

УДК 621.365.32.621.3.024

М.Ю. Литвинчук, І.Л. Шилович

## СПРОЩЕНА МЕХАНІЧНА МОДЕЛЬ ЛАНЦЮГА ЕЛЕМЕНТІВ СИПУЧОГО МАТЕРІАЛУ

## Вступ

У промисловості графітація циліндричних заготовок електродів відбувається в спеціальних печах Ачесона при температурах (2500–3000) °С завдяки джоулевій теплоті, що виділяється при протіканні електричного струму через kern печі, який сформований із заготовок та кернової пересипки з коксу. Процес виробництва електродів належить до стратегічних секторів промисловості і тому обмежено описаний у літературі [1–3].

Ефективність нагріву заготовок електродів у печі визначається густиною електричного струму. Авторами [4] показано, що електричний опір у комірці залежить безпосередньо від контактних опорів у пересипці. З [5] відомо, що контактний опір у гранульованих матеріалах (бездротових опорах) залежить, в свою чергу, від величини нормального стискання в напрямку поширення електричного струму. В [6] сипучий матеріал розглядається як суцільне пружне тіло. Однак оцінка ефективного електричного опору вимагає більш детального розгляду стану сипучого тіла із врахуванням контактної взаємодії.

## Постановка задачі

Головним завданням оцінки енергетичного стану тепловідляючої комірки керна є розрахунок густини електричного струму. Беручи до уваги висновки згаданих вище праць [4, 5], для визначення електричного опору комірки необхідно виконати оцінку механічної взаємодії частинок пересипки з коксу, які мають складну геометричну форму. Детальний аналіз такої взаємодії в реальному сипучому матеріалі має значні труднощі. З [7] відомі спрощені моделі сипучих тіл, наприклад, у вигляді сфер, що дає змогу виконувати інженерні розрахунки. Тут окремі частинки сипучого матеріалу подано у вигляді двовимірних прямокутників із заданим модулем пружності. Проміжки між прямокутниками заповнені демпфуючим матеріалом (далі – прошарок) з модулем пружності,

який відрізняється від модуля пружності частинок сипучого матеріалу.

Метою даної статті є оцінка зміни нормального напруження стискання ланцюга, складеного із вказаних вище елементів при зміні їх кількості.

## Методика числового розв'язання задачі

Принципова схема ділянки керна печі, яка складається з коксової пересипки (тепловидляюча комірка) та чвертей поперечного перерізу заготовок, наведена на рис. 1. Надалі виділимо окремі частинки коксової пересипки та контакти між ними як струмопровідні ланцюги.

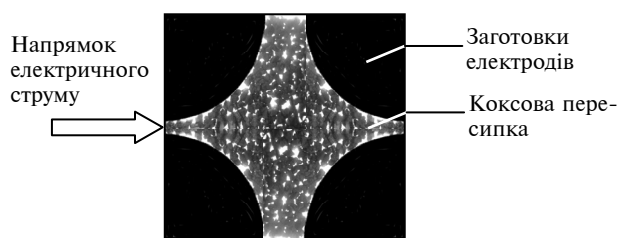


Рис. 1. Розташування заготовок та пересипки в печі графітації Ачесона (кern)

Для оцінки механічного стану коксової пересипки візьмемо спрощену двовимірну модель сипучого матеріалу. Окремі частинки пересипки (елементи) – прямокутної форми довжиною  $l_1$  і з модулем пружності  $E_1$ . Зона контакту між елементами (прошарки) обмежена прямокутником довжиною  $l_2$  і з модулем пружності  $E_2$ . Розрахункову механічну модель сипучого матеріалу наведено на рис. 2.

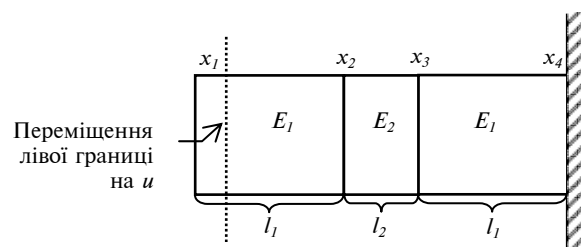


Рис. 2. Розрахункова двовимірна модель ділянки сипучого матеріалу, де  $x_1, x_2, x_3, x_4$  – координати переміщень меж елементів, м;  $u$  – задане переміщення лівої вільної межі від початкового положення, м

Припустимо, що ліва границя під дією зовнішнього зусилля перемістилася на відстань

$x_1$ . Переміщення інших границь позначимо  $x_2, x_3, x_4$ , відповідно. Вважатимемо праву границю абсолютно жорсткою.

Аналіз математичної моделі виконаний на підставі співвідношень, описаних у праці [8]. Виходячи з того, що показані на рис. 1 елементи механічної системи знаходяться в стані рівноваги, запишемо закон Гука для системи у вигляді

$$\frac{E_1(x_2 - x_1)}{l_1} = \frac{E_2(x_3 - x_2)}{l_2} = \frac{E_1(x_4 - x_3)}{l_1}. \quad (1)$$

Механічний стан рівноваги відповідає співвідношенню

$$\frac{x_2 - x_1}{l_1} + \frac{x_3 - x_2}{l_2} + \frac{x_4 - x_3}{l_1} = \frac{x_1 - x_4}{l_1 + l_2 + l_1}. \quad (2)$$

Вважатимемо, що величина переміщення лівої границі від початкового значення становить  $x_1 - x_4 = u$  (рис. 1), а оскільки права границя абсолютно жорстка, то  $x_4 = 0$  і  $x_1 - x_4 = x_1 - 0 = u$ .

Для механічної системи із загальною кількістю  $N$  однакових елементів і  $(N - 1)$  однакових прошарків вираз (1) має вигляд системи лінійних рівнянь, розв'язання якої виконується за допомогою матричного методу. Матриця коефіцієнтів при невідомих  $x_2, \dots, x_{N-1}$  і вектор-стовпчик вільних членів мають вигляд

$$A = \begin{bmatrix} E_1 l_{2i} + E_{2i} l_i & -E_{2i} l_i & & & \\ E_{2i} l_i & -(E_1 l_{2i} + E_{2i} l_i) & & & \\ 0 & E_1 l_{2i} & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ E_1 l_{2i} & 0 & 0 \\ -(E_1 l_{2i} + E_{2i} l_i) & \dots & 0 \\ E_{2i} l_i & \dots & 0 \\ 0 & \dots & E_{2i} l_i \\ 0 & 0 & -(E_1 l_{2i} + E_{2i} l_i) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} E_1 l_2 u \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2,6)$$

Розв'язок системи лінійних рівнянь має вигляд  $X = A^{-1}B$ .

Парні та непарні корені системи лінійних рівнянь відповідають виразам

$$x_{2n} = (N - n_e) \frac{\frac{E_1 l_2}{E_2 l_1} + 1}{(N - 1) \frac{E_1 l_2}{E_2 l_1} + N} u, \quad (3)$$

$$x_{2n+1} = \frac{(N - n_n - 1) \frac{E_1 l_2}{E_2 l_1} + (N - n_n)}{(N - 1) \frac{E_1 l_2}{E_2 l_1} + N} u,$$

де  $N$  — загальна кількість елементів;  $(N - 1)$  — загальна кількість прошарків;  $n_e$  — поточний порядковий номер розрахункового елемента;  $n_n$  — поточний порядковий номер розрахункового прошарку.

З метою уточнення моделі наведемо схему (рис. 3) з позначеннями використаних у формулі (3) параметрів.

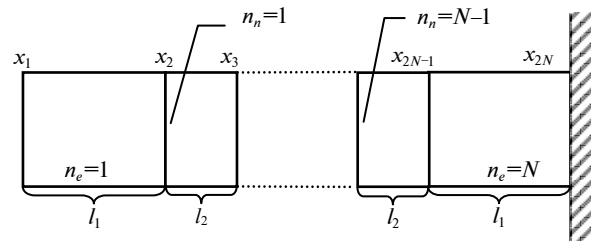


Рис. 3. Порядок нумерації елементів та прошарків, де, крім раніше вказаних, додатково показані величини:  $x_{2N-1}, x_{2N}$  — координати перемішень границь елементів, м;  $n_e$  — поточний порядковий номер

Якщо згідно з роботою [6] прийняти, що розміри площин контактів частинок сипучого

матеріалу досить малі, то навіть при невеликих середніх розрахункових напруженнях дійсні напруження в контактах можуть досягати значень виникнення пластичних деформацій, тобто у розрахунковій моделі, що розглядається, можемо вважати, що прошарки, які імітують контактну взаємодію елементів, мають модулі пружності, набагато менші за модулі пружності елементів ( $E_1 \gg E_2$ ). Беручи до уваги, що

$$l_1 \gg l_2, \text{ будемо вважати, що } \frac{E_1 l_2}{E_2 l_1} \approx 1.$$

Отже, вирази (3) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} x_{2n} &= (N - n_e) \frac{2}{(N-1) + N} u = (N - n_e) \frac{2}{2N-1} u \\ x_{2n+1} &= \frac{(N - n_n - 1) + (N - n_n)}{(N-1) + N} u = \frac{2(N - n_n) - 1}{2N-1} u. \end{aligned} \quad (4)$$

Відносні переміщення елементів ланцюга обчислюються як

$$\begin{aligned} \Delta_{2n} &= \frac{x_{2n+1} - x_{2n}}{l_2} = \frac{2N - 2n_n - 1}{2N-1} \frac{u}{l_2} - \\ &- \frac{2N - 2n_e}{2N-1} \frac{u}{l_2} = \frac{2(n_e - n_n) - 1}{2N-1} \frac{u}{l_2}, \\ \Delta_{2n+1} &= \frac{x_{2n} - x_{2n+1}}{l_1} = \frac{2N - 2n_e}{2N-1} \frac{u}{l_1} - \\ &- \frac{2N - 2n_n - 1}{2N-1} \frac{u}{l_1} = \frac{2(n_n - n_e) + 1}{2N-1} \frac{u}{l_1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Підставивши для непарних відносних переміщень елементів ланцюга  $(n_n - n_e) = -1$ , а для парних —  $(n_n - n_e) = 0$  у співвідношення (5), отримаємо:

$$\Delta_{2n+1(2n)} = \frac{-1}{2N-1} \frac{u}{l_{1(2)}} = \frac{1}{1-2N} \frac{u}{l_{1(2)}}. \quad (6)$$

З метою узагальнення формули (6) покладемо, що для будь-якого непарного елемента з порядковим номером  $i = 2n+1$  поточна довжина набуває значення  $l_i = l_1$ , а для парного —  $i = 2n - l_i = l_2$ .

Із врахуванням вказаних зауважень для практичних розрахунків отримаємо узагальнений вираз:

$$\Delta_i = \frac{1}{1-2N} \frac{u}{l_i}. \quad (7)$$

Таким чином, напруження стискання для ланцюга з рівномірно розміщених  $N$  елементів та  $(N-1)$  прошарків, модулі пружності яких суттєво відрізняються, визначаються за формулою:

$$\sigma_N = E_i \Delta_i. \quad (8)$$

### Результати розрахунків

Розраховані за умови  $E_i \frac{u}{l_i} = 1$  відносні напруження стискання ланцюга  $\bar{\sigma}_{N=3}$ ,  $\bar{\sigma}_{N>10}$  при кількості елементів  $N = 3$  і  $N > 10$ , відповідно, показані на рис. 4

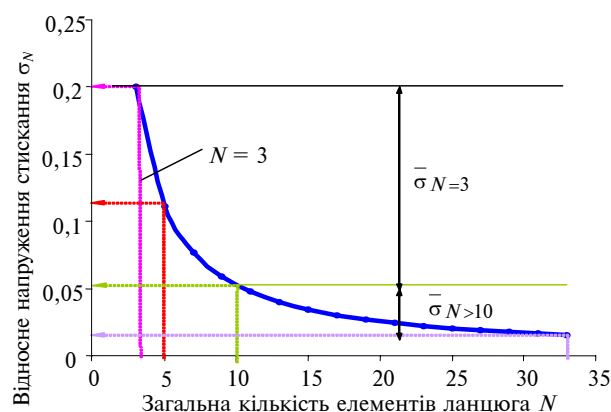


Рис. 4. Відносне напруження стискання ланцюга залежно від загальної кількості елементів

З рис. 4 видно, що:

- різна загальна кількість елементів ланцюга неоднаково впливає на напруження стискання; так, при кількості загальних елементів  $N > 10$  зміна відносного напруження стискання відбувається менш інтенсивно порівняно з  $N < 10$ ;
- кількісна оцінка впливу загальної кількості елементів показує, що при  $N = 5$  напруження стискання, необхідне для забезпечення переміщення лівої границі на  $u$ , у 1,8 раза менше за напруження стискання при  $N = 3$ , а при збільшенні елементів від 10 до 20 відносне напруження стискання зменшується в 1,95 раза;
- серед ланцюгів, які складаються з частинкок коксової пересипки реальної печі Ачессона, більш ефективними будуть ті, кількість

елементів в яких у напрямку поширення електричного струму, не перевищує десяти.

З розрахунків інтенсивності зміни відносного напруження стискання  $\left(\frac{d\sigma_N}{dN}\right)$  встановлено, що при  $N > 5$  інтенсивність зміни відносного напруження становить менше 1 %. При збільшенні загальної кількості елементів більше п'яти відбувається помітне зменшення впливу напружень стискання на контактний опір і цим впливом можна нехтувати при розрахунках. Для перевірки використаної в даній статті методики розрахунку зусиль стискання створено експериментальну установку із застосуванням сипучого матеріалу — зернової пересипки.

### Висновки

Проведений аналіз спрощеної механічної моделі окремого ланцюга елементів сипучого

тіла у вигляді пружних прямокутників, сполучених між собою прошарками, дав можливість виявити залежність між кількістю елементів і прошарків та напруженням стискання, яке виникає в ланцюгу при заданому переміщенні вільної границі. Отриманий математичний вираз зв'язує відносне напруження і кількість прямокутних елементів та прошарків у ланцюгу.

Результати дослідження дають змогу оцінити вплив кількості елементів у ланцюгу на величину напруження стискання і на зміну електричного контактного опору внаслідок такого стискання. Контактний опір у коксовій пересипці нагрівальної печі Ачесона є визначальним фактором ефективності тепловиділення при графітації заготовок.

Отримані результати є передумовою створення числової теплоелектричної та термопружної моделі коксової пересипки промислової печі Ачесона.

М.Ю. Литвинчук, І.Л. Шилович

#### УПРОЩЕННАЯ МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЦЕПИ ЭЛЕМЕНТОВ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА

Рассмотрена упрощенная модель отдельного участка слоя сыпучего материала, которая представлена в виде цепи упругих элементов двух видов (упругий элемент, прослойка). Установлено, что в цепи из упругих элементов и прослоек интенсивность изменения напряжения сжатия существенно уменьшается при определенном количестве элементов, начиная с которого можно пренебречь влиянием на контактное сопротивление напряжения сжатия.

M.Yu. Litvinchuk, I.L. Shilovich

#### A SIMPLIFIED MECHANICAL MODEL OF A CHAIN OF GRANULATED MATERIAL ELEMENTS

Our study focuses on a simplified mechanical model of the separate part of a granulated material layer. This layer is represented as a chain of two kinds of elastic elements (elastic element, interlayer). The intensity of compression stress changing considerably decreases in the chain with elastic elements and interlayers at a certain quantity of elements. The influence of the compression stress on a contact resistance can be neglected starting from this quantity.

1. Кузнецов Д.М., Фокин В.П. Процесс графитации углеродных материалов. Современные методы исследования. — Новочеркасск: ЮРГТУ, 2001. — 132 с.
2. Знамеровский В.Ю. Математическое моделирование процесса графитации. — М.: Металлургия, 1994. — 64 с.
3. Санников А.К., Сомов А.Б., Ключников В.В. и др. Производство электродной продукции — М.: Металлургия, 1985. — 130 с.
4. Панов Е.Н., Литвинчук М.Ю., Шилович И.Л. Повышение эффективности подвода электрической мощ-

ности в печах графитации // Уголь Украины. — 2007. — №10. — С.25–28.

5. Гальперин Б.С. Непроволочные резисторы. — Л.: Энергия, 1968. — 158 с.
6. Клейн Г.К. Строительная механика сыпучих тел / Пер. с англ. — М.: Стройиздат, 1977. — 256 с.
7. Янко Э.А. Аноды алюминиевых электролизеров. — М.: Изд. дом “Руда и металлы”, 2001. — 672 с.
8. Писаренко Г.С. Опір матеріалів: Підр. для вузів. — К.: Вища шк., 1988. — 304 с.

Рекомендована Радою  
теплоенергетичного факультету  
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції  
16 червня 2009 року