МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ КЕРУВАННЯ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ

ВИМОГИ ДО КУРСОВОГО ПРОЕКТУ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського

як навчальний посібник для студентів, які навчаються

за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»,

освітньою програмою «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

хімічних виробництв»

Київ

КПІ ім. Ігоря Сікорського

2020

Математичні моделі та методи керування цифрових систем: курсовий проект [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: О. А. Жученко., В. С. Цапар. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,53 МБ). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 39 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 10 від 16.08.2020 р.) за поданням Вченої ради Інженерно-хімічного факультету (протокол № 4 від 01.06.20 р.)

Електронне мережне навчальне видання

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ КЕРУВАННЯ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ
КУРСОВИЙ ПРОЕКТ

Укладачі *Жученко Олексій Анатолійович,* доктор технічних наук, доцент
Цапар Віталій Степанович, кандидат технічних наук, доцент

Відповідальний редактор *Жученко А. І.*, завідувач кафедри «Автоматизація хімічних виробництв», доктор технічних наук, професор

Рецензент *Панов Євген Миколайович,* д.т.н., професор кафедри «Хімічного, полімерного та силікатного машинобудування» інженерно-хімічного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського

Запропонований навчальний посібник містить матеріал для виконання курсового проекту. Сформульовано завдання на курсовий проект, склад та структура. Наведено вказівки до виконання курсового проекту.

Призначений для студентів спеціальності «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» усіх форм навчання.

ЗМІСТ

Вступ

В сучасних умовах ринкової економіки питання виготовлення найкращих виробів, що мають найменшу ціну є над актуальним. Такі вироби мають велику конкурентну перевагу в порівнянні з виробами інших виробників. Це стає можливо лише з застосуванням сучасних систем керування.

Тому вирішення проблем автоматичного керування не втрачає своєї актуальності вже на протязі більш, як століття.

Було розроблено практичний і теоретичний курс з теорії автоматичного управління, який охоплює основні принципи побудови і налаштування цифрових (комп'ютерних) систем керування технологічними апаратами для узагальнення усіх отриманих знань і методів отримання і аналізу інформації.

В роботі розглянуто принципи побудови і переходів між різними видами моделей, методи синтезу лінійних і цифрових систем керування, наведені основні критерії і методи аналізу отриманих систем керування та дані рекомендації стосовно налаштувань.

Після виконання курсового проекту студент досконало оволодіє навичками синтезу лінійних систем керування та поглибленими знаннями синтезу дискретних систем. Так, як студент не обмежений у виборі програмного засобу, то він зможе або отримати навички програмування в нових програмних засобах, які він обере особисто, чи вдосконалити навички володіння програмними засобами, які були ним освоєні з курсів лабораторних робіт. Отримані знання є універсальними і можуть бути застосовані не лише до об'єктів хімічної промисловості, але й до усіх інших апаратів і систем, що мають подібну структуру чи математичне представлення.

Завдання на курсовий проект:

Маємо технологічний об’єкт. Математична модель якого представлена у вигляді s передатних функцій. Схема технологічного об’єкту представлена на рис 1.

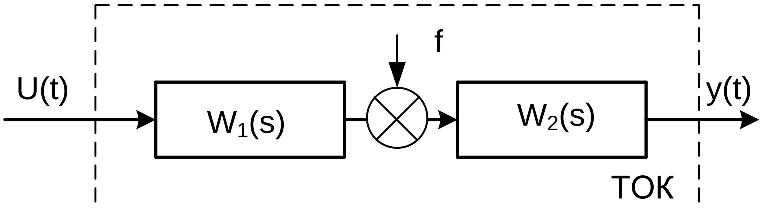

Рисунок 1 – Структурна схема технологічного об’єкту керування.

$$W1(s) := \frac{k1}{T1 \cdot s + 1} \qquad\qquad W2(s) := \frac{k2}{T2 \cdot s + 1}$$

1. Отримати передатну функцію об’єкта керування за каналами:

a. $u \longrightarrow y$ керування $\longrightarrow$ вихід

b. $f \longrightarrow y$ збурення $\longrightarrow$ вихід

2. Розрахувати диференційні рівняння, які описують динаміку ОК за названими вище каналами.

3. Побудувати перехідні і частотні характеристики ОК за названими вище каналами.

4. До об’єкта додати контур керування з від’ємним зворотним зв’язком. Схема системи керування зображена на рис 2. Визначити параметри настройки ПІ та ПІД регулятора, які забезпечують запас стійкості системи не менше 0.1

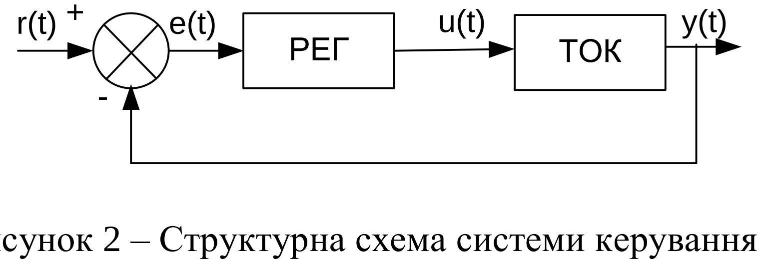

Рисунок 2 – Структурна схема системи керування

5. Дослідити якість отриманої системи керування. Визначити стійкість синтезованої системи за критеріями Гурвиця, Найквіста, Михайлова.

6. Побудувати перехідні процеси в системах керування за каналами «керування-вихід», «збурення-вихід».

7. Вибрати період квантування (Т) за допомогою теореми Котельникова.

8. Математично описати об'єкт керування у чисельному вигляді за допомогою різницевого рівняння.

9. Знайти реакцію об'єкта керування, використавши z-передатну функцію при вхідному сигналі u(t)=1(t) для випадків:

а) ланки не розділені квантувачем;

б) ланки розділені квантувачем.

10.Обчислити z-передатну функцію замкненої системи керування, схема якої зображена на рисунку В3.

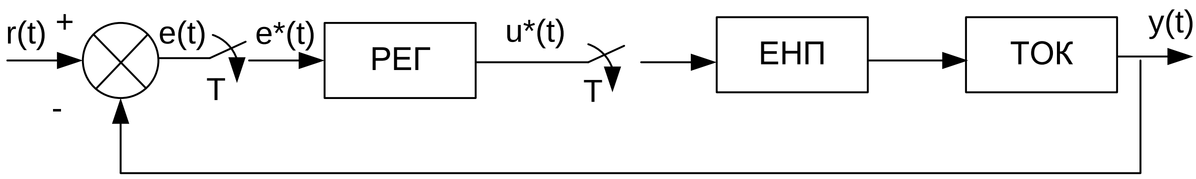

Рисунок В3 – Структерна схема цифрової системи керування

11.Визначити реакцію цієї системи при r(t)=1(t).

12.Побудувати частотні характеристики дискретної системи методом:

а) безпосередньої підстановки;

б) білінійного перетворення.

13. Дослідити стійкість системи керування за допомогою критеріїв:

а) Шура-Кона;

б) Джурі;

в) Гурвиця

14. Побудувати модель ОК в просторі станів

15. Синтезувати асимптотичний спостерігач повного порядку, запас стійкості якого дорівнює 1, а показник коливності у перехідному режимі дорівнює 1,3

16. Синтезувати спостерігач зниженого порядку з такими самими показниками якості.

17. Синтезувати регулятор стану, який забезпечує запас стійкості системи, який дорівнює 1 та показник коливності 1,2

18. Побудувати графіки зміни виходу, змінних стану та керування в системі за її рухом з точки $\vec{x} = [1, 0]^T$

19. Дослідити спостережуваність та керованість синтезованої системи з регулятором стану

Данні до виконання курсового проекту

Варіант	к1	к2	Т1	Т2
1.	№ групи	№ варіанта	1	4
2.	№ групи	№ варіанта	1	5
3.	№ групи	№ варіанта	1	6
4.	№ групи	№ варіанта	1	7
5.	№ групи	№ варіанта	1	8
6.	№ групи	№ варіанта	1	9
7.	№ групи	№ варіанта	1	10
8.	№ групи	№ варіанта	2	5
9.	№ групи	№ варіанта	2	6
10.	№ групи	№ варіанта	2	7
11.	№ групи	№ варіанта	2	8
12.	№ групи	№ варіанта	2	9
13.	№ групи	№ варіанта	2	10
14.	№ групи	№ варіанта	3	6
15.	№ групи	№ варіанта	3	7
16.	№ групи	№ варіанта	3	8
17.	№ групи	№ варіанта	3	9
18.	№ групи	№ варіанта	3	10
19.	№ групи	№ варіанта	4	7
20.	№ групи	№ варіанта	4	8
21.	№ групи	№ варіанта	4	9
22.	№ групи	№ варіанта	4	10

Теоретичні відомості

Мета роботи:

Закріпити і узагальнити вже отримані знання з моделювання лінійних та цифрових систем. А також поглиблено ознайомитись з основними (типовими) методами налаштування і аналізу систем керування.

Набути практичних навичок у налаштуванні систем керування на даних у завданні технологічних об’єктах на ті показники якості, які вимагає замовник (згідно з завдання на проект), а також проведення аналізу отриманих систем керування.

1. Технологічний об’єкт керування

Будь який технологічний об’єкт керування (ТОК) може бути представлений цілим рядом моделей:

- у вигляді диференціального рівняння або системою диференціальних рівнянь,
- у вигляді різницевих рівнянь,
- передатними функціями на s – площині,
- передатними функціями на z – площині,
- подані в просторі станів,
- частотними характеристиками,
- інші.

В наш час при моделюванні ТОК , ми використовуємо теоретичні знання (математичні формули), або практичний досвід (часові характеристики). При теоретичному моделюванні ми оперуючи нашими знання про ТОК описуючи процеси, які в ньому проходять за допомогою диференціальних рівнянь різних порядків. Ці рівняння утворюють системи диференційних рівнянь, які охоплюють різні фізичні, хімічні, біологічні та інші

процеси, в залежності від призначення і режиму, певного технологічного апарату. При експериментальному моделюванні ми отримуємо часові або частотні (дуже рідко, хоча й зустрічаються) характеристики, які потім апроксимують знаходячи найближчу прийнятну структуру (є зрозумілим, що чим більший порядок системи тим краще вона описує процес, проте надмірна деталізація призводить і до надмірності в розрахунках, які майже не відбиваються на точності опису процесу, який також описується з певною точністю).

1.1.Передатні функції. Отримання передатних функцій.

Передатна функція – це відношення зображення або приросту зображення (по Лапласу або у Z формі) вихідного сигналу до вхідного при нульових початкових умовах.

Тим чи іншим чином класичним є наступний варіант визначення передатної функції ТОК.

Нехай маємо диференціальне рівняння (1.1).

$$b_m \cdot \frac{d^m}{dt^m}\big(X(t)\big) + \cdots + b_1 \cdot \frac{d}{dt}\big(X(t)\big) + b_0 \cdot X(t) =$$
$$= a_n \cdot \frac{d^n}{dt^n}(Y(t)) + \cdots + a_1 \cdot \frac{d}{dt}(Y(t)) + a_0 \cdot Y(t) \tag{1.1}$$

де X(t)– вхідний сигнал; Y(t) - вихідний сигнал. При чому $n \geq m$, що є обов’язковою умовою фізичної реалізованості системи. Виходячи з означення змінної Лапласа ($s = p = \frac{d}{dt}$), і передатної функції, як відношення зображень за Лапласом вихідного сигналу до вхідного. Розділивши ліву і праву частину рівняння (1.1) передатна функція матиме вигляд (1.2).

$$W(S) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m \cdot p^m + \cdots + b_1 \cdot p^1 + b_0}{a_n \cdot p^n + \cdots + a_1 \cdot p^1 + a_0} \tag{1.2}$$

Інколи виникає ситуація коли об’єкт є схемою об’єктів, структури яких задані. Тоді виникає необхідність у визначенні загальної структури ТОК. Приклад таких розрахунків приведений нижче:

Нехай маємо структуру об’єкта як показано на рисунку 1.1, з заданими передатними функціями: W1(s), W2(s), W3(s),W4(s).

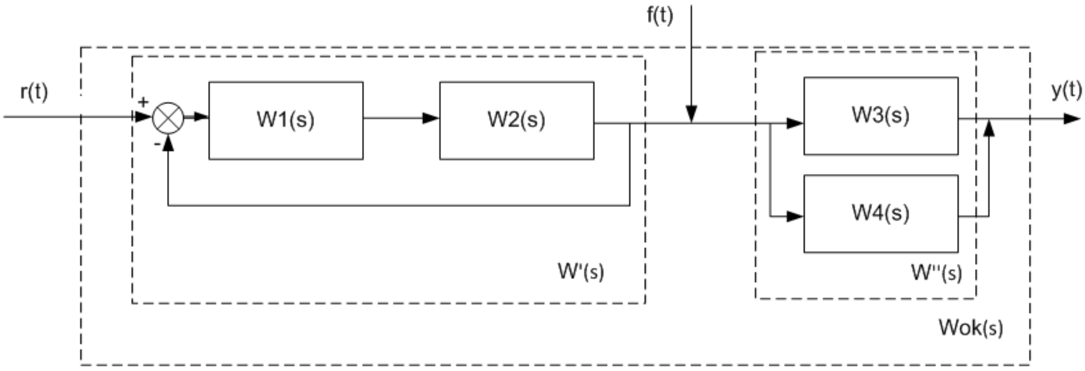

Рисунок 1.1 – Структура об’єкту

Де r(t) - вхідний сигнал, що подається на сигнал; f(t) - збурення, що діє на об’єкт; s - оператор Лапласа.

Тоді передатні функції об’єктів W'(s) та W''(s), що є основоположними так, як описують пряме та паралельне з'єднання, їх форму матимуть вигляд (1.3) та (1.4).

$$W^{'}(s) = \frac{W1(s) \cdot W2(s)}{1 + W1(s) \cdot W2(s)}, W^{'}(s) = W3(s) + W4(s). \tag{1.3,1.4}$$

Враховуючи (1.3) та (1.4) передатна функція по каналу r(t)→y(t) і каналу f(t)→y(t) має вид:

$$Wok(s)_{r(t)\rightarrow y(t)} = W^{'}(s) \cdot W^{''}(s), Wok(s)_{f(t)\rightarrow y(t)} = W^{''}(s),$$

$$Wok(s)_{r(t)\rightarrow y(t)} = \frac{W1(s) \cdot W2(s) \cdot [W3(s) + W4(s)]}{1 + W1(s) \cdot W2(s)}, Wok(s)_{f(t)\rightarrow y(t)} = W3(s) + W4(s).$$

1.2 Дискретні системи

Часто системи (або їх частини) представляються в цифровій (дискретній) формі – на z- площині. Вони можуть бути записані у вигляді z- передатних функцій. Формула співвідношення між z та s площинами наступна:

$$z = e^{s \cdot T},$$

де T - період дискретизації.

Якщо в системі одночасно зустрічаються і неперервна і цифрова системи, то їх зводять до узагальненої z форми, а загальну структуру визначають за тими ж правилами, що й на s - площині (1.3) (1.4). Наприклад якщо ТОК має структур зображену на рисунку 1.2.

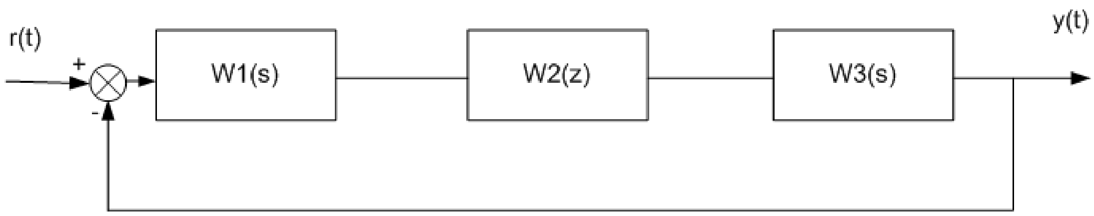

Рисунок 1.2 – Структура змішаної системи

Тоді його передатна функція має вид:

$$W(z) = \frac{\{W1(s)\}W2(z)\{W3(s)\}}{1 + \{W1(s)\}W2(z)\{W3(s)\}},$$

де $\{W1(s)\}, \{W3(s)\}$ - z – зображення відповідних лінійних передатних функцій (функцій в s-області).

1.3 Частотна область

Ще одним видом математичного представлення є частотні характеристики. Суть частотного методу аналізу систем полягає у тому, що якість лінійної стаціонарної дискретної системи оцінюють за її сталою реакцією на гармонічні сигнали виду

$$u(t) = \sin(\omega t)$$

або після квантування

$$u(kT) = \sin(\omega kT),$$

де T – період квантування, k = 0, 1, 2, ...

Згідно з визначенням частотна характеристика – це реакція системи на сигнал типу u(t) або u(kT).

Найбільш загальною частотною характеристикою системи є амплітудно-фазова характеристика (АФХ), що визначається заміною комплексної змінної s у передатній функції системи $W^*(s)$ на jω, тобто:

$$W^*(j\omega T) = W^*(s)\big|_{s=j\omega},$$

Маючи $W^*(j\omega T)$, можна визначити й інші частотні характеристики:

- амплітудно-частотну

$$A^*(\omega T) = \left|W^*(j\omega T)\right|,$$

- фазо-частотну

$$\varphi^*(\omega T) = \arg\left(W^*(j\omega T)\right),$$

- дійсно-частотну

$$P^*(\omega T) = \mathrm{Re}\left(W^*(j\omega T)\right),$$

- уявно-частотну

$$Q^*(\omega T) = \mathrm{Im}\left(W^*(j\omega T)\right).$$

Якщо відомі $P^*(\omega T)$ та $Q^*(\omega T)$, то

$$A^*(\omega T) = \sqrt{\left(P^*(\omega T)\right)^2 + \left(Q^*(\omega T)\right)^2};$$

$$\varphi^*(\omega T) = arctg\frac{Q^*(\omega T)}{P^*(\omega T)}.$$

Відомі й обернені перетворення:

$$P^*(\omega T) = A^*(\omega T)\cos(\omega T);$$

$$Q^*(\omega T) = A^*(\omega T)\sin(\omega T).$$

Також можна записати:

$$W^*(j\omega T) = P^*(\omega T) + jQ^*(\omega T);$$

$$W^*(j\omega T) = A^*(\omega T)\exp\left(j\varphi^*(\omega T)\right).$$

Згідно з формулою

$$W^*(j\omega T) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} W(s + jk\omega_0),$$

де $\omega_0 = 2\pi / T$ – частота квантування, дістанемо:

$$W^*(j\omega T) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} W\left(j(\omega + k\omega_0)\right). \tag{1.3}$$

З (1.3) випливає, що :

$$P^*(\omega T) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} P(\omega + k\omega_0);$$

$$Q^*(\omega T) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Q(\omega + k\omega_0),$$

де $P(\omega)$ та $Q(\omega)$ – дійсно- та уявно-частотна характеристики неперервної системи відповідно:

$$W(s) = P(\omega) + jQ(\omega).$$

Функція $W^*(j\omega T)$ є періодичною з періодом 2π. Тому вона повністю визначається своїми значеннями на інтервалі

$$-\pi \le \omega T \le \pi.$$

Враховуючи те, що $P^*(\omega T)$ – парна функція, а $Q^*(\omega T)$ – непарна, достатньо розглянути інтервал зміни безрозмірної частоти

$$0 \le \omega T \le \pi.$$

Вираз $W^*\left(j\omega T\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}W\left(j\left(\omega+k\omega_0\right)\right)$. незручний для побудови частотних характеристик, тому що він містить нескінченну кількість членів. Тому пропонується декілька методів побудови амплітудно-фазових характеристик для дискретних(цифрових) систем:

1.3.1 Метод безпосередньої підстановки.

Цей метод полягає у тому, що за наявності z-передатної функції системи її АФХ визначається підстановкою $z=e^{j\omega T}$, тобто:

$$W^*\left(j\omega T\right)=W^*\left(z\right)\Big|_{z=e^{j\omega T}}.$$

1.3.2 Метод білінійного перетворення

Застосовуючи цей метод, треба в z-передатній функції системи зробити заміну:

$$z=\frac{1+jw_\omega}{1-jw_\omega}, \qquad (1.4)$$

де w_ω – псевдочастота, яку треба змінювати в діапазоні від 0 до ∞. Перехід до реальної частоти здійснюється за формулою

$$\omega=\frac{2}{T}arctg(w_\omega).$$

Нехай досліджується неперервна система з передатною функцією

$$W\left(s\right)=\frac{1{,}57}{s\left(s+1\right)}. \qquad (1.5)$$

Відповідна дискретна система матиме z-передатну функцію

$$W(z) = 1{,}57 \frac{z\left(1 - e^{-T}\right)}{(z-1)\left(z - e^{-T}\right)}. \tag{1.6}$$

Тоді, підставляючи (1.5) у (1.3), отримаємо розрахункову формулу методу обмеження нескінченного ряду:

$$W(z) = -\frac{1}{T} \sum_{k=-N}^{N} \left[\frac{1{,}57}{(\omega + k\omega_0)^2 - 1} + j \frac{1{,}57}{(\omega + k\omega_0)\left((\omega + k\omega_0)^2 - 1\right)} \right].$$

Для реалізації методу безпосередньої підстановки треба у z-передатну функцію (1.6) підставити $z = e^{j\omega T}$. Маємо:

$$W^*(j\omega T) = 1{,}57\left(1 - e^{-T}\right)\left[\frac{\left(A\cos(\omega T) + B\sin(\omega T)\right)}{A^2 + B^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{j\left(A\sin(\omega T) - B\sin(\omega T)\right)}{A^2 + B^2} \right],$$

де $A = \cos(2\omega T) - \left(1 - e^{-T}\right)\cos(\omega T) + e^{-T}$, $B = \sin(2\omega T) - \left(1 + e^{-T}\right)\sin(\omega T)$.

Після підстановки (1.4) у (1.6) розрахункова формула методу білінійного перетворення буде:

$$W^*(j\omega T) = \frac{1 + \omega^2}{2\omega} \left[\frac{AB}{A^2 - B^2} + j \frac{B^2}{A^2 - B^2} \right],$$

де $A = \omega\left(1 + e^{-T}\right)$, $B = \left(1 - e^{-T}\right)$.

1.4 Побудова часових характеристик

Для побудови реакцій системи на певний вхідний сигнал необхідно знайти зворотне перетворення Лапласа відношення зображення передатної функції об’єкта (системи) до зображення вхідного сигналу.

Перехідна характеристика – реакція об’єкта на одиничний ступінчатий сигнал, при нульових початкових умовах.

$$h(p) = \frac{W(p)}{p}$$

Імпульсна характеристика – реакція об’єкта на одиничний імпульсний сигнал, при нульових початкових умовах.

$$g(p) = W(p)$$

Якщо ж одиничний імпульс подається на вхід дискретної системи, то така характеристика називається зваженою часовою послідовністю.

Рампова характеристика – реакція об’єкта на одиничний рамповий сигнал при нульових початкових умовах.

$$r(p) = \frac{W(p)}{p^2}.$$

Знайшовши зворотне зображення за Лапласом отримуємо відповідні часові характеристики об’єкту:

$$h(t) = L^{-1}\{h(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\}, g(t) = L^{-1}\{g(p)\} = L^{-1}\{W(p)\},$$

$$r(t) = L^{-1}\{r(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p^2}\right\}.$$

1.5 Різницеві рівняння

Одним з можливих варіантів дискретизації об’єкта: подати його у вигляді різницевого рівняння. Існують два типи різницевих рівнянь у відповідності до часового співвідношення:

різницею назад

$$\frac{dF(t)}{dt} \equiv \frac{F_n - F_{n-1}}{T} \tag{1.7}$$

різницею вперед

$$\frac{dF(t)}{dt} \equiv \frac{F_{n+1} - F_n}{T}$$

де n – лінійний час, T- дискретний час.

Вид різниці, що застосовується залежить від того відомо нам початковий (застосовують різницю назад) чи кінцевий (застосовують різницю вперед) стан системи. Так як в системах керування найчастіше відомо початковий стан системи, то в подальшому розглядатимемо різницю назад.

Додатково наведемо рівняння для другого і третього порядку диференціювання, які будуються на базі (1.7):

$$\frac{d^{2}F(t)}{dt^2} \equiv \frac{F_n - 2 \cdot F_{n-1} + F_{n-2}}{T^2} \tag{1.8}$$

$$\frac{d^{3}F(t)}{dt^3} \equiv \frac{F_n - 3 \cdot F_{n-1} + 3 \cdot F_{n-2} - F_{n-3}}{T^3} \tag{1.9}$$

Якщо замінити усі диференціали відповідними різницями, і записати їх відносно n-го моменту часу, то отримаємо рівняння зваженої часової послідовності.

1.6 Простір станів

Також лінійний стаціонарний оберт керування (ОК) може бути представлений у просторі станів, якщо диференційне рівняння представити у формі Коші а потім і в матричній формі. Проілюструємо дану трансформацію:

Нехай задано диференційне рівняння:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + a_2 \cdot \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) = c \cdot u(t) \qquad (1.10)$$

Якщо позначити $x_1 = y, x_2 = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx_1}{dt}$ то з рівняння (1.10) можна скласти систему у формі Коші (1.11)

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = -a_2 \cdot x_3 - a_1 \cdot x_2 - a_0 \cdot x_1 + c \cdot u \end{cases} \qquad (1.11)$$

Де x1, x2, x3 – змінні стану. Отже загальний вигляд ТОК у просторі станів матиме вигляд рівняння (1.12).

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = A \cdot X + B \cdot U \\ Y = C \cdot U \end{cases} \qquad (1.12)$$

Де

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A - перехідна матриця стану розміром (nxn), B – матриця керування розміром (nxm), C – матриця виходу розміром (1xm), u – m-вимірний вектор керування.

В залежності від структури моделі, в диференційній формі, відповідним чином змінюється й вид в формі Коші, що в свою чергу відображається на виді матрицях стану, керування та матрицю виходу. Проте загальний принцип залишається тим самим. Просто автори не вважають за необхідне (поки що), в даному курсі приводити загальні принципи побудови моделі в просторі станів.

Якщо ТОК у просторі станів (1.12),що відповідає безперервному часу, представити у вигляді системи (1.13), що відповідає дискретному часу:

$$\begin{cases} X(k+1) = A \cdot X(k) + B \cdot U(k) \\ \quad Y(k) = C \cdot U(k) \end{cases}$$

(1.13)

Де k - й момент часу в дискретній системі керування.

Задавши початкові умови, (k=0) для змінних стану системи, і для керування, то для певного закону керування можна легко розрахувати рух системи за вищенаведеними формулами (1.12) або (1.13). Таким чином отримується зміна змінних стану і керування.

1.7 Розрахунок періоду дискретизації

Як було зазначено раніше усі дискретні(цифрові) системи розраховуються з певним часом дискретизації (T). Проте раніше не було вказано як його розрахувати. Тому авторами було запропоновано один з можливих,і досить простий, у розрахунках варіант – Імпульсна теорема (Теорема Котельникова). Вона звучить наступним чином:

Будь-який безперервний сигнал x(t) має спектр, обмежений частотою Fmax, то він може бути однозначно і без втрат відновлений за своїми дискретними відліками узятими з частотою

$$f_{dic} = 2 \cdot Fmax$$

або по іншому, за відліками, узятих з періодом

$$f_{dic} = 2 \cdot Fmax$$

Ми ж будемо використовувати один з під методів визначення частоти зрізу: якщо відкинути спектр частота якого займає менше 5% від загальної площі АЧХ об’єкту (розімкненої системи), то частота при якій подальший

спектр рівний нулю і буде частотою зрізу. Для простоти розрахунків ми вибираємо частоту зрізу при якій АЧХ рівна 5% від максимального значення. За формулою (1.14) вираховують розрахункове значення періоду дискретизації.

$$T = \frac{\pi}{\omega\_\text{зрізу}} \tag{1.14}$$

А потім або відкидають дробову частину (якщо є), або корегують сигнал у відповідності до стандартних або наявних кантувачів.

2. Системи керування

Для того, щоб процеси в ТОК проходили скеровано і як найкраще об’єкт модифікують здійснюючи зовнішні впливи за наперед заданими законами керування. Прилад, що забезпечує обчислення величини керуючого впливу у відповідності до завдання та стану об’єкт називають регулятором.

Розглянемо два регулятори :

- ПІД регулятор (як узагальнюючий)
- Регулятор стану

2.1 ПІД регулятор

Узагальнюючим випадком для стандартних регуляторів є Пропорційно – Інтегро – Диференціальний (ПІД) регулятор. Він реагує на тип показника відхилення (відхилення основного параметру від заданого, швидкість зміни відхилення, та прискорення зміни відхилення). Вид показників і їх відношення до перехідного процесу зображені на рис 2.1. Здійснення ком-

пенсаційного впливу (регулювання) по окремому з показників і визначає назву секції регулятора.

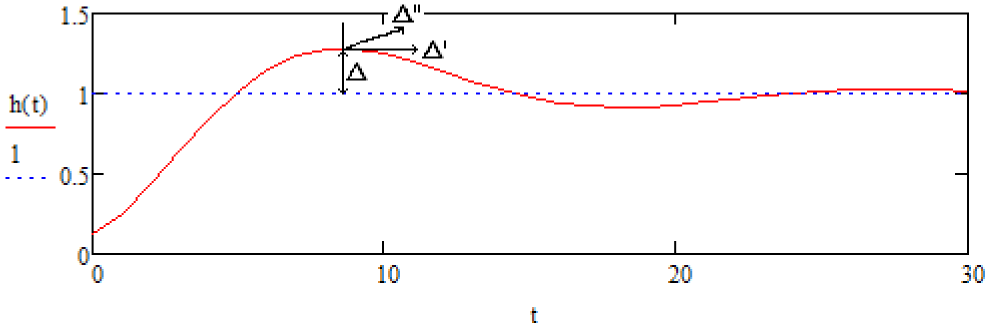

Рисунок 2.1 - Види похибок.

Так компенсація відхилення Δ здійснення інтегрального регулювання; компенсація швидкості відхилення Δ' – пропорційного регулювання; компенсація прискорення відхилення Δ" – диференційного регулювання.

Данні співвідношення пов'язані відповідно до назв:

$$\int \Delta''(t)dt = \Delta'(t) = \frac{d\Delta(t)}{dt}, \text{або } \Delta'' = \frac{d\Delta'(t)}{dt} = \frac{d^2\Delta(t)}{dt^2}$$

Закон керування ПІД регулятора в часі (за відхиленням) має вид (2.1):

$$U(t) = Kr \cdot e(t) + \frac{1}{Ti}\int_0^t e(t)dt + Td \cdot \frac{de(t)}{dx} \qquad (2.1)$$

Де e(t)-величина відхилення, Kr- коефіцієнт підсилення,Ti- постійна інтегрування, Td- стала диференціювання.

На s-площині передатна функція регулятору з (2.1) видозміниться на (2.2):

$$W(s) = Kr + \frac{1}{Ti \cdot s} + Td \cdot s \qquad (2.2)$$

Як вже було сказано ПІД регулятор є загальним випадком стандартних регуляторів: П, І, Д, ПІ, ПД. Їх можна одержати вилучивши певну складову (П,І,Д) шляхом зняття її впливу у передатній функції (Kr=0, Td=0, Ti=∞).

2.2 Регулятор стану

Структура системи керування з регулятором стану наведена на рис 2.4.

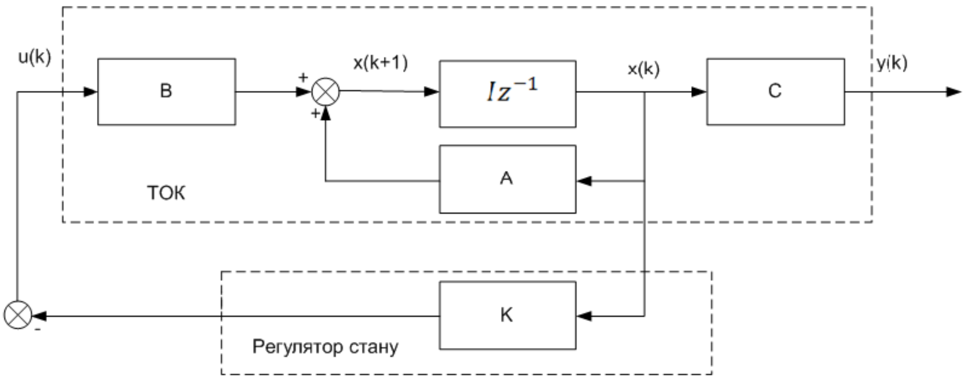

Рисунок 2.4 – Структура системи керування з регулятором стану

u(k),y(k),x(k)- вектори зміни керувань, виходів, та змінних стану на k–ому моменті обчисленна, А - перехідна матриця стану розміром (nxn), В – матриця керування розміром (nxm), С- матриця виходу розміром (1xm).

Регулятору стану має матрицю коефіцієнтів К.

$$K = [k_0 \quad k_1 \quad \cdots \quad k_{n-1}].$$

Об’єкт керування описується рівнянням (2.6):

$$X(k+1) = A \cdot X(k) + B \cdot U(k) \tag{2.6}$$

Рівняння (2.6) може бути представлене в канонічній формі(2.7), якщо використати формулу

$$\vartheta(k) = P \cdot x(k):$$

$$\vartheta(k+1) = A_1 \cdot \vartheta(k) + B_1 \cdot \ \vartheta(k)$$

(2.7)

Де

$$A_1 = P \cdot A \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = P \cdot B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

А матриця перетворення P має вид: $P = \begin{bmatrix} S \\ SA \\ \vdots \\ S \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$, а n– порядок системи.

$$S = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1] \cdot [B \quad A \cdot B \quad \ldots \quad A^{n-1} \cdot B]^{-1}$$

Рівняння зворотного зв’язку за станом моє вигляд (2.8):

$$\begin{aligned} U(k) = -K \cdot X(k) = -[k_0 \quad k_1 \quad \cdots \quad k_{n-1}] \cdot X(k) \\ = -[k_0 \quad k_1 \quad \cdots \quad k_{n-1}] \cdot P^{-1} \cdot \vartheta(k) = = -G \cdot \vartheta(k), \text{де } G \\ = K \cdot P^{-1} = [g_0 \quad g_1 \quad \cdots \quad g_{n-1}] \end{aligned}$$

(2.8)

Враховуючи (2.7) і (2.8) перепишемо канонічну форму розкривши значення матриць :

$$\vartheta(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \vartheta(k) - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [g_0 \quad g_1 \quad \cdots \quad g_{n-1}] \cdot \vartheta(k) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(a_0+g_0) & -(a_1+g_1) & \cdots & -(a_{n-1}+g_{n-1}) \end{bmatrix} \cdot \vartheta(k)$$

Отже відповідне характеристичне рівняння (2.9) має вид:

$$\det(\lambda I - A_1 + B_1 \cdot G) = \lambda^n + \cdots + \lambda \cdot (a_1 + g_1) + (a_0 + g_0)$$
$$= \lambda^n + \cdots + \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha == (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \qquad (2.9)$$

де $\alpha_i = a_i + g_i$i=0,1,…,n-1

Тепер ми можемо налаштовувати систему на необхідні нам кореневі показники якості задаючи значення полюсів системи $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ з рівняння (2.9). Знаючи корені рівняння можна легко знайти значення коефіцієнтів:

$$g_i = \alpha_i - a_i$$

з яких легко визначається значення коефіцієнтів зворотного зв’язку (2.8):

$$K = G \cdot P$$

3. Аналіз систем керування

Крім синтезу системи необхідно, щоб задана система, а отже і технологічний процес задовольняли певним вимогам – критеріям якості (дослідження системи на стійкість), або ж моли певні властивості (спостережу-

ваність, керованість) для реалізованості та доцільності застосування системи керування (СК).

3.1 Стійкість системи керування

Стійкість - властивість систем повертатися в заданий або близький до нього сталий режим після якого-небудь збурення.

3.1.1 Стійкість лінійних системи керування

Для лінійних систем запропоновано три класичні методи визначення стійкості: Гурвіця, Найквіста, Михайлова.

3.1.1.1 Критерій Гурвіця

Критерій Гурвіця є досить простим, але потребує великої кількості обчислень. Він безпосередньо працює з коефіцієнтами характеристичного рівнянні системи. Нехай передатна функція системи має вигляд (3.1):

$$W(S) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{3.1}$$

Де, $A(s)$ - характеристичне рівняння системи, яке має вигляд : $A(s) = a_n \cdot p^n + \cdots + a_1 \cdot p^1 + a_0$. То визначник Гурвіця степеню n будується по алгоритму:

1) по головній діагоналі зліва направо виставляються всі коефіцієнти характеристичного рівняння від a_1 до a_n;

2) від кожного елемента діагоналі вгору і вниз добудовуються стовпці визначника так, щоб індекси зменшувалися згори донизу;

3) на місце коефіцієнтів з індексами менше нуля або більше n ставляться нулі.

Тоді в загальному випадку він матиме вигляд:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & & \vdots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}$$

відповідно до критерію Гурвиця: для того, щоб динамічна система була стійка, необхідно і достатньо, щоб усі n діагональних мінорів визначника Гурвіця були позитивні. Ці мінори називаються визначниками Гурвіця.

3.1.1.2 Критерій Найквіста

Критерій Найквіста : якщо система автоматичного управління стійка в розімкненому стані, то для її стійкості в замкненому стані необхідно і достатньо, щоб АЧХ розімкненої системи W(jw) при зміні w від нуля до нескінченності не охоплювала точку з координатами (-1; j0) комплексної площини.

При використанні даного критерію необхідно побудувати годограф Найквіста (амплітудно-фазова частотна характеристика) розімкненої системи і пересвідчитися, що годограф не охоплює точку з координатами (-1; j0).

3.1.1.3 Критерій Михайлова

Критерій Михайлова формулюється наступним чином: для стійкості лінійної системи n-го порядку необхідно і достатньо, щоб крива Михайло-

ва, побудована на комплексній площині, проходила послідовно через n квадрантів.

Крива Михайлова будується як АФХ полінома, який являє собою характеристичне рівняння передатної функції розімкнутої системи ($A(j\omega)$).

3.1.2 Стійкість дискретних системи керування

Дискретні системи керування також потребують дослідження системи на стійкість. Проте методи, що використовуються для лінійних системи, з зрозумілих причин, принаймні у тому вигляді в якому їх використовують, не можуть бути застосовані в дискретних системах. Тому було розроблено ряд змін в критеріях лінійних систем (критерії Гурвіца, Михайлова та ін.), або розроблені нові, що застосовуються лише в дискретних системах (критерії Джурі та Шура-Кона). В даній роботі було застосовано лише алгебраїчні критерії стійкості, що дають відповідь про стійкість системи за коефіцієнтами її характеристичного рівняння.

3.1.2.1 Критерій стійкості Гурвіця

За кореневим критерієм умовою стійкості дискретної системи є $|\lambda_i| < 1$, де λ_i – корінь характеристичного рівняння системи n-го порядку ($i = 1, 2, ..., n$). Критерії стійкості дискретних систем дозволяють перевірити цю умову, не визначаючи самих λ_i.

Нехай система має z-передатну функцію (3.2).

$$W(z) = \frac{B(z)}{A(z)}, \tag{3.2}$$

тоді характеристичне рівняння буде представлено у вигляді:

$$A(z) = 0,$$

або

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

є характеристичним рівнянням системи, яке можна подати так:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \qquad (3.3)$$

Для перевірки стійкості системи за допомогою критерія Гурвіца, який використовується для неперервних систем, для дискретних треба спочатку виконати w-перетворення (3.4) виду

$$\lambda = \frac{1+w}{1-w}, \qquad (3.4)$$

що перетворить комплексну площину змінної λ на комплексну площину змінної w.

Підставляючи (3.4) в (3.3), маємо:

$$a_n \frac{(1+w)^n}{(1-w)^n} + a_{n-1} \frac{(1+w)^{n-1}}{(1-w)^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{(1+w)}{(1-w)} + a_0 = 0. \qquad (3.5)$$

Зводячи ліву частину рівняння (3.5) до спільного знаменника та відкинувши знаменник, дістанемо:

$$a_n (1+w)^n + a_{n-1} (1+w)^{n-1} (1-w) + \ldots + a_1 (1+w)(1-w)^{n-1} + a_0 (1-w)^n = 0. \qquad (3.6)$$

Після розкриття дужок та зведення подібних членів рівняння (3.6) набуде виду(3.7):

$$d_n w^n + d_{n-1} w^{n-1} + \ldots + d_1 w + d_0 = 0. \qquad (3.7)$$

Якщо рівняння, відповідає стійкій системі, то корені рівняння будуть розташовані у лівій напівплощині площини w.

Тепер на базі рівняння (3.7) формуємо матрицю Гурвіца за відомим для неперервних систем алгоритмом:

$$\Delta = \begin{bmatrix} d_{n-1} & d_{n-3} & d_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ d_n & d_{n-2} & d_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_{n-1} & d_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_2 & d_0 \end{bmatrix}.$$

Згідно з критерієм Гурвіца система є стійкою, якщо усі головні діагональні мінори матриці Гурвіца Δ додатні. Отже, якщо усі головні діагональні мінори матриці Гурвіца додатні, то всі корені характеристичного рівняння передатної функції дискретної системи розташовані всередині одиничного кола.

3.1.2.2 Критерій стійкості Шура-Кона

Нехай характеристичне рівняння дискретної системи має вид(3.3)

Вважатимемо, що коефіцієнти a_i (i = 0,1, 2, …, n) – дійсні.

Сформуємо послідовність визначників, що складаються з коефіцієнтів рівняння:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} A_{0m} & A_{nm} \\ A_{nm}^T & A_{0m}^T \end{vmatrix}, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

$$A_{0m} = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

$$A_{nm} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_{n-m+1} \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_{n-m+2} \\ 0 & 0 & a_n & \dots & a_{n-m+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Якщо усі визначники Δ_m (m = 1, 2, …, n) відмінні від нуля, то рівняння (8.1) не має коренів на одиничному колі $|\lambda_i| = 1$, а кількість його коренів, розташованих поза одиничним колом, дорівнює кількості змін знака у послідовності 1, Δ_1, Δ_2, …, Δ_n. Отже, система є стійкою (усі корені характеристичного рівняння лежать всередині одиничного кола), якщо кількість змін знака у вказаній послідовності дорівнює n. Це необхідна і достатня умова стійкості системи.

При обчисленні визначників Δ_m можна користуватись формулою

$$\Delta_m = \left| A_{0m} A_{0m}^T - A_{nm}^T A_{nm} \right|.$$

3.1.2.3 Критерій стійкості Джурі

Перепишемо характеристичне рівняння (3.3) у вигляді (3.8)

$$D(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad a_n > 0. \tag{3.8}$$

Складемо таблицю з коефіцієнтів цього рівняння (табл. 1).

Таблиця 1

Номер рядка								
1	a_0	a_1	a_2	…	a_{n-k}	…	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_k	…	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	…	b_{n-k}	…	b_{n-1}	—

4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{k-3}	…	b_k	…	b_0	—
5	c_0	c_1	c_2	…	…	c_{n-2}	—	—
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	…	…	c_0	—	—
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2n–1	p_0	p_1	p_2	p_3	—	—	—	—
2n–2	p_3	p_2	p_1	p_0	—	—	—	—
2n–3	q_0	q_1	q_2	—	—	—	—	—

Елементами першого рядка таблиці є коефіцієнти рівняння, починаючи з a_0. Елементи непарних рядків таблиці, починаючи з третього, визначаються за (3.9):

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix},$$

$$d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2-k} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix}, \quad ..., \quad q_0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_3 & p_0 \end{vmatrix}, \quad q_2 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}. \tag{3.9}$$

Елементи парних рядків таблиці, починаючи з другого рядка, формуються з попередніх непарних рядків, але записуються у зворотному порядку.

Необхідною і достатньою умовою стійкості системи, а отже, відсутності коренів характеристичного рівняння (3.8) на та поза одиничним колом є виконання сукупності таких нерівностей :

$$D(1) > 0,$$

$$D(-1) = \begin{cases} > 0, \text{якщо } n \text{ парне}, \\ < 0, \text{якщо } n \text{ непарне}. \end{cases}; \tag{3.10}$$

$$\left.\begin{array}{l} |a_0| < a_n; \\ |b_0| > |b_{n-1}|; \\ |c_0| > |c_{n-2}|; \\ |d_0| > |d_{n-3}|; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ |q_0| > |q_2|. \end{array}\right\} (n-1) \text{ нерівностей.} \quad (3.11)$$

3.2 Спостережуваність та керованість

3.2.1 Спостережуваність

Спостережуваність - властивість системи , за спостереженням її вихідних величин x(t), при заданих вхідних керуваннях u(t), визначити всі координати стану системи, за обмежений проміжок часу.

Перепишемо систему (1.12) у систему (3.12):

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = A \cdot X + B \cdot U \\ Y = C \cdot U \end{cases} \quad (3.12)$$

Де, A - перехідна матриця стану розміром (nxn), B – матриця керування розміром (nxm), C- матриця виходу розміром (1xm), u- m-вимірний вектор керування.

То для того, щоб проаналізувати чи є система спостережувана треба проаналізувати відповідну матрицю (1.13):

$$H = [C^T \quad A^T C^T \quad (A^T)^2 C^T \quad \cdots \quad (A^T)^{n-1} C^T] \quad (3.13)$$

Для визначення рангу матриці розглядають мінори: якщо вудь-який мінор порядку R, відмінний від нуля, а мінори вищих порядків дорівнюють нуль, то R і буде рангом матриці.

Якщо ранг матриці H дорівнює порядку системи (n), то система є повністю спостережувана, якщо ж порядок нижчий від n, але більший за 0, система частково спостережувана, у випадку, коли n=0 – система є не спостережувана.

Примітка: при аналізі цифрових систем керування необхідно перераховувати значення матриці керування та перехідної матриці стану (Φ, Θ).

3.2.2 Керованість

Керованість – здатність системи , коли в результаті дії певного керуючого впливу U(t), впродовж скінченого часу, її можна перевести з початкового (x0) в кінцевий (xk) стан. В такому разі система називається повністю керованою, якщо ж дана властивість спостерігається лише за частиною станів – таку систему називають частково керованою, коли дана властивість відсутня за всіма координатами, таку систему називають повність некерованою.

Якщо система задана у просторі станів системою (3.12):

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = A \cdot X + B \cdot U \\ Y = C \cdot U \end{cases}$$

Де, A - перехідна матриця стану розміром (nxn), B – матриця керування розміром (nxm), C- матриця виходу розміром (1xm), u- m-вимірний вектор керування.

То для того, щоб проаналізувати чи є система керованою треба проаналізувати відповідну матрицю (3.14):

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \tag{3.14}$$

Якщо ранг матриці S дорівнює порядку системи (n), то система є повністю керованою, якщо ж порядок нижчий від n, але більший за 0, система є частково керована, у випадку, коли n=0 – система є не керованою.

Примітка: при аналізі цифрових систем керування, необхідно перерахувати значення матриці керування та перехідної матриці стану (Φ, Θ).

Контрольні запитання

1. Що таке стійкість системи? Як визначити область стійкості і запас стійкості системи ?
2. Що таке стійкість системи? Визначення стійкості лінійних систем за критерієм Гурвиця.
3. Що таке стійкість системи? Визначення стійкості лінійних систем за критерієм Найквіста.
4. Що таке стійкість системи? Визначення стійкості лінійних систем за критерієм Михайлова.
5. Визначення періоду дискритизації згідно з теоремою Котельникова.
6. Що таке різницеве рівняння? Вивести різницеве рівняння для свого об’єкту керування.
7. Розкрити суть методів побудови частотних характеристик методами: безпосередньої підстановки та білінійного перетворення.
8. Що таке стійкість системи? Визначення стійкості дискретних систем за критерієм Шура - Кона.
9. Що таке стійкість системи? Визначення стійкості дискретних систем за критерієм Джурі.
10. Що таке стійкість системи? Визначення стійкості дискретних систем за критерієм Гурвиця.

11. Як подати модель у просторі станів? Навести приклад.
12. Як здійснюється синтез регулятору стану за заданим розташуванням коренів системи.
13. Як визначити ранг матриці? Поняття спостережуваності та керованості.
14. Як визначити спостережуваність системи?
15. Як визначити керованість системи?
16. Опишіть ПІД - регулятор. Як визначити z - передатну функцію системи, що містить лінійну та цифрову частину?

Список використаної літератури

1. Анисимов И. В. Основы автоматического управления технологическими процессами нефтехимической и нефтеперерабатывающей промышленности / И. В. Анисимов. – Л.: Химия, 1967 – 408 с.
2. Жученко А. И., Кубрак Н. А., Голинко И. М. Динамика объектов с сосредоточенными параметрами / А. И. Жученко, Н. А. Кубрак, И. М. Голинко. – НТУУ «КПИ», 2006 – 152 с.
3. Жученко А.И., Ярощук Л.Д. Спеціальні розділи математики для дослідження комп'ютерних систем / А. И. Жученко, Л.Д. Ярощук. – К.: Політехніка, 2002. – 208 с.
4. Жученко А. І., Аверіна Т. В., Жученко О.А.. Аналіз дискретних систем: Метод. вказівки до викон. лаборатор. робіт з курсу "Теорія автоматичного керування" / А. И. Жученко, Т. В. Аверіна, О.А Жученко. – К.: Політехніка 2011. – 64 с.
5. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления: Пер. с английского / Б. Куо. – М.: Машиностроение, 1986 – 448 с.
6. Метод. вказівки до викон. лаборатор. робіт з курсу "Теорія автоматичного керування", для студ. спец. "Автоматизоване управління технологічними процесами" напряму "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технологічні комплекси" Уклад.: А. І. Жученко, Т. В. Аверіна, О.А.Жученко. - К., 2011.
7. Остапенко Ю. О. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів керування / Ю. О. Остапенко – Київ.: Задруга, 1999. – 420 с.