1.$$

Тобто між реальною зоною та системою вимірів координат існує похибка, що залежна від якісних показників системи вимірювання та швидкості відносного руху об'єкта, а також чутливого елементу (ЧЕ) виміру, і яку неможливо знищити.

Величини Δ_1 та Δ_2 є фантомами похибки визначення просторової координати.

Теоретично ліквідувати її можна було б лише у два способи:

- нескінченне підвищення якості чутників, тобто $\lim t_T \rightarrow 0$ та $\lim t_{\bar{T}} \rightarrow 0$, що вкрай складно з погляду технічної реалізації, тобто фізично нереалізуємо;
- нескінченне зменшення швидкості відносного руху, але ж, по-перше, почасти об'єкт незалежний у своєму русі, а, по-друге, нема відносно руху – немає вимірювання.

Тобто для наведеного вище прикладу дуже добре видно, що реальна ПЗ відрізка AB при нескінченному русі становитиме

$$[\mathbf{P}]\Lambda = (\infty - L_0) \cdot S_{AB}. \quad (1.11)$$

При вимірюванні

$$[\mathbf{P}]\Lambda' = (\infty - L_0 + 2\Delta_{2x} - \Delta_x) \cdot S_{AB}, \quad (1.12)$$

де S_{AB} - площа перерізу відрізка AB перпендикулярна вектору v_x .

При цьому є можливість визначитися з розмірами фантому ПЗ похибки

$$[\mathbf{P}]\Phi = [\mathbf{P}]\Lambda' - [\mathbf{P}]\Lambda = (2\Delta_{2x} - \Delta_x) \cdot S_{AB}. \quad (1.13)$$

Наступний приклад: панданна зона елемента прямокутної форми, який має поступальний рух (рис. 1.4,а).

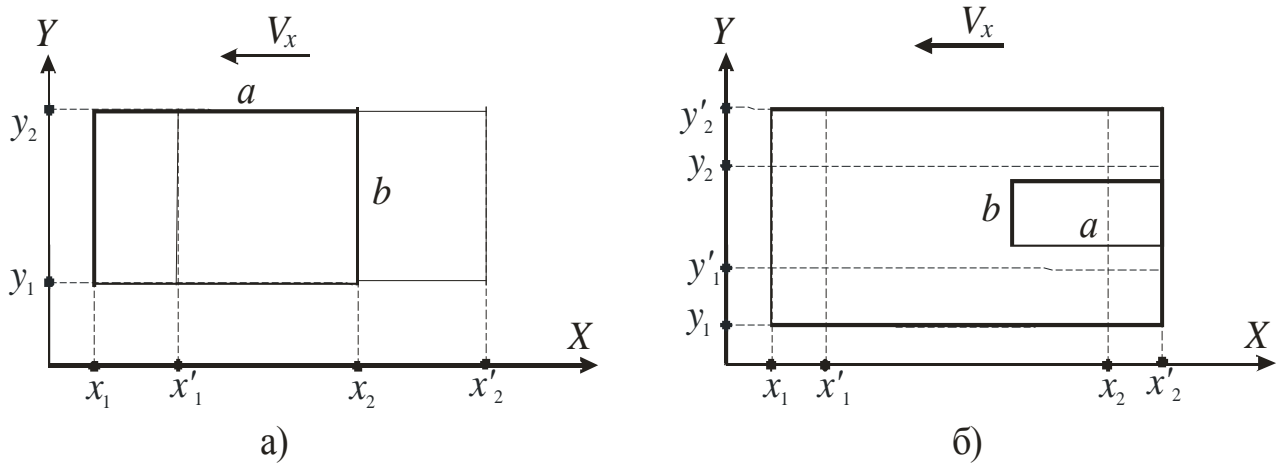


Рис. 1.4. Панданна зона плоского елемента

У цьому випадку є справедливими всі попередні тези стосовно елементарного відрізка. Єдина різниця полягає в тому, що необхідно враховувати площу геометричної фігури $S_{\Pi} = a \times b$. У просторі це буде стрічка шириною b та відповідної товщини h_{Π} .

При ускладненні процесу, тобто, коли рух відбувається по двох напрямках, тобто, окрім швидкості v_x , існує ще швидкість v_y , ПЗ займає площу, котра не обмежується будь-яким із розмірів прямокутника a або b , як у попередньому випадку (рис. 1.4,б).

Розміри реальної зони у такому випадку будуть відповідно:

$$\begin{aligned}\Lambda_x &= x_2 - x_1 = A_x + a; \\ \Lambda_y &= y_2 - y_1 = A_y + b; \\ [\mathbf{P}]\Pi &= \Lambda_x \cdot \Lambda_y \cdot h_{\Pi}.\end{aligned}\tag{1.14}$$

де A_x, A_y – відповідні амплітуди відхилень по координатах X та Y .

При цьому ПЗ реєстрації буде обмеженою координатами y'_1, y'_2 та x'_1, x'_2 , тобто

$$\begin{aligned}
\Lambda'_x &= x'_2 - x'_1 = A_x + a - 2\Delta_1(x); \\
\Lambda'_y &= y'_2 - y'_1 = A_y + b - 2\Delta_1(y); \\
[\mathbf{P}]\Pi' &= \Lambda'_x \cdot \Lambda'_y \cdot h_{\Pi}.
\end{aligned}
\tag{1.15}$$

де $\Delta_1(x)$ та $\Delta_1(y)$ – є відповідні похибки по координатах X та Y .

При цьому фантом панданної зони похибки визначиться як

$$[\mathbf{P}]\Phi = [\mathbf{P}]\Pi' - [\mathbf{P}]\Pi = 2\left[2\Delta_1(x) \cdot \Delta_1(y) - (A_x + a)\Delta_1(y) - (A_y + b)\Delta_1(x)\right] \tag{1.16}$$

Ще один випадок, коли у трикоординатному просторі рухається об'ємний АС типу паралелепіпеда (рис. 1.5).

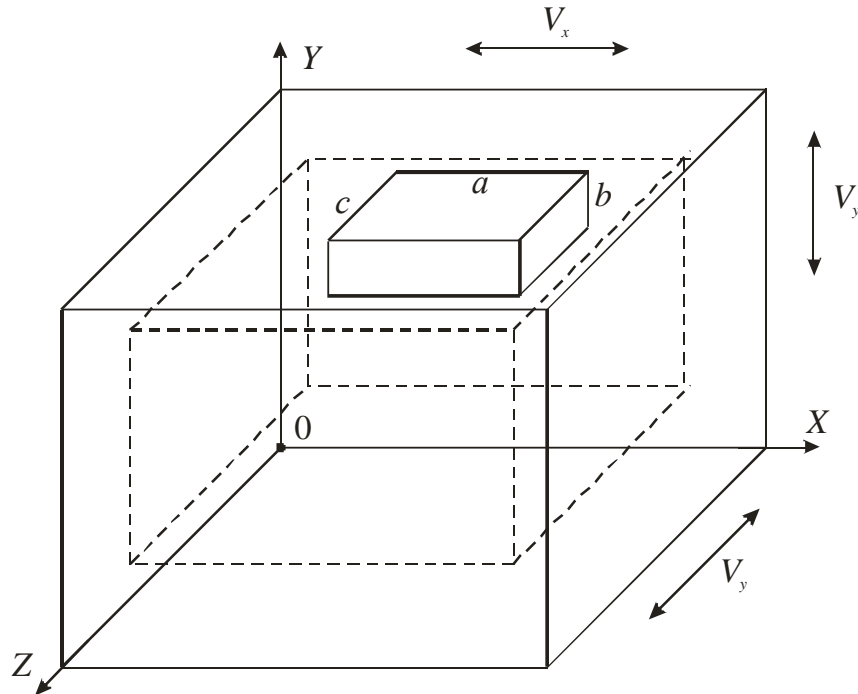


Рис. 1.5. Панданна зона об'ємного елементу, близького за формою до паралелепіпеду

У цій ситуації маємо для реальної панданної зони

$$\begin{aligned}
\Lambda_x &= A_x + a; \\
\Lambda_y &= A_y + b; \\
\Lambda_z &= A_z + c, \\
[\mathbf{P}]\Pi &= \Lambda_x \cdot \Lambda_y \cdot \Lambda_z
\end{aligned}
\tag{1.17,a}$$

та реєструємої

$$\begin{aligned}
\Lambda'_x &= A_x + a - 2\Delta_1(x); \\
\Lambda'_y &= A_y + b - 2\Delta_1(y); \\
\Lambda'_z &= A_z + c - 2\Delta_1(z); \\
[\mathbf{P}]\Pi' &= \Lambda'_x \cdot \Lambda'_y \cdot \Lambda'_z.
\end{aligned} \tag{1.17,б}$$

При цьому визначення панданної зони фантому похибки можливо оцінити як

$$\begin{aligned}
[\mathbf{P}]\Phi = [\mathbf{P}]\Pi' - [\mathbf{P}]\Pi = & (A_y + b)(A_z + c)\Delta_1(x) + (A_x + a)(A_z + c)\Delta_1(y) + \\
& + \Delta_1(x)\Delta_1(y)(A_z + c) + (A_x + a)(A_y + b)\Delta_1(z) + (A_y + b)\Delta_1(z)\Delta_1(x) + \\
& + (A_x + a)\Delta_1(z)\Delta_1(y) + \Delta_1(x)\Delta_1(z)\Delta_1(y).
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Наведемо ще один приклад, який на відміну від попередніх стосується АС, що обертаються навколо деякого центру або осі (рис. 2.6).

Якщо є ідеальний колоподібний АС, який обертається навколо свого геометричного центру (рис. 1.6,а), то і ПЗ повністю співпадатиме з його розмірами, тобто

$$[\mathbf{P}]\Pi = \pi R_A^2 \cdot S_\kappa, \tag{1.19}$$

де S_κ – товщина АС;

R_A – радіус обертання вільно обраної точки А.

Розміри ПЗ при вимірюванні будуть менші на величину Δ_{1R} , яка є аналогічною до попередніх величин у (1.17,б):

$$[\mathbf{P}]\Pi' = \pi (R_A - \Delta_{1R})^2 S_\kappa, \tag{1.20}$$

якщо вимірювання відбувається за виходом, то відбувається збільшення зони, тобто

$$[\mathbf{P}]\Pi' = \pi (R_A + \Delta_{2R})^2 S_\kappa. \tag{1.21}$$

В цьому випадку Δ_{2R} має такий же характер, як у виразі (1.20).

При цьому визначення панданної зони фантому похибки можливо оцінити як

$$[\mathbf{P}]\Phi = [\mathbf{P}]\Pi - [\mathbf{P}]\Pi' = \left[2R_A(\Delta_{1R} - \Delta_{2R}) + \Delta_{1R}^2 - \Delta_{2R}^2 \right] \cdot \pi \cdot S_{\kappa}. \quad (1.22)$$

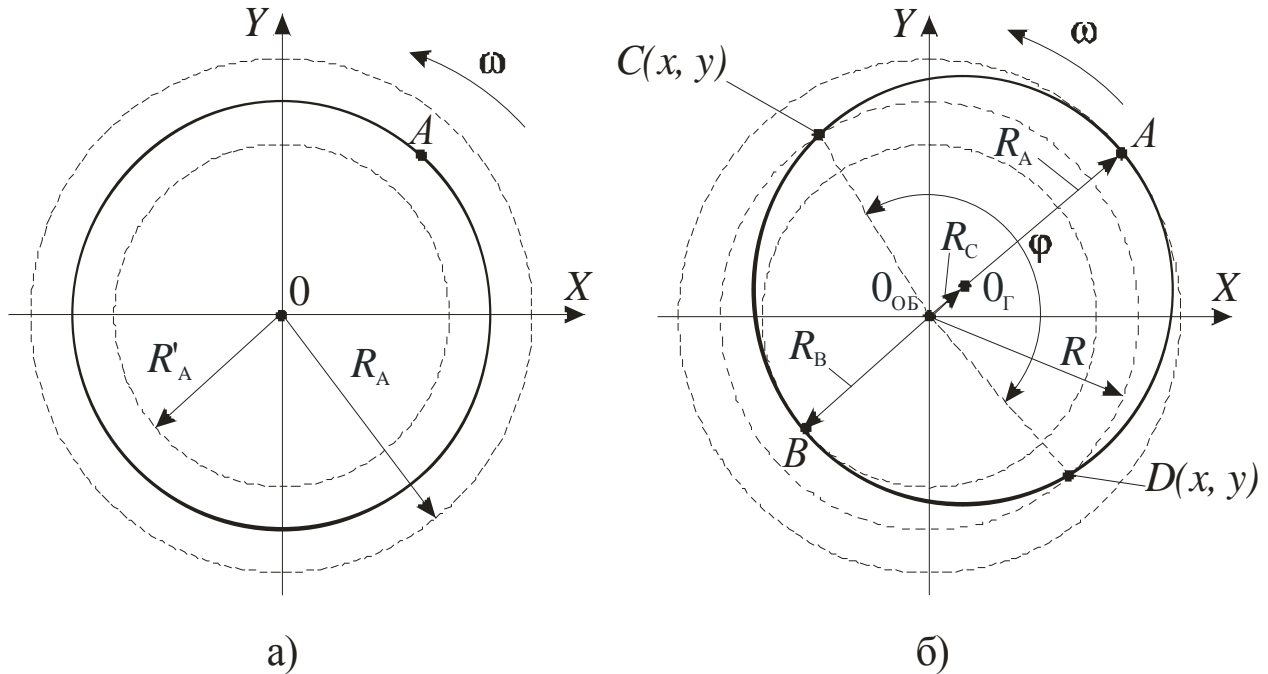


Рис. 1.6. Панданна зона дископодібного плоского елемента

Наведений вище випадок не є вірогідним у реальних технологічних процесах, оскільки здебільшого координати центру обертання $O_{ОБ}$ та геометричного центру $O_{Г}$ ніколи не співпадають (рис. 1.6,б). При обертанні такої деталі розміри ПЗ визначатиме точка A , що найбільш віддалена від центру обертання.

Одночасно існує протилежна точка B , яка визначатиме максимальний розмір зони присутності технологічної маси $AC_x - R_B$. У просторі, який є різницею між радіусами R_A та R_B , маса AC буде присутня лише періодично залежно від кутової швидкості ω . Реальна ПЗ буде цілком залежною від радіусу R_A та відповідних похибок Δ_{1R} та Δ_{2R} , тобто питання про те, що вимірюється у визначену мить, стає досить дошкульним.

З цієї тези стає ясным, що між кутовою швидкістю ω та періодом вимірювання T_B повинен існувати жорсткий зв'язок, який буде визначати точність вимірювання геометрії АС. Те ж саме можна побачити і у попередніх випадках, де цей процес те ж існує, але у неявному вигляді.

Окрім того, є ще одна проблема, тісно пов'язана з вимірюванням, - це поведінка маси АС у межах зони. Оскільки для проведення вимірювань необхідно витратити час t_T або $t_{\bar{T}}$, то потрібно, щоб за цей час маса АС знаходилася у безпосередньому контакті із ЧЕ. У супротивному випадку вимірювання не відбувається. Але маса АС, незважаючи на свою закінчену форму, поводить ся так, нібито вона заповнює всю ПЗ.

Чим вище швидкість руху АС у зоні, тим більша ілюзія заповнення масою всього об'єму. Проте, як наслідок, зростає і необхідність у скороченні часу виміру, тобто швидкодія систем виміру повинна зростати необмежено.

Розглянемо кілька можливих випадків поведінки маси АС на теренах ПЗ.

Найкраще це можна розглянути при обертанні циліндричного тіла з ексцентриситетом (рис. 1.6,б). Так, наприклад, якщо є абстрактний відчутник, котрий має можливість у просторі перетинати уявну АС, не руйнуючи її, і встановлений у точці $C(x,y)$, то наслідком його вимірювань повинна бути дуга $\overset{\cup}{CD}$, яка розташована у межах тіла, тобто

$$\check{L}_B(R) = 2R \arccos \frac{R^2 - R_A^2 + R_C^2}{2RR_C}, \quad (1.20)$$

де $R_C = R_A - R_B$ є відстань між центром обертання $O_{об}$ та геометричним центром $O_{г}$.

Зовнішня довжина дуги кола радіусу R становитиме

$$\check{L}_3(R) = 2R \left(\pi - \arccos \frac{R^2 - R_A^2 + R_C^2}{2RR_C} \right).$$

Використовуючи ці залежності, є можливість отримати вирази для

шпаруватості присутності маси в колі радіусом R :

$$L(R) = \frac{\check{L}_B(R)}{2\pi R} = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{R^2 - R_A^2 + R_C^2}{2RR_C}$$

та відсутності маси АС у ПЗ

$$\bar{L}(R) = \frac{\check{L}_3(R)}{2\pi R} = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{R^2 - R_A^2 + R_C^2}{2RR_C}.$$

Будь-який чутливий елемент, як і поверхня АС, навіть ідеалізованої, мають властивості дуальності, тобто неоднозначності визначення координати [4]. Тому кільце радіусу R необхідно поділити на дві частини, тобто, де присутня маса АС і де вона відсутня.

Лінійна питома вага буде ρ_T і де відсутня $\rho_{\bar{O}}$. У цьому випадку при зміні радіусу R у межах від 0 до R_B його маса буде визначатися як

$$\check{M}_0 = 2\pi f R \rho_T \text{ при } 0 < R \leq R_B. \quad (1.24)$$

Для АС радіус R_B є критичним, оскільки він вказує на те, чи існує маса умовного спокою. Наявність чи відсутність цього радіусу безпосередньо впливає на результати вимірювання радіусу R , тому що при його наявності є можливість стверджувати, що у просторі існує така точка координат, де завжди реєструється маса АС при відтинках часу вимірювання, які наближаються до нескінченно малих величин.

Відсутність радіусу R_B вказує на те, що за будь-яких нескінченно великих відтинках часу вимірювання існує така точка у системі координат, де маса АС ніколи не буде зареєстрована.

Надалі ці явища назвемо масою відносного панданного спокою M_0 (1.24) (рис. 1.6,б) та панданним вакуумом (рис. 1.2,в). Тут необхідно помітити одну особливість як одного, так і іншого явища: реальний відчутник дістатися як до маси відносного панданного спокою, так і до панданного вакууму, може лише за спеціальною траєкторією, оскільки шлях до них є закритим ПЗ.

У випадку збільшення радіусу R , тобто $R_B < R \leq R_A$, дуга $\tilde{L}_B(R)$ стає неоднаковою за щільністю. У створену щілину втручається відрізок зовнішньої дуги $\tilde{L}_3(R)$ з лінійною питомою вагою $\rho_{\bar{T}}$. При цьому загальна маса становитиме

$$\tilde{M}_{\Pi} = \rho_T \tilde{L}_B(R) + \rho_{\bar{T}} \tilde{L}_3(R) = 2\pi R \rho_{\bar{T}} + 2R(\rho_T - \rho_{\bar{T}}) \arccos \frac{R^2 - R_A^2 + R_C^2}{2RR_C}. \quad (1.25)$$

Для якісної реєстрації координати поверхні необхідно виконувати умову $\rho_T \gg \rho_{\bar{T}}$. До того ж, чим більше різниця у питомій вазі, тим більш якісно є можливість зареєструвати координату.

Здебільшого $\rho_{\bar{T}}$, яке притаманне технологічному середовищу, має невеликі значення, оскільки це зазвичай повітря і рідше технологічна рідина, але перепад між ρ_T та $\rho_{\bar{T}}$ досить суттєвий та впливає на якість реєстрації координати.

Якщо ЧЕ не реагує з цим середовищем, то його можна не враховувати. Тим не менш за теоретичного розгляду воно повинно бути присутнім у розрахунках.

1.3. Теоретичне підґрунтя інформаційних властивостей панданних зон абстрактної сутності

У [1] вже розглянуто можливі рухи АС, але це стосувалося траєкторії руху, які виконує об'єкт у просторі. Тим не менш, траєкторія руху, хоч і є уявною, яка має відносно нескінченно малий переріз, наявність об'єму та маси у АС, призводить до того, що необхідно розглядати трубку потоку маси. Оскільки форму АС можна уявити як абстрактний за формою об'єм, то реальний переріз траєкторії кожен мить буде інший, а тому є можливість розглядати лише як миттєве значення. Якщо оберемо переріз траєкторії руху, то будемо спостерігати наступне явище. Нехай це буде лінійний миттєвий відтинок траєкторії АВ, за яким рухається центр мас (ЦМ) абстрактної сутності (рис. 1.7). При цьому приймаємо досить умовну ситуацію, коли виконується наступне:

- Відтинок траєкторії АВ настільки короткий, що маємо можливість розглядати його як чисто лінійний з вектором нормалі \mathbf{n} ;
- Миттєва позиція АС є така, що лінійна відстань від ЦМ (R_0) є у площині нормалі \mathbf{n} , яка перпендикулярна траєкторії;
- Миттєва позиція АС є така, що максимальна відстань від ЦМ (R_c) співпадає з вектором нормалі \mathbf{n} та площиною проекції;
- АС рухається по траєкторії АВ з шістьма ступенями свободи.

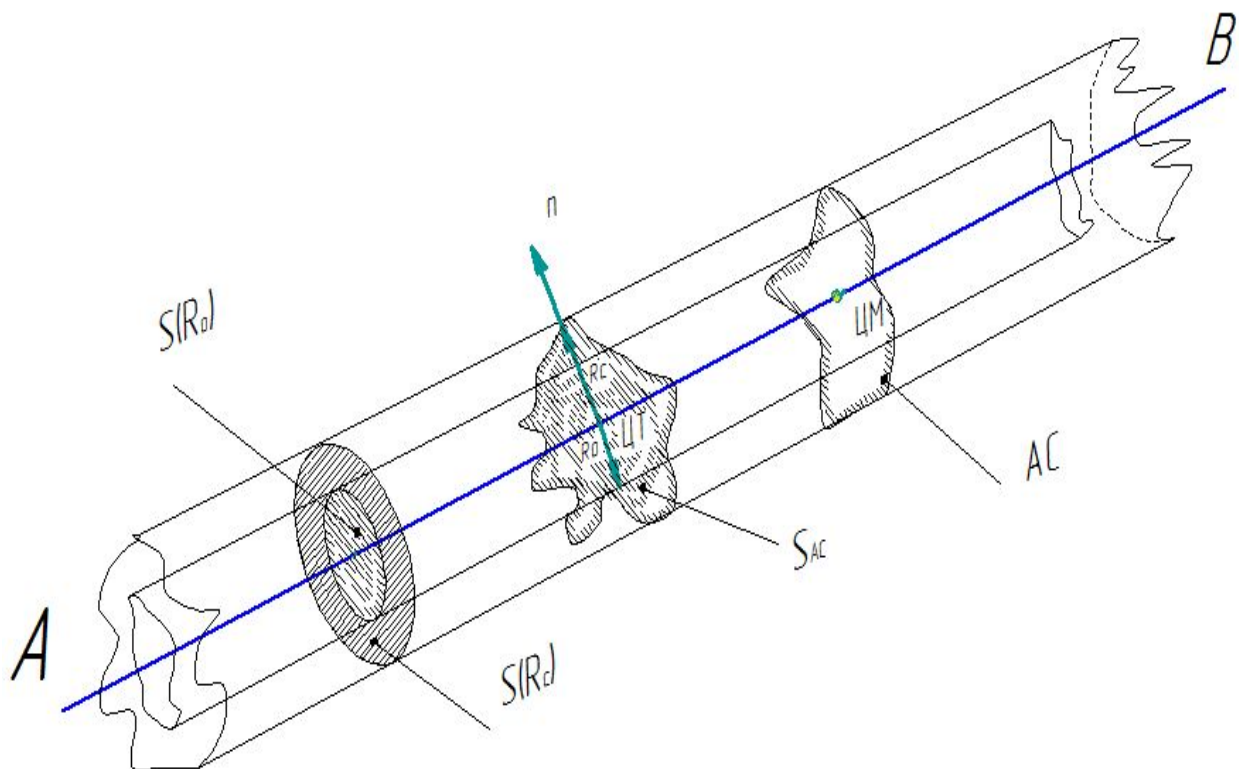


Рис. 1.7. Приклад моделювання лінійної панданної зони абстрактного об'єкта

Звісно, що всі прийняті умови у своїй сутності (одночасності) є маловірогідними, тим не менш, це надає можливість перше уявлення про ПЗ. Отже при русі АС з шістьма ступенями свободи отримуємо наступну ситуацію. Радіус вектор R_0 виконує циркуляцію за шістьма ступенями свободи і у проекції дає коло $S(R_0)$. Основна особливість цієї ситуації у тому, що у межах проекції $S(R_0)$ може бути лише маса АС, яка хоч і рухається, але не виходить за межі R_0 . З іншого боку, вектор-радіус R_c виконує свій рух у шість ступенів свободи і створює

проекцію $S(R_s)$. Як наслідок, маємо можливість констатувати той факт, що існують дві об'ємні траєкторії, а саме одна з перерізом $S(R_o)$, а друга з перерізом $S(R_s)$. Отже, якщо у межах $S(R_o)$ маємо суцільний потік маси, то у просторі $S(R_s)$ - $S(R_o)$ цей потік є мінливий і повністю залежний від фізичних параметрів АС, де на першому плані виступає геометрична форма об'єкту. Саме цьому об'ємі відбуваються найбільш активні енергетичні взаємодії і лише на другому етапі вступає в дію основна маса, зосереджена у потоку з перерізом $S(R_o)$.

Таким чином, можемо сформулювати основне поняття ПЗ, як зони мінливої маси АС. Розглянемо це явище більш достеменно.

Як показують дослідження та їх результати, основною межею існування АС є дотримання абстрактної (уявної) траєкторії руху. Як наслідок, АС намагається утримувати постійні координати у просторі, використовуючи при цьому свою ЗП та зони присутності сусідніх АС. Але для того, щоб чітко зафіксувати свої координати у просторі, АС повинна входити у щільне торкання з сусідніми, для того, щоб «обнулити» свої координатні відстані. Для цього вона повинна вирішити низку фізико технічних проблеми, а саме:

- на засадах взаємодії польових структур ЗП визначитися з дистанцією до сусіднього об'єкту;
- вирішити задачу по наближенню до поверхні сусідньої АС;
- визначитися з процесом входження у неруйнівне торкання;
- обнулити свої координати відносно сусіднього АС, з метою наступного дистанціювання;

При визначенні координати торкання необхідно знати, де це відбулося у межах від R_o до R_c , оскільки це у кінцевому випадку визначає її точність.

Отже, розглянемо, як це відбувається з огляду на існування ПЗ. Але, якщо для техніки це все має примусовий (штучний) характер, то у природі це закономірний процес. Так, наприклад, для всіх БО та БТО характерною рисою є зміна об'єму при зростанні або смерті як такого. Зростання рослини призводить до збільшення її об'єму та маси, а при вмиранні навпаки. Окрім того, рослини

мають властивість руху в просторі та вважаються доволі статичними БО. Тварини є більш жваві з динамічного погляду. Хоча це є досить відносне явище. Звісно швидкість розвитку тварин досить велика у порівнянні з рослинами. У такій ситуації треба бути досить обережним з оцінками, оскільки ця ситуація є вельми відносна, тобто якщо провести масштабування за всіх параметрів БО, то можна побачити, що відносний рух у просторі для одних стиснутий, а для інших розтягнутий. Основною особливістю тваринного світу необхідно вважати здібність швидкісної зміни форми тіла та об'єму, який вони займають, тобто динаміки ПЗ. Стосовно такого способу руху необхідно зауважити, що він є більш штучного походження, ніж у природі, тобто якщо для техніки це є досить розповсюдженим явищем. То для природних явищ це дуже обмежена кількість, яка здебільшого становить фрагменти загального руху. Найбільш відомим необхідно вважати обертальні рухи елементарних часток (електрон, позитрон, нейтрон, протон, тощо). Цей спосіб руху є найскладніший, тим не менш у природі саме він є найбільш застосовуваним, тобто лінійний та обертальний рух у комплексі зі зміною форми.

1.4. Загальні тези критичних обмежень існування панданної зони об'єкта

Серед усіх проблем, які пов'язані з панданною зоною, основною є принцип межі з яких є першочерговим у створенні ПЗ будь якої АС. В основі цієї межі лежить поняття, що будь яке тіло довільної форми, яке рухається по визначеній траєкторії, створює навколо цієї траєкторії криволінійний циліндр потоку маси. Цей потік маси має свої особливості, а саме:

- по-перше, повний переріз маси у своїй межі є циліндричним (криволінійний) як наслідок руху радіусу R_C , який співпадає з вектором нормалі \mathbf{n} ;
- при такому русі вектор нормалі \mathbf{n} є залежним від кривизни траєкторії.

- періодично, за визначених значень ω_n , ω_b та ω_t у перерізі траєкторії реалізується функція максимальної площини перерізу абстрактної функції;
- функція перерізу $S(r- R_o, t_o)$ досягає свого максимуму в момент t_0 та коли площина трикутника ΔABO є перпендикулярна вектору t ;
- всі інші проекції площини перерізу на площину перпендикулярну вектору t ,будуть оцінюватись як $S(r- R_o, t_o) \cos\alpha \cos\gamma$.

Розглянемо геометричну інтерпретацію цього випадку на рис. 1.8. Отже, у такій ситуації, коли рух АС має миттєвий характер, тобто

$$\begin{aligned} \text{при } t=0 \quad & V_n=0 \quad \omega_n=0, \\ & V_b=0 \quad \omega_b=0 \\ & V_t \neq 0 \quad \omega_t=0, \end{aligned} \quad (1.26)$$

то створюється лише одна трубчаста система, а саме діаметром $2R$ та площею перерізу πR_0^2 , які є наслідком руху суцільної центральної маси. Ця трубка потоку є пасивною ПЗ, оскільки її дія є вторинною, хоча і несе у собі максимум кінетичної енергії.

Стосовно цієї тези є перше критичне обмеження: статичною панданною зоною називається та частина, для якої у всіх точках об'єму питома вага та щільність однакові. Маса АС, яка знаходиться поза межами об'єму $\frac{3}{4} \pi R_0^3$, є активною, оскільки саме вона активно взаємодіє з навколишнім середовищем. Саме ця маса АС, яка знаходиться у активній взаємодії з зовнішніми факторами, визначає ступінь її реакції з навколишнім середовищем.

Водночас, у першу чергу навантаженню піддаються найбільш віддалені частки АС, які формують зовнішню поверхню за радіусу R_C . Тобто, оскільки позиція вектору R_C визначена кутом $\beta+\pi/2$, то неможливо однозначно сказати, де саме буде знаходитися крапка А в момент $t=0$.

У широкому сенсі крапки А, В та О не можна сприймати як закінчену координату, оскільки при їх визначенні виникає динамічна похибка, яка перетворює крапки у риси визначеної довжини. Якщо у (1.26) визначити $\omega_n =$

$$V_{\pi} = \pi(R_0^2) \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \pi(R_0^2) \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt. \quad (1.28)$$

При розгляді ситуації руху по траєкторії необхідно зауважити наступне, а саме: будь яка АС має у своєму оточенні середовище, яке вона руйнує своїм рухом або захоплює і рухається разом з ним. Для того, щоб це відбувалося щільність середовища, в якому АС повинна бути або меншою ніж у АС або повинні існувати сторонні сили. Тобто частина простору, по якому рухається АС, переходить у стан збурення. При розгляді цього прикладу є одна цікава тенденція, а саме повітря або вода позаду гвинта розходиться конусом. Відбувається це тому, що тиск за гвинтом більше ніж попереду і середовище намагається вирівняти тиск у загальному об'ємі. Таке розходження між циліндром і конусом може слугувати принципом визначення якості тягової установки, тобто ККД.

Знов таки, у цьому прикладі проглядається ще одна фундаментальна особливість панданної зони, а саме чим ближче ми знаходимося до пасивної панданної зони (πR_0^2), тим слабша взаємодія з навколишнім середовищем. Для типового авіаційного або корабельного гвинта це є центральна частина, до якої кріпляться лопаті і саме вона передає їм свою енергію, не створюючи при цьому ніякої тяги. Тим не менш у нашому випадку енергія цієї частини панданної зони є комплексом двох кінематичних енергій: лінійної та обертальної. Обертальна кінетична енергія практично повністю передається у лопаті в той час, як поступальна (рух за траєкторією) фактично є прихованою (інерційною) енергією.

Стосовно біологічних процесів всі ці технологічні операції мають дуже схожий характер, але і свої відмінності. Типова ситуація для БО, це поглинання їжі та фармакологічних речовин (лікарських засобів). На відміну від ТО у БО існують блокувальні засоби (система ковтання). При цьому об'єкт прощтовхується стравоходом в імпульсному режимі в одному напрямку. Зворотній напрямок відбувається, коли йде негативний вплив. Система

існування БО налаштована на поглинання речовин із позитивною зоною присутності з погляду бази даних БО (БТО). Як наслідок типового БО існує система поглинання за принципом безумовного рефлексу, за яким відбувається робота страховоходу.

Знов таки, у цьому прикладі проглядається ще одна фундаментальна особливість ПЗ, а саме чим ближче ми знаходимося до пасивної ПЗ (πR_0^2), тим слабша взаємодія з навколишнім середовищем. Тим не менш у нашому випадку енергія цієї частини ПЗ є комплексом двох кінематичних енергій: лінійної та обертальної.

Отже, у загальному випадку максимальним розміром ПЗ необхідно сприймати циркуляцію вектора радіусу R_C відносно траєкторії руху, тобто

$$V_C = \pi(R_C^2) \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\dot{y})^2} dx = \pi(R_C^2) \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

Оскільки ми вже розглянули рух АС по траєкторії, то розглянемо її рух відносно центру ваги, який надасть можливість визначитися із закономірностями такого руху в системі координат АС [Т1]. Оскільки у розгляді ми маємо два радіуси, то в основі досліджень є сумісні дві сфери (одна в одній) радіусами R_B та R_3 . Отже, у загальному випадку маємо рівняння обертального руху АС із нерухомою точкою О ($\mathbf{V} = 0, \mathbf{a} = 0$), центр мас якого зміщено відносно неї, яке є наслідком проектування відповідних сил на систему координат OXYZ, тобто

$$\begin{cases} I_x \omega_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = M_x + M_x^H + m(y_A g_z - z_A g_y) \\ I_y \omega_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z = M_y + M_y^H + m(z_A g_x - x_A g_z), \\ I_z \omega_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = M_z + M_z^H + m(x_A g_y - y_A g_x) \end{cases} \quad (1.29)$$

де M_x, M_y, M_z - проекції на відповідні осі моментів активних сил;

g_x, g_y, g_z - проекції вектора прискорення на осі O_x, O_y, O_z .

M_x^H, M_y^H, M_z^H - моменти сил інерції, обумовлені відцентровими моментами інерції. Наприклад

$$M_x^H = I_{xy} \dot{\omega}_y + I_{xz} \dot{\omega}_z - I_{xy} \omega_x \omega_z + I_{zx} \omega_y \omega_x + I_{zy} (\omega_y^2 - \omega_z^2). \quad (1.30)$$

Рівняння (1.29) мають бути доповненими кінематичними співвідношеннями, які

при заданні кутів Ойлера мають наступний вигляд

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_y = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\psi} \\ \omega_z = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi - \dot{\theta} \cos \varphi \end{cases} \quad (1.31)$$

Рівняння (1.29) та (1.31) є динамічним і кінематичним рівнянням Ойлера. Наразі інтегрування рівняння (1.29) є дуже складною задачею. Тому теоретична механіка вдається до низки спрощень, серед яких є так званий випадок Ойлера. Сутність цього випадку полягає у тому, що центр мас збігається з точкою опори і не має моментів зовнішніх сил, тобто рух за інерцією. У цьому випадку перші інтеграли диференціальних рівнянь руху (випадок Ойлера) осі OXYZ є головними осями інерції. У такому випадку рівняння (1.29) набувають вигляду:

$$\begin{cases} I_x \omega_x \dot{\omega}_x + (I_x - I_y) \omega_y \omega_z = 0 \\ I_y \omega_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z = 0 \\ I_z \omega_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = 0 \end{cases} \quad (1.32)$$

Перемножимо перше рівняння на $I_x \omega_x$, друге на $I_y \omega_y$, третє на $I_z \omega_z$ та, додавши їх один до одного, отримуємо

$$I_x^2 \omega_x \dot{\omega}_x + I_y^2 \omega_y \dot{\omega}_y + I_z^2 \omega_z \dot{\omega}_z = 0$$

або

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2) = 0. \quad (1.33)$$

Після інтегрування (1.33) отримуємо

$$I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2 = K_0^2 = \text{const}. \quad (1.34)$$

Цей інтеграл доводить, що кінетичний момент під час руху не змінюється у часі та просторі. Якщо зробити чергову низку перетворень із рівнянням (1.34), то можна довести, що

$$I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 = 2E_k = \text{const} \quad (1.35)$$

і, як наслідок,

$$2E_k = K_0 \omega = \text{const}. \quad (1.36)$$

Навіть за такого спрощеного випадку визначення кутів Ойлера є досить складним завданням. Тому у ще більш спрощеному варіанті вважається. Що

тіло обертається за віссю O_y ($I_x = I_y$). Тоді друге рівняння системи (1.32) набуде вигляду

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} = 0. \quad (1.37)$$

Водночас, кути Ойлера за умови $I_x \neq I_y \neq I_z$ визначаються як:

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \varphi = n_1 t + \varphi_0 \\ \psi = nt + \psi_0 \end{cases} \quad (1.38)$$

Отже, розв'язок рівнянь (1.38) є загальним розв'язком рівнянь (1.32) до окремого випадку, коли $I_y \neq I_z = I_x$. При цьому виді руху вісь симетрії тіла O_y описує конус із кутом розхилу $2\theta_0$, рівномірно обертаючись з кутовою швидкістю $\dot{\psi} = n$, навколо вектора кінетичного моменту K_0 . Об'єкт при такому русі обертається навколо своєї осі симетрії O_y з кутовою швидкістю $\dot{\varphi} = n_1$.

Таким чином, ми розглянули найпростіший випадок стосовно обертання АС навколо свого центру ваги. Як показують дослідження з класичної механіки, задача руху об'єкту АС з шістьма ступенями свободи навколо свого центру ваги може бути вирішена лише за приватних випадків ($I_y \neq I_z = I_x$). Ця ситуація є уявна (штучна), оскільки такого не може бути навіть за найдосконаліших технологій, оскільки між R_0 та R_c завжди буде існувати різниця, тобто як наслідок маємо $I_x \neq I_y \neq I_z$. Навіть, якщо ми уявимо штучну ситуацію, коли $\lim_{\beta \rightarrow 0} R_0 \rightarrow R_0$, то у цьому випадку поверхня АС переходить у нову якість, коли різниця існує, але визначити її в ніякій спосіб неможливо. Є можливість лише констатувати той факт, що радіус-вектор R_c утворює циркуляцію у визначеному об'ємі, тобто:

$$V_{\pi\beta}^{Rc} \lim_{\substack{\omega_x \rightarrow 0 \\ \omega_y \rightarrow 0 \\ \omega_z \rightarrow 0}} V(R_c) = \frac{3}{4} \pi R_c^3. \quad (1.39)$$

Аналітичний апарат стосовно вектор-радіусу R_0 аналогічний, що і для R_c , але має відмінність на кут β . Тим не менш, як кінцевий результат отримуємо теж саме:

$$V_{\text{пз}}^{\text{Rc}} \lim_{\substack{\omega_x \rightarrow 0 \\ \omega_y \rightarrow 0 \\ \omega_z \rightarrow 0}} V(R_0) = \frac{3}{4} \pi R_0^3. \quad (1.40)$$

Тобто, для АС, яка обертається навколо свого центру мас, об'єм активної частини ПЗ буде становити:

$$V_{\text{пз}}^+ = \frac{3}{4} \pi (R_c^3 - R_0^3) \quad (1.41)$$

для пасивної ПЗ

$$V_{\text{пз}}^+ = \frac{3}{4} \pi R_0^3 \quad (1.42)$$

і для загальної зони

$$V_{\text{пз}}^+ = \frac{3}{4} \pi R_c^3. \quad (1.43)$$

Як наслідок вищерозглянутого математичного дослідження, є можливість визначитися ще з одною цікавою властивістю панданної зони як такої, а саме утворення панданного вакууму (ПВ).

1.5. Фізична модель утворення панданного вакууму

Явище панданної зони як потік маси АС утворює такий фізичний ефект як панданний вакуум. Сутність цього ефекту полягає у тому, що певний об'єм АС, який має сполучення із зовнішнім середовищем і який у статичному стані не перекривається масою у рухливому стані стає недосяжним для прямого доступу. Це означає, що прямий доступ до цього об'єму ми можемо отримати лише рухаючись за віссю обертання, оскільки у супротивному випадку ми маємо виконувати специфічний рух по поверхні, виконуючи закони руху АС.

Найпростіший випадок панданного вакууму є, коли кільце обертається навколо одної з своїх подовжніх осей (рис. 1.9). У цьому випадку утворюється куля, поверхня якої створює ПЗ навколо кульового об'єму навколишнього середовища. Об'єм такої кулі буде згідно залежності (1.40). Потрапити у середину такого об'єму є можливим лише за виконання законів руху кільця, тобто рівнянь (1.41). Розміри самої панданної зони визначатимуться за виразом (1.43). Для того, щоб не виникало незрозумілості у цьому питанні, розглянемо

ще два випадки, які кардинально відрізняються один від одного, хоча і дуже схожі. Так, наприклад, візьмемо пустопорожню кулю з будь-якого матеріалу (рис. 1.9).

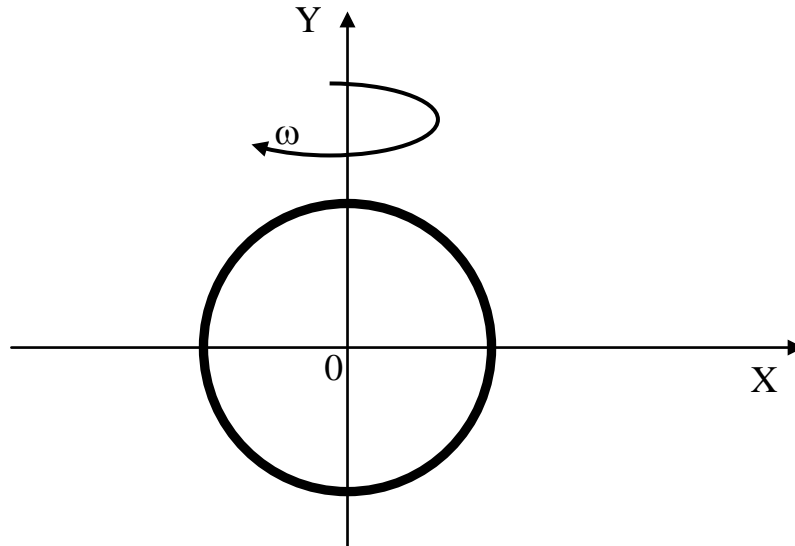


Рис. 1.9. Епюра розповсюдження панданного вакууму

При обертанні таких об'єктів навколо будь-якої із осей особистої системи координат (прив'язаної до ЦВ АС) панданий вакуум не утворюється (рис. 1.10,а).

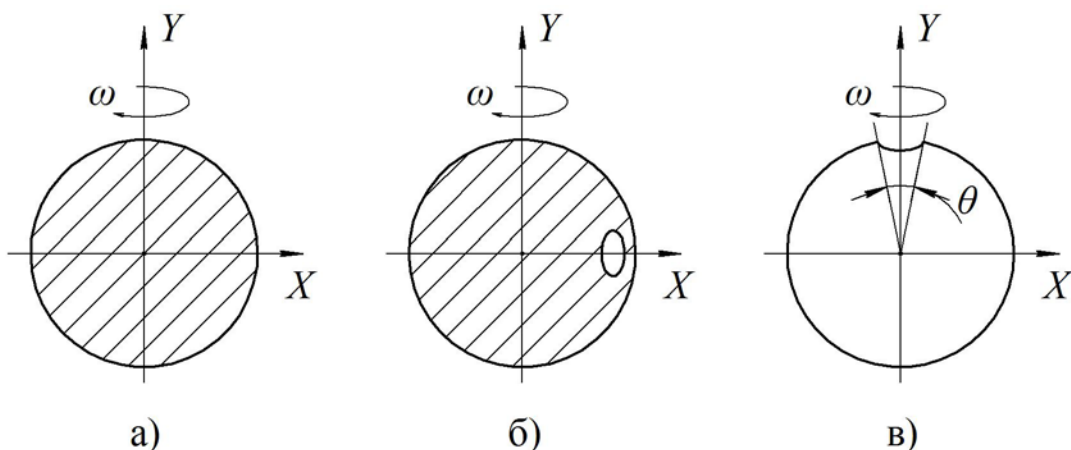


Рис. 1.10. Найпростіші випадки панданного вакууму для куль, які обертаються, де: а) куля заповнена третім середовищем, не має панданного вакууму, б) куля з отвором на екваторі заповнена зовнішнім середовищем, яка має панданий вакуум, в) куля з отвором на полюсі обертання практичного не має панданного вакууму

Чинником цього явища є те, що у середину об'єкту не можна потрапити ні у будь-який спосіб, оскільки всі шляхи перекриті, а внутрішнє середовище АС є його невід'ємною частиною. Якщо ми зробимо отвір у кулі, внутрішнє середовище АС стане таким самим, як і зовнішнє, і за відсутності руху панданний вакуум не утворюється (рис. 1.10,б). Якщо ми приведемо ці об'єкти у стан руху, то це ще не означає появу панданного вакууму, оскільки існує різниця у способі руху.

Тобто, якщо обертання відбувається таким чином, що вісь обертання проходить або через отвір (до того ж неважливо, під яким кутом, аби він був менший за 90^0 ($\pi/2$)), то панданний вакуум не утворюється (рис. 1.10,в). Ситуація пояснюється досить просто – для того, щоб потрапити у середину об'єкту (АС) необхідно зробити простий рух вздовж осі обертання без урахування властивостей руху об'єкту (АС). Якщо отвори не знаходяться на осі обертання, то утворюється панданний вакуум. Відбувається це тому, що отвір, як у першому, так і у другому випадку виконує циркуляцію навколо осі обертання і можна говорити про миттєві значення його координат за певного визначеного часу $t = 0$. У кінцевому випадку, для того, щоб потрапити у середину об'єкту, ми повинні спуститися на поверхню об'єкту по вісі обертання, а потім рухаючись по його поверхні знайти отвір. Водночас, ми повинні володіти інформацією стосовно кінематичного руху поверхні на відміну від попереднього випадку.

Розглянемо ще один випадок, коли обертається з швидкістю ω певна маса АО навколо вісі z (рис. 1.11). У масі АО знаходиться порожнина ПВ, яка пов'язана із зовнішнім середовищем трубчастою порожниною, яка співпадає з віссю z' . Для спрощення аналізу припустимо умову, що порожнина ПВ є класичною кулею, а трубчастий тунель є циліндричним і співпадає з віссю z' , яка є ані паралельною, ані перпендикулярною до жодної з осей x, y, z .

Об'єм панданного вакууму визначиться як об'єм кулі

$$[P]_{\text{ПВ}} = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

а площа поверхні визначається як $S_{\text{ПВ}} = 4\pi r^2$.

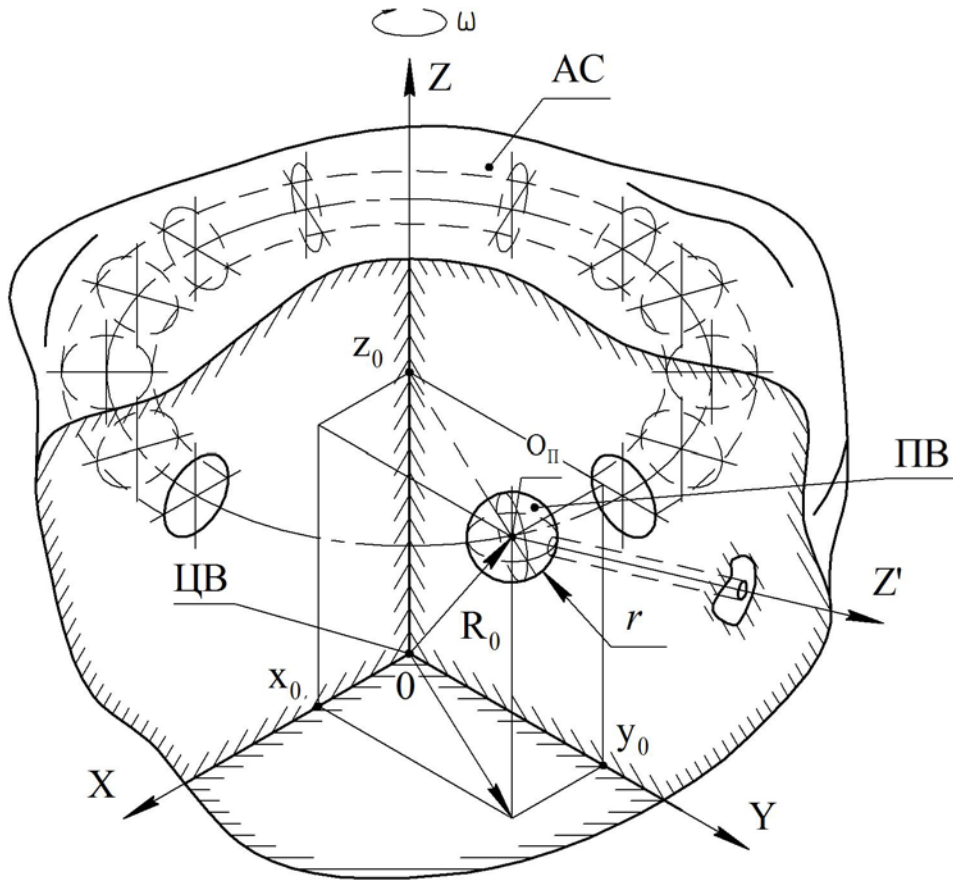


Рис. 1.11. Принцип утворення панданного вакуума рухливою порожниною

При обертанні АО навколо вісі z ПВ також обертається навколо неї. До того ж, подібне обертання призводить до утворення об'єму у формі тороїда. Форма перерізу тороїда на площину, яка проходить через вісь обертання буде формою кола, яке має наступний математичний опис:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Об'єм та площа поверхні тороїда будуть наступними

$$[P]_{\text{ТОР}} = 2\pi^2 R r^2, S_{\text{ТОР}} = 4\pi R^2 r,$$

де $R = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Тобто, на відміну від попереднього випадку (рис. 1.10), ми отримуємо дещо іншу ситуацію. По-перше, ПВ знаходиться поза межами центра ваги АО і при своєму русі утворює внутрішню ПЗ у межах об'єму тороїда (рис. 1.11). Об'єм тороїда може змінюватися залежно від величини радіусів R_0, r та координати z_0 , що призводить до двох критичних випадків. У першому випадку ми маємо вироджений ПВ, коли $R_0 = r$. Тоді на осі обертання утворюється куля з координатою центру z_0 . Водночас, зникає внутрішня ПЗ за винятком трубчастої частини ПВ. У другому випадку відбувається прорив ПВ назовні (рис. 1.12). Найкраще це видно, якщо перевести рівняння кола у полярну систему координат

$$\rho^2 - 2R_0\rho(\varphi - \varphi_0) + R_0^2 = r^2. \quad (1.44)$$

Рівняння поверхні АО у полярних координатах

$$S = f(\rho, \varphi, \theta). \quad (1.45)$$

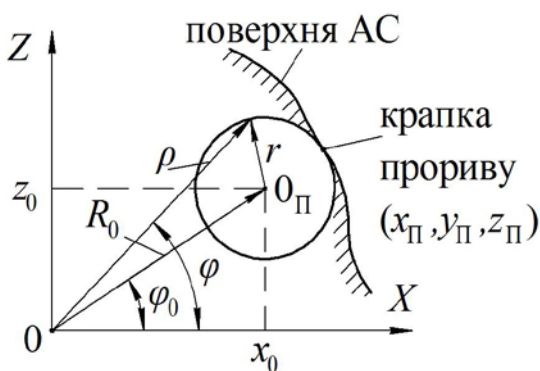


Рис. 1.12. Критичний випадок прориву панданного вакууму назовні

Умова відсутності крапки прориву – це неможливість знаходження спільного рішення $x_{\Pi}, y_{\Pi}, z_{\Pi}$ для рівнянь (1.44) та (1.45). По-друге, може існувати ситуація, коли обертання відбувається навколо вісі z' . У цьому випадку для визначеного АС зникає ПВ. Наразі можна

навести безліч випадків, коли різні об'єкти мають панданні вакууми. Так, наприклад, в звичайному пасажирському літаку салон з пасажирами та кабіною не є ПВ літака, оскільки вони виконані герметично від зовнішнього середовища, проте мотогондоли з двигунами мають, і досить складний. Винищувач має практично суцільний ПВ, оскільки він не є герметичним. Панданний вакуум є притаманний, наприклад, паровому котлу. Для живих об'єктів це досить розповсюджене явище, наприклад, у порожнистих органах.

У загальному випадку ПВ не обов'язково порожнина, це може бути певний об'єм з інородницькою речовиною, яка за своїми властивостями відрізняється від загальної речовини АО. У такому випадку, якщо АО має об'єм V , де існують порожнини, заповнені іншою речовиною V_k ($k=1,2,...,n$) центри ваги яких мають координати x_k, y_k, z_k та об'єм $V' = V + V_1 + V_2 + ... + V_n$, який має центр ваги з координатами $C'(x', y', z')$, то центр ваги АО з об'ємом V має координати:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{V'x' - \sum_{k=1}^n V_k x_k}{V}, \\ y_c &= \frac{V'y' - \sum_{k=1}^n V_k y_k}{V}, \\ z_c &= \frac{V'z' - \sum_{k=1}^n V_k z_k}{V}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Наявність ПВ і особливо його динамічні властивості призводить до того, що АО не може знаходитись у стані спокою, тобто відсутність статичної та динамічної рівноваги змушує АО весь час шукати таке розташування у просторі, при якому він матиме максимум спокою, як наприклад, іграшка «Ванька-встань-ка».

1.6. Енергетична насиченість панданної зони

Важливим параметром ПЗ є її енергетична насиченість.

Енергетична насиченість E_{Π} має дві складові: енергетичну насиченість маси умовного спокою та рухомої частини, тобто

$$E_{\Pi} = \frac{E_0}{V_0} + \frac{E_{\sim}}{V_{\sim}},$$

де E_0 та V_0 - кінетична енергія маси спокою та її об'єм відповідно; E_{\sim} та V_{\sim} - кінетична енергія зони мінливої присутності маси та її об'єм відповідно.

Для опису енергетичної насиченості маси спокою матиме вигляд

$$E_0 = \frac{1}{2} I_z^0 \omega^2 = \frac{\pi^2 R_B^2 \cdot M_0}{T^2}; \quad V_0 = \pi R_B^2 h; \quad \frac{E_0}{V_0} = \frac{\pi \cdot M_0}{T^2 h},$$

де h – товщина диску; I_z^0 – момент інерції диску вздовж осі Z .

Енергетична насиченість зони мінливої присутності маси

$$E_{\sim} = \frac{1}{2} I_z^{\sim} \omega^2 = \frac{\pi^2 R_{\sim}^2 \cdot M_{\sim}}{T^2}; \quad V_{\sim} = \pi R_A^2 h;$$

$$\frac{E_{\sim}}{V_{\sim}} = \frac{M_{\sim} \cdot \pi R_{\sim}^2}{T^2 \cdot R_A^2 h} = M_{\sim} \cdot \frac{\omega}{2T} \cdot \frac{S_{\sim}}{[P]}.$$

Звідкіля вираз для повної енергетичної насиченості E_{Π} становитиме

$$E_{\Pi} = \frac{\omega}{2T} \left[\pi M_0 \frac{S_0}{V_0} + M_{\sim} \frac{S_{\sim}}{[P]} \right] = \frac{\pi}{T^2 h} \left(M_0 + M_{\sim} \frac{R_{\sim}^2}{R_A^2} \right),$$

де $R_{\sim} = \frac{R_A^3 - R_B^3}{R_A^2 - R_B^2} - R_c$ – радіус обертання центру мас мінливої частини зони присутності.

Імпульс кількості руху, на який безпосередньо відреагує ЧЕ для зони умовного спокою, має вигляд

$$J_B = \tilde{M}_{\Pi} \cdot R^2 \cdot \frac{2\pi}{T}$$

і для мінливої зони

$$J_3 = \tilde{M}_{\Pi} \cdot R_{\sim}^2 \cdot \frac{2\pi}{T},$$

$$\text{де } R_{\sim} = R_c + \frac{\tilde{L}_3}{\tilde{L}_B} \cdot \frac{\rho_T}{\rho_{\bar{T}}} \cdot \cos \frac{\tilde{L}_B}{4R}.$$

У наведеному прикладі стосовно АС, що обертається дуже добре, видно залежність енергетичних параметрів ПЗ від періоду обертання та його геометрії. Обертання є процес циклічний і у випадку відсутності збурень матиме стабільний характер руху маси в обмеженому просторі. Це надає можливість більш-менш достеменно робити необхідні розрахунки, пов'язуючи

їх з статичною системою координат. Для АС, яка рухається у просторі у межах $\pm \infty$, це питання можна вирішити лише у межах миттєвої системи координат.

Найкращий спосіб, в який можна пояснити ПЗ для АС з поступовим рухом, - це провести аналогію з обертальним. Для цього необхідно перевести з кругової діаграми у лінійну. Довжина АС у такій системі координат (декартовій) становитиме $2\pi R_B$ і надасть можливість пов'язати в одне залежність швидкості та період руху.

На відміну від обертального руху реєстрація довжини АС відбувається дещо за іншими принципами. Так, наприклад, для реєстрації довжини АС у обертальному русі достатньо розташувати відчутник на відстані, меншій за R_B . При цьому для виміру довжини достатньо буде одного оберту за час T . При умові, що $\lim R_B \rightarrow 0$, а $R_A = R_C$ ПЗ приймає максимально можливі розміри ($2\pi R_A^2 \cdot h$) на межі відсутності панданного вакууму. Тобто це є випадок, коли є можливість перейти до лінійного поступального руху. Лінійний рух АС у прямокутній системі координат супроводжуватиметься тим, що у просторі утворено криволінійний циліндр. Поверхня перерізу цього циліндру матиме активну величину S_a , площа якої перпендикулярна вектору швидкості v_x , а за формою є проекцією АС на цю площу. Якщо прийняти за те, що площа S_a є чутливим елементом, то проходження АС через цю площину залишить по собі координати точки входження $A(x_A, y_A, z_A)$ та виходу $B(x_B, y_B, z_B)$.

Досить легко збагнути, що випадок лінійного руху АС дуже схожий на обертальний за умови, що радіус R своєю кінцівкою створює дугу \tilde{L}_B максимальної довжини. На відміну від обертального руху лінійний рух не може мати зони панданного вакууму, але тільки у тому випадку, коли АС є суцільним тілом. Для лінійного поступального руху період T можна визначити як

$$T = \frac{L_0}{v_x},$$

де L_0 – максимальна довжина АС по координаті x .

Об'єм реальної ПЗ є $[P] = S_a \cdot L_0 + V_{AC}$.

При вимірюванні ПЗ становитиме об'єм, менший за реальний, тобто

$$[P]' = S'_a \cdot L'_0 + V'_{AC}.$$

Навіть за випадку з довжиною, коли $L_0 < L'_0$ у широкому загалі $[P]$ може значно перевищувати $[P]'$, що пояснюється чутливістю чутника. Якщо не виконується умова, де похибку Δ необхідно розглядати як шлях, який проходить відчутник у масі АС, то й у випадку з обертальним рухом це довжина дуги, де невиконання нерівності $\tilde{L}_B(R) < \Delta$ призводить до неможливості визначення координати поверхні.

Для загального випадку дуга перетворюється у лінію з мінімальною площею. Якщо АС має суцільну масу, але по периметру активної площі S_a має значне зменшення товщини. Це призводить до значних спотворень отриманих результатів вимірювання, адже чутник може не відчувати значної частини площі, тому $S'_a < S_a$. Все це призводить до того, що, наприклад куля, яка рухається вздовж координати x з швидкістю v_x при вимірюванні матиме форму еліпсоїда з активною площею $S_a = 2\pi R^2$, а виміряною активною $S'_a = 2\pi \left(R^2 - \frac{\Delta x_1^2}{4} \right)$.

У цьому виразі Δx_1 є необхідна довжина хорди, яка пов'язує вхід та вихід відчутника з маси кулі. Якщо система контролю не враховує час t_T та $t_{\bar{T}}$, то загальна невизначеність координати наблизатиметься до Δ_2 .

З усього вищесказаного необхідно зробити висновок, що за відносного руху інструмента і деталі необхідно враховувати координатну швидкість і першого елемента взаємодії, і другого, але, що головне, то це – напрямок їх руху у своїй системі координат.

1.7. Визначення координати уявно-реальної поверхні межової панданної зони об'єкта

Визначення розмірів ПЗ АС є одна з фундаментальних задач технології

ТОНТОР [1]. Ця проблема обумовлена тим, що усі АС створюють навколо себе ПЗ, то процеси, що відбуваються в її межах, пояснюються низкою фундаментальних фізичних законів.

Як згадувалося у попередніх розділах, ПЗ будь-якого АС утворює відмінності форми від кулі та її руху в просторі. Водночас, просторовий рух АС утворює криволінійний циліндр специфічної форми. Такий циліндр має у перерізі ідеальне коло, але його вісь має опис кривої другого та третього порядку і таку саму твірну. При цьому АС рухається навколо одного з трьох центрів.

Першим центром обертання є природній, тобто навколо центра ваги. Цей центр є концентратором не тільки сил маси АС, а і його внутрішніх динамічних сил. За умови відсутності дії зовнішніх сил АС рівномірно обертається навколо цього центру. За випадку дії примусових сил утворюється другий штучний центр обертання. При зникненні цих сил обидва центри наближуються один до одного за експоненціальною траєкторією.

Третім центром АС є геометричний центр, який розташований на однаковій масштабованій відстані від будь-якої точки поверхні. Фактично цей центр являє собою масштабовану до розмірів крапки форму АС, а діаметр крапки станове $[S]$, яка розташована у просторі відносно поверхні АС за законами афінних перетворень. Цей центр має вагомий вплив за динамічного руху АС, коли на об'єкт починає впливати відносний рух середовища, наприклад вода або повітря.

Як наслідок, всі ці рухи спостерігаються на поверхні АС. Отже, якщо зважити на те, що маса ПЗ має досить нестабільний характер, то і всі процеси, пов'язані з поверхнею, теж мають такий самий характер. Тим не менш, обертання АС навколо своїх центрів призводить до того, що дві критичні крапки максимуму та мінімуму утворюють у просторі правильні траєкторії у вигляді кола. У загальному випадку ми отримуємо дві кулі (одна в одній), які синхронно рухаються в одному напрямку. Рух такої поверхні є досить складним, тому необхідно розглядати найпростіші просторові рухи, які

притаманні звичайним елементарним АС. Для цього розгляд будемо проводити на засадах моделювання миттєвої фіксації руху по всіх координатах, окрім однієї, яку досліджуємо. Оскільки обертання йде навколо одного або другого центру, то спочатку розглянемо вплив цих центрів на розміри панданної зони звичайного ідеального за формою диска, для чого використовуємо полярну систему координат.

Отже, у загальному випадку ми отримуємо що найменше три точки, пов'язані з геометрією та властивостями АС. Наразі можна навести кілька прикладів. Так, наприклад, будь-яка АС, котрій властива здібність плавати у рідині, має подібні три центри. По-перше, це центр ваги. По-друге, це центр гідростатичного тиску. По-третє, це геометричний центр. Ще один приклад, коли АС зі здібністю літати – літаки, аеростати тощо. Ці АС теж мають три центри, а саме центр ваги, центр тиску, центр аеродинамічних сил.

У кінцевому випадку, окрім вищезгаданих центрів, можуть бути ще кілька. Наразі при дії зовнішніх та внутрішніх сил АС буде обертатися під дією результуючого моменту. Ще більш гірша ситуація виникає, коли результуючий момент перемикається із одного центру до іншого. У цьому випадку обмежитися описом простого обертання навколо певної визначеної вісі неможливо, і опис руху навколо центру необхідно проводити за теоретичними засадами кутів Ойлера або Крилова [1].

Панданна зона обмежена максимальними та мінімальними відхиленнями своєї маси відносно загального центру ваги та руху. Тому всі взаємодії певної АС з іншими об'єктами відбуваються в об'ємі простору, який є спільним для цих об'єктів. Саме у цій зоні взаємодії важливо знати переміщення маси та її просторово-часові координати. У цій зоні, обмеженій зовнішньою та внутрішньою поверхнею простору ПЗ об'єкта відбуваються всі фізико-хімічні процеси, які визначають процеси подальшого існування АС. Параметри цих процесів для нас дуже важливі, але, оскільки кожний процес може мати необмежений характер, то ми припускаємо, що всі процеси відбуваються у

замкненому просторі панданної зони АС. Оскільки опис цих процесів є дуже складним, то автори у цій частині роботи вважають за необхідне обмежитись розглядом зовнішньої та внутрішньої поверхні ПЗ. Для визначення координати поверхні будь-якого АО у довільній системі координат необхідно знати дві основні величини, які характеризують момент торкання чутливого елемента (відчутника) з поверхнею АО.

Перша величина t_T визначає швидкість реакції на торкання і є статичною величиною, яка залежить від особливостей конструкційних характеристик відчутника і у процесі вимірювання може змінюватися лише за спеціальних вимог. Величина швидкості відносного наближення $\mathbf{k}_i \mathbf{V}_p$ є величина практично незалежна, тобто це є аргумент функції [S]. Панданна зона як така у своїй функціональній межі має два рівні. Перший внутрішній (R_B), який обмежує сферу статичної ПЗ, яка має властивості обертально-поступального руху. Цей радіус визначає межу динамічної взаємодії ПЗ з навколишнім простором. Зовнішній радіус (межа) (R_3) ПЗ вказує на межу чутливості (відстань) АС до взаємодії з іншими АО.

Отже, задля спрощення задачі вважатимемо, що t_T є фіксована величина, а $k_i V_p$ є залежною від параметрів руху АС. У цьому випадку маємо можливість розглянути процес торкання на засадах загальних законів теоретичної механіки [3, 5, 6, 7].

Для визначення координат розташування уявної точки у декартовому просторі використовуємо три величини x , y , z . Для зручності подальшого аналітичного опису варто перейти до криволінійних (або узагальнених) координат за параметрами q_1, q_2, q_3 . У цьому випадку декартові координати залежать від цих параметрів, тобто

$$x = x(q_1, q_2, q_3); y = y(q_1, q_2, q_3); z = z(q_1, q_2, q_3).$$

Як наслідок, рух уявної точки буде мати опис

$$q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), q_3 = q_3(t). \quad (1.47)$$

Радіус-вектор \mathbf{r} рухомої точки, початок якого знаходиться на початку обраної системи координат (нерухомої) є визначеною уявною функцією як декартових, так і криволінійних координат, тобто $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3) = \mathbf{r}(x, y, z)$.

Отже, якщо ми обираємо певну уявну точку 0, в якій криволінійні координати дорівнюють нулю і розглянемо залежність $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q, 0, 0)$, то отримуємо рівняння у векторному вигляді координатної лінії для q_1 , яка проходить через точку 0. Таким самим чином є можливість отримати рівняння для ліній $\mathbf{r} = \mathbf{r}(0, q_2, 0)$ та $\mathbf{r} = \mathbf{r}(0, 0, q_3)$ відносно координат q_2, q_3 . Отже, через визначену точку простору можна провести три координатні лінії, які в ній пересікаються. Водночас, змінюється лише одна координата, а дві інші зберігають стале значення. Як наслідок, частинні похідні $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i}$ спрямовані по дотичним до координатних ліній, які є годографами радіус-вектора.

Якщо скористатися одиничними векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, які є базисними, то $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i}$ будуть спрямовані згідно цих напрямків, тобто у бік зростання криволінійних координат [8, 9, 10].

Використовуючи ці вектори, маємо наступне $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i} \right| \mathbf{e}_i$, або

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i} = h_i \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.48)$$

де величини $h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i} \right|$ - коефіцієнти Ламе.

Для визначення коефіцієнтів Ламе враховують, що $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, де величини $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ - одиничні вектори декартової системи координат.

Отже, з вищесказаного маємо

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \mathbf{k},$$

звідкіля отримуємо

$$h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}. \quad (1.49)$$

Отже, рух будь-якої точки поверхні об'єкту можна описати через узагальнені координати, які залежні від часу, тобто

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}[q_1(t), q_2(t), q_3(t)]. \quad (1.50)$$

Диференціюючи вираз (8), отримуємо вектор швидкості

$$V = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3 \quad (1.51)$$

де $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ - узагальнена швидкість точки поверхні.

Таким чином, використовуючи (1.48) у (1.51), отримуємо наступний результат

$$V = h_1 \dot{q}_1 \mathbf{e}_1 + h_2 \dot{q}_2 \mathbf{e}_2 + h_3 \dot{q}_3 \mathbf{e}_3, \quad (1.52)$$

що є розкладенням вектору швидкості за базовими векторами.

Отже, користуючись наведеними вище виразами, маємо можливість розглянути уявлення про максимальну та мінімальні швидкості у межах панорамної зони. Для того, щоб визначитися з цими швидкостями, необхідно скористатися сферичними координатами r, φ, θ (рис. 1.13).

Водночас, координатною лінією r є пряма (1.47) з базисним вектором \mathbf{e}_r . Координатною лінією для \mathbf{e}_φ та координатною лінією θ - меридіан сфери з базисним вектором \mathbf{e}_θ . Оскільки базисні вектори є ортогональними, то декартові координати точки М матимуть наступний вираз через залежності:

$$x = r \cos \theta \cos \varphi, y = r \cos \theta \sin \varphi, z = r \sin \theta.$$

За формулою (1.49) визначаємо коефіцієнти Ламе, а саме

$$h_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{(\cos\theta\cos\varphi)^2 + (\cos\theta\sin\varphi)^2 + (\sin\theta)^2} = 1$$

$$h_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{(-r\cos\theta\sin\varphi)^2 + (r\cos\theta\cos\varphi)^2 + (0)^2} = r\cos\theta$$

$$h_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = \sqrt{(-r\sin\theta\cos\varphi)^2 + (-r\sin\theta\sin\varphi)^2 + (r\cos\theta)^2} = r.$$

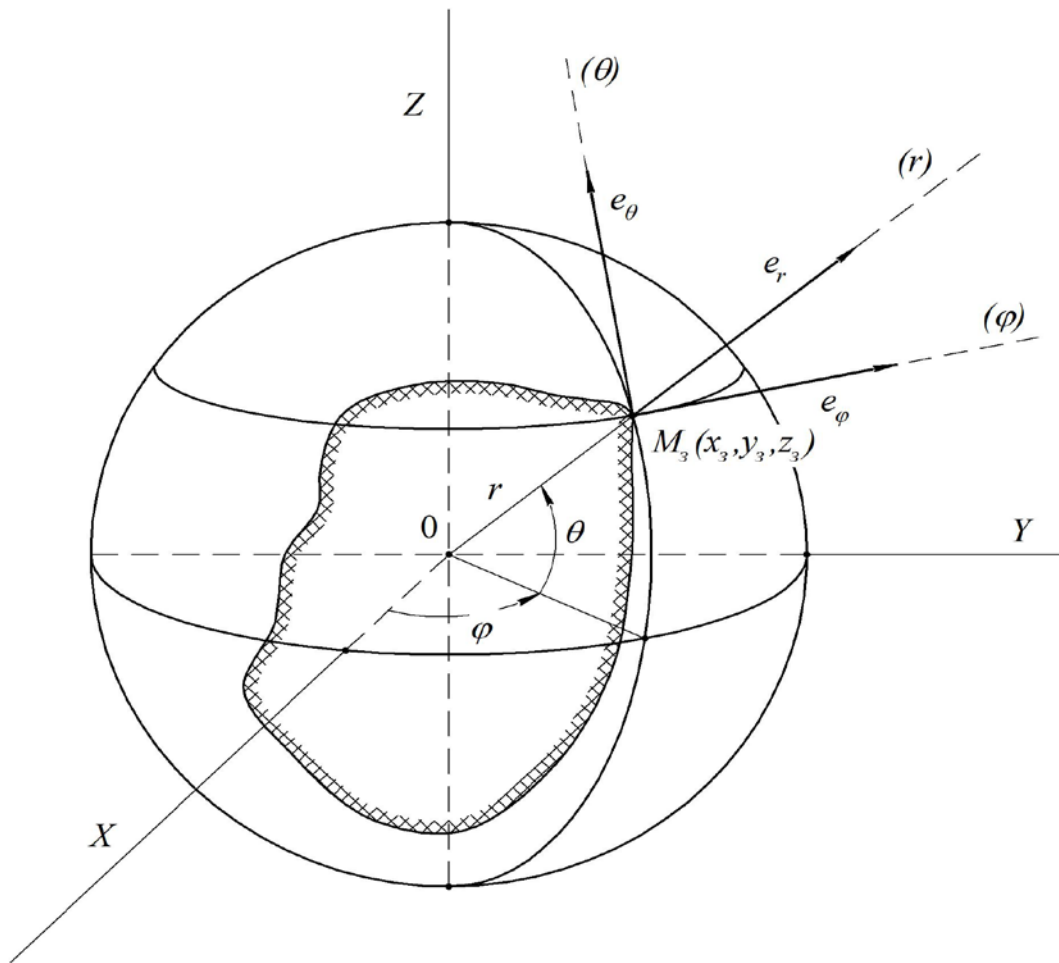


Рис. 1.13. Загальна діаграма векторів швидкості

Проекції швидкості на осі, спрямовані по базисних векторах, визначаємо згідно виразу (1.52). Водночас, робимо підстановки радіусу $r = R_B$ для внутрішньої межі ПЗ та $r = R_3$ для зовнішньої межі. Таким чином, отримуємо для внутрішньої сфери ПЗ

$$\begin{cases} V_r = h_r \dot{R}_B = \dot{R}_B \\ V_\varphi = h_\varphi \dot{\phi} = R_B \dot{\phi} \cos \theta. \\ V_\theta = h_\theta \dot{\phi} = R_B \dot{\theta} \end{cases} \quad (1.53)$$

Для зовнішньої сфери ПЗ отримуємо

$$\begin{cases} V_r = h_r \dot{R}_3 = \dot{R}_3 \\ V_\varphi = h_\varphi \dot{\phi} = R_3 \dot{\phi} \cos \theta. \\ V_\theta = h_\theta \dot{\phi} = R_3 \dot{\theta} \end{cases} \quad (1.54)$$

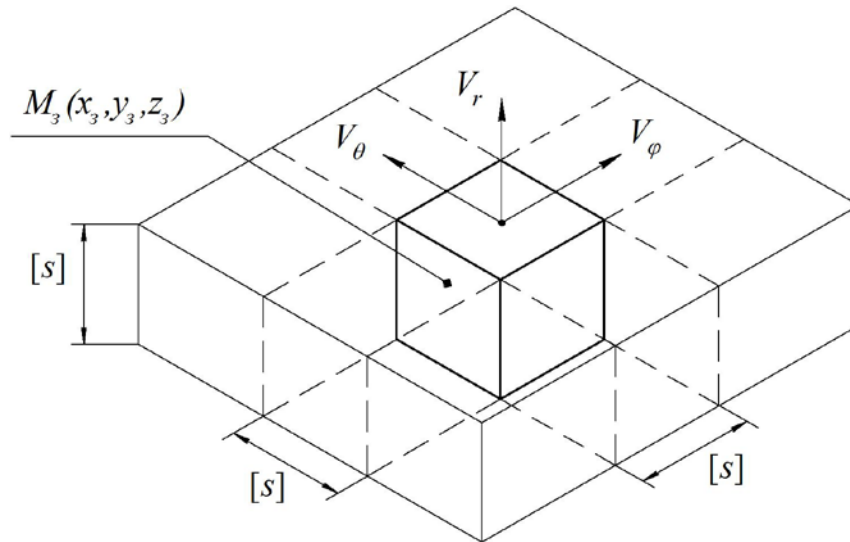
Отже, як наслідок, отримуємо висновок про те, що дотичні швидкості V_φ, V_θ є залежні від координатних кутів розташування вершини радіус-векторів $\mathbf{R}_B, \mathbf{R}_3$. Лише радіальна швидкість V_r залежна від швидкості зміни радіусу. Ці висновки відповідають дослідженням [3], що цілком підтверджуються теорією вірогідності [8].

Користуючись виразами (1.53) та (1.54), маємо можливість моделювання процесу визначення розмірів межі панданної зони АО. Отже, нам необхідно визначитися з двома радіусами, а саме внутрішнім та зовнішнім радіусами R_B, R_3 відповідно. Окрім того, необхідно визначити їх довжини та розташування у межах ПЗ. Як наслідок, треба визначитися з точками розташування вершин максимальної та мінімальної координати ПЗ та їх просторовим зв'язком.

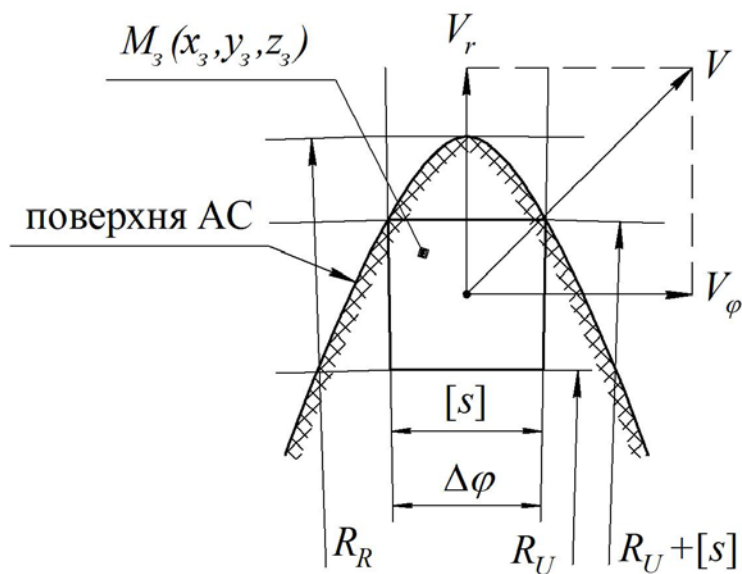
Другий закон панданної зони наголошує на тому, що існують дві екстремальні точки на поверхні АО, з яких одна є мінімальним відхиленням від центру (вісі) обертання, а друга – максимальним. Двох мінімумів або двох максимумів не існує, як і їх нескінченної кількості [9].

Окрім того, розглянемо ще деякі властивості екстремальних точок ПЗ. Для всіх точок, розташованих в масі АО та на його поверхні величина швидкості є сталою, а для екстремумів ще і радіус. Координати точок у системі декартових координат АО є незмінними. Швидкість є або наданим зовні кінетичним імпульсом, або викликаною певним примусовим фактором.

Розглянемо процес торкання при визначенні координати поверхні як такої. На рис. 1.14,а наведено елемент торкання $[S]^3$, що є основною часткою АО, за якою ми визначаємо координату, тобто величину радіус-векторів R_B, R_3 .



а)



б)

Рис. 1.14. Вимірювання зовнішнього радіусу панданної зони, де: а) загальне розташування об'єму вимірювання на вершині панданної зони; б) розріз у широтній площині за векторами V_r та V_ϕ

Сутність цієї частки полягає у точності визначення похибки, оскільки вона є похибкою фантому вимірювання [10]. Ця частка існує в одному лише випадку, коли існує швидкість вимірювання. За умови ідеальної ситуації ми отримуємо координату, як відображено на рис. 1.14,а, до того ж, за будь-якого напрямку вектору швидкості. Якщо ми зорієнтуємо діаграму за одної площини, тобто за векторами \mathbf{V}_r , $\mathbf{V}_{\varphi r}$, то об'єм, що реєструється, може опинитися ближче до центру обертання між найбільш віддалена частина АО (рис. 1.14,б).

У такому випадку реєстрація координат відбуватиметься не за реальним радіусом R_R , а за уявним R_U . Частина маси між радіусами R_R та $R_U + [\mathbf{S}]$ лишається поза увагою, оскільки ЧЕ на неї не реагує. Розмір таких частинок АО повинний бути менше $[\mathbf{S}]$ у лінійному вимірі і менше за $\Delta\varphi \cdot R_3$ у кутовому ($\Delta\varphi$ - у радіанах). Складність виміру, відображеного на рис. 1.14,б, полягає у тому, що, дотримуючись методики руху при вимірюванні, необхідно дотримуватися напрямку за векторами \mathbf{V}_r , \mathbf{V}_{φ} , \mathbf{V}_{θ} .

У супротивному випадку отримується спотворені значення координат, оскільки об'єм $[\mathbf{S}]^3$ розташовується за напрямком максимальної швидкості. За умови, що особистий вектор АО \mathbf{V}_r для екстремальних точок дорівнює нулю, вимір за цієї координати може відбуватися лише за примусового руху відчутника. Тобто \mathbf{V}_r має протилежний напрямок супротив того, що відображено на рис. 1.14,б. Але на шляху такого вимірювання може бути частка АО, менша за $[\mathbf{S}]^3$, і, як наслідок, буде спотворено інформацію про R_R . Отже, як наслідок, маємо пряму залежність точності визначення координати від напрямку вектора руху (рис. 1.15). Як було обумовлено вище, довжина вектор-радіусу руху є залежною від швидкості руху за вектором \mathbf{V}_r (рис. 1.13). У такому випадку ми отримуємо похибку вимірювання вектор-радіусу у $[\mathbf{S}]$. Але наразі ми маємо цілу низку варіантів вектору руху при вимірюванні (рис. 1.15).

Розглянемо ці варіанти згідно їх можливого застосування. Наразі можна виділити сім можливих варіанти просторового руху при вимірюванні. За першим варіантом (рис. 1.15,а) маємо узагальнений випадок руху вимірювання за вектором \mathbf{V} . За цією умовою вектор \mathbf{V} не є колінеарним або ортогональним до жодного з векторів \mathbf{V}_φ , \mathbf{V}_r , \mathbf{V}_θ . Випадки такого руху можуть бути за комбінованих швидкостей двох тангенціальних \mathbf{V}_φ , \mathbf{V}_θ та одної радіальної \mathbf{V}_r . У цьому випадку похибка координати знаходиться у межах площини, побудованої на векторах \mathbf{V} та \mathbf{V}_r . Оскільки вона більша за $[\mathbf{S}]^2$, то і відповідна похибка визначення координати не визначається у межах цієї площі. Як наслідок, вона може сягати величини $2[\mathbf{S}]$ і більше.

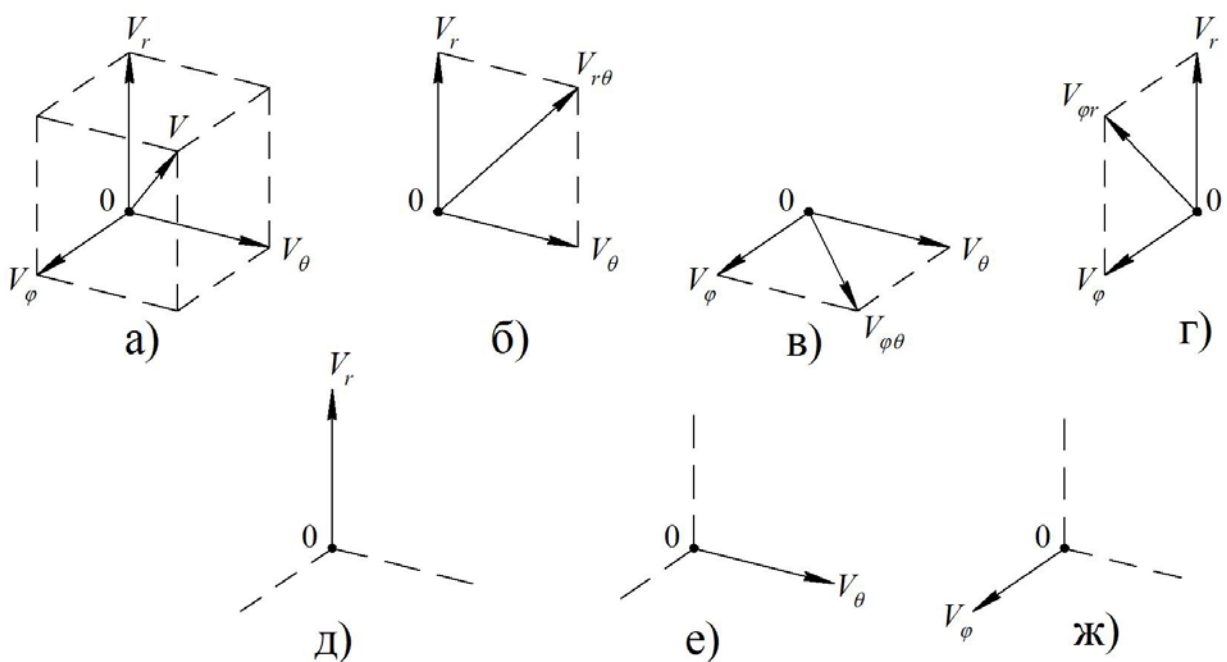


Рис. 1.15. Можливі напрямки вимірювання, де: а) загальний випадок отримання вектору \mathbf{v} ; б) напрямок вимірювання за вектором $\mathbf{v}_{r\theta}$; в) напрямок вимірювання за вектором $\mathbf{v}_{\varphi\theta}$; г) напрямок вимірювання за вектором $\mathbf{v}_{\varphi r}$; д) напрямок вимірювання за вектором \mathbf{v}_r ; ж) напрямок вимірювання за вектором \mathbf{v}_θ ; з) напрямок вимірювання за вектором \mathbf{v}_φ . Крпка $M(x,y,z)$ помічена як початок координат «0»

Наступний випадок (рис. 1.15,б) комбінована швидкість у площині векторів V_r та V_θ за напрямком вектора $V_{r\theta}$ (аналогічно рис. 1.14,б). Це відповідає випадку нерадіального руху в поєднанні з радіальним. Така ситуація відповідає випадку, коли відчутник рухається за меридіаном, а не сама АС. Як наслідок, точність визначення координати вершини не краще за $2[S]$. Наразі це є комбінований рух, як і у наступних варіантах (рис. 1.14,в,г). Тобто ці варіанти вимірювання являють собою комбінований рух, коли обертання АС має одні параметри руху, а відчутник інші. Така ситуація виникає, коли відчутник рухається абсолютно незалежно відносно самої поверхні АС, яка теж рухається незалежно. Єдиною зв'язковою системою в просторі є загальний центр (координатна система) обертання над поверхнею. У цьому випадку внутрішня панданна зона відчутника визначає зовнішню панданну зону АС.

У наступному випадку (рис. 1.15,д) ЧЕ рухається за напрямком вектора V_r . Водночас, АС не рухається, оскільки ми отримуємо попередню ситуацію. За такого руху спостерігається максимальна точність за напрямком вектору V_r . Якщо ми маємо рух за векторами V_θ (рис. 1.15.е) або ж V_ϕ (рис. 1.15,ж), то це означає бокове торкання. Для того, щоб мати уявлення про цей процес, достатньо на діаграмі (рис. 1.14,б) залишити рух за вектором V_ϕ . Похибка визначення координати у такому випадку буде коливатися у межах $[S] - 2[S]$. Отже, точність визначення координати точки $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ є повністю залежною від швидкості відносного руху стосовно поверхні. Величину швидкості аналізу на торкання t_T наразі можна вважати стабільною величиною, оскільки вона, з одного боку, є залежною від конструкційних особливостей відчутника та чутника, а, з іншого боку, від фізичних параметрів просторової похибки часу.

Отже, є можливість уявити поверхню панданної зони як ідеальні кулі одна в одній. Зовнішня куля надає всі можливі варіанти руху точки максимуму, а внутрішня точки – мінімуму. Ці точки виконують рух у формі кола, центр якого є вісь обертання АС. Водночас, площина обертання є перпендикулярною

до вісі обертання як в одному, так і у другому випадку (рис. 1.16). При вирішенні задачі пошуку зовнішнього та внутрішнього радіусів маємо ускладнення з огляду на те, що її необхідно вирішувати у подвійному варіантах.

За першим варіантом нам необхідно визначитися з уявними координатами зовнішньої та внутрішньої сфер. Для цього необхідно знати уявну функцію, яка дає опис поверхні АС у просторі $S_{AC}(x,y,z)$. Тобто, для вирішення уявної задачі нам необхідно мати наступні три рівняння, а саме:

– для зовнішньої сфери

$$x_z^2 + y_z^2 + z_z^2 = R_z^2 ; \quad (1.55)$$

– для внутрішньої сфери

$$x_g^2 + y_g^2 + z_g^2 = R_g^2 ; \quad (1.56)$$

та рівняння яке надає опис поверхні АС

$$S_{AC}(x, y, z) = 0 . \quad (1.57)$$

Отже, нам необхідно знайти максимум та мінімум функції $S_{AC}(x,y,z)$. Для цього визначимося з аналітичними залежностями, якими можна надати опис для зовнішньої та внутрішньої сфер.

Оскільки ми маємо опис сфери у неявному вигляді (1.55) та (1.56), то розглянемо інші варіанти.

По-перше, це параметрична форма $(0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi)$ з центром у початку координат $O(0,0,0)$

$$\begin{aligned} x_z &= R_z \cos u \sin v ; y_z = R_z \sin u \sin v ; z_z = R_z \cos v \\ x_g &= R_g \cos u \sin v ; y_g = R_g \sin u \sin v ; z_g = R_g \cos v \end{aligned}$$

І, по-друге, у векторній з центром у початку координат $C(0,0,0)$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_z &= (R_z \cos u \sin v)\mathbf{i} + (R_z \sin u \sin v)\mathbf{j} + (R_z \cos v)\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_g &= (R_g \cos u \sin v)\mathbf{i} + (R_g \sin u \sin v)\mathbf{j} + (R_g \cos v)\mathbf{k} . \end{aligned}$$

Аналогічно до сфер, обмежуючих панданну зону АС, маємо опис її поверхні у неявному вигляді (1.57) та параметричній

$$x_{AC} = x(u, v), y_{AC} = y(u, v), z_{AC} = z(u, v),$$

а також векторній

$$\mathbf{r}_{AC}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},$$

коли радіус вектор від центру координат до точки $M_3(x_3, y_3, z_3)$ описується як

$$\mathbf{r}_{AC} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Отже, маємо початкове математичне підґрунтя для побудови принципів пошуку радіус векторів, які визначають розміри панданної зони АС.

Наразі існує низка математичних теорій та залежностей, що надають можливість визначитися із точками максимуму та мінімуму функцій, які надають посередні способи визначення цих координат. Всі ці способи стосуються функцій, які знаходяться у площині і лише деякі розглядають обмежені частини поверхні з відомим математичним описом. Отже, первинна наша задача полягає в доведенні: функція поверхні $S_{AC}(x, y, z) = 0$ має точки максимуму та мінімуму. Для початку розглянемо загально відомі теореми та їх наслідки.

Першою теоремою, яка надає засади визначення максимуму та мінімуму функції, є теорема Лагранжа. Ця теорема пов'язує локальні властивості функції, які описуються похідною з властивостями функції на скінченному інтервалі. Теореми будемо наводити без доказу, оскільки є досить відомим у математичній літературі.

Отже, теорема Лагранжа наголошує: Нехай $f(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a, b]$, яка має похідну $f'(x)$ на інтервалі (a, b) . Тоді на інтервалі (a, b) існує принаймні одна точка c така, що:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Стосовно нашого випадку це є простий доказ існування мінімуму та максимуму панданної зони.

Наступна теорема, яка є наслідком теореми Лагранжа, це теорема Ролля, що наголошує: «Припустимо, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, і має похідну в точках інтервалу (a, b) таку, що $f(a) = f(b)$. У такому випадку існує таке значення c з інтервалу (a, b) , що $f'(c) = 0$ » [9].

Ця теорема має безперечний зв'язок із панданною зоною АО, оскільки початок і закінчення нашої функції поверхні співпадають (рис. 1.16). Якщо ми маємо кілька функцій (рис. 1.16), то справедливою є теорема Коші [9]: «Припустимо, що функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$ і мають похідні $f'_1(x)$ та $f'_2(x)$ у точках інтервалу (a,b) , до того ж $f'_2(x) \neq 0$ при значеннях x з інтервалу (a,b) , то існує таке число з інтервалу (a,b) , що

$$\frac{f_1(b) - f_1(a)}{f_2(b) - f_2(a)} = \frac{f'_1(c)}{f'_2(c)}.$$

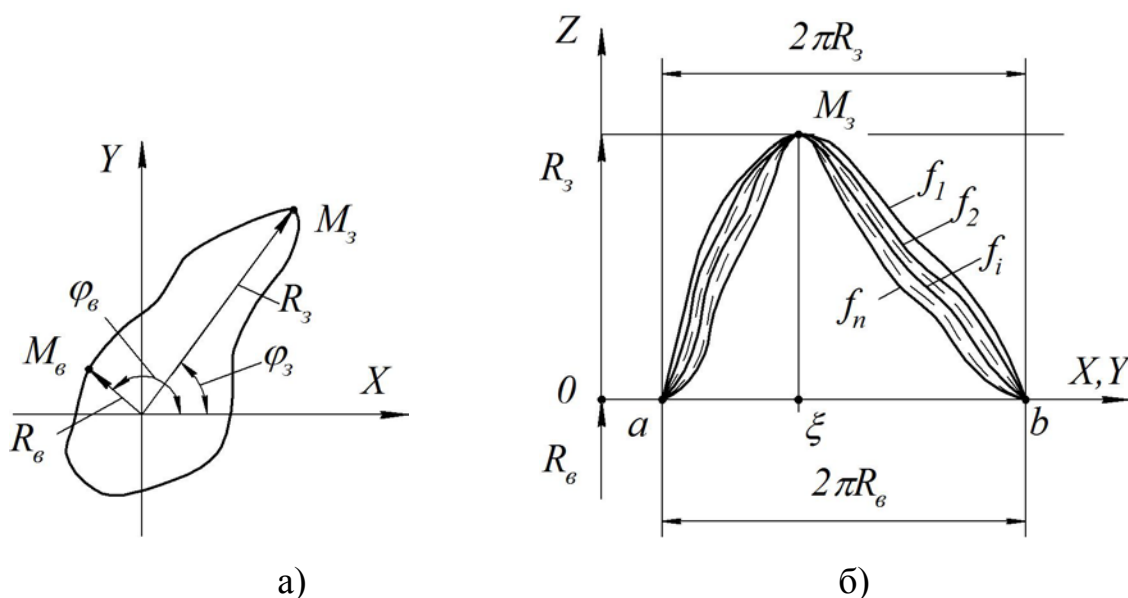


Рис. 1.16. Загальний принцип розташування точок максимуму та мінімуму на поверхні АС, де: а) загальне розташування точок максимуму та мінімуму в ідеалізованому випадку; б) розгортка траєкторії сполучення між точками мінімуму та максимуму

Завершити перелік теорем можна теоремою Дермі: «Якщо функція $f(x)$ неперервна на певному інтервалі $[a,b]$ приймає своє найбільше та найменше значення у внутрішній точці c цього інтервалу, тобто $a < c < b$ і, якщо у точці c похідна функції $f(x)$ існує, то вона обов'язково дорівнює нулю: $f'(c) = 0$ » [9].

Окрім вищезначених теорем, існують ознаки екстремумів функцій [9]. Наразі таких ознак є дві.

Перша достатня ознака екстремуму функції наголошує, що точка ξ є точкою екстремуму функції $f(x)$, якщо похідна $f'(\xi)$ при переході x через ξ змінює знак і при зміні знака “+” на “-” точка ξ є точкою максимуму; при зміні “-” на “+” точка ξ є точкою мінімуму.

Друга достатня ознака екстремуму функції наголошує, що точка ξ є точка екстремуму функції $f(x)$, якщо $f'(\xi) = 0$, а $f''(\xi)$, і якщо $f''(\xi) > 0$, то ξ – точка мінімуму, а якщо $f''(\xi) < 0$, то ξ – точка максимуму.

Таким чином, маємо можливість надати визначення, що має назву точки максимуму та мінімуму. Отже, точкою максимуму функції $f(x)$, якщо $f(\xi)$ є найбільше її значення у межах цієї координати (ξ). Точкою мінімуму ξ є точка, в якій функція $f(x)$ має найменше значення серед усіх оточуючих [9]. У нашому випадку (рис. 1.16) цих ознак недостатньо, оскільки за такими ознаками ми можемо мати кілька точок мінімумів та максимумів.

Причина такої невизначеності полягає у недостепенності меж визначення критичних точок, тобто вище наведені теореми та формулювання вимагають більш широкого діапазону, а саме у межах існування всієї функції.

Для того, щоб розглянути усі особливості панданної зони, зробимо низку перерізів АО, площа яких проходить через точку максимуму M_3 та точку мінімуму M_b . Особливостями цього перерізу є те, що усі можливі шляхи з'єднання точок M_3 та M_b , тобто лінії периметру перерізу знаходяться у межах узагальненої площини (рис. 1.16,б). Отже, за кожного перерізу ми отримуємо лінію периметру, яка може бути описана низкою функцій $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$.

Орієнтуючись на особливості цих функцій, маємо можливість вважати, що

$$f_1(a) = f_1(b) = f_2(a) = f_2(b) = f_3(a) = \dots = f_n(a) = f_n(b)$$

при $a = b = R_b$.

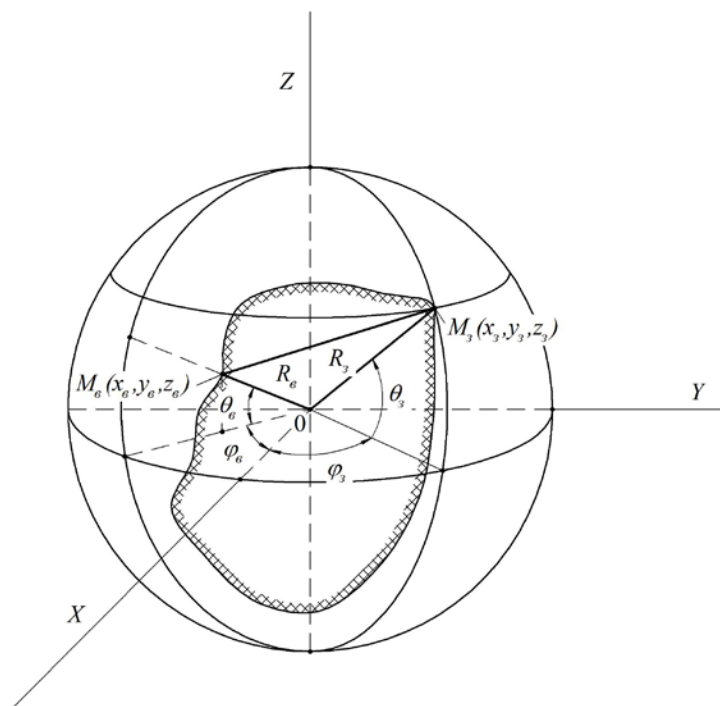
Одночасно з цим маємо для першої похідної

$$f_1'(\xi) = f_2'(\xi) = f_3'(\xi) = \dots = f_n'(\xi) = 0.$$

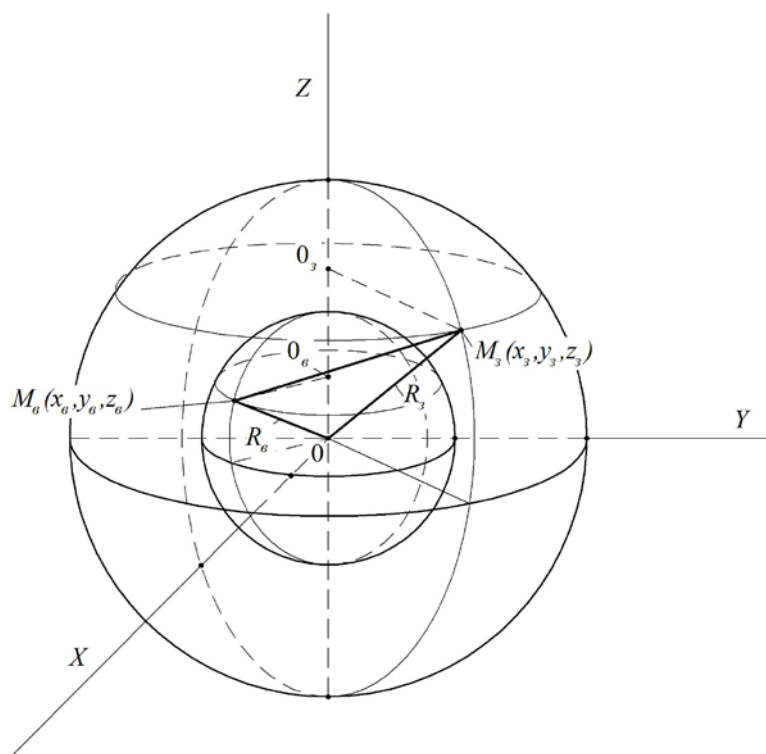
На рис. 1.16,б ми маємо афінне перетворення, де лінія аргументу (x або y) є розгорткою довжини кола радіусу R_b , а верхній рівень R_z є розгорткою довжини кола з відповідним радіусом. Особливістю такого перетворення є те, що довжина усіх ліній, які описують ці функції, однакова. Перетворення визначаються масштабуванням і кутом зсуву. Масштабування визначається, як $\mu = R_g/R_z$, а коефіцієнти провороту $\eta = (R_z - R_g)/R_z$. Наразі це є просто криволінійна координатна система. Низка функцій, що співпадають з перерізами (рис. 1.16.б), є системою меридіанів, які ми маємо можливість задавати із необхідним кроком. Це надає можливість визначитися з деякими особливостями панданної зони. При цьому ці меридіани виходять з точки максимуму M_z і закінчуються у точці мінімуму M_b . Віссю, навколо якої проходять ці меридіани, є лінія M_zM_b (рис. 1.17), але ця лінія обертається навколо центру координат “0”.

Якщо ми прийняли за умову, що центр ваги АС співпадає з центром обертання, то лінія M_zM_b , обертаючись навколо цього центру, утворює свою панданну зону. Ця зона має форму або лінії, або циліндра, або конуса. До того ж, у випадку лінії обертання вона повинна проходити через центр координат. У такому разі функції перерізу будуть реальними меридіанами. При розгляді ситуації з обертанням існує ще один випадок, який стосується одночасного подвійного обертання. У цьому випадку ми маємо подвійне обертання, одне навколо центру системи координат (“0” рис. 1.17), а друге навколо осі M_zM_b . У такому випадку ми отримуємо два неколінеарні вектори обертання, які намагаються досягти колінеарності. Наочний приклад – це обертання Земної кулі навколо своєї вісі та навколо сонця. У нашому випадку (рис. 1.17,а) це призводить до зміни параметрів панданної зони.

Функція, яка дає опис поверхні (1.57), має складні багатоступеневі залежності, тому визначення її максимумів та мінімумів є досить складною математичною задачею. Наразі при значному спрощенні маємо можливість



а)



б)

Рис. 1.17. Модель внутрішніх зв'язків між елементами панданної зони, де:
а) зв'язок між поверхнею АС, радіус - векторами та точками мінімуму та максимуму; б) зв'язок між радіус векторами та зовнішньою та внутрішньою сферами обмеження панданної зони

скористатися класичними методиками визначення максимумів та мінімумів для функцій кількох змінних. Ця методика стосується уявних АС тобто їх ТФ які мають визначення через певні функції. Математичний апарат визначення цих параметрів АС має достеменний опис за класичної математики [8]. Тобто вважаючи, що форма нашої АС незалежна від часу можемо вважати АС та його ПЗ умовно (уявно) статичною. Це надає нам можливість скористатися низкою теорем математичного аналізу функцій кількох змінних. Перефразуючи теорему про достатні умови екстремуму функції кількох змінних стосовно нашого випадку, маємо можливість сформулювати необхідні умови для пошуку [9].

Отже, якщо на деякій частині поверхні знаходиться точка $M(x,y,z)$, функція $S(x,y,z)$ має неперервні часткові похідні до третього порядку включно, а також є критичною до функції, тобто

$$\frac{dS(x,y)}{dx} = 0; \frac{dS(x,y)}{dy} = 0,$$

то при $x = x_3, y = y_3$:

1) $S(x,y,z)$ має максимум, якщо

$$\frac{d^2S(x_3, y_3)}{dx^2} \frac{d^2S(x_3, y_3)}{dy^2} - \left(\frac{d^2S(x_3, y_3)}{dxdy} \right)^2 > 0 \text{ та } \frac{d^2S(x_3, y_3)}{dx^2} < 0$$

2) при $x = x_3, y = y_3$ має мінімум, якщо

$$\frac{d^2S(x_3, y_3)}{dx^2} \frac{d^2S(x_3, y_3)}{dy^2} - \left(\frac{d^2S(x_3, y_3)}{dxdy} \right)^2 > 0 \text{ та } \frac{d^2S(x_3, y_3)}{dx^2} > 0 \quad (1.58)$$

3) $S(x,y,z)$ не має ані максимуму, ані мінімуму, якщо

$$\frac{d^2S(x,y)}{dx^2} \frac{d^2S(x,y)}{dy^2} - \left(\frac{d^2S(x,y)}{dxdy} \right)^2 < 0;$$

4) якщо $\frac{d^2S(x,y)}{dx^2} \frac{d^2S(x,y)}{dy^2} - \left(\frac{d^2S(x,y)}{dxdy} \right)^2 = 0$, то екстремум може бути або не бути, тобто необхідне подальші дослідження.

Отже, користуючись вище обумовленим, ми маємо можливість визначитися

з максимумом та мінімумом уявної функції, яка дає опис уявної поверхні АС, тобто $S(x,y,z)$. Оскільки у нашій задачі пошук параметрів геометрії межевої панданної зони, то можна констатувати той факт, що нас задовольняють лише 1) та 2) у (1.58). Інші два випадки у панданній зоні АС просто не можливі. Для пришвидшення пошуку точок максимуму та мінімуму можна використовувати градієнт функції. Для цього ми уявляємо функцію поверхні як скалярну. У такому випадку ми маємо можливість уявити градієнт по поверхні як:

$$\text{grad}S = \frac{ds}{dx}\mathbf{i} + \frac{ds}{dy}\mathbf{j} + \frac{ds}{dz}\mathbf{k}. \quad (1.59)$$

Важливою властивістю градієнта є те, що він є вектор, який спрямовано від точки максимуму до точки мінімуму. Окрім того, довжина вектора слугує мірою відстані від точок екстремумів. Безпосередньо у точці екстремумів градієнт дорівнює нулю.

Для визначення значення градієнта (1.59) необхідно вирішити це рівняння разом з рівнянням (1.57). Тим не менш, рух точок $M_3(x_3, y_3, z_3)$ та $M_6(x_6, y_6, z_6)$ створюють відповідні сфери навколо центру координат (1.55) (1.56). Плинні координати руху для точки $M_3(x_3, y_3, z_3)$ будуть визначатися як

$$\begin{cases} x_3 = R_3 \cos \theta_3 \cos \varphi_3 \\ y_3 = R_3 \cos \theta_3 \sin \varphi_3 \\ z_3 = R_3 \sin \theta_3 \end{cases} \quad (1.60)$$

і для точки $M_6(x_6, y_6, z_6)$

$$\begin{cases} x_6 = R_6 \cos \theta_6 \cos \varphi_6 \\ y_6 = R_6 \cos \theta_6 \sin \varphi_6 \\ z_6 = R_6 \sin \theta_6 \end{cases} \quad (1.61)$$

Для цих сфер будемо мати наступне значення градієнта

$$(\text{grad}S)_{M_3, M_6} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

або для точки M_3

$$\text{grad}S_{M_3} = 2R_3 \cos \theta_3 \cos \varphi_3 \mathbf{i} + 2R_3 \cos \theta_3 \sin \varphi_3 \mathbf{j} + 2R_3 \sin \theta_3 \mathbf{k}$$

$$\text{grad}S_{M_6} = 2R_6 \cos \theta_6 \cos \varphi_6 \mathbf{i} + 2R_6 \cos \theta_6 \sin \varphi_6 \mathbf{j} + 2R_6 \sin \theta_6 \mathbf{k}$$

Модулі градієнтів відповідно

$$|\text{grad}S|_{M_3} = 2R_3 \text{ та } |\text{grad}S|_{M_6} = 2R_6$$

Відстань між точками $\overline{M_3 M_6}$ буде визначатися за виразом

$$\overline{M_3 M_6} = \sqrt{(x_3 - x_6)^2 + (y_3 - y_6)^2 + (z_3 - z_6)^2}$$

або підстановки значень координат із виразів (1.60) та (1.61) для точок $M_3(x_3, y_3, z_3)$ та $M_6(x_6, y_6, z_6)$ отримуємо

$$\overline{M_3 M_6} = \sqrt{R_3^2 + R_6^2 - 2R_3 R_6 [\cos \theta_3 \cos \theta_6 \cos(\varphi_3 - \varphi_6) + \sin \theta_3 \sin \theta_6]}. \quad (1.62)$$

Довжина відстані $\overline{M_3 M_6}$ за виразом (1.62) може мати критичні випадки, коли кути приймають значення кратні $\frac{\pi}{2}$. У такому разі маємо наступні випадки

$$\overline{M_3 M_6} = R_3 - R_6 \quad (1.63)$$

та $\overline{M_3 M_6} = R_3 + R_6$.

Отже за (1.63) різниця наближається до нуля, тим не менш, цього не може бути, оскільки точки M_3 та M_6 можуть знаходитися на одній лінії лише у тому випадку, якщо вони знаходяться по різні боки центру обертання. Тобто за (1.63) ми маємо можливість розглядати лише варіант

$$\lim_{R_6 \rightarrow R_3} (R_3 - R_6) = [S]. \quad (1.64)$$

Таким чином, на цьому маємо можливість закінчити попередній опис технологічного фантому, тобто вигляду уявної функції математичного апарату опису геометрії руху поверхні АС у межевому стані.

1.8. Складні та нескладні форми абстрактного об'єкта. Імпульс панданної зони

Панданна зона утворюється внаслідок руху АС у просторі. Існує також ПЗ, коли об'єкт вкритий гладкими поверхнями, які спираються на піки виступів або западин. АС у широкому загалі має досить велику кількість форм, а тому здавалося б, що будь-яка класифікація ПЗ за формою тіла мала б нескінченний характер. Проте, існує можливість класифікації форми ПЗ на засадах орієнтації об'єкта відносно напрямку вектора руху V_p та площини проекції перпендикулярної цьому вектору. Наразі у цьому може бути використане поняття правильної та неправильної поверхні відносно деяких координат координатної системи Декарта тощо [8]. Розглянемо варіант пласкої та об'ємної задачі. При переході від математичних моделей до технології ТОНТОР обумовимо технології визначення. Під нескладними поверхнями та об'єктами будемо розуміти АС, форма яких задовольняє умові визначення правильної поверхні згідно математичного визначення. Під складними поверхнями та об'єктами будемо розуміти АС, форма яких задовольняє умові визначення неправильної поверхні згідно математичного визначення.

Для початку розглянемо двокоординатний випадок. До того ж, ці випадки можна об'єднати в один, оскільки різниця між уявною та реальною системою полягає у тому, що площина має товщину $[S]$, яка не впливає на визначення координат у двокоординатній системі. Отже, розглянемо перший випадок (рис. 1.18). У цьому випадку площина АС обмежена зверху тільки однією функцією $y = y_e(x)$, де $x \in [a, b]$, а знизу тільки однією функцією $y = y_n(x)$, де $x \in [a, b]$. При цьому всі кутові точки АС при проектуванні на вісь OX дають тільки дві проекції. У такому разі площина АС називається правильною по відношенню до вісі OX , а сама АС нескладною. У цьому випадку звертаємо увагу на те, що вектор швидкості можливого руху співпадає з напрямком проекції на вісь OX . Окрім того, необхідно звернути увагу на те, що крапки A та B є переходами від функції $y = y_e(x)$ до функції $y = y_n(x)$, тобто прості АС типу обмеженої площини є ізольованим від зовнішнього двомірного середовища.

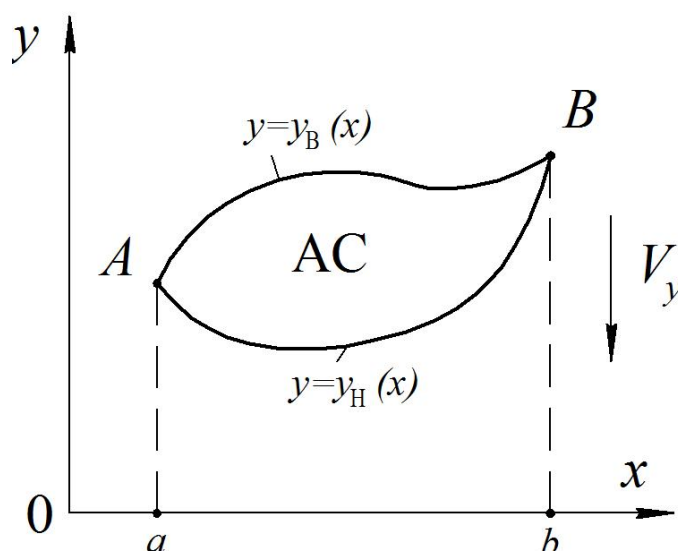


Рис. 1.18. Плоска AC є правильною відносно вісі OX

У другому випадку розглянемо проекцію плоскої AC на вісь OY (рис. 1.19). За цієї ситуації площа AC обмежена зправа тільки однією функцією $x = x_{\Pi}(y)$, а зліва тільки однією функцією $x = x_{\text{Л}}(y)$. При цьому всі кутові точки AC при проектуванні на вісь OY дають лише дві точки проекції. У такому разі площа має назву правильної по відношенню до вісі OY , а сама AC – нескладною.

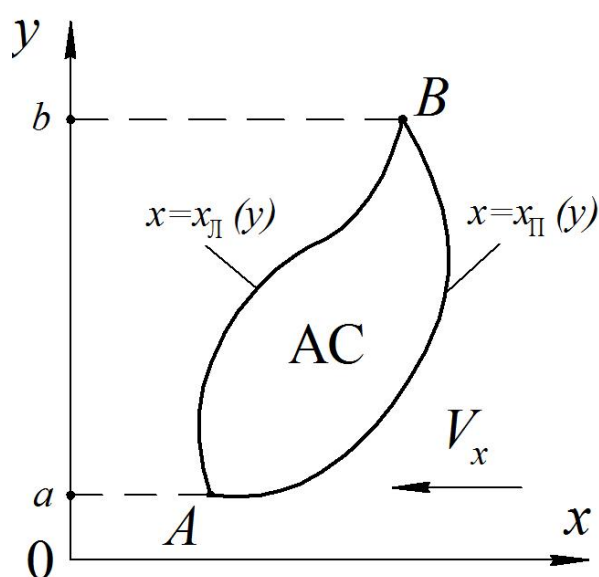


Рис. 1.19. Плоска AC є правильною відносно вісі OY

У цьому випадку звертаємо увагу на те, що вектор швидкості можливого руху V_x співпадає з напрямком проекції на вісь OY . Окрім того, необхідно звернути увагу на те, що точки A та B є переходами від функції $x = x_{\Pi}(y)$ до функції $x = x_{\Pi}(y)$, тобто простір AC типу «обмежена площа» є ізолюваним від зовнішнього двовимірного середовища. У цих двох випадках (рис. 1.18, рис. 1.19) маємо одну особливість, а саме: площа AC є правильною як по відношенню до вісі OX , так і до вісі OY . Узагальнення цих ситуацій надає нам наступні загальні риси визначення складних та нескладних за формою AC .

По-перше, вектор руху в обох випадках співпадає з напрямком проекції на визначену вісь. По-друге, вектори руху спрямовані ортогонально до вісі проекції. По-третє, будь-яка лінія проекції від довільно обраної точки на контурі не може пересікати контур більше за один раз.

Тепер розглянемо, чим відрізняється неправильна (складна) від правильної. Для цього розглянемо два випадки проектування плоскої AC на різні вісі.

Отже, в першому варіанті маємо розглянути проекцію AC довільної форми на вісь OY (рис. 1.20). Але форма AC дещо інша та інше розташування до вектора V_y та вісі OX .

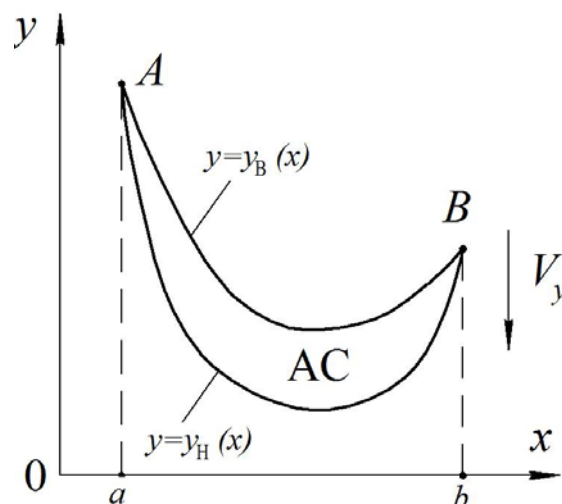


Рис. 1.20. Плоска AC є правильною відносно вісі OX і неправильною відносно вісі OY

Отже, у цій ситуації AC є правильною або нескладною відносно вісі OX . Але відносно вісі OY ця AC є неправильною або складною відносно вісі OY . Розглянемо основні ознаки за якими це відбувається (рис. 1.20).

У першому випадку ми маємо певну схожість з випадком на рис. 1.18, коли проекції крапок функції $y = y_e(x)$ на шляху до вісі OX лише один раз пересікають контур AC , тобто нижню функцію $y = y_n(x)$. Якщо ми поміняємо вектор спрямованості проекції V_y та V_x (рис. 1.21), то проекція AC на вісь OY покаже, що об'єкт є неправильний або складний. Відбувається це з тієї причини, що функції $x = x_n(y)$ та $x = x_l(y)$ у проекції на вісь OY неоднозначні. Так, наприклад, якщо всі крапки функції $x = x_n(y)$ на ділянці AC при проектуванні на вісь OY лише один раз перетинають функцію $x = x_l(y)$, то на ділянці DB проектуємі крапки роблять це два рази. Один раз саму себе і один раз функцію $x = x_l(y)$. Так, лінія проекції крапки B на вісь OY перетинає саму себе у крапці C' , а функцію $x = x_l(y)$ у крапці C . Така ситуація спостерігається для ділянки DB функції $x = x_l(y)$ коли проекції її крапок перетинають не тільки саму себе, а і функцію $x = x_n(y)$.

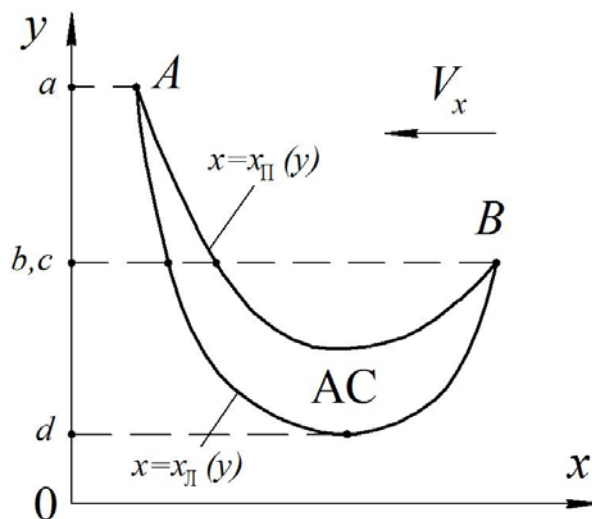


Рис. 1.21. Плоска AC неправильна відносно вісі OY

Внаслідок цього розгляду маємо констатувати той факт, що форма AC має складний характер.

Особливо стосовно попереднього розгляду необхідно підкреслити форму та розміри перерізу панданної зони стосовно розглянутих випадків. Ширина площі перерізу, як уже було обумовлено, буде становити $[S]$ для реального об'єкту і нуль для уявного. Довжина проекції ab на ту чи іншу вісь залежна від розташування АС відносно вісей координат, напрямку вектора руху та ступеню кривизни функцій, які надають опис контуру поверхні.

Отже, якщо провести підсумковий аналіз ситуації, що складається, відкинувши всі вторинні ознаки, маємо визнати, що основою подібної інтерпретації необхідно вважати напрямок вектору руху V_p та ортогональну йому пряму. Наразі подібна система вісей імітує типову двокоординатну систему Декарта, що розглядалася попередньо (рис. 1.22). У цьому випадку напрямок руху АС та вектор руху V_p спрямовано по вісі координат OX . За цим же напрямком спрямовано нормальний вектор n_0 від центру координат.

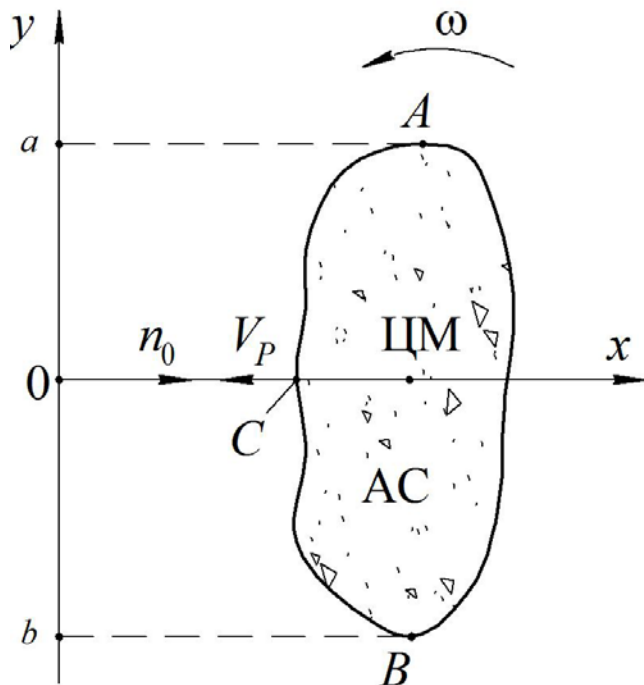


Рис. 1.22. Моделювання приватних координат руху для пласкої АС

Спрямувати нормальний вектор n_0 від точки C таким чином, щоб він співпадав з напрямком руху та віссю OX , практично неможливо для криволінійної поверхні. У приватному випадку для цього ліва сторона АС повинна являти собою пряму лінію перпендикулярну вектору руху (рис. 1.22).

Відтинок (a, b) , який визначає розміри проекції АС на вісь OY , не є сталими, оскільки за певного обертання з швидкістю ω проекції крапок A та B можуть змінювати свої координати. Якщо ми перенесемо нашу ситуацію на

The diagram shows a particle in a coordinate system with axes x and y . The origin O is at the center of the particle. The particle's boundary is an irregular shape labeled AC . Inside the particle, there is a central region labeled ЦМ (center of mass) and a shaded region. The particle is surrounded by a flow field with velocity V_x directed to the left. A vector n_0 points from the origin O towards the particle. A vector V_P points from the origin O towards the particle. The angle between n_0 and V_P is α_0 . The particle is rotating with angular velocity ω . The particle is divided into two regions: R_3 (upper) and R_B (lower). Points A , B , A' , and B' are marked on the boundary. The particle is also labeled with a and b on the y -axis.

Наразі ми отримуємо додаткову крапку C на перетині радіусу R_{\max} та вісі координат OX . Оскільки прямокутна система координат та максимальний радіус (R_{\max}) ПЗ є базовими поняттями то і крапка C може сприйматися нами як базова система підрахунку. Отже, за такої системи координат (коло та вектор руху) нам краще застосовувати полярну систему координат. При цьому використовуємо базові рівняння кола, яке має наступний вигляд

де ρ_0, φ_0 - полярні координати центра кола радіусу R .

Як наслідок, зовнішнє коло панданної зони має опис через вираз

$$\rho = 2R_3 \cdot \cos \varphi.$$

При цьому математичний опис контуру АС у полярній системі координат набуває вигляду

$$\rho = 2R \cos [f(\omega t + \beta)].$$

За такого розташування маємо можливість обґрунтувати поняття панданного вакууму. Оскільки ми маємо базовий початок у крапці С, то існує можливість ввести растровий кут внутрішнього простору АС. Наразі растровий кут α вказує на те, яку частину внутрішнього простору АС ми бачимо з позиції крапки С, а яку не бачимо. Визначається цей кут прямими, проведеними з крапки С через крапки А' та В' до перетину контуру внутрішнього простору АС. Наразі, кут між цими лініями позначено як α_0 . У крапках А' та В' маємо можливість побудувати нормалі $n_{A'}$ та $n_{B'}$, які ортогональні до проведених прямих. У межах обертання АС кут α_0 може змінюватися від нуля до майже $\pi/2$, але ніколи його не досягти. Якщо він досягне цієї величини, це означає зникнення панданного вакууму. На рис. 1.23 панданний вакуум пофарбовано у темний колір. Досить добре видно, що при обертанні АС навколо центру маси (ЦМ) величини панданних вакуумів змінюються за розмірами.

Надалі при розгляді панданних зон будемо розглядати нескладні (правильні), а відносно площин проекції перпендикулярних вектору руху.

Найпростіші варіанти АС - це точка, крапка та лінія.

Отже, якщо ми розглядаємо АС типу точки, то, як уявна величина без розмірів, вона не створює ПЗ як такої. Відбувається це тому, що точка як уявний об'єкт, має лише координати, а тому лінія проекції не має діаметру. За таких обставин панданна зона існує лише як фантом у координатах. Якщо ми розглядаємо реальну лінію, то її ПЗ буде залежна від кута між лінією та напрямком вектора руху.

Водночас, площа проекції S_{np} на площину буде становити

$$S_{np} = L_{AB} [S] \cdot \sin \alpha,$$

де L_{AB} - довжина реальної лінії, $[S]$ - діаметр перерізу, α - кут між реальною лінією та напрямком вектора руху.

При цьому кут може змінюватися у межах 2π (рис. 1.24), але при значеннях 0 та π має величини, які визначаються як

$$\alpha = \arctg \frac{[S]}{L_{AB} - [S]}.$$

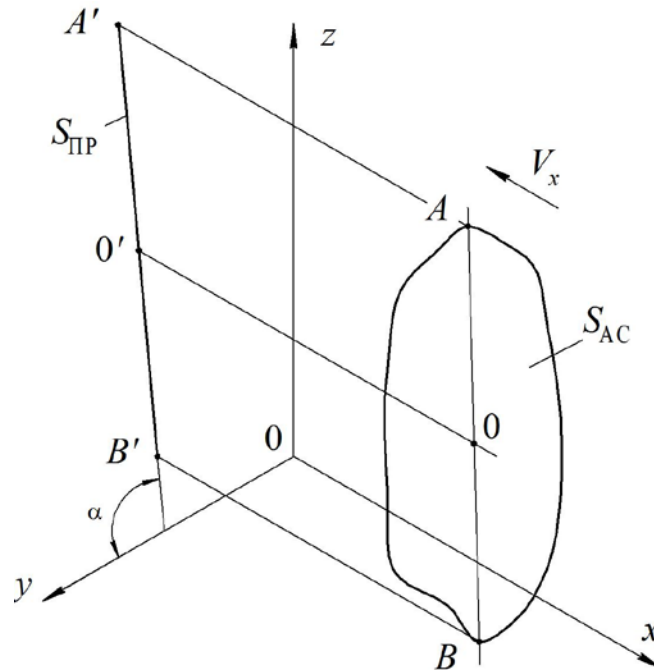


Рис. 1.24. Проекція плоскої AC на площину координат ZOY

Як наслідок

$$L_{AB} \cdot \sin \alpha = [S],$$

а площа перерізу ПЗ приймає мінімальне значення

$$S_{np} = [S]^2.$$

Таким чином площа проекції змінюється у межах від $[S]^2$ до $[S] \cdot L_{AB}$. При цьому імпульс об'єму форми панданної зони для лінії буде становити

$$[\bar{p}]_L = [S] \cdot L_{AB}^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

За своєї межі лінія перетворюється на крапку, яка має імпульс форми панданної зони

$$\overline{[S]} = 2[S]^3.$$

Розглянуте попередньо є варіантом плоско паралельного руху АС. Проте, рух АС може ще більш складним. Так, наприклад, якщо АС обертається зі швидкістю ω у площині поступального руху, то проекція максимальних відхилень від центру обертання (крапки A та B) дають модульовану проекцію обертання, яка залежна від кутової швидкості та кута нахилу поверхні у системі

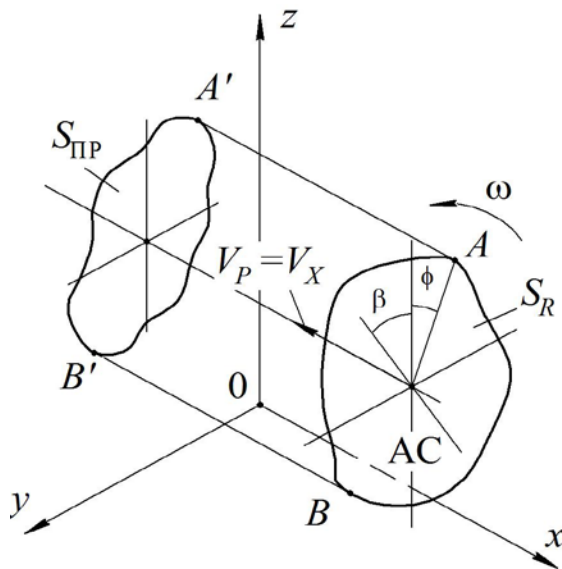


Рис. 1.25. Проекція пласкої АС на довільно обрану площину за вектором $V_p = V_x$

координат (β). Кут ϕ є кутом, який визначає час запізнення обертання (рис. 1.25), тобто $A'B' = f(AB, \beta, \phi)$.

Водночас, площа проекції S_{np} є залежною від кутів β , ϕ , тобто $S_{np} = S_R(\sin\beta, \cos\phi)$. Оскільки кути β , ϕ та швидкість ω є функціонально залежними від часу, то проекція поверхні АС (S_R) на площину

YOZ буде визначатися як

$$S_{np} = f \cdot S_R [\sin\beta(t) \cdot \cos(\omega t + \phi(t))].$$

Обертання АС створює модуляцію панданної зони у вигляді

$$L_{A'B'} = f L_{AB} (\sin(\omega t + \phi) \cdot \cos\beta).$$

Як і будь-який об'єкт, АС має об'єм і масу, а тому має відповідні механічні властивості, як то кількість руху та відповідні закони та наслідки, які стосуються цієї властивості. За загальних теоретичних властивостей АС [11] ми маємо закон збереження кількості руху. Як правило, він визначається масою АС, помноженою на швидкість її руху, тобто mV . Якщо з масою у нас є певна визначеність, завдяки значенню об'єму та питомій вазі, то для швидкості руху це є більшою проблемою.

Складність полягає у тому, що за комплексного руху різні точки АС мають різну швидкість і, як наслідок, енергію та кількість руху.

Розглянемо загальний випадок плаского руху АС (рис. 1.26). Подібна ситуація розглядається у цілій низці теоретичних підручників з механіки [3, 7, 12, 13], але нас цікавить досить специфічні задачі, які пов'язані з наслідками подібного руху, а саме, з можливими модуляціями у навколишньому середовищі.

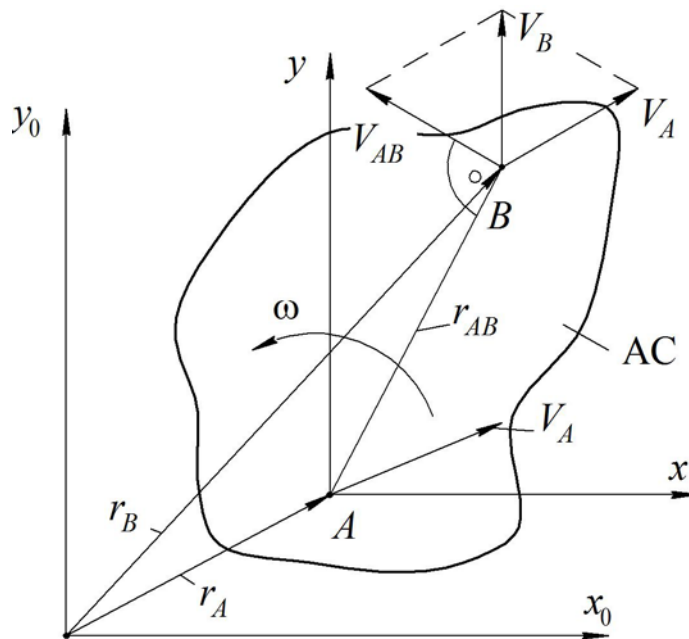


Рис. 1.26. Загальний випадок плаского руху АС

Отже, застосовуючи теорему про складання швидкостей задля будь-якої крапки B реальної АС плаского вигляду, маємо можливість стверджувати, що абсолютна швидкість V_B буде визначатися як

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_\Pi + \mathbf{V}_{об},$$

де \mathbf{V}_Π - швидкість від переносного поступового руху системі координат $Y_0O_0X_0$, $\mathbf{V}_{об}$ - швидкість крапки B за рахунок обертального руху відносно крапки A .

Оскільки за переносний рух обрано поступовий рух разом з крапкою A , то всі крапки цієї АС мають однакові переносні швидкості, які співпадають з абсолютною швидкістю крапки A , то

$$\mathbf{V}_{\Pi} = \mathbf{V}_A.$$

Швидкість відносного руху у випадку, коли воно є обертальним

$$\mathbf{V}_{об} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{AB}.$$

Швидкість $\mathbf{V}_{об}$ розташована у площині рухомої АС та спрямована ортогонально до відтинку AB , який об'єднує крапки B та A . цю швидкість можна виразити як векторний доданок

$$\mathbf{V}_{об} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{AB}.$$

З діаграми швидкостей маємо можливість стверджувати, що

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{AB}.$$

Цю формулу маємо можливість отримати з векторної суми радіусів крапок A та B , тобто

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB}. \quad (1.65)$$

Диференціюємо рівняння (1.65) відносно основної нерухомої системи координат $Y_0O_0X_0$, тобто

$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt}.$$

Вочевидь, що $d\mathbf{r}_B/dt = \mathbf{V}_B$, $d\mathbf{r}_A/dt = \mathbf{V}_A$ - швидкості крапок A та B . Похідна по часу від вектора сталого модуля за скалярним аргументом буде $d\mathbf{r}_{AB}/dt = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{AB}$. Як наслідок маємо

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{AB}. \quad (1.66)$$

З виразу (1.66) дуже добре видно, що всі точки на поверхні АС мають різну швидкість окрім тих, що лежать на лінії діаметрального радіус вектору, який проходить через центр обертання. За обертання прямої лінії або площини навколо центра ваги отримана проекція за принципом, відображенням на рис. 1.24 та рис. 1.26 у своєму максимумі буде утворювати лінію довжиною у максимум

панданного радіусу. У своєму мінімумі це або крапка для лінії, або лінія довжиною у мінімальний радіус ПЗ пласкої АС. Кожна точка у такому випадку буде мати швидкість, залежну від радіус вектора та швидкості обертання (1.66).

Наразі стосовно цих швидкостей у теоретичній механіці існує теорема про швидкості точок пласкої фігури [7, 14], тому не будемо зосереджуватися на цьому достеменно, оскільки це у нашому випадку є другорядне питання. У межах радіусу R_B ПЗ питома вага АС вважається сталою, то для кожної крапки у просторі статичної ПЗ залежно лише від кутової швидкості та радіусу обертання. У межах R_B до R_3 ПЗ потік маси не є стабільним оскільки необхідно враховувати щільність середовища. Оскільки ми маємо ідеальні за формою АС, тобто точка, крапка, лінія та площа, то відповідно маємо різні варіанти імпульсу ПЗ. Для того, щоб користуватися цією величиною, необхідно сформулювати поняття імпульсу ПЗ як фізичного явища.

1.8.1. Теоретичне підґрунтя імпульсу панданної зони

У п.п. 1.3 надані загальне підґрунтя виникнення руху АС та види траєкторій руху в просторі. Проте необхідним є розгляд окремої дискрети руху АС для створення поняття імпульсу ПЗ, враховуючи об'єм та масу об'єкта. Для цього визначимо форму АС в кожний момент часу t_0 при його русі відносно ЦМ (рис. 1.27). Вочевидь, оберемо переріз траєкторії руху як лінійний миттєвий відтинок траєкторії АВ, за яким рухається центр мас АС. Дискрета руху має особливі параметри, притаманні певній АС.

Обов'язково приймаємо умовну ситуацію, коли виконується наступне:

- на відтинку руху АС не змінює свої геометричні параметри;
- відтинок траєкторії АВ є визначеним за параметрами руху настільки, що маємо можливість розглядати його як чисто лінійний з вектором нормалі \mathbf{n} ;
- миттєва позиція АС є така, що лінійна відстань від ЦМ (R_0) є у площині нормалі \mathbf{n} , яка перпендикулярна вектору швидкості;
- усі кінематика рухів має закінчений цикл перетворень на відтинку АВ;

- відтинок траєкторії АВ є базовим, більшим за $[S]$, який долається за час τ з швидкістю $k_i V_p$;
- АС рухається по траєкторії АВ з шістьма ступенями свободи.

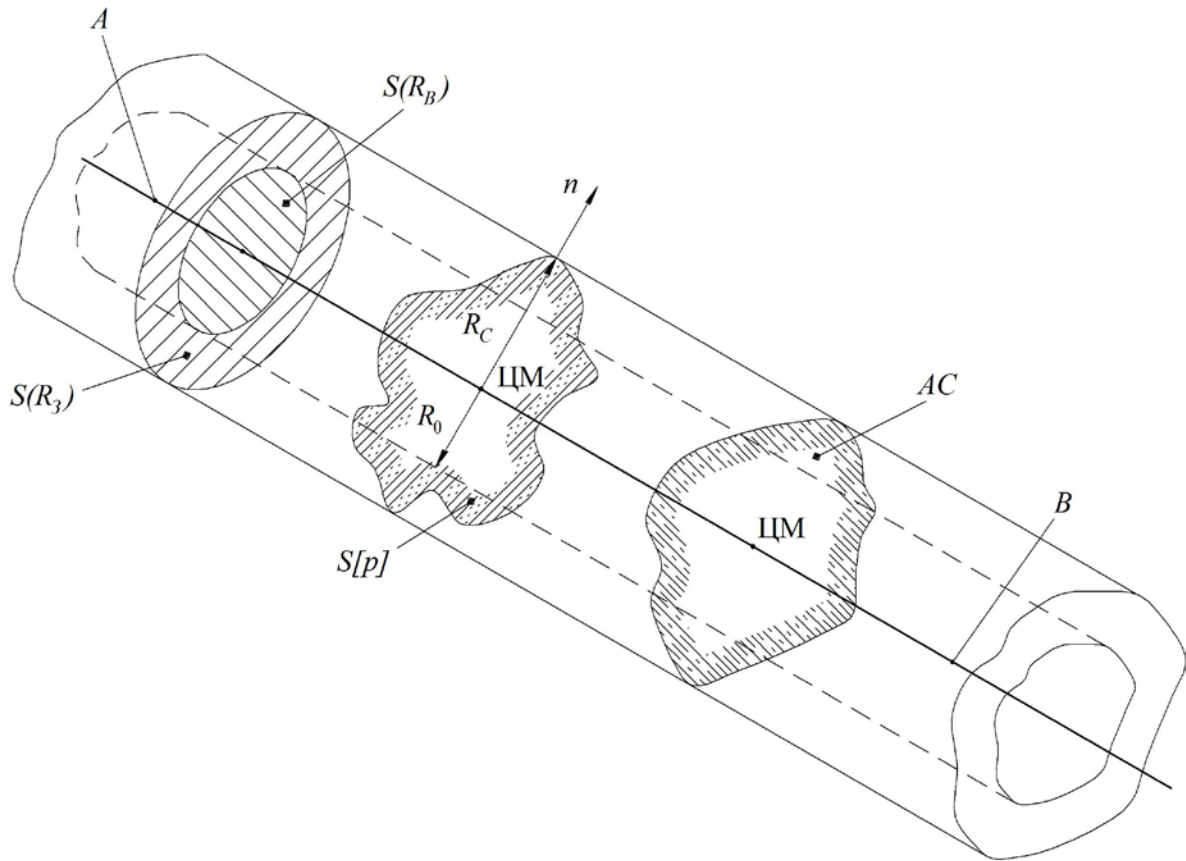


Рис. 1.27. Приклад моделювання імпульсу панданної зони об'єкта

Всі прийняті умови у своїй сутності (одночасності) є вірогідними лише за першого уявлення про імпульс ПЗ.

Таким чином, можемо сформулювати основне поняття про імпульс ПЗ, як зони мінливої маси АС.

Наразі будь-яка АС, хоч і існує у межах руху своєї траєкторії, тобто ПЗ, у процесі її взаємодії з зовнішніми АС має характер детермінованих зв'язків різної потужності. Отже, оскільки будь-яка детермінація означає визначений відтинок часу, то визначення поняття імпульсу ПЗ мають бути суто конкретні параметри, жорстко пов'язані з параметрами форми та руху. Отже, при

побудові теоретичних засад імпульсу форми ПЗ необхідно враховувати наступні параметри.

По-перше, це інтервал часу τ , за який усі процеси детерміновано, закінчені. Усі наступні параметри повинні тією чи іншою мірою використовувати при своїй математичній моделі.

По-друге, довжина мінімальної відстані, на якій закінчуються усі процеси руху, яка надає можливість визначитися з математичною залежністю усіх параметрів руху.

По-третє, швидкість та її зв'язок із параметрами геометрії АС та властивостями середовища.

По-четверте, геометрія АС, яка впливає на форму ПЗ у загальному випадку.

По-п'яте, проекція геометрії АС на площу, ортогональну вектору руху, тобто миттєвий переріз ПЗ. Швидкість кутового обертання, яка визначає ступінь активності АС у межах визначеного відтинку відстані.

Отже, ми маємо можливість сформулювати поняття про відтинок часу, за який відбуваються усі швидкісні перетворення. Отже, величина часу імпульсу часу τ повинна бути узгоджена з такими величинами, як швидкість руху, відстань, обертання.

На наступному етапі повинний бути зв'язок швидкості руху та відстані, де вкладаються усі види руху АС. Таким чином, на визначеній відстані L за час τ маємо швидкість руху $k_1 V_p$ та швидкість обертання $k_1 \omega$ навколо вектору руху.

За визначеними умовами руху ми маємо три наступні випадки.

У першому випадку всі параметри руху співпадають, що надає можливість сформулювати поняття ідеального імпульсу форми.

У другому випадку всі параметри є не співпадаючими.

У третьому випадку відсутнім є обертальний рух і АС рухається суворо лінійно.

З усіх трьох випадків останній є найбільш простішим, тому почнемо саме з нього (рис. 1.28).

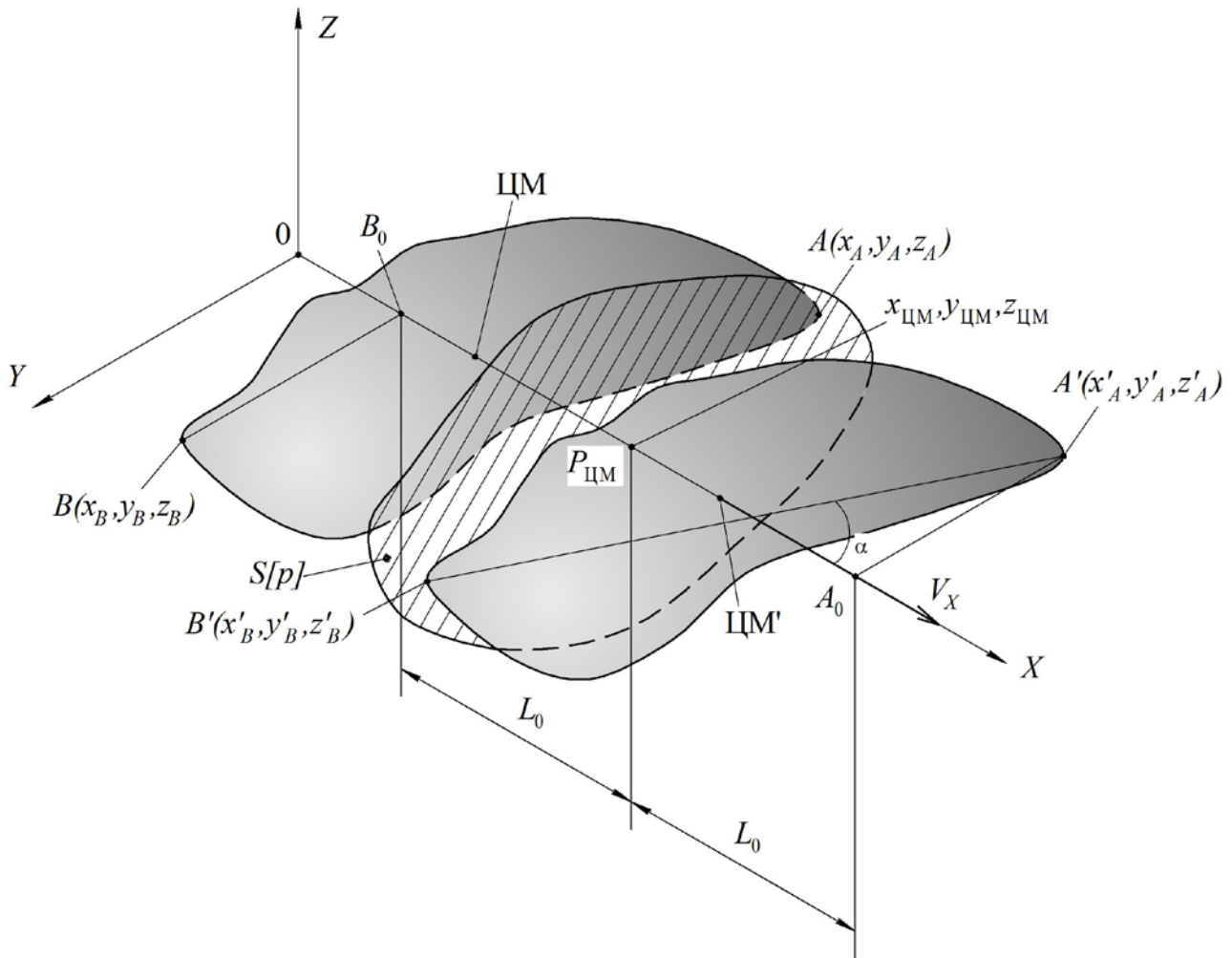


Рис. 1.28. Моделювання імпульсу форми панданної зони

Для цього визначаємося з параметрами руху. Отже, АС рухається з швидкістю V_x вздовж вісі координат Ox і проходить за час τ деяку відстань. Ця відстань визначається за допомогою подовженості АС вздовж вісі Ox . Наразі приймаємо цю відстань A_0B_0 довжиною у $2L_0$.

Ця відстань утворюється внаслідок проекції лінії $A'B'$ на вісь Ox . Крапки $A(X_A, Y_A, Z_A)$, $B(X_B, Y_B, Z_B)$, $A'(X'_A, Y'_A, Z'_A)$, $B'(X'_B, Y'_B, Z'_B)$ є максимально віддаленими одна від одної і є останніми точками об'єму АС. Ці крапки є першими і останніми при уявному проходженні АС через свою проекцію на площину ортогональну вісі Ox . Ці крапки не обов'язково повинні знаходитися

на межі контуру площі проекції $S[\mathbf{P}]$. Мало того, ці крапки не обов'язково знаходяться на відстані R_3 від вектора руху V_x .

Пряма, яка з'єднує ці дві крапки, не обов'язково пересікає напрямок вектору руху та центр мас АС. У загальному випадку пряму, яка поєднує крапки А та В, можна визначити як довжину відтинку L_{AB} у відомій залежності [8] як

$$l_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(r_2 - r_1)(r_2 - r_1)} = |r_2 - r_1|,$$

де $A(x_A, y_A, z_A) \equiv A(r_1)$, $B(x_B, y_B, z_B) \equiv B(r_2)$.

При цьому r_1 та r_2 є радіус-вектори завдання позиції крапок А та В. Кут α між лінією АВ та вектором напрямку руху може бути визначений як

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{(x_B - x_A)(x_2 - x_1) + (y_B - y_A)(y_2 - y_1) + (z_B - z_A)(z_2 - z_1)}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} = \\ &= \frac{(r_2 - r_1)(r_4 - r_3)}{|r_2 - r_1| |r_4 - r_3|} \end{aligned}$$

де $V_1(x_1, y_1, z_1) \equiv V_1(r_3)$, $V_2(x_2, y_2, z_2) \equiv V_2(r_4)$ - координати вектора швидкості.

Довжина L_0 та відстань між крапками А, В пов'язані між собою залежністю

$$L_0 = L_{AB} \cos \alpha. \quad (1.67)$$

Отже, загальний об'єм імпульсу ПЗ буде визначатися як площа перерізу зони на дві довжини активної маси АС. Пояснимо, що це означає. У випадку руху АС за тих умов, що ми визначили вище, означає: на визначеному відтинку траєкторії ($A_0 B_0$) всі можливі відхилення від заданих параметрів руху не перевищують величину $[S]$.

За розглядаємого випадку лінійного руху повний об'єм панданного імпульсу буде становити частку панданної траєкторії АС, тобто

$$[p, p] = 2S[\mathbf{P}]L_0. \quad (1.68)$$

Наразі оцінка фізичної дії форми, а не маси будь якого фізичного об'єкту може бути оцінена лише за час його взаємодії з іншим аналогічним об'єктом. Форма цього об'єкту може бути будь-якою і, як наслідок, ще надає деякої

непевності у визначенні потужності. Тому для більшої достеменності обирається площа, ортогональна вектору руху V_p . Вектор руху V_p є відповідним максимальній швидкості АС у вакуумі, тобто без опору середовища. У випадку руху у середовищі, яке створює опір руху, це враховується через коефіцієнт k , залежний не тільки від його опору, а і від заданої швидкості гальмування. Площина перерізу ПЗ є проекція геометричної форми АС на ортогональну до вектора V_p площину. Таким чином, для того, щоб одна АС передало енергію іншій АС, необхідно, щоб вся його форма (маса) перетнула цю проекцію перерізу. Таким чином, за принципом «вхід-вихід» ми отримуємо відстань $2L_0$ за виразом (1.67). Користуючись сказаним вище, стосовно ПЗ маємо можливість сформулювати поняття про імпульс ПЗ. Таким чином, імпульсом ПЗ називається величина

$$\overline{[P]} = 2S[P]L_0k_iV_p. \quad (1.69)$$

Оскільки $V_p = 2L_0/\tau$, то, як наслідок з (1.69) отримуємо наступний вираз

$$\overline{[P]} = 2S[P]L_0k_i \frac{2L_0}{\tau} = 4L_0^2S[P] \frac{k_i}{\tau} \quad (1.70)$$

Вираз (1.70) є ідеалізованим імпульсом ПЗ за прямолінійного руху. Цей імпульс можна перетворити на механічний якщо помножити вираз (1.70) на питому вагу АС.

Імпульс форми ПЗ має ще одну особливість, яка не розглядається для інших класичних фізичних об'єктів, – це фантомний момент руху. Суть цього моменту полягає у тому, що виявляється лише за фізичної взаємодії. У цьому випадку відбувається явище, коли АС при торканні починають обертатися одна навколо одної. Коли відбувається момент торкання крапками А або В уявної площини перерізу $S[P]$, внаслідок виникає крутий момент, який утворюється відтинком АВ та спорідненою інерційною силою центра маси (ЦМ на рис.1.28), тобто

$$\mathbf{M}_\Phi = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{AC},$$

де \mathbf{r} – радіус вектор від точки торкання до центра мас АС.

Наступна ситуація виникає, коли АС, окрім лінійного руху, виконує ще і обертальний. У цьому випадку кожна крапка АС виконує ще і обертальний рух. При цьому можуть бути випадки, коли усі параметри руху є кратними між собою, тобто пов'язаними чіткими математичними залежностями. Тобто, коли АС виконує обертальний рух, то найбільш логічними діями є прив'язка лінійного руху до обертального. Оскільки загальний опис усіх точок, що рухаються, є занадто складний, то розглянемо рух окремої крапки навколо вісі, що проходить через центр мас АС, вісь обертання рухається плоскопаралельно в обраній системі координат. За один оберт будь-яка крапка виконує циклічний рух довжиною у $2\pi R$, де R - радіус відстань від осі обертання. У нашому випадку найкраще обрати R ПЗ, яка є єдиною достеменною координатою на поверхні АС. Орієнтуючись на те, що за один оберт можемо здолати відстань за лінійним рухом $\tau k_i V_p$, маємо можливість створити залежність

$$\tau k_i V_p = 2\pi R_z.$$

Оскільки АС обертається, то крапка А має лінійну швидкість за кутовою швидкістю

$$V_\omega = \omega R_z.$$

Таким чином, між швидкостями V_p та V_ω існує зв'язок у наступному вигляді

$$\tau k_i V_p = 2\pi \frac{V_\omega}{\omega} \Rightarrow n \tau k_i V_p = V_\omega,$$

де n – оберти АС.

Водночас, крапка рухається за траєкторією циклоїди, яка визначається залежністю

$$x + \sqrt{y(2R_z - y)} = R_z \text{Arc cos} \frac{R_z - y}{R_z}$$

або у параметричному вигляді $x = R_z(\beta - \lambda \sin \beta)$, $y = R_z(1 - \lambda \cos \beta)$,

$$\text{де } \beta = \frac{180 k_i V_p t}{\pi R_z} \text{ при } 0 \leq t \leq \tau \text{ та } \tau = \frac{2\pi R_z}{k_i V_p} = \frac{2L_0}{k_i V_p}.$$

Коефіцієнт λ вказує на ступінь розтягненості або стиснутості циклоїд. За $\lambda > 1$ циклоїда вважається подовженою (розтягнутою) а при $\lambda < 1$ вкороченою, що відображено на рис. 1.29, а, б, в.

У першому випадку циклоїдальний рух вважається нормальним коли траєкторія руху ЦМ розташована на відстані зовнішнього радіусу панданної зони (R_z , крапка А). Це відповідає ситуації, коли по вісі ОХ прокочується коло діаметром $2R_z$. При цьому крапка А описує у площині лінію траєкторії, яка є за формою нормальною циклоїдою ($\lambda = 1$). Цикл цієї циклоїди є $2\pi R_z = 2L_0$ що відповідає умові, яка була визначена у виразах (1.69) та (1.70). За такого способу руху крапка А має максимальну швидкість у крапці А' величиною $V_\omega + V_x$, тобто це є векторна сума.

Зміна швидкості відбувається у межах $\pm V_\omega + V_x$, тобто

$$V_\Sigma = V_x \pm V_\omega$$

або при переході до абсолютних величин, користуючись теоремою косинусів, матимемо:

$$V_\Sigma = \sqrt{V_x^2 + V_\omega^2 - 2V_x V_\omega \cos(\pi - \beta)}. \quad (1.71)$$

Критичні крапки для швидкості, які ми можемо визначити з рівняння (1.71), є наступними.

1) Підкорінна величина дорівнює нулю, тобто

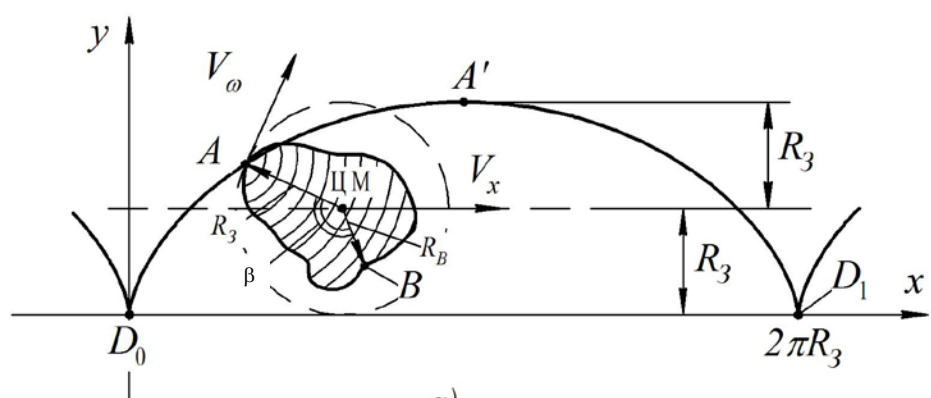
$$V_x^2 + V_\omega^2 - 2V_x V_\omega \cos(\pi - \beta) = 0, \quad (1.72)$$

звідкіля

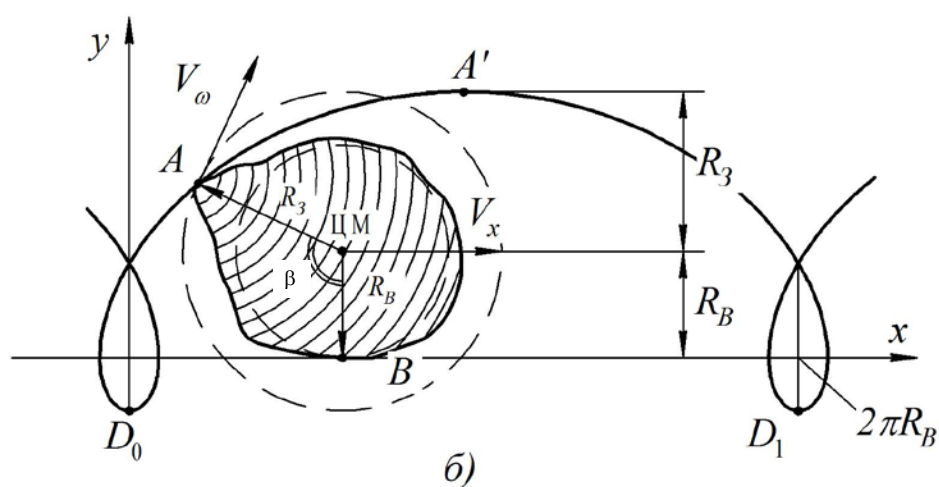
$$V_x^2 + V_\omega^2 = 2V_x V_\omega \cos(\pi - \beta).$$

Сума членів рівняння (1.72) дорівнює нулю лише у випадку, коли $V_x = V_\omega$ і $\alpha = 0$, а отже, і V_Σ . Це відбувається, коли координати старту визначені в позиціях $\alpha = 0$ або $\alpha = 2\pi$, тобто початок та кінець імпульсу об'єму ПЗ.

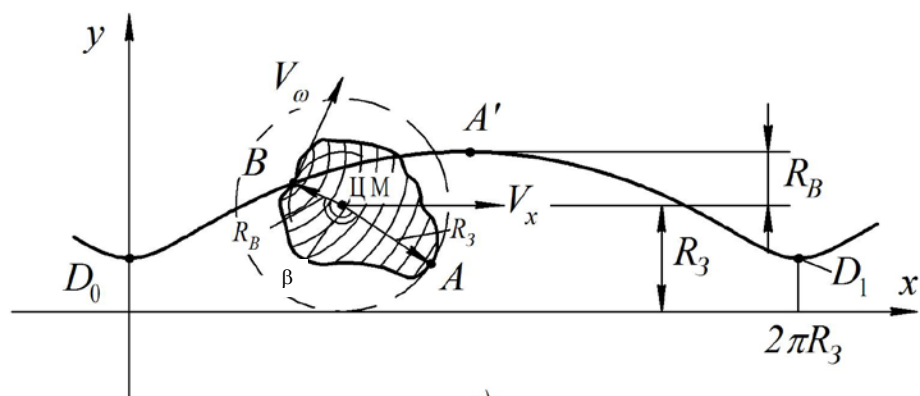
2) Підкорінна функція приймає максимальні значення, коли $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, а отже,



a)



б)



в)

Рис. 1.29. Траєкторії руху крапок А та В при комбінованому русі АС, де:
а) рух за нормальною циклоїдою $\lambda=1$, б) рух за подовженою циклоїдою $\lambda>1$,
в) рух за вкороченою циклоїдою $\lambda<1$

підкорінна функція набуває вигляду $V_{\Sigma} = \sqrt{V_x^2 - V_{\omega}^2}$, і при $V_x = V_{\omega}$ отримуємо

$$V_{\Sigma} = (V_x \oplus V_{\omega}) \sqrt{2}.$$

Користуючись теоремою про інтегральне середнє стосовно циклоїди та співвідношення радіусів R_3, R_B , маємо можливість визначити підсумкову швидкість руху АО на визначеному відтинку шляху

$$V_{\Sigma} = \frac{3}{2} \frac{K_3}{K_B} (V_x \oplus V_{\omega}).$$

Довжина шляху (дуги) точки А (рис. 1.29) у цьому випадку буде

$$l_A = 8R_3 \sin \frac{\beta}{4},$$

а центру мас (ЦМ) $l_{CM} = 2\pi R_3$.

Величина об'єму тоді маємо визначити як:

$$Q_{AC} = S[\mathbf{P}]_{CM} + S[\mathbf{P}]_{AB} \quad (1.73)$$

або у спрощеному вигляді $l_A = \frac{L_0}{\cos \alpha}$ вираз (1.73) перетворюється у

$$Q_{AC} = 2\pi S[\mathbf{P}]R_3 + S[\mathbf{P}] \frac{L_0}{\cos \alpha} \quad (1.74)$$

і, як наслідок, отримуємо

$$Q_{AC} = S[\mathbf{P}] \left(2\pi R_3 + \frac{L_0}{\cos \alpha} \right).$$

Імпульс руху ПЗ у такому випадку буде оцінюватися як

$$[\mathbf{P}] = Q_{AC} \cdot V_{\Sigma} = S[\mathbf{P}] \left(2\pi R_3 + \frac{L_0}{\cos \alpha} \right) \cdot V_{\Sigma}. \quad (1.75)$$

При цьому між швидкостями V_x, V_{ω} зберігається співвідношення

$$V_x = \frac{V_{\omega}}{\tau^n}.$$

Наступний варіант руху відповідає випадку, коли довжина імпульсу кратна величині $2\pi R_3$ (рис. 1.29,б).

Отже, при цьому маємо наступні залежності стосовно руху. Довжина шляху ЦМ дорівнює

$$l_{CM} = 2\pi R_B.$$

Колова швидкість

$$V_\omega = \omega R_B.$$

Довжина шляху, який проходить крапка А, при цьому станове

$$l_A = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \alpha} dt.$$

Загальний об'єм ПЗ буде:

$$[P] = S[P]l_{CM} + 2S[P]l_{AB}, \text{ де } l_{AB} \approx \frac{L_0}{\cos \alpha}.$$

Імпульс руху ПЗ у цьому випадку визначатиметься як

$$\overline{[P]} = S[P] \left(2\pi R_B + \frac{L_0}{\cos \alpha} \right) \cdot V_\Sigma. \quad (1.76)$$

У третьому випадку (рис. 1.29,в) ми отримуємо результат, аналогічний (1.75), але траєкторія руху крапки В не виходить за межі статичної ПЗ. У такому випадку величина $S[P]$ буде дорівнювати площі кола радіусу R_B , тобто

$$S[P] = 2\pi R_B^2.$$

Як наслідок, отримуємо імпульс руху статичної ПЗ:

$$\overline{[P]} = 2\pi R_B^2 \left(2\pi R_B + \frac{L_0}{\cos \alpha} \right) \cdot V_\Sigma. \quad (1.77)$$

Розглянуті варіанти руху АО у вигляді циклоїди є різновидом руху за більш складною траєкторією руху [8]. Наразі таким рухом у просторі є рух за гвинтовою траєкторією, а синусоїда та циклоїда різними варіантами проєкцій на площину під кутом.

Розглянемо перший випадок проєкції, тобто синусоїдальний. Отже, синусоїда є геометричне місце точок перпендикулярів, проведених з точок циклоїди на діаметр твірного кола, яке проходить через дотичну точку. Ця

синусоїда має довжину хвилі $2\pi R$ і амплітуду d . Вісь цієї синусоїди співпадає з лінією центрів циклоїди. Отже, радіус R та амплітуда d відповідають нашим радіусам R_B, R_3 .

Наступним варіантом є сама циклоїда, як косокутна проекція гвинтової лінії на площину, ортогональну вісі. Якщо $\sigma > \alpha$, то циклоїда подовжена; якщо $\sigma < \alpha$, то циклоїда скорочена; при $\sigma = \alpha$, то циклоїда звичайна. Прямокутна проекція гвинтової лінії на площину, не перпендикулярну вісі, але і паралельну, останній є стиснута циклоїда. Коефіцієнт стискання $k = \sin \beta$, та величини R та амплітуда d , які характеризують циклоїду до її стискання, мають наступний зв'язок

$$\begin{aligned} R &= \frac{h}{2\pi} \operatorname{ctg} \beta, \\ R &= a \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta, \quad d = a, \end{aligned} \quad (1.78)$$

де h - крок гвинтової лінії, a - радіус гвинтової лінії, β - кут між віссю гвинтової лінії та площиною проекції, σ - кут нахилу проектуючих променів до площини проекції.

З виразу (1.78) видно, що при $\beta > \alpha$ проекція гвинтової лінії є подовжена (рис. 1.29,б); при $\beta < \alpha$ є скорочена (рис. 1.29,в); при $\beta = \alpha$ (рис. 1.29,а) є звичайна.

Отже, це є вагоме підгрунтя, щоб розглядати траєкторії руху АО як основу побудови всієї кінематики руху об'єкта. Оскільки ми визначились, з найбільш загальним варіантом руху, то необхідно розглянути його одну дискрету як досконалий закінчений фрагмент траєкторії.

Таким чином, маємо один період закінченого руху АО у вигляді траєкторії гвинтової лінії (рис. 1.30).

Математичний опис такої траєкторії має наступний вигляд

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi \\ y &= R \sin \varphi, \\ z &= a \cdot \varphi \end{aligned} \quad (1.79)$$

де R – відстань ON .



При цьому повний вектор швидкості визначатиметься як

Величина швидкості по координаті z може бути використана як

88

Отже, отримуємо похідні координати з виразу (1.79) і, підставляючи їх разом із (1.81) у вираз (1.80), визначаємо

$$V_{\Sigma} = R \sqrt{2 \left[1 + 2 \left(\frac{\pi}{\tau} \right)^2 \right]}. \quad (1.82)$$

Проте радіус R у виразі (1.82) є лише радіусом руху ЦМ АО і вираз не враховує геометрії об'єкта. Тому необхідно скористатися виразом (1.74) стосовно спрощеної геометрії АО. Як наслідок, отримуємо

$$V_{\Sigma} = \left(R + \frac{L_0}{\cos \alpha} \right) \sqrt{2 \left[1 + 2 \left(\frac{\pi}{\tau} \right)^2 \right]}.$$

Таким чином, імпульс форми ПЗ для одного оберту визначиться як

$$\overline{[P]} = 2\pi L_0 \left(R + \frac{L_0}{\cos \alpha} \right)^3 \left(2 + \frac{1}{\cos \alpha} \right) \sqrt{2 \left[1 + 2 \left(\frac{\pi}{\tau} \right)^2 \right]}.$$

За критичного випадку, коли крапка В рухається за віссю z , а крапка А описує у просторі гвинтову лінію траєкторії руху (як на рис. 1.30), тобто $R = R_3 + R_B$, отримуємо наступний результат:

$$\overline{[P]} = 2\pi L_0 (R_3 + R_B)^3 (2L_0 + R_3 + R_B) \sqrt{2 \left[1 + 2 \left(\frac{\pi}{\tau} \right)^2 \right]}.$$

Отже, ми розглянули основні випадки існування імпульсів руху панданної зони АО. Всі ці варіанти імпульсу можуть бути використані для при визначенні загальної інтегральної величини ПЗ. Але водночас, необхідно враховувати, що імпульс руху ПЗ за свої межі приймає наступне значення

$$\lim \overline{[P]} = 2[S]^3 \cdot V_{\Sigma}. \quad (1.83)$$

За такого розгляду необхідно враховувати, що вираз (1.83) фактично надає опис статичної ПЗ. Як наслідок, ми маємо можливість дійти висновку про те, що імпульс форми ПЗ може складатися з двох імпульсів, тобто статичного та динамічного. Зазвичай імпульс є складовим з статичної та динамічної зони.

Але існують випадки, коли статична зона та імпульс сходять нанівець, а динамічна складає основу імпульсу. Тим не менш, це явище має приватний випадок, коли розподіл імпульсів є суто умовним. Наразі явище цього процесу спостерігається при розгляді ситуації з гвинтовим рухом. Ми розглядали два звичайних рухи, коли імпульс за один оберт утворював у середині імпульсу циліндр без маси, і коли така маса присутня вздовж довжини всього імпульсу.

Перший випадок показує, що у межах імпульсу утворюється трубчаста дискрета, маса якої відсутня в інтервалі від $[S]$ до певної кінцевої величини. До того ж, розмір цього трубчастого елемента у своїй оптимальності мають розміри внутрішнього радіусу від $[S]$ до $[S] + R_3 + R_B$, тобто, гарантований внутрішній простір довжиною $2(R_3 + R_B)$.

На останок необхідно зробити певне зауваження стосовно розмірів об'єму ПЗ. За розгляду виразів імпульсу форми ПЗ ми приймали за другий член об'єму АО у виразах (1.75), (1.76), (1.77) переріз ПЗ як криволінійний циліндр. Тим не менш, це досить наближена ситуація. У своїх випадках об'єм АО скоріш за все наближається до напівкулі або до напівеліпса. До того ж, вісь цих фігур є скошеним відносно вектора швидкості імпульсу форми. Наразі ситуація є досить проблематичною і не доведена з огляду на фізичні та математичні моделі.

1.9. Панданний всесвіт

У попередніх розділах ми вже розглянули низку властивостей АС при утворенні ПЗ. З цього розгляду маємо той факт, що в основі утворення ПЗ є наступні причини, а саме: маса, форма перерізу у площині перерізу, перпендикулярній напрямку вектора руху, напрямок руху, швидкість. Слід зауважити, що ми розглядали лише одну абстрактну сутність, яка рухається у просторі без перешкод. Наразі це є абсолютно уявна ситуація, оскільки всі панданні зони пересікаються між собою. До того ж, якщо зважити на те, що всі відомі АС мають різні розміри та швидкість руху, то фактично весь фізичний

простір відомий нам є однією суцільною панданною зоною. Окрім того, ми не маємо якогось обмеження, як стосовно збільшення так і зменшення за розмірами. Тому весь розгляд визначеної проблеми ми можемо проводити на якомусь відтинку властивостей АС за розмірами та швидкостями руху.

Для початку розглянемо звичайний електрон, який обертається навколо ядра атому. Оскільки хімічних елементів більше сотні, то роздивимось найпростіший з них – водень. Водень як хімічний елемент має ядро, яке складається з протону (рис. 1.31, АС₁). Навколо ядра обертається електрон. Швидкість обертання становить $13,7 \cdot 10^6$ м/с. а колова частота $6,6 \cdot 10^{15}$ с⁻¹. Звісно, що існують ще менші часточки, які обертаються навколо своїх центрів, але ми починаємо відлік саме з електрона, як найбільш розповсюдженої АС. Кількість електронів, які обертаються навколо ядра атома може бути різною залежно від його природних властивостей. Ядро атому компонується з нейтронів і протонів, які теж обертаються за своїми орбітами, тобто маємо суцільний рух.

Швидкість обертання електрона ω_1 є не перша і не остання у цьому ряду. Обертання електронів утворює не тільки панданну зону атома, але і зону його присутності, оскільки їм притаманне електричне поле [15, 16].

Атом як АС₁, у свою чергу, може бути розташований у наступній АС₂, яка обертається за своїми фізичними законами. Наразі АС₂ у формі циліндра може нести у своєму тілі АС₁ (рис. 1.31, АС₂). Швидкість обертання подібних об'єктів у технологічному просторі може становити до $\omega_2 = 500 \cdot 10^3$ с⁻¹. Така абстрактна сутність (АС₂) при розташуванні на земній поверхні теж обертається з швидкістю обертання Землі $\omega_3 = 0,18 \cdot 10^{-6}$ с⁻¹, створюючи свою панданну зону.

Це вже третя ступінь руху, що ми наочно спостерігаємо. Наступна АС, до складу якої входить земна куля разом з Місяцем, є сонячна система АС₄. Існує період обертання Землі навколо Сонця, який дорівнює 365 дням. Оскільки Земля як планета відноситься до зони присутності Сонця, то її обертання навколо центра мас системи суто індивідуальне. Для Сонця період обертання

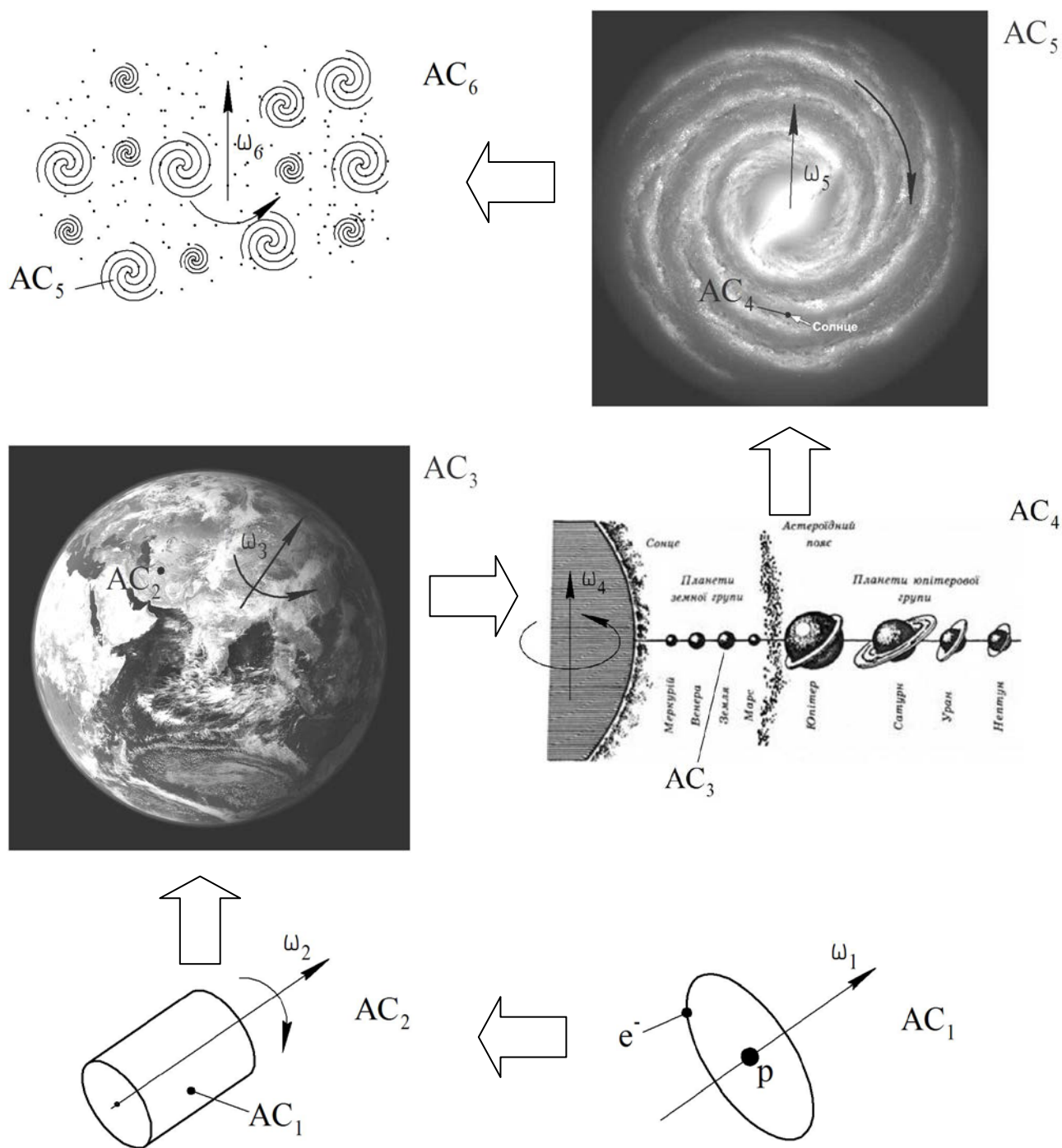


Рис. 1.31. Всесвітній панданий простір, де: AC_1 – атом водню; AC_2 – абстрактний об'єкт, що обертається; AC_3 – Земна куля; AC_4 – Сонячна система; AC_5 – наша галактика "Чумацький шлях"; AC_6 – відомий нам космічний простір.

становить 25 діб, Меркурій 88 діб, а Плутон- 247 років.

Але вся сонячна система (рис. 1.31, АС₄) обертається навколо центру галактики «Чумацький шлях» (рис. 1.31, АС₅). Період обертання становить 26 620 років. Швидкість руху при цьому становить 215 км/с. Наша галактика, у свою чергу, становить частку відомої нам частини Всесвіту, в якій вона рухається зі швидкістю 550 км/с. Наразі всі розміри простору та швидкості руху у ньому відомі вельми приблизно .

Досить легко збагнути, що кожна з абстрактних сутностей у цій низці є елементом панданної зони для наступної. Таким чином весь відомий нам простір є панданною зоною, де відбувається пульсація маси фізичної речовини. Наразі виникає дуже цікаве питання : чи існує якась частка простору вільна від панданної маси, тобто всесвітній панданний вакуум. Задача, хоч і є чисто теоретичною, але має дуже велику вагу щодо вирішення загально фізичних проблем. Та ж сама ситуація стосується і зони присутності, яка оточує геть усі абстрактні сутності без виключень. Як наслідок виникає проблема існування вакууму зони присутності. Якщо такий існує це означає лише одне, а саме що якась частина простору екранована з усіх напрямків, тобто як абсолютно чорне тіло.

1.10. Класифікація панданних зон об'єкта

Оскільки у попередньому розгляді цього явища з'ясували основні його фізико-математичні особливості, то варто побудувати елементарну класифікацію панданних зон. В основу подібної класифікації покладемо два основних принципи, а саме:

- повна панданна зона являє собою мінливий потік маси АС у вигляді криволінійного циліндра нескінченної довжини;
- динамічна панданна зона являє собою частину маси АС, замкнену між двома поверхнями, які являють собою різницю між уявним технологічним фантомом [14] та фантомом реалізації;

- панданна зона весь час знаходиться у рухливому стані, оскільки є елементом передачі енергії між двома та більше АС, які знаходяться у стані взаємодії (закони Ньютона та Лагранжа).
- при взаємодії між собою АС утворюють нову панданну зону.

Як наслідок, отримуємо особливу властивість панданної зони руху поверхні АС у просторі, яка має інтегральну форму опису.

Тобто усе вище обумовлене полягає в основі класифікації панданних зон, як загального принципу існування у просторі та часі. Тому загальну класифікацію почнемо з поняття абсолютної панданної зони (рис. 1.32). Умовні (уявні) градації панданної зони: абсолютна ПЗ має активну частину; абсолютна панданна зона має пасивну частину; абсолютна ПЗ має можливість створювати панданний вакуум. Водночас, для статичної зони щільність речовини у всіх крапках однакова.

Отже, абсолютна ПЗ у широкому розумінні цього слова є криволінійний циліндр нескінченної довжини, або орбіти за якою рухається АС. Стосовно цього випадку маємо можливість констатувати наступні наслідки цієї тези, а саме:

- жодне тіло в абсолютному просторі не рухається по лінійній траєкторії;
- всі тіла (які мають фізичний опис) рухаються по криволінійним траєкторіям;
- діаметр перерізу траєкторії є кінцевий і дорівнює $2R_c$ при неврахуванні інших варіацій зон присутності.
- рух АС по траєкторії відбувається таким чином, що радіус вектор R_c має циркуляцію навколо траєкторії руху, а ротор обертання $rotV(R_c) = 0$.

Абсолютну панданну зону є раціональним розглядати лише за її швидкості більшої за 215 км/с, тобто лінійної швидкості Сонячної системи навколо центру нашої галактики.

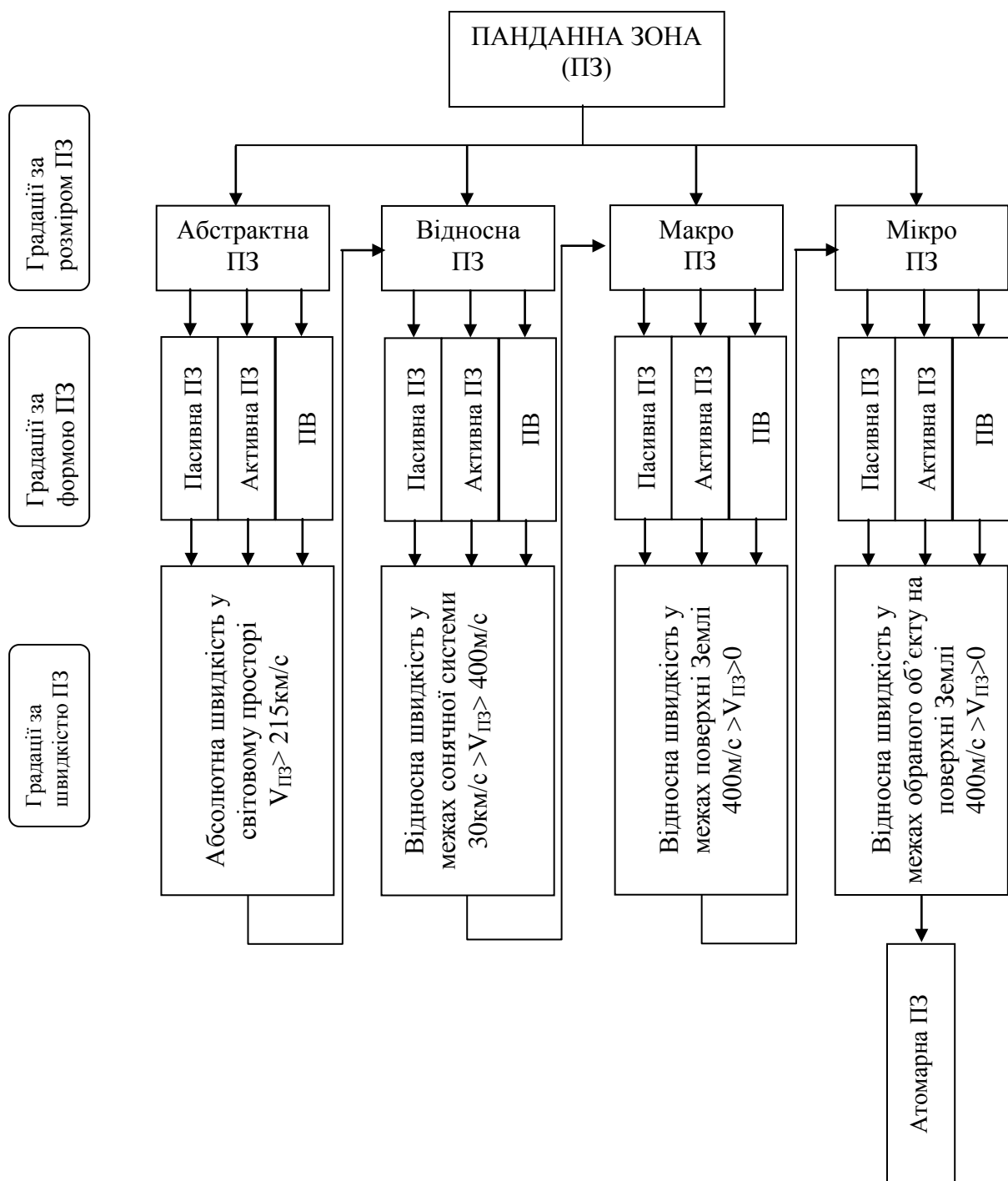


Рис. 1.32. Умовні (уявні) градації панданної зони

Опис такого руху наданий у [1]. Якщо швидкість менша за 30 км/с, але більша за 400 м/с, то ми переходимо до наступної класифікаційного рівня, а саме відносної ПЗ. Ця зона відрізняється від попередньої тим, що обмежена розмірами сонячної системи і як наслідок земної кулі. У першу чергу, це все зв'язано з відотною системою координат сонячної системи, яка у свою чергу зв'язана з системою координат земної кулі.

Панданна зона цього типу має всі ті ж самі властивості, що і абсолютна, але з одним суттєвим обмеженням, а саме система координат прив'язується не до абсолютних всесвітніх, а лише до земної кулі, відповідно і швидкості значно менші. У цьому випадку необхідно враховувати ПЗ Землі, тобто її рельєф місцевості. Такий перепад висот становить майже ± 10 км відносно рівня світового океану та десятки кілометрів за радіусами земного сфероїда.

Наступна градація ПЗ має властивості поодинокі АС, з якою пов'язана її особиста система координат. Будучи або зв'язаною із системою координат на поверхні Землі, або зі своєю особистою, властивістю, яку необхідно враховувати, тобто її шорсткість поверхні як основу ПЗ. Тут маємо цілу низку прикладів, як для штучних, так і для природніх БО. Форма та шорсткість, яка визначається особистими потребами АС у існуванні, тобто, як наслідок, ці параметри є щільно пов'язаними між собою. Отже, для ПЗ таких об'єктів неможливо розглядати окремо одна від одної. Звідси перехід до наступної градації, коли масштаби мікронерівностей на поверхні АС мають таку розмірність, що їх можна порівняти із розмірами атома, як такого. У цьому випадку величина (шар) ПЗ буде визначатися діаметром атома [17, 18].

Як наслідок подальшого зменшення величини ПЗ необхідно вже розглядати окремі дискретні об'єкти з нано- та пікорозмірами. При визначенні геометрії поверхні АС дуже важливим є реєстрація ПЗ на окремих її ділянках.

Перелік посилань до розділу 1

1. Тимчик Г.С., Скицюк В.І., Ключко Т.Р.. Теорія біотехнічних об'єктів. Том 1. Узагальнені фізичні властивості об'єкта: монографія. Київ: НТУУ «КПІ». 2016. 272 с., іл.
2. Тимчик Г.С., Скицюк В.І., Ключко Т.Р.. Теоретичні засади технології ТОНТОР: монографія. Київ: НТУУ «КПІ». 2006. 234 с.
3. Павловський М.А. Теоретична механіка: підручник. Київ.: Техніка, 2002. 512 с.
4. Відчутники контрольно-вимірювальних систем : монографія / Г.С. Тимчик, В.І. Скицюк, М.А. Вайнтрауб, Т.Р. Ключко. Київ.: НТУУ «КПІ», 2008. 240 с., іл.
5. Кузмичев В.Е. Законы и формулы физики. Київ: Наук. думка, 1989. 864 с.
6. Richard Feynman. The character of physical law, A series of lectures recorded by the BBC at Cornell University USA, Cox and Wyman LTD London, (1965).
7. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч. II. Динаміка. Учебник для втузов; изд. 5-е, испр. Москва: Высш. школа.. 1977. 430 с.
8. Granino A. Korn, Theresa M. Korn. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review (Dover Civil and Mechanical Engineering). 2 Revised Edition, (2000), 1152.
9. Бермант А. Ф. Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа для втузов. Москва: Высш. школа.. 1969. 736 с.
10. Скицюк, В.І. Панданна зона мікро- та макроповерхні технологічних об'єктів. Частина 2 // Вісник НТУУ «КПІ». Серія приладобудування. 2011. Вип. 42. С.85-91.
11. Скицюк В.І., Ключко Т.Р. Фізика технології ТОНТОР: монографія. Саарбрюкен (Германия): ИД LAP Lambert Academic Publishing, 2015. 332 с.
12. Эберт Г. Краткий справочник по физике. Москва : Физматгиз, 1963. 552 с.
13. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. Москва : Наука. 1968. 940 с.

14. Скицюк В. І., Скицюк М. В. Технологічний фантом // Вісник НТУУ «КПІ». Серія приладобудування. 2002. № 24. С. 149 – 155.
15. Кристи Р. Строение вещества: введение в современную физику / Р. Кристи, А. Питти. Монография, изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1969. – 569 с.
16. Вальтер А.К., Залюбовский И.И. Ядерная физика, изд.3. Харьков : Издательское объединение «Вища школа», 1978. 424 с.
17. Charles Kittel, “Introduction to Solid State Physics”, 8th Edition. New York : Wiley; (November 11, 2004), 704.
18. Епифанов Г.И. Физика твердого тела. Москва : Высшая школа. 1965. 276 с.

РОЗДІЛ 2

ПАНДАННА ЗОНА МІКРООБ'ЄКТІВ І ТЕХНОЛОГІЧНИХ ФАНТОМІВ

У [1] вже згадувався вплив форми та шорсткості поверхні на можливі варіації розмірів панданної зони АО. Але попри констатації факту можливого впливу не розглядалася фізична природа цього явища. Оскільки згідно з технології ТОНТОР на першому місці при визначенні координати торкання двох АС є знання розташування поверхні об'єкта, то необхідно визначитися саме з цими параметрами об'єкту. Координата визначається за моментом торкання двох поверхонь, коли крапка, в якій відбувається процес, слугує координатою відліку. Величина цієї крапки (діаметр) станове [S]. Водночас, величина деформації поверхні кожної з АО теж становить [S]. Отже, ситуація, котра розглядалася у [1, розд.2.2], є загальний опис явища поверхні як такої без певної деталізації та уточнення. Уточнення стосується питання: яким чином створюються уявні площини на поверхні АО ? З [1, розд.2.2] маємо вагомий висновок про те, що поверхня утворюється та, якою має бути.

Наразі це є найпростіші одиниці вимірювання, користуючись якими, можна створювати інші, більш складні. Тобто при побудові будь-якої системи вимірювання повинна існувати одиниця, яка задовольняла б наші вимоги до точності. На засадах елементарного існування АО ми маємо можливість констатувати той факт, що вимірювання параметрів будь-якого об'єкту базуються на тому, що він має масу, розміри та швидкість руху. Як було зазначено у [1] будь-яка маса речовини має кінцевий об'єм, і навпаки, маємо об'єм речовини – маємо масу. Якщо маємо об'єкт, то він рухається, оскільки стан спокою є поняття відносне. Якщо відкинути всі вторинні ознаки, то у будь-якому випадку на перший план виходять координати поверхні об'єкта, далі його форма (розміри), швидкість та маса. Мало того, розміри і швидкість руху

АС повинні бути такими, щоб їх можна було зареєструвати. Ця ситуація стосується не тільки розмірів і параметрів руху АС, а й властивостей чутника, який повинен зареєструвати необхідний нам об'єкт. Така реєстрація повинна мати надійний характер на тлі можливих перешкод, які можуть бути порівняні з розмірами АС.

Окрім того, властивості чутника повинні бути такими, щоб можна було у разі потреби визначитися з нюансами геометрії. Прямую аналогію, яку можна навести стосовно цього випадку, це звичайна фотографія, оскільки за відсутності різкості можна бачити на фото просто невизначену пляму, або за досить високої різкості усі нюанси геометрії АО.

2.1. Вплив формотворення поверхні на форму та розміри панданної зони

Отже для того, щоб зареєструвати АО, ми повинні мати такі параметри, як довжину, висоту та ширину. У другому випадку переріз та довжину, за дуже досконалої форми, як куля, достатньо знати лише її радіус. Фантомна формула цієї фігури звучить як куля радіусу R . Навіть за такого опису АС ми маємо запис координат поверхні через радіус R . У цьому випадку необхідно звернути увагу на те, що площа поверхні об'єкту відходить на друге місце – головне, це координата поверхні. Ще не менш цікавою особливістю є те, що маса АО має для нас вторинне значення, надалі.

Для того, щоб визначитися з будь-яким розміром, необхідна швидкість руху вимірювального інструменту вздовж невизначеної довжини АО. При цьому швидкість руху є координата розміру, нема швидкості руху, нема координати. Окрім швидкості руху, важливим параметром є швидкодія реакції чутника на масу АО. Цей параметр має подвійний інформаційний характер. З одного боку, ми маємо можливість визначити момент торкання поверхні і, як наслідок, координату, а, з іншого, це нам надає можливість оцінити параметри об'єкту вимірювання. Найпростіший приклад – це політ комара, якого ми

бачимо, але не бачимо польоту кулі, але бачимо політ метеорита у небі. Пояснюється це тим, що людина має сталу реакцію на швидкість вимірювання, не маючи можливості змін. Комар летить з швидкістю максимум кілька сантиметрів за секунду, геометричні розміри у сотні разів менші за кулю і мільйони від метеорита і його таки видно. Куля має швидкість у сотні метрів за секунду, але ми її не бачимо. Метеорит у мільйони разів більші за кулю, а швидкість десятки кілометрів за секунду і ми його бачимо. Є вочевидь що фактор бачення об'єкта практично не впливає на момент визначення координати об'єкта. Тобто для людини існує певна стала величина добутку часу на швидкість. Оскільки існує такий бар'єр, то людина одні об'єкти бачить, а інші ні. Це явище є досить широко розповсюджене, до того ж воно тісно зв'язане, як з часом аналізу об'єкту, так і його швидкістю.

Загально відомо, що, коли людина (тварина) зупиняє рух зіниці ока, вона перестає бачити. Аналогічно об'єкт, який перестає рухатись, стає практично невидимим. Це явище є наслідком дії закону агресії на АО, де агресивним сприймається будь-який рух стороннього об'єкту. Наразі можна навести безліч об'єктів природнього середовища стосовно цього явища. Це ж саме явище є характерним для всіх без виключення приладів вимірювання фізичних величин.

Окрім вище обумовлених параметрів АО, заключним, який пов'язує в одне ціле всі процеси, є маса речовини. При цьому маса речовини є мірою накопичення енергії АО, яка проявляє себе при взаємодії з іншими об'єктами.

Маса речовини є носієм потенційної і кінетичної енергії приблизно так, як це відбувається у звичайній ємності. Спочатку йде накопичення електричного заряду, а потім розряд через навантаження.

Для подальшого дослідження зробимо передумову, користуючись залежністю [2], тобто величину $\sqrt{2\sigma}$ пов'яжемо із розмірами крапки

$$d_x = d_y = d_z = \sqrt{2\sigma}. \quad (2.1)$$

Отже, залежності (2.1) отримують наступний вигляд

$$\lim_{x_0, y_0, z_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{2\sigma}}{X_0}, \frac{\sqrt{2\sigma}}{Y_0}, \frac{\sqrt{2\sigma}}{Z_0} \right) = \varepsilon_k; \lim_{S_0 \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2\sigma})^2}{S_0} = \varepsilon_S; \lim_{V_0 \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2\sigma})^3}{V_0} = \varepsilon_V. \quad (2.2)$$

Досить легко збагнути, що величина $\sqrt{2\sigma}$ у (2.2) є універсальною мірою подовженості. У такому випадку об'єкт має розмір маленької кульки, тобто крапки.

Основою до подібного погляду є те що будь-який АО, який використовує чутник вимірювання (будь-якого типу), реагує на об'єкт вимірювання лише у тому випадку, коли час взаємодії є не менший за t_T (константа системи відчутника та чутника). Як наслідок, для АО існує умовний бар'єр за принципом «існує або не існує» об'єкт вимірювання. Наприклад, мікрометром неможливо поміряти діаметр атому, а отже «він не існує». Для цього відчутник створює сигнал, але він сприймається як шумова перешкода, оскільки не має достатнього рівня для спрацювання інформаційного фільтру чутника та створити команду про реєстрацію АО.

З попереднього розгляду можна дійти вагомому висновку, що крапка є технологічним об'єктом, який має закінчену центросиметричну форму, що відноситься до існування певних БО, БТО. Тобто це може бути симетричний циліндр, куля, куб, які мають конкретний математичний просторовий опис. Усі інші геометричні фігури не можуть мати назву крапки.

Таким чином, ми вже розглянули деякі просторові елементи, як частки відліку у технологічних процесах [2]. Цей розгляд довів, що всі ці елементи мають геометричні розміри та притаманні їм похибки. Проте, внаслідок дослідження з'ясувалося, що необхідно мати деяку універсальну одиницю виміру, яка задовольняла б всі вимоги стосовно фізико-математичного опису похибки вимірювань та робочого простору. Наразі такими елементами можуть бути класичні геометричні фігури, які мають однакову форму з будь-якого погляду (проекція). Серед усіх геометричних фігур найбільше підходять для розгляду куля, куб, рівносторонній циліндр. Використовуючи ці частки, ми маємо можливість надавати математичний опис реальної та уявної поверхні, як

основу утворення похибки та дуалізму поверхні, який викликає система вимірювання. У такому разі введення елементарної частки похибки надає можливість виконати фізико-математичний опис фантому панданної зони похибки у вигляді сталих польових структур АС.

2.2. Елементарна частка похибки вимірювання та її панданна зона

Навіть поверхневий аналіз ситуації з похибками при утворенні тих чи інших АС, а також за різних фізико-хімічних вимірюваннях доводить, що похибка тієї чи іншої величини є її співвідношення до основної [2]. Спиратися на теорію вірогідності є вкрай необачним, оскільки вона виправдовує себе у дуже невеликих межах і не може бути критерієм для оцінки точності. Причина криється у тому, що будь-яка система вимірювання має свої параметри та відповідні розбіжності. Величина такої похибки є залежна від швидкості вимірювання і, як наслідок, об'єму, що руйнується. Тобто, це є цілком відомий об'єм, який визначається фізико-математичним шляхом.

Отже, для вирішення поставленої задачі нам необхідно знайти такий панданний об'єм простору, який виконував би функцію елементарної частки похибки. Визначитися з таким об'ємом можливо, якщо ми уявимо такий маленький відчутник, який може відчувати поверхню, тобто зареєструвати сам факт торкання. За умовою він повинен бути настільки малим, щоб не провалитися крізь поверхню, а з іншого боку – мати мінімально можливий розмір. Водночас, швидкість вимірювання повинна бути максимальною, а час аналізу на торкання мінімальним. У такому разі відчутник зруйнує об'єм об'єкту, пропорційний цим величинам.

Таким чином, нам необхідно знайти такий мінімальний об'єм та його геометрію, щоб вона задовольняла поставленій задачі.

Для того, щоб зафіксувати координату поверхні, необхідно відпрацювати торкання відчутника з поверхнею вимірювального об'єкту. Зафіксувати момент торкання поверхні можливо лише під час руху відчутника за певним

зростаючим фізико-хімічним параметром. Водночас, цей параметр повинен перевищити шумову складову на певний рівень та підтримувати його доти, доки не буде прийняте рішення про подальші дії. Поки відбувається цей процес відчутник рухається, руйнуючи поверхню об'єкту. Внаслідок цього процесу руйнується деяка мікроскопічна частка поверхні об'єкту, а затримка у отриманні сигналу торкання та визначення координати призводить до дуалізму поверхні об'єкту (рис. 2.1, а). Отже, дуальність поверхні буде визначатися як:

$$\vec{D} = t_T \cdot \vec{V}_P, \quad (2.3)$$

де \vec{V}_P - максимально можлива швидкість руху відчутника при торканні,

t_T - час, необхідний для визначення дійсності торкання.

Величина t_T є час, який тільки визначає, що відбувся процес торкання, але цей факт необхідно ще затвердити, тобто прийняти рішення, що торкання відбулося. У такому випадку з'являється додатковий час t_{PT} - прийняття рішення. Ця ситуація стає особливо важливою, коли працює низка відчутників і необхідно визначитися, який саме зареєстрував торкання. Але, оскільки цей час притаманний чутнику, а не відчутнику, то надалі будемо розглядати як основну величину t_T [3, 4, 5].

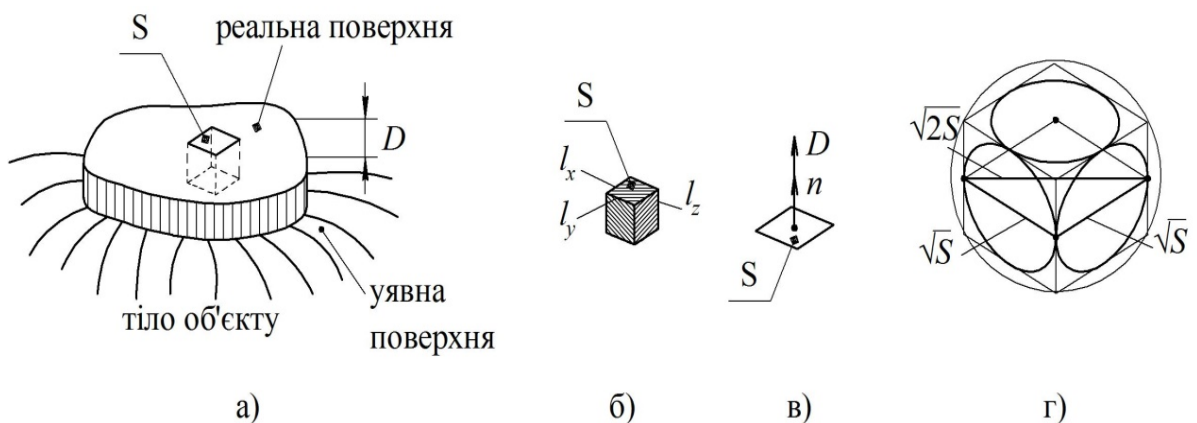


Рис. 2.1. Утворення елементарної частки похибки, де: а) виділення частки похибки на поверхні; б) відокремлена частка похибки; в) орієнтування вектора \vec{D} - частки поверхні; г) модель частки похибки як виокремленого елемента.

Таким чином, для того, щоб зареєструвати факт торкання вимірювального інструмента до поверхні, відчутник, який має переріз S (рис. 2.1, *а*) повинен заглибитись у тіло об'єкту на глибину D зі швидкістю \vec{V}_p за час t_T . Як наслідок такої затримки ми отримуємо уявну поверхню об'єкта, що знаходиться всередині реальної. Якщо ми відокремимо цей об'єм від об'єкта, то отримаємо геометричну фігуру з невизначеною формою перерізу, але з визначеною висотою (рис. 2.1, *б*). Для цієї фігури, якщо її нормувати до квадрата, площа перерізу буде $S = l_x \cdot l_y$ при висоті l_z . Цілком логічно зробити припущення, що $l_x = l_y = l_z$. У такому випадку отримуємо наступну залежність об'єму:

$$Q = S \cdot l_z \Rightarrow Q = (l_x \cdot l_y) \cdot l_z \Rightarrow Q = (t_T \cdot V_p)^2 \cdot D. \quad (2.4)$$

Цей об'єм є скалярна величина, а нам необхідна векторна, яка дає уявлення про похибку та напрямок її дії. Тому, відобразимо площину S з притаманним їй вектором напрямку дії (рис. 2.1, *в*). У цьому випадку вектор дуальності \mathbf{D} співпадає з нормальним вектором \vec{n} до поверхні площини S . При такому торканні двох АО, у якому б напрямку ми не підходили до поверхні, нас буде зустрічати вектор дуальності. Теоретично є можливість допустити, що дуальність є залежна від її проекції на напрямок нормального вектора, тобто:

$$D_n = \vec{D} \cdot \vec{n} \cos \alpha, \quad (2.5)$$

де α – кут між векторами.

Отже, ми можемо зробити висновок, що поверхня будь-якого об'єкту вкрита полем дуальності. Використання площини та вектора дуальності, хоч і зручно, але не дає можливість зафіксувати форму елементарної частки похибки. Для цього зробимо наступні перетворення, а саме: покажемо зв'язок площі з елементами вимірювальної системи чутника. Для цього розглянемо властивості квадрата, побудованого на елементах руху

$$\sqrt{S} = l_x = l_y = l_z = t_T \cdot V_p, \quad (2.6)$$

причому, діагональ квадрата буде

$$\sqrt{l_x^2 + l_y^2} = \sqrt{(\sqrt{S})^2 + (\sqrt{S})^2} = \sqrt{2S}. \quad (2.7)$$

Отже, якщо ми маємо квадратну площинку S , то кожна з сторін дорівнюватиме \sqrt{S} , а діагональ - $\sqrt{2S}$. Якщо ми на базі цього квадрата побудуємо кулю діаметром $\sqrt{2S}$, то отримуємо елемент, який задовольняє нашим умовам елементарної частки похибки. Тобто, якщо ми сприймаємо величину $\sqrt{2S}$ як вектор, який має можливість обертатися всередині сфери такого ж діаметру, то це може слугувати елементом похибки, який зв'язує властивості об'єкту та вимірювальної системи у одне ціле (рис. 2.1, з). Дуальність у цьому випадку буде визначатися, як

$$\mathbf{D} = \sqrt{2S}, \quad (2.8)$$

тобто, це векторна величина.

Надалі задля конкретизації математичних виразів приймаємо наступну позначку для цієї величини, як фізичного явища

$$\sqrt{2S} = [\mathbf{S}]. \quad (2.9)$$

Цей вектор хоч і більше за (2.3), але на відміну від нього враховує можливі нюанси роботи чутника торкання або приладу вимірювання. Особливість цієї елементарної частки є в тому, що як би ви не проводили процес вимірювання, вона завжди буде присутня між об'єктом та вимірювальним пристроєм. У цієї величини (2.8) є ще одна властивість, а саме можливість визначати товщину поверхні, яка за своїми властивостями відрізняється від основної маси об'єкту.

У широкому загалі дуальність \mathbf{D} у виразах (2.3), (2.8) та (2.9) необхідно сприймати як невизначеність координат поверхні у просторі. Але точність невизначеності координати на межі зони дуальності визначається величиною $[\mathbf{S}]$, тому вищезгадані вирази необхідно розглядати як межу дуальності, коли вона нескінченно зменшується, тобто

$$\lim \mathbf{D} = [\mathbf{S}] \quad (2.10)$$

Така частка-крапка може деформуватися, але за умови, що площа перерізу не менше S , а товщина не менша за \sqrt{S} . Все, що менше за ці величини, просто не реєструється, тобто при розгляді реальних ситуацій найменша величина повинна бути не менше за $[S]$. Найпростіший приклад – звичайна лінійка, де ціна однієї поділки менше міліметра практично не буває в силу того, що поміряти щось менше цим приладом вимірювання просто неможливо. Величина $[S]$ є універсальна і може бути застосована при всіх інших видах вимірювання, як вольти, амperi, кулони тощо. Всі ці величини у своїй метрології є складовими кілограмів, метрів та секунд тощо [12]. Проте у цих випадках можливо краще б було користуватись кубічними або квадратними вольтами, амперами, омами тощо. Врешті-решт існують електромеханічні аналогії та електрон, який як елементарна електрична частка буде мати вище наведений опис.

Якщо розглядати можливі варіанти панданних зон АО, то для макрооб'єкта ця величина є мікропанданна зона на атомарному рівні, яка має можливість деформуватись, тобто ми маємо уявну панданну зону на поверхні будь-якого АС незалежно від речовини, її стану та походження. Наразі це панданна зона фантому чутливості (виміру координат), який умовами свого існування задовольняє основній теоремі ТОНТОР [1, розд.2.5]. Водночас, вона являє собою поверхню приблизно таку, як відображено на рис. 1.8 та рис. 2.10 [1]. Товщина цієї поверхні станове величину $[S]$. Розмір площі торкання при визначенні координати поверхні не менше $[S]^2$. Уявна та реальна поверхня будь-якого АО в своїй силовій основі спирається на поверхневий атомарний шар. Така система прив'язки поверхні ПЗ цілком нас влаштовує у випадку, якщо нам не потрібне більш достеменне дослідження, тобто всі викривлення поверхні вважаються нами меншими за величину $[S]$, а отже вони для нас не існують.

За таких умов можемо вважати, що діаметр атома є трохи менший за $[S]$. При цьому відстань між центрами атомів теж будемо вважати рівною $[S]$.

Отже, за цих умов ми отримуємо регулярне розташування атомів близько поверхні, яка своїми центрами утворює квадрат з стороною $[S]$. За таких обставин уявна поверхня повинна була б спиратися на точки віддалені від центрів атомів на відстань $[S]$. Таких точок ми маємо чотири завдяки прийнятій умові. Згідно [6] приймаємо, що сили міжатомної взаємодії (сили Ван-дер-Ваальса) на відстані $[S]$ дорівнюють нулю, тобто існує певна рівновага, коли площина уявної поверхні розташовується на цій відстані. Чутник, який визначає поверхню, починає реагувати на відстані $3[S]$ від центру атома поступовим зростанням сили відштовхування. На відстані $2[S]$ сили відштовхування мають максимум і система чутника фіксує сигнал поверхні. За подальшого наближення сили притягування та відштовхування врівноважується на відстані $[S]$. Таким чином, ми маємо на цих відстанях ($2[S]$ та $3[S]$) дві характерні точки поведінки молекулярної сили, до яких можна прив'язати поверхню АО. Саме за цим принципом працюють плитки Йогансона, коли за простого складання міжмолекулярні сили не спрацьовують, а зчеплення виникає за досить потужного стискання. Водночас, поверхні розташовується одна від одної на відстані приблизно $2[S]$, але за простого складання, що відповідає максимальній силі відштовхування. Але це не поверхня, а атомарна польова структура, тобто фантом поверхні. У випадку стикання плиток виникає сила міжмолекулярного притягання і відстань між поверхнями, а, точніше, поверхневим атомарним шаром дорівнює $[S]$. Наразі виникає проблема, що саме вважати уявною поверхнею, а що реальною. Якщо звернути увагу на побудову звичайного атому, то його силові характеристики у просторі мають залежність типу сил Ван-дер-Ваальса (тощо), але все це польові структури [7].

Наразі класична фізика не може визначитися з конкретними розмірами атому [8] за причини того, що зовнішня електронна оболонка, яка вважається за його силовий «корпус» вкрай не визначена. Діаметр такої сфери приймається

рівним величині 0,9 середньостатистичного закону розподілу Гауса відносно теоретичного радіусу обертання електрона навколо ядра атома. Але сам по собі електрон має свою ПЗ, яка утворює ПЗ атому. Позиція електрона у кожний визначений момент визначається загальною теорією квантової фізики. Окрім того, стосовно руху електрона за орбітою навколо ядра виникло протиріччя між квантовою фізикою та теорією відносності. На сьогодні теорію руху, яка задовільняє обидві фізичні теорії, є теорія суперструн. Не вдаючись у конкретику цієї теорії, оскільки вона цікавить нас лише з погляду утворення поверхонь атома, її основний висновок полягає у тому, що електрони не обертаються навколо ядра, а закономірно виникають у орбітальному просторі електрона навколо ядра [6]. Саме таке виникнення та щезання електрона сприймається нами як радіус орбіти у 0,9 за нормального розподілу за Гаусом. Але нас більше цікавить геометрія поверхні. Отже, згідно вище обумовленого, маємо можливість стверджувати, що реальна поверхня знаходиться на відстані приблизно $[S]/2$. Цей радіус для електрона (поверхні) є вкрай невизначеним, оскільки необхідно враховувати розміри ПЗ електрона згідно закону розподілу вірогідності за Гаусом. Тобто поверхня, котра базується з ознакою радіусу електрона, має вкрай ненадійну координату, яка залежна не тільки від флуктуацій руху електрона, а й його заряду, який ще додає відстані. Отже, якщо провести підсумковий аналіз, то ми маємо констатувати, що у АС існує три поверхні, які встановлюються на відповідні польові структури і, як наслідок, мають уявний характер.

По-перше, це поверхня, яка розташовується на відстані $[S]/2$ від центра ядра атома, і яку дійсно можна вважати реальною поверхнею АС. Але через те, що вона спирається на непевні орбіти електронів, її координати вкрай невизначені. Процес невизначеності координат у часі створює панданну зону як електрона, так і прилеглої поверхні.

У другому випадку ми маємо можливість створити ще одну уявну поверхню на відстані $[S]$ від центра ядра найближчого атома. Попри

стабільність цього розташування та потужність утримки у просторі вона залишається уявною, оскільки знаходиться посередині відстані $[S]$. Як наслідок, вона має ту ж непевність, що і попередня, і тримається на молекулярному зчепленні.

У третьому випадку ця поверхня, яка спирається у кращому випадку на координату $2[S]$ відносно центру найближчого атому. У цьому випадку поверхні тримаються одна одної завдяки стороннім силам. Принцип дуже простий: є сили – є поверхня, нема сили – нема поверхні. Саме у третьому випадку ми маємо можливість утворення панданного вакууму.

Отже, як наслідок, ми маємо три поверхні, перша з яких є реальна поверхня АО, а дві другі є уявні, але це чисто теоретичне уявлення. Розглянемо ситуацію з дещо іншого боку, коли ми проходимо всі силові прошарки. На ці прошарки реагує лише чутник торкання, налаштований на різні фізичні принципи дії. У такому випадку він нібито проходить деякі бар'єри потужності міжмолекулярної сили. Така система контролю торкання притаманна всім АО без виключення, але залежно від чутливості, а не фізичного принципу дії. Як наслідок входження у поле (молекулярної сили) дії на відстані $3[S]$, ми маємо первинну інформацію, що оцінюється АО як реальна поверхня. Але, оскільки процес визначення координати відбувається на відстані $2[S]$, то вона сприймається як реальна. Цей випадок відповідає простому складанню плиток Йогансона. Як наслідок, за простого (несилового) торкання двох АО між ними утворюється панданний вакуум із величиною не менше за $[S]$ і який існує завдяки силі відштовхування. Але завдяки своїй природі (закон агресії) кожний з АО тисне на сусідню з максимальною потужністю на яку вона здатна. До того ж, це робиться не постійно, а періодично від мінімального тиску до максимального і навпаки. Цей тиск коливається у межах міжатомарної відстані, тобто величини $[S]$.

Якщо нема сторонніх сил, то коливання відбувається у межах від $[S]$ до $3[S]$, тобто амплітуда коливань не перевищує $2[S]$. В наслідок цього уявна площина поверхні знаходиться на координаті $2[S]$. Користуючись раніше обумовленим (рис. 2.1), що геометрична фігура, яка задовольняє цьому проміжку може сприйматися як сфера описана навколо кубу з довжиною ребра $\sqrt{[S]}$. У такому разі діаметр описаної сфери буде $\sqrt{3S}$. Панданна зона кубу при цьому буде становити різницю між вписаною та описаною сферою

$$[P] = \frac{\pi}{3} (\sqrt{3S} - \sqrt{S})^3. \quad (2.11)$$

Наразі ця геометрична фігура є уявною, тобто це технологічний фантом (ТФІІ), який при будь-яких діях між АС не тільки перетворюється у реальність (ТФІІІ), а і руйнується разом з нею через фантом ТФІV. Тобто ця уявна функція, яка перетвориться на реальність і навпаки за принципом $U(u) \rightleftharpoons R(u)$. Ця ситуація дуже добре прослідковується при переході від уявної системи координат до реальної.

Отже, при таких переходах геометрія будь-якого об'єкту завжди спотворюється. Якщо спотворення менші за $[S]$, то ми вважаємо об'єкт ідеальним. У супротивному випадку об'єкт сприймається або як дефектний, або як бракований, тобто як в одному, так і в другому випадку він нас не задовольняє.

У широкому сенсі перехід від уявної до реальної системи координат необов'язково сприймати як наявність суто геометричних спотворень, тому що такий перехід може виникати, наприклад, для хімічних реакцій. Наразі, за суто математичним моделюванням процесів переходу від уявного до реального, ми маємо певну схожість з теорією спотворень, яка застосовується у картографії, але з відмінностями при моделюванні технологічних процесів перетворень АС. Основна відмінність полягає у тому, що у геодезії (картографії) первинною задачею є визначення спотворень, які отримує криволінійна (реальна) поверхня на рівну (уявну) площину [9, 10]. Тобто необхідно визначитися із

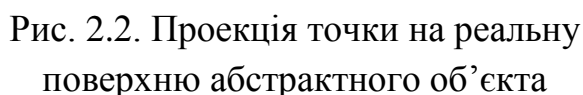
спотвореннями, які ми отримуємо на карті, у порівнянні з реальною місцевістю. У нашому випадку задача має зворотній характер, а саме ідеальна (уявна) площа проектується на криволінійну (реальну) поверхню і при цьому отримує спотворення, які нам необхідно визначити.

Під технологічним процесом проекції уявної поверхні на реальну необхідно мати на увазі, що це не звичайна геометрична операція, як у математиці, а результат послідовних дій у реальному технологічному просторі під дією технологічного фантому (ТФ). Наразі існуючі математичні методики дають лише уявлення про кінцевий результат проектування, а не шлях його досягнення. Як наслідок, при переході з однієї координатної системи до іншої, ми маємо не одиничний вектор, який поєднує координати уявні та реальні, а цілу низку одиничних протовекторів, кожний з яких є фізично-детермінованою реальністю процесу проектування. Визначити кількість цих протовекторів можливо за подовженістю, але відсутня динаміка розвитку в часі, оскільки це є функція зовнішнього середовища.

За властивістю середовища ми маємо констатувати той факт, що за певною мірою наближення є лінійний рух при низці допущень стосовно криволінійного [10]. Тобто ми сприймаємо траєкторію руху як прямолінійну, за умови, що $R_x = R_y = R_z = \infty$. Якщо розглянути феномен нескінченності як такої, то маємо відзначити той факт, що будь-яка нескінченність у просторі закінчується там, де виконується нерівність $\frac{1}{\infty} < [S]$.

Наразі величина $[S]$ буде визначати кроки розшарувань похибки у реальній системі координат $R(x, y, z, t)$ [2]. Кількість кроків необмежена, а тому уявний вектор проекції буде пронизувати низку шарів, поки не досягне реальної координати. У реальній ситуації це призводить до появи низки векторів, пов'язаних з технологічними процесами, сума яких являє собою вектор проекції $V_{\text{ПР}}$ (рис. 2.2), тобто

$$V_{\text{ПР}} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + [S]. \quad (2.12)$$



У загальному випадку вектор проєкції $\mathbf{V}_{\text{пр}}$ має прецесію з вершиною у точці $M_{\text{ц}}$. Водночас, вершина вектора рухається за гвинтовою траєкторією до зупинки при перетині реальної поверхні (рис. 2.3,а). Наслідком такого рух вектора $\mathbf{V}_{\text{пр}}$ є утворення панданної зони у вигляді конуса, тобто це є результат послідовної реалізації технологічних фантомів від уявного до реального. Рух вершини такого вектора може бути описаний за загальною методикою гвинтового руху АС, тобто [11]:

Наразі вектор \mathbf{V}_u , який має розмір $O_u \cdot O_R'$ (рис. 2.3,б), отримує проекцію у вигляді $\mathbf{V}_{up} = \mathbf{O}_u \mathbf{V}$. Якщо ввести масштабні коефіцієнти, то з рис. 2.3,б можна вивести низку залежностей, а саме

Необхідно помітити, що коефіцієнт k у виразах (2.13) та (2.14) може приймати значення у межах $\operatorname{tg} \alpha = \frac{[\mathbf{S}]}{2I} \leq k \leq \infty$.

113

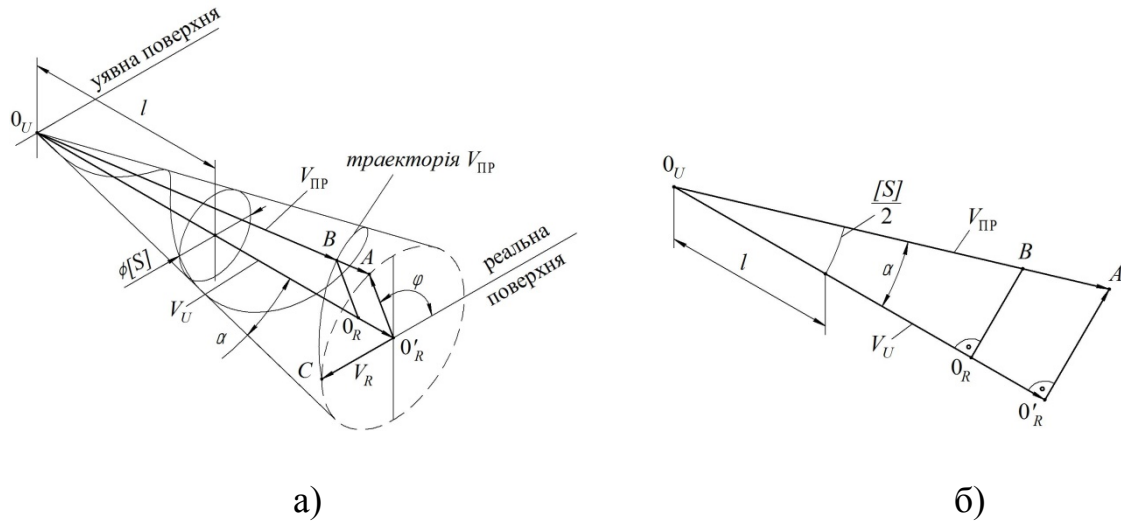


Рис. 2.3. Діаграма супровідного трикутника вектора проекції V_{PP} , де: а – траекторія руху вектора ; б – діаграма супроводжуючого трикутника

Водночас, необхідно зробити зауваження, що вектор V_u може приймати значення від $O_u O_R$ та $O_u O'_R$, а вектор V_{PP} від $O_u B$ до $O_u A$. Тобто коефіцієнт k є аналогом координатної проникності похибки μ у виразі (2.12), а $\tan \alpha$ – коефіцієнту обертання нормального вектора вздовж еквіпотенційної лінії, тобто η . Як наслідок, вирази (2.13) та (2.14) можна переписати у наступному вигляді:

$$\left. \begin{aligned} x &= \eta V_u \sin \omega t \\ y &= \eta V_u \cos \omega t \\ z &= \mu V_u t \end{aligned} \right\}. \quad (2.15)$$

При цьому

$$V_{PP} = \mu V_u + \mu \eta V_u = \mu(1+\eta)V_u, \quad (2.16)$$

що є векторним аналогом виразу (2.12) [11].

Величина t у виразах (2.15) є аналогом часу у виразі (2.13). Час t у виразах (2.15) фактично визначає кут ϕ (рис. 2.3,а), який разом з кутом α є параметрами похибки у просторі, які зв'язні з процесом руху в середовищі при переході від

уявної поверхні до реальної. Водночас, вектор V_u на дистанції l (рис. 2.3,а, б) знаходиться у стані дрейфу з пов'язаним з ним вектором V_{PP} .

Під час процесу проектування вектор V_u спрямовується за нормаллю n до поверхні, в той час, як V_{PP} дрейфує під кутом α до нього. Хоч ми і розташували точку O_u на уявній поверхні, тим не менш, зареєструвати маємо можливість лише на відстані l , яка у критичному випадку буде дорівнювати $[S]$. Це буде відповідним тій ситуації, коли кут $\alpha = \pi/4$, а кут $\varphi = 0,2\pi$. У цьому випадку зареєструвати різницю між векторами V_u та V_{PP} практично неможливо, хіба що теоретично, оскільки наші об'єкти зливаються в одне ціле, тобто крапку з діаметром $[S]$.

Водночас, ПЗ вектора матиме наступні розміри

$$P(V_{PP}) = \frac{1}{3} \pi V_{PP}^3 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \quad (2.17)$$

У критичному випадку ПЗ приймає вигляд шарового сегменту об'єм якого визначається як

$$P(V_{PP}) = \frac{1}{3} \pi [S]^3 \quad (2.18)$$

При розгляді проблеми утворення похибок вимірювання було створено фізико-математичне підґрунтя елементарної частки похибки. Наразі розмірність такої частки становить $[S]$ і є векторною величиною. Ця частка є залежна від параметрів системи вимірювання та фізичних властивостей вимірюваного об'єкту, а не від його розмірів. Це суттєво відрізняє цей елемент від загальноприйнятих методів вимірювання. В основі цієї різниці є те, що панданна зона цього теоретичного об'єкту утворює ПЗ своєї присутності в просторі.

2.2.1. Панданна зона фантому просторової похибки

Як вже згадувалося [12], у системах вимірювання такі технологічні елементи як точка, крапка та риска відіграють дуже важливу роль.

Сутність цього впливу полягає у тому, що ці елементи є частиною загальної системи визначення координат у просторі будь-якого простору руху АС. Особливо це стосується об'єктів АС, де існує дві координатні системи. Перша уявна, є ТФ координатної системи АС, друга – це реальна система координат АС, тобто БТО, якою керує уявна. Звісно, що за такого способу відтворення руху існують певні похибки, які впливають на якість кінцевої дії. Для того, щоб максимально підвищити точність реальної системи координат у пам'ять АС вводяться так звані константи, які частково зменшують похибки реальної системи координат. Але проблема криється у тому, що кількість констант повинна бути надзвичайно великою, оскільки необхідно давати корекцію на кожний кубічний крок позиціювання. Так, наприклад, при кроці позиціювання в один мікромметр для одного кубічного сантиметра робочого простору необхідно запам'ятати 10^{12} констант, не рахуючи того, що кожна з них має свої величини, та системи обслуговування. Отже, як наслідок, ми маємо панданий простір фантому просторової похибки. Це явище є притаманним будь-якому об'єкту, який має властивість помірному руху тобто більше [S].

Таким чином необхідно розглянути два варіанти координат. Цей висновок можна відобразити наступною залежністю:

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{I}_k U_k, \quad (2.19)$$

де U_k - уявна система координат (фантом), яка знаходиться у пам'яті приладу, системи ПК або мозку біологічного об'єкту, \mathbf{I}_k - функція реалізації координат, тобто перетворення уявних у реальні, \mathbf{R}_k - реальна система координат, тобто об'єм робочого простору верстата тощо. Звісно, що як наслідок, існує розходження між уявними та реальними координатами, що утворюють поле скалярної похибки $P(x, y, z, t)$, тобто

$$\mathbf{R}_k - \mathbf{I}_k U_k = \mathbf{I}_p P(x, y, z, t). \quad (2.20)$$

У виразах (2.19) та (2.20) усі функції є об'ємні векторні матриці. Наразі, константи або опорні точки, крапки, риси є зв'язковими елементами між

обом системами координат. Але вплив їх на похибку у просторі є досить обмеженим. Для того, щоб визначити цей вплив, необхідно дослідити їх польову структуру похибки та зв'язок із загальним полем похибки.

У попередньому розділі було показано, що для визначення координати відчутник має пройти відстань через досліджуваний об'єкт, яка дорівнює $[S]$ або $t_T \mathbf{V}_p$, де t_T - час визначення торкання, а \mathbf{V}_p - вектор швидкості. Тобто, ми маємо кінцеву точність визначення координати. Таким чином, на першому етапі нам необхідно сформулювати поняття про поле похибок як таке. По-друге, необхідно визначити польові структури точки, крапки та rischi.

Отже, з виразу (2.19) та (2.20) видно, що між уявною функцією координат $U_k(x, y, z, t)$ та реальною $\mathbf{R}_k(x, y, z, t)$ існує певне розходження, яке утворюється завдяки недосконалості функції реалізації $\mathbf{I}_k(x, y, z, t)$. Функція реалізації $\mathbf{I}_k(x, y, z, t)$ сама по собі є недосконалою, оскільки має подвійність реалізації через позитивні та негативні технології. Окрім того, функція реалізації теж має свою уявну, реальну та реалізаційну функцію. Так, наприклад, АС, який має торкнутися іншого АС, має уявну траєкторію та реальну траєкторію руху (рушійна система) і відповідну функцію реалізації. Аналогічна ситуація відбувається при ручному виконанні цієї технологічної операції. У цьому випадку точність траєкторії руху цілком залежить від навичок оператора, тобто функції реалізації, що буде розглянуто далі.

Отже, як наслідок, за уявну координатну систему будемо вважати таку, у якій всі точки простору мають координати, які за своєю величиною не є ірраціональними числами. Будь-які відхилення становлять не більше $[S]$, у тому числі і на початку координат. Реальна система координат є пристайною до уявної. Тому, для загального випадку, приймаємо тезу, що початки обох систем координат є пристайні не гірше, ніж $[S]$, а вісі координат пристайні у межах діаметру rischi $[S]$. Якщо у цьому випадку ми приймаємо уявну систему координат як еталон відліку, то різниця між координатними системами

утворить польову структуру похибок у визначеному об'ємі простору згідно залежності (2.20). Водночас, ця польова структура може бути відображеною як у двокоординатній системі, так і у об'ємі (рис. 2.4).

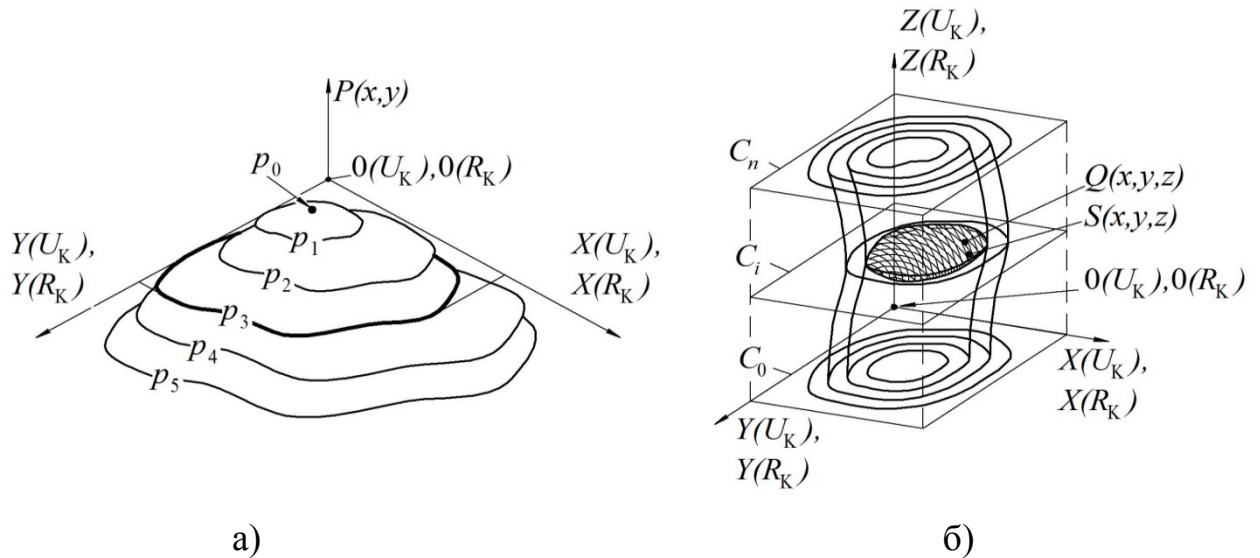


Рис. 2.4. Графічна інтерпретація панданної зони, де а) похибки координат у двох вимірах; б) похибки координат у тривимірному просторі

У двокоординатній системі координат (x, y) (рис. 2.4) є можливість відобразити по третій координаті поверхні рівня похибки, тобто $p_0(x, y) = p_{\max}$, $p_1(x, y) = p_1$, $p_2(x, y) = p_2$ тощо. При цьому може бути ситуація, коли поверхня рівня може співпадати з площиною уявної системи координат. У цьому випадку величина похибки (поверхня рівня) буде дорівнювати нулю, тобто $p_3(x, y) = p_3 = 0$. Наступні поверхні рівня похибки можуть бути від'ємними і розташовані нижче площини x, y . Якщо ми спроектуємо контури поверхонь рівня на площину x, y , то отримаємо низку екіпотенційних ліній. Тобто уявимо, що така площина є еквівалентом площини C і знаходиться у межах досліджуваного об'єму, а, отже, маємо можливість перейти до трикоординатної системи (рис. 2.4, б). У такому випадку ці екіпотенційні лінії будуть обмежувати екіпотенційні об'єми. Це об'єми рівної похибки, які дають можливість уявити розподіл похибки у

просторі. Наразі, це низка об'ємів $Q(x, y, z)$, поверхня яких є екіпотенційною похибкою, тобто $p(x, y, z) = S(x, y, z)$. Наразі саме ці об'єми є статичними панданими зонами, які при якомусь русі створюють динамічну панданну похибку. На відміну від реальної системи координат уявна не має екіпотенційних контурів похибки, площин та об'ємів. Причина цього полягає у тому, що функція похибки у будь-якій частині уявного координатного простору дорівнює нулю, тобто $P(x, y, z, t) = 0$. Уявна координатна система має свої $P(x, y, z, t) \geq [S]$ екіпотенційні лінії координат з похибкою просторового розташування $P(x, y, z, t) < [S]$. В уявній системі координат (наприклад, декартова) всі елементарні об'єми є бездоганні куби, без відхилень від норми. Для циліндричної та сферичної системи координат виникає деяка непевність при визначенні координат у просторі, пов'язана з ірраціональністю чисел π та e , які використовуються для математичного опису координат об'єкту. Як правило, у таких координатних системах існує накопичувальна похибка і координатні системи необхідно періодично «обнуляти», тобто пристайнювати уявну та реальну системи координат. У таких випадках ірраціональна похибка просто відкидається. З суто математичного погляду це нагадує визначення величини похибки при розкладанні функції у ряд та визначенні величини похибки при відкиданні останніх членів ряду. Наразі, таким критерієм є величина $[S]$. Оскільки відкидаються всі менші за цю величину члени, то поступово загальна підсумкова похибка перевищує величину $[S]$ і тоді функції необхідно пристайнювати задля збереження точності перетворення.

Ще більше подібна ситуація стосується функції реалізації $I_k(x, y, z, t)$, яка при можливих перетвореннях не може обійтися без ірраціональних чисел та обчислень трансцендентних функцій. Як наслідок, реальна система координат може бути побудована лише з ірраціональними похибками. Наразі це можна побачити, якщо проаналізувати фізико-математичне підґрунтя утворення реальної системи координат через функцію реалізації.

Отже, функція реалізації у (2.19) це низка технологічних процесів, кожний з яких має свою уявну та реальну функцію, тобто, наприклад, це має наступний вигляд:

$$\mathbf{I}_k = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i(\mathbf{I}_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{I}_i U_i, \quad (2.21)$$

де кожна функція \mathbf{I}_{ki} є одним з технологічних процесів з послідовності $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

За своєю побудовою ця технологічна функція є продуктом реалізації уявної, тобто

$$\mathbf{R}(\mathbf{I}_k) = \mathbf{I}(\mathbf{I}_i) \cdot U(\mathbf{I}_i). \quad (2.22)$$

В свою чергу, отримуємо

$$(\mathbf{I}_k) = \mathbf{R}(\mathbf{I}_k)_{i+1} = \mathbf{I}(\mathbf{I}_k)_{i+1} U(\mathbf{I}_k)_{i+1}, \quad (2.23)$$

що є основою для послідовності опису низки технологічних процесів у виразі (2.21) при $1 \leq i \leq n$.

Якщо зробити більш широке узагальнення, то до виразу (2.21), користуючись (2.22) та (2.23), необхідно дописати ще низку аналогічних залежностей, які дають опис загальної ситуації, тобто дати уяву кожному \mathbf{I}_i , яке входить до складу \mathbf{I}_k . Як наслідок, отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_i &= \sum_{j=1}^m \mathbf{R}_j(\mathbf{I}_j) = \sum_{j=1}^m \mathbf{I}_j U_j \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{I}_j &= \sum_{q=1}^l \mathbf{R}_q(\mathbf{I}_q) = \sum_{q=1}^l \mathbf{I}_q U_q \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{I}_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \dots \sum_{q=1}^l \mathbf{I}_q U_q \cdot (U_i \cdot U_j \cdot \dots \cdot U_{q-1})$$

У широкому розумінні це означає, що похибка реалізації супроводжує не тільки процес утворення координат, але і усі інші утворені об'єкти без виключень. Все це є основою для утворення похибок у функції $\mathbf{R}_k(x, y, z, t)$.

При цьому слід визнати, що найбільшим джерелом похибок є уявна функція і вже потім функція реалізації. Вплив уявної функції на стільки великий, що для її реалізації об'єкту може не вистачити потужності функції $\mathbf{I}_k(x, y, z, t)$. Окрім того, функція реалізації у (2.23) не є остаточною, оскільки у свою чергу складається з низки таких самих технологічних процесів реалізації (2.24). Тобто, ці всі функції суто математично можна уявити як матрицю, яка має m вимірів. У спрощеному вигляді це можна уявити як гілку ялинки, де кожна гілочка закінчується величиною $[\mathbf{S}]$.

Окрім того, необхідно зауважити, що функції, які ми розглядаємо у (1) – (2.24) є частково скалярні, а частково – векторні. Так, уявна функція є силова скалярна функція, але векторного характеру вона набуває завдяки функції реалізації $\mathbf{I}_k(x, y, z, t)$, яка є векторною. Фактично вона схожа на функцію одиничного вектора у математиці з тією різницею, що вона є реалізатором $\mathbf{R}(x, y, z, t)$. При цьому функція $U(x, y, z, t)$ є силова, яка утворює $\mathbf{I}(x, y, z, t)$ і, як наслідок, $\mathbf{R}(x, y, z, t)$. У цьому випадку ми бачимо один з випадків реалізації ТФ у вигляді функції $U(x, y, z, t)$ [5]. Сутність процесу реалізації при цьому відбувається з похибками, на величину яких впливає ТФ брукту.

Серед усіх цих функцій реалізації (6) є одна, яка має безпосередній вплив на точність виконання $\mathbf{R}_k(x, y, z, t)$. Це функція введення констант корекції. Саме на цьому етапі використовуються властивості точки, крапки, риски. Ці елементи внесені у польову структуру похибки утворюють відповідні спотворення. Спотворення позитивно діють на польову структуру похибки. Це виявляється через зменшення середньостатистичних відхилень від уявної площини (рис. 2.5), що значно зменшує розміри ПЗ похибки.

Друга функція цих елементів полягає у зв'язці уявної системи координат CNC з реальною системою координат верстата.

Отже, при узагальненні, ми маємо можливість уявити залежності (2.21) та (2.22) як комплекс скалярних та векторних польових структур, тобто

$$\mathbf{R} - \mathbf{I}U = \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{P} = \mu U + \mu\eta U = \mu(1+\eta)U = \mathbf{D} = (\sigma)^3, \quad (2.25)$$

де μ - коефіцієнт лінійного спотворення координати (координатна проникність похибки), η – коефіцієнт, який характеризує обертання нормального вектора вздовж екіпотенційної силової лінії, \mathbf{D} – дуальність координати, $(\sigma)^3$ – метрична щільність похибки у реальному об'ємі.

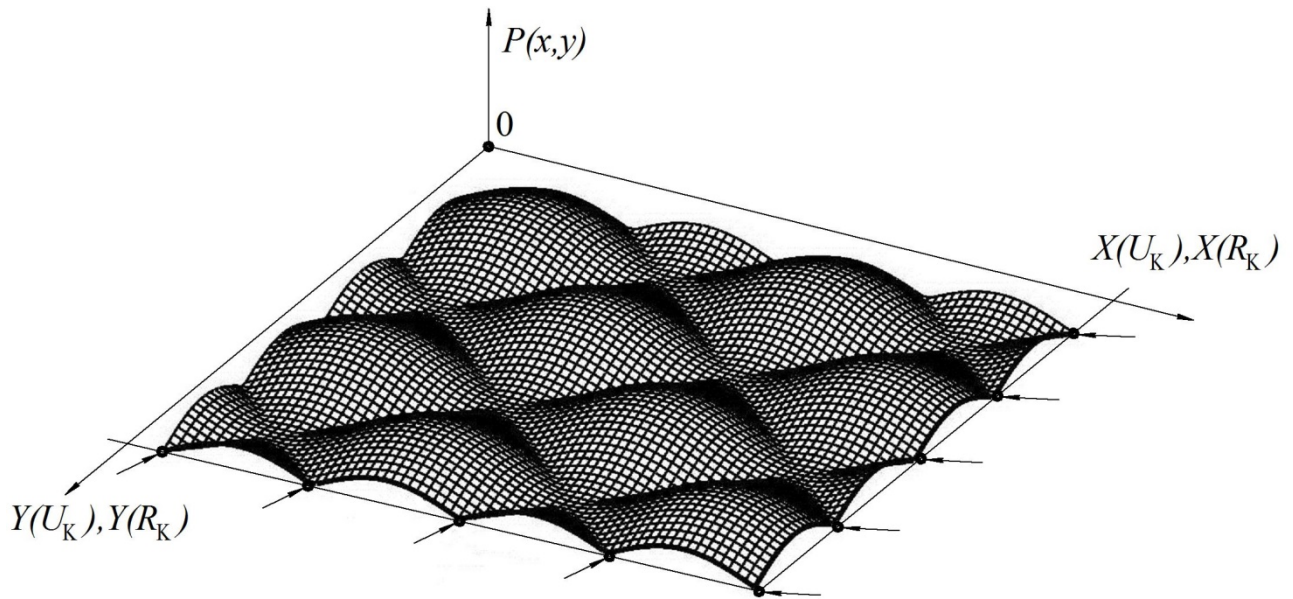


Рис. 2.5. Панданна зона польової структури похибки $P(x, y)$ після введення констант. Точки введення констант показано стрілками

У виразі (2.25) ця величина є мінімальним значенням похибки. Користуючись властивостями польових структур, можемо записати низку залежностей, яка нам знадобиться для подальшого розгляду:

$$\operatorname{div} P = (\sigma)^3, \operatorname{rot} U = 0, \operatorname{div} U = \frac{(\sigma)^3}{\mu(1+\eta)}, \operatorname{div} D = (\sigma)^3, \quad (2.26)$$

де $U = -\operatorname{grad} \phi_R$, ϕ_R - потенціал похибки у реальній системі координат.

Поняття констант просторових координат необхідно розглядати більш широко, ніж наведений ідеалізований (уявний) приклад на рис. 2.5. У широкому розумінні константа є або опорна точка для уявної системи координат, або

опорна крапка для реальної системи координат. Це поняття є підґрунтям визначення теорії координат. Під словом «координата» розуміємо будь-яка АС, як наприклад, абстрактний час, відстань, порядковий номер тощо. Найпростіший приклад координати – це часовий, який має низку опорних крапок. Найбільший проміжок часу – це астрономічний рік, або галактичний, який триває 25620 звичайних років. За цей час Сонячна система робить повний оберт навколо центра галактики. Ця величина є занадто великою для людського розуміння, тому ми використовуємо поняття «рік » з позасистемними підрозділами «весна, літо, осінь, зима», які є мілкішими у порівнянні з роком. Далі розглядаємо 12 місяців, які мають тривалість від 28 до 31 дня. Один день поділяється на 24 години, година – на 60 хвилин, а хвилина – на 60 секунд. Позасистемний розподіл доби залежно від величини має наступні назви: ніч, день, спозаранок, ранок, надвечір'я, вечір, світанок. Серед усіх цих координат часу, як видно, існують точні та приблизні інтервали часу, якими ми користуємось у повсякденні. Причина цього полягає у різниці користуванні термінами часу, як визначення моменту тої чи іншої дії, і зв'язок цих понять з такими поняттями, як дуальність **D** та величина похибки визначення координати **[S]**. Дуальність **D** є величина, яка обмежена з усіх боків величиною **[S]**. Мінімальний розмір дуальності дорівнює **[S]**, як вже згадувалося попередньо. Отже, якщо кажемо «на світанку», то це є межа дуальності, яка обмежена інтервалом часу від появи Сонця над обрієм від моменту сходу до повного диску. Але момент появи дуальності (світанку) та її закінчення є досить нетривкий процес, який відбувається за час **[S]**. Отже, дуальність світанку триває від 15 до 20 хвилин та **[S]** хвилин невизначеності. Однозначно, коли ми кажемо «вчора» або «завтра», величина дуальності дорівнює цілому дню, оскільки тривалість інтервалу відбувається від світанку до вечірнього заходу Сонця.

Оскільки попередньо було розглянуто уявні та реальні координати та функції їх реалізації, то наразі розглянемо математичний опис цієї ситуації. Одночасно з цим розглянемо яким чином впливають ПЗ точки, крапки, риси на визначення координат у просторовій похибці.

Наразі, всі елементи координат знаходяться у взаємодії, а тому повинні мати фізико-математичний опис через польові структури. Особливістю цього опису є те, що кожний елемент є носієм тієї чи іншої похибки. З [12] ми маємо виділити такі елементи просторової орієнтації: точка, крапка, риска, лінія. Для того, щоб спростити подальші математичні розвідки, приймемо низку спрощень для позначення функцій орієнтації.

Для точки приймаємо функцію $T_0(x, y, z)$, або для спрощення T_0 .

Для крапки приймаємо функцію $K_0(x, y, z, \sqrt{2S}, t)$, або для спрощення K_0 .

Для риси приймаємо функцію $L_0(x, y, z, \sqrt{2S}, t, dl)$, або для спрощення L_0 .

Для лінії приймаємо функцію $L = \int_A^B L_0(x, y, z, \sqrt{2S}, t) dl$, або для спрощення L .

Користуючись цими позначками, покажемо зв'язок між уявною та реальною системами координат.

У авторській роботі [1] було показано, що ми маємо дві системи координат – уявну та реальну. Наразі почнемо з уявної, оскільки вона являє собою ідеальну систему, відносно якої будується реальна. Таким чином, уявна система координат $U(x, y, z, t)$, де похибка або потенціал похибки у будь-якій точці її простору дорівнює нулю, тобто $\phi_U(x, y, z, t) = 0$. Оскільки в уявній системі будь-які похибки відсутні, то для неї будуть справедливою низка наступних залежностей, які надають опис уявного (ідеального) поля. Потенціал похибки у всіх точках об'єму уявного поля дорівнює нулю, а отже градієнт похибки буде теж дорівнювати нулю

$$\text{grad}\phi_U(x, y, z, t) = 0. \quad (2.27)$$

У цьому випадку, як наслідок, напруга похибки $U(P)$ буде теж дорівнювати нулю, тобто

$$U(P) = 0,$$

звідки

$$\operatorname{div} U(P) = 0 \text{ та } \operatorname{rot} U(P) = 0.$$

Продовжуючи дослідження цього питання необхідно звернути увагу на величину σ . У роботі [12] було показано на її величину, тобто **[S]**, як універсальну, яка пов'язує процес вимірювання з параметрами об'єкта. У будь-якому випадку вимірювання ця величина є характеристикою системи вимірювання і є стабільною по всій системі координат та визначає дуальність поверхні (**D**). Використовуючи цю властивість можемо вважати її як відносну метрологічну величину. Наразі нам знадобляться наступні варіанти позначок та відповідного тлумачення цієї величини у її співвідношенні до довжини, площі та об'єму:

σ^0 – похибка, яку вносить визначення точки як фізичного об'єкту, тобто аналог величини σ^3 , всередині якої знаходиться уявна точка;

σ^1 – лінійна похибка реальної системи координат;

σ^2 – площинна похибка реальної системи координат;

σ^3 – об'ємна похибка реальної системи координат.

Необхідно, також, зауважити, що уявна функція є силова і її взаємодія з реальним простором завжди супроводжується низкою спотворень у реальній системі координат. Отже, ми отримуємо низку математичних переходів з уявної до реальної системи координат.

Точка, розташована у такому просторі, може бути лише початком якогось відліку, тому їй характерні всі особливості уявної системи координат, тобто:

$$\varphi(T_0) = 0, \quad \operatorname{div} T_0 = 0, \quad \operatorname{rot} T_0 = 0. \quad (2.28)$$

Наразі ці залежності (2.28) пояснюються відсутністю поля похибок. Тобто, у широкому розумінні подібної ситуації є те, що навіть, бажаючи

помилитися, це зробити неможливо, хіба що обрати хибну систему координат, а отже не працює жодна з теорій вірогідності.

Перед тим, як розглянути реальну систему координат розглянемо складові потенціалу похибки, а саме:

$$\varphi_k = \frac{\sum \sigma^0}{\mu \cdot r} + \int_L \frac{\sigma^1 dl}{\mu \cdot r} + \int_S \frac{\sigma^2 dS}{\mu \cdot r} + \int_W \frac{\sigma^3 dW}{\mu \cdot r}, \quad (2.29)$$

де $\sum \sigma^0$ – потужність концентраторів просторової похибки (точки), σ^1 – лінійна потужність похибки, σ^2 – площинна потужність похибки, σ^3 – об’ємна потужність похибки, μ_k – координатна проникність похибки, r – відстань від концентратора похибки.

Отже, потенціал похибки складається з чотирьох компонент.

Перша компонента – це статична похибка, яка повністю залежна від вибору координат у координатній системі похибок. Ця похибка створює панданну зону, яка залежна від сторонньої сили. Дуже гарним прикладом тут може бути гравітаційне поле, яке вносить спотворення при вимірюванні ваги об’єкту. Наразі така похибка має як широтний, так і районований характер. І хоч вона має невеликий вплив на вагу, тим не менш вона існує і виказує свою дію через гравітаційну зону присутності. Друга складова є похибка лінійного розподілу похибки при обході контуру, наприклад при фрезерних роботах (фрезерування по контуру). Ця складова характерна для риски та лінії як елементу виміру. Основна причина виникнення такої похибки це просторові викривлення при проектуванні уявних ліній на реальну поверхню.

Третя складова є функція розподілу похибки по площині (рис. 2.4,а) [12]. Чинником такої похибки може бути викривлення поверхні АС та її геометрії. Ірраціональна геометрія об’єкту АС. Так, наприклад коло, спроектоване на будь-яку поверхню, має похибку площі поверхні, оскільки має ірраціональні складові. До таких складових відноситься число π , радіус i , як наслідок, площа.

Четверта складова похибки являє собою об'ємну похибку (рис. 2.4, б) [12], яка характерна для крапки як об'ємного елементу. Об'ємна похибка є загальним явищем у реальній системі координат, оскільки і лінійна і пласка похибка завжди мають третю координату. Найпростіший приклад - це звичайна мензурка, яка має поділки у розмір σ^3 , а точніше $[S]^3$.

Для реальної системи координат всі ці похибки є реальними та існують у дійсності, тому що існує кінцева точність виконання і кінцева точність вимірювання. Оскільки будь-яка кінцева точність спирається на векторну величину $[S]$, то всі вісі уявної системи координат розташовані таким чином, що вони не виходять за межі циліндричної поверхні осей реальної поверхні, які мають діаметр $[S]$.

За таких умов векторна система уявної системи координат, розташована всередині векторної системи реальних координат, буде мати розходження, тобто для лінії:

$$\mathbf{R}_K - \mathbf{I}_K \mathbf{U}_K \leq [S],$$

що визначає її панданну зону.

У такому випадку вся реальна система координат має статичну похибку розташування відносно уявної, тобто:

$$O_R - O_U \leq [S], \quad X_R - X_U \leq [S], \quad Y_R - Y_U \leq [S], \quad Z_U - Z_R \leq [S].$$

Розглянемо, що являє собою величина $[S]$, яка була виведена у [12]. Для цього зробимо низку перетворень величини S . Отже, маємо

$$S = (t_T V_P)^2,$$

$$V_P = i \frac{\partial V_P}{\partial x} + j \frac{\partial V_P}{\partial y} + k \frac{\partial V_P}{\partial z} = \text{grad} V_P = \nabla V_P. \quad (2.30)$$

Для вищої категорії відчутників величина t_T може змінюватися в залежності від необхідності по координаті та часу.

$$\begin{aligned} t_{T(x,y,z,T_T)} &= i \frac{\partial T_T}{\partial t_x} + j \frac{\partial T_T}{\partial t_y} + k \frac{\partial T_T}{\partial t_z} + i \frac{\partial t_T}{\partial x} + j \frac{\partial t_T}{\partial y} + k \frac{\partial t_T}{\partial z} =, \\ &= \text{grad} T_T + \text{grad} t_T = \nabla T_T + \nabla t_T \end{aligned} \quad (2.31)$$

де T_T - загальний час чутника на «вхід-вихід» у процесі торкання.

Час T_T є складною функцією, яка притаманна системі визначення не тільки координати об'єкту у просторі, але і у будь-якому іншому технологічному процесі. Ця функція може бути залежна від координати.

Підставляючи (2.30) та (2.31) у [S], отримуємо:

$$S = \left[(\nabla T_T + \nabla t_T) \nabla V_P \right]^2,$$

$$[S] = \sqrt{2 \left[(\nabla T_T + \nabla t_T) \nabla V_P \right]^2},$$

або для звичайних відчутників

$$[S] = \sqrt{2 (\nabla t_T \nabla V_P)^2}.$$

За своєю фізичною сутністю [S] є довжина пробігу відчутника для визначення координати з швидкістю \vec{V}_P за час t_T [12]. Але для реєстрації відчутник повинен відчувати об'єм, який він уявно або реально руйнує, тобто маємо $[S]^2$. При визначенні координати [S] використовується як нормальний вектор до поверхні. Величина [S] є вектор, який обертається всередині крапки і визначає її параметри точності, тобто

$$\text{rot} K_0 = 2\omega.$$

Окрім того, для крапки існує два варіанти дивергенції. Причина цього явища криється у тому, що крапка, як реальний об'єкт, вносить у простір відповідні спотворення. Ці спотворення похибки P_K є наслідком внутрішнього спотворення для лінійного об'єкту як такого, тобто

$$P_K = n\mathbf{D},$$

де \mathbf{D} - дуальність поверхні об'єкту, $n=1, 2, 3, \dots\infty$.

Оскільки крапка подовженості не має $n=1$ то $P_K = \mathbf{D}$. Якщо крапка є елементом початку відліку, то дуальність дорівнює діаметру крапки, тобто $\mathbf{D} = [\mathbf{S}]$. У випадку, якщо крапка є кінцевою координатою відліку то $\mathbf{D} = 2[\mathbf{S}]$. Відповідно дивергенція крапки початку відліку як джерела похибки

$$\text{div}K_0^+ = 6$$

і кінця відліку як поглинач похибки

$$\text{div}K_0^- = -3.$$

Розгляд впливу дивергенції витоку K_0^+ та стоку K_0^- крапки на точність доводить, що вплив нуля відліку мінімум у двічі більший, ніж похибка кінцевої координати.

Схожі властивості притаманні рисці, як об'єкту початку та кінця відліку. Для визначення її властивостей необхідно визначитися з довжиною лінійного об'єкту. Наразі, через дві крапки можна провести безліч ліній і лише одну пряму. Усі інші будуть кривими. Тому, для того, щоб визначитися з прямою у просторі, необхідно мати мінімум три крапки, розташування яких у просторі задовольняє характеристичному рівнянню прямої. Оскільки ми спираємось на три крапки, які щільно укладені в одну лінію, то мінімальна довжина риси буде $3[\mathbf{S}]$ при діаметрі $[\mathbf{S}]$.

Для риси кінця відліку це буде діаметр $2[\mathbf{S}]$ при довжині $6[\mathbf{S}]$. У такому разі дивергенція риси як витоку похибки координати буде

$$\text{div}\Lambda_0^+ = 4$$

і для кінця відліку

$$\operatorname{div}\Lambda_0^- = -2.$$

Якщо ми приймемо, що лінія являє низку крапок у визначеній просторовій послідовності, то при визначеному діаметрі у $[S]$ або $2[S]$ її довжина повинна складати $L^+ = n[S]$ або $L^- = 2n[S]$. У такому випадку дивергенція буде складати для початку відліку

$$\operatorname{div}L^+ = 4$$

і для кінцевої координати

$$\operatorname{div}L^- = -1.$$

Якщо у якості початку та закінчення відліку береться площа, то для початкової площини

$$\operatorname{div}S^+ = 1,$$

а для площини закінчення відліку

$$\operatorname{div}S^- = -2.$$

Отже, можна стверджувати, що будь-який об'єкт, що потрапив до системи координат, вносить у її простір відповідну похибку та низку спотворень. Ці спотворення можуть мати як позитивний так і негативний характер. Так, наприклад, плитка Йогансона, яка вноситься у робочий простір верстата, має позитивний вплив на реальну систему координат і негативну на його уявну.

На останок цього розділу звернемося до лінії як елементу відліку. Риска, як елемент відліку, занадто коротка, щоб сприймати її як координатну вісь, а тому розглянемо утворення лінії більш достеменно (рис. 2.6). Оскільки риску було означено як три поєднані крапки без щілини, то лінія – це низка крапок, поєднана в одне ціле. У нашому випадку як до вісі координат маємо висунути більш суворі вимоги. Для цього обираємо три крапки на будь-які координатні вісі (наразі Z) уявної (U_k) системи пристайної до реальної (R_k) .

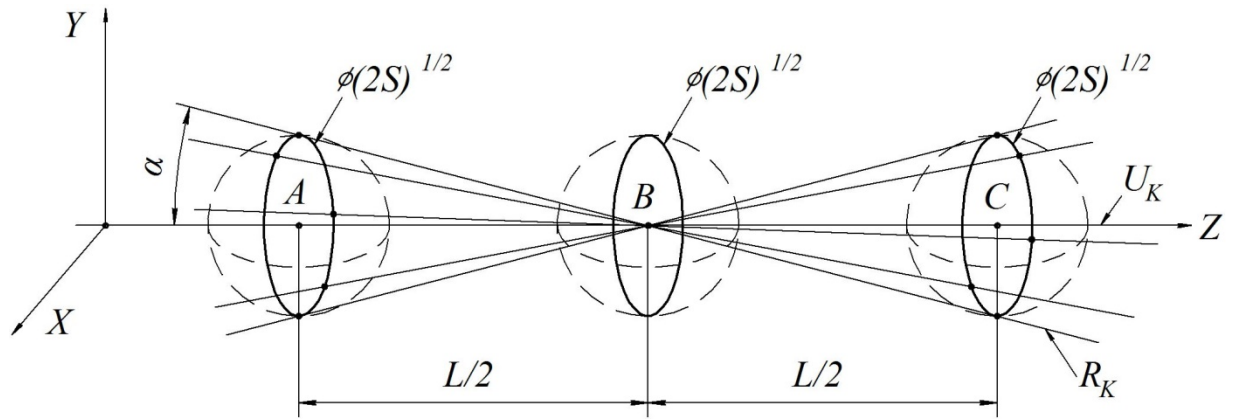


Рис. 2.6. Процес утворення лінії відліку координат (панданна зона)

При цьому, якщо уявну вісь U_k ми маємо можливість провести лише одну, то реальних може бути проведено нескінченна кількість. Наразі, це будуть прямі, які опираються на кола А та С, тобто вони при своєму русі утворюють однопорожній гіперболоїд, тобто [13]

$$\frac{X^2}{[S]} + \frac{Y^2}{[S]} - \frac{Z^2}{L^2} = 1. \quad (2.32)$$

Наразі він може утворюватися двома типами ліній, які його утворюють:

$$\text{I тип. } \frac{X}{[S]} + \frac{Z}{L} = [S] \left(1 + \frac{Y}{[S]} \right), \quad [S] \left(\frac{X}{[S]} - \frac{Z}{L} \right) = 1 - \frac{Y}{[S]}; \quad (2.33)$$

$$\text{II тип. } \frac{X}{[S]} + \frac{Z}{L} = [S] \left(1 - \frac{Y}{[S]} \right), \quad [S] \left(\frac{X}{[S]} - \frac{Z}{L} \right) = 1 + \frac{Y}{[S]}. \quad (2.34)$$

Це просторове утворення має два межових випадки.

У першому – це утворення двох просторових конусів (рис. 2.6) за наступним математичним описом [13]

$$\frac{X^2}{([S])^2} + \frac{Y^2}{([S])^2} - \frac{Z^2}{L^2} = \pm 1. \quad (2.35)$$

У другому випадку це циліндр довжиною L та діаметром $[S]$, тобто

$$\frac{X^2}{([S])^2} + \frac{Y^2}{([S])^2} = 1. \quad (2.36)$$

Таким чином з цього розгляду необхідно зробити два вагомих зауваження, а саме: по-перше, нас найбільше влаштовує циліндр (2.36) як основа системи відліку. У такому випадку маємо визначену похибку нуля відліку для перпендикулярної координати; по-друге – характеристики гіперболічного конуса (2.32, 2.33, 2.34), які дають розходження за рахунок кута α можна значно зменшити щоб уникнути ситуації (2.36), яка характерна для коротких відтинків. Для координатної системи необхідно розсувати крапки A та C на максимальну відстань, тобто крапка A повинна співпадати з початком координатної системи, а крапка C – з її кінцем. У такому разі у таких крапках як B вісь не буде зникати, тобто виходити за межі чутливості чутника координат.

2.2.2. Панданна зона шорсткості абстрактного об'єкта

Сучасні методи контролю технологічного обладнання з числовим програмним керуванням (ЧПК) або є недостатньо точними, або вимагають використання вартісного вимірювального обладнання. Окрім того, вони дозволяють проводити лише вибракування обладнання за заданими параметрами. Тому актуальною є проблема забезпечення моніторингу метрологічних параметрів технологічного обладнання з ЧПК за допомогою розробки методів і засобів експрес-атестації координатної системи технологічного обладнання, які, на відміну від існуючих, будуть більш економічними та не поступатися у точності лабораторним. Наразі вирішення цієї проблеми не може бути реалізоване через відсутність елементарних фізичних понять про процес вимірювання координати. Рішення цієї проблеми дозволить подовжити ресурс обладнання з огляду на дотримання точності у межах його технологічних параметрів. Вимоги до нового діагностичного обладнання повинні враховувати особливості форми структур технічних і біологічних об'єктів, які мають великий вплив на точність вимірювання та визначення координати об'єкта.

Необхідним є розробка методів і створення засобів введення корекції для компенсації виявлених похибок, для чого потрібні моделі елементарних форм, які

визначають утворення різного типу регулярності структури поверхні об'єктів, що наразі не досліджені достеменно, зокрема моделювання утворення активної поверхні об'єкта при взаємодії з іншими біотехнічними об'єктами.

Під активною частиною поверхні будь-якого об'єкту незалежно від його фізичного стану розуміється елементарна частка об'єму, яка є повним еквівалентом загальної поверхні у своїх фізико-технічних та біологічних властивостях.

У роботах [1] авторами розглянуто низку властивостей поверхні під час визначення координат торкання різних абстрактних об'єктів (АО). Наразі було з'ясовано, що для кожного з відчутників АО існує критичний розмір S відстані між ними. Але поняття активної частини поверхні більш широкі, ніж просте розташування відчутників для визначення розміру відстані між ними. Зазвичай поверхня, як вже згадувалося у [1], виконує функцію захисту, поглинання та відбиття енергії зовнішнього середовища. У такому випадку первинною є проблема утворення форми поверхні певного АО. Саме на мікрорівні, що визначає шорсткість поверхні, виникає низка ефектів, пов'язаних з ефективністю використання мікропанданної зони [12] об'єктів.

Розглянемо цей процес, використовуючи ту ж саму методику, що і у [4] при дослідженні активної поверхні АО. Для цього виділяємо таку частинку активної поверхні об'єкта, що її площа відповідає квадрату розміру товщини панданної зони. Вибір таких розмірів пояснюється тим, що всі активні процеси відбуваються саме у межах товщини поверхні.

Вважається, що поверхня АО повинна бути ідеально гладкою, тобто діюча поверхня буде складатися з дзеркально чистих елементів розміром $[S]^2$ (рис. 2.7). Тим не менш, це досить таки уявне явище, яке вкрай рідко трапляється серед відомих об'єктів АО. Більш розповсюджені АО із шорсткими поверхнями, форма яких є наслідком або взаємодії у навколишньому середовищі, або необхідністю пристосовуватися до неї. Так, наприклад, у техніці найбільш чистими є поверхні плиток Йогансона або оптичних виробів,

де в обох випадках необхідно мати високоякісні засоби взаємодії з навколишніми об'єктами.

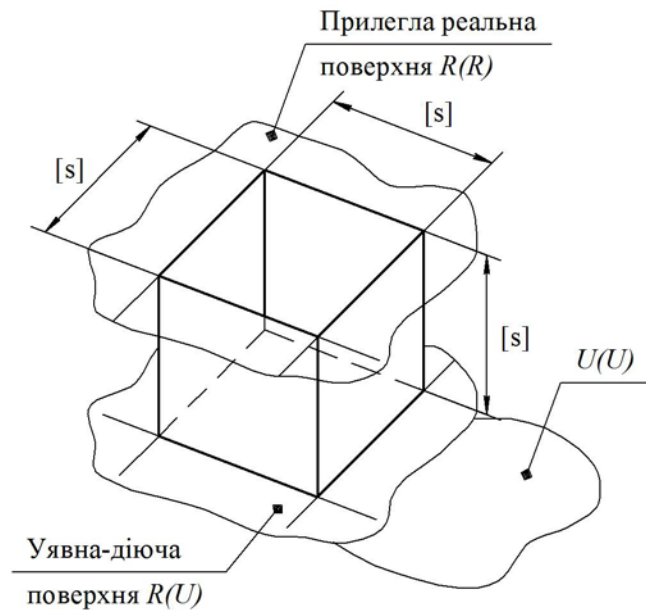


Рис.2.7. Модель обмеження елемента панданної зони

Але, навіть у цьому випадку, іноді потрібно мати поверхню з регулярною шорсткістю, як, наприклад, лінзи Френеля. Абразивний інструмент теж вимагає чіткої поверхні за визначеної шорсткості. У супротивному випадку він просто не виконує свої функції. Для біологічних об'єктів (БО) цей показник є ще більш критичним. Покриття поверхні БО слизом вказує на те, що з певних обставин існування йому це необхідно, в той час, як сама поверхня тіла покрита порами, котрі виділяють слиз. Вся поверхня тіла БО зазвичай вкрита порами, які мають подвійні властивості. З одного боку, вони поглинають корисні речовини з навколишнього середовища, які потрібні для існування, а з іншого, викидають назовні шкідливі продукти існування БО. Здавалося б, така частина БО, як око, повинна була б мати прозору монолітну оболонку (склера), але вона має теж певну поруватість та сльозові залози, рідина з яких постійно змочує поверхню. Як наслідок, сили поверхневого натягу рідини допомагають склері мати добрі оптичні властивості та відповідну чистоту.

Отже, з цього скороченого розгляду можна зробити вагомий висновок

про те, що поверхня необов'язково має бути ідеально рівною, вона повинна бути такою як потрібно для функціонування АО, тобто співпадати з формою технологічного фантому. Відхилення форми ТФ призводить до скорочення ресурсу існування АО і її швидкої руйнації. Отже, для будь-якого АО є дуже важливим ефективне використання площі своєї поверхні. Поверхня як така є мірою витривалості ресурсу певного АО, тому її параметри є найбільш важливими з огляду на реальні умови існування об'єкту. Отже, оскільки ми за будь-якої ситуації маємо певну міру стосовно визначення фізичних параметрів об'єкту, то визначена постановка задачі вимагає від нас створення загальної системи вимірювання відносно параметрів поверхні АО. Наразі такою мірою може бути товщина поверхневого шару, що визначає активні властивості поверхні. Як наслідок, глибина активної поверхні визначає реальний розмір площі та мінімального активного об'єму активної площі АО.

2.2.3. Моделювання енергетичних процесів елементарного об'єму абстрактного об'єкта

Отже, для реального простору існування АО ми вважаємо доцільним створити модель елементарного об'єму у вигляді кубу з ребром $[S]$, оскільки вона є оптимально наближеною до реальних фізичних процесів.

У цьому випадку виникає дві ситуації геометричного об'єму, який необхідно дослідити. За такої постановки задачі ми маємо досліджувати площу та об'єм $[S]^3$. Водночас, площа активного об'єму є плинною, залежною від вектора напрямку енергетичного струменю на визначену поверхню. Для того, щоб оцінити ситуацію енергетичної віддачі та прийому інформаційного силового сигналу, скористаємося загальною теорією єдиного чутливого елементу (ЄЧЕ) [4], котра надає можливість розглядати поверхню як низку впорядковано розташованих відчутників.

Отже, як наслідок, маємо констатувати той факт, що в основі калібрування будь-якої визначеної поверхні АО може бути два параметри:

– площа поверхні $[S]^2$ у межах об'єму $[S]^3$, яка визначається базовою стосовно енергетичного об'єму;

– об'єм елементарного об'єкту АО як одиниці межової потужності сприймання зовнішнього потоку енергії випромінювання.

Отже, враховуючи обумовлене вище, маємо зорієнтуватися на саме ці параметри стосовно наступного фізико-математичного розгляду. Таким чином, орієнтуємося на опорну систему відліку з реакціями у $[S]^2$ та $[S]^3$. Як вже згадувалося, поверхня будь-якого об'єкту утворюється таким чином, щоб бути максимально зорієнтованою відносно зовнішнього енергетичного потоку, тобто перпендикулярно нормальному вектору стосовно площинки $[S]^2$. У такому випадку весь об'єм $[S]^3$ буде зорієнтовано відносно цього вектора. Разом із цією ситуацією маємо два випадки, тобто: або енергетичний потік є паралельним нормальному вектору, або він має загальні розсіяння у просторі. За першого випадку зовнішню енергетику сприймає АО лише для форми кубу (рис. 2.7).

За другого випадку все залежить від кута падіння енергетичного потоку на зовнішню поверхню ($[S]^2$). Але за будь-якого випадку все буде обмежено площиною $[S]^2$ та кутом її нахилу відносно вектору енергетичного потоку, тобто незалежно від форми поверхні в середині чарунки. Таким чином, за суворої векторної спрямованості енергетичного потоку ми маємо відносно низьку ефективність використання поверхні об'єкту, оскільки у кубічній чарунці використовується лише частина внутрішньої поверхні.

Тим не менш, наприклад для хімічних реакцій, дуже важливо мати велику площу поверхні в обмеженому просторі. Прикладом для техніки тут є акумулятори, а для тварин – легені, або зябра у риб тощо. З огляду на це куб-чарунка (рис. 1) є ідеальною формою, внутрішня поверхня якої має площу $[S]^2$. Для інших форм поверхні це не очевидним чинником, тому варто їх розглядати.

Отже, розташування реальної діючої поверхні розташовується між прилеглою реальної поверхні $[R(R)]$ та уявною діючою поверхнею $U(U)$ (рис. 2.7). Активна частина поверхні розташовується в межах від $U(U)$ до $R(R)$. Відповідно до цього утворюється модель штучного об'єму $[S]^3$, де $[S]$ – різниця між $U(U)$ та $R(R)$.

Зовнішній енергетичний потік призводить до руйнування крайців АО до того рівня, якого він вже не може здолати, тому необхідно згадати цю задачу відповідно конкретного випадку. Отже, якщо ми маємо окраєць АО товщиною $[S]$, яка відповідає товщині активної поверхні АО, то саме край цієї поверхні знаходиться під дією інтенсивного руйнування. Тобто можемо уявити, що будь-яка умовна маса $[m(U)]$ має руйнуватися під дією енергетичного потоку E_0 до площини вздовж вектора його напрямку. Це є критична поверхня, яка має можливість витримати навантаження цієї енергії і не зруйнуватися. Ця ситуація є уявною, оскільки кожний АО виробляє таку форму своєї поверхні, яка огортається поверхневим шаром завтовшки $[S]$. Здебільшого всі замкнені поверхні АО мають здатність до витримування зовнішніх енергетичних навантажень відповідно умовам середовища, у якому існує АО, а тому товщина поверхні повинна бути не менше за $[S]$. Тобто ми розглядаємо цю ситуацію як суто уявну. Тим не менш, необхідно зауважити, що ситуація з прямокутною формою окрайця є досить поширеною, але це стосується несформованих форм. Гострі окрайці є не більш, ніж миттєвою формою об'єкта, оскільки час нашого суб'єктивного спостереження є занадто малим відносно впливу зовнішнього середовища. Як наслідок, окраєць форми кожного з АО має форму, підкорену куту потужності енергетичного потоку, особливо це стосується біологічних об'єктів. Оскільки ця частина АО не витримує цього навантаження, то все поза енергетичною траєкторією буде зруйновано. Розглянемо найпростішу задачу відносно кута падіння енергетичного потоку на окраєць поверхні деякого АО (рис. 2.8).



У такому випадку наша задача стосовно моделювання перетворюється у суто геометричну задачу. Оскільки ми маємо справу з польовими структурами, то такий перехід є повністю закономірним.

Величина (довжина) відтинку, яка нам потрібна у подальшому, визначається за теоремою подоби, тобто

ЗВІДКИ

138

З іншого боку, маємо залежність

$$\frac{[\text{S}]-a}{[\text{S}]} = \cos \alpha$$

і, як наслідок

$$a = [\text{S}](1 - \cos \alpha) \quad (2.37)$$

З рис. 2.8 маємо можливість отримати функціональну залежність між величинами a та b і кутом β , тобто

$$\frac{a}{b} = \sin \beta, \text{ звідки } a = b \sin \beta. \quad (2.38)$$

При умові, що $\gamma = \alpha - \beta$ маємо можливість отримати величину R

$$\frac{R}{b} = \cos \gamma, \text{ звідки } R = b \cos(\alpha - \beta). \quad (2.39)$$

Вирішуємо задачу зв'язку між величинами b та $[\text{S}]$, користуючись залежностями (2.37, 2.38), тоді

$$b^2 = a^2 + [\text{S}]^2,$$

а після перетворень отримуємо

$$b^2(1 - \sin^2 \beta) = [\text{S}]^2. \quad (2.40)$$

З виразу (2.40) маємо можливість визначитись із необхідним співвідношенням

$$b^2 = \frac{[\text{S}]^2}{\cos^2 \beta}, \quad (2.41)$$

звідкіля, як наслідок, слідує вираз

$$b = \frac{[\text{S}]}{\cos \beta}.$$

Отриману залежність (2.41) підставляємо у вираз (2.39) і отримуємо величину радіусу руйнування крайця окремого елемента поверхні

$$R = \frac{[S]}{\cos \beta} \cdot \cos(\alpha - \beta).$$

Користуючись залежністю

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

а також виразом

$$R = [S](\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta)$$

та після низки перетворень отримуємо кінцевий результат у вигляді

$$R = [S][\cos \alpha + \sin \alpha \cdot (1 - \cos \alpha)]. \quad (2.42)$$

Вираз (2.42) є приблизним, оскільки показує на величину точкового впливу на можливі руйнації об'єкта закінчених розмірів. Проте функція (2.42) показує на залежність міцності одиничного елемента від його товщини та кута падіння енергетичного потоку.

У випадку, який розглядається на рис. 2.8, ми маємо можливість визначитися з об'ємом панданної зони технологічного фантому одиничного елемента, тобто

$$[P]\Phi = R^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot f(x, y, z), \quad (2.43)$$

де $f(x, y, z)$ - довжина окрайця руйнації.

Вище виказане досить добре підтверджується звичайними явищами (рис. 2.9). Так, на рис. 2.9, а надано фото мало навантажених регулярно розташованих плит. Така ж сама плита (рис. 2.9, б), яка піддалася центральному навантаженню зруйнувалася у центральній частині. Досить легко збагнути, що не витримано співвідношення площі до товщини, що є наслідком з виразу (2.42). Аналогічна ситуація спостерігається і на тротуарній цеглі (рис. 2.9, в, г), коли окрасць цегли під навантаженням намагається досягти оптимального радіусу окрайця, при якому він витримає максимальне навантаження. Подібні ситуації трапляються як у техніці так і у природі.



а)



б)



в)



г)

Рис. 2.9. Типова ситуація руйнації елементарних елементів за неправильного співвідношення геометрії, де: а) типове розташування тротуарної плити та її руйнація; б), в) та г) руйнація тротуарної цегли на сходах та загальному розташуванні

Цей математичний розгляд можливої геометрії виступів і заглибин на поверхні АО доводить, що поверхня підлаштовується до зовнішньої енергетики і не має визначених гострих кутів. Тому всі гострі кути, які трапляються нам при різних розглядах поверхні, це не більш, ніж ілюзія. За властивостями ТФ будь-яка геометрія знаходиться під впливом сторонніх сил, які принципово не дають можливості утворитися гострому куту в процесі утворення АО.

Водночас, дуже важливу роль відіграють енергетичні процеси формотворення поверхні. Наразі цими проблемами займається фізика тертя та зносу твердих матеріалів [14]. У загальній кількості таких теорій розроблено

доволі велику кількість, тим не менш звернемо увагу на енергетичну модель процесу зносу поверхні [14].

Згідно цієї моделі робота, яка витрачається на здолаття сили тертя визначається як

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = E_{\text{тр}}.$$

Перший закон термодинаміки та закон збереження енергії [14] визначають наступне:

$$E_{\text{тр}} = E_{\text{мех}} = E_{\text{терм}} + E_{\text{хім}} + E_{\text{ел}} + E_{\text{і}} + E_{\text{мех}}'.$$

У загальному випадку виправдовується нерівність

$$E_{\text{терм}} \gg E_{\text{хім}} + E_{\text{ел}} + E_{\text{і}} + E_{\text{мех}}',$$

де $F_{\text{тр}}$ - вектор сили тертя, s – вектор шляху тертя, $E_{\text{тр}}$ - загальна енергія тертя, $E_{\text{мех}}$ - механічна енергія тертя, $E_{\text{терм}}$ - термічна складова енергії, $E_{\text{хім}}$ - хімічна складова енергії, $E_{\text{і}}$ - енергія індентора тертя, $E_{\text{мех}}'$ - енергія змащувального матеріалу.

Енергетична модель базується на понятті утворення часток зносу та переносу речовини і полягає у наступному. Якщо енергія, акумульована у відокремлених від поверхні частках у наслідок пружної деформації $E_{\text{пр}}$ є більше енергії E_q , з якою частка утримується на поверхні через сили адгезії, то утворюється вільна частка зносу. Тут необхідно зробити одне зауваження: цей процес утворення твердотільних часток є одним з варіантів утворення твердотільної зони присутності, яка буде розглядатися та досліджуватися далі. Отже, для часток напівсферичної форми запасена пружна енергія буде

$$E_{\text{пр}} = \frac{\mu^2 \varepsilon_s^2 E \pi d_L^3}{2 \cdot 12}.$$

Енергія адгезійного зв'язку для напівсферичної частки

$$E_q = f_{1/2} \frac{\pi d_L^2}{4},$$

де $f_{1/2} = g_1 + g_2 - g_{1/2}$ [1],

g_1, g_2 - сили поверхневого натягу та межі першого та другого тіла з зовнішнім середовищем відповідно;

$g_{1/2}$ - поверхневий натяг на межі розподілу першого і другого тіла.

Звідкіля умова утворення частинки зносу $E_{\text{пр}} \gg E_q$ дозволяє визначити їх характерний розмір d_L :

$$d_L \geq \frac{6f_{1/2}}{(\mu_q \varepsilon_s)^2 E},$$

де μ_q - коефіцієнт Пуассона, E - модуль пружності, $\varepsilon_s = 3 \cdot 10^{-3}$ - відносне подовження.

Для металів це співвідношення можна записати у наступному спрощеному вигляді:

$$d_L = 6 \cdot 10^4 \frac{f_{1/2}}{\sigma_T}.$$

Для переносу напівсферичних часток діаметром d_L формується наступна умова: накопичена у об'ємі частки пружна енергія $E'_{\text{пр}}$ повинна бути більша за енергію утворення нових поверхонь E'_s . Якщо зважити, що

$$E'_{\text{пр}} = \frac{\varepsilon_m^2 E \pi (d'_L)^3}{2 \cdot 12},$$

а

$$E'_s = 2q_1 \frac{\pi (d'_L)^2}{2},$$

то для характерного розміру часток переносу отримуємо

$$d'_L \geq \frac{24q_1}{E\varepsilon_m^2}, \quad ()$$

де ε_m - коефіцієнт молекулярного зносу частки об'єкта.

Однак прийнята умова, згідно якої вона витрачена на утворення нової поверхні, витрачається тільки на пружну деформацію контртіла та не відповідає дійсності. Окрім того, не враховується енергія дислокацій і мікрощілин у поверхневих зонах тіл, які контактують, тобто, як підкреслюється [14], цю модель слід розглядати як вельми приблизну.

Енергетичні дослідження механічного руйнування [14] дозволяють отримати емпіричну залежність наступного вигляду

$$t = t_0 \exp \frac{E_A}{kT},$$

де t - час до руйнування, t_0 - параметр, пов'язаний із частотою теплових елементів коливання кристалічної ґратки, T - абсолютна температура, k - стала Больцмана, E_A - енергія активації процесу руйнування при механічному навантаженні:

$$E_A = E_{AO} - \rho_g \sigma,$$

де E_{AO} - енергія активації процесу руйнування за відсутності розтягуючої напруги, приблизно рівна енергії сублімації для металів чи енергія хімічного зв'язку для полімерів;

σ - діюча напруга; ρ_g - коефіцієнт, залежний від природи та структури речовини.

Стосовно енергії, яка витрачається на руйнацію при терті, було з'ясовано, що ця енергія здебільшого витрачається на деформацію ділянок у межах тріщин, і лише мала частина цієї енергії йде на збільшення поверхневої енергії системи. Звідкіля енергія руйнації переважає поверхневу енергію майже на три порядки [15].

Як наслідок, існує різниця між уявною та реальною поверхнею, тобто якщо АО намагається утворити поверхню, яка являє собою низку призм або ребер, реальна являє собою низку злагоджених елементів. Водночас, всі елементи мають яскраво окреслену геометрію, яка вказує на вектор дії

сторонніх сил (для прикладу наведемо, що уся риба має однозначну гідродинамічну поверхню луски свого тіла, або птахи з однозначним розташуванням пір'я на тілі). Тому всі класичні елементи поверхні мають двояке призначення, тобто будь-який зовнішньо опуклий елемент має свій антипод у вигляді чарунки.

Як наслідок, маємо розглядати всі поверхневі елементи АО як низку відмінностей від уявної поверхні у межах $[S]$. Це спостерігається у межах $\pm[S]$, як було показано у роботі [1]. Отже, уявні класичні елементи поверхні, наведені у табл. 2.1, це є образи поверхні та їх дзеркальне відображення відносно уявної площини АО.

Для того, щоб оцінити ефект від використання поверхні та об'єму АО, введено відповідно коефіцієнти використання цих фізичних параметрів. Оскільки товщину поверхневого шару було визначено [1] як $[S]$, то відповідно базовим елементом площі та об'єму відповідають величини $[S]^2$ та $[S]^3$.

Для оцінки використання площі вводиться коефіцієнт

$$Q_s = \frac{S_e}{[S]^2}.$$

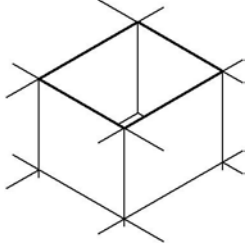
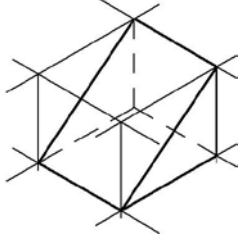
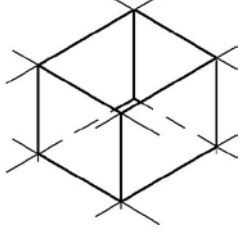
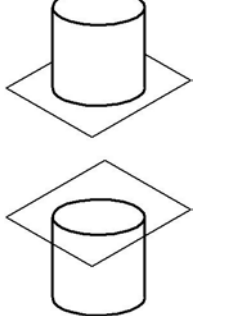
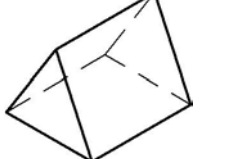
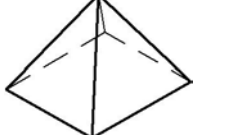
Для оцінки використання об'єму вводиться коефіцієнт

$$Q_v = \frac{V_e}{[S]^3}.$$

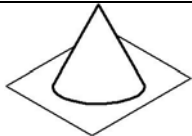
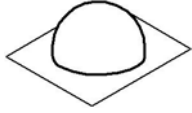
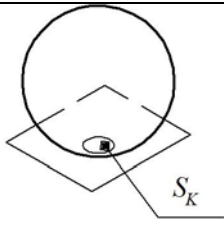
Наразі елементарні геометричні елементи, з яких утворюється геометрія поверхні (табл. 2.1), можуть при складанні утворювати поверхні різних типів.

При цьому знов таки необхідно пам'ятати, що будь-яка поверхня не може створити гострих кутів ані теоретично, ані практично, оскільки атомарна геометрія має закінчені форми, що не дозволяють створювати кути, менші за діаметр атома. Тому таблиця 2.1 надає уявлення про фанти поверхні, а не про їх реалізацію.

Таблиця 2.1. Елементарні структури поверхні об'єкту

№ п.п	Назва форми	Геометрія форми	Ефективна площа елементу	Коефіцієнт ефективності використання площі	Ефективний об'єм ви- корис- тання елементу	Коефіцієнт ефектив- ності викори- стання об'єму
1	Елемен- тарна площин ка		$[S]^2$	$Q_s = 1$	$V_e = [S]^3$	$Q_v = 1$
2	Клин		$3[S]^2 + \sqrt{2}[S]^2$	$Q_s = 3 + \sqrt{2}$	$V_e = \frac{1}{2}[S]^3$	$Q_v = \frac{1}{2}$
3	Кубічна комірка		$5[S]^2$	$Q_s = 5$	$V_e = [S]^3$	$Q_v = 1$
4	Циліндр Циліндр ична комірка		$[S]^2 (1 + \pi)$	$(1 + \pi)$	$V_e = \pi[S]^3$	$Q_v = \frac{\pi}{4}$
5	Призма		$\sqrt{5} \cdot [S]^2$	$\sqrt{5}$	$V_e = \frac{1}{2}[S]^3$	$Q_v = \frac{1}{2}$
6	Піраміда		$\sqrt{5} \cdot [S]^2$	$\sqrt{5}$	$V_e = \frac{1}{3}[S]^3$	$Q_v = \frac{1}{3}$

Продовження таблиці 2.1

7	Конус		$[S]^2 \cdot \left[1 - \frac{\pi}{4}(1 - 2\sqrt{5}) \right]$	$\left[1 - \frac{\pi}{4}(1 - 2\sqrt{5}) \right]$	$V_e = \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} [S]^3$	$Q_v = \frac{\pi}{12}$
8	Напівеліпсоїд		$[S]^2 \cdot \left[\left(1 + \frac{3}{4}\pi \right) + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} [S] \right]$	$\left[\left(1 + \frac{3}{4}\pi \right) + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} [S] \right]$	$V_e = \frac{4}{3} \pi [S]^3$	$Q_v = \frac{4}{3} \pi$
9	Куля		$[S]^2 (1 + \pi) - 2$	$(1 + \pi) - \frac{2S_k}{[S]^2}$	$V_e = \frac{\pi}{6} [S]^3$	$Q_v = \frac{\pi}{6}$

Всі ці елементарні форми у тій чи іншій кількості використовуються не лише у природньому середовищі серед БО, а і у техніці. Тому розглянемо деякі з них та приклади їх застосування. По-перше, це елементарна площинка № 1 (табл. 2.1) з ефективною площею $[S]^2$ та товщиною $[S]$. Хоча елемент і називається площинкою, тим не менш, це є частина поверхні АО з товщиною $[S]$. Ця площа є закінчений елемент поверхні, якому притаманні параметри всієї поверхні. Так, наприклад, це будь-яке покриття об'єкту шаром фарби, шкіри тощо. Водночас, мається на увазі, що властивості цієї площинки зберігають властивості всієї поверхні – це є основний принцип побудови моделі поверхні. У такий спосіб можна отримати лише геометрію усієї поверхні простим масштабуванням без зміни фізико-хімічних властивостей. При цьому максимально використовується і площа, і об'єм елемента. Наразі це може бути цегла або тротуарна плитка у будівництві.

Наступною формою є клин № 2 (табл. 2.1) з ефективною площею $3[S]^2 + \sqrt{2}[S]^2$, який являє собою куб, розсічений по діагоналі. Така фігура має значно більшу площу поверхні, яка характерна для об'єктів, що мають

необхідність випромінювання залишкової енергії. Окрім того, ця форма характерна для металообробного інструменту (наприклад, напилка), оскільки має можливість створювати місцеві концентрації сили для руйнації протидіючого АО.

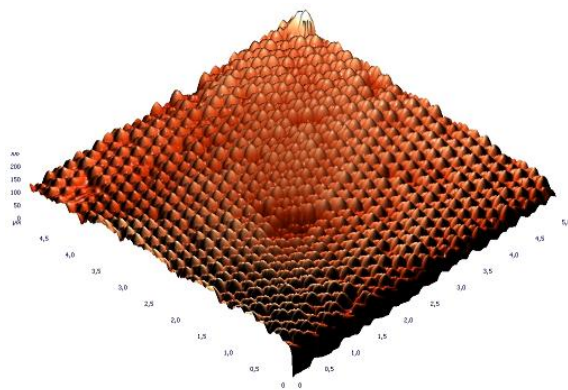
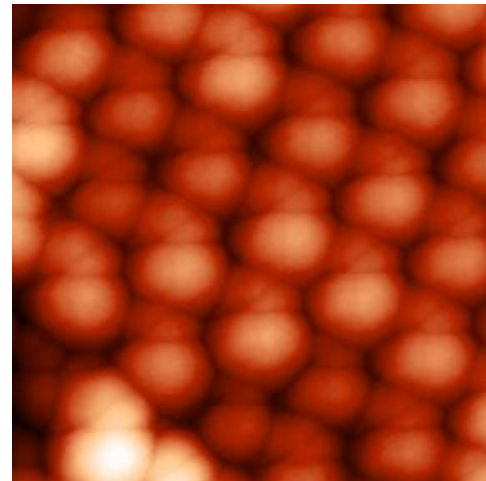
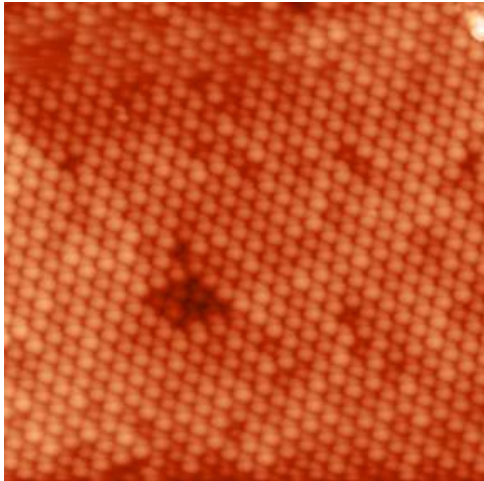
Кубічна комірка № 3 (табл. 2.1) серед цих усіх елементарних форм має найбільшу площу ($5[S]^2$) і є найбільш ефективною формою для накопичення енергії із зовнішнього середовища та її зберігання у поверхневому прошарку поверхні. У чистому вигляді комірка не зустрічається, а лише у комбінації з площинкою (№ 1 табл. 2.1), яка слугує перегородкою між ними.

Особливість вище розглянутих форм елементарних поверхонь є те, що вони самі по собі не зустрічаються, оскільки вони потрібні одна одній для реалізації. Сам по собі може існувати лише варіанти поверхні № 1 та і то не завжди. Особливо це характерно для біологічних об'єктів. Зазвичай кожний з цих об'єктів є центральним на площі розміром $3[S] \cdot 3[S]$.

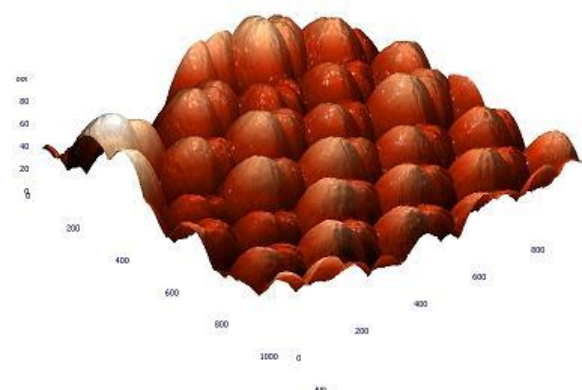
Наступною формою є циліндр та його антипод циліндрична комірка № 4 (табл. 2.1). Наразі це варіант реалізації площинки № 1 та комірки № 3, але у варіанті самостійного існування, коли їм не потрібні інші варіанти елементів. Можуть використовуватися у випадку необхідності значного тертя між АО або енергетичного поглинання. Варіант призми № 5 (табл. 2.1) є різновидом клиноподібного елементу, але такого, що може існувати самостійно. Використання подібної форми поверхні вкрай рідке за складністю отримання. Варіант піраміди № 6 табл. 2.1 є повністю самостійним елементом, який виконує функції або випромінюючого, або захисного елементу. Варіант конуса (№ 7 табл. 2.1) є повністю самостійним елементом, який виконує функції захисного характеру для біологічних об'єктів. Напівкуляста форма (№ 8 табл. 2.1) є повністю самостійним елементом і в техніці зустрічається вкрай рідко, хоча для біологічних об'єктів це досить поширене явище. Куляста форма (№ 9 табл. 2.1) є повністю самостійним елементом, який не потребує сумісності із

іншими елементами. Форма є характерною для техніки та для біологічних об'єктів.

Прикладом для розглянутого вище може бути відображення поверхні за допомогою атомно-силового мікроскопа (АСМ) (рис. 2.10, 2.11) [16, 17. 18].

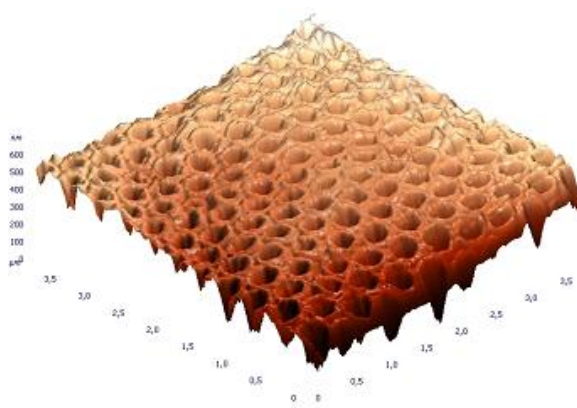
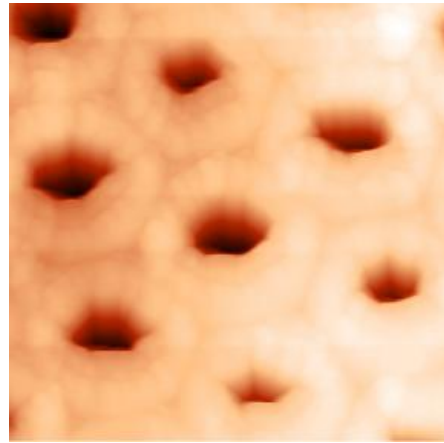
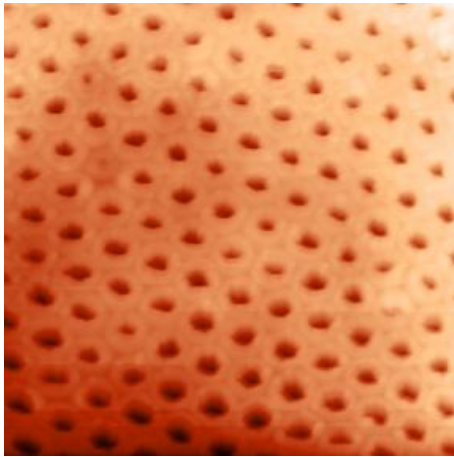


а)

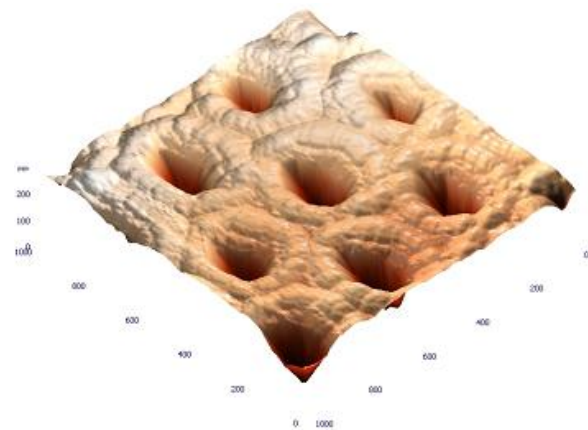


б)

Рис. 2.10. АСМ - зображення поверхні фотонних кристалів на основі латексних сфер, де: а) розмір зображення 5×5 мкм (відповідно 3D відображення); б) розмір зображення 1×1 мкм (відповідно 3D відображення). Висота кристалів 40 нм, діаметр кристалів 190-200 нм. [16]



а)



б)

Рис. 2.11. АСМ - зображення поверхні інвертованих фотонних кристалів на основі SnO_2 , де: а) розмір зображення 4×4 мкм (відповідно 3D відображення); б) розмір зображення 1×1 мкм (відповідно 3D відображення). Діаметр впорядкованих чарунок 185-195 нм; глибина 130-140 нм. [16]

Наразі з фото дуже добре видно, що існує певне чергування у поверхневому шарі геометричних форм розглянутого вище типу. Так, на рис. 2.10 це є напівкулі з щільною упаковкою, яка не передбачає можливості розташування інших геометричних форм. При цьому поверхня має вигляд регулярно розташованих елементів поверхні. На рис. 2.11 [16] відображено поверхню у вигляді конусних чарунок. Наразі цю поверхню можна назвати комбінованою, оскільки її можна відтворити за допомогою конусів-антиподів

№ 7 та пластинок № 1. Як стверджується у [16], подовженість такої поверхні може сягати кількох сотень мікрометрів.

Аналогічні дослідження, проведені з біологічними тканинами, наведені на рис. 2.12 [18].

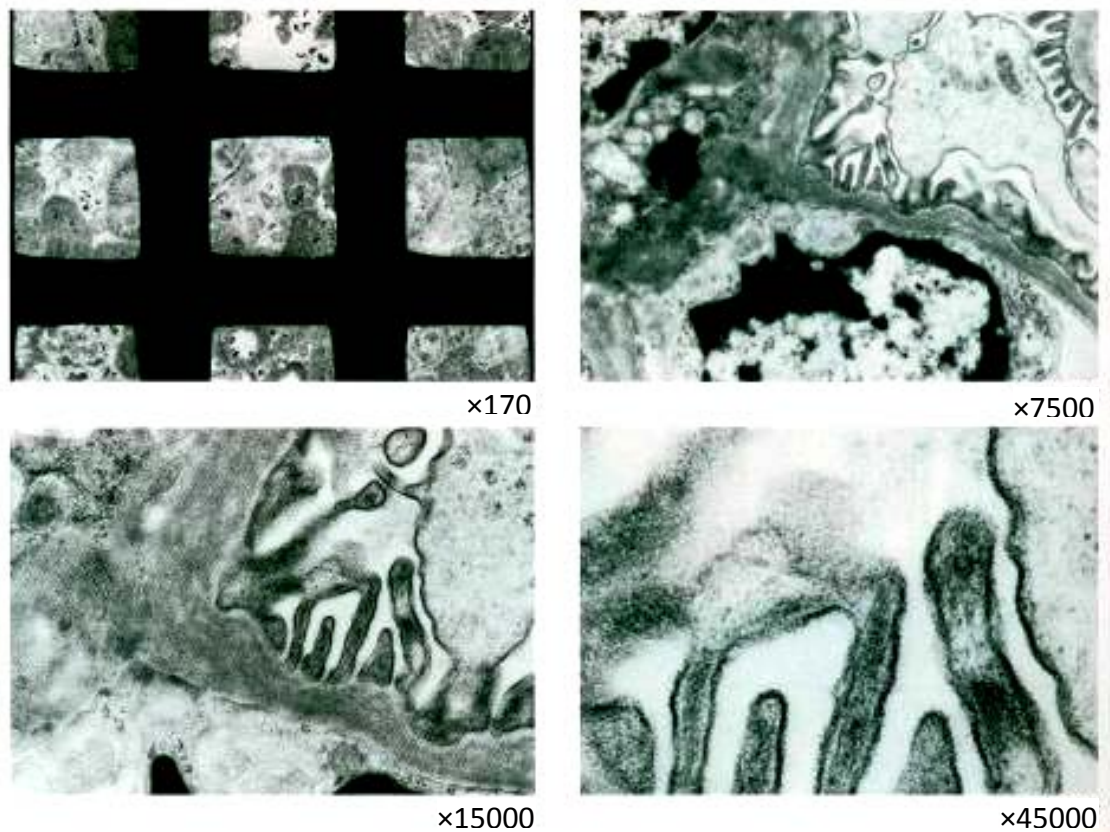


Рис. 2.12. Електронні зображення біологічної тканини, отримані при різному збільшенні [18].

На першому зображенні зі збільшенням $\times 170$ видно графітову мікросітку, на якій розташовують досліджуваний об'єкт.

Отже, внаслідок проведених досліджень запропоновано модель структури на основі елементарних форм, що утворюють активну площу біотехнічного об'єкта. Такий підхід надає можливості утворити найбільш чутливу площу взаємодії об'єктів.

При розгляді всіх цих процесів необхідно звернути увагу на різницю між плинним зносом і чинною руйнацією під дією зовнішніх сил (середовища).

Наразі взаємодія між потоком зовнішнього середовища та АО є досить відносною ситуацією. У загальному випадку це зводиться до взаємодії двох потоків визначеної щільності та потужності. Ця теза багаторазово доводиться як у класичних емпіричних залежностях, так і на реальних процесах, на яких базуються ці дослідження. Тобто у кінцевому випадку ми маємо ситуацію, коли інерційність процесів взаємодії призводить до кінцевого утворення форми. Отже, гострих кутів у межах АО не просто не має, їх просто принципово не може бути оскільки мають обмеження на міжмолекулярному рівні.

2.3. Панданна зона реальної системи координат

Вище на рис. 2.6 ми розглянули властивості лінії у реальній системі координат. Як наслідок, ми маємо можливість стверджувати, що, якщо ми маємо "пряму" у реальній системі координат, то це є не більше, ніж елюзія її прямолінійності. У реальній системі координат ми не маємо можливості визначитися з відхиленням лінії меншим за $[S]$, а отже, як наслідок, будь-які відхилення у цих межах, ми не можемо зафіксувати. Таким чином, її кривизна дорівнює нулю. Але, оскільки, кожна лінія є елементом відрахунку (розділ крапка, риска), то у реальній системі координат вона має досить сталий діаметр, який більший за $[S]$, тобто за параметр (бар'єр) існування. Отже, криву у реальному просторі можна уявляти як криволінійний циліндр діаметром від $[S]$ до D .

Таким чином, розташування кривої відносно реальної системи координат, її форма та розміри визначаються деякими сталими величини (параметрами кривої), складовими її рівняння. У випадку, якщо рівняння окрім змінних координат має параметр, який також має можливість приймати різні числові значення, то рівняння відтворює не одну, а значну кількість ліній. При цьому рівняння кожної з них утворюється з визначеного рівняння за визначеного числового значення змінного параметра. Так, наприклад, якщо ми маємо рівняння $x \cos \alpha + y \sin \alpha - r = 0$ при змінному параметрі α , то воно відображає

низку прямих різного нахилу, але всі вони проходять на відстані r від початку координат. Як наслідок, наша пряма, яка потрапляє у реальну систему координат, має у перерізі форму кола радіусу $[S]/2$. Якщо ми маємо низку кіл радіусу $[S]/2$, центри яких розташовані вздовж вісі x , то рівняння послідовності набуде вигляду:

$$(x - a)^2 + y^2 = \left(\frac{[S]}{2}\right)^2 \quad (2.44)$$

де a – визначає відстань від початку координат до центру кола. Тобто коло діаметром $[S]$ або D будемо вважати сімейством кривих. У загальному вигляді сімейство кривих, яке залежить від одного змінного параметра, може бути відображено рівнянням:

$$F(x, y, t) = 0, \quad (2.45)$$

де під символ функції F разом зі змінними координатами введено змінний параметр t .

Отже, існує огинаюча лінія дотична до всього сімейства кривих. До того ж, ця огинаюча являє собою низку точок дотику до однієї з сімейства кривих. Так, наприклад, для сімейства прямих $x \cos \alpha + y \sin \alpha - r = 0$, огинаючою слугує коло $x^2 + y^2 = r^2$, оскільки всі прямі родини є дотичні цьому колу, а кожна точка кола належить одній з сімейства кривих, тобто тій, що торкається кола у цій точці. У нашому випадку, необхідно помітити, що огинаюча сімейства кіл, може складатися з кількох кривих. Наразі огинаюча сімейства кіл за (2.44) буде мати подвійність у вигляді $y = \frac{[S]}{2}$ та $y = -\frac{[S]}{2}$.

Таким чином, з одного боку ми маємо сімейство крапок, що утворює криву у реальному просторі, а з іншого боку маємо можливість визначитися з огинаючою цієї кривої. Отже, розглянемо яким чином ми можемо отримати залежність огинаючої, якщо маємо вхідне рівняння сімейства кривих (2.45) разом з огинаючою лінією E . Якщо ми будемо давати змінному параметру t

різні числові значення, то маємо можливість отримувати окремі криві сімейства.

$$F(x, y, t_1) = 0, F(x, y, t_2) = 0 \dots F(x, y, t_i) = 0.$$

$$XY M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2) \dots M_i(x_i, y_i).$$

усі ці криві торкаються огинаючої у відповідних точках

Оскільки кожна точка огинаючої є точка дотику огинаючої до однієї з огинаємих, то можна встановити відповідність між точками огинаючої та значеннями параметра t . При безперервній зміні параметра t відповідна точка $M(x, y)$ буде рухатися і давати опис огинаючої E . Таким чином, плинні координати огинаючої є функціями змінного параметра t , тобто

$$x = x(t), \quad y = y(t). \quad (2.46)$$

Отже, якщо є можливість визначитися з функціями $x(t)$ та $y(t)$, то рівняння (2.46) перетворюються на параметрично поставлене рівняння огинаючої, що надає можливість вирішити поставлену задачу. Таким чином, якщо кожна точка огинаючої $M_i(x_i, y_i)$ належить одній з кривих сімейства $F(x, y, t_i) = 0$, то

$$F(x_i, y_i, t_i) = 0$$

або враховуючи формули (2.46)

$$F[x(t_i), y(t_i), t_i] = 0;$$

але, оскільки це вірно для будь-якого значення параметра t , то маємо можливість отримати більш загальний вигляд:

$$F[x(t), y(t), t] = 0. \quad (2.47)$$

При цьому параметр t повинен одночасно приймати однакові значення у всіх трьох аргументах рівняння (2.47). Якщо ми продиференціюємо рівняння (2.47), тобто

$$F'_x(x, y, t)X'(t) + F'_y(x, y, t)Y'(t) + F'_t(x, y, t) = 0, \quad (2.48)$$

то отримуємо одне співвідношення, якому повинні задовольняти вишукувані функції $x(t)$ та $y(t)$, тобто координати будь-якої точки огинаючої. Для отримання другого аналогічного співвідношення скористаємося тим, що кожна

точка огинаючої $M_i(x_i, y_i)$ є точка дотику огинаючої з відповідною огинаємою $F(x, y, t_i)$, а отже, обидві криві мають загальну дотичну у цій точці. При цьому кутовий коефіцієнт до огинаємої $F(x, y, t_i)$ у точці $M_i(x_i, y_i)$ визначається за формулою

$$k = -\frac{F'_x(x_i, y_i, t_i)}{F'_y(x_i, y_i, t_i)}.$$

Кутовий коефіцієнт до огинаючої (2.46) у точці $M_i(x_i, y_i)$ визначається за виразом

$$k_1 = \frac{y'(t_i)}{x'(t_i)}.$$

Оскільки за умовою обидві дотичні однакові, то

$$-\frac{F'_x(x_i, y_i, t_i)}{F'_y(x_i, y_i, t_i)} = \frac{y'(t_i)}{x'(t_i)}$$

звідкіля отримуємо

$$F'_x(x_i, y_i, t_i)X'(t_i) + F'_y(x_i, y_i, t_i)Y'(t_i) = 0, \quad (2.49)$$

Враховуючи, що (2.49) дає опис відносно будь-якої точки огинаючої, то маємо можливість такого запису для будь-якого значення параметру t , тобто

$$F'_x(x, y, t)X'(t) + F'_y(x, y, t)Y'(t) = 0. \quad (2.50)$$

Співставляючи (2.50) та (2.48) отримуємо

$$F'_t(x, y, t) = 0. \quad (2.51)$$

Тим не менш не всяка точка огинаємої належить огинаючій, а тому рівняння (2.51) додає ще одну умову, яка дозволяє виокремити ті точки огинаємих, які одночасно належать огинаючій. Отже, координати точок огинаючої повинні задовольняти системі рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, t) &= 0 \\ F'_t(x, y, t) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.52)$$

Вирішуючи, рівняння (2.52) відносно x та y ми отримуємо параметричні рівняння огинаючої:

$$\left. \begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= \varphi(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

Якщо виключити параметр t з (2.53) у звичайний спосіб, отримуємо рівняння огинаючої у прямокутних координатах

$$\varphi(x, y) = 0. \quad (2.54)$$

Отже, оскільки ми розглянули підґрунтя математичного опису прямих та кривих ліній у просторі, то можемо провести дослідження реальних об'єктів, до яких вони входять як складові. Для початку дослідимо координатну систему як найбільш простий випадок (рис. 2.13).

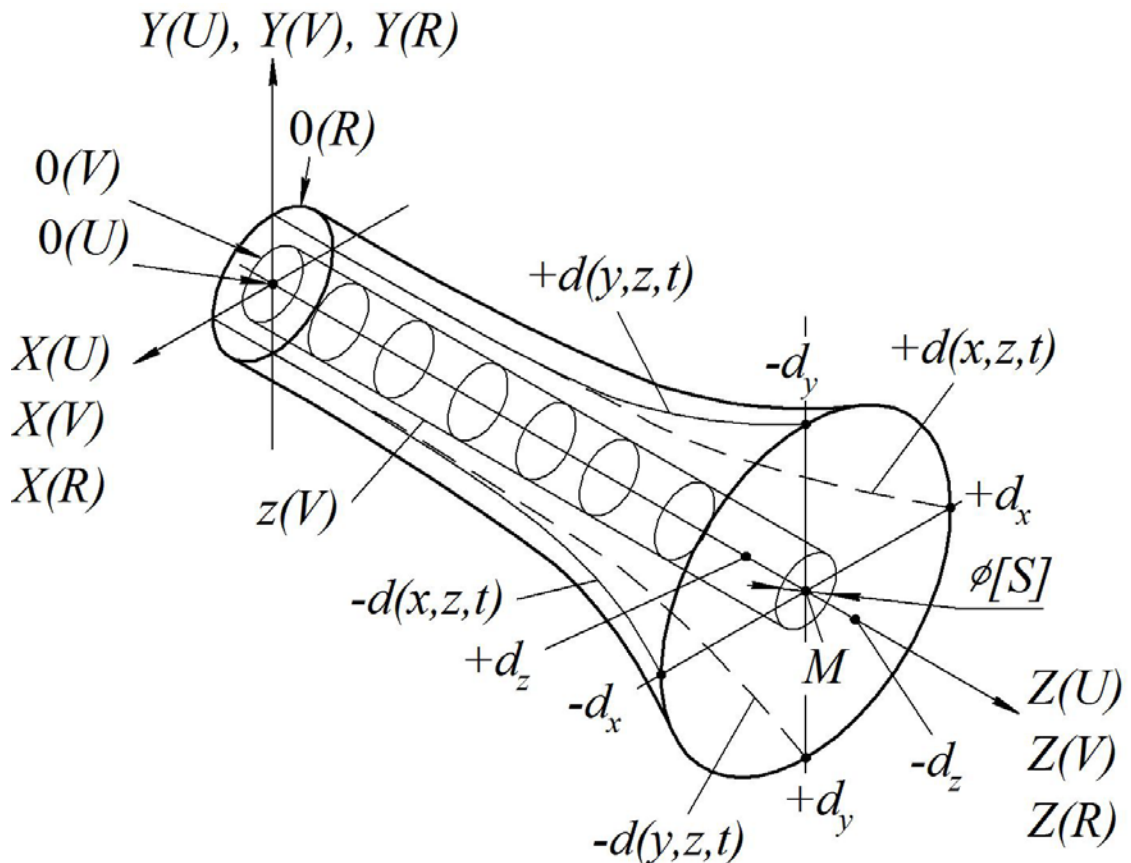


Рис. 2.13. Загальне уявлення пристайності реальної системи координат, відлікової системи координат та уявної.

Оскільки ми маємо три координати з однаковими параметрами, то достатньо дослідити одну з координат. Після чого розглядати їх загальний вплив одної на одну. Таким чином ми маємо нуль координатної системи з трьох

пристайних координатних систем, а саме уявної, відлікової та реальної. Перший нуль $O(U)$ уявної системи координат знаходиться на перехресті трьох уявних координатних вісей $X(U)$, $Y(U)$, $Z(U)$ і є опорною точкою для відлікової та реальної. Цей уявний нуль не має розмірів, оскільки є пересіченням трьох осей, які не мають діаметру, а мають лише довжину. Другий нуль $O(V)$ є нулем координатної системи відліку і являє собою крапку (сферу) діаметром $[S]$. Цей розмір визначається діаметром вісей відліку, тобто $[S]$. При цьому вісь являє собою циліндр, творчою якого є огинаюча $X(V)$, $Y(V)$, $Z(V)$ відповідно до кожної вісі X , Y , Z , яка спирається на коло діаметром $[S]$. Третій нуль $O(R)$ реальної системи координат утворюється вектором дуальності \mathbf{D} навколо перших двох нулів відліку.

Отже, якщо ми оберемо якусь довільну точку M на вісі уявної системи координат $Z(U)$, то маємо можливість однозначно визначити її координати, тобто:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = z(t) \end{array} \right\}.$$

Для системи координат відліку ці координати визначаються як

$$\left. \begin{array}{l} x = [S] \\ y = [S] \\ z = z(t + [S]) \end{array} \right\},$$

Тобто існує невизначеність у розмірі $[S]$.

У реальній системі координат дуальність поглинає величину $[S]$, якою можна нехтувати, тобто отримуємо:

$$\begin{array}{l} x = \mathbf{D}_x \\ y = \mathbf{D}_y \\ z = z(t + \mathbf{D}_z) \end{array}.$$

У загальному вигляді дуальність відносно уявних координат буде складною функцією, якщо можна записати як векторну суму у наступному вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}_x &= \mathbf{d}_x + (-\mathbf{d}_x) \\ \mathbf{D}_y &= \mathbf{d}_y + (-\mathbf{d}_y) \\ \mathbf{D}_z &= \mathbf{d}_z + (-\mathbf{d}_z) \end{aligned} \right\} \text{ при } \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (2.55)$$

У загальному випадку складові дуальності ніколи не можуть бути рівними одна одній, тобто

$$\mathbf{d}_x \neq -\mathbf{d}_x \neq \mathbf{d}_y \neq -\mathbf{d}_y \neq \mathbf{d}_z \neq -\mathbf{d}_z,$$

або

$$\mathbf{D}_x \neq \mathbf{D}_y \neq \mathbf{D}_z$$

Їх рівність може розглядатися як теоретична межа у вигляді кулі, тобто як межа панданної зони дуальності. У широкому загалі така ситуація призводить до того, що уявні координати уявної точки розташовані у межах криволінійного еліпсоїда реальних координат. У ідеальному випадку це центральносиметричний еліпсоїд з піввісями дуальності

$$\frac{x^2}{D_x^2} + \frac{y^2}{D_y^2} + \frac{z^2}{D_z^2} = 1. \quad (2.56)$$

Для початку реальних координат $O(R)$ ми отримуємо наступну формулу:

$$[\mathbf{S}]^2 \left(\frac{1}{D_{x^2}} + \frac{1}{D_{y^2}} + \frac{1}{D_{z^2}} \right) = 1.$$

Для початку координат відліку $O(V)$ будемо мати наступну залежність:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{[\mathbf{S}]^2}{4}.$$

тобто це є сфера.

Отже, у загальному вигляді дуальність необхідно сприймати як просторовий вектор:

$$\mathbf{D} = D_x \mathbf{i} + D_y \mathbf{j} + D_z \mathbf{k},$$

модуль якого

$$|\mathbf{D}| = \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2}.$$

У широкому загалі дуальність є результат віддаленості від початку координатної системи та взаємодії АС із зовнішнім середовищем [19]. Достатньо проаналізувати класичні випадки деформації АС під дією зовнішніх сил, які мають безпосередній зв'язок з явищем дуальності.

Так, наприклад, прямокутна балка у перерізі, яка має консольний горизонтальний затиск отримує наступний прогин залежно від місця затиску (сила затиску Q має координату l)

$$y = \frac{Qx^2}{2EJ} \left(\frac{x}{3} - l \right).$$

При рівномірному розподілі сили q вздовж балки маємо

$$y = \frac{qx^2}{12E_{\text{ю}}J} \left(2lx - 3l^2 - \frac{x^2}{2} \right)$$

При лінійно зростаючому навантаженні q , вздовж консольно закріпленої балки

$$y = \frac{qx^2}{24E_{\text{ю}}J} \left(60lx - 120l^2 - \frac{x^3}{l} \right)$$

де l – довжина балки, $E_{\text{ю}}$ – модуль Юнга, J – статичний момент поперечного перерізу.

Для того, щоб дослідити загальний характер деформації, необхідно провести низку спрощень.

По-перше, приймаємо межі зміни аргументу, а саме $0 \leq x \leq l$. Це дозволяє зробити наступний крок до спрощення, а саме $0 \leq x \leq l$. Таким чином, членами рівняння у дужках, які мають складові x^2 та x^3 можна знехтувати. У загальному вигляді рівняння прогину можна записати у спрощеному вигляді, наступним чином:

$$y = k_0 x^2 (k_1 x + b) + [\mathbf{S}] \quad (2.57)$$

де k_0 – коефіцієнт залежний від модуля Юнга $E_{ю}$ статичного моменту J та діючої сили q та Q , k_1 – коефіцієнт залежний від довжини досліджуваної балки. Отже, форма деформації є схожою на параболу. У нашому випадку це її половина. Як наслідок, звертаючись до рис.1 та попереднього розгляду такого поняття як огинаюча, маємо можливість утворення первинної моделі дуальності на засадах виразів (2.52, 2.53, 2.54), (2.55), (2.56) та (2.57). При цьому необхідно зауважити, що всі рушійні (координатні) системи налаштовуються таким чином, що дуальність у межах початку координат має мінімальну величину. Радіус вектор дуальності при цьому своїм кінцем описує коло, а за трьома координатами сферу. Таким чином, еліпсоїд у межах координатної системи вироджується у сферу. Закон цього виродження спирається на функцію огинаючої, тобто (2.57). Як наслідок, цей вираз (2.57) дає максимальні значення функції дуальності у просторі координатної системи. Таким чином залежність величини дуальності від координати отримує наступний вигляд (координата x):

$$D(x) = D_0 x^2 (k_1 x + b) + [S]$$

де D_0 – дуальність координат x .

Якщо зважити на те, що координата x змінюється у межах від нуля до D_0 , тобто

$$\lim_{x \rightarrow [S]} D(x) = D_0,$$

то отримуємо наступне рівняння відносно дуальності

$$D_0 = D_0 [S]^2 (k_1 [S] + b) + [S],$$

звідкіля

$$D_0 = \frac{[S]}{1 - [S]^2 (k_1 [S] + b)}.$$

Тобто початкова дуальність у нулі координат є повністю залежна від конструктивних особливостей системи відліку.

Таким чином, у підсумку до вищеобумовленого ми маємо можливість користуватися уявною моделлю похибок реальних координат. Основний висновок щодо математичного дослідження моделі є те, що характер

спотворень має параболічний характер. Дуальність розповсюджується у просторі за практично лінійним законом від одного джерела до іншого, створюючи еквівалентні поверхні. В силу свого векторного характеру дуальність у кожній крапці простору визначається як векторна сума низки дуальностей.

2.4. Поняття про активну частину поверхні абстрактної сутності та її панданну зону

Як було попередньо зауважено, дотична поверхня моделює ідеалізований випадок в уявних координатах, коли все відоме. Тобто існує математичний опис дотичної площини та реальної поверхні в уявному вигляді, тобто уявна реальність $U(R)$, а отже, як, наслідок, точні координати дотику у точці $M(x_0, y_0, z_0)$. На відміну від уявності реальна утворює крапку дотику $M(x_0 + [S], y_0 + [S], z_0 + [S])$ з діаметром $[S]$ та з такою ж невизначеністю координати. До того ж, у межах дуальності D таких крапок може бути велика кількість з невизначеними координатами. Окрім того, не вся реальна поверхня торкається уявної, а лише обраними крапками, а отже, з погляду визначення координати працює вкрай неефективно.

Таким чином, ми отримуємо подвійну проблему: з одного боку необхідно визначитися з координатою торкання, а з іншого – з кількісно можливих крапок торкання. За першого варіанта ми маємо одну крапку торкання, що є характерно для технічних АС, а за другим – велику кількість, що є характерним стосовно біологічних об'єктів. Для того, щоб вирішити цю задачу необхідно визначитися з поверхнею, яка приймає участь у визначенні координат поверхні. Для цього визначимося з площею цього узагальнюючого елемента поверхні, який розподілено на елементарні площинки (рис. 2.14). При цьому будемо вважати, що кожна площинка має розмір $[S]^2$ у перерізі і визначає розмір відчутника торкання.

Розглянемо загальний випадок. Нехай рівняння реальної поверхні Σ' буде $z = F(x, y)$ і необхідно визначитися зі спотвореннями, які існують у межах цієї

поверхні. Для цього позначимо ортогональну проекцію реальної поверхні Σ' на уявну площину XOY через Σ . Проведемо площини паралельні YOZ та XOZ на відстанях рівних ΔX та ΔY . Ці площини будуть утворювати низку утнутих прямокутних призм (наприклад, MQ) обмежених зверху частинами (наприклад, MN) реальної поверхні Σ' проєкції яких на площину XOY є прямокутники з площею ΔX та ΔY (наприклад, PQ) (рис. 2.14,б). Розглянемо дотичну площину до поверхні Σ' у точці $M(x, y, z)$. Є вочевидь, що прямокутник PQ буде проєкцією на площину XOY частини дотичної площини (MR), витинаємої призмою MQ . Якщо ми позначаємо через γ – кут, який утворюється нормаллю реальної поверхні n та віссю OZ , то він буде дорівнювати куту, який утворюється дотичною площиною у точці $M(x, y, z)$ з площиною XOY , отже

$$S(PQ) = S(MR)\cos\gamma$$

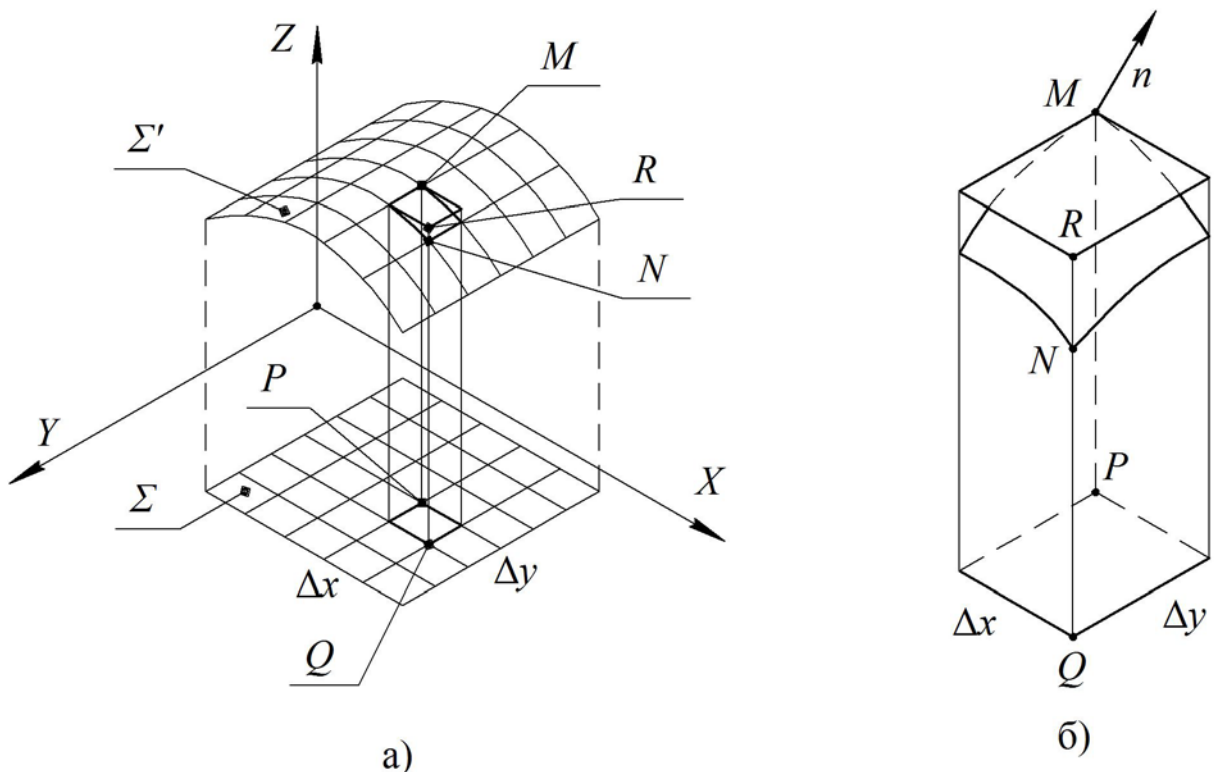


Рис. 2.14. Визначення спотворення елементарної площі при переході від уявної площини до реальної поверхні, де а) принцип розбиття на окремі елементи, б) окремий елемент переходу від уявної поверхні до реальної площини.

або $\Delta y \Delta x = S(MR) \cos \gamma$, де

$$\cos \gamma = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}},$$

Звідкіля

$$S(MR) = \frac{1}{\cos \gamma} \Delta x \Delta y = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Delta x \Delta y \quad (2.58)$$

Отже, якщо ми приймаємо (2.58) за елемент поверхні, то реальна площа може бути позначена наступною формулою

$$\lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum \sum \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Delta x \Delta y$$

або у кінцевому випадку

$$A_{xy} = \iint_S \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx dy. \quad (2.59)$$

До того ж, межі інтегрування залежні від проекції на площину XOY тої частини поверхні, площа якої обчислюється. Отже, межі інтегрування нам дає крива або криві, які обмежують ділянку Σ у площині XOY . Вище визначена теза виправдовує себе за умови, що у кожній точці реальної частини Σ поверхні $z = f(x, y)$ є визначена дотична площина і ці дотичні площини перетворюючись безперервно одна в одну не приймають розташування перпендикулярного до площини XOY .

Аналітично ці умови зводяться до існування безперервних часткових похідних $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ від функцій $z = f(x, y)$. У супротивному випадку підінтегральна функція у отриманій формулі не буде безперервною функцією змінних x та y .

Якщо мова йде про проекцію на площину XOZ , то вираз (2.59) приймає вигляд

$$A_{xz} = \iint_S \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx dz, \quad (2.60)$$

а для площини YOZ

$$A_{yz} = \iint_S \left[1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dy dz. \quad (2.61)$$

Наразі маємо можливість звернутися до третьої властивості афінних перетворень, тобто маємо можливість створити наступну залежність

$$\mu_x \mu_y \sin \psi = \frac{S(MR)}{S(PQ)} = \cos \gamma \quad \text{або} \quad \mu_x \mu_y \sin \psi = \frac{S(MR)}{S(PQ)} = \frac{\cos \gamma}{\sin \psi},$$

де ψ – є кут спотворення геометрії прямокутника $\Delta x \Delta y$ визначається як

$$\lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \Delta x \Delta y = [S]^2.$$

Таких площинок у межах поверхні може бути безліч, але спрацювати на торкання мають можливість лише ті, які розташовані у межах еліпсоїда

$$\text{дуальності, тобто } \frac{x^2}{D_x^2} + \frac{y^2}{D_y^2} + \frac{z^2}{D_z^2} = 1.$$

Як наслідок вирази (2.59), (2.60), (2.61) отримують наступний вигляд, який визначає ефективну (активну) поверхню торкання:

$$\left. \begin{aligned} A_{xy} &= \iint_{\mathbf{D}_{xy}} \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx dy \\ A_{xz} &= \iint_{\mathbf{D}_{xz}} \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx dz \\ A_{yz} &= \iint_{\mathbf{D}_{yz}} \left[1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dy dz \end{aligned} \right\},$$

де \mathbf{D}_{xy} , \mathbf{D}_{xz} , \mathbf{D}_{yz} – площі проекцій на відповідні координатні площини.

2.4.1. Геометричні особливості активної поверхні торкання

Розглянемо, яким чином відбувається процес реєстрації координати торкання реальної поверхні до уявної при обмеженні еліпсом дуальності (рис. 2.15).

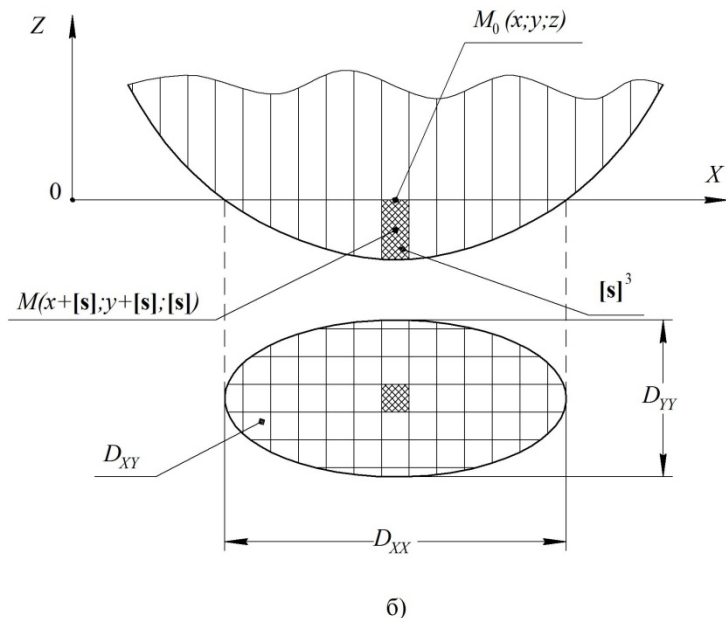
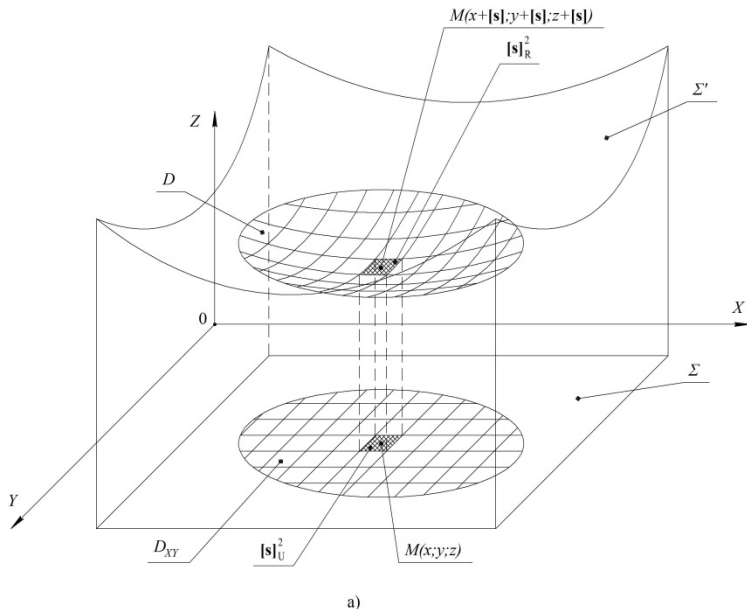


Рис. 2.15. Визначення ефективної (активної) площі торкання через еліпсоїд дуальності: а) процес обмеження поверхні еліпсом дуальності у загальному випадку б) похибка визначення координати за технічним способом торкання.

При цьому розглядаємо спочатку технічний варіант як базовий, оскільки він є найбільш спрощений. Наразі мається на увазі, що момент торкання та координату визначає один відчутник (рис.2.15). Наразі його подовженість неважлива, оскільки це конструкційні особливості. Головне, що площа його перерізу повинна дорівнювати $[S]^2$. При цьому приймаємо для зручності розгляду, що реальна поверхня Σ' прогинається убік уявної площини Σ . Окрім того вважаємо, що реальна поверхня Σ' рухається убік уявної Σ з якоюсь визначеною швидкістю, яку визначає рушійна вимірювальна система. Приймаємо тезу, що реальна поверхня Σ' є частиною тривісного еліпсоїда обертання. У такому випадку ми отримуємо ділянку D на реальній поверхні, де може відбуватися торкання двох поверхонь. При такому русі у силу властивості реальної поверхні крапка $M(x + [S], y + [S], z + [S])$ «поглинає» точку $M_0(x, y, z)$. Реєстрація координати відбудеться у тому випадку, коли реальна поверхня просунеться углиб уявної на величину $[S]$. У такому випадку з ідеальних умов на уявній поверхні відіб'ється еліпс (рис.2.15,б) з піввісями D_{xx} та D_{yy} , тобто

$$\frac{x^2}{D_{xx}^2} + \frac{y^2}{D_{yy}^2} = 1,$$

де піввісі D_{xx} та D_{yy} знаходяться відносно геометрії поверхні Σ' , тобто

$$D_{xx} = D_x \sqrt{1 - \frac{(z - [S])^2}{D_2^2}}; D_{yy} = D_y \sqrt{1 - \frac{(z - [S])^2}{D_2^2}}.$$

При цьому площа D_{xy} невизначеності координат на уявній поверхні Σ буде

$$S(D_{xy}) = \frac{1}{4} \pi D_{xx} D_{yy}.$$

Тим не менш, активна частина на цій площі складатиме $[S]^2$.

Розглянута ситуація з одним відчутником є класичною стосовно техніки, де в межах площі дуальності може бути розташований лише один відчутник. Як правило, це зв'язано з самою величиною відчутника, де чутлива частина розташована в середині корпусу, який має значно більші розміри. У такому випадку розташування поряд ще одного є технічне рішення нерациональне,

оскільки між відчутниками повинна бути відстань не менше за довжину риски, тобто $3 \div 5[S]$. За таких умов два сусідніх відчутника приблизно вирішують задачу визначення лінії у просторі. При цьому використовується методика задання лінії за двома точками у системі вимірювальних координат та крапок при використанні реальної системи координат.

У закінченні теми стосовно технічної активної площі необхідно зауважити, що відчутнику у техніці надаються спеціальні форми. Як правило, це мацальні індентори, які мають кінцівку торкання у вигляді сфери. У такому разі активна поверхня буде мати вигляд кола з площею

$$S(\mathbf{D}_{xy}) = \pi \left(\frac{\mathbf{D}_{xx} \vee \mathbf{D}_{yy}}{2} \right)^2.$$

Тим не менш, це спрацьовує лише для уявного статичного випадку. У реальності на інденторі – це коло, а на поверхні торкання еліпс або овал Кассіні, оскільки існує відносний рух поверхонь. У супротивному випадку – це порушення фундаментальних законів фізики (закон Гейзенберга).

На відміну від технічного способу вирішення задачі біологічні об'єкти намагаються розташувати відчутники за оптимальною необхідністю. Сутність подібної оптимальності полягає у тому, що розташування відчутників у межах активної поверхні нерівномірне і підкорюється відповідним законам. Здебільшого це призводить до зростання щільності відчутників у одній зоні і зменшенню у іншій. Згідно цієї концепції перший (центральний) відчутник знаходиться у зміщеному центрі еліпса (рис.2.16). При цьому щільність розташування змінюється від одиниці до $[S]$ по краю еліпса. Спираючись на залежність для піввісей еліпса, можна вважати, що розподіл відбувається за наступним принципом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{e^{-|x|}} \frac{\mathbf{D}_{yy}}{\mathbf{D}_{xx}} \sqrt{\mathbf{D}_{xx}^2 - x^2} \\ \sigma_y &= \frac{1}{e^{-|y|}} \frac{\mathbf{D}_{xx}}{\mathbf{D}_{yy}} \sqrt{\mathbf{D}_{yy}^2 - y^2} \end{aligned} \right\}$$

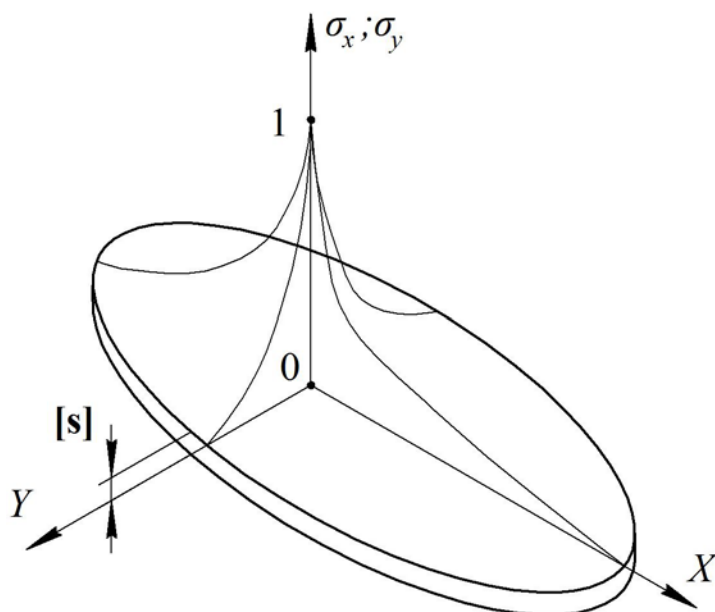


Рис.2.16. Теоретична щільність розташування відчутників у межах активної площини

Отже, є можливість приблизного визначення кількості відчутників, які розташовані у межах активної поверхні. Розташовувати відчутники щільно один біля одного немає сенсу, оскільки кількість можливої інформації буде нижче за варіант з рознесеними у просторі. У [4] було показано, що рознесені відчутники мають більш якісні показники. Як приклад цього правила можна навести низку ситуацій з рознесеними у просторі відчутниками на біологічних об'єктах. Наразі це людська рука, яка може без допомоги зору визначитися з формою та розмірами об'єкту. Якщо використовувати обидві руки, то точність значно зростає. При цьому слід зауважити, що мова йде про звичайні відчутники, які реагують на торкання, але завдяки координації руху пальців та рук взагалі ми маємо уявлення про всі об'єкти, які знаходяться у межах панданної зони людини. Ще більше можливостей притаманні людському оку як довершеному оптичному відчутнику. Тим не менш це ще не вершина досконалості. Так деякі дослідження доводять, що у родини котячих, які мають найбільш досконале око серед ссавців, теж саме око реагує на джерела звуку і безпомилково супроводжують об'єкт у повній темряві, коли оптична система

не працює. До того ж, якщо вважати пучку пальця за активну площу, то між ними існує відстань у розмірі приблизно п'яти дуальностей (діаметр пучки). Лише між великим та вказівним, вона має відстань від десяти до п'ятнадцяти діаметрів. Але якщо уважно придивитися до цих двох пальців, то серед усіх функцій, які випрацьовує людська рука, саме ці два пальці виконують функцію вимірювання приблизних розмірів об'єктів (п'ядь). Взагалі як міра довершеності системи відчутників може використовуватися відстань між очима. Як правило для біологічних об'єктів це відстань у $2[S]$ (людина) до $30\div 40[S]$ (кит, кашалот). Тобто відчутники у біологічних об'єктах не розташовуються ближче за $2[S]$ один від одного. Як наслідок, такого співвідношення для кожного відчутника необхідна площа розташування $(3[S]^2)$. Ця ж площа є мірою дуальності відчутника. Таким чином, на площі D' можна розташувати N відчутників:

$$N = \frac{S(D')}{3([S])^2}.$$

Звісно кількість чутливих елементів, обрахованих за цим виразом, дуже велика. Тому основна маса відчутників розташовується згідно діаграми динамічного напрямку визначення моменту торкання (рис. 2.16).

До попередньо сказаного необхідно зробити одне досить вагоме зауваження. При використанні одного відчутника система втрачає одну досить серйозну властивість, а саме стереоскопічність, яка надає можливість оцінити відстань до об'єкту. Тому у біологічних об'єктах ми маємо не тільки два ока, але і два вуха, що надає можливість додаткового стеження за навколишнім середовищем та оцінки його властивостей.

На останок розглянемо ситуацію зонної точності, яка характерна як для технічних так і для біологічних об'єктів.

Ситуація, що була розглянута (рис. 2.17), є спрощена стосовно поодинокого торкання одного чи кількох відчутників, які знаходяться у зв'язаному стані і рухаються за прямолінійною траєкторією. Тим не менш ця

ситуація трапляється вкрай рідко і не може бути прийнятою як загальна теза для користування. Отже, якщо ми приймемо за основу значну відстань між уявною та реальною поверхнями, то ми повинні враховувати властивості криволінійного реального простору. При цьому реальний рух вудчутника необхідно зв'язати з його уявною траєкторією, тобто реалізувати функцію уявної реальності $R(U)$. Невизначеність точності виконання координатного руху є повністю залежне від проекції уявної системи координат на реальну. Як наслідок, ми отримуємо просторову похибку, яка має об'ємний характер. Якщо ми виділимо якийсь об'єм, то в ньому будуть існувати певні похибки. Отримати більш достеменне уявлення про них можливо якщо виконати низку паралельних та ортогональних перерізів. Звісно, що найпростіше це можна реалізувати на засадах звичайного куба. Якщо ми приймемо за тезу, що цей куб є замкнений об'єм з геометрією зв'язаною з реальною системою координат, то є вочевидь, що його просторове розташування та геометрія будуть характерними до визначеного об'єму реального простору. Тобто це є частка реального об'єму, де $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ у межах якого виконуються усі похибки реальної системи координат, до того ж вона значно більше за об'єм $[S]^3$. Уявимо, що силу якихось чинників цей об'єм для нас є досить важливим, наприклад, для виконання якихось технологічних операцій. Як наслідок, ми пристосовані до системи похибок у цьому об'ємі, тобто пройшли якийсь курс самонавчання, як наслідок, звикання до простору. Таке звикання призводить до деградації, оскільки БО не помічає явних похибок, тобто «забуває» про їх існування. Для того, щоб цього не відбувалося БО або ТО повинні час від часу користуватися опорними точками. Такі опорні точки повинні бути розташовані на стінках куба, які мають більш-менш визначені координати у загальній системі, тобто свою особисту (відносну). Для верстатів з ЧПК це АНБ різного типу. Стосовно БО (людина) можна навести широко всім відомий медичний прилад. Як відомо, панданна зона рук людини – це дві півсфери радіусу R (довжина руки) центри яких знаходяться на відстані $R \cdot \sqrt{2}/2$. У межах лиця – це приблизно сфера

радіусом у півметра, де координація руху особливо важлива. Типовий контроль нервової системи людини полягає у тому, що із закритими очима необхідно спочатку витягнути горизонтально руку (праву або ліву), а потім торкнутися кінчика свого носа. Наразі ваш ніс виконує ту ж саму функцію, що і АНБ. Якщо попали – добре, якщо ні – погано. Цей простий експеримент надає можливість контролювати реалізацію вашої уявної функції, тобто знов таки уявної реальності $R(U)$. Можна звернути увагу на той факт, що людська рука від плеча до кінцівки вказівного пальця має шість фаланг, які поступово зменшуються у бік пальців рук. Довжина кожної з фаланг є основою до створення окремої зони точності у межах людського тіла. Ногам теж притаманні ці властивості. Для того, щоб не деградувати, людина повинна постійно використовувати руки при торканні якихось об'єктів, оскільки ці об'єкти слугують їм калібром визначеного простору. Окрім того, для біооб'єктів – це не є куб, а тим більше ідеальний, як правило, це криволінійні об'єми у яких рухаються кінцівки.

Якщо ми візьмемо якусь частку робочого простору верстата, то у цьому об'ємі ми можемо вважати, що спотворення є відносно статичними. При цьому ми маємо можливість скористатися приведеною до реальної $S(R)$ середньостатистичну уявну площину $S(U)$ (рис. 2.17). У такому випадку реальна лінія $L(R)$ має свою проекцію на уявну площину у вигляді $L(U)$. Якщо $L(U)$ є пристайна до однієї зі сторін прямокутника $S(U)$, а її початок на кінець, співпадають з початком та кінцем сторони, то ми маємо можливість вважати $L(U)$ за калібр розмірів на цій площині.

Тепер уявимо, що з шести уявних поверхонь $S(U)$ ми утворили куб. Цей куб буде ідеальною геометричною фігурою, яка може слугувати калібром похибки у просторі, оскільки його пруги та грані у просторі будуть еталонами розміру та геометрії. Якщо ми маємо такий куб і вносимо його у реальний простір, то це все одно, що дати приріст функції похибки $P(R)$ величини Δx , Δy та Δz по відповідним координатам.

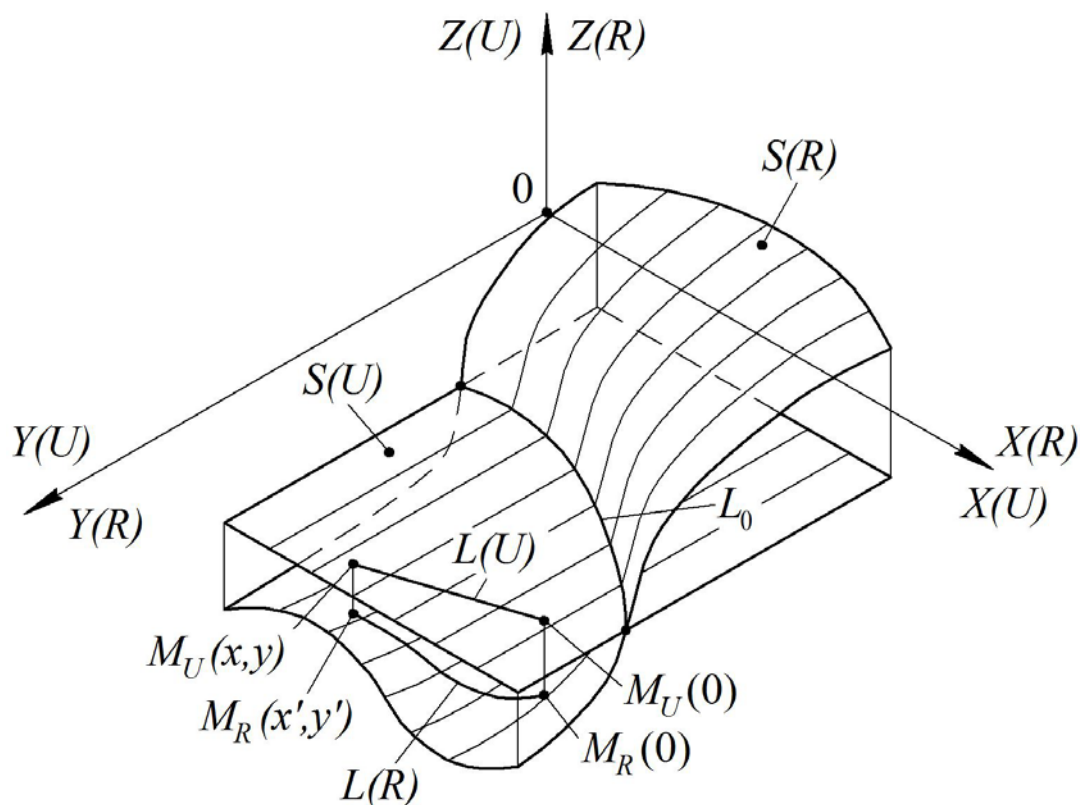


Рис.2.17. Уявна площина та реальна поверхня у пристайних координатах

Такий приріст функції дає можливість отримати загальний вектор похибки у межах об'єму куба, тобто отримати похідну у вигляді:

$$P(R)' = \frac{\partial P(R)}{\partial x} i + \frac{\partial P(R)}{\partial y} j + \frac{\partial P(R)}{\partial z} k = \text{grad}P(R). \quad (2.62)$$

Ця величина (2.62) має назву градієнта. Основною властивістю градієнта є те, що він вказує на зону мінімальної похибки у технологічному просторі, де б не знаходився досліджуваний об'єм.

Перелік посилань до розділу 2

1. Тимчик Г.С., Скицюк В.І., Клочко Т.Р. Теорія біотехнічних об'єктів. Том 1. Узагальнені властивості біотехнічного об'єкта : монографія Київ : НТУУ"КПІ", ВПК "Політехніка", 2016. 274 с., іл.
2. Скицюк В.І. Елементарна частка похибки // Вісник НТУУ «КПІ». Серія машинобудування. 2016. Вип. 76. С. 121-125.
3. Фізичні засади технології ТОНТОР: монографія / В.І. Скицюк, Г.С. Тимчик, М.А. Вайнтрауб, Т.Р. Клочко. – Київ : НТУУ «КПІ», 2010. – 352 с.
4. Тимчик Г.С., Скицюк В.І., Вайнтрауб М.А., Клочко Т.Р. Відчутники контрольно-вимірювальних систем : монографія. Київ : НТУУ «КПІ», 2008. – 240 с., іл. – Бібліогр.: с. 232–239.
5. T. Y. Hwang and C. Guo, “Angular effects of nanostructure-covered femtosecond laser induced periodic surface structures on metals,” J. Appl. Phys., 108, 073523-1–073523-4 (2010).
6. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. Москва : Наука. 1968. 940 с..
7. Кузмичев В.Е. Законы и формулы физики. Київ: Наук. думка, 1989. 864 с.
8. Richard Feynman. The character of physical law, A series of lectures recorded by the BBC at Cornell University USA, Cox and Wyman LTD London, (1965).
9. Павловський М.А. Теоретична механіка: підручник. Київ: Техніка, 2002. 512 с.
10. Каврайский В.В. Избранные труды. Т. 2. Математическая картография. Вып. 1. Общая теория картографических проекций. – Л. : Изд. Управл. начальн. Гидрографич. службы ВМФ, 1958. –272 с.
11. Granino A. Korn, Theresa M. Korn. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review (Dover Civil and Mechanical Engineering). 2 Revised Edition, (2000), 1152.
12. Скицюк, В.І. Панданна зона мікро- та макроповерхні технологічних об'єктів. Частина 2 // Вісник НТУУ «КПІ». Серія приладобудування. 2011. Вип. 42. С.85-91.

13. Бермант А. Ф. Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа для вузов. Москва: Высш. школа.. 1969. 736 с.
14. Крагельский И. В. Трение и износ. 2-е изд., перераб. и доп. Москва : Машиностроение, 1968. 480 с.
15. Польцер Г., Майсснер Ф. Основы трения и изнашивания. – М. : Машиностроение, 1984. – 264 с.
16. Режим доступа: <http://www.rusnor.org/pubs/articles/9061.htm> [Электронный ресурс].
17. Методи і засоби мікроскопії: моногр. / В.С. Антонюк, Г.С.Тимчик, Ю.Ю.Бондаренко, П.В. Петльований, С.О. Білоконь М.О. Бондаренко. – К.: НТУУ «КПІ», 2013 – 336 с.
18. Мікроскопія в нанотехнологіях: монографія / В.С. Антонюк, Г.С.Тимчик, О.В. Верцанова, Ю.Ю.Бондаренко, С.О. Білоконь М.О. Бондаренко. – К.: НТУУ «КПІ», 2014 – 260 с.
19. Скицюк В.І., Ключко Т.Р. Физика технологии ТОНТОР: монография. Саарбрюкен (Германия): ИД LAP Lambert Academic Publishing, 2015. 332 с.

РОЗДІЛ 3

ПАНДАННА ЗОНА БІОЛОГІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

На відміну від звичайного абстрактного об'єкту не біологічного походження біологічні об'єкти (БО) мають низку особливостей стосовно свого руху в просторі і, як наслідок, особливостей панданної зони. Рух біологічного об'єкту в просторі є однією з основ його існування. Така необхідність руху виникає за потреби пошуку засобів його розвитку в часі та просторі.

3.1. Особливості визначення системи координат просторово-часового руху об'єкта

Здебільшого звичайний об'єкт рухається за заданою траєкторією, і цей рух є цілком передбачуваним, якщо не зустрічає перешкод, які є наслідком перетину просторово-часових координат панданних зон. Ці процеси супроводжуються руйнаціями об'єктів, що контактують між собою. Подібні контакти відбуваються незалежно від властивостей АО, вони є залежними від ступеню перетинання панданних зон, коли співпадають їх характеристики руху. Для випадку руху БО, то цей рух має досить специфічні різновиди, хоча і може бути розподіленим на окремі елементарні дискретні елементи. Як і у звичайних АО, панданні зони БО можуть перетинатися, але зазвичай за заздалегідь прорахованою траєкторією. До того ж, якщо за такого зіткнення гинуть обидві АО, то з двох БО гине зазвичай один, наприклад, хижий птах переймає птаха, меншого за розмірами та іншого за поведінкою. Тому умовно рух БО у часі та просторі можна розподілити на два основних види.

По-перше, це нарощування маси у процесі розвитку, що являє собою типову позитивну (побудовчу) технологію. Водночас, існує постійний диференціал маси dm/dt , який призводить до геометричних змін БО. Як наслідок, існує зміна подовженості та низка інших динамічних параметрів. Всі

ці процеси супроводжуються поглинанням та переробкою біологічно активних речовин, з яких виокремлюється частина енергетично корисних речовин, котрі призначені для побудови БО.

По-друге, це наявність кінцівок, які надають можливість активного видобутку корисних речовин. Наявність кінцівок пояснюється тим, що це є необхідним елементом переробки корисних речовин, до того ж цей елемент є первинним. Окрім того, кінцівки є необхідним елементом при побудові навколишнього середовища (життєвого простору) та захисту від можливих агресивних дій сусідніх БО, тобто кінцівки як такі є самою рухливою частиною будь-якого біологічного об'єкта.

Упродовж свого існування БО розвинули велику кількість варіантів кінцівок за різним принципом дії. Зазвичай усі ці конструкції мають силовий набір (кістяк) та рушійний (м'язи), що, як наслідок, викликає чітке членування рухового апарату (суглоби). Кількість таких елементів визначається життєвою необхідністю того чи іншого біологічного об'єкту, отже, кількість членувань має доволі широкий діапазон, який визначається конкретним призначенням кінцівки. Так, у комах максимум членувань мають вусики (до сотні); спеціалізацію по ніжкам мають для: ходіння – 5, стрибання – 4, копальна – 4, плавальна – 5, хватальна – 5, збиральна – 5. Для ссавців, наприклад, кажани мають по три члени. Для риб характерно одно-два членування. У людини руки мають шість членувань, а ноги – чотири, водночас, велика кількість кісток мають рудиментарні функції. Звісно, найбільш довершеним членуванням кінцівки слід вважати хобот слона, який має до кількох тисяч м'язів, що дозволяють відтворювати рух у 6D координатах. Отже, саме такий модуль-маніпулятор є необхідним для будь-якого сучасного технічного пристрою. Здавалося б, що подібні природні системи надають можливість відтворити уявний рух технологічної точки у просторі. Тим не менш, це далеко не так, адже система з n – членів є незамкненою, хоча і існує ілюзія точності руху. Але незамкнені системи руху не мають великої точності визначення координати,

для цього потрібні опорні точки простору з відомими координатами. У цьому випадку відбувається прив'язка рухомої точки до нерухомої. Отже, АС має уявну траєкторію руху, яку намагається відтворити у реальному часі та просторі. Звісно, що це дуже складна задача і виконується вона стрибкоподібно від однієї опорної точки до іншої, аж поки не буде досягнуто остаточної мети, але при умові, що такі опорні точки є.

Системи відслідковування руху кінцівок побудовані таким чином, що для орієнтування БО у просторі його кінцівки повинні спиратися на певний об'єкт. У супротивному випадку кінцівка знаходиться у стані дуальності, оскільки вихід з попередньої крапки торкання (координати) відбувається, а наступний ще ні. Ця дистанція невизначеності має назву дуалізму і є векторною величиною та позначається як **D**. У крайніх крапках невизначеність станове величину **[S]**, яка є наслідком точності БО, яку він виробляє за своєї потреби існування. Така ситуація характерна для всіх живих БО. Рослини зазвичай не мають кінцівок і тому безперервно зростають у пошуку крапки опору. У широкому сенсі можна розуміти, що існують уявні (фантомні) процеси та їх реальні аналоги.

Отже, ми маємо уявну задачу руху кінцівки БО, яка є основою до створення реального руху. Цей рух біологічної кінцівки є зразком до створення різних машин та механізмів, котрі намагаються відтворити рух людини у просторі з метою його використання у виробничих умовах. Тобто це копія руху, а копія як завжди гірша за оригінал. Водночас, панданна зона кінцівок зазвичай наближається за формою до криволінійного конусу з базовим діаметром, який дорівнює величині дуальності.

Таким чином можна отримати ланцюг, який складається з універсального рушійного прототипу з малою точністю та будувати на його засадах пристрою з параметрами високої точності, але малорушійного за можливостями. За цими ознаками маємо можливість використовувати теоретичні засади побудови маніпуляторів, як модель реальної кінцівки біологічного об'єкту. Наразі ця теоретична база досить розвинута за останні 30-40 років, а тому може слугувати

зразковою базою відносно реального біологічного об'єкта, хоч і має навіть зараз багато недоліків. Опис структури маніпуляторів дуже зручно проводити за допомогою універсального методу графів, в основі якого є структура дерева, яка використовується для опису структури системи твердих тіл. Водночас, важливе значення має поняття шляху між двома тілами (об'єктами). Отже, під поняттям шляху між двома об'єктами розуміємо сукупність векторів, які проходять через шарніри кінематичних ланцюгів, що з'єднують об'єкти, до того ж жоден шарнір не проходить двічі.

У такому випадку структуру типу дерева можна визначити як структуру, для якої шлях між усіма парами об'єктів є однозначним. Цілком очевидно, що кінематичні ланцюги зі структурою дерева, являють собою незамкнені кінематичні ланцюги. Такі структури можуть бути приведені до замкнених внаслідок додавання рівнянь зв'язку. Ця методика зручна тим, що будь-який механізм із замкненими та розімкненими кінематичними ланцюгами можна звести до структури типу дерева з додатковими геометричними зв'язками. Для цих структур просто обираються узагальнені координати, де легко записуються рівняння зв'язку. Тому такі структури отримали широке розповсюдження у динаміці систем твердого тіла.

Під час застосування цієї методики необхідно не забувати, що прототипом маніпулятора була людська рука, яка має низку особливостей руху, що неможливо зараз реалізувати з високою точністю, навіть за допомогою сучасної техніки. Тим не менш, маніпулятор з його математичним описом ми приймаємо за уявний об'єкт, відносно якого будується реальний об'єкт, тобто людська рука. Як наслідок, рука людини відносно маніпулятора буде сприйматися як система з похибками. Але те, що ми сприймаємо як похибку, є переваги руки над маніпулятором, котрі він не в змозі реалізувати. Отже, як уявну модель кінцівки людини приймаємо модель маніпулятора з відповідною кількістю ланцюгів. Таким чином, якщо маніпулятор має n ланцюгів і має структуру дерева, то кількість кінематичних пар теж дорівнює n . При цьому

ланцюгам та шарнірам дамо номери від 1 до N, починаючи з нерухомого ланцюга з номером 0. Здебільшого при кресленні графа маніпулятора приймається низка специфічних позначок і назв. З'єднані між кінематичними парами є вершинами, які позначаємо літерою s_i . Вершину, яка відповідає основі позначаємо як s_0 , а всі наступні – s_1, s_2, \dots, s_6 , літерами $u_i (i = 1, \dots, 6)$ позначаємо кінематичні пари між вершинами.

При дослідженні роботи маніпуляторів існують дві основні задачі. За першою задачею (пряма) за відомим розташуванням частин маніпулятора визначають координати розташування кінцевої точки. За зворотною задачею (зворотня) за відомою кінцевою координатою вершини визначають параметри розташування окремих елементів маніпулятора.

Аналогічні задачі вирішує будь-який об'єкт живий організм, коли виконує ті чи інші специфічні рухи.

Для вирішення як прямої, так і зворотної задачі, використовується методика, що заснована на використанні формул кінцевого повороту твердого тіла. Цей метод дозволяє визначити нове розташування вектора, знаючи його старе положення, вісь повороту та кут повороту. Для цього розглянемо різні залежності кінцевого повороту твердого тіла. Відома формула Родріго [11] має наступний вигляд:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} \cos \varphi + (1 - \cos \varphi)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \times \mathbf{r} \sin \varphi, \quad (3.1)$$

де \mathbf{r} та \mathbf{r}_1 – вектори, які пов'язані з об'єктом до та після повороту, тобто такі, що утворюють конус панданної зони; \mathbf{e} – орт осі повороту; φ – кут повороту.

Формулі (3.1) можна надати дещо інший вигляд, зробивши заміну

$$\cos \varphi = \frac{1 - \theta^2}{1 + \theta^2}; \sin \varphi = \frac{2\theta}{1 + \theta^2},$$

$$\text{де } \theta = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

У цьому випадку отримуємо

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} \frac{1 - \theta^2}{1 + \theta^2} + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{e} \frac{2\theta^2}{1 + \theta^2} + \mathbf{e} \times \mathbf{r} \frac{2\theta}{1 + \theta^2}. \quad (3.2)$$

У випадку, якщо кут між віссю та вектором \mathbf{r} дорівнює $\pi/2$ формула спрощується та приймає вигляд

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} \cos \varphi + \mathbf{e} \times \mathbf{r} \sin \varphi. \quad (3.3)$$

У випадку, коли відбуваються два кінцевих повороти об'єкту навколо осей, визначає ортами \mathbf{e}_1 та \mathbf{e}_2 результируючий поворот знаходиться по формулі

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_1 \times \boldsymbol{\theta}_2}{1 - \boldsymbol{\theta}_1 \boldsymbol{\theta}_2}, \quad (3.4)$$

де $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{e} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$; $\boldsymbol{\theta}_1 = \mathbf{e}_1 \operatorname{tg}(\varphi_1/2)$; $\boldsymbol{\theta}_2 = \mathbf{e}_2 \operatorname{tg}(\varphi_2/2)$; \mathbf{e} – орт результируючого повороту.

Остання формула вказує на те, що результируючий поворот двох кінцевих поворотів твердого тіла навколо нерухомих осей, залежний від порядку слідування цих поворотів.

Окрім методики, заснованої на кінцевому повороті твердого тіла, можна використовувати методику матричного перетворення координат вектора, яка більш часто використовується для опису руху твердих тіл.

Отже, розглянемо випадок, якщо ми маємо три декартових системи координат: $Oxyz$, $O_1x_1y_1z_1$ та $O_2x_2y_2z_2$, і в одній з них є присутнім наш досліджуваний вектор. Наприклад, у системі $O_2x_2y_2z_2$ задано вектор з координатами $\mathbf{r}(x_2y_2z_2)$. Тоді у системі $O_1x_1y_1z_1$ координати цього вектора можуть бути визначені в матричному вигляді наступним чином:

$$[x_1] = M_2[x_2], \quad (3.5)$$

де $[x_1] = [x_1, y_1, z_1]^T$ – матриця стовпчик координат вектора \mathbf{r} у системі $O_1x_1y_1z_1$; $[x_2] = [x_2, y_2, z_2]^T$ – матриця – стовпчик координат вектора \mathbf{r} у системі $O_2x_2y_2z_2$. Індекс « T » визначає операцію транспонування матриці:

$$M_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

що є матриця переходу від системи $O_2x_2y_2z_2$ до системи $O_1x_1y_1z_1$.

Елементи $b_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ матриці M_2 є спрямовуючі косинуси осей системи $O_2x_2y_2z_2$ відносно осей системи $O_1x_1y_1z_1$.

За таким же принципом перетворення координат можна перейти від системи $O_1x_1y_1z_1$ до системи $Oxyz$, тобто

$$[x] = M_1[x_1], \quad (3.7)$$

де $[x] = [x, y, z]^T$ – матриця стовпчик координат вектора \mathbf{r} у системі $Oxyz$;

$$M_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

є матриця переходу від системи $O_1x_1y_1z_1$ до системи $Oxyz$.

До того ж, $a_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ матриці M_1 є спрямовуючі косинуси осей системи $O_1x_1y_1z_1$ відносно осей системи $Oxyz$.

Таким чином, проводячи заміну у виразах (3.7) $[x_1]$, із виразу (3.5) отримуємо

$$[x_1] = M_1 M_2 [x_2]. \quad (3.9)$$

Для n систем координат можна записати

$$[x] = \prod_{i=1}^n M_i [x_n], \quad (3.10)$$

де $[x_n] = [x_n, y_n, z_n]^T$ – матриця стовпчик координат вектора \mathbf{r} у системі $O_nx_ny_nz_n$, а

$$\prod_{i=1}^n M_i = M_1, M_2, \dots, M_n. \quad (3.11)$$

Розглянемо більш достеменно, яким чином виконується рух окремої ланки всього ланцюга у цілому. Для цього з кожною кінематичною ланкою пов'язуємо свою систему координат, тобто вісь обертання та руху приймаємо координату $z_i^0(x_{si}^0)$. Вектор \mathbf{r}_i , який пов'язує два сусідніх шарніри (суглоби), розкладемо за осями \mathbf{z}_i та $\mathbf{x}_i(x_{1i})$, тобто

$$r = r_x x_i^0 + r_z z_i^0. \quad (3.12)$$

Залежно від цього приймають напрямки осей як $x_i^0 y_i^0 (x_{2i}^0)$, і праву систему координат. Згідно положень теоретичної механіки будь-яке обертання простору R^3 можна уявити у вигляді трьох послідовних поворотів, які виконуються у визначеному порядку. Для опису таких поворотів існує дві системи кутів Ойлера та Крилова [9]. Наразі у робототехніці та обраних уявних моделі прийнято використовувати кути Ойлера. Ці кути являють собою три незалежні величини (по одній на кожну вісь), через які описуються дев'ять

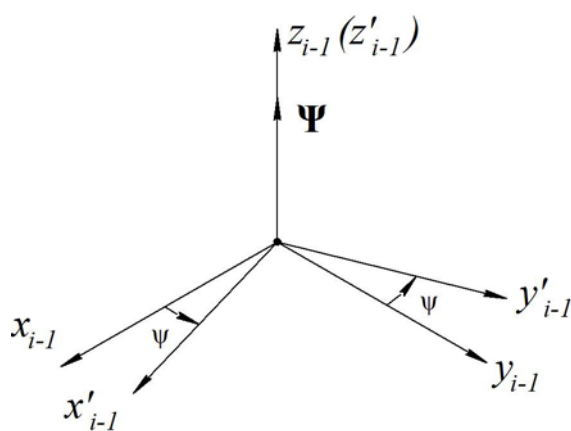


Рис. 3.1. Поворот навколо вісі z_{i-1}

направляючих косинусів підсумкової матриці повороту осей координат. Отже, розглянемо цю методику як найбільш застосовану для математичного моделювання руху об'єктів. Стосовно першого повороту (рис. 3.1) отримуємо таблицю косинусів (табл. 3.1).

Табл. 3.1. Таблиця косинусів першого повороту при $0 \leq \psi \leq 2\pi$

	x_{i-1}	y_{i-1}	z_{i-1}
x'_{i-1}	$\cos\psi$	$\sin\psi$	0
y'_{i-1}	$-\sin\psi$	$\cos\psi$	0
z'_{i-1}	0	0	1

З таблиці 3.1 маємо можливість отримати наступну залежність

$$\begin{bmatrix} x'_{i-1} \\ y'_{i-1} \\ z'_{i-1} \end{bmatrix} = M_1 \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \\ z_{i-1} \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

або у скороченому запису:

$$r'_{i-1} = M_1 r_{i-1}, \quad (3.14)$$

де

$$M_1 = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Другий поворот виконується навколо вісі x'_{i-1} на кут θ (рис. 3.2). Відповідна таблиця косинусів відображена у табл. 3.2.

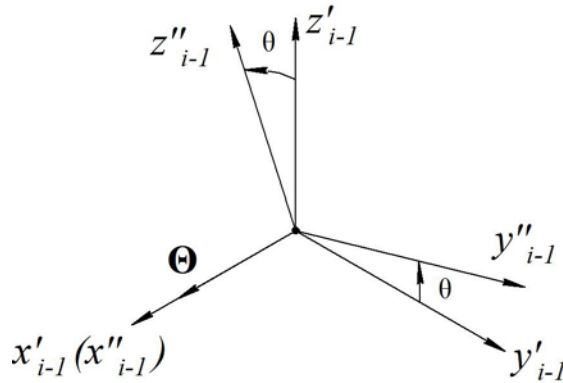


Рис. 3.2. Поворот навколо вісі x'_{i-1} при $0 \leq \theta \leq \pi$

З табл. 3.2 маємо можливість отримати наступну залежність

$$\begin{bmatrix} x''_{i-1} \\ y''_{i-1} \\ z''_{i-1} \end{bmatrix} = M_2 \begin{bmatrix} x'_{i-1} \\ y'_{i-1} \\ z'_{i-1} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

або у скороченому запису

$$r''_{i-1} = M_2 r'_{i-1}, \quad (3.17)$$

де

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Табл. 3.2. Таблица косинусів першого повороту при $0 \leq \theta \leq \pi$

	x'_{i-1}	y'_{i-1}	z'_{i-1}
x''_{i-1}	1	0	0
y''_{i-1}	0	$\cos \theta$	$\sin \theta$
z''_{i-1}	0	$\sin \theta$	$\cos \theta$

Третій поворот виконується навколо вісі z''_{i-1} на кут φ (рис. 3.3).

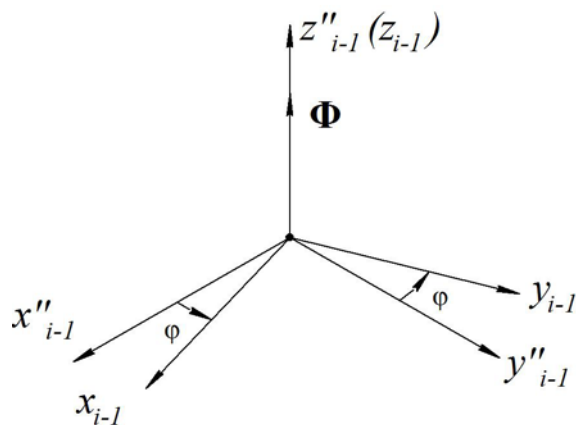


Рис. 3.3. Третій поворот навколо вісі z''_{i-1} при $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

За аналогією з попередніми кутами повороту, отримуємо наступний результат:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = M_3 \begin{bmatrix} x_{i-1}'' \\ y_{i-1}'' \\ z_{i-1}'' \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

або у скороченому вигляді

$$r_i = M_3 r_{i-1}'', \quad (3.20)$$

де

$$M_2 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

У підсумку отримуємо результат схожий на (3.9), (3.10), (3.11), а саме

$$r_i = M_3 M_2 M_{1 \ i-1} = M_i r_{-1} \quad (3.22)$$

або

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = M_i \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \\ z_{i-1} \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

де підсумкова матриця $M_i = M_3 M_2 M_1$ після перемноження отримує вигляд

$$M_i = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - & \cos \varphi \sin \psi + & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \sin \psi \cos \theta & +\sin \varphi \cos \psi \cos \theta & \\ \sin \varphi \cos \psi - & \sin \varphi \sin \psi + & \cos \varphi \sin \theta \\ -\cos \varphi \sin \psi \cos \theta & \cos \varphi \cos \psi \cos \theta & \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Отже, матриця (3.24) надає можливість утворення ПЗ для одного члена кінцівки і є підґрунтям до первинного опису ПЗ об'єкта.

Наразі ми розглянули повороти системи координат, і для уявлення повної ситуації розглянемо загальний процес зсуву системи координат на відстань a_i за віссю x_2 та S_i за віссю x_3 із кутом поворотів θ_i та α_i (рис. 3.4). такий спосіб руху призводить до створення ПЗ у вигляді криволінійної призми.

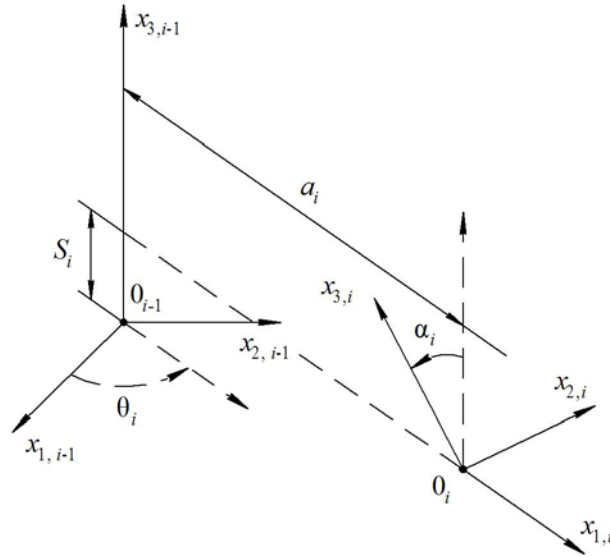


Рис. 3.4. Просторовий зсув координат

Отже, для того, щоб виконати перенесення системи координат $i-1$ у систему координат i ($i = 1, 2, \dots, n$) необхідно виконати поворот, два переноси та ще один поворот, яку виконує система $i-1$, у наступному порядку:

- 1) зробити поворот на кут θ_i навколо вісі $x_{3,i-1}$ до тої межі поки вісь $x_{1,i-1}$ не стане паралельно до вісі $x_{1,i}$;
- 2) зсув на величину S_i вздовж осі $x_{3,i-1}$ до тієї межі, поки вісі $x_{1,i-1}$ та $x_{1,i}$ не виявляться на одній прямій;
- 3) зсув на величину a_i вздовж осі $z_{1,i}$ до тієї межі, поки не співпадуть початки $(i-1)$ та i -ї системи координат;
- 4) зробити поворот на кут α_i відносно вісі $x_{1,i}$ до співпадиння $(i-1)$ та i -ї системи координат

У цьому випадку ойлерові кути в матриці $M_i(24)$ дорівнюватимуть $\psi = \theta$, $\theta = \alpha$, $\varphi = \varphi$. А, отже, отримуємо наступну залежність стосовно зв'язку обох координат

$$\begin{bmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \\ x_{3,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,i-1} \\ x_{2,i-1} \\ x_{3,i-1} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

або

$$\begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \\ z_{i-1} \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}; \quad (3.26)$$

та

$$\begin{bmatrix} x_{1,i-1} \\ x_{2,i-1} \\ x_{3,i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \sin \alpha_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,i} \\ x_{2,i} \\ x_{3,i} \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Оскільки при визначенні орієнтації сусідніх систем координат (рис. 3.4) ми використовували зсув систем координат 0_{i-1} у 0_i переносом їх на S_i та a_i , то необхідно розглянути поняття про однорідні системи координат. Під цими координатами будемо розуміти координати точки у вигляді будь-яких чотирьох чисел (x_1, x_2, x_3, x_4) , які одночасно не дорівнюють нулю та пов'язані із декартовими (x, y, z) координатами рівняннями

$$x = x_1/x_4 \quad y = x_2/x_4 \quad z = x_3/x_4. \quad (3.28)$$

Звичайні декартові координати точки в прямокутній системі координат $0xyz$ можна врахувати, якщо відомі її координати в іншій системі координат $0'x'y'z'$ за формулами перетворень:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

де

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

а r_1, r_2, r_3 – координати початку відліку системи координат $0'x'y'z'$ у системі $0xyz$, а $U_{ij}(i, j = \overline{1,3})$ спрямовуючі косинуси осей системи $0'x'y'z'$ по відношенню до системи $0xyz$.

Отже, якщо (x_1, x_2, x_3, x_4) є координатами певної точки в системі $0xyz$, а (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) визначають її координати у системі $0'x'y'z'$, то завжди можна прийняти, що $x_4 = x'_4$.

Після підстановки однорідних координат у формули (3.29) та (3.30), отримуємо перетворення, які призводять до виразу (3.28) та

$$x_1 = x'_1 / x'_4, \quad y = x'_2 / x'_4, \quad z = x'_3 / x'_4; \quad (3.31)$$

а система рівнянь буде

$$\begin{cases} x_1 = U_{11}x'_1 + U_{12}x'_2 + U_{13}x'_3 + r_1x'_4 \\ x_2 = U_{21}x'_1 + U_{22}x'_2 + U_{23}x'_3 + r_2x'_4 \\ x_3 = U_{31}x'_1 + U_{32}x'_2 + U_{33}x'_3 + r_3x'_4 \\ x_4 = U_{41}x'_1 + U_{42}x'_2 + U_{43}x'_3 + r_4x'_4. \end{cases} \quad (3.32)$$

Таким чином, однорідні координати точки в різних системах координат пов'язані між собою невиродженим однорідним перетворенням. Матриця цього перетворення має вигляд

$$U = \left[\begin{array}{ccc|c} U_{11} & U_{12} & U_{13} & r_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & r_2 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & r_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} U & r \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right], \quad (3.33)$$

де U – матриця направляючих косинусів відносно повороту 3×3 , а вектор переносу $r = (r_1, r_2, r_3)^T$, $\det U = \pm 1$ (для правої та лівої системи координат відповідно).

Таким чином, перетворення переносу та повороту в однорідних координатах визначиться одним матричним перетворенням

$$x = Ux'. \quad (3.34)$$

Перетворення переносу можна завжди уявити як комплекс обертання та зсуву $U_i = U_r \cdot U_\alpha$, де

$$U_r = \left[\begin{array}{c|c} E & r \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]; \quad U_\alpha = \left[\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]; \quad (3.35)$$

де E – одинична матриця 3×3 .

Необхідно підкреслити, що за будь-якого вибору системи координат матриця (3.33) має властивість

$$\frac{\partial U_i}{\partial q_i} = K_i U_i, \quad (3.36)$$

де для кожного i

$$K = \begin{cases} \theta_1, & \text{якщо вісь обертання } x_{10} \\ \theta_2, & \text{якщо вісь обертання } x_{20} \\ \theta_3, & \text{якщо вісь обертання } x_{20} \\ \theta_6, & \text{якщо з'єднання телескопічне,} \end{cases} \quad (3.37)$$

де θ_j ($j=1, \dots, 6$) матриці та вектори наступного виду

$$\theta_1 = (1, 0, 0, 0)^T, \theta_2 = (0, 1, 0, 0)^T, \theta_3 = (0, 0, 1, 0)^T, \theta_4 = (0, 0, 0, 1)^T,$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \theta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \theta_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \theta_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \theta_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \theta_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Таким чином, користуючись наведеними вище позначками, маємо можливість уявити перехід між системами координат у вигляді матриць U та U^{-1} , де остання має наступний вигляд

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} U^T & -U_r^T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

У цьому випадку відповідно матимемо наступні матриці опису уявної функції руху:

$$U_{1,i} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & -\alpha_i \\ -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & -S_i \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & -S_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.40)$$

$$U_{1,i}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & -\alpha_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & \alpha_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & S_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.41)$$

$$U_{2,i} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & -\alpha_i \cos \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \sin \alpha_i & \alpha_i \sin \theta_i \\ 0 & -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i & -S_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.42)$$

$$U_{2,i}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & \alpha_i \\ \sin \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & -S_i \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_i & \cos \theta_i \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & -S_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Досить часто у рівняннях динаміки є більш зручним, коли узагальнена координата відповідає не першому ойлеровому повороту ψ_i , а третьому ϕ_i . У такому випадку матриця M_i набуває вигляду:

$$M_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \sin \alpha_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

та

$$M_i^{-1} = M_i^T = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_i & \cos \theta_i \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Раніше було отримано наступне рівняння з виразу (3.26)

$$r_{i-1} = M_i^{-1} r_i, \quad (3.46)$$

де M_i^{-1} - матриця 4x4 переходу від i -ї до $(i-1)$ системи координат.

Якщо ми позначимо $M_i^{-1} = C_i$, то матимемо

$$r_0 = M_1 M_2 \dots M_i r_i = C_{1i} r_i \quad (3.47)$$

де

$$C_{1i} = M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_i^{-1} = C_1 C_2 \dots C_i.$$

Водночас, співвідношення (3.47) являє собою запис векторного рівняння кінематики маніпулятора та показує залежність між узагальненими та декартовими координатами будь-якої точки маніпулятора. Наразі залежність (3.47) необхідно сприймати як уявну функцію руху уявної рушійної системи для побудови моделі руху кінцівки організму.

Отже, ми вже достатньо розглянули теоретичну базу побудови уявної моделі рушійної системи маніпулятора, яка є основою до реальної системи руху. На відміну від уявної системи реальна система має похибки руху.

3.1.1. Похибки руху об'єкта

Для реальної кінематики руху здорового живого організму відмінність від уявного буде стандартна величина похибки визначення координат руху у просторі, яка оцінюється зором та відчутниками торкання і має величину $[S]$. Живий організм з патологією нервової системи та порушенням руху та дрібної моторики кінцівок через низки причин не може дотримуватися цієї величини, як наслідок, величина $[S]$ поступово втрачає свою сутність, збільшуючись у розмірах. У кінцевому випадку непевність руху призводить до дуальності D невизначених розмірів.

Отже, базові кути повороту та перехід із однієї координатної системи до іншої для здорового живого організму матимуть наступні математичні описи. Для першого кута повороту (3.13), (3.14) та (3.15) маємо наступний результат:

$$\begin{bmatrix} x'_{i-1} + [S] \\ y'_{i-1} + [S] \\ z'_{i-1} + [S] \end{bmatrix} = [M_1] \cdot \begin{bmatrix} x_{i-1} + [S] \\ y_{i-1} + [S] \\ z_{i-1} + [S] \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

або у скороченому запису

$$r'_{i-1} + [\mathbf{S}] = [M_1][r_{i-1} + [\mathbf{S}]], \quad (3.49)$$

де

$$[M_1] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & [\mathbf{S}] \\ -\sin \psi & \cos \psi & [\mathbf{S}] \\ [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Для випадку порушення траєкторії руху кінцівок за різних причин вирази (3.13), (3.14) та (3.15) приймають вигляд:

$$\begin{bmatrix} x'_{i-1} + \mathbf{D} \\ y'_{i-1} + \mathbf{D} \\ z'_{i-1} + \mathbf{D} \end{bmatrix} = [M_1] \cdot \begin{bmatrix} x_{i-1} + \mathbf{D} \\ y_{i-1} + \mathbf{D} \\ z_{i-1} + \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

або у скороченому запису

$$r'_{i-1} + \mathbf{D} = [M_1][r_{i-1} + \mathbf{D}], \quad (3.52)$$

де

$$[M_1] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & \mathbf{D} \\ -\sin \psi & \cos \psi & \mathbf{D} \\ \mathbf{D} & \mathbf{D} & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

Для другого кута повороту з (3.16), (3.17) та (3.18) отримуємо наступну модель для здорової людини

$$\begin{bmatrix} x''_{i-1} + [\mathbf{S}] \\ y''_{i-1} + [\mathbf{S}] \\ z''_{i-1} + [\mathbf{S}] \end{bmatrix} = [M_2] \cdot \begin{bmatrix} x'_{i-1} + [\mathbf{S}] \\ y'_{i-1} + [\mathbf{S}] \\ z'_{i-1} + [\mathbf{S}] \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

або у скороченому запису

$$r''_{i-1} + [\mathbf{S}] = [M_2][r'_{i-1} + [\mathbf{S}]], \quad (3.55)$$

де

$$[M_2] = \begin{bmatrix} 1 & [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] \\ [\mathbf{S}] & \cos \theta & \sin \theta \\ [\mathbf{S}] & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Для випадку захворювання та порушення нормального руху кінцівок рівняння (3.16), (3.17) та (3.18) набувають наступного вигляду:

$$\begin{bmatrix} x''_{i-1} + \mathbf{D} \\ y''_{i-1} + \mathbf{D} \\ z''_{i-1} + \mathbf{D} \end{bmatrix} = [M_2] \cdot \begin{bmatrix} x'_{i-1} + \mathbf{D} \\ y'_{i-1} + \mathbf{D} \\ z'_{i-1} + \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

або у скороченому запису

$$r''_{i-1} + \mathbf{D} = [M_2][r'_{i-1} + \mathbf{D}], \quad (3.58)$$

де

$$[M_2] = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{D} & \mathbf{D} \\ \mathbf{D} & \cos \theta & \sin \theta \\ \mathbf{D} & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

Для третього кута повороту з (19), (20) та (21) для здорового БО отримуємо наступні залежності

$$\begin{bmatrix} x_i + [\mathbf{S}] \\ y_i + [\mathbf{S}] \\ z_i + [\mathbf{S}] \end{bmatrix} = [M_3] \begin{bmatrix} x''_{i-1} + [\mathbf{S}] \\ y''_{i-1} + [\mathbf{S}] \\ z''_{i-1} + [\mathbf{S}] \end{bmatrix}, \quad (3.60)$$

або у скороченому запису

$$r_i + [\mathbf{S}] = [M_3][r''_{i-1} + [\mathbf{S}]], \quad (3.61)$$

де

$$[M_3] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & [\mathbf{S}] \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & [\mathbf{S}] \\ [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Для випадку захворювання рівняння (3.16), (3.17) та (3.18) набувають наступного вигляду:

$$\begin{bmatrix} x_i + \mathbf{D} \\ y_i + \mathbf{D} \\ z_i + \mathbf{D} \end{bmatrix} = [M_3] \begin{bmatrix} x''_{i-1} + \mathbf{D} \\ y''_{i-1} + \mathbf{D} \\ z''_{i-1} + \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (3.63)$$

або у скороченому запису

$$r_i + \mathbf{D} = [M_3][r_{i-1}'' + \mathbf{D}], \quad (3.64)$$

де

$$[M_3] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & \mathbf{D} \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & \mathbf{D} \\ \mathbf{D} & \mathbf{D} & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

У підсумку отримуємо наступний результат для нормального БО з (3.22) та (3.23) маємо наступне:

$$r_i + [\mathbf{S}] = [M_3][M_2][M_1][r_i + [\mathbf{S}]] = [M_i][r_{i-1} + [\mathbf{S}]], \quad (3.66)$$

або

$$\begin{bmatrix} x_i + [\mathbf{S}] \\ y_i + [\mathbf{S}] \\ z_i + [\mathbf{S}] \end{bmatrix} = [M_i] \begin{bmatrix} x_{i-1} + [\mathbf{S}] \\ y_{i-1} + [\mathbf{S}] \\ z_{i-1} + [\mathbf{S}] \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

Для БО з порушеннями функції руху отримуємо наступний результат

$$r_i + \mathbf{D} = [M_3][M_2][M_1][r_i + \mathbf{D}] = [M_i][r_{i-1} + \mathbf{D}], \quad (3.68)$$

або

$$\begin{bmatrix} x_i + \mathbf{D} \\ y_i + \mathbf{D} \\ z_i + \mathbf{D} \end{bmatrix} = [M_i] \begin{bmatrix} x_{i-1} + \mathbf{D} \\ y_{i-1} + \mathbf{D} \\ z_{i-1} + \mathbf{D} \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

При необхідності зробити просторовий рух за схемою (рис. 3.4) за формулами (3.25), (3.26) та (3.27) для нормального БО приймають наступний вигляд:

$$\begin{bmatrix} x_{1,i} + [\mathbf{S}] \\ x_{2,i} + [\mathbf{S}] \\ x_{3,i} + [\mathbf{S}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & [\mathbf{S}] \\ -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,i-1} + [\mathbf{S}] \\ x_{2,i-1} + [\mathbf{S}] \\ x_{3,i-1} + [\mathbf{S}] \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

або

$$\begin{bmatrix} x_{i-1} + [\mathbf{S}] \\ y_{i-1} + [\mathbf{S}] \\ z_{i-1} + [\mathbf{S}] \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} x_i + [\mathbf{S}] \\ y_i + [\mathbf{S}] \\ z_i + [\mathbf{S}] \end{bmatrix}; \quad (3.71)$$

та

$$\begin{bmatrix} x_{1,i-1} + [\mathbf{S}] \\ x_{2,i-1} + [\mathbf{S}] \\ x_{3,i-1} + [\mathbf{S}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \sin \alpha_i \\ [\mathbf{S}] & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,i-1} + [\mathbf{S}] \\ x_{2,i-1} + [\mathbf{S}] \\ x_{3,i-1} + [\mathbf{S}] \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

Для БО з порушеннями функції руху вкрай важко виконати подібний рух, і тому в її діях завжди присутня дуальність просторової координати. Як наслідок, вона визначає певну невизначеність руху та впливає на загальну побудову матриць просторового руху. Отже, вирази (3.25), (3.26) та (3.27) стосовно просторового руху набувають наступного вигляду:

$$\begin{bmatrix} x_{1,i} + \mathbf{D} \\ x_{2,i} + \mathbf{D} \\ x_{3,i} + \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & \mathbf{D} \\ -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,i-1} + \mathbf{D} \\ x_{2,i-1} + \mathbf{D} \\ x_{3,i-1} + \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

або

$$\begin{bmatrix} x_{i-1} + \mathbf{D} \\ y_{i-1} + \mathbf{D} \\ z_{i-1} + \mathbf{D} \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} x_i + \mathbf{D} \\ y_i + \mathbf{D} \\ z_i + \mathbf{D} \end{bmatrix}; \quad (3.74)$$

та

$$\begin{bmatrix} x_{1,i-1} + \mathbf{D} \\ x_{2,i-1} + \mathbf{D} \\ x_{3,i-1} + \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \sin \alpha_i \\ \mathbf{D} & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,i-1} + \mathbf{D} \\ x_{2,i-1} + \mathbf{D} \\ x_{3,i-1} + \mathbf{D} \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Стосовно однорідної системи координат залежність (3.29) набуває наступного вигляду для нормального БО

$$\begin{bmatrix} x + [\mathbf{S}] \\ y + [\mathbf{S}] \\ z + [\mathbf{S}] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} x' + [\mathbf{S}] \\ y' + [\mathbf{S}] \\ z' + [\mathbf{S}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 + [\mathbf{S}] \\ r_2 + [\mathbf{S}] \\ r_3 + [\mathbf{S}] \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

та

$$\begin{bmatrix} x + \mathbf{D} \\ y + \mathbf{D} \\ z + \mathbf{D} \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} x' + \mathbf{D} \\ y' + \mathbf{D} \\ z' + \mathbf{D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 + \mathbf{D} \\ r_2 + \mathbf{D} \\ r_3 + \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

для БО з порушеннями функції руху.

Матриця (3.33) для однорідних координат нормального БО матиме вигляд:

$$[U] = \left[\begin{array}{ccc|c} U_{11} & U_{12} & U_{13} & r_1 + [\mathbf{S}] \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & r_2 + [\mathbf{S}] \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & r_3 + [\mathbf{S}] \\ \hline [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} U & r + [\mathbf{S}] \\ \hline [\mathbf{S}] & 1 \end{array} \right], \quad (3.78)$$

а для протилежного випадку матриця (3.33) набуває вигляду:

$$[U] = \left[\begin{array}{ccc|c} U_{11} & U_{12} & U_{13} & r_1 + \mathbf{D} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & r_2 + \mathbf{D} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & r_3 + \mathbf{D} \\ \hline \mathbf{D} & \mathbf{D} & \mathbf{D} & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} U & r + \mathbf{D} \\ \hline \mathbf{D} & 1 \end{array} \right]. \quad (3.79)$$

Функції θ_j з виразу (3.37) для нормального БО приймають вигляд

$$\theta_1 = (1, [\mathbf{S}], [\mathbf{S}], [\mathbf{S}])^T, \theta_2 = ([\mathbf{S}], 1, [\mathbf{S}], [\mathbf{S}])^T, \theta_3 = ([\mathbf{S}], [\mathbf{S}], 1, [\mathbf{S}])^T, \theta_6 = ([\mathbf{S}], [\mathbf{S}], [\mathbf{S}], 1)^T, \quad (3.80)$$

для БО з порушеннями функції руху маємо наступні залежності

$$\theta_1 = (1, \mathbf{D}, \mathbf{D}, \mathbf{D})^T, \theta_2 = (\mathbf{D}, 1, \mathbf{D}, \mathbf{D})^T, \theta_3 = (\mathbf{D}, \mathbf{D}, 1, \mathbf{D})^T, \theta_6 = (\mathbf{D}, \mathbf{D}, \mathbf{D}, 1)^T, \quad (3.81)$$

де

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] \\ [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & -1 & [\mathbf{S}] \\ [\mathbf{S}] & -1 & [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] \\ [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] \end{bmatrix}; \theta_2 = \begin{bmatrix} [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & 1 & [\mathbf{S}] \\ [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] \\ -1 & [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] \\ [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] \end{bmatrix}; \theta_3 = \begin{bmatrix} [\mathbf{S}] & -1 & [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] \\ 1 & [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] \\ [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] \\ [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] \end{bmatrix};$$

$$\theta_4 = \begin{bmatrix} [S] & [S] & [S] & 1 \\ [S] & [S] & [S] & [S] \\ [S] & [S] & [S] & [S] \\ [S] & [S] & [S] & [S] \end{bmatrix}; \theta_5 = \begin{bmatrix} [S] & [S] & [S] & [S] \\ [S] & [S] & [S] & 1 \\ [S] & [S] & [S] & [S] \\ [S] & [S] & [S] & [S] \end{bmatrix}; \theta_6 = \begin{bmatrix} [S] & [S] & [S] & [S] \\ [S] & [S] & [S] & [S] \\ [S] & [S] & [S] & 1 \\ [S] & [S] & [S] & [S] \end{bmatrix}. \quad (3.82)$$

для нормального БО

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} D & D & D & D \\ D & D & -1 & D \\ D & -1 & D & D \\ D & D & D & D \end{bmatrix}; \theta_2 = \begin{bmatrix} D & D & 1 & D \\ D & D & D & D \\ -1 & D & D & D \\ D & D & D & D \end{bmatrix}; \theta_3 = \begin{bmatrix} D & -1 & D & D \\ 1 & D & D & D \\ D & D & D & D \\ D & D & D & D \end{bmatrix};$$

$$\theta_4 = \begin{bmatrix} D & D & D & 1 \\ D & D & D & D \\ D & D & D & D \\ D & D & D & D \end{bmatrix}; \theta_5 = \begin{bmatrix} D & D & D & D \\ D & D & D & 1 \\ D & D & D & D \\ D & D & D & D \end{bmatrix}; \theta_6 = \begin{bmatrix} D & D & D & D \\ D & D & D & D \\ D & D & D & 1 \\ D & D & D & D \end{bmatrix}. \quad (3.83)$$

для БО з порушеннями функції руху.

Як наслідок, матриці (3.40), (3.41), (3.42) та (3.43) для здорового організму приймають наступний вигляд:

$$U_{1,i} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & [S] & -\alpha_i + [S] \\ -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & -(S_i - [S]) \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & -(S_i - [S]) \cos \alpha_i \\ [S] & [S] & [S] & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.84)$$

$$U_{1,i}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & (\alpha_i + [S]) \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & (\alpha_i + [S]) \sin \theta_i \\ [S] & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & S_i + [S] \\ [S] & [S] & [S] & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.85)$$

$$U_{2,i} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & -(\alpha_i - [S]) \cos \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \sin \alpha_i & (\alpha_i + [S]) \sin \theta_i \\ [S] & -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i & -(S_i + [S]) \\ [S] & [S] & [S] & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.86)$$

$$U_{2,i}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & [\mathbf{S}] & \alpha_i + [\mathbf{S}] \\ \sin \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & -(S_i - [\mathbf{S}]) \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_i & \cos \theta_i \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & (S_i + [\mathbf{S}]) \cos \alpha_i \\ [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & [\mathbf{S}] & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.87)$$

Для БО з порушеннями функції руху матриці (3.40), (3.41), (3.42) та (3.43) приймають наступний вигляд:

$$U_{1,i} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & \mathbf{D} & -(a_i - \mathbf{D}) \\ -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & -(S_i - \mathbf{D}) \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & -(S_i - \mathbf{D}) \cos \alpha_i \\ \mathbf{D} & \mathbf{D} & \mathbf{D} & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.88)$$

$$U_{1,i}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & (\alpha_i + \mathbf{D}) \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & (a_i + \mathbf{D}) \sin \theta_i \\ \mathbf{D} & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & S_i + \mathbf{D} \\ \mathbf{D} & \mathbf{D} & \mathbf{D} & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.89)$$

$$U_{2,i} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & -(\alpha_i - \mathbf{D}) \cos \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \sin \alpha_i & (a_i + \mathbf{D}) \sin \theta_i \\ \mathbf{D}] & -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i & -(S_i + \mathbf{D}) \\ \mathbf{D}] & \mathbf{D} & \mathbf{D} & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.90)$$

$$U_{2,i}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & \mathbf{D} & \alpha_i + \mathbf{D} \\ \sin \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & -(S_i - \mathbf{D}) \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_i & \cos \theta_i \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & (S_i + \mathbf{D}) \cos \alpha_i \\ \mathbf{D} & \mathbf{D} & \mathbf{D} & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.91)$$

Для матриць динаміки за виразами (3.44) та (3.45) ми отримуємо наступні матриці, що описують рух кінцівок здорового БО

$$M_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \sin \alpha_i \\ [\mathbf{S}] & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

та

$$M_i^{-1} = M_i^T = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & [\mathbf{S}] \\ \sin \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_i & \cos \theta_i \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix}. \quad (3.93)$$

Для БО з фізіологічними патологіями кінематики руху ці матриці приймають наступний вигляд:

$$M_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \sin \alpha_i \\ \mathbf{D} & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

та

$$M_i^{-1} = M_i^T = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & \mathbf{D} \\ \sin \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_i & \cos \theta_i \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix}. \quad (3.95)$$

У всіх вищенаведених матрицях необхідно враховувати, що величини $[\mathbf{S}]$ та \mathbf{D} є векторними. Особливо це стосується величини \mathbf{D} , яка має властивість змінювати знак залежно від напрямку руху. За відсутності руху ця величина є мірою невизначеності координати у межах $[\mathbf{S}]$.

3.2. Пандання зона просторового руху кінцівок біологічного об'єкту

Отже, ми розглянули теоретичне підґрунтя механічної подоби руху живих організмів. Тому, дотримуючись загально визначеної тези будемо її використовувати у сполученні модель-реальність моделі-реальність за методикою відповідно до технології ТОНТОР. Отже, маючи недосконалий рух людського організму ми маємо єдину можливість моделювання на засадах примітивних механічних систем. Ці системи не мають ідеальної схожості з реальним біологічним рухом, оскільки є детермінованим у часі та просторі. Тим не менш, такий дискретний рух може сприйматися як еталонний, тобто уявний. Водночас, рух будь-якого окремо визначеного вектора у просторі будь-якої системи координат може розглядатися як уявний. У максимальному спрощенні такий приклад являє собою тотожність криволінійного конусу з ідеально

симетричним, тобто у чисельному вимірі всі параметри конусів рівні один одному як межа якогось параметру. У такому разі вони повинні задовольняти низці умов, які визначаються наступним чином:

- загальна функція руху вектора у просторі

$$r_R = f_R(x, y, z), \quad r_u = f_u(x, y, z), \quad (3.96)$$

- твірна конуса

$$\lim r_R = r_u, \quad (3.97)$$

- радіус-поверхні конусу

$$\lim(r_R - r_u) = 0, \quad (3.98)$$

- різниця площ уявної та реальної поверхні

$$\lim(S_p - S_u) = 0, \quad (3.99)$$

- об'ємна різниця уявної та реальної конусу

$$\lim(V_R - V_u) = 0. \quad (3.100)$$

Ці умови (3.96), (3.97), (3.98), (3.99), (3.100) вказують на основне аналітичне підґрунтя утворення моделі просторового руху біологічної кінцівки у панданній зоні. Водночас, за попередньо згаданими формулами ми маємо можливість визначитися зі ступенем збіжності між реальною та уявною функцією. Наразі з (3.96) є можливість спостерігати наступну закономірність. Якщо ми маємо дві функції: уявну $f_u(x, y, z)$ та реальну $f_R(x, y, z)$, які мають відповідні вектори r_u та r_R , то при переході від точки $M_u(x, y, z)$ до точки $M_R(x+dx, y+dy, z+dz)$, коли радіус вектор має опис $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$, отримуємо наступний результат:

$$\mathbf{r}'_u = \mathbf{r}_u + d\mathbf{r} = \mathbf{i}(x + dx) + \mathbf{j}(y + dy) + \mathbf{k}(z + dz). \quad (3.101)$$

Водночас, функція $f_u(x, y, z)$ буде матиме зміни:

$$df_u = \frac{\partial f_u}{\partial x} dx + \frac{\partial f_u}{\partial y} dy + \frac{\partial f_u}{\partial z} dz. \quad (3.102)$$

Вираз для df_u можна уявити у вигляді скалярного добутку

$$df_u = \left(\mathbf{i} \frac{\partial f_u}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f_u}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f_u}{\partial z} \right) (\mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz), \quad (3.103)$$

де другим множником є нескінченно малий вектор

$$d\mathbf{r}_u = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz, \quad (3.104)$$

що розташований між точками $M_u(x, y, z)$ та $M_R(x, y, z)$.

Перший співмножник у виразі (3.103) є градієнтом і залежний лише від розташування точки M у просторі, а отже, є можливість записати

$$df_u = \text{grad} f_u \cdot d\mathbf{r}_u. \quad (3.105)$$

У загальному випадку, якщо одиничний вектор нормалі \mathbf{n} , який йде у напрямку зростаючих значень f_u та вважаючи, що $d\mathbf{r} = \mathbf{n} dn$, вираз (3.105) переписується у вигляді:

$$df_u = \mathbf{n} \cdot \text{grad} f_u dn = |\text{grad} f_u| dn. \quad (3.106)$$

При цьому модуль градієнту дорівнює:

$$|\text{grad} f_u| = \sqrt{\left(\frac{\partial f_u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_u}{\partial z} \right)^2} = \frac{df_u}{dn}. \quad (3.107)$$

Аналогічно до уявної функції $f_u(x, y, z)$ поводить себе і реальна функція $f_R(x, y, z)$, але водночас є розходження з уявною функцією на величину невизначеності координат, тобто при переході від крапки $M_R(x + [\mathbf{S}], y + [\mathbf{S}], z + [\mathbf{S}])$ до крапки $M_R(x + dx + [\mathbf{S}], y + dy + [\mathbf{S}], z + dz + [\mathbf{S}])$ при цьому радіус-вектор має опис у наступному вигляді:

$$\mathbf{r}'_R = \mathbf{r}_R + d\mathbf{r} + [\mathbf{S}] = \mathbf{i}(x + dx + [\mathbf{S}]) + \mathbf{j}(y + dy + [\mathbf{S}]) + \mathbf{k}(z + dz + [\mathbf{S}]). \quad (3.108)$$

Як наслідок, функція $f_R(x, y, z)$ буде мати зміни

$$df_R = \frac{\partial f_R}{\partial x} dx + \frac{\partial f_R}{\partial y} dy + \frac{\partial f_R}{\partial z} dz + [\mathbf{S}]. \quad (3.109)$$

Як і у попередньому випадку для виразу (3.103), вираз для df_R можна уявити у вигляді скалярного добутку

$$df_R = \left(\mathbf{i} \frac{\partial f_R}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f_R}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f_R}{\partial z} \right) (\mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz + [\mathbf{S}]), \quad (3.110)$$

де другим множником є нескінченно малий вектор

$$d\mathbf{r}_R = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz + [\mathbf{S}], \quad (3.111)$$

розташований між крапками $M_R(x + [\mathbf{S}], y + [\mathbf{S}], z + [\mathbf{S}])$ та $M_R(x + dx + [\mathbf{S}], y + dy + [\mathbf{S}], z + dz + [\mathbf{S}])$.

Перший співмножник у (3.111) є градієнтом і залежний лише від розташування точки M у реальному просторі, а отже, маємо можливість записати

$$df_R = \text{grad}f_R \cdot (d\mathbf{r}_R + [\mathbf{S}]). \quad (3.112)$$

Так само як і у (3.106), якщо одиничний вектор нормалі йде у напрямку зростаючих значень f_R , то вважаючи, що $d\mathbf{r} = \mathbf{n}(dn + [\mathbf{S}])$, вираз (3.112) набуває наступного вигляду:

$$df_R = \mathbf{n} \cdot \text{grad}f_R (dn + [\mathbf{S}]) = |\text{grad}f_R| (dn + [\mathbf{S}]). \quad (3.113)$$

Водночас, модуль градієнта дорівнює

$$|\text{grad}f_R| = \sqrt{\left(\frac{\partial f_R}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_R}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_R}{\partial z}\right)^2} = \frac{df_R}{dn}. \quad (3.114)$$

Якщо ми попередньо розглядали уявну ситуацію (3.101) - (3.105), то вирази (3.108) - (3.113) відображають вимірювальну систему координат, коли похибка вимірювання менша за $[\mathbf{S}]$. Провідною функцією у нашому випадку є уявна функція $f_u(x, y, z)$, яка через функцію реалізації (I_R) перетворюється у реальну функцію $f_R(x, y, z)$, тобто:

$$f_R(x, y, z) = I_R f_u(x, y, z). \quad (3.115)$$

Але між $f_R(x, y, z)$ та $f_u(x, y, z)$ у пристайних системах координат існує похибка реалізації. Так, наприклад, для системи координат вимірювання різниця не може бути більша за $[\mathbf{S}]$, тобто

$$f_R(x, y, z) - I_R f_u(x, y, z) \leq [\mathbf{S}]. \quad (3.116)$$

Для реальної системи координат, маємо наступний результат

$$f_R(x, y, z) - I_R f_u(x, y, z) \leq \mathbf{D}. \quad (3.117)$$

У обох випадках (3.116) та (3.117) маємо типовий перехід з уявної системи координат до реальної. Наразі, як вже згадувалося у [11], таких переходів може бути безліч, але за загальною тезою розглянемо один окремий крок (фрагмент) руху з одної точки до другої або з одної крапки до другої. Отже, для системи відліку приймаємо невизначеність координати $6D$ у розмірі $[S]$, а для реальної D . Якщо не зважати на зауваження у [11], то у загальній ситуації нас цікавить рух вершини вектора у просторі, тобто, коли матеріальна крапка виконує певний елементарний рух. У такому випадку просторовий рух матеріальної точки у просторі можна уявити як ланцюг невеликих векторів співрозмірних з градієнтом. Вектор, який є носієм градієнта, слід розглядати як вектор-функцію при записі просторового руху в полярній системі координат. Однак при цьому необхідно дотримуватись деяких особливих умов. Так стрілка прогину ділянки не повинна бути більшою за величину $[S]$, а довжина обраної ділянки визначається довжиною правильного циліндра діаметру $[S]$, де обрана ділянка траєкторії торкається його лише два рази. У такому випадку довжина правильного циліндра сприймається як вектор-градієнт, притаманний визначеній ділянці траєкторії, а вся траєкторія як інтегральна послідовність градієнтів.

Оскільки маємо дві системи координат уявну та реальну, то таких траєкторій отримуємо три.

Перша траєкторія уявна, яка зв'язана з уявною системою координат і рухається разом з нею. Ця траєкторія є провідною під орудою якої вишукується реальна траєкторія руху абстрактного об'єкту або БО. Відповідно до уявної системи координат існує система координат відліку та реальна система координат, які є пристайні до уявної. При цьому координати відліку відрізняються від уявних на величину $[S]$. У середині криволінійного циліндру траєкторії знаходиться уявна траєкторія, яка керує реальною. Як наслідок, ми маємо реальну систему координат, яка може відрізнитись на величину D . Модель такого руху (траєкторії) може розглядатися як низка парних векторів

(частково колінеарних), один з яких є уявний, а другий реальний. До того ж, кожний з них є пов'язаним зі своєю системою координат. Таким чином, ми маємо можливість розгляду цієї парної системи як проекції одна на одну з коефіцієнтом масштабування μ та кутом крутіння η (рис. 3.5) [9].

У такому випадку ситуація, яка відбувається у системі координат вимірювання та реальній системі координат є відмінна від уявної, оскільки уявна система показує напрямки дії, але не дає можливості її виконати, для цього існує функція реалізації або фантом реалізації.

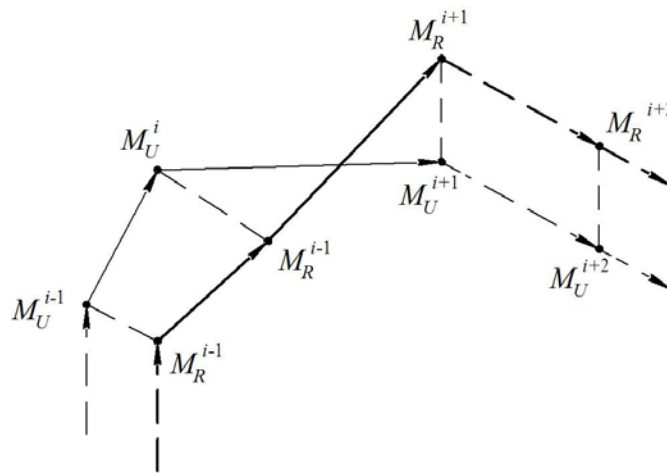


Рис. 3.5. Пристайність траєкторії руху уявної та реальної у градієнтах твірних векторів

Отже, якщо є дві пристайні системи координат, то відповідно їм функції $f_R(x_R, y_R, z_R)$ та $f_u(x_u, y_u, z_u)$ маємо можливість розписати за належністю до своїх координатних систем. Отже, вирази (3.103), (3.104) та (3.110) маємо можливість переписати залежно від своїх конкретних координат, а не від узагальнених, тобто

$$df_u = \left(\mathbf{i} \frac{\partial f_u}{\partial x_u} + \mathbf{j} \frac{\partial f_u}{\partial y_u} + \mathbf{k} \frac{\partial f_u}{\partial z_u} \right) dr_u \quad (3.118)$$

та

$$df_R = \left(\mathbf{i} \frac{\partial f_R}{\partial x_R} + \mathbf{j} \frac{\partial f_R}{\partial y_R} + \mathbf{k} \frac{\partial f_R}{\partial z_R} \right) (dr_R + [\mathbf{S}]) \quad (3.119)$$

для системи вимірювання, або для реальної системи координат

$$df_R = \left(\mathbf{i} \frac{\partial f_R}{\partial x_R} + \mathbf{j} \frac{\partial f_R}{\partial y_R} + \mathbf{k} \frac{\partial f_R}{\partial z_R} \right) (dr_R + \mathbf{D}). \quad (3.120)$$

Оскільки при переході з уявної системи координат до реальної відбувається низка спотворень згідно [11], то маємо можливість зробити наступні підстановки

$$\partial x_R = \mu(1 + \eta) \partial x_u, \partial y_R = \mu(1 + \eta) \partial y_u, \partial z_R = \mu(1 + \eta) \partial z_u, \partial f_R = \mu(1 + \eta) \partial f_u \quad (3.121)$$

Водночас, вирази (3.119) та (3.120) набувають наступного вигляду

$$df_R = \left(\mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x_u} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y_u} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z_u} \right) (dr_R + [\mathbf{S}]) \quad (3.122)$$

$$df_R = \left(\mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x_u} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y_u} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z_u} \right) (dr_R + \mathbf{D}) \quad (3.123)$$

або після перетворень

$$df_R = \text{grad} f_u (dr_R + [\mathbf{S}]) \quad (3.124)$$

для координат вимірювання

$$df_R = \text{grad} f_u (dr_R + \mathbf{D}) \quad (3.125)$$

для реальних координат

Отже, якщо прийняти як у (3.106), що

$$d\mathbf{r} = \mathbf{n}(dn + [\mathbf{S}]) \text{ та } d\mathbf{r} = \mathbf{n}(dn + \mathbf{D}), \text{ то}$$

$$df_R = \mathbf{n} \text{grad} f_u (dn + [\mathbf{S}]) = |\text{grad} f_u| (dn + [\mathbf{S}]) \quad (3.126)$$

для координат вимірювання

$$df_R = \mathbf{n} \text{grad} f_u (dn + \mathbf{D}) = |\text{grad} f_u| (dn + \mathbf{D}) \quad (3.127)$$

для реальних координат.

Якщо розкрити дужки у (3.126) та (3.127) отримуємо наступний результат

$$df_R = |\text{grad} f_u| dn + |\text{grad} f_u| [\mathbf{S}] \quad (3.128)$$

та

$$df_R = |gradf_u|dn + |gradf_u|\mathbf{D} . \quad (3.129)$$

Як наслідок, з (3.128) та (3.129) та використання виразів (3.106) та (3.107) отримуємо наступне

$$df_R = df_u + |gradf_u|[\mathbf{S}], \quad (3.130)$$

та

$$df_R = df_u + |gradf_u|\mathbf{D} . \quad (3.131)$$

Водночас, диференціал функції реалізації з виразів (3.117) та (3.118) буде мати наступний вигляд

$$dI_R = 1 + \frac{|gradf_u|}{df_u} \cdot [\mathbf{S}] \quad (3.132)$$

та

$$dI_R = 1 + \frac{|gradf_u|}{df_u} \cdot \mathbf{D} . \quad (3.133)$$

Якщо скористатися виразами (3.107) та (3.114), то внаслідок перетворень отримуємо наступні вирази

$$dI_R = 1 + \frac{[\mathbf{S}]}{dn} \quad (3.134)$$

та

$$dI_R = 1 + \frac{\mathbf{D}}{dn} . \quad (3.135)$$

Звідкіля після інтегрування отримуємо функцію реалізації

$$I_R = 1 + [\mathbf{S}]\ln|n| \quad (3.136)$$

та

$$I_R = 1 + \mathbf{D}\ln|n| . \quad (3.137)$$

Отже, вираз (3.115) можна переписати у наступному вигляді

$$f_R(x, y, z) = (1 + [\mathbf{S}] \cdot \ln|n|) \cdot f_u(x, y, z) \quad (3.138)$$

та

$$f_R(x, y, z) = (1 + \mathbf{D} \cdot \ln|n|) \cdot f_u(x, y, z). \quad (3.139)$$

З виразів (3.138) та (3.139) видно, що найкращий результат з точності реалізації уявної функції може бути отриманий лише у випадку, коли $\ln|n|=0$.

У такому випадку функція реалізації буде дорівнювати нулю, а уявна функція $f_u(x, y, z)$ дорівнюватиме реальній $f_R(x, y, z)$, тобто у цьому випадку ми розглядаємо лише реальний фантом від уявної функції.

У наступному випадку, коли $\ln|n|=1$ йдеться про повноцінну реалізацію уявної функції $f_u(x, y, z)$ у реальному просторі з притаманними їй похибками.

3.2.1. Моделювання руху руки людини

Як ми мали можливість бачити з попереднього розгляду, змоделювати рух людської кінцівки можна за двома методиками: векторною та матричною. Отже, розглянемо модель кінцівки з шістьма обертальними кінематичними парами. Будемо вважати, що нам відомі узагальнені координати моделі, за які приймає кути відносного повороту ланок у кінематичних парах.

Для вирішення задачі уявно встановимо усі ланки у деяке «нульове» розташування, у якому всі узагальнені координати дорівнюють нулю. Таким чином, розташування моделі у будь-який момент часу визначиться орієнтацією осей його ланок та кінематичних пар та їх спрямуванням. У нульовому положенні вектори, які спрямовані по осях ланок та кінематичних пар, вважаємо відомими. Таким чином, для того, щоб перевести уявну модель кінцівки з «нульової» позиції у позицію, яка задається узагальненими координатами $\varphi_i (i = 1, \dots, 6)$ зробимо низку послідовних поворотів у шарнірах на кути φ_i , починаючи з нерухомої ланки.

Перший поворот виконуємо у шарніру А на кут φ_i (навколо вектора \mathbf{k} (рис. 3.6)).

При цьому, вектори $\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{i}_5, \mathbf{i}_6$ змінять своє розташування і перейдуть у вектори $\mathbf{i}_2^{(1)}, \mathbf{i}_3^{(1)}, \mathbf{i}_4^{(1)}, \mathbf{i}_5^{(1)}, \mathbf{i}_6^{(1)}$. Ці вектори можливо знайти за формулою Родріго:

Третій поворот виконується у шарніру С на кут φ_3 навколо вектора $\mathbf{i}_3^{(1)}$ колінеарного вектора $\mathbf{i}_2^{(1)}$. У цьому випадку змінюється напрямок векторів, пов'язаних з ланками 4, 5, 6. Однак, слід мати на увазі, що два повороти на кути φ_2 та φ_3 навколо паралельних осей еквівалентні одному повороту на кут $(\varphi_2 + \varphi_3)$, а тому маємо право записати

$$\mathbf{j}_s^{(3)} = \mathbf{j}_s \cos(\varphi_2 + \varphi_3) + \mathbf{i}_s \times \mathbf{j}_s \cos \varphi_1 \sin(\varphi_2 + \varphi_3) + \mathbf{i}_s \sin \varphi_1 \sin(\varphi_2 + \varphi_3), \quad s = (3,4) \quad (3.144)$$

Четвертий поворот виконується навколо пари Е, при цьому визначиться нове розташування вісі пари F, яка задається векторами $\mathbf{j}_4^{(3)}$:

$$\mathbf{j}_4^{(4)} = \mathbf{j}_4 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) + \mathbf{k}_4 \cos \varphi_1 \sin(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + \mathbf{i}_4 \sin \varphi_1 \sin(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4). \quad (3.145)$$

П'ятий поворот виконується у парі F на кут φ_5 навколо вектора $\mathbf{i}_5^{(1)}$, при цьому визначається розташування вектора \mathbf{i}_5 , пов'язаного з цією ланкою

$$\mathbf{i}_5^{(5)} = \mathbf{i}_5^{(1)} \cos \varphi_5 + \mathbf{j}_4^{(4)} \times \mathbf{i}_5 \sin \varphi_5 \quad (3.146)$$

та останній поворот на кут φ_6 навколо вектора $\mathbf{i}_6^{(6)}$

$$\mathbf{i}_6^{(6)} = \mathbf{i}_6^{(1)} \cos \varphi_6 + \mathbf{j}_5^{(5)} \times \mathbf{i}_6 \sin \varphi_6. \quad (3.147)$$

Таким чином, після визначення векторів, які визначають розташування вісей пар та ланок, легко знаходимо абсолютні позиції точок людської кінцівки, а головне позицію останньої ланки

$$\mathbf{p}_M = l_1 \mathbf{k} + l_2 \mathbf{j}_2^{(2)} + l_3 \mathbf{j}_3^{(3)} + l_4 \mathbf{j}_4^{(4)} + l_5 \mathbf{j}_5^{(5)} + l_6 \mathbf{j}_6^{(6)} \quad (3.148)$$

$$\mathbf{p}_H = l_1 \mathbf{k} + l_2 \mathbf{j}_2^{(2)} + l_3 \mathbf{j}_3^{(3)} + l_4 \mathbf{j}_4^{(4)} + l_5 \mathbf{j}_5^{(5)} + l_6 \mathbf{j}_6^{(6)} + [\mathbf{S}] \quad (3.149)$$

для здорової людини,

$$\mathbf{p}_H = l_1 \mathbf{k} + l_2 \mathbf{j}_2^{(2)} + l_3 \mathbf{j}_3^{(3)} + l_4 \mathbf{j}_4^{(4)} + l_5 \mathbf{j}_5^{(5)} + l_6 \mathbf{j}_6^{(6)} + \mathbf{D} \quad (3.150)$$

для людини з порушеннями нормальної траєкторії руху кінцівок, де l_i – довжина окремих ланок.

Кут дуальності χ (рис. 3.6) визначиться як співвідношення дуальності \mathbf{D}

до суми довжини ланок (невекторній). Водночас, необхідно враховувати точність розташування першої ланки, тобто величину $[S]$, тобто

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{D - [S]}{|\rho_M| \vee |\rho_H|}. \quad (3.151)$$

Кут дуальності χ має властивість миттєвої сталості, тобто дуальність розташування кожної ланки визначається її віддаленістю від початку координат. Те саме стосується і здорової людини, точність позиціювання кожної ланки завжди менша за $[S]$.

Обернена задача з визначення розташування кінцівки полягає у визначенні позиції окремих ланок за відомим координатами розташування останньої ланки (фаланги пальця).

Звертаючись до рис. 3.6, наша задача полягає у визначенні просторового розташування окремих ланок за координатами розташування останньої, тобто точки М (захвату). Результати вирішення цієї задачі використовуються як при керуванні маніпулятором, так і при проектуванні специфічних характеристик приводів, переміщень кінематичних пар, необхідних для визначення елементів конструкції окремих ланок. Найбільш складною задачею у теорії механізмів вважається задача про визначення розташування просторового семиланкового механізму з обертальними парами. Оскільки, просторовий маніпулятор з шістьма обертальними шарнірами за заданого розташування захвату перетворюється у замкнену систему, то задача визначення відносних розташувань ланок виявляється еквівалентною задачі про розташування просторового механізму з семі ланок. На цей час не отримано аналітичне вирішення цієї задачі у явному вигляді, хоч і існують окремі приватні вирішення. З суто теоретичного погляду можна довести, що для маніпулятора з шістьма обертальними парами обернена задача про розташування може бути зведена до вирішення рівнянь на вище ф-тої ступені лише за умови перетинання трьох послідовних обертальних пар в одній точці. У цьому випадку три обертальні пари виявляються еквівалентними одній сферичній кінематичній парі.

Тим не менш, людська рука має дві головні функціональні ланки.

Перша функціональна частина дозволяє пересувати руку у межах необхідного простору для виконання якихось конкретних технологічних операцій. Виконують цей рух передпліччя променева з ліктьовою кістками, які переміщують руку як таку (кисть) у конкретну точку простору. У межах цього простору рука та пальці мають можливість стиснути конкретний об'єкт і пересувати за необхідністю. При такому розподілі ми маємо можливість розглядати плече як центр узагальнених координат зі своєю матрицею руху. Лікоть виконує функцію другого шарніра, а променева з ліктьовою кісткою рухаються у своїй координатній матриці. Від ліктя до зап'ястя маємо другу ланку, яка несе на собі третю координатну систему зі своєю матрицею.

Для другої функціональної частини від зап'ястя до кінчиків пальців характерним є охоплюючий рух, де вектора (фаланги пальців) виконують фактично плоскопаралельний рух, але все це може бути описано вектором, який проходить від центра зап'ястя до центру площини, яку охоплює великий та вказівний пальці. Таким чином, ми маємо три ланки для моделювання та три матриці. Оскільки, останні чотири фаланги у межах очікуваної точності можна замінити лише одним вектором. Фаланга руки як така має досить велику дуальність у межах долоні та пальців. Тобто, якщо у руку береться певний об'єкт (затискається пальцями), ви не можете визначитися з його координатами, окрім констатування факту «об'єкт знаходиться у руці».

Людська рука виконує безліч різних рухів, тим не менш вони вважаються не такими сильними, як ноги.

Верхня кінцівка складається з чотирьох сегментів: плечового поясу, плеча, передпліччя та кісті (рис. 3.7).

При цьому плечова кістка(А-В) має довжину l_1 (рис. 3.7,б). Променева та ліктьова (В-Е) має довжину l_2 . Довжину вектора Е-М будемо вважати сумою довжин окремих кісток $l_3 + l_4 + l_5 + l_6$. Вектор дуальності **D** та величину похибки [S] позначимо через відрізок МН.

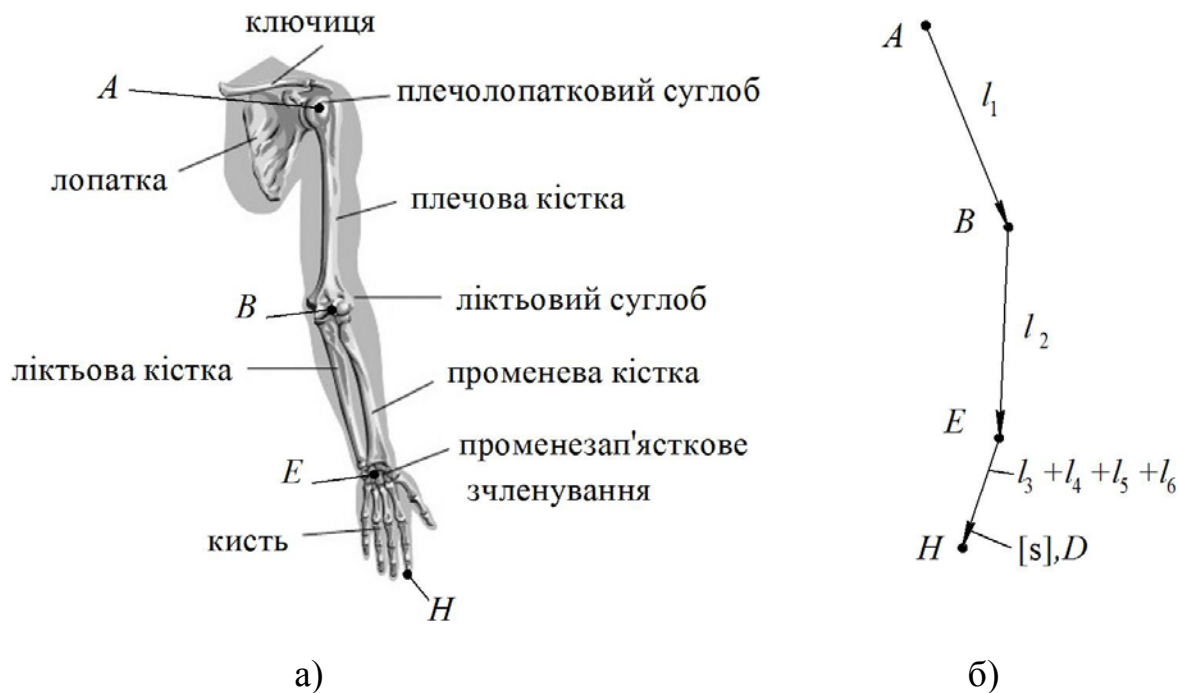


Рис. 3.7. Анатомічна побудова людського тіла (кістак) а) та його векторна модель б)

В ідеальному випадку, коли напрямок руху, вектор $k_i V_p$ співпадає з напрямком AC (рис. 3.8) торкання уявної поверхні відбувається у точці C уявної системи координат. Для того, щоб відреагувала нервова система на момент торкання для визначення координат площини точка C повинна пройти у напрямку точки C' мінімум, а саме $[S]$.

У реальності через інерційність людської нервової системи ця величина буде сягати як мінімум $2 \div 3[S]$. Але знання величини $[S]$ надає можливість визначитися з початковою дуальністю та активною площею людського пальця. Отже, величина

$$D_o = 2\sqrt{2[S](\rho_M \vee \rho_H) - [S]^2} \quad (3.152)$$

або

$$D_o = 2(\rho_M \vee \rho_H) \sin \frac{\gamma}{2}. \quad (3.153)$$

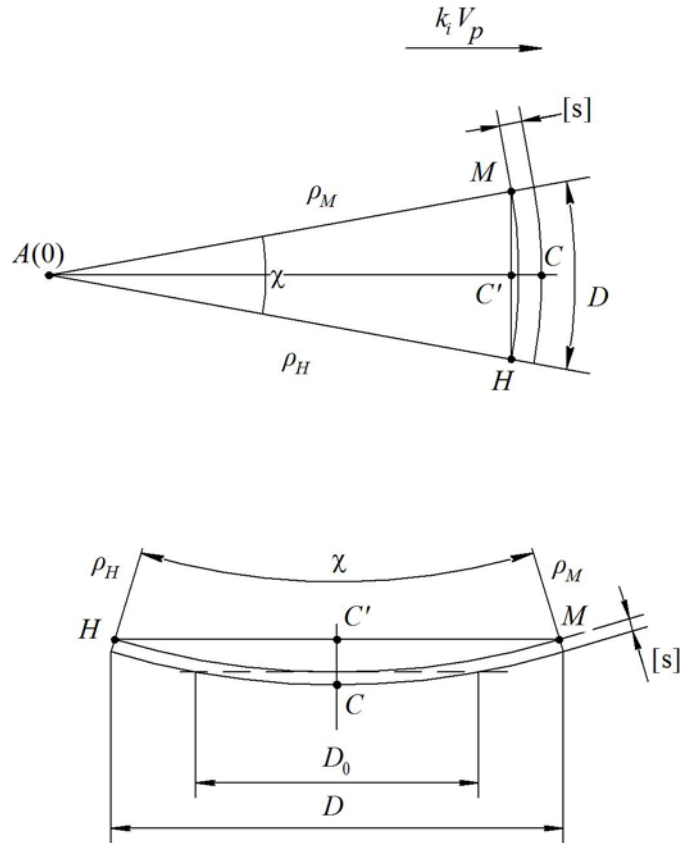


Рис. 3.8. Дуальність людського пальця у момент торкання абстрактної поверхні

При подальшому збільшенні тиску точка C пересувається у точку C' . При цьому стрілка дуги буде дорівнювати $2 \div 3[S]$, а довжина дуги

$$D = \frac{\pi(\rho_M \vee \rho_H)}{180}. \quad (3.154)$$

Активна площа, яка необхідна для визначення моменту торкання, і, як наслідок, координати площини, можна визначити як

$$S_a^\circ = \pi e D_\circ^2, \quad (3.155)$$

де e – ексцентриситет.

Реально обмежитися цим мінімумом не може жодна людина, навіть здорова, а тим більше хвора. Тому основне орієнтування слід проводити на уявну площину, яка проходить через точку C' і має площу

$$S'_a = \pi e D^2. \quad (3.156)$$

При цьому дуальність у напрямку руху буде становити $2 \div 3[\mathbf{S}]$ для здорової людини і $10 \div 15[\mathbf{S}]$ для хворої.

У загальному вигляді об'єм невизначеності буде являти собою сильно стиснутий еліпсоїд за математичним описом

$$\frac{x^2}{(e\mathbf{D})^2} + \frac{y^2}{\mathbf{D}^2} + \frac{z^2}{n[\mathbf{S}]^2} = 1. \quad (3.157)$$

Саме у середині цього об'єму будуть знаходитись точки M та H та відповідні вектори $[\mathbf{S}]$ та \mathbf{D} .

3.3. Фізико-математична модель повної панданної зони біологічних об'єктів на засадах задачі Діріхле

Ми вже розглянули цілу низку властивостей абстрактних та біологічних об'єктів. Наразі це були форма, швидкість руху, траєкторія руху тощо, та створювані цими властивостями елементарні панданні зони. Тим не менш, всі ці необхідно впорядкувати.

За принципом існування абстрактних об'єктів подібна впорядкованість може бути поділена на два великих за своїми розмірами процесів. Оскільки АО постійно існує в зовнішньому середовищі, то тією чи іншою мірою він повинний підлаштовуватися до відповідних силових навантажень з його боку. Це навантаження може бути як незначним, так і доволі потужним. Окрім того, усі АО розподіляються на абстрактні (неживі) та біологічні (живі) об'єкти. При цьому абстрактні (неживі) об'єкти існують у досить широкому діапазоні навантажень. Це як надтверді, так і газоподібні матеріали аж до вакууму. Одночасно з цим вони мають властивість бути середовищем один одному [1]. За свого існування АО підкоряються звичайним фундаментальним фізико-хімічним законам, які за своєю перевагою визначають, який з них буде вважатися середовищем, а який ні. Водночас, зазвичай як середовище сприймається більш піддатливий АО. У такому випадку більш твердий АО знаходиться під дією постійного тиску, що призводить до поступової зміни

його форми. Найпростіший приклад – це каміння, яке під дією потоку води згладжується до геометрії гальки і потім піску. Тобто, як наслідок, з несформованого об'єкту отримуємо форму кульки, яка є енергетично стійким об'єктом до зовнішньої дії.

На відміну від технічних АО, біологічні об'єкти відбудовують свою форму таким чином, щоб максимально використати ресурси середовища, в якому вони знаходяться. Водночас, використовуючи свої здатності до гнучкості, він обходить тверді та небезпечні ділянки. Для БО вкрай важливим є пошук поживних речовин, які необхідні для підтримки життєдіяльності. Особливо важливою проблемою для БО є задача сортування поживних речовин, у зв'язку з цим вони отримали необхідність розвитку кінцівок для видобування та обробки інших об'єктів, тобто різання, відривання, пересування тощо об'єктів, що можуть слугувати їжею. Окрім того, проблемою є можливість побудови певного прихистку, який буде надавати захист на первинних екстремальних випадках. Звісно тут може досить довгий перелік, оскільки живих організмів налічується велика кількість. Стосовно діяльності кінцівок всіх цих об'єктів необхідно зробити один дуже вагоме зауваження: всі вони виконують чітко визначені просторові координати руху. Існує також спеціальне призначення, тобто, наприклад, руки та ноги людини. Для членистоногих цей розподіл є ще більш складним, виконує більш складні рухи. Водночас, необхідно звернути увагу на те, що рух кожної такої кінцівки чітко запрограмований фантомом руху відповідного БО. Відхилення від цієї програми призводить до негативних наслідків для цього БО. Отже, для того, щоб вижити, БО повинно виконувати всі функції в межах своєї ПЗ. Внаслідок специфіки існування БО намагається виконати всі життєво необхідні дії у межах фігури кулястої форми (сфери). Здебільшого не всім це вдається, тим не менш, природа існування БО має безліч прикладів. Отже, якщо ми маємо певну функцію, яка надає можливість опису панданної зони БО, то можливо визначати за відмінностями ступінь функціональної невідповідності зразку. Для цього проведемо дослідження та аналіз ПЗ людини.

Сутність проведення такого дослідження полягає у визначенні схожості теоретичного підґрунтя дії панданних зон біологічних і технічних об'єктів методами вирішення задачі Діріхле для кола або кулі. Ця абстрактна задача досить відома у математичній фізиці [6, 8, 11]. Вирішення нашої задачі має досить вагомі труднощі, а тому ми скористаємось типовим розглядом цієї задачі та її узгодженням до ПЗ АО та живого БО. Це дозволить створити досить точну фізико-математичну модель можливих відхилень траєкторії кінцівки від нормальної при можливому попаданні у визначену необхідну точку з певними координатами.

Висунута гіпотеза базується на наступних засадах.

Як відомо, межа рухливих частин біологічних об'єктів утворює форму кулі як довершеної геометричної фігури. Зовнішня сфера радіусу R_z має функцію опису об'єму панданної зони та її поверхні. Але панданна зона має і внутрішній об'єм, поверхню радіусу R_v . Нормальне функціонування здорового організму надає можливість виконувати відповідні рухи у межах від R_v до R_z . Так само будь-яка довільно обрана точка на поверхні рухливої кінцівки у своїй ідеалізації мала б можливість описувати сферу відповідних розмірів. Тим не менш, це не так. Досягнення сферичної форми ПЗ будь-яка точка може виконувати лише за задачі, пов'язаної з кутами Ойлера при обертанні навколо центру ваги. Наразі повністю виконати умови ідеальної панданної зони можуть лише біологічні об'єкти, які вільно рухаються у просторі. До таких істот можна віднести, наприклад, птахів, риб, комах тощо, які рухаються у повітрі або рідині. Усі інші БО є прив'язаними до напівпростору, оскільки мають можливість руху лише відносно площини (наразі стрибок людини через голову є напівпросторовою ситуацією). Якщо зважити на те, що рух кінцівок є намагання виконати певні життєві функції, то досягнення форми сфери є лише мета, якої бажано досягти. Тим не менш, це неможливо з певних причин. Рух кінцівок людини за часів еволюції набув визначених траєкторій відносно інших об'єктів, мало того, він став досить передбачуваним. Як наслідок, існує різниця

між здоровим і хворим організмом і, як наслідок, траєкторії руху. Певна схожість інтегралу Пуассона та задачі Діріхле з використанням еліптичного рівняння Лапласа надають можливість отримання приблизного визначення проблем стану панданної зони БО, АО.

Задача Діріхле у просторі формулюється наступним чином: знайти функцію $u(x, y, z)$, яка задовольняє рівнянню Лапласа $\Delta u = 0$ у межах замкненої поверхні Γ і яка приймає на межі поверхні значення $u|_{\Gamma} = \tilde{u}$.

Аналогічно формулюється двовірна задача. Задача Діріхле завжди має цілком визначені рішення при деяких досить загальних передумовах Γ, \tilde{U} , що можна вважати цілком зрозумілі з огляду на закони фізики. Наразі само по собі вирішення задачі Діріхле є досить складною математичною задачею. Існує кілька способів вирішення цієї задачі за умови, що гранична умова є раціональна функція вигляду $R(\sin \varphi, \cos \varphi)$.

Двовимірні та тривимірні задачі Діріхле можуть бути вирішені тільки для відносно нескладних типів областей. Тим не менш, існує загальна методика вирішення задачі Діріхле за методом функції Гріна, що базується на формулі Гріна і є наслідком формули Остроградського-Гауса

$$\oint_S A_n d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} dv, \quad (3.158)$$

де S – границя області V ,

$\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі до S ,

$A_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ - проекція вектора \mathbf{A} на напрямок \mathbf{n} .

Отже, якщо ми маємо дві двічі диференціюємі функції $u(x, y, z)$ та $v(x, y, z)$, які задовольняють умовам вектора \mathbf{A} , тобто

$$\mathbf{A} = u \cdot \operatorname{grad} v - v \cdot \operatorname{grad} u, \quad (3.159)$$

тоді

$$A_n = u \cdot \operatorname{grad} v \cdot \mathbf{n} - v \cdot \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{n}. \quad (3.160)$$

Після низки перетворень отримуємо

$$A_n = u \cdot \frac{\partial v}{\partial n} - v \cdot \frac{\partial u}{\partial n}, \quad (3.161)$$

а дивергенція вектора \mathbf{A} визначиться як

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = u \cdot \Delta v - v \cdot \Delta u. \quad (3.162)$$

Підставляючи вирази (3.160) та (3.162) через u, v у формулу Гріна, отримуємо

$$\oiint_S \left(u \cdot \frac{\partial v}{\partial n} - v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = \iiint_V (u \cdot \Delta v - v \cdot \Delta u) dv. \quad (3.163)$$

Нам необхідно зробити узагальнення цієї формули на той випадок, коли область обмежена не одною, а двома поверхнями (рис. 3.9).

Нехай зовнішню поверхню динамічної ПЗ людини W обмежено поверхнею S_3 радіусу R_3 . Внутрішня поверхня, яка являє собою сферу, що обмежує статичну ПЗ людини з радіусом R_B , позначимо як S_1 .

Тоді формула Остроградського-Гауса (3.158) набуває вигляду

$$\oiint_S A_n d\sigma + \oiint_{S_1} A_{n_1} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} dv. \quad (3.164)$$

де n_1 - одиничний вектор зовнішньої нормалі до S_1 , спрямований до її середини.

Як наслідок, формула Гріна набуде вигляду

$$\oiint_{S_1} \left(u \cdot \frac{\partial v}{\partial n_1} - v \cdot \frac{\partial u}{\partial n_1} \right) d\sigma + \oiint_S \left(u \cdot \frac{\partial v}{\partial n} - v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = \iiint_V (u \cdot \Delta v - v \cdot \Delta u) dv. \quad (3.165)$$

Вираз (3.165) є основою методу функції Гріна для вирішення задачі Діріхле у просторі.

Тепер розглянемо визначення функції Гріна для тривимірного випадку (рис. 3.9), де відображено ПЗ людини. Для цього обираємо фіксовану точку $A(x_0, y_0, z_0)$, яка огорнута сферою статичної ПЗ з радіусом $R_B > 0$ і яка повністю знаходиться у межах області Γ . Тоді між обома сферами знаходиться динамічна ПЗ людини W .

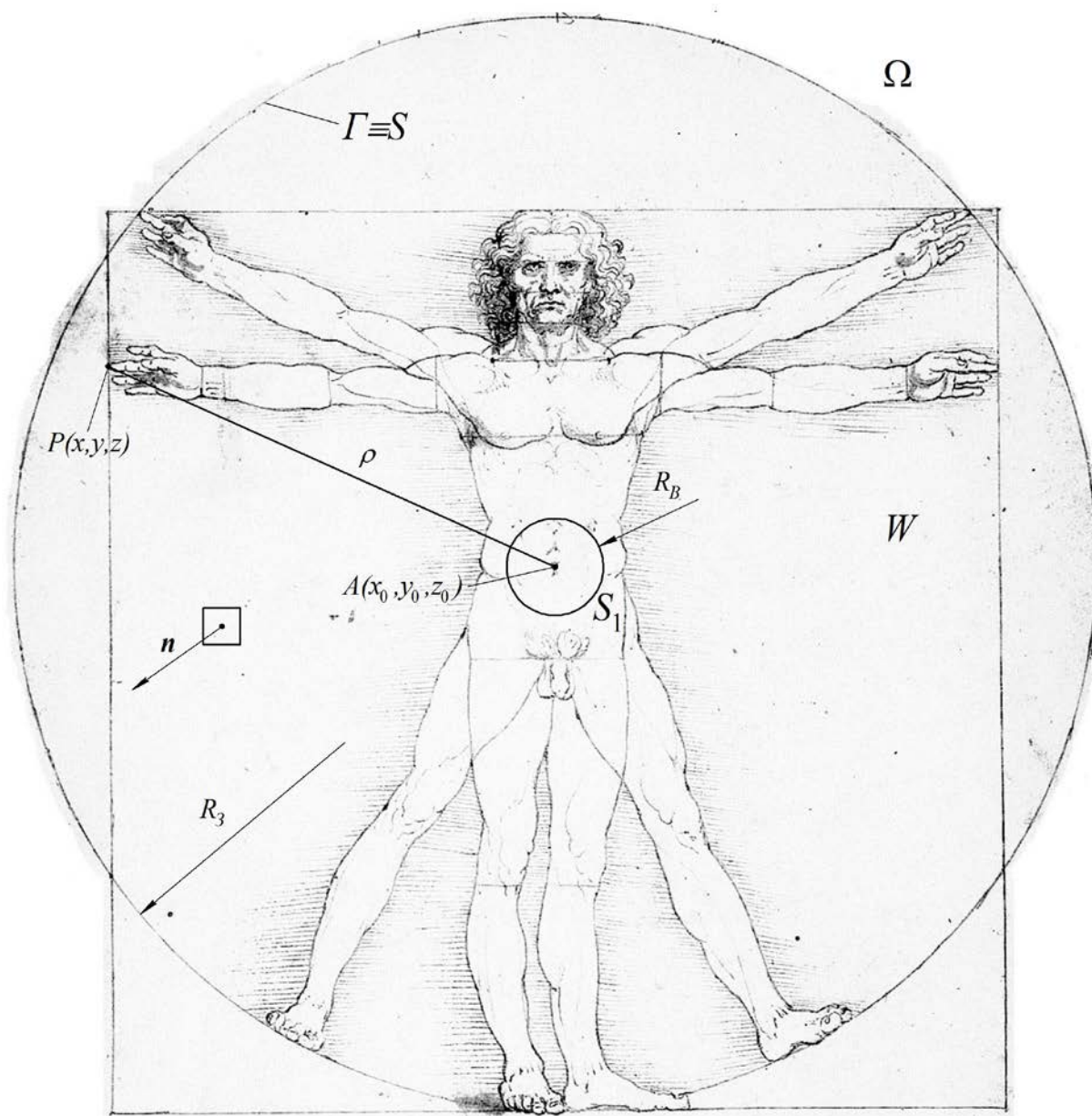


Рис. 3.9. Пояснення моделі панданної зони людини малюнком Леонардо да Вінчі

Через точку $P(x, y, z)$ позначимо одне з положень позиціювання кінцівки людської руки і через ρ – відстань до точки A . У такому випадку відстань між цими точками визначиться як

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \quad (3.166)$$

Досить легко доводиться, що функція

$$w = \frac{1}{\rho} \quad (3.167)$$

є гармонійною і задовольняє рівнянню Лапласа $\Delta w = 0$ у всіх точках, окрім самої точки A , де вона перетворюється на нескінченність. Але у нас є обмеження для величини ρ , тобто ρ завжди більше R_B або дорівнює йому.

Отже, отримуємо наступне

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x - x_0}{\rho}; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{x - x_0}{\rho^3}, \quad (3.168)$$

або аналогічно

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{2(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2}{\rho^2}. \quad (3.169)$$

У такий же спосіб отримуємо інші частинні похідні.

Надалі позначимо через w_1 рішення задачі Діріхле для області Ω з крайовими умовами, тобто

$$w_1|_{\Gamma} = w|_{\Gamma}. \quad (3.170)$$

Як наслідок, функції w_1 , w співпадають лише на границі Γ . Різниця цих функцій є функцією Гріна для області Ω і позначається як

$$G = G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = w_1 + w = w_1 - \frac{1}{\rho}. \quad (3.171)$$

Отже, функція Гріна є залежною від координат фіксованої точки A . Окрім того, з врахуванням умови (3.170) функція Гріна на границі Γ приймає значення «0», тобто

$$G|_{\Gamma} = 0. \quad (3.172)$$

Таким чином, якщо u - вишукувана гармонійна функція в межах області Ω , яка має на границі Γ значення \tilde{u} ; уявимо, що $v = G$ та застосуємо функцію Гріна для області W згідно виразу (3.165). Оскільки у цій області $\Delta u = 0$ і $\Delta v = 0$, права частина в виразі (3.165) обертається в нуль, тобто

$$\oint_{s_1} \left(u \cdot \frac{\partial G}{\partial n_1} - G \cdot \frac{\partial u}{\partial n_1} \right) d\sigma + \oint_{\Gamma} \left(u \cdot \frac{\partial G}{\partial n} - G \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = 0. \quad (3.173)$$

Другий з цих інтегралів через рівняння (3.172) і умови $u|_1 = \tilde{u}$ зведеться до

$$\oint_{\Gamma} \left(\bar{u} \cdot \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\sigma = 0. \quad (3.174)$$

Для обчислення першого інтегралу у виразі (3.173) введемо систему сферичних координат r, θ, φ з початком в точці А. Тоді вираз (3.173) набуває вигляду

$$\rho^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left\{ u \cdot \frac{\partial G}{\partial r} - G \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right\} \Big|_{r=\rho} \cdot \sin \theta d\theta = \oint_{\Gamma} \tilde{u} \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma. \quad (3.175)$$

Права частина цього виразу вочевидь незалежна від величини ρ , і тому вона повинна бути рівна межі лівої частини при $\rho \rightarrow 0$, тоді

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left\{ u \cdot \frac{\partial G}{\partial r} - G \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right\} \Big|_{r=\rho} \cdot \sin \theta d\theta = \oint_{\Gamma} \tilde{u} \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma. \quad (3.176)$$

Дослідження лівої частини виразу (3.176) доводить, що це просто $4\pi u|_{r=0} = 4\pi u(x_0, y_0, z_0)$, оскільки за $r=0$ в якості аргументів функції u ми маємо координати точки А, тобто у кінцевому випадку отримуємо

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} \tilde{u} \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma. \quad (3.177)$$

Ця формула дає рішення задачі Діріхле у просторі, якщо відома функція Гріна G . Окрім суто математичного підґрунтя, функція Гріна G надає теоретичний напрямок для створення приладів діагностики, використовуючи вирази (3.171) та (3.177). Отже, ми отримали значення вишукуваної функції $u(x, y, z)$ в будь-якій точці А області Ω .

Стосовно плаского випадку є можливість використати хвильове рівняння. При цьому використовуються полярні координати, які надають можливість

увести рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ в наступному вигляді

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (3.178)$$

Рівняння (3.178) вирішується за допомогою рядів Фур'є і має результат у вигляді інтегралів Пуассона для зовнішнього та внутрішнього кола. Наразі, оскільки ми маємо два радіуси, то можемо відповідно нашої задачі отримати кінцевий результат (коло) у наступному вигляді:

- для внутрішньої задачі

$$u_B(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - 2\rho R_3 \cos(\varphi - \alpha) + \rho^2} f(\alpha) d\alpha \quad (\rho < R_3). \quad (3.179)$$

- для зовнішньої задачі

$$u_3(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - R_B^2}{\rho^2 - 2\rho R_B \cos(\varphi - \alpha) + R_B^2} f(\alpha) d\alpha \quad (\rho > R_B). \quad (3.180)$$

Згідно постановки задачі Діріхле та її вирішення ситуація, коли $R_3 \geq R_B = 0$ є неможливим, оскільки вирази (3.179) та (3.180) втрачають будь-який сенс. Тим не менш, ситуація може бути іншою, а саме $R_3 \geq R_B = [S]$.

Для випадку, коли $\rho = R_3 = R_B$, а $\cos(\varphi - \alpha) = 1$, ми отримуємо повну рівність інтегралів (3.179) та (3.180)

$$u_B(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_3 + R_B}{R_3 - R_B} f(\alpha) d\alpha. \quad (3.181)$$

Тобто це є інтеграл, який виконує визначення середньої функції для цього випадку.

Отже, у підсумку можна констатувати той факт, що вирішення задачі Діріхле у ПЗ біологічного об'єкта може слугувати математичними засадами до визначення первинних ознак хвороби нервової системи, або рухово-опорного апарату, що супроводжується порушенням просторово-часових координат нормальної траєкторії руху кінцівок, а також голови. Така система діагностики може бути побудованою на засадах виразу (3.181).

Перелік посилань до розділу 3

1. Тимчик Г.С., Скицюк В.І., Клочко Т.Р. Теорія біотехнічних об'єктів. Том 1. Узагальнені властивості біотехнічного об'єкта : монографія Київ : НТУУ"КПІ", ВПК "Політехніка", 2016. 274 с., іл.
2. Скицюк В.І. Елементарна частка похибки // Вісник НТУУ «КПІ». Серія машинобудування. 2016. Вип. 76. С. 121-125.
3. Фізичні засади технології ТОНТОР: монографія / В.І. Скицюк, Г.С. Тимчик, М.А. Вайнтрауб, Т.Р. Клочко. Київ : НТУУ «КПІ», 2010. – 352 с.
4. Тимчик Г.С., Скицюк В.І., Вайнтрауб М.А., Клочко Т.Р. Відчутники контрольно-вимірювальних систем : монографія. Київ : НТУУ «КПІ», 2008. – 240 с., іл. – Бібліогр.: с. 232–239.
5. T. Y. Hwang and C. Guo, “Angular effects of nanostructure-covered femtosecond laser induced periodic surface structures on metals,” J. Appl. Phys., 108, 073523-1–073523-4 (2010).
6. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. Москва : Наука. 1968. 940 с..
7. Кузмичев В.Е. Законы и формулы физики. Київ: Наук. думка, 1989. 864 с.
8. Richard Feynman. The character of physical law, A series of lectures recorded by the BBC at Cornell University USA, Cox and Wyman LTD London, (1965).
9. Павловський М.А. Теоретична механіка: підручник. Київ: Техніка, 2002. 512 с.
10. Каврайский В.В. Избранные труды. Т. 2. Математическая картография. Вып. 1. Общая теория картографических проекций. – Л. : Изд. Управл. начальн. Гидрографич. службы ВМФ, 1958. –272 с.
11. Granino A. Korn, Theresa M. Korn. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review (Dover Civil and Mechanical Engineering). 2 Revised Edition, (2000), 1152.
12. Скицюк, В.І. Панданна зона мікро- та макроповерхні технологічних об'єктів. Частина 2 // Вісник НТУУ «КПІ». Серія приладобудування. 2011. Вип. 42. С.85-91.

13. Бермант А. Ф. Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа для вузов. Москва: Высш. школа.. 1969. 736 с.
14. Крагельский И. В. Трение и износ. 2-е изд., перераб. и доп. Москва : Машиностроение, 1968. 480 с.
15. Польцер Г., Майсснер Ф. Основы трения и изнашивания. Москва :: Машиностроение, 1984. – 264 с.
16. Режим доступа: <http://www.rusnor.org/pubs/articles/9061.htm> [Электронный ресурс].
17. Методи і засоби мікроскопії: монографія. / В.С. Антонюк, Г.С.Тимчик, Ю.Ю.Бондаренко, П.В. Петльований, С.О. Білоконь М.О. Бондаренко. – К.: НТУУ «КПІ», 2013 – 336 с.
18. Мікроскопія в нанотехнологіях: монографія / В.С. Антонюк, Г.С.Тимчик, О.В. Верцанова, Ю.Ю.Бондаренко, С.О. Білоконь М.О. Бондаренко. Київ.: НТУУ «КПІ», 2014 –260 с.
19. Скицюк В.І., Клочко Т.Р. Физика технологии ТОНТОР: монография. Саарбрюкен (Германия): ИД LAP Lambert Academic Publishing, 2015. 332 с.