ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА КЕРУВАННЯ

УДК 519.226.873

М.В. Андрєєв

ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ У ЗАДАЧАХ ВИБОРУ СТРАТЕГІЙ НЕДОСКОНАЛОГО КОНТРОЛЮ

Вступ

Контроль будь-якої системи є профілактичним засобом виявлення неефективності її функціонування (неполадки) і проводиться порізному, залежно від мети, доступної системної інформації та умов невизначеності, в яких функціонує система. На базі системної інформації за заданих умов невизначеності будується математична модель системи у вигляді деякого стохастичного процесу. Критерієм оптимальності стратегії контролю є економічний критерій, який характеризує вартість реалізації стратегії контролю і штрафні санкції за несвоєчасне виявлення неполадки системи або базується на асоціативних штрафних вартостях та імовірності успішного виявлення існуючої неполадки.

Залежно від можливостей контрольних засобів контроль системи може визначати її стан однозначно (ефективний він чи неефективний), а може лише з деякою імовірністю успішно виявити існуючу неполадку. У першому випадку мають справу з досконалим, а в другому – з недосконалим контролем. Результати стосовно побудови стратегій досконалого контролю розглядаються у статтях [1, 2–6].

У даній статті наводиться огляд результатів, які визначають можливості побудови моделей прийняття рішень для визначення двох стратегій недосконалого контролю: контролю деякої системи із заданою функцією розподілу неполадки або відомим фактом, що має місце тільки зростаюча інтенсивність появи неполадки, і контролю стохастичної поведінки якісних та дефектних виробів у багатоетапному виробничому процесі за заданих біноміальних розподілів обробки виробів та їх контролю.

Постановка задачі

Мета даної статті полягає в з’ясуванні можливості застосувань методології теорії оптимальних рішень у задачах недосконалого контролю, в яких, по-перше, явно виражений фактор стохастичної невизначеності у вигляді стохастичної природи контрольованого процесу і збурень зовнішнього середовища, які впливають на нього, і по-друге, те, що проведення недосконалого контролю не дає однозначного (а лише в імовірнісних термінах) результату щодо стану даного процесу. Специфіка задач недосконалого контролю зумовлює вибір простих моделей рішень з двома альтернативами: проводити чи не проводити недосконалий контроль у заданому стані. Стратегія недосконалого контролю в запланованих станах контрольованого процесу визначається багатоетапним процесом рішень. У даній статті проводиться системний аналіз побудови багатоетапних процесів рішень на базі методів теорії оптимальних рішень з використанням досліджень, проведених у статтях [7, 8].

Критерій економічного застосування недосконалого контролю

Проблема стохастичного контролю пов’язується із системами, для яких існують штрафні санкції, зумовлені несвоєчасним виявленням неполадок різного характеру. У військових системах штрафи можуть появитись при неоперативній готовності системи, в індустріальних системах вони виражаються витратами, пов’язаними з кількістю виготовлених бракованих виробів. Тому резонно розглядати контроль у часі з метою уникнення цих штрафів. Однак операції контролю можуть дорого коштувати, і, крім того, під час контролю система часто стає неефективною. Ці обставини в подальшому можуть ускладнитись, якщо контроль не виявить існуючої неполадки системи. Помилка другого роду, при якій система з неполадкою вважається прийнятною, тут не розглядається. Виникає питання, яким – бажаним чи раціональним – є правило прийняття рішень, що базується на відносних вартостях витрат за несвоєчасне виявлення неполадки та імовірності успішного виявлення існуючої неполадки, коли б проведення контролю було б доцільним. У публікаціях [1–6] критерій, що розглядатиметься далі, використовується для досконалого контролю.

За умов, запропонованих в [1], припускається, що кожна операція контролю коштує c_1, а одиниця часу, проведеного між появою неполадки та її виявленням – c_2. Термін служби системи береться скінченним $[0,T]$, тобто час, протягом якого, наприклад, устаткування стає застарілим і непридатним для подальшого ви-

користання, заміняється новим. Прикладом такої системи може бути снаряд з ядерною головкою. В цьому випадку ядерний матеріал через деякий фіксований проміжок часу стає непридатним і потребує заміни. В цей час головку демонтують, а залишковий ядерний матеріал утилізують. Однак протягом даного проміжку часу може з'явитись шанс неполадки, наприклад, у зарядному або вибуховому механізмах, що призведе до неефективності системи. За таких припущень наведені нижче необхідні і достатні умови недосконалого контролю гарантують, що контроль проводити недоцільно, якщо розподіл часу випадкової неполадки явно відомий. У випадку ж, коли відомо тільки, що устаткування є зношеним, тоді існує достатня умова непроведення контролю.

Теорема ([7]). Нехай $F(x)$ — кумулятивна функція розподілу випадкового часу відмови устаткування і $0 < p \le 1$ — ймовірність успішного виявлення існуючої неполадки при проведенні однієї операції контролю. (Якщо $p = 0$, то, очевидно, найкращим буде рішення не проводити контроль.) Тоді, якщо

$$\max_{0 \le x \le T}(T - x)F(x) \le c_1/c_2 p, \qquad (1)$$

то оптимальним буде рішення не проводити контролю взагалі. І навпаки, якщо це співвідношення не виконується, то оптимальним буде рішення проводити контроль один або більше разів на відрізку часу $[0, T]$.

Доведення. Для повноти висвітлення проблеми вважається, що $F(0)$ не дорівнює нулю, що могло б інтерпретуватись у сенсі розуміння того, що навіть нова частина устаткування може миттєво відмовити.

Наразі, якщо не заплановано контролю на відрізку $[0, T]$, то очікувані витрати від такого рішення набувають вигляду

$$c_2 T F(0) + c_2 \int_{0^+}^{T} (T - t)\, dF(t). \qquad (2)$$

З іншого боку, якщо планується одна операція контролю на відрізку $0 \le x \le T$, то очікувані витрати від такого рішення, як легко переконатись, набувають вигляду

$$c_1 + c_2 F(0)\,[\,px + (1 - p)T\,] +$$

$$+ c_2 \int_{0^+}^{x} [\,p(x - t) + (1 - p)(T - t)\,]\, dF(t) +$$

$$+ c_2 \int_{x}^{T} (T - t)\, dF(t) = c_1 + c_2 F(0)\,[\,px + (1 - p)T\,] +$$

$$+ c_2 \int_{0^+}^{x} [(T - t) - p(T - x)]\, dF(t) +$$

$$+ c_2 \int_{x}^{T} (T - t)\, dF(t) = c_1 + c_2 F(0)\,[\,px + (1 - p)T\,] +$$

$$+ c_2 \int_{0^+}^{T} (T - t)\, dF(t) - c_2 p(T - x)[F(x) - F(0)] =$$

$$= c_1 + c_2 F(0) T - c_2 p(T - x)\, F(x) +$$

$$+ c_2 \int_{0^+}^{T} (T - t)\, dF(t). \qquad (3)$$

Отже, рішення не проводити контроль має перевагу над рішенням проводити одну операцію контролю на відрізку $[0, T]$, якщо (витрати (3) перевищують витрати (2)) для всіх x на відрізку $[0, T]$ виконується нерівність

$$c_1 - c_2 p(T - x)F(x) \ge 0, \qquad (4)$$

що еквівалентно такій нерівності:

$$c_1 / p c_2 \ge \max_{0 \le x \le T} F(x)(T - x). \qquad (5)$$

Наслідок. За припущення, що явний вигляд функції розподілу часу неполадки невідомий, але з фізичних спостережень видно, що має місце зростаюча інтенсивність появи неполадки (див. посилання [10]) і якщо очікуваний час неполадки μ перевищує T, то достатньою умовою непроведення контролю як оптимального рішення є нерівність

$$\max_{0 \le x \le T}[(T - x)(1 - e^{-x/\mu})] \le c_1/c_2 p. \qquad (6)$$

Доведення нерівності (6) безпосередньо випливає з нерівності (1), оскільки при тому, що функція розподілу $F(x)$ має зростаючу інтенсивність появи неполадки, легко показати (див. [10]), що $F(x) \le 1 - e^{-x/\mu}$ для $x \le \mu$. Дійсно, нехай випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$ із середнім значенням μ. Для функції розподілу $\bar{F} = 1 - F$, $\ln \bar{F}(X)$ є увігнутою вниз функцією, і згідно з нерівністю Йєнсена маємо

$$E[\ln \bar{F}(X)] \le \ln \bar{F}(\mu).$$

При неперервності функції розподілу F функція $\bar{F}(X)$ рівномірно розподілена на інтервалі $[0,1]$ і

$$E[\ln \bar{F}(X)] = \int_0^1 \ln u\, du = -1 .$$

Отже, отримаємо

$$\ln \bar{F}(\mu) \geq -1 \text{ і } \bar{F}(\mu) \geq e^{-1}.$$

Згідно з лемою 4.2, наведеною в [10], маємо

$$[\bar{F}(x)]^{1/x} \geq [\bar{F}(\mu)]^{1/\mu} \text{ для } 0 < x < \mu ,$$

а тому

$$\bar{F}(x) \geq e^{-x/\mu} \text{ для } x < \mu .$$

Оскільки ж $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, то звідси випливає

$$F(x) \leq 1 - e^{-x/\mu}, \; x \leq \mu ,$$

тобто для монотонно зростаючої функції $F(x)$ інтенсивності появи моменту неполадки має місце порівняння її з функцією експоненціального розподілу як типового розподілу для опису безвідмовного функціонування складного устаткування.

Приклад. Розглянемо випадок, коли імовірнісний розподіл неполадки невідомий, але належить до класу розподілів із зростаючою інтенсивністю неполадки, область використання стратегії непроведення контролю залежить від параметра μ — очікуваного часу до появи неполадки (у розглянутому випадку $\mu = T$). Виявляється, що коли очікуваний час до неполадки дорівнює 20 одиниць, то стратегія непроведення контролю економічно (за витратами) гарантована, якщо величина $c_1/c_2 p$ перевищує 0,885. Це той випадок, наприклад, коли навіть $c_2 = 2c_1$, тобто штраф за одиницю часу за невиявлення неполадки удвічі більший за вартість кожної операції контролю, і p (імовірність успішного виявлення існуючої неполадки) дорівнює 5/9.

У [5] досліджено оптимальні (за критерієм мінімальних очікуваних витрат) стратегії досконалого контролю стохастичної моделі, що описується процесом марковського відновлення з малою імовірністю поглинання, і отримано асимптотичний експоненціальний вираз функції розподілу часу до появи неполадки для цієї моделі, що дає можливість на основі наслідку з теореми провести спрощений аналіз і дослідити правила прийняття рішень стосовно вибору асимптотично-оптимальних стратегій недосконалого контролю цієї моделі.

Зауваження. Твердження теореми і наслідку з неї узгоджуються з нашою інтуїцією, оскільки при зростанні витрат на контрольні операції рішення не проводити контроль стає більш привабливим. Аналогічно цьому, як тільки вартість штрафу за одиницю часу несвоєчасного виявлення неполадки c_2 або імовірність виявлення неполадки дуже зменшуються, значення нашого рішення стосовно проведення будь-якого виду контролю стає незначним.

З умови (4) також випливає, що стратегія непроведення контролю має більшу перевагу над стратегією проведення двох операцій контролю на відрізку $[0,T]$, наприклад, в точках x_1, x_2 при $x_2 > x_1$. Цей висновок з'являється після того, як одна операція контролю проводилась у точці x_1 і в результаті чого не було виявлено неполадки, тобто єдина операція контролю в точці $x_2 > x_1$ при використанні умови (4) гарантована тоді і тільки тоді, коли існує нерівність

$$c_1 - c_2 p[(T - x_1) - (x_2 - x_1)]G(x_2 - x_1) < 0, \quad (7)$$

де

$$G(y) = \begin{cases} F(x_1)(1-p), \text{якщо } y = 0; \\ [F(x_2) - F(x_1)]/[1 - F(x_1)], \text{якщо } y = x_2 - x_1 > 0. \end{cases}$$

Але з нерівності (7) випливає, що

$$c_1 - c_2 p(T - x_2)F(x_2) < 0, \quad (8)$$

оскільки

$$F(x_2) > [F(x_2) - F(x_1)]/[1 - F(x_1)] ,$$

то нерівність (8) суперечить припущенню (4) і еквівалентній йому нерівності (5). Отже, звідси робимо висновок, що стратегія непроведення контролю має перевагу над стратегією проведення двох операцій контролю. Аналогічно, якщо дотримуватись такої ж аргументації, то з умови (1) буде випливати, що стратегія непроведення контролю в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(x_1 < x_2 < \ldots < x_n)$ має перевагу над стратегією проведення n операцій контролю в цих самих

точках для довільних цілих значень n. Для цього слід проводити аналіз рішень, виходячи з умови (4) і нерівностей (7) і (8) для пар точок $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$. Навпаки, якщо для деякого x з відрізка $[0, T]$ умова (4) не виконується, то контроль у точці x дає нижчу очікувану вартість, ніж стратегія непроведення контролю. Таким чином, оптимальна стратегія буде стратегією проведення контролю, а саме проведення однієї або більше операцій контролю на відрізку $[0, T]$. Аналогічно, продовжуючи таку ж аргументацію, з умови (1) отримуємо, що стратегія проведення контролю в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(x_1 < x_2 < \ldots < x_n)$ має перевагу над стратегією непроведення n операцій контролю в цих точках для довільних цілих значень n. Для цього слід проводити аналіз рішень, виходячи з невиконання умови (4) і нерівностей (7), (8) для пар точок (x_1, x_2), $(x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$.

У [2, 3] досліджено оптимальні (за критерієм мінімальних очікуваних витрат) стратегії проведення досконалого контролю пуассонових і пуассонових із зсувом моделей та отримано в явному вигляді функції розподілу моментів появи неполадки для цих моделей, що дає змогу зацікавленому читачу на основі результату теореми або її наслідку провести аналіз умов теореми або її наслідку та дослідити правила прийняття рішень стосовно вибору оптимальних стратегій недосконалого контролю цих моделей.

Недосконалий контроль багатоетапного виробничого процесу

Розглянемо стохастичну поведінку якісних і дефектних виробів у багатоетапному виробничому процесі за припущення застосування недосконалого контролю. У серійному виробничому процесі з кількома етапами обробки виробів потенційно можливе встановлення контрольних пунктів. Введемо основне і нове припущення про те, що такий контроль не обов'язково є досконалим, при якому взагалі якісні та дефектні вироби можуть вилучатися, а також дефектні вироби можуть не вилучатися і проходити на наступний виробничий етап. Суть полягає в тому, щоб описати на імовірнісному рівні поведінку якісних і дефектних виробів на кожному етапі як функцію випадковості обробки виробів та їх контролю.

Як приклад таких виробничих процесів можна розглядати багатоетапне виробництво простих напівпровідникових пристроїв або кінескопів. Необхідність проведення контролю пов'язується з щонайшвидшим виявленням дефектного виробу, аби уникнути трати подальшого часу і грошових витрат. Після кожного контролю більшість дефектних виробів буде вилучатись або направлятись на переробку (якщо це можливо) і більше якісних виробів потраплятимуть на подальшу обробку. Але оскільки контроль недосконалий, то виникатимуть помилки двох типів: деякі якісні вироби будуть класифікуватись дефектними і вилучатись (помилка першого типу), а деякі дефектні вироби будуть класифікуватись як якісні і направлятись на подальшу обробку (помилка другого типу). Тому розглядатимемо опис стохастичної поведінки такого роду виробничих процесів.

Такий опис стану процесу можна аналізувати незалежно від розглянутих витрат. Однак будь-яке використання моделі прийняття рішень вимагатиме, щоб цільова функція описувалась витратами в термінах ефективності недосконалого контролю, а також у термінах отриманих змінних стану. У [8] наведено результат з використанням двох різних оптимізаційних моделей. У статтях [11, 12] підхід контрольної карти свідчить про поточний стан процесу. В [9] показано, що при використанні методу динамічного програмування, біноміальні розподіли та пропорційні витрати, пов'язані з кількістю контрольних операцій, приводять до досить простої оптимальної структури витрат і стратегії контролю. У [8] є посилання на більш загальну стохастичну і вартісну структури, для яких подано загальну обчислювальну схему. В обох останніх статтях наведено реальні числові приклади для ілюстрації обчислювальних методів. У [8] показано, що навіть коли дослідження не вкладаються в алгоритм оптимізації, то результати являють собою зручну і економну модель для опису і прогнозу рівня виробничого запасу в багатоетапному виробничому процесі.

Низку статей [13–19] присвячено різним аспектам багатоетапного серійного виробничого процесу, який підлягає досконалому контролю, включаючи виправлення і невиправлення дефектів, численні дефекти, обмежені контрольні зусилля, різноманітність структур витрат та байєсове вивчення параметрів процесу.

В іншому напрямку кілька досліджень було здійснено стосовно стохастичної поведінки частково спостережуваних динамічних стохастичних процесів, для яких поточна проблема наводиться як приклад. Відомі підходи до статистичного прогнозування (наприклад, [20—22]) часових рядів, і в деяких випадках — до адаптації параметрів моделі [23, 24]. Байєсові методи використовуються для вивчення частково спостережуваних або прихованих процесів у [14, 16, 19, 24]. Інші дослідження [25, 26] стосуються висновку про спорадично швидші, ніж регулярно змінні в часі процеси.

Побудова загальної моделі виробничого процесу

Основне структурне припущення стосовно якісних і дефектних виробів полягає в тому, що виробничий процес може перетворювати якісний виріб у дефектний, а дефектний виріб залишається дефектним (хіба що стає ще більш дефектним) протягом всього виробничого процесу. Інше, значно слабше попереднього, припущення полягає у відсутності виробничих витрат під час обробки виробів; контрольний пункт є тільки тим місцем, на якому вироби вилучаються з виробничого потоку. Ці припущення означають, що необхідно лише визначити, в який спосіб якісні вироби перетворяться в дефектні під час обробки виробничим процесом.

Нехай $\tilde{x}_k$ — число якісних виробів на вході k-го етапу процесу, $\tilde{y}_k$ — число дефектних виробів на вході k-го етапу процесу, де $k = 1, 2, \ldots, N$, знаком ~ позначено випадкову величину, і нехай $\tilde{x}'_k$ і $\tilde{y}'_k$ позначаються відповідно якісні і дефектні вироби на виході k-го етапу виробничого процесу. Якщо також визначити $\tilde{R}_k(m)$ як число якісних виробів, вилучених на k-му етапі виробничого процесу, і m — число якісних виробів, які надійшли, то можна записати

$$\begin{aligned} \tilde{x}'_k &= \tilde{R}_k(\tilde{x}_k), \\ \tilde{y}'_k &= \tilde{x}_k + \tilde{y}_k - \tilde{R}_k(\tilde{x}_k). \end{aligned} \tag{9}$$

Кожне з цих співвідношень, в свою чергу, перетворюється контрольною операцією. Наразі припускається, що недосконалий контроль має місце на кожному етапі; вдалим визначенням параметрів у функціях контролю можна також при необхідності позначити відсутність контролю або наявність досконалого контролю, якщо виникає потреба. Нехай $\tilde{S}_k(m,n)$ — кількість якісних виробів, що пройшли k-й контрольний пункт, і $\tilde{T}_k(m,n)$ — кількість дефектних виробів, якщо m якісних і n дефектних виробів пройшли контроль. Тоді число виробів кожного типу, що надійшло до ($k+1$)-го етапу виробничого процесу задається співвідношеннями

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= \tilde{S}_k(\tilde{x}'_k, \tilde{y}'_k), \\ \tilde{y}_{k+1} &= \tilde{T}_k(\tilde{x}'_k, \tilde{y}'_k), \end{aligned} \tag{10}$$

де величини $\tilde{x}'_k$, $\tilde{y}'_k$ знаходяться із співвідношень (9). Конкретний стохастичний опис усіх змінних стану залежить, як правило, від припущень, зроблених відносно $\tilde{R}_k(\cdot)$, $\tilde{S}_k(\cdot,\cdot)$, $\tilde{T}_k(\cdot,\cdot)$ і значень або імовірнісного розподілу $\tilde{x}_1$ і $\tilde{y}_1$. Далі проводиться специфікація характеристик цього процесу, яка приводить до стану, що легко піддається опису.

Біноміальні моделі обробки виробів і їх контролю

Нехай $\tilde{x}_1 = x_1$ і $\tilde{y}_1 = 0$. Як буде видно пізніше, це припущення може бути послаблено. Перший етап виробничого процесу можна використати в реальній проблемі генерування невизначеності числа якісних і дефектних виробів на вході та до подальшого функціонування виробничого процесу, тому не існує втрати загальності в цьому припущенні. Також припускається, що процес обробки виробів і їх контролю підлягають біноміальному розподілу, так що кожний виріб має шанс мати "успіх", і цей шанс задається постійною додатною імовірністю, не залежною від інших виробів. У подальшому припускається, що контроль якісних виробів не залежить від кількості дефектних виробів, і навпаки.

Хоч наведені вище припущення прості, вони не повністю реалістичні. У багатьох виробничих процесах, наприклад виробництва електронних приладів, має враховуватись фізична поведінка процесу. При цьому імовірність успіху може повільно змінюватись впродовж часу, а незалежність якості від виробу до виробу залишатиметься реалістичною. Дійсно, важко знайти реальний процес, де виявлення де-

фектного виробу при нормальному функціонуванні виробничого процесу впливає на імовірність того, що наступний виріб буде також дефектним, саме така умова залежності якості виробів один від одного не може існувати в припущеннях для використання біноміальних розподілів.

Наведені припущення ведуть до визначень біноміальних моделей обробки виробів та їх контролю

$$\tilde{R}_k(m) \sim p(x \mid m, r_k) = \binom{m}{x} r_k{}^x (1 - r_k)^{n-x},$$

$$x = 0, \ldots, m, \tag{11}$$

$$\tilde{S}_k(m,n) \sim p(\cdot \mid m, s_k),$$

$$\tilde{T}_k(m,n) \sim p(\cdot \mid n, t_k),$$

де r_k, s_k і t_k – відповідно біноміальні імовірності якісної обробки виробу, отримання якісного та дефектного виробів. За цими визначеннями можна знайти сумісний розподіл $\tilde{x}_k$ і $\tilde{y}_k$ на кожному етапі, припускаючи, що не існує інформації щодо неполадки системи, якщо вона виникає. Вводиться зручне загальне позначення $D(x|S) \equiv P\{\tilde{x} = x|S\}$, де S – деякий стан інформації, описаний множиною подій, а саме конкретними значеннями інших випадкових величин у процесі. Важливим станом інформації є початковий стан, що задається апріорі до початку процесу, який позначається E.

У цих термінах, якщо припустити, що сумісний розподіл вхідних величин на k-му етапі має вигляд

$$D(x_k\, y_k | x_1 E) =$$

$$= p(x_k | x_1, p_k) p\left(y_k | x_1 - x_k, \frac{q_k}{1 - p_k} \right), \tag{12}$$

то можна показати, що вхідні величини на $(k+1)$-му етапі описуються розподілом такого самого вигляду, а саме

$$D(x_{k+1}\, y_{k+1} | x_1 E) =$$

$$= p(x_{k+1} | x_1, p_{k+1}) p\left(y_{k+1} | x_1 - x_{k+1}, \frac{q_{k+1}}{1 - p_{k+1}} \right), \tag{13}$$

де два параметри p, q визначаються в часі рекурентними співвідношеннями

$$p_{k+1} = s_k r_k p_k,$$
$$q_{k+1} = t_k (q_k + (1 - r_k) p_k). \tag{14}$$

Доведення можна здійснити принаймні у два способи. Прямий, але дещо громіздкий метод доведення дає змогу спочатку виписати сумісний розподіл шести змінних, тобто $D(x_{k+1} y_{k+1} x'_k y'_k x_k y_k || x_1 E)$, з подальшим сумуванням по останніх чотирьох змінних. Цей сумісний розподіл величин x_{k+1}, y_{k+1} обчислюється операцією множення сумісного біноміального апріорного розподілу $D(x_k y_k | x_1 E)$, заданого виразом (12); три умовні біноміальні розподіли $D(x'_k | x_k x_1 E)$, $D(x_{k+1} | x'_k x_1 E)$ та $D(y_{k+1} | y'_k, x_1 E)$ задані формулою (11); умовний розподіл $D(y'_k | x_k y_k x'_k x_1 E)$ є виродженим на $x_k + y_k - x'_k$, оскільки згідно з виразом для моделі (9) $y'_k = x_k + y_k - x'_k$. Після отримання виразів умовних розподілів змінних стану (12) і (13) вираз (14) для біноміальних параметрів p_{k+1}, q_{k+1} визначається рекурентно.

Альтернативне доведення (див. посилання в [8]) починається з визначення двох адитивних змінних стану на кожному етапі, що являють собою кількості якісних і дефектних виробів, які вже вилучені з виробництва. Оскільки кожен виріб має бути в одному і тільки в одному з чотирьох станів на кожному етапі, то можна використати марковську модель для опису траєкторії поведінки виробу впродовж виробничого процесу. Знаходження маргінального сумісного розподілу $\tilde{x}_k$ і $\tilde{y}_k$ сумуванням двох інших змінних стану приводить до добутку біноміальних розподілів, заданих співвідношенням (13), а запис перехідних імовірностей у марковському процесі записується рекурентною формулою (14).

Оскільки $\tilde{x}_1 = x_1$ і $\tilde{y}_1 = 0$ можна записати сумісним біноміальним розподілом (13) з $p_1 = 1$ і $q_1 = 0$, то індукція показує, що цей розподіл має місце для всіх k. Особливо цікавим є те, що оскільки тільки два параметри в додаванні до x_1 потребують подання всього сумісного розподілу на кожному етапі, то повний розподіл може принести таку саму інформаційну вартість як одні очікувані значення цих параметрів. Дійсно, параметри відрізняються від відповідних середніх значень лише мультиплікативним членом x_1.

Член q_k вибраний як рекурсивний параметр, а не умовна імовірність $q_k/(1-p_k)$, оскільки вона є імовірністю успіху в маргінальному розподілі $\tilde{y}_k$, і це призводить за рахунок симетрії і простоти до рекурсії. Для уникнення математичних труднощів необхідно вдаватись до виконання умови

$$p_k + q_k \leq 1 \tag{15}$$

на кожному етапі. Фізично можливими є процеси росту для деякого етапу, як, наприклад, виробництво у тваринництві живої ваги великої рогатої худоби або розширене відновлення в реакторах ядерного палива, але це вносить додатково формулювання нових проблем застосування теорії рішень у задачах оптимальної зупинки, які розглядаються в [27]. Процеси, для яких можна використати біноміальну модель, мають три біноміальні імовірності r_k, s_k і t_k (див. (11)). Оскільки $p_{k+1}+q_{k+1} = p_k[r_k s_k + (1-r_k)t_k] + q_k t_k$ і $p_1 + q_1 = 1$, то звідси випливає, що умова (15) задовольняється для всіх k.

Для демонстрації основних властивостей результату, про які було вже сказано, наводиться кілька припущень, послаблення яких і модифікація рекурентних формул (14) або розподілів (13) приводять до бажаного результату. Кожна з цих модифікацій вводиться окремо, щоб мінімізувати плутанину.

Прийняття рішень щодо проведення недосконалого контролю

Для даної моделі виробничого процесу розглядається модель рішень, згідно з якою приймається рішення контролювати чи не контролювати виробничий процес після кожного етапу, визначаючи рішення:

$$\begin{aligned} d_k &\equiv 1, \text{ якщо контроль проводиться на етапі } k, \\ d_k &\equiv 0, \text{ якщо контроль не проводиться на етапі } k. \end{aligned} \tag{16}$$

Проведення недосконалого контролю характеризується такими параметрами: g_k – темп відбраковки якісних виробів під час контролю на етапі k, h_k – темп відбраковки дефектних виробів під час контролю на етапі k.

В результаті біноміальні імовірності виробничого процесу можна записати у вигляді $s_k = 1 - d_k g_k$ і $t_k = 1 - d_k h_k$, що дає можливість переписати рекурсивні параметри p_{k+1}, q_{k+1} в рекурентних співвідношеннях (14) таким чином:

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= (1-d_k g_k) r_k p_k, \\ q_{k+1} &= (1-d_k h_k)(q_k + (1-r_k)p_k). \end{aligned} \tag{17}$$

Це робить рекурсивні параметри виробничого процесу на кожному етапі функцією всіх попередніх рішень щодо недосконалого контролю і підтримує природу сумісного розподілу змінного стану цього процесу.

Витрати виробничого процесу при обробці і недосконалому контролі

Раніше припускалось, що час вилучення виробів із виробничого процесу появляється протягом контрольних операцій. У багатьох реальних випадках оголошуються деякі виробничі неполадки при обробці виробів з метою негайного вилучення неякісних виробів. Зокрема, у прикладі з напівпровідниковими виробами, наведеному вище, деякі огріхи у виробах на ранній стадії виробництва можна виявити інструментально, тестуванням їх електричних властивостей, а поломки просто помітити і негайно вилучити з виробництва. У зв'язку з цим виникає необхідність додавання до моделі додаткових випадкових членів, щоб врахувати наведені витрати. Можна запропонувати кілька альтернативних припущень, таких, як витрати, що характеризують відсоток дефектних виробів, нових дефектних виробів або всіх дефектних виробів. Як приклад, розглядається останнє припущення, оскільки в багатьох випадках здатність виявлення дефектного виробу не залежить від того, чи оброблений раніше виріб був якісним чи дефектним. Це також трохи змінює модель, оскільки наразі вся кількість дефектних виробів після обробки не є фіксованою величиною $x_k + y_k - x'_k$, а швидше є випадковою величиною з цим значенням як верхньої грані. Всеодно, чи додати ще один біноміальний розподіл і тим самим ще раз провести сумування до отримання вигляду сумарного розподілу, а чи визначити дві нові проміжні змінні, які мають такі самі характеристики, як і початкові $\tilde{x}_k$ і $\tilde{y}_k$, при яких можна отримати аналогічні результати так само, як і раніше.

Якщо f_k визначити як імовірність того, що виріб на вході є або якісним, або дефектним і на k-му етапі виробничого етапу не буде виявлено неполадки, та припустити, що виявлення неполадок виникає незалежно від прихованих дефектів, позначених імовірністю неполадки $1-r_k$, то рекурентні співвідношення (14) можна модифікувати до вигляду

$$p_{k+1} = s_k r_k f_k p_k,$$
$$q_{k+1} = t_k f_k (q_k + (1-r_k)p_k), \tag{18}$$

які знову зберігають природу сумісного біноміального розподілу описаного процесу. Сюди легко включити дві різні катастрофічні імовірності неполадки для якісних і дефектних виробів. Різні види припущень щодо дефективності можуть бути використані на різних етапах залежно від характеристик реального процесу.

Інформація, базована на кількості виробів, що залишається

Моделі, які розглядались до цих пір, використовуються у відкритому контурі контролю, в якому тільки на самому початку кількість виробів x_1 припускається відомою, що дає змогу прийняти рішення на самому початку для всіх етапів виробничого процесу. Точніше, на кожному етапі необхідно аналізувати принцип оптимальності стратегії контролю: *якщо виконання контролю коштуватиме надто дорого, то слід рішення стосовно контролю на кожному етапі відстрочити до тих пір, поки не буде отримано більш точну інформацію про результати обробки і контролю.* У [28] припускається, що в реальному процесі інформація про загальну кількість виробів, що залишається на кожному етапі, доступна зразу ж після закінчення цього етапу. У недосконалому контролі ця відома загальна кількість виробів містить недосконало відому кількість якісних і дефектних виробів. Найкраща поточна інформація задається сумісним розподілом двох кількостей виробів на кінець етапу обробки і контролю. Нехай n_k визначається як відома загальна кількість якісних і дефектних виробів, що знаходиться в процесі на k-му етапі, і припускається, що цю інформацію введено раніше

$$D(x_k y_k | S_k) =$$

$$= p(x_k | c_k, p_k) p\left(y_k | c_k - x_k, \frac{q_k}{1-p_k} \right). \tag{19}$$

Тут c_k – відома стала величина і S_k – попередня інформація стосовно події, з якої випливає значення c_k; можливі вибори цих параметрів обговорюються пізніше. Введення додаткової інформації $x_k + y_k = n_k$ приводить до нового сумісного розподілу для $\tilde{x}_k$ і $\tilde{y}_k$:

$$D(x_k y_k | n_k S_k) = p(x_k | n_k, p'_k) =$$

$$= p(x_k | n_k, p'_k) p\left(y_k | n_k - x_k, \frac{q'_k}{1-p'_k} \right), \tag{20}$$

де

$$p'_k = p_k/(p_k + q_k); \; q'_k = q_k/(p_k + q_k).$$

Доведення даного результату проводиться на основі теореми Байєса, при цьому розглядається сумісна подія $\tilde{x}_k = x_k$, $\tilde{y}_k = y_k$ як стан природи з апріорним розподілом $D(x_k, y_k | S_k)$ і функцією вірогідності $D(n_k | x_k, y_k)$, яка є виродженою функцією в точці $x_k + y_k = n_k$ (див. [8]).

Цей загальний результат має місце, якщо загальна кількість виробів, що залишається, спостерігається після кожного етапу, на якому здійснюється контроль. На початку процесу $S_1 = x_1 E$ і $c_1 = x_1$. Якщо загальна кількість виробів спостерігається на кожному етапі, то на k-му етапі $S_k = x_1 n_2 n_3 \ldots n_k E$ і $c_k = n_k$. Отримана в цілому менша інформація часто буде приводити до значення c_k, меншого за поточне значення. Цей результат також дає можливість бути невідомими $\tilde{x}_1$ і $\tilde{y}_1$, а відомою лише має бути їх сума. У цьому випадку $S_1 = n_1 E$, $c_1 = n_1$ і p_1 дорівнює *очікуваному відсотку якісних виробів на початку виробничого процесу.*

Природу інформації S_k і значення сталої величини c_k неважко визначити за інших, більш складних умов. Застосування оптимального контролю або іншої стратегії контролю на кожному етапі, коли така інформація доступна, може бути надто важкою і тому більш витратною справою, але покращення результатів від надто частого контролю може дорого коштувати, особливо, якщо кількість виробів є малою, а контроль має надто високу задану вартість

або ж коли подальша обробка виробів є досить витратною.

Висновки

Визначено правило рішень стосовно проведення недосконалого контролю за економічним (витратним) критерієм оптимальності із заданою функцією розподілу неполадки або відомим фактом, що має місце тільки зростаюча інтенсивність неполадки. Перспективним, на наш погляд, напрямком досліджень у проблематиці побудови моделі рішень у задачах недосконалого контролю є узагальнення розглянутої постановки задачі недосконалого контролю за економічним критерієм оптимальності на клас монотонних стохастичних процесів, які описують функціонування складних систем, стани яких, що знаходяться нижче деякого фіксованого рівня, відповідають ефективним, а вище цього рівня – неефективним станам. Як відомо (див., наприклад, [6]), для узагальненого пуассонового процесу при фіксованому рівні, що розділяє стани фазового простору на ефективні та неефективні, можна визначити функцію розподілу неполадки процесу і, тим самим, вказати необхідні та достатні умови для реалізації недосконалого контролю, а в разі, якщо відома тільки зростаюча інтенсивність неполадки, вказати лише достатні умови.

Розглянуто також стохастичну поведінку якісних і дефектних виробів для біноміальних законів обробки і недосконалого контролю виробів з кількома різними припущеннями стосовно контролю, а також витратами, пов’язаними з виробничим процесом при обробці та недосконалому контролі виробів з додатковою інформацією. Такий самий вигляд поведінки параметрів має місце для ряду інших можливих умов. Цікавим тут є висвітлення двох напрямів подальших досліджень, а саме вивчення поведінки параметрів процесу під час його функціонування та припущення можливості реконструкції виробничого процесу.

Н.В. Андреев

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ВЫБОРА СТРАТЕГИЙ НЕСОВЕРШЕННОГО КОНТРОЛЯ

Рассмотрено правило решений относительно применения стратегии несовершенного контроля, базирующееся на ассоциированных штрафных санкциях и вероятности успешного обнаружения существующей разладки для определения того, выгодна или не выгодна экономически стратегия несовершенного контроля. Приведены необходимые и достаточные условия, если функция распределения разладки известна в явном виде, и достаточные условия, если известна только растущая интенсивность разладки. Рассмотрено также стохастическое поведение качественных и дефектных изделий в многоэтапном производственном процессе при условии применения стратегии несовершенного контроля. Для биномиальных распределений процесса обработки изделий и их несовершенного контроля приведено совместное распределение двух переменных состояния на каждом этапе, которое представляется произведением независимых биномиальных распределений. Ослаблены начальные допущения относительно стратегии контроля, производственных издержек и дополнительной информации, в результате чего представлен модифицированный вид совместного распределения.

M.V. Andreev

OPTIMAL DECISION THEORY IN THE PROBLEMS OF CHOICE OF IMPERFECT INSPECTION STRATEGIES

We consider the decision rule for applying imperfect inspection strategies based on the associated penalty costs and feasibility of successful detecting of the existing failure. We take this approach to determine whether the imperfect inspection policy is efficient. To that end, we present necessary and sufficient conditions for the certain failure distribution function in explicit form, as well as sufficient conditions for the increasing failure rate. By using the imperfect inspection strategies, we consider the probabilistic behavior of high-quality and defective in-process units in the multistage production process. We show the joint distribution of the state variables at each stage for binomial processing and imperfect inspection. This joint distribution is the product of two non-independent binomial distributions. Our null hypotheses on inspection policy, processing losses and additional information turn out to be false. As a result, we propose a modified form of the joint binomial distributions.

1. *Barlow R., Hunter L., Proschan F.* Optimal Checking Procedures // J. Soc. Industr. Appl. Math. – 1963. – **11**, N 4. – P. 1078–1095.
2. *Андреев Н.В.* Анализ некоторых схем контроля за пуассоновским процессом // Кибернетика. – 1968. – **6**. – С. 59–61.
3. *Андреев Н.В., Королюк В.С.* О некоторой схеме контроля за пуассоновским процессом со сносом // Там же. – 1969. – **1**. – С. 72–74.
4. *Іваненко В.И., Королюк В.С.* Об одном методе синтеза оптимальних систем автоматического контроля // Там же. – 1965. – **2**. – С. 98–101.
5. *Королюк В.С., Андреев Н.В.* Контроль процесса марковского восстановления с малой вероятностью поглощения // Там же. – 1989. – **5**. – С. 128–129.
6. *Андрєєв М.В.* Аналіз і синтез оптимальних стратегій контролю складних пуассонових процесів та напівмарковських процесів з поглинанням // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2003. – **4**. – С. 120–132.
7. *Morey R.C.* A Criterion for the Economic Application of Imperfect Inspections // Operations Research. – 1968.– **16**, N 3. – P. 695–698.
8. *Hurst Jr., E.G.* Imperfect Inspection in a Multistage Production Process // Management Science. – 1973. – **20**, N 3. – P. 378–384.
9. *Eppen G.D., Hurst Jr., E.G.* Optimal Location of Inspection Stations in a Multistage Production Process // Ibid. – 1974. – **20**, N 8. – P. 1194–1200.
10. *Барлоу Р., Прошан Ф.* Математическая теория надежности. – М.: Сов. радио, 1969. – 488 с.
11. *Barnard G.A.* Control Charts and Stochastic Processes // J. Roy. Statist. Soc. – Ser. B. – 1959. – **21**. – P. 239–272.
12. *Bather J.A.* Control Charts and the Minimization of Costs // Ibid. – 1963. – **25**. – P. 49–80.
13. *Beightler C.C., Mitten L.G.* Design of an Optimal Sequence of Interrelated Sampling Plans // J. of the American Statistical Association. – 1964. – **59**, N 305. – P. 96–104.
14. *Hurst Jr., E.G.* Bayesian Autoregressive Time Series Analysis // IEEE Transactions on System Science and Cybernetics. – 1968. – **SSC-4**, N 3. – P. 317–324.
15. *Garey M.R.* Optimal Test Point Selection for Sequential Manufacturing Processes // Bell Systems Technical Journal. – 1972. – **51**, N 1. – P. 291–300.
16. *Silver E.A.* Bayesian Modeling of a Non-Stationary Poisson Plans // INFOR. – 1971. – **9**, N 1. – P. 32–45.
17. *White L.S.* The Analysis of a Simple Class of Multistage Inspection Plans // Management Science. – 1966. – **12**, N 9. – P. 685–693.
18. *White L.S.* Shortest Route Models for Allocation of Inspection Effort on a Production Line // Ibid. – 1969. – **15**, N 5. – P. 249–259.
19. *Lindsay G.F., Bishop A.B.* Allocation of Screening Inspections effort – A Dynamic-Programming Approach // Ibid. – 1965. – **10**, N 2. – P. 342–352.
20. *Britney R.R.* Optimal Screening Plans for Non-serial Production Systems // Ibid. – 1972. – **18**, N 9. – P. 550–559.
21. *Brown E.D.* Smoothing, Forecasting and Predicting of Time Series. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.
22. *Box G.E.P., Jenkins G.M.* Time Series Analysis, Forecasting and Control. – Holden-Day, San Francisco, 1970.
23. *Box G.E.P., Tiao G.C.* A Change of Level in a Non-Stationary Time Series // Biometrica. – 1965. – **52**. – P. 181–192.
24. *Little J.D.C.* A Model of Adaptive Control of Promotional Spending // Operations Research. – 1966. – **14**, N 6. – P. 1075–1097.
25. *Chernoff H., Zacks S.* Estimation the Current Mean of a Normal Distribution Which is Subjected to Changers in Time // Annals of Mathematical Statistics. – 1964. – **35**. – P. 999–1018.
26. *Howard R. A.* Dynamic Inference // Operations Research. – 1965. – **13**, N 5. – P. 712–733.
27. *Hochman E.* An Optimal Stopping Problem of a Growing Inventory // Management Science. – 1973. – **19**, N 11. – P. 1289–1291.
28. *Pruzan P.M., Jackson J.T.R.* A Dynamic Programming Application in Production Line Inspection // Technometrics. – 1967. – **9**, N 1. – P. 73–81.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
"Інститут прикладного системного
аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
14 жовтня 2009 року